Spektral Graf Teori Üzerine

Burçin Usta

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Ocak 2024

On Spectral Graph Theory

Burçin Usta

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics and Computer Science

January 2024

Spektral Graf Teori Üzerine

Burçin Usta

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği Uyarınca
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Ayşe Bayar

Ocak 2024

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Burçin Usta' nın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Spektral Graf Teori Üzerine" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oy birliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Ayşe Bayar

İkinci Danışman : -

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Ayşe Bayar

Üye : Prof. Dr. Süheyla Ekmekçi

Üye : Prof. Dr. Mine Turan

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ……..…….. tarih ve ……..…… sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr.

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Ayşe Bayar danışmanlığında hazırlamış olduğum “Spektral Graf Teori Üzerine” başlıklı YÜKSEK LİSANS tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 22/01/2024

Öğrenci Adı Soyadı:
Burçin Usta
İmza:

ÖZET

Bu tezde graf operatörleri, bazı graf çeşitleri, graf yapılarının matris temsilleri ve grafların spektral özellikleri incelenmiştir. Tez sekiz bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin giriş ve amacı, ikinci bölümde tezin konusuyla ilgili literatür araştırması sunulmaktadır. Üçüncü bölümde ise graf teori ile ilgili temel kavramlara yer verilmiştir. Çalışmanın dördüncü bölümünde litaratürde iyi bilinen ve grafların temel bileşenleri olan ağaç, yürüyüş, yol, gezi, çevrim gibi bazı özel yapıları hakkında bilgi verilmiştir. Beşinci bölümde ise graflarda bağlılık incelenmiş, regüler, yönlü ve düzlemsel graf çeşitlerine örnekler verilmiştir. Altıncı bölümde, grafların derece, komşuluk, üzerinde bulunma ve Laplasyan matris temsilleri incelenerek grafların spektral özellikleri hakkında bilgi verilmiştir. Yedinci bölümde k-üniform hipergrafların bir örneği olan 2. ve 3. mertebeden projektif düzlemlerin Laplasyan spektrum özellikleri incelenmiştir. Tezin son bölümü olan sekizinci bölümde tez ile ilgili sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Graf, Hipergraf, Spektral graf, Laplasyan spektrum

SUMMARY

In this thesis, graph operators, some graph types, matrix representations of graph structures and spectral properties of graphs are studied. The thesis consists of eight chapters. The first chapter presents the introduction and purpose of the thesis, the second chapter presents the literature survey related to the subject of the thesis. The third chapter introduces the basic concepts of graph theory. In the fourth chapter, some special structures of graphs such as trees, walks, paths, trips, cycles, etc., which are well known in the literature and are the basic components of graphs, are introduced. In the fifth section, connectivity in graphs is analyzed and examples of regular, directed and planar graph types are given. In the sixth section, the degree, adjacency, incidence and Laplacian matrix representations of graphs are studied and information about the spectral properties of graphs is given. In the seventh chapter, Laplacian spectral properties of finite projective planes of order 2 and 3, which are examples of k-uniform hypergraphs, are analyzed. The eighth chapter, which is the last chapter of the thesis, contains the conclusions and recommendations related to the thesis.

Keywords: Graph, Hypergraph, Spectrum of a graf, Laplacian spectrum

TEŞEKKÜR

Bu yüksek lisans tez çalışmasında bilimsel katkılarını ve desteklerini esirgemeyen, yönlendirmeleriyle bana yardımcı olan değerli hocam Sayın **Prof. Dr. Ayşe Bayar'a** teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışmamda her zaman yanımda olan desteklerini esirgemeyen çok kıymetli annem, babam ve değerli eşime en içten duygularımla teşekkürleri bir borç bilirim.

Burçin Usta

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET ..... **vi**
SUMMARY ..... **vii**
TEŞEKKÜR ..... **viii**
İÇİNDEKİLER ..... **ix**
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ ..... **xi**
ŞEKİLLER DİZİNİ ..... **xii**
1. GİRİŞ VE AMAÇ **1**
2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI **3**
3. TEMEL KAVRAMLAR **8**
4. GRAF OPERATÖRLERİ **12**
4.1. Ağaç 12
4.2. Graflarda Eklem Düğümü ve Eklem Ayrıtı 14
4.3. Temel Çevrim Ve Temel Kesit 17
4.4. Yürüyüş, Gezi, Yol, Çevre 18
5. GRAF ÇEŞİTLERİ **23**
5.1. Graflarda Bağlılık 23
5.2. Düzlemsel Graflar 25
5.3. İki Parçalı Graflar 29
5.4. Hipergraflar 31
6. GRAFLARIN MATRİS TEMSİLLERİ **33**
6.1. Derece Matris 33
6.2. Ayrıt Matris 34
6.3. Komşuluk Matrisi 34
6.4. Üzerinde Bulunma Matrisi 37
7. SPEKTRAL GRAFLAR **40**
7.1. Grafların Spektral Özellikleri 40
7.2. Grafların Spektrumlarının Temel Özellikleri 42
7.3. Spektral Tam Graflar 44
7.4. Belirli Graf İşlemleri Altında Laplas Matrislerinin Spektrumu 45
7.5. Komşuluk ve Laplasyan Özdeğerler 48

7.6. 2. ve 3. Mertebeden Sonlu Projektif Düzlemlerin Laplasyan Spektrumu 52

7.7. 2. Mertebeden Sonlu Projektif Düzlemin Laplasyan Spektrumu 53

7.8. 3. Mertebeden Sonlu Projektif Düzlemin Laplasyan Spektrumu 55

8. SONUÇ VE ÖNERİLER 59

KAYNAKLAR DİZİNİ 60

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
G	Graf
V	Grafın nokta kümesi
E	Grafın kenar kümesi
v	Grafın bir düğümü
T	Ağaç
$diam(G)$	G grafınının çapı
$K_{n,m}$	İki parçalı graf
K_n	Tam graf
$S_{1,n}$	Yıldız graf
$\deg(v)$	v düğümünün derecesi
$\delta(G)$	Minimum dereceli düğüm
$\Delta(G)$	Maksimum dereceli düğüm
$A(G)$	G grafının komşuluk matrisi
$D(G)$	G grafının derece matrisi
$L(G)$	G grafının Laplasyan matrisi
F	G grafının üzerinde bulunma matrisi
$H(G)$	G grafının bir H alt grafı
$PP(2)$	2. dereceden projektif düzlem
$PP(3)$	3. dereceden projektif düzlem

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil		Sayfa
4.1.	10 düğümlü ağaç graf	12
4.2.	11 düğümlü ağaç graf	12
4.3.	5 düğümlü 5 kenarlı bir graf	14
4.4.	$G - V_3$ grafı	14
4.5.	G grafı	15
4.6.	$G - e_1$ grafı	15
4.7.	$G - e_5$ grafı	15
4.8.	Bir G grafından elde edilen 3 ayrı blok: a) blok 1, b) blok 2, c) blok 3	15
4.9.	5 noktalı 7 kenarlı G grafı	17
4.10.	Bir G grafından elde edilen 3 ayrı çevrim: a) çevrim 1, b) çevrim 2, c) çevrim 3	17
4.11.	G den elde edilen uzanımlı bir T ağacı	18
4.12.	5 noktalı 10 kenarlı bir G grafı	19
4.13.	4 noktalı 5 kenarlı bir G grafı	20
4.14.	9 noktalı 12 kenarlı bir G grafı	21
5.1.	Bağlı graf	23
5.2.	Bağlı olmayan graf	23
5.3.	10 noktalı eklem düğümüne sahip bir G grafı	24
5.4.	7 noktalı eklem düğümüne sahip bir G grafı	24
5.5.	G_1 grafı	25
5.6.	G_1 grafının düzlemsel modeli	25
5.7.	G_2 grafı	26
5.8.	G_2 grafının düzlemsel modeli	26
5.9.	K_5 tam grafı	28
5.10.	K_5 tam grafı düzlemsel değildir	28
5.11.	$K_{3,3}$ grafı	28

5.12. $K_{3,3}$ grafı düzlemsel değildir..... 28
5.13. $K_{2,4}$ grafı..... 29
5.14. $K_{3,3}$ grafı..... 29
5.15. $S_{1,13}$ yıldız grafı..... 30
5.16. $S_{1,16}$ yıldız grafı..... 30
5.17. Bir $\mathcal{H}$ Hipergrafı..... 32
5.18. İki parçalı $\mathcal{H}$ Hipergrafı..... 32
6.1. 6 köşeli G grafı..... 33
6.2. 5 düğümlü 5 kenarlı graf modeli..... 34
6.3. 5 düğümlü 6 kenarlı graf modeli..... 35
6.4. Bir uç düğümlü graf modeli..... 37
6.5. 9 noktalı bir G grafı..... 39
7.1. 4 düğümlü 5 kenarlı bir G grafı..... 41
7.2. G grafından elde edilen a) H_1, b) H_2, c) H_3 uzanımlı alt grafları..... 41
7.3. K_6 Tam grafı..... 44
7.4. Bir G grafı..... 46
7.5. G grafına bir kenar eklenmesiyle oluşan graf..... 46
7.6. Fano Düzlemi..... 53

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Graf teorisi, 18. yüzyılın sonlarına doğru matematiksel bir alan olarak ortaya çıkmıştır. İsviçreli matematikçi Euler (1736) yılında "Yedi Köprünün Problemi" olarak bilinen bir sorunu çözmek amacıyla graf teorisi ile ilgili temel kavramları geliştirmiştir. Bu problem, Prusya'nın Königsberg şehrindeki yedi köprüyü bir kez geçerek şehri gezip geri dönmek mümkün mü sorusunu soruyordu. L. Euler, bu problemin çözümünü graf teorisini kullanarak geliştirdiği matematiksel bir modelle yapmayı başarmıştır.

Graf teorisi, topoloji, matris teorisi, grup teorisi, küme teorisi, olasılık ve sayısal analiz ile ilişkili olup nesnelerin çeşitli bağlantılarla bir araya geldiği bir matematiksel alanı temsil eder. Bu bağlantılar, nesneler arasındaki ilişkileri veya etkileşimleri gösterir. Graf teorisi, çeşitli disiplinlerde kullanılan önemli bir araştırma alanıdır.

Matris teorisi ve graf teorisi özellikleri arasında birçok benzerlik vardır. Komşuluk matrisi, üzerinde bulunma matrisi, Laplasyan matrisi, uzaklık matrisi vb. dahil olmak üzere çok sayıda matris, bir graf ile bağlantılıdır. Grafların matris gösterimleri genellikle iletişim, güç dağıtımı ve taşıma gibi ağları analiz etmek için kullanılır. Ayrıca coğrafya, ekonomi, psikoloji, dilbilim, sosyoloji, kimya, nükleer fizik, biyoloji ve mühendislik gibi çok çeşitli disiplinlerde kullanılmaktadır.

Spektral graf teori, graf teorisinin matematiksel bir alt dalıdır ve graf yapılarını matrislerin spektral özellikleri ile inceleyen bir yaklaşımı ifade eder. Bu teori, bir grafı matrisler aracılığıyla temsil eder ve graf yapısının çeşitli özelliklerini bu matrislerin spektral analizi ile incelemeyi amaçlar. Spektral graf teorisi, graf yapısının özdeğerleri ve özvektörleri gibi matematiksel özellikleri üzerinde odaklanır. Ayrıca bir grafın özdeğerleri grafın bağlılığı hakkında önemli bilgiler sunar. 1960 yılından bu yana, spektral graf teorisi araştırmalarında bir artış görülmüştür. İlk araştırmalar çoğunlukla grafların komşuluk matrislerine odaklanmıştır.

Bir grafın Laplasyan matrisinin ikinci en küçük özdeğeri olan ve Fiedler'in 1973'te grafın "cebirsel bağlantılılığı" olarak adlandırdığı değer, matrisin özdeğerleri arasında şüphesiz en önemli olanıdır. Bunun nedeni, bir grafın bağlantı derecesini ölçmek için kullanılabilmesidir. Spektral graf teorisi, karmaşık graf problemlerini matematiksel bir şekilde analiz etmek ve çözmek için güçlü bir araçtır. Bu teori, graf teorisi alanında önemli

bir alt dal olarak kabul edilir ve veri madenciliği, spektral kümeleme, graf kesimi, ve graf teorisi problemlerinin çözümü gibi birçok alanda uygulama olarak kullanılır.

Yapılan literatür taramasında, Türkiye'de grafların spektral özellikleri üzerine nispeten az sayıda çalışma olduğu görülmektedir. Bu çalışmanın amacı, grafların matris gösterimleri ve spektrumlarının hesaplanması için Türkçe bir kaynak sunarak bu alana katkıda bulunmaktır.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Graf teorisi, nesnelerin birbirine bağlı olma durumu üzerine temellenmiş, topoloji, matris teori, grup teori, küme teorisi, olasılık ve nümerik analiz ile ilişkili ayrık matematiğin bir konusudur. Ayrıca kimya, nükleer fizik, biyoloji ekonomi, psikoloji, dilbilim, sosyoloji, bilişim, coğrafya ve mühendislik gibi çeşitli alanlarda da kullanılmaktadır. Kimyasal graf teorisi moleküler problemleri çözmek için graf teorisinin aşikar olmayan uygulamaları ile ilgilenen matematiksel bir daldır.

Graflardan ilk kez Sylvester (1878) yılında söz edilmesine rağmen, graf teorisi fikirleri Leonhard Euler'in (1707-83) Konigsberg köprüleri probleminin çözümünü sunduğu 1735 yılına kadar geri götürülebilir. Graf teorisinin kökenleri, Euler'in Konigsberg köprüleri problemi üzerine yaptığı ve daha sonra eulerian çizge kavramına yol açan çalışmasına kadar uzanmaktadır.

Konigsberg köprüleri problemi, Konigsberg'in yedi köprüsünün her birinden tam olarak bir kez geçen sürekli bir yürüyüş olup olmadığını ve eğer varsa, kapalı bir yürüyüşün bulunup bulunamayacağını sorar. Euler (1735) tarihinde Petersburg Bilimler Akademisi'nde "Konum geometrisiyle ilgili bir problemin çözümü "The solution of a problem relating to the geometry of position" adlı bir konferans vermiştir ve yedi köprü arasında kesintisiz bir yürüyüş olmadığını kanıtlamıştır. Problemin doğası ve konum geometrisindeki durumu hakkındaki görüşlerini özetleyerek çözümünü diğer birkaç matematikçiye iletti Euler (1736). Bir sayma argümanı ile böyle bir dizinin var olmadığını göstermiş ve böylece Königsberg köprüleri probleminin çözümü olmadığını kanıtlamıştır. Daha sonra bu yapı Eulerian graf olarak adlandırılmıştır.

Thomas ve Kirkman (1806-95) ve Hamilton (1805-65) tarafından çokyüzlüler üzerindeki döngülerin incelenmesi Hamiltonian graf kavramına yol açmıştır. İlgili bir çalışma alanı da, verilen bir diyagramı mümkün olan en az sayıda bağlantılı vuruşla çizmenin gerektiği diyagram izleme bulmacalarıdır.

Poinsot (1809) bir çözümün yalnızca nokta sayısı tek olduğunda mümkün olduğunu belirtmiştir ve her olası değer için böyle bir düzenleme bulmak için bir yöntem vermiştir. Modern terminolojide soru, tek sıralı tam grafiklerdeki eulerian izlerle ilgilidir. Sonuncusu, "topoloji" kelimesinin basılı olarak ortaya çıktığı ilk yer olan Vorstudien zur Topologie kitabında yer almıştır.

Yüzeysel olarak eulerian problemine benzeyen bir tür graf problemi, verilen bir grafın her bir köşesinden sadece bir kez geçen bir döngü bulma problemidir. Hamilton'un etkisinden dolayı, bu tür graflar artık Hamilton grafları olarak adlandırılmaktadır, bunun yerine Hamilton'un dodekahedronu ele almasından önce, daha genel bir problemi ele alan Kirkman'ın adıyla anılmaktadır.

Böyle bir problemin ilk örneklerinden biri, bir satranç tahtasında 64 karenin her birini sadece bir kez ziyaret edip başlangıç noktasına geri dönen bir dizi at hamlesini bulmaya yönelik at turu problemidir. Bu problemin tarihi yüzlerce yıl öncesine dayanmaktadır ve sistematik çözümleri tarafından verilmiştir (Euler ve Vandermonde, 1771).

Çevre içermeyen bağlı bir graf olan ağaç kavramı, elektrik şebekelerindeki akımların hesaplanmasında grafik teorik fikirleri kullanan Kirchhoff (1824-87) çalışmalarında dolaylı olarak ortaya çıkmıştır. Daha sonra ağaçlar Cayley (1821-95), Sylvester (1806-97), P′olya (1887-1985) ve diğerleri tarafından belirli kimyasal moleküllerin numaralandırılmasıyla bağlantılı olarak kullanılmıştır.

Tam graf ve iki parçalı graf detayları A.F Mobius tarafından verilmiştir. Kuratowski (1840), rekreasyonel problemler aracılığıyla bunların düzlemsel olduğunu kanıtlamıştır. Ağaç kavramı Kirchhoff (1845) tarafından elektrik şebekeleri veya devrelerdeki akımların hesaplanmasında kullanılmıştır. Terquem (1849), tam bir domino halkasını yerleştirmenin yollarının sayısını sordu. Bu esasen K_7 tam grafındaki eulerian turların sayısını belirleme problemidir ve M. Reiss ve daha sonra G. Tarry tarafından çözülmüştür. Daha sonra Gutherie (1852) dört renk problemini bulmuştur.

Tait (1884) , her 3-değerli çokyüzlünün bir hamilton döngüsüne sahip olduğunu ileri sürmüştür. Bu iddia daha sonra çürütülmüştür (Tutte, 1946). Ardından Heinrich (1969) tarafından bilgisayarlar kullanılarak dört renk problemi çözülmüştür.

Spektral graf teorisinin uzun bir geçmişi vardır. İlk zamanlarda grafların bitişiklik matrislerini analiz etmek için matris teorisi ve lineer cebir kullanılmıştır. Cebirsel yöntemler özellikle düzenli ve simetrik grafları ele almada etkilidir. Bazen, belirli özdeğerler bir grafın "cebirsel bağlanabilirliği" olarak adlandırılmıştır.

Spektral grafların cebirsel yönleri üzerine geniş bir literatür vardır. Biggs , Cvetkovi´c, Doob ve Sachs ve Seidel gibi çeşitli araştırmalarda ve kitaplarda iyi belgelenmiştir. Son on yılda, spektral çizge teorisindeki birçok gelişme genellikle geometrik bir alana sahip olmuştur. Örneğin, Lubotzky-Phillips-Sarnak ve Margulis'e atfedilen genişletici grafların açık yapıları, grafların özdeğerlerine ve izoperimetrik özelliklerine dayanmaktadır. Cheeger eşitsizliğinin ayrık analoğu, rastgele yürüyüşler ve hızla karışan Markov zincirleri çalışmalarında yoğun bir şekilde kullanılmıştır. Astronomların uzaktaki yıldızların yapısını belirlemek için yıldız spektrumlarını incelemeleri gibi, graf teorisindeki ana hedeflerden biri de bir grafın temel özelliklerini ve yapısını graf spektrumundan çıkarmaktır. Graflar için genel spektral yaklaşım bu yönde atılmış bir adımdır. Özdeğerlerin bir grafın neredeyse tüm ana değişmezleriyle yakından ilişkili olduğunu ve bir uç özelliği diğerine bağladığını görülüp grafları temel olarak anlamamızda merkezi bir rol oynadığını göstermiştir.

Paige ve Wexler (1953) , bir nokta doğrusu olay çifti etrafında düzenlenen sonlu bir projektif düzlemin üzerinde bulunma matrisinin bir formunu tanıtmıştır. Bu çalışma, bir Steiner sistemi ile ilişkili Laplasyan matrisinin özelliklerini incelemeye odaklanmıştır.

Claude Berge'nin her zaman geneli somutla birleştirmeye ve olayları genel bir matematiksel çerçeve içinde görmeye çalışan kendine özgü bir tarzı vardı. Hipergrafları yalnızca grafları genelleştirmek için değil, aynı zamanda birleştirmek ve basitleştirmek için de kullanmıştır. *Th´eorie des graphes et ses applications* kitabı sayesinde matematiksel bir isim edinmiştir. Daha sonra ilk graf teorisi toplantısına katıldı ve Macar graf kuramcıları ile tanışmıştır (Berge, 1959). O yıl graf renklendirme üzerine bir araştırma makalesi

yayınlamıştır. Kısa süre sonra ortaya çıkan fikirler mükemmel graflara yol açmıştır. 1960 civarındaki dönemin Berge için özellikle önemli ve verimli olduğu görülmektedir. Bunlara ilaveten ilk kez Hipergraflar tanıtılmıştır (Berge, 1973).

Hipergrafların bir özel durumu olarak k-üniform hipergraf tanımı yapılıp, hipergrafların kesişim grafiği verilmiştir. Hipergrafların kardinalitesi gösterilmiş ve oluşturulan bu yapıya çizgi graf (line graph) adlandırılması yapılmıştır (Naik et. al, 1982).

Chung (1991), Orono'da düzenlenen AMS-MAA ortak konferansında Laplacians of graphs and hypergraphs'ı sunmuştur. Yaklaşık 200 yayını arasında spektral graf teorisi, ekstremal graflar, graf etiketleme, graf ayrışımları, rastgele graflar, graf algoritmaları, paralel yapılar, iletişim ağları, yazılım güvenilirliği ve ayrık geometride graf teorisinin çeşitli uygulamaları bulunmaktadır. American Mathematical Society, Chung'ın (1997) Spectral Graph Theory adlı önemli bir kitabını yayınlamıştır.

Rodriguez (2003) tarafından hipergraflar üzerinde spektral benzeri birkaç sonuç elde etmek için grafların Laplasyan matrislerinin hipergraflara genelleştirilmesini kullanmıştır. Herhangi bir tepe noktasının dışmerkezliği ve fazlalığı için üst sınırlar elde etmiştir. Tüm yürüyüş-düzenli(walk regular) hipergrafların spektral-düzenli olduğunu göstererek yürüyüş düzenliliği ve spektral düzenlilik kavramlarını hipergraflar için genişletmiştir.

Fallat vd. (2005) Laplasyan matrisinin farklı tamsayı özdeğerlere sahip olduğu grafları araştırdılar. Araştırmacılar $S_{i,n}$ kümesini i hariç 0'dan n'ye kadar tüm tamsayıların kümesi olarak tanımlayıp Laplasyan matrisi bu kümenin özdeğerlerine sahip olan bir graf varsa, bu kümenin Laplasyan integrallenebilir olduğunu gösterdiler.

Spektral graf teori zaman içinde önemli ilerlemeler kaydetmiştir. Steiner sistemlerle k-üniform hipergrafların ilişkişi işlenmiş ve bunlara örnek olarak Fano düzlemi verilmiştir (Bretto, 2013; Akça, vd., 2006). 2016 yılında araştırmacılar, Steiner sistemlerinin cebirsel geometri ve değişmeli cebir ile kesişimini incelemişlerdir (Braun vd., 2016). Bazı özel grafların komşuluk, Laplasyan, bitişiklik matrislerinin spektrumları incelenmiştir (Fasfous, 2017). Bu çalışmalara ek olarak sonlu mertebeden projektif düzlemlerin Laplasyan integralleri olduğu gösterilmiştir (Zakiyyah, 2021).

Temel olarak, bu tezde litaratürde iyi bilinen ve farklı uygulama alanlarında kullanılan graf teorisine ait temel bileşenler verilmiş, graf operatörleri ve bazı graf çeşitleri incelenerek örneklendirilmiştir. Bu çalışmada bu makaleler incelenerek bazı özel grafların matris temsilleri ile spektral özellikleri incelenmiştir. 2. ve 3. mertebeden sonlu projektif düzlemlerin spektrumları incelenmiş özdeğerlerine göre bağlantılı olma durumları gözlemlenmiştir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda verilen temel bilgileri literatürdeki herhangi bir graf teori kitabında bulmak mümkündür. Aşağıda verilecek olan temel bilgiler için (Ruohonen, 2016) çalışmalarına bakılabilir.

Tanım 3.1 Düğüm kümesi $V = \{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$ ve kenar kümesi $E = \{e_1, e_2, e_3 \dots e_n\}$ olan $V \cap E = \emptyset$ şartını sağlayan ikili sisteme *graf* denir. $\mathrm{G(V, E)}$ ile gösterilir.

Tanım 3.2 Düğüm kümesi $V = \{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$ ve kenar kümesi $E = \{e_1, e_2, e_3 \dots e_n\}$ olan bir $G(V, E)$ basit grafında $\forall v_1, v_2 \in V$ için bir kenar var ise $G(V, E)$ grafı bağlıdır denir. Aksi takdirde *bağlı olmayan graf* denir.

Tanım 3.3. Bir $G(V, E)$ grafı çoklu kenar ya da ilmek(loop) içermiyor ise G grafına *basit graf* denir. Aksi takdirde *basit olmayan graf* denir.

Tanım 3.4. Kenar içermeyen graflara *boş graf* denir.

Tanım 3.5 Kenar ve düğüm içermeyen graflara *null graf* denir.

Tanım 3.6. Yalnızca bir düğüme sahip graflara *aşikar graf* denir.

Tanım 3.7 Bir grafta ortak bitiş düğümüne sahip kenarlara *komşu kenarlar* denir.

Tanım 3.8. Düğüm kümesi $V = \{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$ ve kenar kümesi $E = \{e_1, e_2, e_3 \dots e_n\}$ olan bir $G(V, E)$ grafında herhangi iki v_i, v_j düğümü arasında bir $e_i \in E$ kenarı var ise bu iki düğüme *komşu düğümler* denir.

Tanım 3.9. Bir $G(V, E)$ grafında $V = \{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$ kümesinde bulunan herhangi bir v_i düğümünden geçen kenar sayısana o düğümün *düğüm derecesi* denir. $d(v_i)$ olarak gösterilir.

Tanım 3.10. Bir $G(V,E)$ grafında düğüm derecesi 1 olan düğüme *uç köşe(pendant vertex)* denir.

Tanım 3.11. Bir $G(V,E)$ grafında düğüm derecesi 0 olan düğüme *ayrık köşe(isolated vertex)* denir.

Gösterim 3.1. Bir $G(V,E)$ grafındaki düğüm derecelerinin minimumu $\delta(G)$, benzer şekilde düğüm derecelerinin maksimumu $\Delta(G)$ ile gösterilir.

Tanım 3.12 Bir $G(V,E)$ grafı olsun. Düğüm kümesi $V_1 \subseteq V$ ve kenar kümesi $E_1 \subseteq E$ olan $G_1(V_1,E_1)$ grafına G grafının *bir alt grafıdır* denir.

Tanım 3.13. Bir $G(V,E)$ grafında $e_{j_t}(t=1,\dots,k)$ kenarlarının başlangıç düğümü $v_{i_{t-1}}$ ve bitim düğümü v_{i_t} olan $v_{i_0}, e_{j_i}, v_{i_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_k}, v_{i_k}$ sonlu dizisine G grafında bir *yürüyüş(walk)* denir. Başlangıç ve bitim düğümü aynı olan yürüyüşe *kapalı yürüyüş(closed walk)* aksi halde *açık yürüyüş(open walk)* denir. Kapalı yola *çevrim* denir. Çevre içermeyen graflara *çevrimsiz graf (acyclic graph)* denir.

Tanım 3.14. Bir G grafında bulunan kenarların yalnızca bir kez kullanıldığı yürüyüşe *gezi(trail*), düğümlerin yalnızca bir kez kullanıldığı yürüyüşe ise yol(path) denir. Başlangıç ve bitim düğümleri aynı olan yola ise *kapalı yol*, aksi takdirde *açık yol* denir.

Tanım 3.15. $G(V,E)$ basit bağlı bir graf ve $v \in V$ olsun. $G-v$ bağlı olmayan bir graf oluyor ise v düğümüne G grafının *eklem düğümü(cut vertex)*denir.

Tanım 3.16. Bir G grafında bulunan tüm düğümlerin dereceleri aynı ise bu grafa *regüler graf*, düğüm derecesinin aldığı değer k ise bu grafa *k-regüler* graf denir.

Tanım 3.17. Bir H grafının düğüm kümesi $V(H)$ ve bir G grafının düğüm kümesi $V(G)$ olmak üzere $V(H) = V(G)$ ve $E(H) \subseteq E(G)$ şartlarını sağlayan H grafına G nin *uzanımlı grafı(spanning graph)* denir.

Tanım 3.18. Bir G grafında herhangi iki düğüm arasında en az bir kenar var ise bu grafa *bağlı graf* aksi takdirde *bağlı olmayan graf* denir.

Tanım 3.19. Bir G grafında bulunan düğümlerin tümü birbirine komşu ise yani aralarında en az bir kenar bulunuyor ise bu grafa *tam graf(complete graph)* denir.Burada n düğüm sayısı olmak üzere tam graf K_n ile gösterilir.

Tanım 3.20. $G(V,E)$ bir graf olmak üzere G den elde edilen tam alt grafa *grup alt graf(clique subgraph)* denir.

Tanım 3.21. Bir G grafının düğüm kümesi $V(G)$ olmak üzere $V_1 \cup V_2 = V$ ve $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ olacak şekide iki ayrı düğüm kümesine ayrılabiliyor ve G deki her bir kenarın komşu uç düğümleri farklı kümelerde yer alıyorsa bu grafa *iki parçalı graf (bipartite graph)* denir.

Gösterim 3.2. Bir G iki parçalı grafında $V_1 \cup V_2 = V$ koşulunu sağlayan V_1, V_2 kümelerinin düğüm sayıları sırası ile $|V_1| = n$ ve $|V_2| = m$ ise bu graf $K_{n,m}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.22. Bir $G(V,E)$ grafının kenarları kesişmeyecek şekilde oluşturulabilen bir modellemesi var ise G grafına *düzlemsel graf(planar graph)* denir. G grafının düzlemsel modelinde oluşan, kenarlarla sınırlandırılmış alanlara *bölge(region)* denir.

Tanım 3.23. $G_1(V_1,E_1)$ ve $G_2(V_2,E_2)$ iki graf olmak üzere $f: V_1 \longrightarrow V_2$ şeklinde V_1 ve V_2 kümeleri arasında birebir örten f fonksiyonu var ise G_1 grafı G_2 ye *izomorftur* denir.

Tanım 3.24. Bir $G(V,E)$ grafının düğüm kümesi $V = \{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$ ve kenar kümesi $E = \{e_1, e_2, e_3 \dots e_m\}$ olmak üzere kenar kümesindeki her e_k $(k = 1, \dots, m)$ kenarı (v_i,v_j) sıralı ikilisinden oluşuyor ise G grafına *yönlü graf (directed graph)* denir.

Tanım 3.25. Basit bağlı bir G grafının bağlı ve çevre içermeyen bir alt grafına *ağaç(tree)* denir. G_T ya da T ile gösterilir.

Tanım 3.26. Bir T ağaç grafının elemanlarına *dal(branch)* denir.

Tanım 3.27. Basit bağlı bir G grafının tüm düğüm dereceleri 2 ise bu grafa *çevre graf* denir.

Tanım 3.28. Bir G grafından G den elde edilmiş T ağaç grafının çıkarılmasıyla elde edilen alt grafa *kirişler kümesi(cut set)* denir.

4. GRAF OPERATÖRLERİ

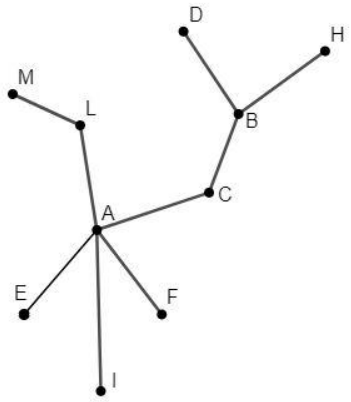
Bu bölümde grafların temel bileşenlerinden bazıları olan ağaç modelleri, uzanımlı ağaç modeli, yol, gezi, çevrim konularına ilişkin bazı tanım ve teoremlere değinilmiştir (Gross ve Yellen, 2003; Diestel, 2005; Fasfous, 2017; Wallis, 2007).

4.1. Ağaç

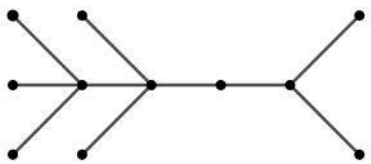
Tanım 4.1.1. Çevre içermeyen bağlı graflara ***ağaç(tree)*** denir. *T* ile gösterilir. Bileşenleri ağaç olan graflara ise ***orman(forest)*** denir. Bir ağaç grafta derecesi 1'e eşit olan düğümlere ***yaprak(leaves)*** denir (Bondy ve Murty, 1976).

Aşikar olmayan bir ağaç grafın mutlaka yaprakları bulunur. Bu gerçeklik ağaçlar üzerine tümevarım ispatlarında sık sık işe yarar bir bilgi niteliği taşır. Bir ağaç graftan tek bir yaprağı çıkardığımızda kalan yapı, yine bir ağaç özelliği gösterir.

Örnek 4.1.1.



Şekil 4.1. 10 düğümlü ağaç graf



Şekil 4.2. 11 düğümlü ağaç graf

Teorem 4.1.1. Aşağıda verilen bilgiler ağaç graf için geçerlidir.

(i) T bir ağaçtır.

(ii) Herhangi iki düğüm T deki tek bir yol ile bağlıdır.

(iii) Ağaç graflar minimal bağlıdır. $T - e$ bağlı olmayan bir graftır.

$(i\mathsf{v})$ T maksimal çevrimsizdir (Wallis, 2007).

İspat: Teorem 4.1.1 in ispatı açıktır. Her bağlı grafın uzanımlı bir alt ağacı bulunur. Eşitlik (i) ve (iii) den dolayı bağlı minimal uzanımlı alt graf da bir ağaç yapısı gösterir.

Teorem 4.1.2. Basit bağlı n düğümlü bir G grafının ağaç olabilmesi için gerek ve yeter şart G de bulunan her kenarın köprü olmasıdır (Wallis, 2007).

İspat: G bir ağaç graf ve $e = (u, v)$ G de bir kenar olsun. O halde u dan v ye giden tek yol $-uew$ yolu olur. $G - e$ de u ile v arasında herhangi bir yol bulunmaz bu sebeple G grafı bağlı olmaz. Bu yüzden ağaç graftaki her bir kenar köprüdür. Tersine, G grafındaki her bir kenar köprü olsun. O halde G bağlıdır. Farz edelim ki G bir ağaç olmasın. O halde G de en az bir tane C çevresi bulunur. G grafında C çevresine ait bir e kenarı bulunsun. O halde e bir köprü olmadığından u ile v düğümleri arasında mutlaka alternatif bir yol bulunacaktır ki bu durum hipotez ile çelişir. Bu sebeple G bir ağaçtır.

Teorem 4.1.3. Basit bağlı n düğümlü bir G grafının ağaç olabilmesi için gerek ve yeter şart G grafının $n - 1$ kenarlı olmasıdır (Balakrishnan ve Ranganathan, 2012).

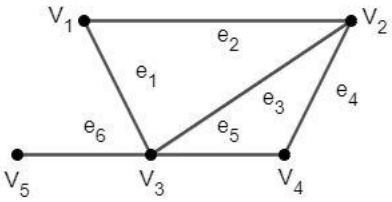
İspat: G grafı n düğümlü bir ağaç olsun. Şimdi n üzerine tümevarım uygulayalım. $n = 1$ için ifade doğrudur. Bu eşitlik farz edelim ki $1 < m < n$ aralığındaki tüm m ler için doru olsun. G grafından $e = (u, v)$ kenarını silersek G grafı $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ gibi aralarında hiçbir ortak düğümün olmadığı iki bileşene sahip, bağlı olmayan bir graf olacaktır. Böylece $|V(G_1)| = n_1$ ve $|V(G_2)| = n_2$ olup n_1, n_2 sayıları n den küçük kalır. Aynı şekilde G_1 ve G_2 deki kenar sayılarının toplamı $n_1 + n_2 - 2 = n - 2$ olur. Eğer G_1 ve G_2 grafını e kenarı ile birbirine bağlarsak G grafının kendisini elde ederiz. Bu yüzden G grafının kenar sayısı $n - 2 + 1 = n - 1$ olur.

Tersine, G grafı n düğümlü, $n-1$ kenarlı basit bağlı bir graf olsun. Farz edelim ki G bir ağaç olmasın. O zaman G de köprü olmayan bir e kenarı bulunur. Eğer bu e kenarını silersek bağlı $G_1 = (V_1, E_1)$ alt grafını elde ederiz. Bu işlemi kenar silerek devam ettirirsek tüm kenarları köprü olan basit bağlı $G_2 = (V_2, E_2)$ alt grafına ulaşmış oluruz. O halde G grafı n düğümlü, $n-1$ kenarlı basit bağlı bir ağaç olur. Bu ise iddia ile çelişir.

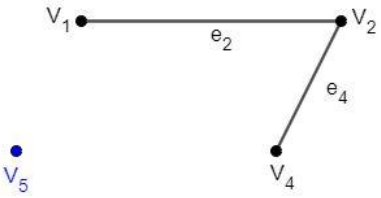
4.2. Graflarda Eklem Düğümü ve Eklem Ayrıtı

Tanım 4.2.1. Basit bağlı bir G grafından seçilen bir $v \in V(G)$ olsun. $G - v$ grafının bileşen sayısı G den daha büyük oluyor ise seçilen bu v düğümüne G ***grafının eklem düğümü(cut vertex)*** denir (Bondy ve Murty, 1976).

Örnek 4.2.1.



Şekil 4.3. 5 düğümlü 6 kenarlı bir graf

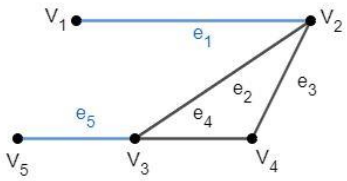


Şekil 4.4. $G - V_3$ grafı

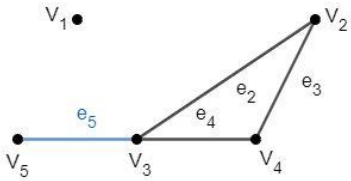
Burada v_3 düğümü eklem düğümüdür. G grafından eklem düğümü ve ona bağlı kenarlar çıkarıldığında kalan yapı 2 bileşenli olur. Görüldüğü üzere yeni durumda v_5 düğümü izole düğüm olup, oluşan alt grafın düğüm kümesi $\{e_2, e_4\}$ den ibarettir.

Tanım 4.2.2. Bir G grafındaki herhangi bir e kenarının köprü olabilmesi için G grafından e kenarını çıkardığımızda kalan yapının bileşen sayısı G nin bileşen sayısından fazla olur (Bondy ve Murty, 1976).
(i.e $e \in V(G), k(G-e) > k(G)$)

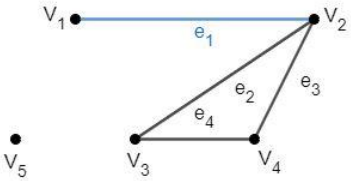
Örnek 4.2.2.



Şekil 4.5. G grafı



Şekil 4.6. $G - e_1$ grafı



Şekil 4.7. $G - e_5$ grafı

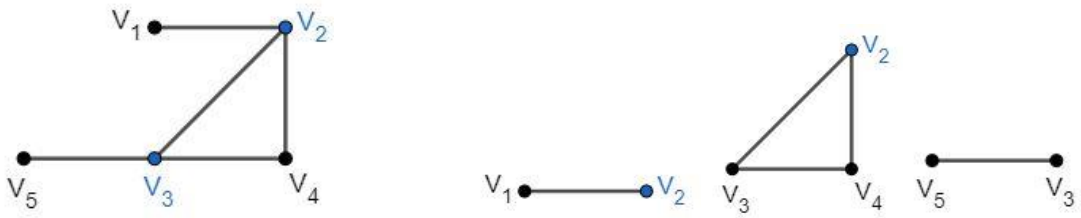
Verilen örnekteki G grafında hem e_1 hemde e_5 eklem ayrıtıdır. Ayrıca $G - e_1$ ve $G - e_5$ in bileşen sayıları G grafından büyüktür.

Not 4.2.1. Köprü içeren fakat eklem düğümü içermeyen tek bağlı graf K_2 tam grafıdır.

Tanım 4.2.3. Aşikar olmayan bağlı bir G grafı eklem düğümü içermiyor ise bu grafa ***ayrılmaz(non separable)*** denir. Aksi takdirde ***ayrılabilir(separable)*** denir. Örnek 4.2.1 ayrılabilen bir graftır (Bondy ve Murty, 1976).

Tanım 4.2.4. Maksimal ayrılmaz bir alt grafa ***blok*** denir. Başka bir deyişle bir blok mümkün olan en fazla kenara sahip eklem düğümü içermeyen alt grafa denir (Bondy ve Murty, 1976).

Örnek 4.2.3.



G grafı a) b) c)

Şekil 4.8. Bir G grafından elde edilen 3 ayrı blok: a) blok 1, b) blok 2, c) blok 3.

Verilen örnekte iki tane eklem düğümü vardır. Eklem düğüm kümesi $\{v_2, v_3\}$ den oluşur. Bu düğümler 3 ayrı blok yapıya sahiptir.

Teorem 4.2.1. G bağlı bir graf ve $v \in V(G)$ olsun. v nin eklem düğümü olabilmesi için gerek ve yeter şart v den farklı seçilen u, w düğümleri için v nin her $-uw$ yolu üzerinde bulunmasıdır (Bondy ve Murty, 1976).

İspat: ($\Rightarrow$:) Kabul edelim ki G bağlı bir graf ve $v \in V(G)$ olsun. v nin her $-uw$ yolu üzerinde olduğunu ispatlamalıyız. Şayet v eklem düğümü ise $G - v$ bağlantısız olur. Ayrıca $u \in G_1$ ve $w \in G_2$ şeklinde ifade edilebilen G_1, G_2 gibi iki ayrı bileşene sahip olur. O halde $G - v$ de u ile w arasında hiçbir yol bulunmaz. Fakat G bağlı bir graf olduğundan $-uw$ yolu v den geçmek zorundadır. Tersine v den farklı seçilen u, w düğümleri için (i.e $u, w \neq v$) v düğümü her $-uw$ yolu üzerinde bulunsun. Şimdi v düğümünün eklem düğümü olduğunu ispatlamalıyız. $G - v$ de u ile w bağlı olmadığından $G - v$ bağlı bir graf olmaz. Bu sebeple tanım 4.2.2. den v bir eklem düğümüdür.

Teorem 4.2.2. En az iki düğümlü bağlı bir $G(V, E)$ grafının eklem düğümü olmayan en az iki düğümü mevcuttur (Wallis,2007).

İspat: İstisna olarak aşikar olmayan bağlı bir G grafı, eklem düğümü olmayan en fazla bir tane düğüm içerir. G grafında $d(v, u) = diam(G)$ eşitliğini sağlayan u ve v düğümleri bulunsun. u ve v düğümlerinden en az bir tanesi eklem düğümüdür ve bu düğüm v olsun. O halde $G - v$ bağlantısız bir graf olur. v eklem düğümü olarak belirlendiğinden w düğümü $G - v$ grafının u dan farklı bir bileşeninde bulunsun. O halde her $-uw$ yolu v den geçmek zorundadır. Böylece

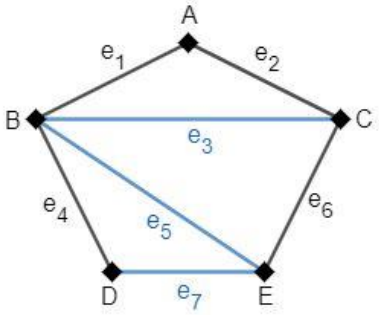
$$d(u, w) > d(u, v) = diam(G)$$

olup çelişkidir.

4.3. Temel Çevrim Ve Temel Kesit

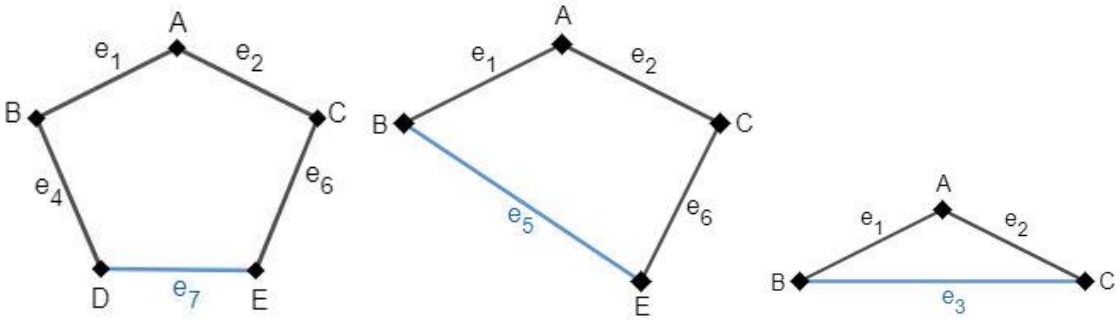
G grafı n düğümlü, m kenarlı basit bağlı bir graf olsun. T kenarları $e_1, \dots, e_n$ şeklide gösterilen $n-1$ kenarlı bir ağaç graf ve kirişleri $e_1, \dots, e_{m-n+1}$ şeklinde gösterilen T^* ağacına karşılık gelsin. Eğer T ye T^* da bulunan bir e_i kenarını eklersek T ağacı c_i çevresini içeren çevrimli bir graf olmuş olur. Buradaki c_i çevresine ***temel çevrim(fundamental circuit)*** denir. G grafının temel çevrelerinin kümesi, G nin T uzanımlı ağacına göre tüm $m-n+1$ temel çevrimlerinin kümesidir (Fasfous, 2017).

Örnek 4.3.1.



Şekil 4.9. 5 noktalı 7 kenarlı G grafı

Örnekte verilen G grafının kirişleri $\{e_3, e_5, e_7\}$ dir.



(a) (b) (c)

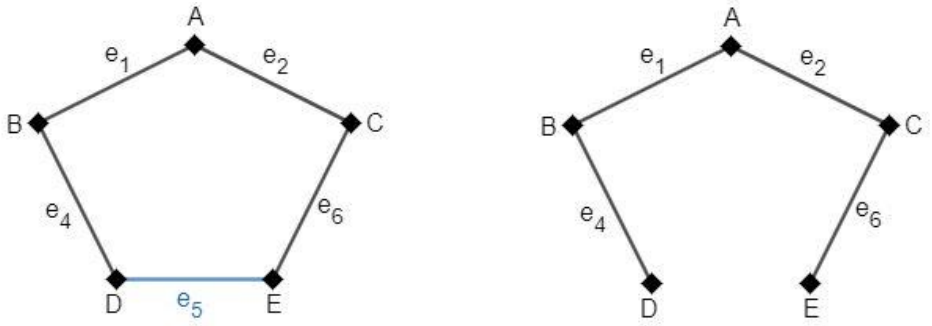
Şekil 4.10. Bir G grafından elde edilen çevrimler a), b), c)

Böylece $\{c_1, c_2, c_3\}$ olarak 3 temel çevrim bulunur. Bölüm 4.3 te graflarda temel çevre inceledik. Şimdi temel kesit kümesini tanımlayalım.

Tanım 4.3.1. Bir G grafından G den elde edilmiş T ağaç grafının çıkarılmasıyla elde edilen alt grafa ***temel kiriş kümesi(fundamental cut set)*** denir (Fasfous, 2017).

Aşağıda verilen G grafını ve G den elde edilen uzanımlı bir T ağacını inceleyelim.

Örnek 4.3.2.



Şekil 4.11. G den elde edilen uzanımlı bir T ağacı

Eğer e_1 dalını T uzanımlı ağacından çıkartırsak bu işlem G grafını iki farklı düğüm kümesine ayırır. Bu kümeler sırası ile $\{A, C, E\}$ ve $\{B, D\}$ kümeleridir. G grafının kiriş kümesi Q, T uzanımlı ağacından elde edilen tek e_1 kenarına sahip olmaya devam edecektir. O halde Q, T ye göre kenar içermeye devam edecektir. T uzanımlı ağacının yalnızca bir tek kenarına(dalına) sahip kesit kümesine T ye göre ***temel kesit kümesi*** denir.

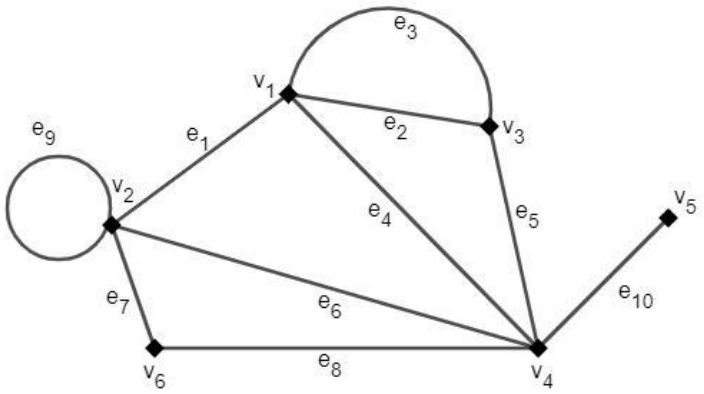
Örnek 4.3.1 deki G grafından elde edilen temel kesit kümeleri sırası ile $\{e_1, e_3, e_6, e_7\}$, $\{e_2, e_3, e_5, e_7\}$, $\{e_5, e_6, e_7\}$, ve $\{e_4, e_7\}$ olur.

4.4. Yürüyüş, Gezi, Yol, Çevre

Tanım 4.4.1. Bir G grafındaki alternatif düğümler ve kenarları içeren $v_{i_0}, e_{j_1}, v_{i_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_k}, v_{i_k}$ sonlu dizisine G de bir ***yürüyüş(walk)*** denir. Yürüyüş bir düğümden başlar. Burada $e_{j_t}(t = 1, \dots, k)$ kenarının düğümleri $v_{i_{t-1}}$ ve v_{i_t} dir. v_{i_0} düğümüne ***başlangıç düğümü(initial vertex)***, v_{i_k} düğümüne ise ***bitiş düğümü(terminal vertex)*** denir. Yürüyüş uzunluğu k ile gösterilir. 0 uzunluklu yürüyüş tek bir v_{i_0} düğümünden ibarettir.

Graflarda yürüyüş yapmak için düğümler ve kenarlar birden fazla kez ziyaret edilebilir. Şayet $v_{i_0} \neq v_{i_k}$ ise bu yürüyüşe ***açık yürüyüş(open walk)*** denir. Aksi takdirde ***kapalı(closed)*** denir (Ruohonen, 2006).

Örnek 4.4.1.



Şekil 4.12. 5 noktalı 10 kenarlı bir G grafı

Yukarıda verilen graf modeli için yapılan

$$v_1, e_2, v_3, e_5, v_4, e_4, v_1, e_1, v_2$$

yürüyüş açık yürüyüş iken,

$$v_6, e_8, v_4, e_5, v_3, e_3, v_1, e_1, v_2, e_7, v_6$$

yürüyüşü başlangıç ve bitim düğümleri aynı olduğundan kapalı yürüş olur.

Tanım 4.4.1. Bir G grafında bulunan kenarlardan yalnızca 1 kez geçilerek yapılan yürüyüşe ***gezi(trail)*** denir. O halde bir gezide (u, v) düğüm çiftinin ardışık düğümler olarak kaç kez görünebileceği, en fazla u ve v'yi birleştiren paralel kenarların sayısı kadardır (Ruohonen, 2006).

Örnek 4.4.2. Örnek 4.4.1 deki örnek incelenirse

$$v_5, e_{10}, v_4, e_5, v_3, e_3, v_1, e_1, v_2, e_7, v_6, e_8, v_4, e_4, v_1, e_2, v_3$$

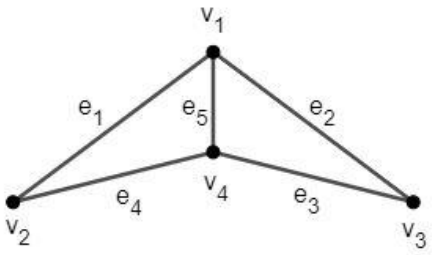
Sonlu dizisi bir açık gezidir.

$$v_4, e_5, v_3, e_3, v_1, e_1, v_2, e_7, v_6, e_8, v_4$$

Sonlu dizisi bir kapalı gezidir.

Tanım 4.4.1. Bir gezide düğümler en fazla bir kez kullanılıyor ise bu geziye ***yol(path)*** denir. Başlangıç ve bitiş düğümleri aynı olan yola ***kapalı yol(closed path)*** denir. Kapalı bir yola ***çevrim(circuit)*** denir. Bu bölümde çevrimleri boştan farklı, $k \geq 1$ olarak kabul edeceğiz (Ruohonen, 2006).

Örnek 4.4.3.



Şekil 4.13. 4 noktalı 5 kenarlı bir G grafı

Verilen örnekte

$$v_2, e_1, v_1, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_2, e_1, v_1$$

dizisi bir yürüyüş iken

$$v_1, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_2$$

dizisi bir açık yol,

$$v_1, e_2, v_3, e_3, v_4, e_5, v_1$$

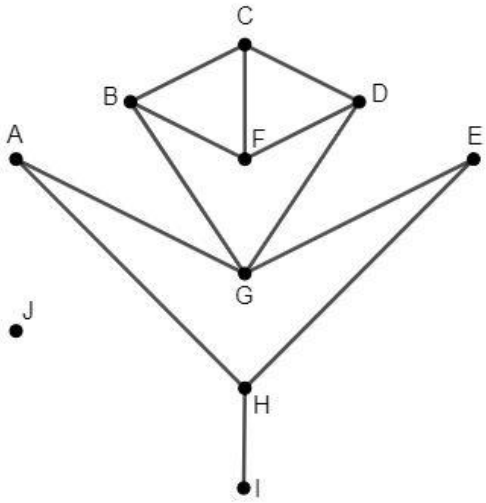
dizisi bir çevrimdir.

4.5. Graflarda Düğüm Derecesi

Tanım 4.5.1. $G(V, E)$ bir graf ve $v \in V$ olsmak üzere v düğümünden geçen kenar sayısına o düğümün ***düğüm derecesi(degree of vertex)*** denir. $Deg(v)$ ya da $d(v)$ olarak gösterilir. Derecesi çift sayı olan düğüme ***çift dereceli düğüm(even degree of vertex),*** derecesi tek sayı olan düğüme ***tek dereceli düğüm(odd degree of vertex)***, derecesi 1 olan düğümlere ***uç düğüm(end vertex)***, derecesi 0 olan düğümlere ise ayrık ya da ***izole düğüm(isolated vertex)*** denir. Bir G grafının en küçük dereceli düğümününe ***minimum dereceli düğüm(minimal***

degree of vertex), en büyük dereceli düğümüne ***maksimum dereceli düğüm(maximal degree of vertex)*** denir. Sırası ile $\delta(G)$ ve $\Delta(G)$ ile gösterilir (Steen, 2010).

Örnek 4.5.1.



Şekil 4.14. 9 noktalı 12 kenarlı bir G grafı

Örnekte verilen 9 düğümlü G grafında bulunan A, B, C, D, E, G, H, I, J düğümlerinin dereceleri

$$Deg(\mathrm{A}) = 2,\ Deg(\mathrm{B}) = 3,\ Deg(\mathrm{C}) = 3,\ Deg(\mathrm{D}) = 3,\ Deg(\mathrm{E}) = 2,\ Deg(\mathrm{F}) = 3,$$
$$Deg(\mathrm{G}) = 4,\quad Deg(\mathrm{H}) = 3,\quad Deg(\mathrm{I}) = 1,\quad Deg(\mathrm{J}) = 0$$

olup,

$$\delta(G) = 0 \text{ ve } \Delta(G) = 4$$

olarak bulunur. Ayrıca I düğümü uç düğüm iken, J düğümü izole düğümdür.

Teorem 4.5.1. $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ düğüm kümesi üzerinde tanımlı n düğümlü, m kenarlı bir G grafı için

$$\sum_{i=1}^{n} Deg(v_i) = 2m$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: n düğümlü, m kenarlı bir G grafında bulunan herhangi bir kenar üzerinde birbirine komşu olan 2 düğüm bulunur. Düğüm dereceleri toplanırken her kenar 2 kez sayıldığından bu toplam $2m$ tanedir.

Sonuç 4.5.1. Düğüm kümesi $V = \{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$ ve kenar kümesi $E = \{e_1, e_2, e_3 \dots e_n\}$ olan bir $G(V, E)$ grafı için tüm düğüm dereceleri toplamı çifttir.

İspat: Teorem 4.5.1. den tüm düğüm dereceleri toplamı kenar sayısının 2 katına eşit olduğundan $2m$ çift bir sayıdır.

Sonuç 4.5.2. Bir G grafında derecesi tek olan düğüm sayısı çifttir.

İspat: G grafında derecesi tek olan düğümler kümesi U, derecesi çift olan düğümler kümesi W, olsun. O halde Teorem 4.5.1. den

$$\sum_{v \in U} Deg(v) + \sum_{v \in W} Deg(v) = \sum_{v \in D} Deg(v) = 2m$$

olup

$$\sum_{v \in U} Deg(v) + \sum_{v \in W} Deg(v)$$

toplamı çifttir.

$$\sum_{v \in W} Deg(v)$$

ifadesindeki çift dereceli düğümlerin dereceler toplamı da çift sayı olduğundan

$$\sum_{v \in U} Deg(v)$$

tek dereceli düğümlerin dereceler toplamı da çift sayı olmalıdır. Bu sebeple U kümesinin çift sayıda düğüm içermesi gerekir.

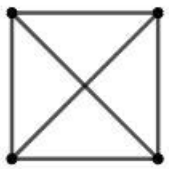
5. GRAF ÇEŞİTLERİ

Bu bölümde graflarda bağlılık incelenmiş, düzlemsel ve iki parçalı graflara ilişkin bazı teorem ve tanımlara yer verilmiştir.

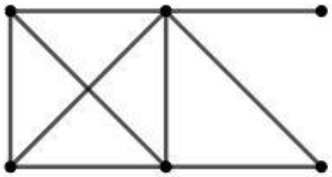
5.1. Graflarda Bağlılık

Tanım 5.1.1. Düğüm kümesi $V = \{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$ ve kenar kümesi $E = \{e_1, e_2, e_3 \dots e_n\}$ olan bir $G(V, E)$ basit grafında $v_1, v_2 \in V$ olsun. Şayet en az bir v_1v_2- kenarı var ise v_1 ile v_2 düğümüne bağlı(irtibatlı)'dır denir. Eğer $G(V, E)$'nin her düğüm çifti bağlantılı ise $G(V, E)$ grafına ***bağlı graf*** denir.

Tanım 5.1.2. Düğüm kümesi $V = \{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$ ve kenar kümesi $E = \{e_1, e_2, e_3 \dots e_n\}$ olan bir $G(V, E)$ basit grafında $v_1, v_2 \in V$ olsun. Şayet en az bir v_1v_2- kenarı bulunmuyor ise v_1 ile v_2 düğümüne bağlantısızdır denir. $G(V, E)$'nin herhangi iki düğümü arasında bir kenar bulunmuyor ise $G(V, E)$ grafına ***bağlı olmayan graf*** denir.



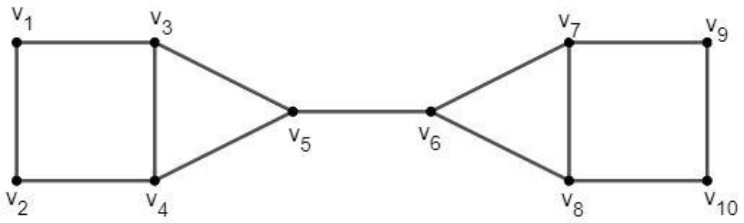
Şekil 5.1. Bağlı Graf



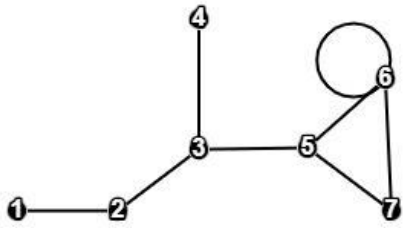
Şekil 5.2. Bağlı olmayan graf

Tanım 5.1.3. $G(V, E)$ basit bağlı bir graf ve $v \in$ V olsun. G grafından v düğümünü çıkardığımızda yani $G - v$ bağlı olmayan bir graf oluyorsa v düğümüne $G(V, E)$ grafının ***eklem düğümü(cut vertex)***denir.

Örnek 5.1.1.



Şekil 5.3. 10 noktalı eklem düğümüne sahip bir G grafı



Şekil 5.4. 7 noktalı eklem düğümüne sahip bir G grafı

Şekil (a)'da verilen graf örneğinde v_5 nolu ve v_6 nolu düğümün silinmesi ile oluşan graf bağlantısız olacaktır. Bu sebeple v_5 ve v_6 nolu düğümler bu grafın eklem düğümleridir. Şekil (b)'de verilen graf incelendiğinde çıkarıldığı ya da silindiği takdirde grafı bağlantısız yapan düğümler 2, 3 ve 5 nolu düğümlerdir. Yine bu sebeple 2, 3 ve 5 nolu düğümler bu grafın eklem düğümleridir.

Teorem 5.1.1. $G(V,E)$ bağlı bir graf ve $v \in V$ olsun. v'nin eklem düğümü olabilmesi için gerek ve yeter şart v' den geçen $u,w \in V$ olacak şekilde en az bir $-uw$ yolunun bulunmasıdır (Diestel, 2005).

İspat: ($\Rightarrow$:) v bir eklem düğümü olsun. O halde $G-v$ grafı, G_1 ve G_2 gibi en az iki bileşene sahiptir. Bu durumda $\exists u \in V(G_1)$ ve $\exists w \in V(G_2)$ bulunmaktadır. $G-v$ grafında u ile w arasında hiçbir kenar bulunmaz fakat $G(V,E)$ grafı bağlı olduğundan en az bir $-uw$ yolu vardır. Tüm bu sebeplerden $\exists u,w \in V$ için her $-uw$ yolu v'den geçmek zorundadır.

$(\Leftarrow:)$ $\exists u, w \in V$ için her $-uw$ yolu v'den geçsin. Bu durumda $G - v$'de u ile w arasında hiçbir kenar bulunmaz. O halde $G - v$ bağlantısız olup, v bir eklem düğümüdür.

Teorem 5.1.2. Her aşikar olmayan bağlı graf en az iki adet eklem olmayan düğüm içerir (Diestel, 2005).

İspat: $G(V, E)$ aşikar olmayan bağlı bir graf olsun. Farz edelim ki $G(V, E)$'nin maksimum eklem olmayan bir tek düğümü bulunsun. $u, w \in D$ ve $d(u, w) = Çap(G)$ olsun. O halde $u\ ya\ da\ w$'nin en az biri eklem düğümü olmak zorundadır. Varsayalım ki u bir eklem düğümü olsun. Bu durumda $G - u$'nun G_1, G_2 gibi en az iki bileşeni vardır. w, $G - u$'nun u'yu kapsamayan bileşeninde bulunsun. Her $-uw$ yolu v'den geçeceğinden

$$d(u, w) > d(u, v) = Çap(G)$$

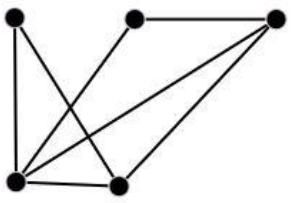
olup bu ise çelişkidir. O halde $G(V, E)$'nin en az iki tane eklem olmayan düğümü bulunur.

5.2. Düzlemsel Graflar

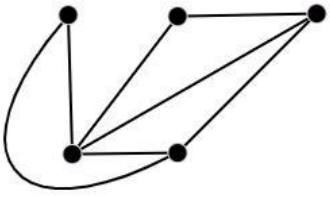
Tanım 5.2.1. Bir $G(V, E)$ grafının kenarları kesişmeyecek şekilde oluşturulabilen bir modellemesi var ise G grafına ***düzlemsel graf(planar graph)*** denir. G grafının düzlemsel modelinde oluşan, kenarlarla sınırlandırılmış alanlara ***bölge(region)*** denir (Steen,2010).

Herhangi bir kenar farklı iki bölgenin arakesiti olabilir ancak bölgeler birbirinin alt kümesi olarak düşünülemez .

Örnek 5.2.1 Basit bağlı, 5 düğümlü ve 7 kenarlı bir G_1 grafının düzlemsel modelini inceleyelim.

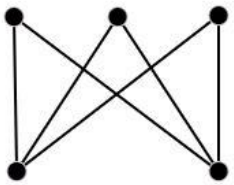


Şekil 5.5. G_1 grafı

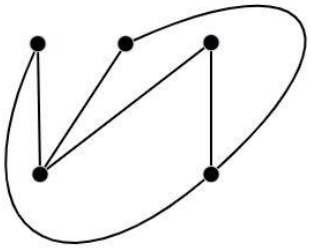


Şekil 5.6. G_1 grafının düzlemsel modeli

Örnek 5.2.2. Basit bağlı, 5 düğümlü ve 6 kenarlı bir G_2 grafının düzlemsel modelini inceleyelim.



Şekil 5.7. G_2 grafı



Şekil 5.8. G_2 grafının düzlemsel modeli

Teorem 5.2.1. (Euler Teoremi): G grafı n düğümlü, m kenarlı ve r bölgeli ise

$$n-m+r=2$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: m üzerine tümevarım uygulanırsa $m=1$ ise $n=1$ ya da $n=2$'dir.

$$n-m+r=2$$

sağlanır.

$$m=1 \; ve \; n=2, r=1 \;\Rightarrow\; n-m+r=2$$

$m-1$ kenarlı n' düğümlü r' bölgeli G' grafı için bu eşitlik geçerli olsun. G, n düğümlü, m kenarlı, r bölgeli düzlemsel bağlı bir graf olsun. G grafından bir e kenarının silinmesi ile elde edilen graf $G-\{e\}$ grafı her kenardan iki bölge geçtiğinden n düğümlü, $m-1$ kenarlı ve $r-1$ bölgeli bir graftır.

$$n-(m-1)+(r-1)=2$$
$$\Rightarrow n-m+1+r-1=2$$
$$\Rightarrow n-m+r=2$$

O halde tümevarımdan n düğümlü m kenarlı r bölgeli her bağlı düzlemsel graf için bu eşitlik sağlanır.

Önerme 5.2.1. G basit bağlı düzlemsel grafı n düğümlü, m kenarlı ise

$$m \leq 3n-6$$

eşitsizliği geçerlidir (Steen, 2010).

İspat: G basit bağlı düzlemsel grafının her bölgesi en az 3 kenarlı ve kenarlar herhangi iki bölgenin arakesiti olduğundan bölgelerin kenar sayılarının toplamı en az $3r$ kenar içerir. Bu toplam kenar sayısının 2 katı yani $2m$'dir.

$$3r \leq 2m \Rightarrow r \leq \frac{2m}{3}$$

$n - m + r = 2$ olduğundan

$$r = 2 + m - n \leq \frac{2m}{3}$$
$$= 6 + 3m - 3n \leq 2m$$
$$= m \leq 3n - 6$$

elde edilir.

Önerme 5.2.2. Her bölge en az 4 kenarlı ve her kenar iki bölgenin arakesiti olduğundan kenar sayısı en az $4r$ ve bu toplam $2m$ tanedir (Steen, 2010).

İspat: $4r \leq 2m \rightarrow r \leq \frac{2m}{4} = \frac{m}{2}$ ve $n - m + r = 2$ olduğundan

$$r = 2 - n + m \leq \frac{m}{2}$$
$$\Rightarrow 4 + 2m - 2n \leq m$$
$$\Rightarrow \leq 2n - 4$$

elde edilir.

Sonuç: G, n düğümlü, m kenarlı basit bağlı düzlemsel grafın her bölgesi en az k kenarlı ise

$$m \leq \frac{k.(n-2)}{(k-2)}$$

eşitliği sağlanır (Steen, 2010).

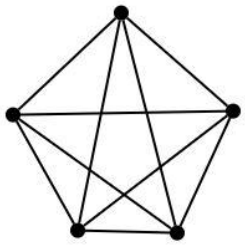
İspat: G, n düğümlü, m kenarlı basit bağlı düzlemsel graf ve $n - m + r = 2$ olduğundan,

$$kr \leq 2m \Rightarrow r \leq \frac{2m}{k}$$
$$\Rightarrow 2 + m - n \leq \frac{2m}{k}$$
$$\Rightarrow 2k + km - kn \leq 2$$
$$\Rightarrow m \leq \frac{k.(n-2)}{(k-2)}$$

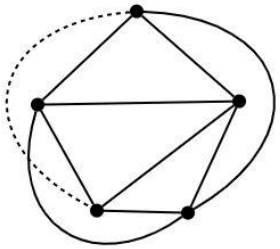
elde edilir.

Teorem 5.2.2. (Kuratowski Teoremi): K_5 tam grafı düzlemsel değildir.

İspat:



Şekil 5.9. K_5 tam grafı



Şekil 5.10. K_5 tam grafı düzlemsel değildir

$m \leq 3n - 6$ eşitliğinden

$$n(K_5) = 5$$

$$m(K_5) = \binom{5}{2} = 10$$

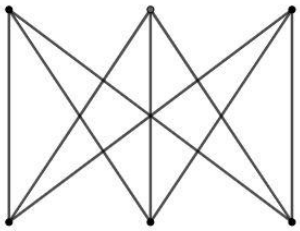
$$3n(K_5) - 6 = 9$$

$$m(K_5) > 3n(K_5) - 6$$

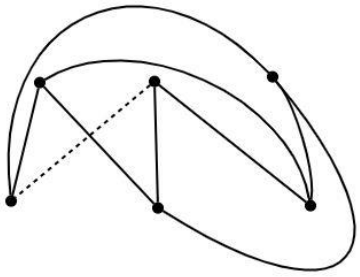
olup K_5 düzlemsel değildir.

Teorem 5.2.3. (Kuratowski Teoremi): $K_{3,3}$ iki parçalı grafı düzlemsel değildir.

İspat:



Şekil 5.11. $K_{3,3}$ grafı



Şekil 5.12. $K_{3,3}$ grafı düzlemsel değildir.

$m \leq 2n - 4$ eşitliğinden,

$$n(K_{3,3}) = 6$$

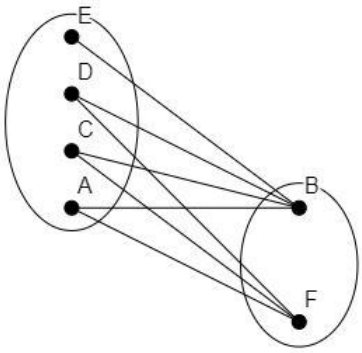
$$m(\mathrm{K}_{3,3}) = 3.3 = 9$$
$$2n(\mathrm{K}_{3,3}) - 4 = 12 - 4 = 8$$
$$e(\mathrm{K}_{3,3}) > 2n(\mathrm{K}_{3,3}) - 4$$

bu sebeple $(\mathrm{K}_{3,3})$ düzlemsel değildir.

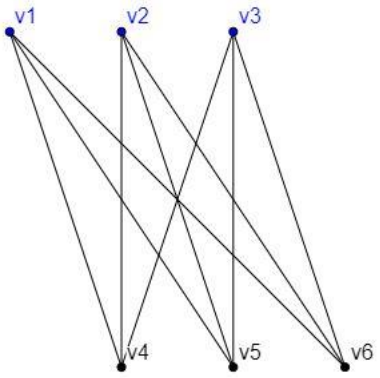
5.3. İki Parçalı Graflar

Tanım 5.3.1. Düğüm kümesi $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots v_n\}$ ve kenar kümesi $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots e_n\}$ olan bir G grafının $u, v \in V$ ve $V_1, V_2 \in V$ olacak şekilde en az iki bağımsız alt kümesi bulunsun. Şayet herhangi bir kenar üzerindeki uç noktalar, farklı düğüm kümelerinin elemanları oluyor ise yani $u \in V_1$ ve $v \in V_2$ oluyor ise $G(V, E)$ grafına ***2-parçalı graf*** denir. Bu tanımı genellersek $r \geq 2$ şartını sağlayan bir $r \in \mathbb{Z}$ tamsayısı olsun. Eğer $G(V, E)$ grafında düğüm kümesi $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots v_n\}$ r ayrı sınıfa ayrılabiliyorsa $G(V, E)$ grafına ***r-parçalı graf*** denir (Nica,2018).

Örnek 5.3.1.



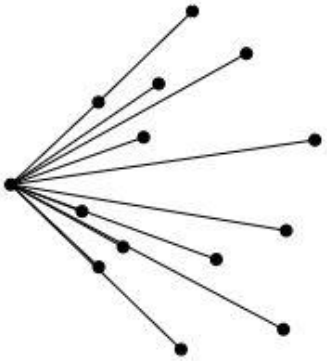
Şekil 5.13. $\mathrm{K}_{2,4}$ grafı



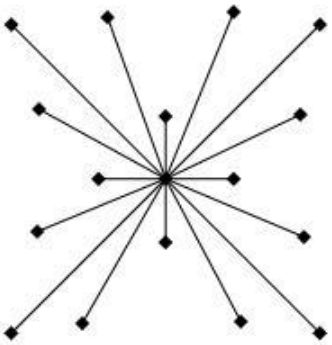
Şekil 5.14. $\mathrm{K}_{3,3}$ grafı

Tanım 5.3.2. $\mathrm{S}_{1,n}$ formunda yazılabilen graflara ***yıldız(star)graf*** denir. Yıldız grafının tek elemanlı kümesine bu grafın ***merkezi*** denir. Yıldız graflar aynı zamanda ağaçların(tree) özel bir durumudur.

Örnek 5.3.2. 14 ve 17 noktalı yıldız graf örnekleri sırası ile gösterilmiştir.



Şekil 5.15. $S_{1,13}$ yıldız grafı



Şekil 5.16. $S_{1,16}$ yıldız grafı

Teorem 5.3.1. G basit bağlı graf olsun. G'nin iki parçalı olması için gerek ve yeter şart G grafı tek uzunluklu çevre içermez.

İspat: $(:\Rightarrow)$ G iki parçalı basit bağlı graf olsun. $V_G = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ olsun. Tek uzunluklu bir C çevre grafının düğümleri $V(C_{2k+1}) = \{V_1, V_2, V_3, \dots, V_{2k+1}\}$ olsun. G iki parçalı olduğundan $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ve $V = V_1 \cup V_2$ olup V_1, V_2 bağımsız iki kümedir.

$$v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, v_3 \in V_1, v_4 \in V_2, \dots$$

olduğundan $\{v_1, v_{2k+1}\} \in E(G)$ ve $\{V_1, V_{2k+1}\} \in V_1$ olması V_1'in bağımsız bir küme olması ile çelişir. O halde G tek uzunluklu çevre içermez.

$(\Leftarrow:)$ G basit bağlı graf tek uzunluklu çevre içermesin. O halde G nin iki parçalı olduğunu gösterelim. Bir $v \in V(G)$ seçelim.

$$V_1 = \{u \in V(G) \mid d(u,v): çift\ sayı\} \cup \{v\}$$

$$V_2 = \{x \in V(G) \mid d(x,v): tek\ sayı\} = V - V_1$$

$i)$ $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ve $V = V_1 \cup V_2$

ii) V_1, V_2'nin bağımsız iki küme olduğunu gösterelim.

Farz edelim ki $x, y \in V_1$ için $\{x, y\} \in E(G)$ olup $d(x,v)$ ve ya $d(v,y)$ çift uzunlukludur.

$$P_1 : x - x_1 - x_2 \dots - x_{2k}$$

$$P_2 : y - y_1 - y_2 \dots - x_{2t}$$

yolları varken $d(P_1 \cup P_2 \cup \{x,y\}) = 2k + 2t + 1$ uzunluklu çevre içerir ki bu G'nin tek uzunluklu çevre içermesi ile çelişir. O halde $\{x,y\} \notin E(G)$. Bu sebeple V_1 bağımsızdır.

Kabul edelim ki $x, y \in V_2$ için $\{x, y\} \in E(G)$ olsun. $d(x, v)$ ve $d(v, y)$ tek uzunluklu olduğundan

$$Q_1 : x - u_1 - u_2 \ldots - u_{2k+1}$$

$$Q_2 : y - v_1 - v_2 \ldots - v_{2t+1}$$

Yolları için $d(Q_1 \cup Q_2 \cup \{x, y\}) = 2k + 1 + 2t + 1 + 1$

$$= 2(k + t + 1) + 1$$

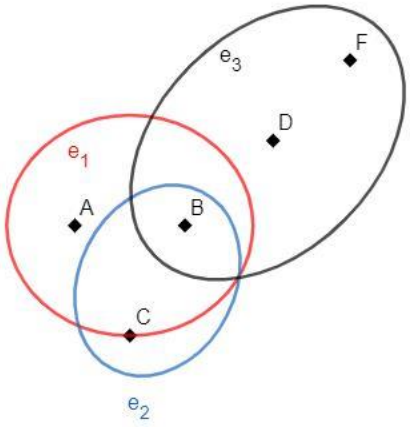
Tek uzunuklu çevre grafıdır. Bu ise hipotezle çelişir. O halde V_2 bağımsızdır. Sonuç olarak G iki parçalı bir graftır.

5.4. Hipergraflar

Tanım 5.4.1. Noktalar kümesi V ve hiperkenarlar kümesi E, noktalar kümesinin sıralı alt kümesi yani $E \subset V$ olmak üzere $\mathcal{H}(V, E)$ yapısına ***hipergraf*** denir. Bazı durumlarda noktalar kümesi $V(\mathcal{H})$ ile gösterilirken, hiperkenarlar kümesi $E(\mathcal{H})$ ile gösterilir. Noktalar ve hiperkenarlar kümelerinin kardinaliteleri sırası ile $|V| = n$, $|E| = m$ şeklindedir. Bir $e \in E$ hiperkenarının kardinalitesi 1 e eşitse yani $|E| = 1$ ise buna ***ilmek(loop)*** denir. Bir $\mathcal{H}(V, E)$ hipergrafında $V = \emptyset$ ve $E = \emptyset$ olması durumunda bu hipergrafa ***boş hipergraf*** , $V \neq \emptyset$ ve $E = \emptyset$ olması durumunda bu hipergrafa ***aşikar hipergraf*** denir (Voloshin, 2009). Bir hipergrafın tüm düğümlerinin derecesi birbirine eşit ise bu hipergrafa ***regüler hipergraf*** eğer $\forall v_i \in V$ için $d(v_i) = r$ oluyorsa bu hipergrafa ***r-regüler hipergraf*** denir. Bir hipergrafta tüm hiper kenarlar aynı sayıda düğüm içeriyor ise bu hipergrafa ***k-üniform hipergraf*** denir (Bretto, 2013).

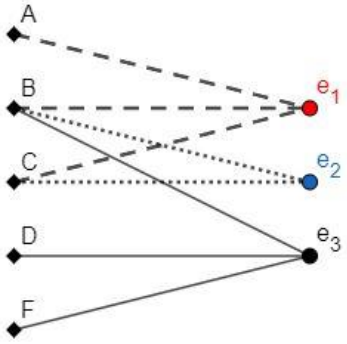
Hipergraflar ile graf arasındaki temel fark, graflarda kenarlar iki düğüm arasında yer alırken hipergraflarda hiperkenarlar üzerinde 2 den daha fazla düğüm bulunabilmesidir. Bir başka deyişle Graf teorisindeki kenarlar, iki düğüm arasındaki bağlantıları temsil ederken, hipergraflarda bulunan hiperkenarlar bir düğüm kümesini temsil edebilir. Bu nedenle, hipergraflar daha karmaşık ilişkileri modellemek için kullanışlı olabilir. Bahsettiğimiz bu bilgiler doğrultusunda faydalı olabilecek bir örnek verelim.

Örnek 5.4.1. Aşağıda verilen hipergraf örneğini inceleyelim.



Şekil 5.17. Bir $\mathcal{H}$ hipergrafı

$\mathcal{H}(V,E)$ hipergrafının düğüm kümesi $V=\{A,B,C,D,F\}$ ve V nin alt kümelerinden oluşan hiperkenar kümesi $E=\{e_1=(A,B,C), e_2=(B,C), e_3=(B,D,F)\}$ den oluşur. Şekil 5.4.1. de verilen hipergraf iki parçalı hipergraf modeli



Şekil 5.18. İki parçalı $\mathcal{H}$ Hipergrafı

şeklinde modellenebilir.

6. GRAFLARIN MATRİS TEMSİLLERİ

Bu bölümde derece, ayrıt, komşuluk, üzerinde bulunma(incidence), Laplasyan ve normalize Laplasyan matrislerin tanımları verilmiş, graf modellerinin kenar ve köşe ilişkileri verilen örnekler doğrultusunda matris temsilleriyle gösterilmiştir.

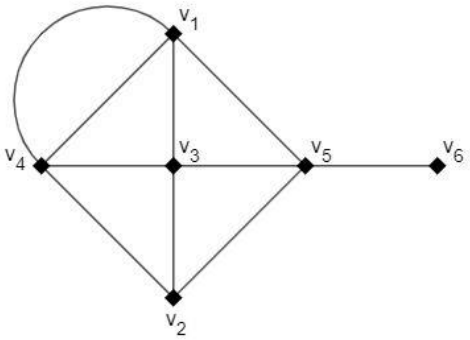
6.1. Derece Matris

Tanım 6.1.1. G, köşe kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ ve kenar kümesi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ olan bir graf ve $d_{i,j} = v_i, v_j$ den geçen kenar sayısı olmak üzere $D = [d_{i,j}]_{nxn}$ ve

$$D_{i,j} = \begin{cases} d\text{üğüm } derecesi, & i = j \\ 0, & diğer \end{cases}$$

Koşullarını sağlayan diagonal matrise ***derece matris*** denir.

Örnek 6.1.1.



Şekil 6.1. 6 köşeli G grafı

Yukarıda verilen graf modelinin her bir düğümden geçen kenar sayısı incelendiğinde bu doğrultuda oluşan matris

$$D(G) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

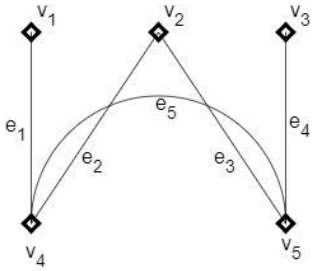
6.2. Ayrıt Matris

Tanım 6.2.1. G, köşe kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots , v_n\}$ ve kenar kümesi kenar kümesi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, \dots , e_m\}$ olan bir graf ve $\mathcal{B} = \left[b_{i,j}\right]_{mxm}$ tipinde

$$\mathcal{b}_{i,j} = \begin{cases} 1, & \left|e_i \cap e_j\right| = 1 \\ 0, & \left|e_i \cap e_j\right| \neq 1, \quad i = j \end{cases}$$

koşulunu sağlayan karesel matrise G den elde edilmiş ***ayrıt matris*** denir.

Örnek 6.2.1. Aşağıda verilen graf modelinin ayrıt matrisini inceleyelim.



$$\mathcal{B}(G) = \begin{array}{c} \\ e_1\rightarrow \\ e_2\rightarrow \\ e_3\rightarrow \\ e_4\rightarrow \\ e_5\rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

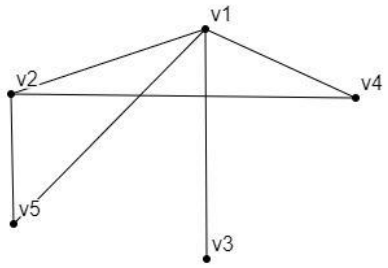
Şekil 6.2. 5 düğümlü 5 kenarlı graf modeli

6.3. Komşuluk Matrisi

Tanım 6.3.1. $G(V, E)$ düğüm kümesi $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots v_n\}$ ve kenar kümesi $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots e_n\}$ olan bir graf olsun. O halde G grafının nxn tipindeki aşağıdaki koşulu sağlayan $A_{ij} = A$ matrisine ***komşuluk matrisi(adjacency matrix)*** denir.

$$A_{ij} = \begin{cases} 1\,, v_i \ komşu \ v_j \ ise \\ 0\,, \qquad\qquad diğer \end{cases}$$

Örnek 6.3.1. G grafının komşuluk matrisini inceleyelim.



$$D = \begin{array}{c} \\ v_1 \rightarrow \\ v_2 \rightarrow \\ v_3 \rightarrow \\ v_4 \rightarrow \\ v_5 \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Şekil 6.3. 5 düğümlü 6 kenarlı graf modeli

Komşuluk matrisi tek değildir. Grafın düğümleri yeniden etiketlenebilir bu ise satır ve sütunların eş zamanlı permütasyonlarına sebep olur.

Komşuluk matrisi hakkında gözlemlenen durumlar şunlardır:

- Eğer bir graf ilmek(self loop) içermiyorsa G grafının komşuluk matrisi $A(G)$'nin köşegen girdileri 0 olur.
- G grafının komşuluk matrisinde bağımsız bir düğüm var ise o düğümün diğer düğümlerle komşuluğu bulunmaz ve matris içerisinde bir satırın tüm girdileri 0 olur.
- Eğer G grafı yönsüz ise komşuluk matrisi $A(G)$ simetrik olur.
- Bir G grafının komşuluk matrisi olan $A(G)$'nin satır ya da sütunları değiştirilerek G_1, G_2 grafları elde edilir ve bu graflar izomorfiktir.
- Bir G grafından elde edilmiş n bileşenli, yönsüz $A(G)$ komşuluk matrisi blok köşegensel $A(G_i)$ olarak yazılabilir. Eğer G grafının G_1, G_2 gibi yalnızca iki bileşeni var ise G'nin komşuluk matrisi

$$A(G) = \begin{bmatrix} A(G_1) & 0 \\ 0 & A(G_2) \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilir.

Tanım 6.3.2. G'nin bir lineer alt grafı, bileşenleri tek kenarlar ya da çevreler olan bir G grafının alt grafıdır.

Teorem 6.3.1. $A(G)$, basit yönsüz bir G grafının komşuluk matrisi olsun. H, G'nin lineer uzanımlı alt grafları ve $e(H)$ ve $c(H)$ sırasıyla H'da çift sayılı bileşen sayısı ve çevre sayısı olmak üzere

$$detA(G) = \sum_{H} (-1)^{e(H)} 2^{c(H)}$$

sağlanır (Harary,1962).

İspat: G, düğüm kümesi $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ den oluşan bir graf ve $A(G) = a_{ij}$ de G'nin komşuluk matrisi olsun. O halde $A(G)$ nin determinantı

$$detA = \sum_{\pi} sgn(\pi) a_{1\pi(1)} \dots a_{n\pi(n)}$$

şeklide hesaplanır. Burada $\pi = \{1,2,3, \dots, n\}$ ve π permütasyonu çift iken $sgn(\pi) = 1$, tek iken $sgn(\pi) = -1$ değerini alır. $a_{1\pi(1)} \dots a_{n\pi(n)} = 0$ olması için gerek ve yeter koşul bazı $1 \leq i \leq n$'ler için $a_{i\pi(i)} = 0$ ve $v_i, v_j \notin \mathrm{V(G)}$ için eğer $\pi(i) = i$ ya da $\pi(i) = j$ oluyorsa $a_{i\pi(i)} = 0$'dır. Aksi halde $a_{1\pi(1)} \dots a_{n\pi(n)} \neq 0$ olması için gerek ve yeter şart π nin permütasyonunun en az iki uzunluklu ayrık çevrelerin çarpımına eşit olmasıdır. O halde

$$\mathrm{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \dots a_{n\pi(n)} = \mathrm{sgn}(\pi) 1 \dots 1 = \mathrm{sgn}(\pi)$$

π'de 2 uzunluklu her çevre tek bir kenara ve 2'den büyük uzunluklu çevre, çevreye denk gelir. Böylece $detA$'nin açılımındaki her bir terim G'nin bir H lineer alt grafını meydana getirir. Herhangi bir $sgn(\pi)$ alt grafın herhangi bir çevresi çift yada tek uzunluklu olmasına bağlı olarak -1 ya da $+1$ değerini alır. Bunun sonucu olarak H'nin çift bileşenlerinin sayısı $e(H)$ olmak üzere $sgn(\pi) = (-1)^{e(H)}$ olur. H'deki her çevrenin 2 farklı yönlendirmesi vardır. Bu yüzden H'deki en az 3 uzunluklu her yönsüz çevre, 2 farklı çift uzunluklu çevreye önderlik eder.

6.4. Üzerinde Bulunma Matrisi

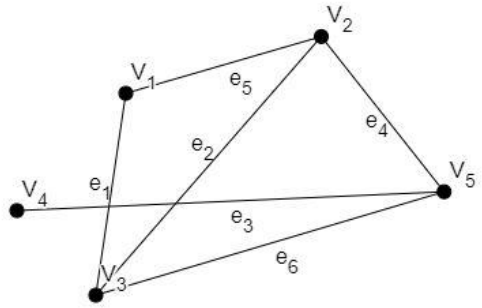
Komşuluk matrisindeki satır ve sütunlar o grafa ait düğümleri temsil ederken, üzerinde bulunma ya da çakışım matrisinde satırlar düğüm kümesinden, sütunlar kenar kümesinden elde edilir. Burada v_a ve v_b keyfi olarak seçilsin. Her köşe-kenar çifti olan (v, e) e kenarı üzerinde bulunan v düğümü anlamına gelir. Burada tanımlanan $p(v, e)$ fonksiyonu için v_a daha küçük indisle belirlensin. O halde $p(v_a, e) = 1$ ve $p(v_b, e) = -1$ olarak belirlenmiştir. Şimdi üzerinde bulunma matrisinin formal tanımını verelim.

Tanım 6.4.1. Düğümleri $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ ve kenarları $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ olan bir G grafı bulunsun.

$$f_{i,j} = \begin{cases} p(v_i, e_j), & eğer\ v_i, e_j\ üzerinde\ ise \\ 0, & d.d \end{cases}$$

koşulları sağlayan nxm tipindeki F matrisine ***üzerinde bulunma matrisi****(incidence matrix)*denir (Molitierno, 2012).

Örnek 6.4.1.



Şekil 6.4.

$$F = \begin{array}{c} \\ v_1\rightarrow \\ v_2\rightarrow \\ v_3\rightarrow \\ v_4\rightarrow \\ v_5\rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Verilen örnek için şunlar gözlenmiştir:
Her sütunda 0 dan farklı 2 eleman bulunur. Satırlardaki girdiler e_j de iki farklı komşu kenara karşılık gelir. Bir kenar üzerinde bulunan küçük sayılı indise sahip düğüm $+1$'e, büyük sayılı indise sahip düğüm -1 e karşılık gelir.

Bir grafın incidence matrisi yada komşuluk matrisi kenar-köşe yapısını temel alır. Bunlar arasındaki ilişki aşağıda verilen teorem ile ifade edilmiştir.

Teorem 6.4.1. G grafı n düğümlü, m kenarlı bir graf ve F matrisi G den elde edilmiş bir incidence matris olsun. G nin komşuluk matrisi A olmak üzere

$$A = |F^T F - 2\mathrm{I}|$$

eşitliği geçerlidir (Molitierno, 2012).

İspat: $i, j = 1,2,3 \dots, m$ için $F^T F$ nin i, j elemanı F nin $i.$ ve $j.$ sütununun noktasal çarpımıdır. Yukarıda verilen sonuçlardan dolayı $F^T F$ nin köşegen girdilerinden herbiri 2 dir. Bu sebeple $F^T F - 2\mathrm{I}$ nin köşegen girdilerinden her biri 0 dır. $F^T F$ nin köşegen dışı elemanlarının (i, j) 0 olabilmesi için gerek ve yeter şart ortak bir düğümün e_i ve e_j üzerinde bulunmamasıdır. Aksi takdirde, $F^T F$ nin (i, j) girdileri ne $+1$ ne de -1 olur.
İncidence matrisler bir grafın uzanımlı ağaç sayısının belirlenmesinde etkin bir rol oynasada bu sayının belirlenmesinde Laplasyan matrislerin daha etkili olduğu görülmüştür.

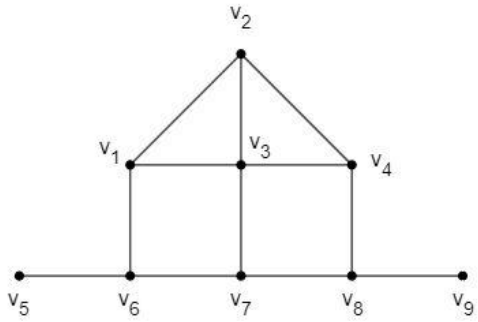
6.5. Laplasyan Matris

Tanım 6.4.1. G grafı düğümleri 1,2,3, … , n olarak isimlendirilmiş n düğümlü bir graf olsun. G grafınının nxn tipindeki aşağıdaki koşulları sağlayan matrisine Laplasyan matris denir. $L(G) = \left[L_{i,j}\right]$ ile gösterilir.

$$L_{i,j} = \begin{cases} -1, & i \neq j \; ve \; i \; ile \; j \; komşu \; ise \\ 0, & i \neq j \; ve \; i \; ile \; j \; komşu \; ise \\ d_i, & i = j \; ise \end{cases}$$

Laplasyan matris, komşuluk ve incidence matrisle ilişkilidir. G grafının düğüm derecelerini içeren diagonal matrisine $D(G)$ matrisi diyelim ve bu graftan elde edilen koşuluk matrisi $A(G)$ olsun. O halde Laplasyan matris $L(G) = D(G) - A(G)$ şeklinde ifade edilir (Chung, 1992).

Örnek 6.4.1. Aşağıda verilen G grafından elde edilen komşuluk, düğüm ve Laplasyan matrisleri inceleyim.



Şekil 6.5. Bir G grafı

Burada $D(G)$, G den elde edilmiş derece matrisi ve $A(G)$, ise G den elde edilmiş komşuluk matrisi olup

$$D(G)=\begin{bmatrix}3&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&3&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&4&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&3&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&3&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&3&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&3&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix} \quad A(G)=\begin{bmatrix}0&1&1&0&0&1&0&0&0\\1&0&1&1&0&0&0&0&0\\1&1&0&1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&1&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanmıştır. Tanım 6.4.1. den $L(G)=D(G)-A(G)$ eşitliği kullanılarak G den oluşturulmuş Laplasyan matris

$$L(G)=\begin{bmatrix}3&-1&-1&0&0&-1&0&0&0\\-1&3&-1&-1&0&0&0&0&0\\-1&-1&4&-1&0&0&-1&0&0\\0&-1&-1&3&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&1&-1&0&0&0\\-1&0&0&0&-1&3&1&0&0\\0&0&-1&0&0&-1&3&-1&0\\0&0&0&-1&0&0&-1&3&-1\\0&0&0&0&0&0&0&-1&1\end{bmatrix}$$

şeklide hesaplanmıştır.

7. SPEKTRAL GRAFLAR

Bu bölümde spektral grafların genel özellikleri verilmiş ve bazı hipergraf modellerinin Laplasyan matrislerinin spektrumları incelenmiştir. Bunlara ek olarak 2. ve 3. mertebeden sonlu projektif düzlemlerin genel spektral özellikleri ve bağlılıkları incelenmiş, özdeğer ve özvektör değerleri tamsayı olan graf modelleri ile çalışılmıştır.

7.1 Grafların Spektral Özellikleri

Bu bölümde G grafının özdeğerlerini komşuluk matrisi yardımıyla hesaplanmıştır ve tüm graflar yönlendirilmemiş(undirected) olarak düşünülmüştür. G nin karakteristik polinomu $(\lambda I - A(G))$ nin determinantına eşittir. Burada A komşuluk matrisidir ve $A(G)$ matrisinden elde edilen karakteristık polinomun kökleri ise grafın özdeğerleridir.

Teorem 7.1.1. G grafının karakteristik polinomu $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ olarak ifade edilsin. O halde

$$a_i = \sum H^{(-1)^{e(H)} 2^{c(H)}}$$

şeklinde verilen toplam, G nin i nci mertebeden tüm H lineer alt grafları üzerinde tanımlıdır. Burada $e(H)$ ve $c(H)$ sırasıyla H nin bileşenlerinin sayısı ve içerdiği çevre sayısıdır (Sachs, 1966).

İspat: G grafı köşe kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ olan bir graf ve $D(G)$, G nin komşuluk matrisi olsun. $a_i = (-1)^i \sum_H detD$ burada H, G nin i. mertebeden indirgenmiş tüm alt graflarıdır. Teorem 6.3.3' den

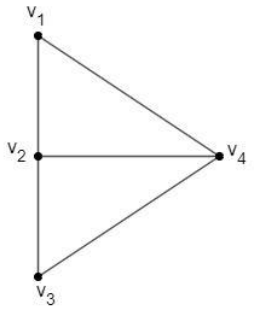
$$detD(G) = \sum\nolimits_H (-1)^{e(H)} 2^{c(H)}$$

eşitliği var ve

$$H = \sum\nolimits_{H_i} (-1)^{e(H_i)} 2^{c(H_i)}$$

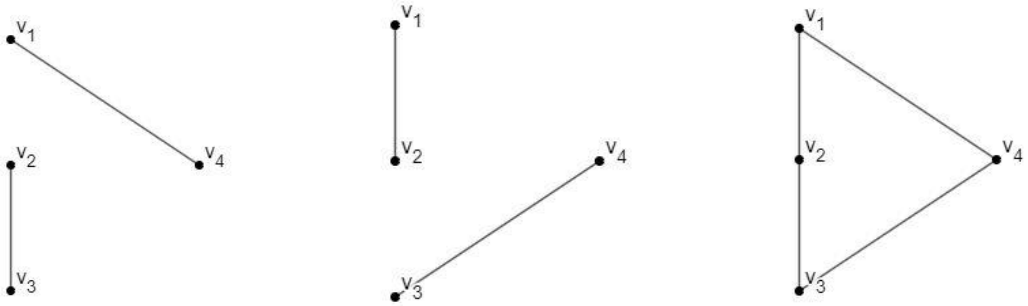
sağlanır. Burada H_i G nin uzanımlı lineer alt grafı, $e(H_i)$ ve $c(H_i)$ sırasıyla H_i nin çift sayılı bileşen sayısı ve çevre sayısıdır.

Örnek 7.1.1. Aşağıda verilen G grafından elde edilen H_1, H_2, H_3 uzanımlı lineer alt grafları inceleyelim.



Şekil 7.1. 4 düğümlü 5 kenarlı bir G grafı

Şekilde verilen 4 düğümlü 5 kenarlı bir G grafı için



a) b) c)

Şekil 7.2. G grafından elde edilen a) H_1, b) H_2, c) H_3 uzanımlı alt grafları

H_1, H_2, H_3 uzanımlı alt grafları verilsin. $detD(G) = \sum_H (-1)^{e(H)} 2^{c(H)}$ olduğundan

$$= (-1)^2 2^0 + (-1)^2 2^0 + (-1)^1 2^1 = 0$$

bulunur. Burada G grafının komşuluk matrisi $A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ olup, bu matrisin karakteristik polinomu ve özdeğerleri

$$\det\big(\lambda I - A(G)\big) = x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x^1 + a_4$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 5(-1)^1 2^0 = -5$$

$$a_3 = 2(-1)^0 2^1 = 4$$

$$a_4 = 2(-1)^2 2^0 + (-1)^1 2^1 = 0$$

Böylece $\det(\lambda I - A(G)) = x^4 - 5x^2 + 4x$ olarak bulunur. Eğer $A(G)$ nxn tipinde karesel bir matris ise A nin özdeğeri olan λ sayısı $\det(\lambda I - A(G)) = 0$ eşitliğini sağlar. Ayrıca A nin sıfırdan farklı bir x özvektörü de $(\lambda I - A)x = 0$ eşitliğini sağlar.

Özdeğerlerin bazı özellikleri şunlardır:

- Özdeğerler λ sayılarıdır ve $A - \lambda I$ matrisini singüler(tersi alınamaz) yapar.
- Eğer A simetrik bir matris ise $(a_{ij} = a_{ji})$ tüm özdeğerler reel sayıdır ve özvektörlerden oluşan $\mathcal{R}^n$ nin ortagonal bir tabanı vardır.
- Tüm özdeğerlerin çarpımı $A(G)$ nin determinantına eşittir. Yani
  $$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = detA(G)$$
  dir.
- Tüm özdeğerlerin toplamı $A(G)$ nin izine eşittir. Yani
  $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \text{İz}(A(G)) = \sum_{\text{İ}=1}^{n} d_{ii}$$
  dir.
- 0 dan farklı özdeğerlerin sayısı $A(G)$ nin rankına eşittir.
- A nin farklı bir özdeğerine karşılık gelen A nin özvektörler kümesi lineer bağımsızdır.
- Özdeğerlerin karelerinin toplamı ayrıt sayısının 2 katına eşittir. Yani
  $\lambda_1{}^2 + \lambda_2{}^2 + \lambda_3{}^2 + \ldots + \lambda_n{}^2 = 2|E(G)|$
  dir.

7.2 Grafların Spektrumlarının Temel Özellikleri

Spektral teorinin ana problemlerinin yarısı, özdeğerlerin dağılımları üzerinde sınırlar türetmekte yatmaktadır. Diğer yarısı, özdeğer sınırlarının etkisi ve sonuçları ile bunların uygulamaları ile ilgilidir. Bu bölümde, özdeğerler hakkında temel bilgiler verilmiştir. Bazı basit üst sınırlar ve alt sınırlar belirtilmiştir. Herhangi bir grafın özdeğerlerinin 0 ile 2 arasında olduğunu gösterilmiştir.

Önerme 7.2.1. n düğümlü bir G grafı için aşağıdakiler geçerlidir:

(**i**).

$$\sum_i \lambda_i \leq n$$

eşitsizliğinin geçerli olabilmesi için gerek ve yeter şart G nin izole düğümünün olmamasıdır.

(**ii**). $n \geq 2$ için

$$\lambda_1 \leq \frac{n}{n-1}$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart G nin n düğümlü bir tam graf olmasıdır.

(**iii**). Tam olmayan bir G grafı için $\lambda_1 \leq 1$ dir.

(**iv**). Eğer G bağlı bir graf ise o halde $\lambda_1 > 0$ dır. Eğer $\lambda_i = 0$ ve $\lambda_{i+1} \neq 0$ ise G nin $i+1$ bileşeni bulunur.

(**v**). Tüm $i \leq n-1$ için

$$\lambda_i \leq 2$$

dir. $\lambda_{n-1} = 2$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul G nin bağlı bir bileşeninin basit ve iki parçalı olmasıdır.

(**vi**). Bir grafın spektrumu o garfın basit bağlı bileşenlerinin spektralarının birleşimidir.

İspat: (**i**) G nin normalize Laplasyan matrisinin izinden açıktır.

(**ii**) nin ispatı (**i**) den ve $\lambda_0 = 0$ dan açıktır.

(**iii**) G bağlıysa, özdeğeri 0 olan herhangi bir harmonik özfonksiyon her tepe noktasında aynı değeri varsaydığından, özdeğer 0 ın katlılığı 1'e eşittir. Böylece, (**iv**) iki ayrık grafın birleşiminin spektrumu ayrık grafların spektrumlarının birleşimine eşittir.

(**v**) 1.6 daki eşitlikten

$$(f(x) - f(y))^2 \leq 2\left(f^2(x) - f^2(y)\right)$$

bu yüzden tüm $i = n-1$ ler için

$$\lambda_i \leq sup_f \frac{\sum_{x\sim y}(f(x)-f(y))^2}{\sum_x f^2(x)dx} \leq 2$$

eşitsizliği geçerlidir. Ayrıca G de bulunan her $\{x, y\}$ kenarı için $f(x) = -f(y)$ eşitliği sağlanır. Bu nedenle $f \neq 0$ olduğundan G iki parçalı bağlı bir bileşene sahiptir. Başka bir deyişle, G 'nin iki parçalı bağlı bir bileşeni varsa, f fonksiyonunu $\lambda_{n-1} = 2$ yapacak şekilde seçebiliriz.

(**vi**) Tanımdan dolayı açıktır.

7.3 Spektral Tam Graflar

K_n, n düğümlü bir tam graf ve komşuluk matrisi A

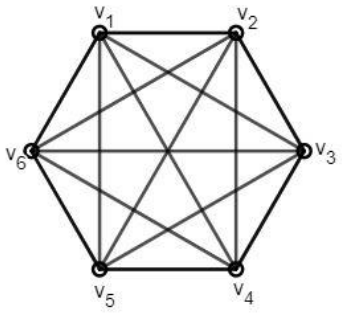
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{nxn}$$

olarak temsil edilsin.

Teorem 7.3.1. $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için K_n nin özdeğerleri 1 katlılıklı $n-1$ ve $n-1$ katlılıklı -1 den ibarettir (Balakrishnan ve Ranganathan, 2012).

İspat: $A(K_n) = [a_{i,j}]$ K_n den elde edilmiş komşuluk matrisi olsun. J_n tüm girdileri 1 olan nxn tipinde karasel bir matris ve I_n birim matris olmak üzere K_n tam grafı $J_n - I_n$ olarak yazılabilir. Burada J_n simetrik ve rankı 1 olduğundan yalnızca 1 tane 0 dan farklı özdeğere sahiptir. Bu yüzden $A(K_n)$ nin özdeğerleri 1 katlılıklı $n-1$ ve $n-1$ katlılıklı -1 den ibarettir.

Örnek 7.3.1.



Şekil 7.3. K_6 Tam grafı

K_6 tam grafının komşuluk matrisi

$$A(K_6) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dir. K_6 tam grafının karakteristik polinomu $P_{K_6}(\lambda) = (\lambda - 5)(\lambda + 1)^5$ olup özdeğerleri 1 katlılıklı $\lambda = 5$ ve 5 katlılıklı $\lambda = -1$ den oluşur.

7.4 Belirli Graf İşlemleri Altında Laplas Matrislerinin Spektrumu

Bu bölümde, Laplasyan matrislerinin genel spektrumunu araştırılmıştır. Laplas integrali olan graflar, yani Laplas özdeğerlerinin tamamı tamsayı olan grafları araştırılmıştır.

Teorem 7.4.1. G, n düğümlü, k bileşenli, ağırlıklı bir graf ve L bir Laplasyan matris olsun. O halde

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0 \; ve \; \lambda_{k+1} > 0$$

eşitliği geçerlidir (Molitierno, 2012).

İspat: G grafının her k bileşeni için $L_1, \dots, L_k$ Laplasyan matrisleri bulunsun. L'nin $L_1, \dots, L_k$ bloklarından oluşan bir blok köşegen matrisine dönüştürülebilir. Burada $e_{(i)}$, G'nin i'ninci bileşenine karşılık gelen ve elemanları 1'lerden ve başka yerlerdeki 0 lardan oluşan vektör olsun. $\{e_{(1)}, e_{(2)}, e_{(3)}, \dots, e_{(k)}\}$ vektörlerinin kümesi L nin 0 özdeğerine karşılık gelen özvektörlerinin lineer bağımsız kümesidir. Her L_i bloğu tekil indirgenemez bir matris olduğundan her i için L_i'lerin basit özdeğeri 0 dır. Bu sebeple $\{e_{(1)}, e_{(2)}, e_{(3)}, \dots, e_{(k)}\}$ kümesi 0 özdeğerine karşılık gelen L'nin temel bir öz uzayına dönüşür. Bundan dolayı bir simetrik matrisin her özdeğeri için cebirsel ve geometriksel katlılıklar eşittir.

Bir grafa kenar eklendiğinde ya da kenar silindiğinde ya da var olan kenarın ağırlığı değiştirildiğinde grafın Laplasyan matrisindeki değişimleri izlemek ilgi çekici olabilir.

Aşağıda verilen teorem bize bu durumlardaki özdeğerlerin nasıl değiştiğine ilişkin bir bakış açısı sunmaktadır.

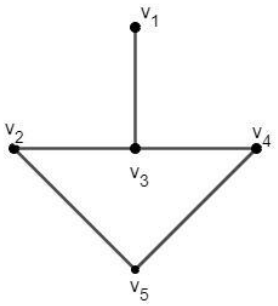
Teorem 7.4.2. G, n düğümlü bir graf ve , $\hat{G}$, G 'de bitişik olmayan iki köşeyi birleştiren ve bu grafa ağırlıklı bir kenar ekleyerek veya G 'de mevcut bir kenarın ağırlığını artırarak G 'den oluşturulan n düğümlü bir graf olmak üzere tüm $i = 1, \dots, n$ ler için

$$\lambda_i(L_G) \leq \lambda_i(L_{\hat{G}})$$

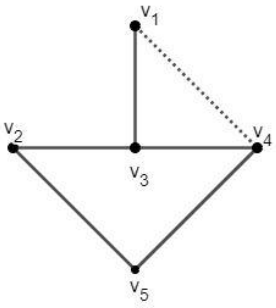
eşitsizliği sağlanır (Molitierno, 2012).

İspat: Bazı pozitif yarı tanımlı matris A için $L_{\hat{G}} = L_G + A$ eşitliği geçerli ve Teorem 7.2.2 den bitişik olmayan köşeleri birleştiren bir kenar eklediğimizde veya mevcut bir kenarın ağırlığını artırdığımızda, karşılık gelen özdeğerlerin ya artacağını ya da değişmeden kalacağını söyler ve asla azalmazlar.

Örnek 7.4.1. Aşağıdaki soldaki ağırlıksız bir G grafını ele alalım. G için Laplace matrisinin özdeğerlerinin $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 4,\ \lambda_5 = 5$ olduğunu gözlemleyin. G grafına sağdan 1. ve 4. düğüm arasına kenar ekleyelim.



Şekil 7.4. Bir G grafı



Şekil 7.5. G grafına bir kenar eklenmesiyle oluşan graf

$\hat{G}$ için Laplasyan matrisinin özdeğerlerini $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1.586,\ \lambda_3 = 3,\ \lambda_4 = 4.414$ ve $\lambda_5 = 5$ olarak hesaplıyoruz. Burada λ_2, λ_3 ve λ_4 değerlerinin arttığını görebiliriz ayrıca v_1 ve v_4 köşelerini birleştiren kenarı eklediğimizde λ_1 ve λ_5 değerleri değişmeden kalır. Teorem 7.4.2'ye göre, n köşe üzerindeki tüm ağırlıksız graflar arasında, en büyük özdeğerlere sahip graf n düğümlü graf K_n tam grafıdır. Burada

$$L(K_n) = nI - J$$

olup I, birim matrisi ve J, tüm elemanları birlerden oluşan matristir. Her zaman olduğu gibi e, $\lambda_1 = 0$ a karşılık gelen bir özvektördür. Kalan özdeğerler için, $f(i)$ birinci konumda 1, i. konumda -1 ve diğer yerlerde sıfırlar içeren n tane girdi içeren vektör olsun. Burada $\{f(i) : i = 1, \dots, n\}$ kümesinin lineer bağımsız olduğu gözlemlenir.

Ayrıca, her $i = 2, \dots, n$ için gözlemlenirse bu sonuç

$$\big(L(K_n)\big)f(i) = (nI - J)f(i) = nf(i)$$

olur. Dolayısıyla $\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = n$. Bu ise bizi ağırlıksız graflar için aşağıdaki iki sonuca götürür.

Sonuç 7.4.1. G, Laplace matrisi L ile n düğüm üzerinde bulunan ağırlıksız bir graf olsun. λ, L'nin bir özdeğeriyse, o zaman

$$\lambda \leq n$$

olur.

İspat: G düğümlü her ağırlıksız G grafiğinin bir alt grafı olduğunu biliyoruz. İspat, Teorem 7.4.2. den n, $L(\mathrm{K_n})$ nin en büyük özdeğeri olup açıktır.

Sonuç 7.4.2. G, n düğümlü ağırlıksız bir graf ve L özdeğerleri $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ olan G den elde edilmiş Laplasyan matris olsun. O halde

$$G = \mathrm{K_n} \Leftrightarrow tüm\ 2 \leq i \leq n\ ler\ için\ \lambda_1 = 0\ ve\ \lambda_i = n$$

dir.

İspat: Daha önce $G = \mathrm{K_n}$ ve tüm $2 \leq i \leq n$ ler için $\lambda_1 = 0$ ve $\lambda_i = n$ olduğunu gördük. Tersine $G \neq \mathrm{K_n}$ olsun. G grafı, $\mathrm{K_n}$ den herhangi bir e kenarının silinmesiyle oluşan $\mathrm{K_n} - e$ nin bir alt grafı olur. Genelliği kaybetmeden, G 'nin v_1 ve v_2 köşelerini birleştiren kenar e olsun. O halde $\mathrm{K_n} - e$ nin Laplasyan matrisi $\hat{L}$

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} n-2 & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & n-2 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{bmatrix}$$

olur. Burada $\lambda_1(\hat{L}) = 0$ olduğu açıktır. $\lambda_2 = n - 2$, $[1, -1, 0, 0, \dots, 0]^T$ a karşılık gelen bir özvektördür. Bu ise Teorem 7.4.2. den $\lambda_2(L) \leq n - 2 \leq n$ olup aksini ispatlar.

7.5 Komşuluk ve Laplasyan Özdeğerler

Matrislerle ilişkili olan en önemli iki matris komşuluk ve Laplasyan matrisleridir. İki matriste elemanlarını bir G grafının V düğüm kümesinden alan karesel matrislerdir.

Komşuluk matrisi

$$A_{ij} = \begin{cases} 1\,, v_i \ komşu \ v_j \ ise \\ 0\,, \qquad\qquad diğer \end{cases}$$

ve Laplasyan matris

$$L_{i,j} = \begin{cases} -1, & i \neq j \ ve \ i \ ile \ j \ komşu \ ise \\ 0, & i \neq j \ ve \ i \ ile \ j \ komşu \ değil \ ise \\ d_i, & i = j \ ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır. İki matris arasında bulunan ilişki ise $L = D - A$ şeklindedir. Laplasyan matrisi ve komşuluk matrisini $\ell^2 V$ operatörü üzerinden gösterelim. Burada $\ell^2 V$, V üzerinde bulunan kompleks değerli fonksiyonların sonlu boyutlu uzayı olup,

$$\langle f, g \rangle = \sum_v f(v)\overline{g(v)}$$

şeklinde verilen iç çarpımdan elde edilir.

Komşuluk operatörü A: $\ell^2 V \to \ell^2 V$ ve Laplasyan operatörü L: $\ell^2 V \to \ell^2 V$ sırası ile

$$Af(v) = \sum_{u:u\sim v} f(u)$$

ve

$$Lf(v) = \deg(v)\, f(v) - \sum_{u:u\sim v} f(u)$$

olarak ifade edilir.

Bunlara bağlı iki kullanışlı formül verelim.

$$\langle Af, f \rangle = \sum_{u\sim v} f(u)\overline{f(v)} = \sum_{\{u,v\}\in E} 2Re\big(f(u)\overline{f(v)}\big),$$

$$\langle Lf, f\rangle = \frac{1}{2}\sum_{u\sim v}|f(u) - F(v)|^2 = \sum_{\{u,v\}\in E}|f(u) - f(v)|^2$$

Burada komşuluk matrisi A ve Laplace matrisi L gerçek simetrik matrislerdir. M gerçek, simetrik nxn tipinde bir matris ise, o zaman özvektörlerden oluşan bir ortogonal taban vardır ve M'nin sayılan n katlılıklı gerçek özdeğeri vardır.

Böylece, hem A hem de L'nin $n = |V|$ tane gerçek özdeğerleri vardır. Aslında, hem A hem de L'nin integral girdileri olduğundan, özdeğerler cebirsel tam sayılardır.
Tüm bunları göz önünde bulundurursak, sırası ile komşuluk ve Laplasyan özdeğerlerin şu şekilde gösterip sıralarız:

$$\alpha_{min} = \alpha_n \leq \cdots \leq \alpha_2 \leq \alpha_1 = \alpha_{max}$$
$$\lambda_{min} = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n = \lambda_{max}$$

Burada n, her zamanki gibi, köşe sayısını belirtir. Özdeğerleri graf değişmezleriyle(invaryantlarıyla) ilişkilendirmek amacıyla, en önemli özdeğerler, λ_2 ve α_2 nin yanı sıra uç değerler olacaktır.

Spektrum, çoklu özdeğerler kümesidir, yani katlılıklarına göre tekrar eden özdeğerler kümesidir. Regüler graflar için, Laplace matrisi ve komşuluk matrisi aynı spektral bilgiyi taşır.

$$L = DI - A$$
$$\lambda_k = D - \alpha_k$$

Bu nedenle, Laplasyan veya komşuluk spektrumunu kullanmak, çoğunlukla bir kolaylık sağlar. Regüler olmayan graflar için bile, komşuluk ve Laplasyan özdeğerleri arasında bir tür ilişki bulunur (Nica, 2018).

Laplasyan lehine çok önemli olan bir noktayı aşağıdaki teorem yardımı ile inceleyelim.

Teorem 7.3.1. 0, bir özfonksiyon olarak $\mathbb{1}$ sabit fonksiyonuna sahip olan bir Laplace özdeğeridir. Ayrıca, 0 basit bir özdeğerdir (Nica, 2018).

İspat: İlk kısım her v için kolaylıkla incelenebilir.

$$L\mathbb{1}(v) = deg(v) - \sum_{u.u\sim v} 1 = 0$$

Şimdi 0 ın Laplasyan özdeğer olduğunu ispatlayalım. Eğer f bir özfonksiyon ise

$$Lf = 0$$

olur. Böylece

$$0 = \langle Lf, f \rangle = \sum_{\{u,v\} \in E} |f(u) - f(v)|^2$$

elde edilir.Burada u, v ye komşu olduğunda $f(u) = f(v)$ olup f fonksiyonunun sabit olması gerektiğini anlamına gelir.

Bu teorem, aşikar Laplas özdeğeri olarak 0 a atıfta bulunmamızı ister. Genel olarak ispat, bir Laplas özdeğeri olarak 0'ın katlılığının, bağlı bir grafın bileşenlerinin sayısı olduğunu gösterir. Böylece bir grafın bağlılığı Laplasyan spektrumundan anlaşılabilir. Ancak, bir grafın bağlılığı komşuluk matrisinin spektrumundan görülemez.

Sonuç 7.3.1. Regüler bir graf için, d derecesi, bir özfonksiyon olarak sabit fonksiyon 𝟙 ile basit bir özdeğerdir (Nica, 2018).

Tersine, eğer 𝟙 bir bitişik özfonksiyon ise, grafın regüler olduğunu unutmayın. Regüler bir graf için derece, aşikar komşuluk özdeğeridir. Bir grafın komşuluk spektrumu, aşağıda formülle gösterilen bir kombinetoryel bileşene sahiptir.

$$\sum {\alpha_k}^r = \text{İz} A^r, \;\; r = 1,2,3, \ldots$$

Bu formülün amacı, sağ tarafın graftaki r uzunluklu kapalı yolları saymasıdır. Gerçekten de, A^r nin (u, v) girdisi, u ve v gibi grafın iki köşesini birleştiren r uzunluklu yolların sayısına eşittir. Burada $r = 1$ ve $r = 2$ için

$$\sum \alpha_k = \text{İz} A^r = 0$$

ve

$$\sum {\alpha_k}^2 = \text{İz} A^2 = \sum \deg(v) = 2|E|$$

olur.

Teorem 7.3.3. Komşuluk özdeğerler $[-d, d]$ aralığında, Laplasyan özdeğerler $[0,2d]$ aralığında yer alır (Nica, 2018).

İspat: α, f özfonksiyonu üzerinde bir komşuluk özdeğer olsun. Burada

$$\alpha f(v) = \sum_{u.u\sim v} f(u)$$

$|f|$ nin maksimum değerine ulaştığı bir v tepe noktasındaki öz-ilişkiyi göz önünde bulunduralım. O zaman

$$|\alpha||f(v)| \leq \deg(v)|f(v)| \leq d|f(v)|$$

olup

$$|\alpha| \leq d$$

olur. Benzer şekilde, λ özfonksiyonu g olan bir Laplas özdeğeri olsun. Daha önce bahsedildiği gibi, $|g|$ nin maksimuma ulaştığı bir v tepe noktasında öz-ilişkiyi kullanırız.

$$(\deg(v) - \lambda)g(v) = \sum_{u.u\sim v} g(u)$$

Burada $0 \leq \lambda \leq 2\deg(v) \leq 2d$ olup

$$|\deg(v) - \lambda| \leq \deg(v)$$

elde ederiz. Şimdi alternatif bir argüman verelim ve $\forall f \in l^2V$ için $0 \leq \langle Lf, f\rangle \leq 2d\langle f, f\rangle$ olduğunu iddia edelim.

$$\langle Lf, f\rangle = \frac{1}{2}\sum_{u\sim v}|f(u) - F(v)|^2 \leq \sum_{u\sim v}(|f(u)|^2 + |f(v)|^2) = 2\sum_{v}\deg(v)\,|f(v)|^2$$
$$\leq 2d\sum_{v}|f(v)|^2 = 2d\langle f, f\rangle$$

olur. Şimdi λ, özfonksiyonu g olan bir Laplace özdeğeri olsun. O zaman $0 \leq \lambda \leq 2d$ için

$$\langle Lg, g\rangle = \lambda\langle g, g\rangle$$

olur. Bildiğimiz gibi, bir graf regüler ve iki parçalı ise, o zaman $2d$ bir Laplace özdeğeri olarak elde edilir ve bunu önceki alternatif argüman sayesinde görebiliyoruz. $2d$ bir Laplace özdeğeri olsun. O halde g bağlı özfonksiyonu

$$\langle Lg, g\rangle = 2d\langle g, g\rangle$$

sağlar. Bu ise, yukarıda gösterilen tahminde her iki eşitsizliğin de aslında eşitlik olduğu anlamına gelir. İlki, komşu u ve v köşelerinin her çifti için $g(u) + g(v) = 0$ olduğunda bir eşitliktir. Bağlılıkta ise g, $\pm c$ değer alacak şekilde $c \neq 0$ olan bir c sabiti vardır.

7.6. 2. ve 3. Mertebeden Sonlu Projektif Düzlemlerin Laplasyan Spektrumu

Bu bölümde, bu çalışma ile ilgili literatürde yer alan temel tanımlar ve teoremler sunulmaktadır (Zakiyyah, 2021).

Tanım 7.4.1. Bir k-üniform hipergraf $\mathcal{H}$, bir (X, D) çiftidir, öyle ki D, $P_k(\mathrm{X})$'nim bir alt kümesidir, sonlu bir X kümesinin tüm k-alt kümelerinin kümesi, burada $k \in Z$ ve $k \geq 2$. X'in elemanlarına köşeler, D'nin elemanlarına ise $\mathcal{H}$ 'nin kenarları denir. H'nin her farklı köşe çifti H'nin en fazla bir kenarında bulunuyorsa bir $\mathcal{H}$ hipergrafının lineer olduğu söylenir. $G(\mathcal{H})$ ile gösterilen bir $H = (X, E)$ hipergrafının kesişim grafiği, $V(G(\mathcal{H})) = E$ ve $E(G(\mathcal{H}))$'nin E'nin farklı elemanlarından oluşan tüm sırasız çiftlerin bulunduğu $\{e, e'\}$ öyle ki $|e \cap e'| = 1$ kümesinden ibarettir. Burada herhangi bir A kümesi için $|\mathrm{A}|$ kümenin kardinalitesini gösterir (Naik vd., 1982).

Tanım 7.4.2. Sonlu sayıda nokta ve doğru içeren n. mertebeden sonlu projektif düzlem aşağıdaki aksiyomları sağlar (Akça vd., 2006).

1. Her doğru $n + 1$ noktalıdır.
2. Her noktadan $n + 1$ tane doğru geçer.
3. Farklı iki doğrunun bir tek kesişimi vardır.
4. Farklı iki noktadan bir tek doğru geçer.

Tanım 7.4.3. Bir hipergrafın Laplasyan matrisi $\mathrm{L}(\mathcal{H}) = \mathrm{Deg}(\mathcal{H}) - \mathrm{A}(\mathcal{H})$ eşitliği ile sağlanır. Burada $\mathcal{H}$'den elde edilen derece matrisi $\mathrm{Deg}(\mathcal{H}) = diag\big(d_1(\mathcal{H}), d_2(\mathcal{H}), \dots, d_n(\mathcal{H})\big)$ ve komşuluk matrisi $\mathrm{A}(\mathcal{H})$, $\mathcal{H}$ hipergrafından elde edilir. Bir $\mathcal{H}$ hipergrafının Laplasyan matrisi simetrik ve pozitif yarı sonludur. En küçük özdeğeri $\mu = 0$'dır ve buna karşılık gelen özvektör $\mathrm{j} = (1,1,1, \dots, 1)$ olarak gösterilir. Ayrıca, $\mu = 0$'ın katlılığı $\mathcal{H}$ 'deki bileşenlerin sayısına eşittir. $A(\mathcal{H})$, $\mathcal{H}$ hipergrafının bitişiklik matrisini temsil etsin. $V(\mathcal{H})$'deki herhangi iki farklı v_i ve v_j köşesi için A'daki a_{ij} girdisi, $\mathcal{H}$ 'de hem v_i hem de v_j'yi içeren hiper kenarların sayısını gösterir ve A'nın köşegen girişleri sıfır olmak zorundadır (Rodriguez, 2003).

2003 yılında Rodriquez, bir $v_i \in V(H)$ köşesinin Laplasyan derecesinin köşelerinin $\delta_L(v_i) = \sum_{J=1}^{n} a_{ij}$ denklemini sağladığını göstermiştir.

Teorem 7.4.1 $PP(n)$ n. mertebeden sonlu projektif düzlem olmak üzere bu düzlemin spektrumu

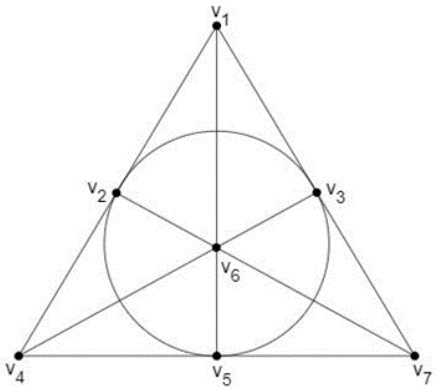
$$Spek(PP(n)) = \begin{pmatrix} 0 & n^2+n+1 \\ 1 & n^2+n \end{pmatrix}$$

eşitliğini sağlar.

Buraya kadar verilen bilgiler doğrultusunda ve yukarıdaki teorem yardımıyla mertebesi 2 ve 3 olan sonlu projektif düzlemlerin Laplasyan matrislerini, Laplasyan spektrumunu, özdeğerlerini ve özvektörlerini inceleyelim.

7.7. 2. Mertebeden Sonlu Projektif Düzlemin Laplasyan Spektrumu

2. mertebeden sonlu projektif düzlem Fano düzlemi olarakta bilinen en küçük projektif düzlemdir.



Şekil 7.6. Fano Düzlemi

Fano Düzleminin 7 köşesi, 7 hiper kenarı vardır ve Şekil 7.6.'da çizildiği gibi her bir köşe 3 hiper kenar üzerinde bulunur ve her hiper kenar 3 köşe içerir. Yukarıda verilen Fano düzleminin noktalar kümesi

$$P = \{v_1, v_2, \dots, v_7\}$$

doğrular kümesi ise

$L = \{\{v_1, v_2, v_4\}, \{v_2, v_3, v_5\}, \{v_1, v_3, v_7\}, \{v_4, v_5, v_7\}, \{v_2, v_6, v_7\}, \{v_3, v_6, v_4\}, \{v_1, v_6, v_5\}\}$ dir.

Teorem 7.5.1. Fano düzleminin spektrumu 1 katlılıklı 0 ve 6 katlılıklı 7 özdeğerlerinden oluşur.

İspat: 2. dereceden sonlu projektif düzlemin spektrumu, bu düzlemin Laplasyan matrisi L(PP_2)'den hesaplanır. 2. dereceden sonlu projektif düzlemin derece matrisi $Deg(PP_2)$ ve komşuluk matrisi A(PP_2)'yi sırasıyla gösterilmiştir

$$\begin{pmatrix} 6&0&0&0&0&0&0\\ 0&6&0&0&0&0&0\\ 0&0&6&0&0&0&0\\ 0&0&0&6&0&0&0\\ 0&0&0&0&6&0&0\\ 0&0&0&0&0&6&0\\ 0&0&0&0&0&0&6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&1&1&1&1&1\\ 1&0&1&1&1&1&1\\ 1&1&0&1&1&1&1\\ 1&1&1&0&1&1&1\\ 1&1&1&1&0&1&1\\ 1&1&1&1&1&0&1\\ 1&1&1&1&1&1&0 \end{pmatrix}.$$

Burada L(PP_2) = $Deg(PP_2)$ − A(PP_2) olduğundan

$$\mathrm{L}(PP_2) = \begin{pmatrix} 6&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\ -1&6&-1&-1&-1&-1&-1\\ -1&-1&6&-1&-1&-1&-1\\ -1&-1&-1&6&-1&-1&-1\\ -1&-1&-1&-1&6&-1&-1\\ -1&-1&-1&-1&-1&6&-1\\ -1&-1&-1&-1&-1&-1&6 \end{pmatrix}$$

eşitliği bulunur. L(PP_2)'nin karakteristik polinomu $H_{PP_2}(\lambda) = \lambda(\lambda - 7)^6$ olduğundan bu hipergrafın özdeğerleri $\lambda = 0$ ve 6 katlılıklı $\lambda = 7$ den ibarettir ki bu ispatı tamamlar.

Teorem 7.5.2. 2. mertebeden sonlu projektif düzlemin Laplasyan spektrumuna karşılık gelen özvektörler 1 ve 6-boyutlu lineer vektör uzayını gerer.

İspat: Bir önceki teoremden, 2. dereceden sonlu bir projektif düzlemin Laplasyan spektrumunun 0 ve 7 özdeğerlerinden oluştuğu kanıtlanmıştır. $\lambda = 0$ özdeğerine karşılık gelen

$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ özvektörü 1-boyutlu lineer vektör uzayını gerer. Benzer şekilde $\lambda = 7$ özdeğerine karşılık gelen

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

özvektörleri 6-boyulu lineer vektör uzayını gerer. Sonuç olarak 2. mertebeden sonlu projektif düzlemin spektrumu

$$Spek(PP(2)) = \begin{pmatrix}0 & 7\\1 & 6\end{pmatrix}$$

eşitliğini sağlar. Bu matrisin ilk satırı özdeğerleri temsil ederken, ikinci satır bu özdeğerlerin katlılıklarını gösterir. 0 özdeğerine karşılık gelen özuzay 1-boyutlu lineer bir vektör uzayıdır ve 7 özdeğerine karşılık gelen özuzay 6-boyutlu lineer bir vektör uzayıdır.

7.8. 3. Mertebeden Sonlu Projektif Düzlemin Laplasyan Spektrumu

3. dereceden sonlu projektif düzlemin 13 köşesi, 13 hiperkenarı vardır. Her bir köşe 4 hiper kenar üzerinde bulunur ve her hiperkenar 4 köşe içerir. 3. dereceden sonlu projektif düzlemin noktalar kümesi

$$P = \{p_1, p_2, \dots, p_{13}\}$$

doğru kümesi ise

L=$\{\{p_1,p_2,p_3,p_{10}\},\{p_4,p_5,p_6,p_{10}\},\{p_7,p_8,p_9,p_{10}\},\{p_1,p_5,p_9,p_{11}\},\{p_3,p_4,p_8,p_{11}\},$
$\{p_2,p_6,p_7,p_{11}\},\{p_3,p_4,p_8,p_{11}\},\{p_1,p_4,p_7,p_{12}\},\{p_2,p_5,p_8,p_{12}\},\{p_3,p_6,p_9,p_{12}\},$
$\{p_3,p_5,p_7,p_{13}\},\{p_2,p_4,p_9,p_{13}\},\{p_1,p_6,p_8,p_{13}\},\{p_{10},p_{11},p_{12},p_{13}\}\}$

şeklindedir.

Teorem 7.6.1. 3. dereceden sonlu projektif düzlemin spektrumu 1 katlılıklı 0 ve 12 katlılıklı 13 özdeğerlerinden oluşur.

İspat: 3. dereceden sonlu projektif düzlemin spektrumu, bu düzlemin Laplasyan matrisi L(PP_3)'den hesaplanır. 3. dereceden sonlu projektif düzlemin derece matrisi $Deg(PP_3)$ ve komşuluk matrisi A(PP_3)'yi sırasıyla gösterilmiştir

$$\begin{pmatrix} 12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&12&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&12&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&12&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0 \end{pmatrix}.$$

Burada L(PP_3) = $Deg(PP_3)$ − A(PP_3) olduğundan Laplasyan matris

$$\begin{pmatrix} 12&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1 \\ -1&12&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1 \\ -1&-1&12&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1 \\ -1&-1&-1&12&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1 \\ -1&-1&-1&-1&12&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1 \\ -1&-1&-1&-1&-1&12&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1 \\ -1&-1&-1&-1&-1&-1&12&-1&-1&-1&-1&-1&-1 \\ -1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&12&-1&-1&-1&-1&-1 \\ -1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&12&-1&-1&-1&-1 \\ -1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&12&-1&-1&-1 \\ -1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&12&-1&-1 \\ -1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&12&-1 \\ -1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&12 \end{pmatrix}$$

şeklinde hesaplanmıştır. L(PP_3)'ün karakteristik polinomu $H_{PP_3}(\lambda) = \lambda(\lambda - 13)^{12}$ olduğundan bu hipergrafın özdeğerleri 1 katlılıklı $\lambda = 0$ ve 12 katlılıklı $\lambda = 13$ den ibarettir ki bu ispatı tamamlar.

Teorem 7.6.2. 3. mertebeden sonlu projektif düzlemin Laplasyan spektrumuna karşılık gelen özvektörler 1 ve 12-boyutlu lineer vektör uzayını gerer.

İspat: Bir önceki teoremden, 3. dereceden sonlu bir projektif düzlemin Laplasyan spektrumunun 0 ve 13 özdeğerlerinden oluştuğu kanıtlanmıştır. $\lambda = 0$ özdeğerine karşılık gelen

$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ özvektörü 1-boyutlu lineer vektör uzayını gerer. Benzer şekilde $\lambda = 13$ özdeğerine karşılık gelen

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

özvektörleri 12-boyutlu lineer vektör uzayını gerer. Sonuç olarak 3. mertebeden sonlu projektif düzlemin spektrumu

$$Spek(PP(3)) = \begin{pmatrix}0 & 13\\1 & 12\end{pmatrix}$$

eşitliğini sağlar. Bu matrisin ilk satırı özdeğerleri temsil ederken, ikinci satır bu özdeğerlerin katlılıklarını gösterir. 0 özdeğerine karşılık gelen özuzay 1-boyutlu lineer bir vektör uzayıdır ve 13 özdeğerine karşılık gelen özuzay 12-boyutlu lineer bir vektör uzayıdır.

$$A(\mathcal{D}_{\mathcal{H}}) = \begin{pmatrix}0&1&1&1&0&0&1&1&1&0\\1&0&1&1&1&0&0&0&1&1\\1&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\1&1&1&0&1&1&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&1&1&0&1&1\\0&0&1&1&1&0&1&1&0&1\\1&0&0&1&1&1&0&1&1&0\\1&0&1&0&0&1&1&0&1&1\\1&1&0&0&1&0&1&1&0&1\\0&1&1&0&1&1&0&1&1&0\end{pmatrix}, D(\mathcal{D}_{\mathcal{H}}) = \begin{pmatrix}3&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&3&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&3&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&3&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&3&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&3&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&3&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&3&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&3&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&3\end{pmatrix}.$$

Desargues hipergrafının Laplasyan matrisi $L(\mathcal{D}_{\mathcal{H}}) = D(\mathcal{D}_{\mathcal{H}}) - A(\mathcal{D}_{\mathcal{H}})$ olduğundan

$$L(\mathcal{D}_{\mathcal{H}}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

olarak hesaplanır. Desargue hipergrafının karakteristik polinomu $(x+6)(x-4)^9$ şeklindedir. Özdeğerler ise 1 katlılıklı $\lambda = -6$ ve 9 katlılıklı $\lambda = 4$ den oluşur. Desargue hipergrafının özvektörleri $\lambda = -6$ için {1,1,1,1,1,1,1,1,1,1} iken $\lambda = 4$ özdeğeri için

{−1,0,0,0,0,0,0,0,0,1}, {−1,0,0,0,0,0,0,0,1,0}, {−1,0,0,0,0,0,0,1,0,0},
{−1,0,0,0,0,0,1,0,0,0}, {−1,0,0,0,0,1,0,0,0,0}, {−1,0,0,0,1,0,0,0,0,0},
{−1,0,0,1,0,0,0,0,0,0}, {−1,0,1,0,0,0,0,0,0,0}, {−1,1,0,0,0,0,0,0,0,0}

şeklindedir.

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde literatürde iyi bilinen ve farklı uygulama alanlarında kullanılan graf teorisinin ağaç, uzanımlı ağaç, eklem düğümü, eklem ayrıtı, yürüyüş, gezi, yol ve temel çevrim gibi bazı temel operatörleri verilmiş ve örneklendirilmiştir. Graf çeşitlerinden düzlemsel graflar, iki parçalı graflar ve hipergraflara ait olan tanım ve özellikler verilmiş ve bu yapılar örnekler üzerinden incelenmiştir. Grafların derece, komşuluk ve Laplasyan matris temsilleri verilip matris girdileri tamsayı olan graflar oldukları gözlemlenmiştir. Bunlara bağlı olarak grafların spektrum özellikleri incelenmiş elde edilen özdeğerler doğrultusunda graf bağlılıkları hakkında bilgi edinilmiştir.

Sonuç olarak, bu çalışmada grafların temel operatörleri, bazı graf çeşitleri ve grafların matris temsilleri ve mertebesi 2 ve 3 olan sonlu projektif düzlemlerin Laplasyan spektrumu incelendi. Bu yapıların Laplasyan özdeğerleri tamsayı olduğundan, Laplasyan integral yapıları oldukları görüldü. Ayrıca, 2. mertebeden sonlu projektif düzlem için, 0 özdeğerine karşılık gelen özuzay 1 boyutlu doğrusal bir vektör uzayı iken, 7 özdeğerine karşılık gelen özuzayın 6 boyutlu doğrusal bir vektör uzayı olduğu görülmüştür. Benzer şekilde, 3. dereceden sonlu bir projektif düzlem durumunda, 0 özdeğeri için öz uzayın 1 boyutlu olduğu, 13 özdeğerine karşılık gelen öz uzayın ise 12 boyutlu bir doğrusal vektör uzayı olduğu gösterilmiştir. Tüm bunlara ek olarak Pappus konfigürasyonunun Desargues konfigürasyonuna göre daha bağlı bir hipergraf modeli oluşturduğu gözlemlenmiştir.

Yapılan bu çalışma spektral graf teorisinin gelişimine ve diğer bilim dallarındaki uygulama alanlarına önemli bir katkı sağlayacaktır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Akça, Z., Günaltılı, I., & Özgür G., (2006). *On the Fano subplanes of the left semifield plane of order 9*. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics. 35(1): 55–61.

Balakrishnan, R., Ranganathan K. (2012). *A textbook of graph theory*. Springer Science & Business Media.

Ballico, E., Favacchio, G., Guardo, E., & Milazzo, L., (2020). *Steiner systems and configurations of points*. Designs, Codes and Cryptography, 89: 199–219.

Bapat, R.B. (2010). *Graph and Matrices.* In: P19 Green Park Extn, New Delhi 011 016, India: Hindustan Book Agency.

Braun, M., Etzion, T., Ostergard,.P., Vardy, A., & Wassermann, A. (2016). *Existence of q – analogs of Steiner system*. Forum of Mathematics. https://doi.org/10.48550/arXiv.1304.146210.1017

Bretto, A. (2013). *Hypergraph theory: An introduction*. Mathematical Engineering, Springer.

Bondy, J. A., Murty, U. S. R. (1976). *Graph Theory with Applications.* New York, North Holland, 61.

Davidson, M. (2005). *Projective geometry and related matrices.* Doctor of Philosophy. The Faculty of Graduate Studies of The University of Manitoba, Canada.

Diestel, R. (2005). *Graph Theory*. Springer Verlag.

Fallat, S.M., Kirkland, S.J., Molitierno, J.J., & Neumann, M. (2005). *On graphs whose Laplacian matrices have distinct integer eigenvalues*. Journal of Graph Theory, 50(2): 162–174. https://doi.org/10.1002/jgt.20102

KAYNAKLAR DİZİNİ

Fasfous, W. M. (2017). *A Study of Graph Theory With Matrix Representation.* Master of Science Thesis. Hebron, Palestine.

Gross, L. J., Yellen J. (2003). *Handbook of Graph Theory*. CRC Press

Harary, F. (1962). *The determinant of the adjacency matrix of a graph* 4(3): 202-210. https://doi.org/10.1137/1004057

Molitierno, J.J. (2012). *Applications of combinatorial matrix theory to Laplacian matrices of graphs*. CRC Press.

Naik, N.R., Rao, S.B., Shrikhande S.S., & Singhi N.M. (1982). *Intersection graphs of k-uniform linear hypergraphs*. European Journal of Combinatorics, 3: 159–172. https://doi.org/10.1016/S0167-5060(08)70711-8

Nica, B. (2018). *A Brief Introduction to Spectral Graph Theory*. Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society. https://doi.org/10.48550/arXiv.1609.08072

Paige, L., & Wexler, C. (1953). *A canonical form for incidence matrices of finite projective planes and their associated latin squares*. Portugaliae Mathematica, 12(3): 105–112.

Rodriguez, J.A. (2003). *On the Laplacian spectrum and walk-regular hypergraphs.* Linear and Multilinear Algebra, 51(3): 285–297. https://doi.org/10.1080/0308108031000084374

Ruohonen, K. (2013). *Graph Theory*. Tampere University of Technology.

Sachs, H. (1966). *Uber teiler, faktoren und charakteristische polynome von graphen*. 12: 7-12.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Tutte, W. T. (1966). *On the algebraic theory of graph colorings*. Journal of Combinatorial Theory, 1: 15-50

Tutte, W. T. (1966). *Connectivity in Graphs*. University of Toronto Press, Toronto.

Wallis, W.D. (2007). *A Beginner's Guide to Graph Theory*. Secand. Birkhauser.

West, D. B. (2001). *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall.

Zakiyyah, A.Y. (2021). *Laplacian integral of particular Steiner system.* Engineering, Mathematics and Computer Science Journal, 3(1): 31–32. https://doi.org/10.21512/emacsjournal.v3i1.6883