Genelleştirilmiş Mutlak Değer Düzleminde Çemberlere Göre İnversiyonların İncelenmesi Üzerine

Zerrin ÇAKIR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Ocak 2026

On the Study of Inversions with Respect to Circles in the Generalized Absolute Value Plane

Zerrin ÇAKIR

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics and Computer Science

January 2026

Genelleştirilmiş Mutlak Değer Düzleminde Çemberlere Göre İnversiyonların İncelenmesi Üzerine

Zerrin ÇAKIR

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği Uyarınca
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Süheyla Ekmekçi

January 2026

ONAY

Matematik Bilgisayar Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Zerrin ÇAKIR 'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Genelleştirilmiş Mutlak Değer Düzleminde Çemberlere Göre İnversiyonların İncelenmesi Üzerine" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. SÜHEYLA EKMEKÇİ

İkinci Danışman :

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. SÜHEYLA EKMEKÇİ

Üye : Prof. Dr. AYŞE BAYAR KORKMAZOĞLU

Üye : Prof. Dr. MİNE TURAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. ……..

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Süheyla Ekmekçi danışmanlığında hazırlamış olduğum "Genelleştirilmiş Mutlak Değer Düzleminde Çemberlere Göre İnversiyonların İncelenmesi Üzerine" başlıklı YÜKSEK LİSANS tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 16/01 /2026

Zerrin ÇAKIR

T.C.
ESKİŞEHİR OSMANGAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ÜRETKEN YAPAY ZEKÂ KULLANIMI BEYAN FORMU

Bu tezi/projeyi hazırlarken aşağıdaki Üretken Yapay Zekâ (ÜYZ) araçlarından destek aldığımı beyan ederim:

Aşağıdaki ÜYZ araçlarını kullandım. (Birden fazla seçenek işaretlenebilir)

☐ Claude
✓ ChatGPT
✓ DeepSeek
✓ Gemini
☐ Copilot
☐ Diğer (Belirtiniz): .....

ÜYZ araçlarını tezimin/projemin aşağıdaki aşamalarında ilgili amaçlar için kullandım. (Birden fazla seçenek işaretlenebilir**.**

✓ Metin oluşturma
✓ Literatür tarama
✓ Çeviri
✓ Düzenleme/dil kontrolü
☐ Veri işleme ve analizi
☐ Veri görselleştirme
☐ Görüntü üretme
✓ Kaynakça düzenleme
☐ Diğer (Belirtiniz): .....

Bu çalışmada ÜYZ kullanımı ***Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Faaliyetlerinde Üretken Yapay Zekâ Kullanımına Dair Etik Rehber***'e ve akademik dürüstlük ilkelerine uygun şekilde gerçekleştirilmiş olup ÜYZ araçlarından alınan destek etik kurallar ve kaynak gösterme esaslarına uygun biçimde belirtilmiştir.

ÜYZ araçlarının sağladığı bilgilerin doğruluğunu kontrol ettiğimi, yanlış veya eksik bilgi bulunması halinde tüm sorumluluğun tarafıma ait olduğunu; ayrıca çalışmamla ilgili bu beyana aykırı bir durumun herhangi bir zamanda tespit edilmesi durumunda ortaya çıkabilecek akademik ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi beyan ederim.

Zerrin ÇAKIR
17/03/2026

ÖZET

Bu tez çalışmasında, genelleştirilmiş mutlak değer uzaklığı ile inşa edilen düzlemde çemberlere göre inversiyon dönüşümleri üzerine odaklanılmıştır. Altı bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde tezin giriş ve amacı yer almaktadır. İkinci bölümde genelleştirilmiş mutlak değer uzaklığı ile ilgili literatürdeki araştırmalar sunulmaktadır. Üçüncü bölümde genelleştirilmiş mutlak değer uzaklığı ve bu uzaklık ile inşa edilen düzlemin temel tanımları ve özellikleri verilmektedir. Dördüncü bölümde, genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde çemberlere göre inversiyon dönüşümleri tanımlanarak, temel özellikleri sunulmuştur. İnversiyonlar altında noktaların görüntülerinin incelenerek elde edilen sonuçlar verilmiştir. Beşinci bölümde, bir doğru parçasının yönlü genelleştirilmiş mutlak değer uzunluğu tanımı verilerek genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde çifte oran ve harmonik eşlenik kavramları tanımlanarak bazı özellikleri verilmiş, inversiyon dönüşümleri altında bu kavramlar incelenmiştir. Altıncı bölümde, doğruların ve çemberlerin çembere göre inversiyon altında görüntüleri incelenmiştir. Bu incelemelerden inversiyon merkezinden geçen doğruların inversiyonlar altında invaryant kaldığı, inversiyon merkezinden geçmeyen doğruların inverslerinin parabol yaylarını içeren eğriler olduğu ve merkezi inversiyon merkezi olan çemberlerin inversiyon altında aynı merkezli başka çemberlere dönüştürdüğü elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: genelleştirilmiş mutlak değer uzaklığı, çember, inversiyon

SUMMARY

This thesis focuses on inversion transformations with respect to circles in the plane constructed with the generalized absolute value distance. This study, consisting of six chapters, presents the introduction and purpose of the thesis in the first chapter. The second chapter reviews the literature on the generalized absolute value distance. The third chapter provides the fundamental definitions and properties of the generalized absolute value distance and the plane constructed with this distance. In the fourth chapter, inversion transformations with respect to circles in the generalized absolute value plane are defined, and their basic properties are presented. The results obtained by examining the images of points under inversions are given. In the fifth chapter, by defining the directed generalized absolute value length of a line segment, the concepts of cross-ratio and harmonic conjugate in the generalized absolute value plane are defined, some of their properties are given, and these concepts are examined under inversion transformations. In the sixth chapter, the images of lines and circles under inversion with respect to a circle are examined. From these examinations, it was found that lines passing through the inversion center remain invariant under inversions, the inverses of lines not passing through the inversion center are curves containing parabolic arcs, and circles centered at the inversion center are transformed into other concentric circles under inversion.

Keywords: the generalized absolute value plane, inversion, circle

TEŞEKKÜR

Çalışmamın başlangıcından tamamlanmasına kadar her aşamada bilgi ve deneyimini benimle paylaşan, sabrıyla ve yönlendirmeleriyle bu süreci daha sağlıklı ilerletmemi sağlayan değerli danışmanım Prof. Dr. Süheyla Ekmekçi'ye içten teşekkürlerimi sunarım.

Çalışma süresince karşılaştığım tüm zorlukları benimle birlikte göğüsleyen ve hayatımın her döneminde desteğini esirgemeyen sevgili eşim Yasin Çakır'a, her zaman desteğini esirgemeyen ve sabırla tüm sorularımı yanıtlayan abim Abdulkadir Yayılkan'a, her daim yanımda olan değerli aileme ve bu sürece varlığıyla güç katan biricik kızım Gökçe'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Zerrin ÇAKIR

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET vii

SUMMARY viii

TEŞEKKÜR ix

İÇİNDEKİLER x

ŞEKİLLER DİZİNİ xi

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ xii

1. GİRİŞ VE AMAÇ 1

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI 2

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ MUTLAK DEĞER DÜZLEMİ 3

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ MUTLAK DEĞER DÜZLEMİNDE ÇEMBERE GÖRE İNVERSİYONLAR 7

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ MUTLAK DEĞER DÜZLEMİNDE ÇEMBERE GÖRE İNVERSİYON ALTINDA ÇİFTE ORAN VE HARMONİK EŞLENİK KAVRAMLARININ İNCELENMESİ 22

5.1 Genelleştirilmiş Mutlak Değer Düzleminde Yönlü Doğru Parçalarının Uzunluğu 22

5.2 Genelleştirilmiş Mutlak Değer Düzleminde Çifte Oran 22

5.3 Genelleştirilmiş Mutlak Değer Düzleminde Harmonik Noktalar 30

6. **GENELLEŞTİRİLMİŞ MUTLAK DEĞER DÜZLEMİNDE ÇEMBERE GÖRE İNVERSİYON ALTINDA DOĞRULARIN VE ÇEMBERLERİN GÖRÜNTÜLERİNİN İNCELENMESİ** 35

7.SONUÇ VE ÖNERİLER 63

KAYNAKLAR DİZİNİ 65

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil **Sayfa**

3.1 Genelleştirilmiş Mutlak Değer Birim Çemberi 5
3.2 R_G^2 Düzlemindeki Çemberler 6
4.1 Çemberde İnvers Noktalar 12
5.2.1 İnversler ve Noktalar 27
6.1. Yatay Doğru ve İnversi 41
6.2. Dikey Doğru ve İnversi 45
6.3. Ayıraç Doğru ve İnversi 49
6.4. Yataysal Doğru ve İnversi 54
6.5. Eğimi b/a Olan Yataysal Doğru ve İnversi 55
6.6. Dikeysel Doğru ve İnversi 59
6.7. Eğimi a/b Olan Dikeysel Doğru ve İnversi 61
6.8. Merkezi İnversiyon Merkezi Olan C' Çemberi ve İnversi 62

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathcal{C}$	İnversiyon çemberi
X, Y, W, P, Z	Noktalar
X', Y', P', W', Z'	Noktaların inversiyon altındaki görüntüleri
M	Çember merkezi
r	Çemberin yarıçapı
ℓ	Doğru
O	Orijin noktası
Kısaltmalar	**Açıklama**
$\mathbb{R}_g^2$	Genelleştirilmiş mutlak değer düzlem
d_g	Genelleştirilmiş mutlak değer uzaklığı
d_E	Öklidyen düzlemde uzaklık
$\mathrm{I}_\mathcal{C}$	$\mathcal{C}$ çemberinin inversiyon fonksiyonu

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Tarih boyunca teorik ve uygulamalı bilimlere yön veren geometri, bilim dallarının gelişiminde önemli bir yerde bulunmaktadır. Geometride Öklidyen düzlemin ve uzayın yanı sıra, farklı metriklerin literatüre dahil edilmesi geometrik anlayışın sınırlarını genişletmiştir.

(Kaya vd., 2009), en iyi bilinen Öklidyen olmayan bazı uzaklıkları içeren genelleştirilmiş mutlak değer uzaklığını tanımlamıştır. Bu uzaklık ile iki nokta arasındaki uzaklık, koordinat eksenlerine paralel uzunlukların en büyüğünün ve en küçüğünün belirli pozitif reel katlarının toplamına eşittir. Bu yaklaşım, alışılmış yöntemlerden ayrışan alternatif bir Öklidyen olmayan düzlem modeli sunar.

Geometrik bir dönüşüm türü olan çembere göre inversiyon, temelde özel bir yansıma biçimi olarak nitelendirilmektedir. Geometrik sorunları ele almak ve farklı teoremleri çözümlemek amacıyla kullanılan oldukça etkili bir araçtır.

Bu araştırmanın amacı, Öklidyen olmayan düzlem çerçevesinde, genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde çembere göre inversiyon dönüşümünü tanımlamak, detaylandırmak ve bu dönüşümün geometrik sonuçlarını sunmaktır

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Klasik inversiyon geometrisi, Öklidyen düzleminde bir çember göre tanımlanan ve noktaları, çemberin içi ile dışı arasında karşılıklı olarak eşleyen dönüşümlere dayanır. Bu dönüşümler doğruları ve çemberleri yine doğrulara ve çemberlere dönüştürür; çifte oran, harmonik bölme ve Möbius dönüşümleri gibi kavramlarla ilişkilidirler. Ancak bu yapı büyük ölçüde Öklidyen metriğine bağlıdır. Son yıllarda farklı metriklerle donatılmış düzlemlerde inversiyon kavramını genelleştirmeye yönelik önemli çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalar, özellikle taksi uzaklığı, maksimum uzaklık, Çin dama uzaklığı, genelleştirilmiş taksi uzaklığı, α-uzaklığı gibi Öklidyen olmayan uzaklıklara göre inversiyonun nasıl tanımlanabileceğini ve hangi özellikleri koruduğunu araştırmaktadır, (Bayar ve Ekmekçi, 2014), (Yüca ve Can, 2020), (Ekmekçi, 2024), (Pekzorlu ve Bayar, 2022), (Ekmekçi ve Bilgin, 2023(a)), (Gelişgen ve Ermiş, 2023). Öklidyen ve Öklidyen olmayan uzaylarda, küre ve elipsoidlere göre inversiyon dönüşümleri tanımlanarak bu dönüşümlerin karakteristik özellikleri ortaya konmuştur, (Pekzorlu ve Bayar, 2020 (a)), (Pekzorlu ve Bayar, 2020 (b)), (Cırık ve Ekmekçi, 2022), (Can, 2022), (Bayar ve Akça, 2025).

Genelleştirilmiş mutlak değer uzaklığı (Kaya, 2009) de sunulmuş ve izometriler grubu sistematik biçimde incelenmiştir. (Bayar, 2008), genelleştirilmiş mutlak değer düzlemi için norm ve trigonometri kavramlarını incelemiş, ardından Schwarz eşitsizliğinin bu sistemdeki teorik sonuçlarını ortaya koymuştur. (Aylıkçı, 2025) ve (Ekmekçi, 2025) de genelleştirilmiş mutlak değer düzleminin geometrik özellikleri çalışılmıştır.

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ MUTLAK DEĞER DÜZLEMİ

Bu bölümde genelleştirilmiş mutlak değer uzaklığına dayalı tanımlanan genelleştirilmiş mutlak değer düzlemi ve temel özellikleri sunulmaktadır.

Tanım 3.1. Analitik düzlemdeki X= (x_1, x_2) ve Y = (y_1, y_2) noktaları arasındaki genelleştirilmiş mutlak değer uzaklığı $d_g: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$, $a \geq b \geq 0, a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere ,

$$d_g(X, Y) = a\ max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} + b\ min\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

biçiminde tanımlanır, (Kaya, 2009).

Tanım 3.1 den görülüyor ki genelleştirilmiş mutlak değer uzaklığı, iki nokta arasındaki mesafeyi koordinat farklarının mutlak değerlerinin en büyüğü ile en küçüğünün doğrusal bir birleşimi olarak ele alır. Analitik düzlemin bu özel metrikle donatılmasıyla elde edilen genelleştirilmiş mutlak değer düzlemi, $\mathbb{R}_g^2 = (\mathbb{R}^2, d_g)$, nokta ve doğru kavramları ile açı ölçüm metodolojisi öklidyen geometrisiyle paralellik gösterse de, uzaklık kavramına bağlı olan tüm geometrik kavramlar yeniden şekillenir. Bu durum, Öklidyen modelden uzaklık tanımı bazında ayrışan yeni bir geometrik model sunmaktadır.

Tanım gereği sıfırdan farklı her a ve b reel sayı çifti için bir d_g uzaklık fonksiyonu tanımlanabilir. Bu durum d_g uzaklıklarının bir uzaklık ailesi oluşturduğunu gösterir. Özel olarak, a=b=1 durumunda genelleştirilmiş mutlak değer uzaklığı d_g, taksi uzaklığına eşittir yani d_g=d_T, a=b olduğunda d_g-uzaklığı, d_T-uzaklığının a katına eşittir. a=1 ve b=0 iken d_g-uzaklığı, maksimum uzaklık d_M olur. a=1, b=$\sqrt{2}-1$ iken d_g-uzaklığı, d_C-Çin dama uzaklığıdır. a=1 ve $b = sec\alpha - tan\alpha$ iken d_g-uzaklığı, α-uzaklığı olur. Böylece a ve b parametrelerinin farklı değerleri göz önüne alındığında, sonsuz sayıda farklı uzaklık fonksiyonu elde edilebilir. Bu çalışma kapsamında, aksi belirtilmedikçe, a ve b değerlerinin başlangıçta belirlenmiş ve sabit katsayılar olduğu varsayılmaktadır.

Örnek 3.2. $a = 3$ ve $b = 2$ için genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde $X = (3,2)$ ve $Y = (1,3)$ noktaları arasındaki genelleştirilmiş mutlak değer uzaklığı,

$$d_g(X, Y) = 3max\{|3-1|, |2-3|\} + 2\ min\{|3-1|, |2-3|\}$$
$$= 3.\ max\{|2|, |-1|\} + 2.min\{|2|, |-1|\}$$
$$= 3.2 + 2.1 = 8$$

şeklinde hesaplanır.

Teorem 3.3. Analitik düzlemde tanımlanan d_g-genelleştirilmiş mutlak değer uzaklığı bir metriktir, (Kaya, 2009).

Tanım 3.4 Genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde ℓ doğrusunun eğimi m olsun. O zaman

a) $|\mathrm{m}| > 1$ ise ℓ doğrusu bir *dikeysel doğru*,

b) $|\mathrm{m}| < 1$ ise ℓ doğrusu bir *yataysal doğru*,

c) $|\mathrm{m}| =$ ise ℓ doğrusu bir $ayıraç\ doğru$,

d) m, 0 ve ∞ olması durumlarında sırasıyla ℓ doğrusu *yatay* ve *dikey doğru* olarak adlandırılır, (Krause, 1975).

Genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde izometrik dönüşümler aşağıda verilmektedir.

Teorem 3.5. Genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde tanımlanan her öteleme bir izometridir, (Kaya, 2009).

Teorem 3.6. Genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde orijinden geçen $y = mx$ doğrusunun bir izometrik yansıma belirtmesi için $\frac{b}{a}$ ve eğim m değerleri

i) $\frac{b}{a} \neq \sqrt{2} - 1$ iken $m \in \{0, \pm 1, \infty\}$

ii) $\frac{b}{a} = \sqrt{2} - 1$ iken $m \in \{0, \pm(\sqrt{2} - 1), \pm 1, \pm(\sqrt{2} + 1), \infty\}$

olmalıdır, (Kaya, 2009).

Teorem 3.7. Genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde orijindeki θ-açılı dönme dönüşümünün bir izometrik dönme belirtmesi için $\frac{b}{a}$ ve eğim θ değerleri

i) $\frac{b}{a} \neq \sqrt{2} - 1$ iken $\theta \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$

ii) $\frac{b}{a} = \sqrt{2} - 1$ iken $\theta \in \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

olmalıdır, (Kaya, 2009).

Tanım 3.8. Genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde verilen bir noktadan sabit d_g uzaklığındaki noktaların geometrik yerine çember denir. Sabit nokta ve sabit uzaklığa sırasıyla çemberin merkezi ve yarıçapı denir.

Merkezi $\mathrm{M} = (m_1, m_2)$ ve yarıçapı r olan çember,

$$a\ max\{|x - \mathrm{m}_1|, |\mathrm{y} - \mathrm{m}_2|\} + b\ min\{|x - \mathrm{m}_1|, |\mathrm{y} - \mathrm{m}_2|\} = r$$

eşitliğini sağlayan (x, y) noktalarının kümesidir. $\mathbb{R}^2_{\mathrm{g}}$ de birim çember,

$$amax\{|x|, |\mathrm{y}|\} + bmin\{|x|, |\mathrm{y}|\} = 1 \qquad (3.1)$$

denklemine sahiptir. **(**3.1**)** denklemi aşağıdaki gibi incelenir.

1) $|x| > |y|$ iken **(**3.1**)** den

$$a|x| + b|y| = 1 \tag{3.2}$$

elde edilir. (3.2) denkleminden birim çemberin kenarları,

$\{(x,\mathrm{y}): -a\mathrm{x} - b\mathrm{y} = 1, x < 0, y < 0\}$,

$\{(x,\mathrm{y}): -a\mathrm{x} + b\mathrm{y} = 1, x < 0, y \geq 0\}$,

$\{(x,\mathrm{y}): a\mathrm{x} - b\mathrm{y} = 1, x \geq 0, y < 0\}$,

$\{(x,\mathrm{y}): a\mathrm{x} + b\mathrm{y} = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$

olarak bulunur.

2) $|x| \leq |y|$ iken **(**3.1**)** den,

$$a|y| + b|x| = 1 \tag{3.3}$$

elde edilir. (3.3) den birim çemberin kenarları,

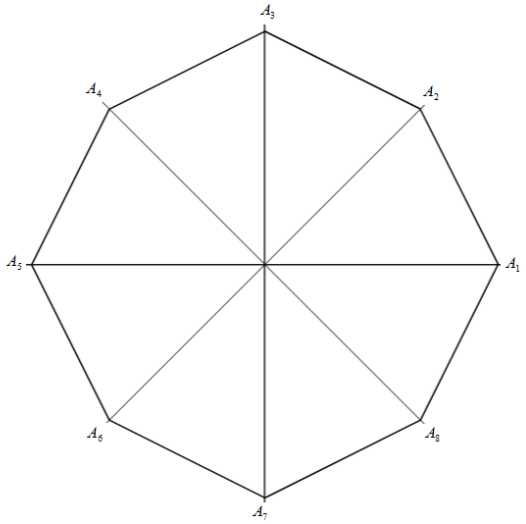
$\{(x,\mathrm{y}): -a\mathrm{y} - b\mathrm{x} = 1, x < 0, y < 0\}$,

$\{(x,\mathrm{y}): a\mathrm{y} - b\mathrm{x} = 1, x < 0, y \geq 0\}$,

$\{(x,\mathrm{y}): -a\mathrm{y} + b\mathrm{x} = 1, x \geq 0, y < 0\}$,

$\{(x,\mathrm{y}): a\mathrm{y} + b\mathrm{x} = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$

olarak bulunur.



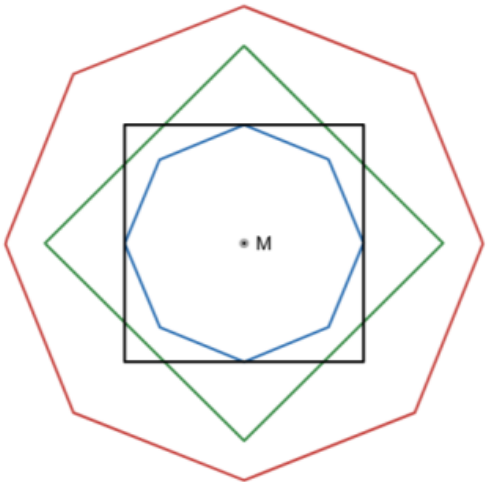
Şekil 3.1 Genelleştirilmiş mutlak değer birim çemberi

Genelleştirilmiş mutlak değer çemberi, merkezi kesen yatay, dikey ve ayıraç doğrular üzerindeki noktalarda sekiz köşeye sahiptir. Bu köşeler $A_1 = (m_1 + \frac{r}{a}, m_2)$,

$A_2 = (m_1 + \frac{r}{a+b}, m_2 + \frac{r}{a+b})$, $A_3 = (m_1, m_2 + \frac{r}{a})$, $A_4 = (m_1 - \frac{r}{a+b}, m_2 + \frac{r}{a+b})$,

$A_5 = (m_1 - \frac{r}{a}, m_2)$, $A_6 = (m_1 - \frac{r}{a+b}, m_2 - \frac{r}{a+b})$, $A_7 = (m_1, m_2 - \frac{r}{a})$ ve

$A_8 = (m_1 + \frac{r}{a+b}, m_2 - \frac{r}{a+b})$ dir. Dolayısıyla, r-yarıçaplı ve $M = (m_1, m_2)$ merkezli çember, bu köşeleri birleştiren doğru parçalarından oluşur ve bir sekizgen oluşturur.



Şekil 3.2 $\mathbb{R}_g^2$ düzlemindeki çemberler

Yukarıdaki şekil, genelleştirilmiş mutlak değer çemberlerini göstermektedir. Kırmızı ile a ve b değerlerinin sırasıyla $\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{5}$ olduğu genelleştirilmiş mutlak değer düzlemindeki çember; yeşil ile a ve b değerlerinin ikisinin de $\frac{3}{5}$ olduğu genelleştirilmiş mutlak değer düzlemindeki çember; mavi ile a ve b değerlerinin sırasıyla 1 ve $\sqrt{2}-1$ olduğu genelleştirilmiş mutlak değer düzlemindeki (Çin Dama düzlemi) çember; siyah ile a ve b değerlerinin sırasıyla 1 ve 0 olduğu genelleştirilmiş mutlak değer düzlemindeki (maksimum düzlem) çember gösterilmektedir. Tüm çemberler $M=(0,0)$ merkezli ve $r = \frac{15}{2}$ yarıçaplıdır.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ MUTLAK DEĞER DÜZLEMİNDE ÇEMBERE GÖRE İNVERSİYONLAR

Öklidyen düzlemdeki çembere göre inversiyon bir noktayı başka bir noktaya eşleyen geometrik bir dönüşümdür. Bilindiği üzere Öklidyen düzlemde, O merkezli ve r yarıçaplı $\mathcal{C}$ çemberine göre inversiyon; bir X noktasını, $\overrightarrow{OX}$ ışını üzerinde yer alan ve merkeze olan uzaklıkları çarpımı r^2 olan bir X' noktasına eşler. Bu bölümde, genelleştirilmiş mutlak değer düzlemindeki çemberlere göre inversiyonlar, Öklidyen çemberlere göre inversiyonların bir benzeri olarak tanımlanmıştır ve özellikleri sunulmuştur.

Tanım 4.1. Genelleştirilmiş mutlak değer düzlemi $\mathbb{R}^2_g$ de merkezi O ve yarıçapı r olan çember $\mathcal{C}$ olsun. $\mathcal{C}$ çemberine göre genelleştirilmiş mutlak değer inversiyonu $I_{\mathcal{C}}$,

$$I_{\mathcal{C}}: \mathbb{R}^2_g \backslash \{O\} \rightarrow \mathbb{R}^2_g \backslash \{O\}$$
$$I_{\mathcal{C}}(X) = X'$$

düzlemdeki X noktasını X' noktasına eşleyen ve aşağıdaki koşulları sağlayan dönüşümdür:

i) X′ noktasının öklidyen yapısına göre $\overrightarrow{OX}$ ışını üzerindedir.

ii) $d_g(O,X).d_g(O,X') = r^2$

X′ noktasına, $I_{\mathcal{C}}$ inversiyonu altında X noktasının inversi (görüntüsü) olarak adlandırılır. Bu durumda X noktası $I_{\mathcal{C}}$ inversiyonu altında X′ noktasının inversidir. $\mathcal{C}$ çemberine inversiyon çemberi, O noktasına inversiyon merkezi ve r ye inversiyon yarıçapı denir.

Teorem 4.2. Genelleştirilmiş mutlak değer düzlemi $\mathbb{R}^2_g$ de merkezi O ve yarıçapı r olan çember $\mathcal{C}$ olsun. $\mathcal{C}$ çemberinin dışındaki noktalar $I_{\mathcal{C}}$ inversiyonu altında $\mathcal{C}$ çemberinin içindeki bir noktaya dönüşür. Benzer şekilde tersi de doğrudur.

İspat. Genelleştirilmiş mutlak değer düzlemi $\mathbb{R}^2_g$ de merkezi O ve yarıçapı r olan $\mathcal{C}$ çemberi

$$\{X \mid d_g(O,X) = r,\ r \geq 0\}$$

kümesidir. B noktası çemberin dışında ise $d_g(O,B) > r$ olmalıdır. B noktasının, $I_{\mathcal{C}}$ inversiyonu altındaki görüntüsü B' olsun. Bu durumda inversiyon tanım gereği,

$$d_g(O,B).d_g(O,B') = r^2$$

olur. Şimdi, $d_g(O,B) > r$ eşitsizliğinin her iki tarafı $d_g(O,B')$ ile çarpıldığında

$$d_g(O,B)\,.d_g(O,B') > r\,.d_g(O,B')$$

elde edilir. Buradan,

$$r^2 = d_g(O,B)\,.d_g(O,B') > r\,.d_g(O,B'),$$
$$r > d_g(O,B')$$

olduğu görülür. Böylece B' görüntü noktası çemberin içinde kalır.

Tersine, eğer B noktası çemberin içindeyse $d_g(O,B) < r$ olur. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $d_g(O,B')$ ile çarpılıp düzenlendiğinde $r < d_g(O,B')$ olup, B' görüntü (invers) noktasının çemberin dışında olduğu sonucuna varılır.

Teorem 4.3. Genelleştirilmiş mutlak değer düzlemi $\mathbb{R}^2_g$ de merkezi $O = (0,0)$ ve yarıçapı r olan çember $\mathcal{C}$ olsun. $P \neq O$ olmak üzere $P = (x,y)$ ve $P' = (x',y')$ noktaları $I_{\mathcal{C}}$ inversiyonuna göre invers noktalar ise bu noktaların koordinatları arasında

$$(x',y') = \left(\frac{r}{d_g(O,X)}\right)^2 (x,y)$$

eşitliği vardır.

İspat. Genelleştirilmiş mutlak değer düzlemi $\mathbb{R}^2_g$ de merkezi O ve yarıçapı r olan $\mathcal{C}$ çemberi olsun. $\mathcal{C}$ çemberine göre $I_{\mathcal{C}}$ inversiyonu altında $P = (x,y)$ ve $P' = (x',y')$ invers noktalar olsun. Bu durumda $\overrightarrow{OP}$ ve $\overrightarrow{OP'}$ birbirlerine paralel olduğundan, $k \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\overrightarrow{OP'} = k.\overrightarrow{OP}$$

olduğundan

$$(x',y') = (kx,ky) \tag{4.1}$$

elde ederiz. Ayrıca inversiyon tanımından

$$d_g(O,P).d_g(O,P') = r^2$$

olduğundan

$$(amax\{|x|,|y|\} + bmin\{|x|,|y|\})(amax\{|x'|,|y'|\} + bmin\{|x'|,|y'|\}) = r^2 \tag{4.2}$$

eşitliği geçerlidir. (4.1), (4.2) de kullanıldığında

$$(amax\{|x|,|y|\} + bmin\{|x|,|y|\})(amax\{|kx|,|ky|\} + bmin\{|kx|,|ky|\}) = r^2,$$
$$k(amax\{|x|,|y|\} + bmin\{|x|,|y|\})^2 = r^2,$$
$$k = \frac{r^2}{(amax\{|x|,|y|\}+bmin\{|x|,|y|\})^2} = \frac{r^2}{(d_g(O,X))^2},\quad O \neq P$$

olur. (4.1) den

$$P' = (x', y') = (kx, ky) = \left(\frac{r^2 x}{(amax\{|x|, |y|\} + bmin\{|x|, |y|\})^2}, \frac{r^2 y}{(amax\{|x|, |y|\} + bmin\{|x|, |y|\})^2}\right)$$

elde edilir. Üstelik,

$$P' = \left(\frac{r^2 x}{(d_g(O,P))^2}, \frac{r^2 y}{(d_g(O,P))^2}\right)$$

eşitliği de geçerlidir.

Böylece $\mathbb{R}_g^2$ de $\mathcal{C}$ çemberine göre inversiyon dönüşümü inversiyon merkezinden farklı her P noktasını

$$I_{\mathcal{C}}(P) = \frac{r^2}{(d_g(O,P))^2} P$$

noktasına dönüştürür.

İnversiyonun tanımı gereği, inversiyon merkezinden farklı bir P noktası ile inversiyon merkezi arasındaki d_g uzaklığı sıfıra yaklaştıkça, görüntüsü olan P' noktasının merkeze uzaklığı $\overrightarrow{PP'}$ ışını üzerinde sınırsızca büyür. Bu durum, $I_{\mathcal{C}}$ dönüşümünün merkez noktasında tanımsız olmasına yol açar. Fakat düzleme bir "*ideal nokta*" (O_∞) eklenerek oluşturulan genişletilmiş genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde $(\mathbb{R}_g^2 \cup \{O_\infty\})$, $I_{\mathcal{C}}$ dönüşümü altında inversiyon merkezi O doğrudan O_∞ ideal noktası ile eşleştirilir. Bu genişletme sonucunda

$$I_{\mathcal{C}}: \mathbb{R}_g^2 \cup \{O_\infty\} \to \mathbb{R}_g^2 \cup \{O_\infty\}$$

dönüşümü, $\mathbb{R}_g^2 \cup \{O_\infty\}$ üzerinde tanımlı, birebir ve örten bir dönüşüm haline gelir. Ayrıca P noktasının inversi P' noktası ise P' noktasının inversi de P noktasıdır. Bu yüzden $I_{\mathcal{C}}$ dönüşümü involutiftir.

Burada belirtelimki $a = 1$, $b = \sqrt{2} - 1$ iken $I_{\mathcal{C}}$ dönüşümü Çin dama düzleminde $\mathcal{C}$ çemberine göre inversiyon dönüşümü, $a = 1$, $b = 0$ iken $I_{\mathcal{C}}$ maximum düzleminde $\mathcal{C}$ çemberine göre inversiyon dönüşümü, $a = b = 1$ iken $I_{\mathcal{C}}$ taksi düzlemde inversiyon olduğu görülür. Bu durumda a ve b parametrelerine bağlı olarak inversiyonların ailesi tanımlanır.

Teorem 4.4. Genelleştirilmiş mutlak değer düzlemi $\mathbb{R}_g^2$ de merkezi $O = (m,n)$ ve yarıçapı r olan çember $\mathcal{C}$ olsun. $P \neq O$ olmak üzere $P = (x,y)$ ve $P' = (x', y')$ noktaları $I_{\mathcal{C}}$ inversiyonuna göre invers noktalar ise bu noktaların koordinatları arasında aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$x' = \mathrm{m} + \frac{r^2 x}{(amax\{|x-m|,|y-n|\}+bmin\{|x-m|,|y-n|\})^2}$$

$$y' = n + \frac{r^2 y}{(amax\{|x-m|,|y-n|\}+bmin\{|x-m|,|y-n|\})^2}.$$

İspat. Genelleştirilmiş mutlak değer düzlemi $\mathbb{R}_g^2$ de merkezi $O = (m,n)$ ve yarıçapı r olan $\mathcal{C}$ çemberi

$$\{(x,y)|\ amax\{|x-m|,|y-n|\} + bmin\{|x-m|,|y-n|\} = r, r \geq 0\}$$

kümesidir. İnversiyon merkezi O dan farklı P noktası için $P = (x,y)$ ve $P' = (x',y')$ noktaları $\mathcal{C}$ çemberine göre inversiyonuna invers olduklarından O, P ve P' noktaları aynı doğru üzerinde olup $\overrightarrow{OP}$ ve $\overrightarrow{OP'}$ vektörleri aynı yönlüdür ve k ∈ $\mathbb{R}^+$ için

$$\overrightarrow{OP'} = k.\overrightarrow{OP},$$

olur. Buradan,

$$(x'-m, y'-n) = (k(x-m), k(y-n)) \tag{4.3}$$

olur. İnversiyon tanımından

$$d_g(O,P).\ d_g(O,P') = r^2$$

olup

$$d_g(O,P) = (amax\{|x-m|,|y-n|\} + bmin\{|x-m|,|y-n|\}) \tag{4.4}$$

ve

$$d_g(O,P') = (amax\{|x'-m|,|y'-n|\} + bmin\{|x'-m|,|y'-n|\}) \tag{4.5}$$

dir. (4.3), (4.5) de yazıldığında

$$d_g(O,P') = k(amax\{|x-m|,|y-n|\} + bmin\{|x-m|,|y-n|\}) = kd_g(O,P) \tag{4.6}$$

elde edilir. Buradan

$$\mathrm{k}.(amax\{|x-m|,|y-n|\} + bmin\{|x-m|,|y-n|\})^2 = kd_g(O,P)^2 = r^2$$

olup,

$$k = \frac{r^2}{(amax|x-m|,|y-n|+bmin|x-m|,|y-n|)^2} = \frac{r^2}{d_g(O,P)^2}$$

bulunur. k değeri, (4.3) de yerine yazıldığında

$$x' = \mathrm{m} + \frac{r^2(x-m)}{(amax\{|x-m|,|y-n|\}+bmin\{|x-m|,|y-n|\})^2}$$

$$y' = n + \frac{r^2(y-n)}{(amax\{|x-m|,|y-n|\}+bmin\{|x-m|,|y-n|\})^2}$$

biçiminde invers noktanın koordinatlarına ulaşılır.

Teorem 4.3, Teorem 4.4 ün inversiyon merkezi $O = (m,n) = (0,0)$ olması durumu olduğu aşikardır.

Örnek 4.5. $a = 3, b = 2$ parametrelerine karşılık gelen genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde birim çemberine göre P= (1,4) noktasının inversi olan $I_{\mathcal{C}}(P) = P'$ noktasının koordinatları aşağıdaki gibidir:

Teorem 4.4 den,

$$P' = (x',y') = \frac{r^2}{(amax|x|,|y| + bmin|x|,|y|)^2}(x,y)$$

olup,

$$P' = \frac{1^2}{(3max|1|,|4|+2min|1|,|4|)^2}(1,4),$$

$$P' = \frac{1}{(3.4+2.1)^2}(1,4),$$

$$P' = \left(\frac{1}{196},\frac{4}{196}\right)$$

bulunur.

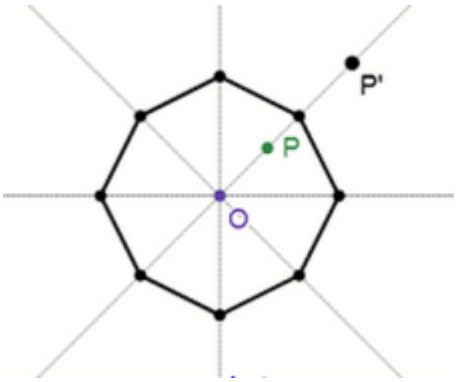
Örnek 4.6. *a=2, b=1* parametrelerine karşılık gelen genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde birim çembere göre inversiyonu düşünelim. Bu düzlemdeki $P = (\frac{2}{10},\frac{2}{10})$ noktası $d_g(O,P) = \frac{6}{10} < 1$ olduğundan P noktası birim çemberin içinde kalır. Birim çembere göre inversiyon altında P noktasının inversi

$$P' = (x',y') = \frac{1}{((d_g(O,P))^2}(\frac{2}{10}\frac{2}{10}) = \left(\tfrac{10}{18},\tfrac{10}{18}\right)$$

olarak bulunur. Buradan,

$$d_g(O,P') = 2\max\left\{\tfrac{10}{18},\tfrac{10}{18}\right\} + 1\min\left\{\tfrac{10}{18},\tfrac{10}{18}\right\} = \frac{3.10}{18} = \frac{10}{6} > 1$$

olduğundan P' noktası birim çemberin dışında kalır, Şekil 4.1.



Şekil 4.1 Çemberde invers noktalar

Teorem 4.7. Genelleştirilmiş mutlak değer düzlemi $\mathbb{R}_g^2$ de, O merkezli ve r yarıçaplı çember $\mathcal{C}$ olsun. O, P_1, P_2 doğrudaş noktaları için P_1 ve P_2 noktalarının $\mathcal{C}$ çemberine göre inversiyon dönüşümü altında inversleri P_1' ve P_2' olmak üzere bu invers noktalar arasındaki d_g-uzaklığı

$$d_g(P_1', P_2') = \frac{r^2 . d_g(P_1, P_2)}{d_g(O, P_1) . d_g(O, P_2)}$$

şeklinde verilir.

İspat. Genelleştirilmiş mutlak değer düzlemi $\mathbb{R}_g^2$ de, O merkezli ve r yarıçaplı çember $\mathcal{C}$ olsun. $\mathbb{R}_g^2$ de O, P_1, P_2 noktaları doğrudaş olup, P_1' ve P_2', P_1 ve P_2 noktalarının $\mathcal{C}$ çemberine göre inversiyon dönüşümü altında inversleri olduğuna göre inversiyon tanımından

$$d_g(O, P_1) . d_g(O, P_1') = d_g(O, P_2) . d_g(O, P_2') = r^2 \tag{4.7}$$

eşitliği geçerlidir. P_1' ve P_2' noktaları arasındaki d_g-uzaklığı

$$d_g(P_1', P_2') = \left| d_g(O, P_2') - d_g(O, P_1') \right| \tag{4.8}$$

biçiminde yazılır. (4.7) den

$$d_g(O, P_1') = \frac{r^2}{d_g(O, P_1)} \tag{4.9}$$

ve

$$d_g(O, P_2') = \frac{r^2}{d_g(O, P_2)} \tag{4.10}$$

elde edilir. (4.9) ve (4.10) , (4.8) de yerine yazıldığında

$$d_g(P_1', P_2') = \left| \frac{r^2}{d_g(O, P_2)} - \frac{r^2}{d_g(O, P_1)} \right| = r^2 \left| \frac{d_g(O, P_1) - d_g(O, P_2)}{d_g(O, P_1) d_g(O, P_2)} \right| = \frac{r^2 . d_g(P_1, P_2)}{d_g(O, P_1) . d_g(O, P_2)}$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 4.8. $a = 3$ ve $b = 2$ parametrelerine karşılık gelen $\mathbb{R}^2_g$ de birim çembere göre inversiyon gözönüne alınsın. P_1 ve P_2 noktaları sırasıyla $(2,6)$ ve $(1,3)$ olsun. P_1 ve P_2 noktaları $y = 3x$ doğrusu üzerinde olduğundan P_1, P_2 ve inversiyon merkezi O doğrudaştır. P_1 noktasının birim çembere göre inversi

$$P_1' = \left(\frac{2}{(3\max\{|2|,|6|\} + 2\min\{|2|,|6|\})^2}, \frac{6}{(3\max\{|2|,|6|\} + 2\min\{|2|,|6|\})^2}\right) = \left(\frac{2}{22^2}, \frac{6}{22^2}\right)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde

$$P_2' = \left(\frac{1}{(3\max\{|1|,|3|\} + 2min\{|1|,|3|\})^2}, \frac{3}{(3max\{|1|,|3|\} + 2min\{|1|,|3|\})^2}\right) = \left(\frac{1}{11^2}, \frac{3}{11^2}\right)$$

olur. P_1 ve P_2 noktaları arasındaki d_g-uzaklığı

$$d_g(P_1, P_2) = 3\max\{|2-1|, |6-3|\} + 2\min\{|2-1|, |6-3|\} = 11,$$

P_1 ve P_2 noktalarının inversiyon merkezine olan d_g-uzaklıkları

$$d_g(O, P_1) = 3\max\{|2-0|, |6-0|\} + 2\min\{|2-0|, |6-0|\} = 22,$$
$$d_g(O, P_2) = 3\max\{|1-0|, |3-0|\} + 2\min\{|1-0|, |3-0|\} = 11$$

olarak bulunur. P_1' ve P_2' invers noktaları arasındaki d_g-uzaklığı Teorem 4.7 den,

$$d_g(P_1', P_2') = \frac{r^2 . d_g(P_1, P_2)}{d_g(O, P_1) . d_g(O, P_2)} = \frac{11}{22.11} = \frac{1}{22}$$

olarak bulunur. Gerçekten de

$$d_g(P_1', P_2') = 3max\left\{\left|\frac{2}{22^2} - \frac{1}{11^2}\right|, \left|\frac{6}{22^2} - \frac{3}{11^2}\right|\right\} + 2min\left\{\left|\frac{2}{22^2} - \frac{1}{11^2}\right|, \left|\frac{6}{22^2} - \frac{3}{11^2}\right|\right\} = \frac{1}{22}$$

olup, Teorem 4.7 deki eşitliğinin sağlandığı görülür.

$\mathbb{R}^2_g$ düzleminde O, P_1, P_2 noktaları doğrudaş değilse, Teorem 4.7 deki eşitliğin her zaman geçerli olduğu söylenemez.. Bu durum bir örnek ile aşağıda açıklanmaktadır.

Örnek 4.9. $a = 3, b = 2$ parametrelerine karşılık gelen $\mathbb{R}^2_g$ de birim çembere göre inversiyon göz önüne alınsın. $P_1 = (-1,1)$, $P_2 = (0,1)$ noktaları ve inversiyon merkezinin doğrudaş olmadığı açıktır. P_1 noktasının birim çembere göre inversi

$$P_1' = \left(\frac{1.(1-0)}{(3\max\{|1|,|-1|+2min|1|,|-1|\})^2}, \frac{1.(-1-0)}{(3\max\{|1|,|-1|+2min|1|,|-1|\})^2}\right) = \left(\frac{1}{25}, \frac{-1}{25}\right),$$

Benzer şekilde

$$P_2' = \left(\frac{1.(0-0)}{(3\max\{|0|,|1| + 2min|0|,|1|\})^2}, \frac{1.(1-0)}{(3\max\{|0|,|1| + 2min|0|,|1|\})^2}\right) = \left(\frac{0}{25}, \frac{1}{25}\right)$$

olur. P_1 ve P_2 noktaları arasındaki d_g-uzaklığı

$$d_g(P_1, P_2) = 3\max\{|1-0|, |-1-1|\} + 2\min\{|1-0|, |-1-1|\} = 8,$$

P_1 ve P_2 noktalarının inversiyon merkezine olan d_g-uzaklıkları

$$d_g(O,P_1)= 3\max\{1,1\} + 2\min\{1,1\} = 5,$$
$$d_g(O,P_2) = 3\max\{0,1\} + 2\min\{0,1\} = 3$$

olarak bulunur. P_1' ve P_2' invers noktaları arasındaki d_g-uzaklığı

$$d_g(P_1',P_2') = 3\max\left\{\frac{1}{25},\frac{2}{25}\right\} + 2\min\left\{\frac{1}{25},\frac{2}{25}\right\} = \frac{8}{25}$$

olarak bulunur. Yukarıda elde edilen veriler Teorem 4.7 deki eşitlikte yerine yazıldığında

$$\frac{r^2.d_g(P_1,P_2)}{d_g(O,P_1).d_g(O,P_2)} = \frac{1.8}{5.3} = \frac{8}{15} \neq \frac{8}{25} = d_g(P_1',P_2')$$

olup, eşitliğinin sağlanmadığı görülür.

Aşağıdaki teoremde $\mathbb{R}_g^2$ düzlemindeki doğrudaş olmayan inversiyon merkezi ve farklı iki nokta için Teorem 4.7 deki eşitliğin sağlandığı durumlar sunulmaktadır.

Teorem 4.10. Genelleştirilmiş mutlak değer düzlemi $\mathbb{R}_g^2$ de, O merkezli ve r yarıçaplı çember $\mathcal{C}$ olsun. O, P_1, P_2 doğrudaş olmayan noktaları için P_1 ve P_2 noktalarının $\mathcal{C}$ çemberine göre inversiyon dönüşümü altında inversleri P_1' ve P_2' olmak üzere $\overrightarrow{OP_1}$ ve $\overrightarrow{OP_2}$ vektörlerinin doğrultuları $D_1 = \{(1,0),(0,1)\}$, $D_2 = \{(b,a),(b,-a)\}$, $D_3 = \{(1,\frac{a}{2a+b}),(1,-\frac{a}{2a+b})\}$ veya $D_4 = \{(1,\frac{2a+b}{a}),(1,-\frac{2a+b}{a})\}$ kümelerinden birisine ait ise bu invers noktalar arasındaki d_g-uzaklığı için

$$d_g(P_1',P_2') = \frac{r^2.d_g(P_1,P_2)}{d_g(O,P_1).d_g(O,P_2)}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. $\mathbb{R}_g^2$ de her öteleme dönüşümü d_g uzaklığını koruduğundan inversiyon merkezinin orijin olması genelliği bozmaz.

i) $\overrightarrow{OP_1}$ ve $\overrightarrow{OP_2}$ vektörlerinin doğrultularının D_1 kümesine ait olduğunu varsayalım. Bu durumda P_1 ve P_2 noktalarının koordinatları $P_1 = (x,0)$ ve $P_2 = (0,y)$ biçiminde olup, bu noktalar arasındaki d_g uzaklığı

$$d_g(P_1,P_2) = amax\{|x|,|y|\} + bmin\{|x|,|y|\} \quad (4.11)$$

bulunur. P_1 noktasının inversiyon merkezi O ya olan d_g uzaklığı

$$d_g(O,P_1) = amax\{|x|,|0|\} + bmin\{|x|,|0|\} = a|x| \quad (4.12)$$

olur. Benzer şekilde P_2 noktasının inversiyon merkezi O ya olan d_g uzaklığı

$$d_g(O,P_2) = amax\{|0|,|y|\} + bmin\{|0|,|y|\}=a|y| \quad (4.13)$$

elde edilir. P_1 ve P_2 noktalarının $\mathcal{C}$ çemberine göre inversiyon altında görüntüleri

$$P_1{}' = I_{\mathcal{C}}(P_1) = \left(\frac{r^2x}{a^2x^2},0\right) \quad (4.14)$$

ve

$$P_2{}' = I_{\mathcal{C}}(P_2) = (0,\frac{r^2y}{a^2y^2}) \quad (4.15)$$

olup, bu noktalar arasındaki d_g uzaklığı

$$d_g(P_1{}',P_2{}') = amax\left\{\left|\frac{r^2x}{a^2x^2}\right|,\left|\frac{r^2y}{a^2y^2}\right|\right\} + bmin\left\{\left|\frac{r^2x}{a^2x^2}\right|,\left|\frac{r^2y}{a^2y^2}\right|\right\}$$

$$d_g(P_1{}',P_2{}') = \frac{r^2}{a^2}\left[amax\{\left|\frac{1}{x}\right|,\left|\frac{1}{y}\right|\} + bmin\{\left|\frac{1}{x}\right|,\left|\frac{1}{y}\right|\}\right]$$

$$d_g(P_1{}',P_2{}') = \frac{r^2}{a^2}\frac{1}{|x|.|y|}\left[amax\{|x|,|y|\} + bmin\{|x|,|y|\}\right]$$

elde edilir. (4.11), (4.12) ve (4.13) eşitliklerden

$$d_g(P_1{}',P_2{}') = \frac{r^2.d_g(P_1,P_2)}{d_g(O,P_1).d_g(O,P_2)}$$

sonucuna ulaşılır.

ii) $\overrightarrow{OP_1}$ ve $\overrightarrow{OP_2}$ vektörlerinin doğrultularının D_2 kümesine ait olduğunu varsayalım. Bu durumda P_1 ve P_2 noktalarının koordinatları $P_1 = (x,x)$ ve $P_2 = (y,-y)$ biçiminde olup, bu noktalar arasındaki d_g uzaklığı

$$d_g(P_1,P_2) = amax\{|x-y|,|x+y|\} + bmin\{|x-y|,|x+y|\} \quad (4.16)$$

bulunur. P_1 noktasının inversiyon merkezi O ya olan d_g uzaklığı

$$d_g(O,P_1) = amax\{|x|,|x|\} + bmin\{|x|,|x|\} = (a+b)|x| \quad (4.17)$$

olur. Benzer şekilde P_2 noktasının inversiyon merkezi O ya olan d_g uzaklığı

$$d_g(O,P_2) = amax\{|y|,|-y|\} + bmin\{|y|,|-y|\} = (a+b)|y| \quad (4.18)$$

elde edilir. P_1 ve P_2 noktalarının $\mathcal{C}$ çemberine göre inversiyon altında görüntüleri

$$P_1{}' = I_{\mathcal{C}}(P_1) = \left(\frac{r^2}{(a+b)^2|x|},\frac{r^2}{(a+b)^2|x|}\right) \quad (4.19)$$

ve

$$P_2{}' = I_{\mathcal{C}}(P_2) = (\frac{r^2}{(a+b)^2|y|},-\frac{r^2}{(a+b)^2|y|}) \quad \ldots(4.20)$$

olup, bu noktalar arasındaki d_g uzaklığı

$$d_g(P_1', P_2') = amax\left\{\left|\frac{r^2}{(a+b)^2|x|} - \frac{r^2}{(a+b)^2|y|}\right|, \left|\frac{r^2}{(a+b)^2|x|} + \frac{r^2}{(a+b)^2|y|}\right|\right\} + bmin\left\{\left|\frac{r^2}{(a+b)^2|x|} - \frac{r^2}{(a+b)^2|y|}\right|, \left|\frac{r^2}{(a+b)^2|x|} + \frac{r^2}{(a+b)^2|y|}\right|\right\}$$

$$d_g(P_1', P_2') = \frac{ar^2}{(a+b)^2} max\{\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|, \left|\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right|\} + \frac{br^2}{(a+b)^2} min\{\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|, \left|\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right|\}$$

$$d_g(P_1', P_2') = \frac{r^2}{(a+b)^2|x|.|y|}\,[amax\{|x-y|, |x+y|\} + bmin\{|x-y|, |x+y|\}]$$

elde edilir. (4.16), (4.17) ve (4.18) eşitliklerden

$$d_g(P_1', P_2') = \frac{r^2.d_g(P_1,P_2)}{d_g(O,P_1).d_g(O,P_2)}$$

sonucuna ulaşılır.

iii) $\overrightarrow{OP_1}$ ve $\overrightarrow{OP_2}$ vektörlerinin doğrultularının D_3 kümesine ait olduğunu varsayalım. Bu durumda P_1 ve P_2 noktalarının koordinatları $P_1 = (= ((2a+b)x, ax)$, ve $P_2((2a+b)y, -ay)$ biçiminde olup, bu noktalar arasındaki d_g uzaklığı

$$d_g(P_1, P_2) = amax\{(2a+b)|x-y|, a|x+y|\} + bmin\{(2a+b)|x-y|, a|x+y|\} \quad (4.21)$$

bulunur. P_1 noktasının inversiyon merkezi O ya olan d_g uzaklığı

$$d_g(O, P_1) = amax\{(2a+b)|x|, a|x|\} + bmin\{(2a+b)|x|, a|x|\}$$

$$= 2a.(a+b)|x| \quad (4.22)$$

olur. Benzer şekilde P_2 noktasının inversiyon merkezi O ya olan d_g uzaklığı

$$d_g(O, P_2) = amax\{(2a+b)|y|, a|y|\} + bmin\{(2a+b)|y|, a|y|\}$$

$$= 2a.(a+b)|y| \quad (4.23)$$

elde edilir. P_1 ve P_2 noktalarının $\mathcal{C}$ çemberine göre inversiyon altında görüntüleri

$$P_1' = I_{\mathcal{C}}(P_1) = \left(\frac{r^2(2a+b)x}{(d_g(O,X))^2}, \frac{r^2ax}{(d_g(O,X))^2}\right) \quad (4.24)$$

ve

$$P_2' = I_{\mathcal{C}}(P_2) = \left(\frac{r^2(2a+b)y}{(d_g(O,Y))^2}, \frac{r^2ay}{(d_g(O,Y))^2}\right) \quad \ldots(4.25)$$

olup, bu noktalar arasındaki d_g uzaklığı

$$d_g(P_1', P_2') = amax\{|\Delta_x|, |\Delta_y|\} + bmin\{|\Delta_x|, |\Delta_y|\}$$

olup

$$|\Delta_x| = \left|\frac{r^2(2a+b)x}{(d_g(O,X))^2} - \frac{r^2(2a+b)y}{(d_g(O,Y))^2}\right|$$

$$= \left|\frac{r^2(2a+b)x}{(2a.(a+b)|x|)^2} - \frac{r^2(2a+b)y}{(2a.(a+b)|y|)^2}\right| = \frac{r^2(2a+b)}{(2a.(a+b))^2}\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{r^2(2a+b)}{(2a.(a+b))^2|x|.|y|}|x-y|$$

ve

$$|\Delta_y| = \left|\frac{r^2ax}{(d_g(O,X))^2} + \frac{r^2ay}{(d_g(O,Y))^2}\right|$$

$$= \left|\frac{r^2ax}{(2a.(a+b)|x|)^2} + \frac{r^2ay}{(2a.(a+b)|y|)^2}\right| = \frac{r^2a}{(2a.(a+b))^2}\left|\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right| = \frac{r^2a}{(2a.(a+b))^2|x|.|y|}|x+y|.$$

Buradan

$$d_g(P_1', P_2') = \frac{r^2}{(2a.(a+b))^2|x|.|y|}[amax\{(2a+b)|x-y|, a|x+y|\} + bmin\{(2a+b)|x-y|, a|x+y|\}]$$

elde edilir. (4.21), (4.22) ve (4.23) eşitliklerden

$$d_g(P_1', P_2') = \frac{r^2.d_g(P_1,P_2)}{d_g(O,P_1).d_g(O,P_2)}$$

sonucuna ulaşılır.

iv) $\overrightarrow{OP_1}$ ve $\overrightarrow{OP_2}$ vektörlerinin doğrultularının D_4 kümesine ait olduğunu varsayalım. Bu durumda P_1 ve P_2 noktalarının koordinatları $P_1 = (ax, (2a+b)x)$ ve $P_{2=}(ay, -(2a+b)y)$ biçiminde olup, bu noktalar arasındaki d_g uzaklığı

$$d_g(P_1, P_2) = amax\{a|x-y|, (2a+b)|x+y|\} + bmin\{a|x-y|, (2a+b)|x+y|\} \quad (4.26)$$

bulunur. P_1 noktasının inversiyon merkezi O ya olan d_g uzaklığı

$$d_g(O, P_1) = amax\{a|x|, (2a+b)|x|\} + bmin\{a|x|, (2a+b)|x|\}$$

$$= 2a.(a+b)|x| \quad (4.27)$$

olur. Benzer şekilde P_2 noktasının inversiyon merkezi O ya olan d_g uzaklığı

$$d_g(O, P_2) = amax\{a|y|, (2a+b)|y|\} + bmin\{a|y|, (2a+b)|y|\}$$

$$= 2a.(a+b)|y| \quad (4.28)$$

elde edilir. P_1 ve P_2 noktalarının $\mathcal{C}$ çemberine göre inversiyon altında görüntüleri

$$P_1' = \left(\frac{r^2ax}{(d_g(O,X))^2}, \frac{r^2(2a+b)x}{(d_g(O,X))^2}\right) = \frac{r^2}{4a^2(a+b)^2}\left(\frac{a}{x}, \frac{2a+b}{x}\right) \quad (4.29)$$

ve

$$P_2{}' = I_{\mathcal{C}}(P_2) = \left(\frac{r^2 ay}{(d_g(O,Y))^2}, -\frac{r^2(2a+b)y}{(d_g(O,Y))^2}\right) = \frac{r^2}{4a^2(a+b)^2}\left(\frac{a}{y}, -\frac{2a+b}{y}\right) \quad \ldots(4.30)$$

olup, bu noktalar arasındaki d_g uzaklığı

$$d_g(P_1{}', P_2{}') = amax\{|\Delta_x|, |\Delta_y|\} + bmin\{|\Delta_x|, |\Delta_y|\}$$

olup

$$|\Delta_x| = \frac{r^2}{4a^2(a+b)^2}\left|\frac{a}{x} - \frac{a}{y}\right| = \frac{r^2 a}{\left(2a.(a+b)\right)^2 |x|.|y|}|x-y|$$

ve

$$|\Delta_y| = \frac{r^2}{4a^2(a+b)^2}\left|\frac{2a+b}{x} - \frac{2a+b}{y}\right| = \frac{r^2(2a+b)}{\left(2a.(a+b)\right)^2 |x|.|y|}|x+y|.$$

Buradan

$$d_g(P_1{}', P_2{}') = \frac{r^2}{\left(2a.(a+b)\right)^2 |x|.|y|}[amax\{a|x-y|, (2a+b)|x+y|\} + bmin\{a|x-y|, (2a+b)|x+y|\}]$$

elde edilir. (4.26), (4.27) ve (4.28) eşitliklerden

$$d_g(P_1{}', P_2{}') = \frac{r^2 . d_g(P_1, P_2)}{d_g(O,P_1).d_g(O,P_2)}$$

sonucuna ulaşılır ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.10 dan $\mathbb{R}^2_T$ taksi düzleminde aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.11. $\mathbb{R}^2_T$ de O merkezli ve r yarıçaplı çember $\mathcal{C}$ olsun. O, P_1, P_2 doğrudaş olmayan noktaları için P_1 ve P_2 noktalarının $\mathcal{C}$ çemberine göre inversiyon dönüşümü altında inversleri $P_1{}'$ ve $P_2{}'$ olmak üzere $\overrightarrow{OP_1}$ ve $\overrightarrow{OP_2}$ vektörlerinin doğrultuları $D_1 = \{(1,0),(0,1)\}$, $D_2 = \{(1,1),(1,-1)\}$, $D_3 = \{(1,\frac{1}{3}),(1,-\frac{1}{3})\}$ veya $D_4 = \{(1,3),(1,-3)\}$ kümelerinden birisine ait ise bu invers noktalar arasındaki d_T-uzaklığı için

$$d_T(P_1{}', P_2{}') = \frac{r^2 . d_T(P_1, P_2)}{d_T(O,P_1).d_T(O,P_2)}$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem 4.10 dan $\mathbb{R}^2_M$ maksimum düzleminde aşağıdaki sonuç hemen elde edilir:

Sonuç 4.12. $\mathbb{R}^2_M$ de O merkezli ve r yarıçaplı çember $\mathcal{C}$ olsun. O, P_1, P_2 doğrudaş olmayan noktaları için P_1 ve P_2 noktalarının $\mathcal{C}$ çemberine göre inversiyon dönüşümü altında inversleri $P_1{}'$ ve $P_2{}'$ olmak üzere $\overrightarrow{OP_1}$ ve $\overrightarrow{OP_2}$ vektörlerinin doğrultuları $D_1 = \{(1,0),(0,1)\}$, $D_2 = \{(1,1),(1,-1)\}$, $D_3 = \{(1,\frac{1}{2}),(1,-\frac{1}{2})\}$ veya $D_4 = \{(1,2),(1,-2)\}$ kümelerinden birisine ait ise bu invers noktalar arasındaki d_M-uzaklığı için

$$d_M(P_1{}',P_2{}') = \frac{r^2.d_M(P_1,P_2)}{d_M(O,P_1).d_M(O,P_2)}$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem 4.10 dan $\mathbb{R}^2_C$ Çin dama düzleminde aşağıdaki sonuç hemen elde edilir:

Sonuç 4.13. $\mathbb{R}^2_C$ de, O merkezli ve r yarıçaplı çember $\mathcal{C}$ olsun. O, P_1, P_2 doğrudaş olmayan noktaları için P_1 ve P_2 noktalarının $\mathcal{C}$ çemberine göre inversiyon dönüşümü altında inversleri $P_1{}'$ ve $P_2{}'$ olmak üzere $\overrightarrow{OP_1}$ ve $\overrightarrow{OP_2}$ vektörlerinin doğrultuları $D_1 = \{(1,0),(0,1)\}$, $D_2 = \{(\sqrt{2}-1,1),(\sqrt{2}-1,-1)\}$, $D_3 = \{(1,\sqrt{2}-1),(1,-(\sqrt{2}-1))\}$ veya $D_4 = \{(1,\sqrt{2}+1),(1,-(\sqrt{2}+1))\}$ kümelerinden birisine ait ise bu invers noktalar arasındaki d_g-uzaklığı için

$$d_C(P_1{}',P_2{}') = \frac{r^2.d_C(P_1,P_2)}{d_C(O,P_1).d_C(O,P_2)}$$

eşitliği geçerlidir.

Örnek 4.14.

i) $a = 3, b = 2$ için genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde O merkezli, birim çemberdeki inversiyon göz önüne alındığında $P_1 = (3,0), P_2 = (0,2)$ için $\overrightarrow{OP_1}$ ve $\overrightarrow{OP_2}$ vektörlerinin doğrultuları D_1 kümesine aittir. O zaman $P_1{}'$ ve $P_2{}'$ invers noktaları $I_{\mathcal{C}}(P_1) = P_1{}' = \left(\frac{1}{27},0\right)$ ve $I_{\mathcal{C}}(P_2) = P_2{}' = \left(0,\frac{1}{18}\right)$ olarak bulunur. P_1 ve P_2 noktaları arasındaki d_g -uzaklığı $d_g(P_1,P_2) = 13$ ve $P_1{}'$ ve $P_2{}'$ arasındaki d_g -uzaklığı $d_g(P_1{}',P_2{}') = \frac{13}{54}$ olur. P_1 ve P_2 noktalarının inversiyon merkezine olan d_g – uzaklıkları $d_g(O,P_1) = 9$ ve $d_g(O,P_2) = 6$ olup, buradan bulduğumuz değerler Teorem 4.10 da ifade edilen eşitliği

$$\frac{r^2.d_g(P_1,P_2)}{d_g(O,P_1).d_g(O,P_2)} = \frac{1^2.13}{9.6} = \frac{13}{54} = d_g(P_1{}',P_2{}')$$

sağlandığı görülür.

ii) $a = 3$, $b = 2$ için genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde O merkezli, birim çemberdeki inversiyon göz önüne alındığında $P_1 = (2,3)$, $P_2 = (2,-3)$ için $\overrightarrow{OP_1}$ ve $\overrightarrow{OP_2}$ vektörlerinin doğrultuları D_2 kümesine aittir. O zaman $P_1{}'$ ve $P_2{}'$ invers noktaları $I_{\mathcal{C}}(P_1) = P_1{}' = \left(\frac{2}{13^2},\frac{3}{13^2}\right)$ ve $I_{\mathcal{C}}(P_2) = P_2{}' = \left(\frac{2}{13^2},\frac{3}{13^2}\right)$ olarak bulunur. P_1 ve P_2 arasındaki d_g -uzaklığı $d_g(P_1,P_2) = 18$ ve $P_1{}'$ ve $P_2{}'$arasındaki d_g -uzaklığı $d_g(P_1{}',P_2{}') = \frac{18}{13^2}$ olur.

P_1 ve P_2 noktalarının inversiyon merkezine olan d_g – uzaklıkları $d_g(O,P_1)=13$ ve $d_g(O,P_2)=13$ olup, Teorem 4.10 da ifade edilen eşitliği

$$\frac{r^2.d_g(P_1,P_2)}{d_g(O,P_1).d_g(O,P_2)}=\frac{1^2.18}{13.13}=\frac{18}{13^2}=d_g(P_1',P_2')$$

eşitliğin sağlandığı görülür.

iii) $a=3$, $b=2$ için genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde O merkezli, birim çemberdeki inversiyon göz önüne alındığında $P_1=(8,3), P_2=(8,-3)$ için $\overrightarrow{OP_1}$ ve $\overrightarrow{OP_2}$ vektörlerinin doğrultuları D_3 kümesine aittir. O zaman P_1' veP_2' invers noktaları $I_{\mathcal{C}}(P_1)=P_1'=\left(\frac{8}{30^2},\frac{3}{30^2}\right)$ ve $I_{\mathcal{C}}(P_2)=P_2'=\left(\frac{8}{30^2},\frac{-3}{30^2}\right)$ olarak bulunur. P_1 ve P_2 arasındaki d_g -uzaklığı $d_g(P_1,P_2)=18$ ve P_1' veP_2' arasındaki d_g -uzaklığı $d_g(P_1',P_2')=\frac{18}{30^2}$ olur. P_1 ve P_2 noktalarının inversiyon merkezine d_g – uzaklıkları $d_g(O,P_1)=30$ ve $d_g(O,P_2)=30$ olup, Teorem 4.10 da ifade edilen eşitliği

$$\frac{r^2.d_g(P_1,P_2)}{d_g(O,P_1).d_g(O,P_2)}=\frac{1^2.18}{30.30}=\frac{18}{30^2}=d_g(P_1',P_2')$$

eşitliğin sağlandığı görülür.

iv) $a=3$, $b=2$ için genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde O merkezli, birim çemberdeki inversiyon göz önüne alındığında P_1= (3,8), P_2= (3,-8) için $\overrightarrow{OP_1}$ ve $\overrightarrow{OP_2}$ vektörlerinin doğrultuları D_4 kümesine aittir. O zaman P_1' veP_2' invers noktaları $I_{\mathcal{C}}(P_1)=P_1'=\left(\frac{3}{30^2},\frac{8}{30^2}\right)$ ve $I_{\mathcal{C}}(P_2)=P_2'=\left(\frac{3}{30^2},\frac{-8}{30^2}\right)$ olarak bulunur. P_1 ve P_2 arasındaki d_g -uzaklığı $d_g(P_1,P_2)=48$ ve P_1' veP_2' arasındaki d_g -uzaklığı $d_g(P_1',P_2')=\frac{48}{30^2}$ olur. P_1 ve P_2 noktalarının inversiyon merkezine d_g – uzaklıkları $d_g(O,P_1)=30$ ve $d_g(O,P_2)=30$ olup, Teorem 4.10 da ifade edilen eşitliği

$$\frac{r^2.d_g(P_1,P_2)}{d_g(O,P_1).d_g(O,P_2)}=\frac{1^2.48}{30.30}=\frac{48}{30^2}=d_g(P_1',P_2')$$

eşitliğin sağlandığı görülür.

v) $\mathbb{R}^2_{\mathrm{T}}$ düzleminde O merkezli, birim çemberdeki inversiyon göz önüne alındığında P_1= (3,1), P_2= (-6,2) için $\overrightarrow{OP_1}$ ve $\overrightarrow{OP_2}$ vektörlerinin doğrultuları D_3 kümesine aittir. O zaman P_1' ve P_2' invers noktaları $I_{\mathcal{C}}(P_1)=P_1'=\left(\frac{3}{16},\frac{1}{16}\right)$ ve $I_{\mathcal{C}}(P_2)=P_2'=\left(-\frac{6}{64},\frac{2}{64}\right)$ olarak bulunur. P_1 ve P_2 arasındaki d_T -uzaklığı $d_T(P_1,P_2)=10$ ve P_1' veP_2' arasındaki d_T -

uzaklığı $d_T(P_1',P_2') = \frac{5}{16}$ olur. P_1 ve P_2 noktalarının inversiyon merkezine d_T – uzaklıkları $d_T(O,P_1) = 4$ ve $d_T(O,P_2) = 8$ olup, Sonuç 4.11 de ifade edilen eşitliği

$$\frac{r^2.d_T(P_1,P_2)}{d_T(O,P_1).d_T(O,P_2)} = \frac{10}{4.8} = \frac{5}{16} = d_T(P_1',P_2')$$

eşitliğin sağlandığı görülür.

vi) $\mathbb{R}^2_M$ düzleminde O merkezli, birim çemberdeki inversiyon göz önüne alındığında P_1= (2,1), P_2= (-4,2) için $\overrightarrow{OP_1}$ ve $\overrightarrow{OP_2}$ vektörlerinin doğrultuları D_4 kümesine aittir. O zaman P_1' ve P_2' invers noktaları $I_{\mathcal{C}}(P_1) = P_1' = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ ve $I_{\mathcal{C}}(P_2) = P_2' = \left(-\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)$ olarak bulunur. P_1 ve P_2 arasındaki d_M -uzaklığı $d_M(P_1,P_2) = 6$ ve P_1' ve P_2' arasındaki d_M -uzaklığı $d_M(P_1',P_2') = \frac{3}{4}$ olur. P_1 ve P_2 noktalarının inversiyon merkezine d_M – uzaklıkları $d_M(O,P_1) = 2$ ve $d_M(O,P_2) = 4$ olup, Sonuç 4.12 de ifade edilen eşitliği

$$\frac{r^2.d_M(P_1,P_2)}{d_M(O,P_1).d_M(O,P_2)} = \frac{6}{2.4} = \frac{3}{4} = d_M(P_1',P_2')$$

eşitliğin sağlandığı görülür.

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ MUTLAK DEĞER DÜZLEMİNDE ÇEMBERE GÖRE İNVERSİYON ALTINDA ÇİFTE ORAN VE HARMONİK EŞLENİK KAVRAMLARININ İNCELENMESİ

Bu bölümde $\mathbb{R}_g^2$ düzleminde yönlü doğru parçalarının uzunlukları tanımlanarak, çifte oran ve harmonik eşlenik kavramları tanımlanmıştır ve bazı temel özellikleri verilmiştir. Daha sonra $\mathbb{R}_g^2$ düzleminde çemberlere göre inversiyon dönüşümleri altında noktaların çifte oranının ve harmonik eşlenik noktaların özellikleri incelenmiştir

5.1 Genelleştirilmiş Mutlak Değer Düzleminde Yönlü Doğru Parçalarının Uzunluğu

Bir yönlü doğru parçasının genelleştirilmiş mutlak değer uzunluğu taksi, genelleştirilmiş taksi, maksimum, Çin dama düzlemlerindekine benzer olarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

ℓ, genelleştirilmiş mutlak değer düzlemi $\mathbb{R}_g^2$ de bir doğru olsun. Bu doğru üzerindeki X ve Y noktaları için $\overline{XY}$ yönlü doğru parçasının uzunluğu

$$d_g[XY] = \begin{cases} d_g(X,Y), \overline{XY} \text{ doğru parçası ile } \ell \text{ aynı yönlü ise} \\ -d_g(X,Y), \overline{XY} \text{ doğru parçası ile } \ell \text{ ters yönlü ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. Ayrıca $d_g[XY] = -d_g[YX]$ olur.

X, Y, Z noktaları doğrudaş noktalar olsun. Eğer Z noktası X ve Y noktaları arasında ise bu noktalar XZY dizilişine sahiptir.

5.2 Genelleştirilmiş Mutlak Değer Düzleminde Çifte Oran

X, Y, Z, W genelleştirilmiş mutlak değer düzlemi $\mathbb{R}_g^2$ de doğrudaş farklı noktalar olsun. Bu noktaların çifte oranı

$$(XY;ZW)_g = \frac{d_g[XZ]}{d_g[XW]} \cdot \frac{d_g[YW]}{d_g[YZ]}$$

biçiminde tanımlanır.

Genelleştirilmiş mutlak değer düzlemindeki çifte oran ile ilgili bazı özellikler aşağıda verilmektedir.

Önerme 5.2.1 Genelleştirilmiş mutlak değer düzlemi $\mathbb{R}^2_g$ de ℓ yönlendirilmiş bir doğru, X, Y, Z, W de ℓ üzerinde farklı noktalar olsun. Z ve W noktalarının X ve Y noktaları arasında bulunması ve bulunmaması durumunda $(XY;ZW)_g > 0$ dır.

İspat :

i) Z ve W noktaları X ve Y noktalarının arasında olsun. O zaman noktalar; $XZWY, XWZY, YZWX, YWZX$ dizilişlerinden birisidir. Her bir diziliş için çifte oran sırasıyla aşağıdaki gibidir:

1) $XZWY$ dizilişi için,

$$(XY;ZW)_g = \frac{d_g[XZ]}{d_g[XW]} . \frac{d_g[YW]}{d_g[YZ]} = \frac{d_g(X,Z)}{d_g(X,W)} . \frac{(-d_g(Y,W))}{(-d_g(Y,Z))} > 0,$$

2) $XWZY$ dizilişi için,

$$(XY;ZW)_g = \frac{d_g[XZ]}{d_g[XW]} . \frac{d_g[YW]}{d_g[YZ]} = \frac{d_g(X,Z)}{d_g(X,W)} . \frac{(-d_g(Y,W))}{(-d_g(Y,Z))} > 0,$$

3) $YZWX$ dizilişi için,

$$(XY;ZW)_g = \frac{d_g[XZ]}{d_g[XW]} . \frac{d_g[YW]}{d_g[YZ]} = \frac{-d_g(X,Z)}{-d_g(X,W)} . \frac{d_g(Y,W)}{d_g(Y,Z)} > 0,$$

4) $YWZX$ dizilişi için,

$$(XY;ZW)_g = \frac{d_g[XZ]}{d_g[XW]} . \frac{d_g[YW]}{d_g[YZ]} = \frac{-d_g(X,Z)}{-d_g(X,W)} . \frac{d_g(Y,W)}{d_g(Y,Z)} > 0.$$

Bu durumda her bir dizilişin $(XY;ZW)_g$ çifte oranı değerinin pozitif olduğu görülür.

ii) Z ve W noktaları X ve Y noktaları arasında bulunmasın. O zaman noktalar; $ZWXY, ZWYX, WZXY, WZYX, XYZW, XYWZ, YXZW, YXWZ, ZXYW, ZYXW, WYXZ, WXYZ$ dizilişlerinden birisidir. Her bir diziliş için çifte oran sırasıyla aşağıdaki gibidir:

1) $ZWXY$ dizilişi için,

$$(XY;ZW)_g = \frac{d_g[XZ]}{d_g[XW]} . \frac{d_g[YW]}{d_g[YZ]} = \frac{-d_g(X,Z)}{-d_g(X,W)} . \frac{(-d_g(Y,W))}{(-d_g(Y,Z))} > 0,$$

2) $ZWYX$ dizilişi için,

$$(XY;ZW)_g = \frac{d_g[XZ]}{d_g[XW]}.\frac{d_g[YW]}{d_g[YZ]} = \frac{-d_g(X,Z)}{-d_g(X,W)}.\frac{(-d_g(Y,W))}{(-d_g(Y,Z))} > 0,$$

3) $WZXY$ dizilişi için,

$$(XY;ZW)_g = \frac{d_g[XZ]}{d_g[XW]}.\frac{d_g[YW]}{d_g[YZ]} = \frac{-d_g(X,Z)}{-d_g(X,W)}.\frac{(-d_g(Y,W))}{(-d_g(Y,Z))} > 0,$$

4) $WZYX$ dizilişi için,

$$(XY;ZW)_g = \frac{d_g[XZ]}{d_g[XW]}.\frac{d_g[YW]}{d_g[YZ]} = \frac{-d_g(X,Z)}{-d_g(X,W)}.\frac{(-d_g(Y,W))}{(-d_g(Y,Z))} > 0,$$

5) $XYZW$ dizilişi için,

$$(XY;ZW)_g = \frac{d_g[XZ]}{d_g[XW]}.\frac{d_g[YW]}{d_g[YZ]} = \frac{d_g(X,Z)}{d_g(X,W)}.\frac{d_g(Y,W)}{d_g(Y,Z)} > 0,$$

6) $XYWZ$ dizilişi için,

$$(XY;ZW)_g = \frac{d_g[XZ]}{d_g[XW]}.\frac{d_g[YW]}{d_g[YZ]} = \frac{d_g(X,Z)}{d_g(X,W)}.\frac{d_g(Y,W)}{d_g(Y,Z)} > 0,$$

7) $YXZW$ dizilişi için,

$$(XY;ZW)_g = \frac{d_g[XZ]}{d_g[XW]}.\frac{d_g[YW]}{d_g[YZ]} = \frac{d_g(X,Z)}{d_g(X,W)}.\frac{d_g(Y,W)}{d_g(Y,Z)} > 0,$$

8) $YXWZ$ dizilişi için,

$$(XY;ZW)_g = \frac{d_g[XZ]}{d_g[XW]}.\frac{d_g[YW]}{d_g[YZ]} = \frac{d_g(X,Z)}{d_g(X,W)}.\frac{d_g(Y,W)}{d_g(Y,Z)} > 0,$$

9) $ZXYW$ dizilişi için,

$$(XY;ZW)_g = \frac{d_g[XZ]}{d_g[XW]}.\frac{d_g[YW]}{d_g[YZ]} = \frac{-d_g(X,Z)}{d_g(X,W)}.\frac{d_g(Y,W)}{(-d_g(Y,Z))} > 0,$$

10) $ZYXW$ dizilişi için,

$$(XY;ZW)_g = \frac{d_g[XZ]}{d_g[XW]}.\frac{d_g[YW]}{d_g[YZ]} = \frac{-d_g(X,Z)}{d_g(X,W)}.\frac{d_g(Y,W)}{(-d_g(Y,Z))} > 0,$$

11) $WYXZ$ dizilişi için,

$$(XY;ZW)_g = \frac{d_g[XZ]}{d_g[XW]}.\frac{d_g[YW]}{d_g[YZ]} = \frac{d_g(X,Z)}{-d_g(X,W)}.\frac{(-d_g(Y,W))}{d_g(Y,Z)} > 0,$$

12) $WXYZ$ dizilişi için,

$$(XY;ZW)_g = \frac{d_g[XZ]}{d_g[XW]}.\frac{d_g[YW]}{d_g[YZ]} = \frac{d_g(X,Z)}{-d_g(X,W)}.\frac{(-d_g(Y,W))}{d_g(Y,Z)} > 0,$$

Böylece her bir dizilişin $(XY;ZW)_g$ çifte oran değerinin pozitif olduğu görülür.

Örnek 5.2.2. $X = (1,1), Y = (\frac{3}{2},\frac{3}{2}), Z = (2,2), W = (4,4)$ genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde yönlü doğru üzerinde dört farklı nokta olsun. $a = 1$ ve $b = \frac{1}{2}$parametrelerine karşılık gelen genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde $XYZW$ ve $ZWXY$ dizilişlerinin genelleştirilmiş mutlak değer çifte oranını bulalım.

$$d_g(X,Z) = 1|1-2| + \frac{1}{2}|1-2| = \frac{3}{2}$$

$$d_g(X,W) = 1|1-4| + \frac{1}{2}|1-4| = \frac{9}{2}$$

$$d_g(Y,W) = 1\left|\frac{3}{2}-4\right| + \frac{1}{2}\left|\frac{3}{2}-4\right| = \frac{15}{4}$$

$$d_g(Y,Z) = 1\left|\frac{3}{2}-2\right| + \frac{1}{2}\left|\frac{3}{2}-2\right| = \frac{3}{4}$$

$XYZW$ dizilimi için genelleştirilmiş mutlak değer çifte oranı,

$$(XY;ZW)_g = \frac{d_g[XZ]}{d_g[XW]}.\frac{d_g[YW]}{d_g[YZ]} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{9}{2}}.\frac{\frac{15}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{3}$$

olarak elde ederiz. $ZWXY$ dizilimi için genelleştirilmiş mutlak değer çifte oranı,

$$(XY;ZW)_g = \frac{d_g[XZ]}{d_g[XW]}.\frac{d_g[YW]}{d_g[YZ]} = \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{9}{2}}.\frac{-\frac{15}{4}}{-\frac{3}{4}} = \frac{5}{3}$$

olarak bulunur.

Sonuç 5.2.3. $\mathbb{R}_g^2$ genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde X, Y, Z, W yönlü doğru üzerinde dört farklı nokta olsun. $\{X, Y\}$ ve $\{Z, W\}$ nokta ikilileri birbirini ayırır ise $(XY; ZW)_g$ genelleştirilmiş mutlak değer çifte oranı sıfırdan küçüktür.

İspat : $\mathbb{R}_g^2$ genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde X, Y, Z, W yönlü doğru üzerinde dört farklı nokta olduğunu kabul edelim. $\{X, Y\}$ ve $\{Z, W\}$ nokta ikililerinin birbirini ayırdığı durumda noktaların dizilişleri $XZYW$, $XWYZ$, $ZXWY$, $ZYWX$, $YZXW$, $YWXZ$, $WXZY$, $WYZX$ şeklindedir. Her diziliş için noktaların genelleştirilmiş mutlak değer çifte oranı aşağıdaki gibi incelenmektedir:

1)$XZYW$ dizilişi için,

$$(XY; ZW)_g = \frac{d_g[XZ]}{d_g[XW]} . \frac{d_g[YW]}{d_g[YZ]} = \frac{d_g(X,Z)}{d_g(X,W)} . \frac{d_g(Y,W)}{(-d_g(Y,Z))} < 0,$$

2) $XWYZ$ dizilişi için,

$$(XY; ZW)_g = \frac{d_g[XZ]}{d_g[XW]} . \frac{d_g[YW]}{d_g[YZ]} = \frac{d_g(X,Z)}{d_g(X,W)} . \frac{(-d_g(Y,W))}{d_g(Y,Z)} < 0,$$

3) $ZXWY$ dizilişi için,

$$(XY; ZW)_g = \frac{d_g[XZ]}{d_g[XW]} . \frac{d_g[YW]}{d_g[YZ]} = \frac{(-d_g(X,Z))}{d_g(X,W)} . \frac{(-d_g(Y,W))}{(-d_g(Y,Z))} < 0,$$

4) $ZYWX$ dizilişi için,

$$(XY; ZW)_g = \frac{d_g[XZ]}{d_g[XW]} . \frac{d_g[YW]}{d_g[YZ]} = \frac{(-d_g(X,Z))}{(-d_g(X,W))} . \frac{d_g(Y,W)}{(-d_g(Y,Z))} < 0,$$

5) $YZXW$ dizilişi için,

$$(XY; ZW)_g = \frac{d_g[XZ]}{d_g[XW]} . \frac{d_g[YW]}{d_g[YZ]} = \frac{(-d_g(X,Z))}{d_g(X,W)} . \frac{d_g(Y,W)}{d_g(Y,Z)} < 0,$$

6) $YWXZ$ dizilişi için,

$$(XY; ZW)_g = \frac{d_g[XZ]}{d_g[XW]} . \frac{d_g[YW]}{d_g[YZ]} = \frac{d_g(X,Z)}{(-d_g(X,W))} . \frac{d_g(Y,W)}{d_g(Y,Z)} < 0,$$

7) $WXZY$ dizilişi için,

$$(XY;ZW)_g = \frac{d_g[XZ]}{d_g[XW]}.\frac{d_g[YW]}{d_g[YZ]} = \frac{d_g(X,Z)}{(-d_g(X,W))}.\frac{(-d_g(Y,W))}{(-d_g(Y,Z))} < 0,$$

8) $WYZX$ dizilişi için,

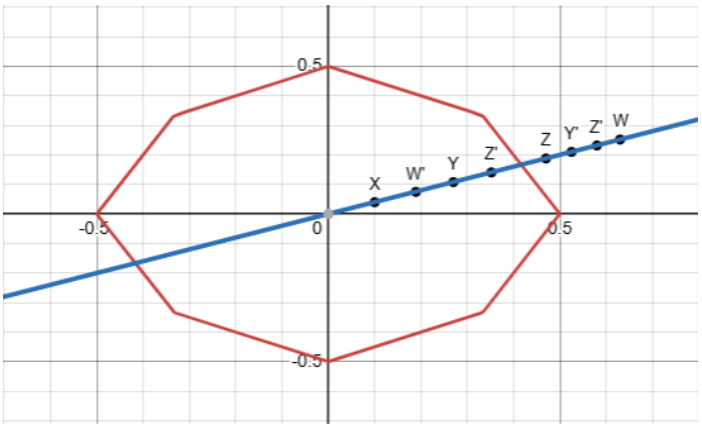
$$(XY;ZW)_g = \frac{d_g[XZ]}{d_g[XW]}.\frac{d_g[YW]}{d_g[YZ]} = \frac{(-d_g(X,Z))}{(-d_g(X,W))}.\frac{(-d_g(Y,W))}{d_g(Y,Z)} < 0.$$

Böylece bulunan tüm genelleştirilmiş mutlak değer çifte oranının negatif olduğu sonucuna ulaşılır.

Teorem 5.2.4 $\mathbb{R}^2_g$ genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde O merkezli ve r yarıçaplı çember $\mathcal{C}$ olsun. O inversiyon merkezinden geçen doğru üzerinde ve O noktasından farklı doğrudaş dört noktanın genelleştirilmiş mutlak değer çifte oranı, $\mathcal{C}$ çemberine göre inversiyon dönüşümü altında değişmez kalır.

İspat: $\mathbb{R}^2_g$ düzleminde O merkezli, r yarıçaplı $\mathcal{C}$ çemberine göre inversiyonu göz önüne alalım. İnversiyon merkezi O noktasından geçen doğru üzerinde ve O noktasından farklı doğrudaş dört nokta X, Y, Z, W olsun. Bu noktaların $\mathcal{C}$ çemberine göre inversiyon altında görüntüleri X', Y', Z', W' olsun. Bu noktalar için $(XY;ZW)_g$ genelleştirilmiş mutlak değer çifte oranı ve invers görüntüleri

$(X'Y';Z'W')_g$ genelleştirilmiş mutlak değer çifte oranına eşit olduğunu göstermeliyiz. İnversiyon dönüşümünün tanımından $\mathbb{R}^2_g$ deki bir nokta inversiyon merkezine yaklaştıkça, inversiyon altında elde edilen görüntüsünün merkezden uzaklaştığı; ayrıca merkez, nokta ve görüntü noktasının doğrudaş olduğu bilinmektedir.(Şekil 5.2.1)



Şekil 5.2.1 İnversler ve Noktalar

Bu özelliğe bağlı olarak $\mathbb{R}_g^2$ düzleminde $\mathcal{C}$ çemberine göre inversiyon altında $\overline{XY}$ yönlü doğru parçası ve inversi olan $\overline{X'Y'}$ yönlü doğru parçasının yönleri farklıdır.

Bunun yanı sıra $\{X,Y\}$ ve $\{Z,W\}$ nokta çiftleri için her birinin diğerini ayırması veya ayırmaması özelliği $\mathcal{C}$ çemberine göre inversleri olan $\{X',Y'\}$ ve $\{Z',W'\}$ nokta çiftlerinde de geçerlidir.

$$(X'Y';Z'W')_g = \frac{d_g[X'Z']}{d_g[X'W']}.\frac{d_g[Y'W']}{d_g[Y'Z']} = \frac{d_g(X',Z')}{d_g(X',W')}.\frac{d_g(Y',W')}{d_g(Y',Z')}$$

olur. Teorem 4.10. den

$$(X'Y';Z'W')_g = \frac{\frac{r^2 d_g(X,Z)}{d_g(O,X).d_g(O,Z)}}{\frac{r^2 d_g(X,W)}{d_g(O,X).d_g(O,W)}}.\frac{\frac{r^2 d_g(Y,W)}{d_g(O,Y).d_g(O,W)}}{\frac{r^2 d_g(Y,Z)}{d_g(O,Y).d_g(O,Z)}} = \frac{d_g(X,Z)}{d_g(X,W)}.\frac{d_g(Y,W)}{d_g(Y,Z)}$$

$$= \frac{d_g[X,Z]}{d_g[X,W]}.\frac{d_g[Y,W]}{d_g[Y,Z]} = (XY;ZW)_g$$

elde edilir.

Örnek 5.2.5. $a = 4, b = 2$ parametrelerine karşılık gelen $\mathbb{R}_g^2$ düzleminde $\mathcal{C}$ birim çember olsun. O inversiyon merkezinden geçen doğru üzerinde ve O noktasından farklı dört doğrudaş nokta $X = \left(\frac{1}{2},1\right), Y = (1,2), Z = (2,4), W = (6,12)$ olsun. Bu noktaların çifte oranını

$$(XY;ZW)_g = \frac{d_g[XZ]}{d_g[XW]}.\frac{d_g[YW]}{d_g[YZ]}$$

olup,

$$\mathrm{d_g(X,Z)} = 4\max\{\left|\tfrac{1}{2}-2\right|,|1-4|\} + 2\min\{\left|\tfrac{1}{2}-2\right|,|1-4|\} = 15,$$

$$d_g(X,W) = 4\max\{\left|\tfrac{1}{2}-6\right|,|1-12|\} + 2min\{\left|\tfrac{1}{2}-6\right|,|1-12|\} = 55,$$

$$d_g(Y,W) = 4\max\{|1-6|,|2-12|\} + 2min\{|1-6|,|2-12|\} = 50,$$

$$d_g(Y,Z) = 4\max\{|1-2|,|2-4|\} + 2min\{|1-2|,|2-4|\} = 10,$$

olarak bulunur. Noktaların dizilişi $XYZW$ olduğundan $(XY;ZW)_g$ çifte oranı

$$(XY;ZW)_g = \frac{\mathrm{d_g(X,Z)}}{d_g(X,W)}.\frac{d_g(Y,W)}{d_g(Y,Z)} = \frac{15}{55}.\frac{50}{10} = \frac{15}{11}$$

olarak elde edilir. Verilen noktaların $\mathcal{C}$ birim çemberine göre inversiyon altındaki inversleri aşağıdaki gibidir:

$I_{\mathcal{C}}(X) = X' = \frac{r^2}{d_g(O,X)^2}.X = \frac{1}{\left(4.1+2.\frac{1}{2}\right)^2}\left(\frac{1}{2},1\right) = \frac{1}{5^2}\left(\frac{1}{2},1\right),$

$I_{\mathcal{C}}(Y) = Y' = \frac{r^2}{d_g(O,Y)^2}.Y = \frac{1}{(4.2+2.1)^2}(1,2) = \frac{1}{10^2}(1,2),$

$I_{\mathcal{C}}(Z) = Z' = \frac{r^2}{d_g(O,Z)^2}.Z = \frac{1}{(4.4+2.2)^2}(2,4) = \frac{1}{20^2}(2,4),$

$I_{\mathcal{C}}(W) = W' = \frac{r^2}{d_g(O,W)^2}.W = \frac{1}{(4.12+2.6)^2}(6,12) = \frac{1}{60^2}(6,12).$

İnverslerin çifte oranı

$$(X'Y';Z'W')_g = \frac{d_g[X'Z']}{d_g[X'W']}.\frac{d_g[Y'W']}{d_g[Y'Z']}$$

olup, invers noktaların dizilişi $W'Z'Y'X'$ biçimindedir. Buradan çifte oran

$$(X'Y';Z'W')_g = \frac{-\mathrm{d_g(X',Z')}}{-d_g(X',W')}.\frac{(-d_g(Y',W'))}{(-d_g(Y',Z'))} = \frac{d_g(X',Z')}{d_g(X',W')}.\frac{d_g(Y',W')}{d_g(Y',Z')}$$

olup,

$\mathrm{d_g(X',Z')} = 4\max\{\left|\frac{1}{50}-\frac{2}{400}\right|,\left|\frac{1}{25}-\frac{4}{400}\right|\} + 2\min\{\left|\frac{1}{50}-\frac{2}{400}\right|,\left|\frac{1}{25}-\frac{4}{400}\right|\} = \frac{3}{20},$

$d_g(X',W') = 4\max\{\left|\frac{1}{50}-\frac{6}{3600}\right|,\left|\frac{1}{25}-\frac{12}{3600}\right|\} + 2\min\{\left|\frac{1}{50}-\frac{6}{3600}\right|,\left|\frac{1}{25}-\frac{12}{3600}\right|\} = \frac{11}{60},$

$d_g(Y',W') = 4\max\{\left|\frac{1}{100}-\frac{6}{3600}\right|,\left|\frac{2}{100}-\frac{12}{3600}\right|\} + 2\min\{\left|\frac{1}{100}-\frac{6}{3600}\right|,\left|\frac{2}{100}-\frac{12}{3600}\right| = \frac{1}{12},$

$d_g(Y,Z) = 4\max\{\left|\frac{1}{100}-\frac{2}{400}\right|,\left|\frac{2}{100}-\frac{4}{400}\right|\} + 2\min\{\left|\frac{1}{100}-\frac{2}{400}\right|,\left|\frac{2}{100}-\frac{4}{400}\right|\} = \frac{1}{20}$

olarak bulunur. Buradan invers noktaların çifte oranı

$$(X'Y';Z'W')_g = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{11}{60}}.\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{20}} = \frac{15}{11}$$

olarak bulunur. Böylece $(XY;ZW)_g = (X'Y';Z'W')_g$ olduğu görülür.

5.3 Genelleştirilmiş Mutlak Değer Düzleminde Harmonik Noktalar

$\mathbb{R}^2_g$ düzleminde doğrudaş X,Y,Z noktaları için Z noktası X ile Y arasında bulunuyorsa, Z noktası $\overline{XY}$ doğru parçasını içten böler, ve

$$\frac{d_g[XZ]}{d_g[ZY]} = \lambda > 0$$

oranı geçerlidir. Eğer Z noktası, X ve Y noktalarının arasında değilse, $\overline{XY}$ doğru parçası Z noktası tarafından dıştan bölünmüş olur ve

$$\frac{d_g[XZ]}{d_g[ZY]} = \lambda < 0$$

oranı geçerlidir. Burada Z noktasına *bölme noktası* denir ve Z noktası $\overline{XY}$ doğru parçasını λ oranına böler. Z noktası X veya Y noktasına çakışık olması durumunda $\lambda = 0$ veya ∞ olur.

Eğer Z ve W noktaları, $\overline{XY}$ doğru parçasını sırasıyla içten ve dıştan, aynı oranda fakat zıt yönlerde bölen iki nokta ise XZ ile ZY yönlü doğru parçalarının genelleştirilmiş mutlak değer uzunlukları oranı, XW ile WY yönlü doğru parçalarının genelleştirilmiş mutlak değer uzunlukları oranının negatifine eşittir. Yani,

$$\frac{d_g[XZ]}{d_g[ZY]} = -\frac{d_g[XW]}{d_g[WY]} = \frac{d_g[XW]}{d_g[YW]}$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca X,Y ve Z noktaları doğrudaş olduğundan,

$$\frac{d_g[XZ]}{d_g[ZY]} = -\frac{d_E[XZ]}{d_E[ZY]}$$

eşitliği geçerlidir.(On ratio münevver).

Tanım 5.3.1 $\mathbb{R}^2_g$ düzleminde iki nokta X,Y olsun. *Harmonik bölme* terimi Z ve W noktalarının $\overline{XY}$ yönlü doğru parçasını

$$\frac{d_g[XZ]}{d_g[ZY]} = \frac{d_g[XW]}{d_g[WY]}$$

oranında bölmesine denir ve Z ve W noktalarına X ve Y noktalarına göre *harmonik eşleniktir* denir. X, Y, Z, W doğrudaş noktalarına da *harmonik küme* denir ve $H(XY, ZW)_g$ ile gösterilir.

Sonuç 5.3.2. $\mathbb{R}^2_g$ düzleminde Z ve W noktalarının X ve Y noktalarına göre harmonik eşlenik olması için gerekli ve yeterli koşul $(XY, ZW)_g = -1$ olmasıdır.

İspat. $\mathbb{R}^2_g$ düzleminde Z ve W noktalarının X ve Y noktalarına göre harmonik eşlenik olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\frac{d_g[XZ]}{d_g[ZY]} = \frac{d_g[XW]}{d_g[WY]}$$

dir. Bu eşitlik kullanıldığında

$$(XY, ZW)_g = \frac{d_g[XZ]}{d_g[XW]} \cdot \frac{d_g[YW]}{d_g[YZ]} = -1$$

elde ederiz.

Şimdi $(XY, ZW)_g = -1$ olduğunu kabul edelim. O zaman

$$\frac{d_g[XZ]}{d_g[XW]} \cdot \frac{d_g[YW]}{d_g[YZ]} = -1$$

olup buradan

$$\frac{d_g[XZ]}{d_g[YZ]} = -\frac{d_g[XW]}{d_g[YW]}$$

olur ve

$$\frac{d_g[XZ]}{d_g[YZ]} = \frac{d_g[XW]}{d_g[WY]}$$

olduğu elde edilir. Böylece Z ve W noktalarının X ve Y noktalarına göre genelleştirilmiş mutlak değer harmonik eşlenik olduğu sonucuna varılır.

Teorem 5.3.3. $\mathbb{R}^2_g$ düzleminde merkezi orijin ve çapı $\overline{XY}$ doğru parçası olan çember $\mathcal{C}$ olsun. Z ve W noktaları $\overrightarrow{OY}$ ışınını içten ve dıştan bölen noktalar olsun. Bu durumda Z ve W noktalarının X ve Y noktalarına göre genelleştirilmiş mutlak değer harmonik eşlenik

olabilmesi için gerek ve yeter koşul bu noktaların $\mathcal{C}$ çemberine göre $I_{\mathcal{C}}$ inversiyonu altında invers noktalar olmasıdır.

İspat. $\mathbb{R}^2_g$ düzleminde merkezi orijin ve çapı $\overline{XY}$ doğru parçası olan genelleştirilmiş mutlak değer çember $\mathcal{C}$ olsun. O zaman $\mathcal{C}$ çemberinin yarıçapı $r = d_g(O,X) = d_g(O,Y)$ olur. Z ve W noktaları $\overline{XY}$ doğru parçası sırasıyla içten ve dıştan bölen noktalar ise

$$\frac{d_g[XZ]}{d_g[ZY]} = -\frac{d_g[XW]}{d_g[WY]}$$

olur. Varsayalım ki Z ve W noktalarının X ve Y noktalarına göre genelleştirilmiş mutlak değer harmonik eşlenik olsun. O halde

$$(XY, ZW)_g = -1$$

olup

$$\frac{d_g[XZ]}{d_g[XW]} . \frac{d_g[YW]}{d_g[YZ]} = -1$$

eşitliği geçerlidir. Z noktası $\overline{XY}$ doğru parçasını içten bölen bir nokta olduğundan

$$d_g[YZ] = -d_g(Z,Y)$$

ve

$$d_g[XZ] = d_g(X,Z)$$

olur. Z noktası $\overrightarrow{OY}$ ışını üzerinde bir nokta olduğundan $\mathcal{C}$ çemberinin içinde olup

$$d_g(Y,Z) = r - d_g(O,Z)$$

ve

$$d_g(X,Z) = r + d_g(O,Z)$$

olur. Benzer şekilde W noktası $\overline{XY}$ doğru parçası dıştan bölen bir nokta olduğundan

$$d_g[YW] = d_g(Y,W)$$

ve

$$d_g[XW] = d_g(X,W)$$

olur. Ayrıca

$$d_g(X,W) = r + d_g(O,W)$$

$$d_g(Y,W) = d_g(O,W) - r$$

olur. Yukarıdaki eşitlikleri kullanılarak,

$$\frac{d_g[XZ]}{d_g[XW]}.\frac{d_g[YW]}{d_g[YZ]} = -1$$

eşitliğinde kullanılması durumunda,

$$\frac{d_g(X,Z)}{d_g(X,W)}.\frac{d_g(Y,W)}{(-d_g(Y,Z))} = -1$$

olup buradan

$$\frac{(r+d_g(O,Z))}{(r+d_g(O,W))}.\frac{(d_g(O,W)-r)}{-(r-d_g(O,Z))} = -1$$

elde edilir. Eşitlik düzenlendiğinde,

$$(r+d_g(O,Z)).((d_g(O,W)-r) = (r+d_g(O,W)).(r-d_g(O,Z))$$

$$d_g(O,Z)d_g(O,W) = r^2$$

olup Z ve W noktalarının $\mathcal{C}$ çemberine göre inversiyon altında invers noktalar olduğu görülür.

Şimdi Z ve W noktalarının $\mathcal{C}$ çemberine göre inversiyon altında invers noktalar olduğunu kabul edelim. O halde,

$$d_g(O,Z)d_g(O,W) = r^2$$

olur. $\mathbb{R}^2_g$ düzleminde $(XY,ZW)_g$ çifte oranı

$$(XY,ZW)_g = \frac{d_g[XZ]}{d_g[XW]}.\frac{d_g[YW]}{d_g[YZ]}$$

dir. Yukarıda elde edilen $d_g[XZ]$, $d_g[YZ]$, $d_g[YW]$, $d_g[XW]$ yönlü uzaklıkları çifte oranda yerine yazılırsa

$$(XY,ZW)_g = \frac{d_g[XZ]}{d_g[XW]}.\frac{d_g[YW]}{d_g[YZ]} = \frac{d_g(X,Z)}{d_g(X,W)}.\frac{d_g(Y,W)}{(-d_g(Y,Z))}$$

$$= \frac{(r+d_g(O,Z))}{(r+d_g(O,W))}.\frac{(d_g(O,W)-r)}{-(r-d_g(O,Z))}$$

$$= \frac{r\,d_g(O,W)-r^2+d_g(O,Z)d_g(O,W)-r\,d_g(O,Z)}{-r^2+r\,d_g(O,Z)-r\,d_g(O,W)+d_g(O,Z)d_g(O,W)}$$

$$= \frac{r\,d_g(O,W)-r^2+r^2-r\,d_g(O,Z)}{-r^2+r\,d_g(O,Z)-r\,d_g(O,W)+r^2}$$

$$= \frac{r\,d_g(O,W)-r\,d_g(O,Z)}{r\,d_g(O,Z)-r\,d_g(O,W)} = -1$$

elde edilir. Böylece $(XY,ZW)_g = -1$ olduğundan Z ve W noktalarının X ve Y noktalarına göre harmonik eşlenik olduğu görülür.

Örnek 5.3.4. $a = 2$, $b = 1$ parametrelerine karşılık gelen $\mathbb{R}^2_g$ düzleminde $X = (-2,-4)$, $Y = (-\frac{1}{2},-1)$, $Z = (1,2)$ doğrudaş üç farklı nokta olsun. Z noktasının, X ve Y noktalarına göre harmonik eşleniği W noktası olsun. W noktası aşağıdaki gibi belirlenir:

Z ve W noktaları X ve Y noktalarına göre harmonik eşlenik olduğundan $(XY,ZW)_g = -1$ olduğunu biliniyor. Ayrıca X, Y, Z ve W noktaları doğrudaş noktalar olup $y = 2x$ doğrusu üzerindedirler. O zaman $W = (x,2x)$ alınarak, $(XY,ZW)_g = -1$ eşitliğinden

$$(XY,ZW)_g = \frac{2max\{3,6\}+min\{3,6\}}{2max\{|x+2|,|2x+4|\}+1min\{|x+2|,|2x+4|\}} \frac{2max\left\{\left|x+\frac{1}{2}\right|,|2x+1|\right\}+min\left\{\left|x+\frac{1}{2}\right|,|2x+1|\right\}}{2max\left\{\frac{3}{2},3\right\}+min\left\{\frac{3}{2},3\right\}} = -1,$$

$$= \frac{15}{2|2x+4|+|x+2|} \frac{2|2x+1|+\left|x+\frac{1}{2}\right|}{\frac{15}{2}} = -1,$$

$$= \frac{2\left|x+\frac{1}{2}\right|}{|x+2|} = -1,$$

olup $W = (-1,-2)$ olarak bulunur.

6. GENELLEŞTİRİLMİŞ MUTLAK DEĞER DÜZLEMİNDE ÇEMBERE GÖRE İNVERSİYON ALTINDA DOĞRULARIN VE ÇEMBERLERİN GÖRÜNTÜLERİNİN İNCELENMESİ

Öklidyen düzlemde çembere göre inversiyon ile ilgili aşağıdaki özellikler iyi bilinmektedir:

i) İnversiyon merkezinden geçen doğrular çembere göre inversiyon altında kendilerine dönüşür.

ii) İnversiyon merkezinden geçmeyen doğrular çembere göre inversiyon altında inversiyon merkezinden geçen çemberlere dönüşür.

iii) Merkezi inversiyon merkezi olan çemberler, çembere göre inversiyon altında yine merkezi inversiyon merkezi olan çemberlere dönüşür.

iv) İnversiyon merkezinden geçmeyen çemberler, çembere göre inversiyon altında inversiyon merkezinden geçmeyen çemberlere dönüşür.

v) İnversiyon merkezinden geçen çemberler, çembere göre inversiyon altında inversiyon merkezinden geçmeyen doğrulara dönüşür.

Bu bölümde $\mathbb{R}_g^2$ düzleminde doğruların ve çemberlerin çembere göre inversiyon altında görüntüleri incelenmekte ve bu özelliklerin geçerli olup olmadıkları araştırılmaktadır.

$\mathbb{R}_g^2$ düzleminde bütün ötelemeler d_g-uzaklıklarını koruduğundan aşağıdaki incelemelerde inversiyon merkezini orijin almak genelliği bozmayacaktır.

Teorem 6.1. $\mathbb{R}_g^2$ genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde $\mathcal{C}$, O merkezli, r yarıçaplı çember olsun. $I_{\mathcal{C}}$ inversiyonu altında O inversiyon merkezinden geçen doğrular invaryant kalır.

İspat. $\mathbb{R}_g^2$ düzleminde $\mathcal{C}$ çemberi

$$amax\{|x|,|y|\} + bmin\{|x|,|y|\} = r$$

kümesi olur. O noktasından geçen ℓ doğrusu $a_1x + a_2y = 0$ olsun. $I_{\mathcal{C}}$ inversiyonu altında ℓ nin görüntüsü

$$a_1\left(\frac{r^2x'}{(amax\{|x'|,|y'|\} + bmin\{|x'|,|y'|\})^2}\right) + a_2\left(\frac{r^2y'}{(amax\{|x'|,|y'|\} + bmin\{|x'|,|y'|\})^2}\right) = 0$$

olur. Buradan

$$a_1x' + a_2y' = 0$$

olup bu ℓ doğrusunun $I_{\mathcal{C}}$ inversiyonu altında değişmez kaldığını gösterir.

Teorem 6.2. $\mathbb{R}_g^2$ genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde $\mathcal{C}$, O merkezli, r yarıçaplı çember olsun. İnversiyon merkezi O den geçmeyen yatay doğrunun $\mathcal{C}$ çemberine göre inversiyon altında görüntüsü parabol yaylarının birleşiminden oluşur.

İspat. Sıfırdan farklı $a_3$reel sayısı için herhangi $y + a_3 = 0$ denklemli yatay doğru ℓ olsun. ℓ doğrusunun $I_{\mathcal{C}}$ inversiyonu altında görüntüsü $I_{\mathcal{C}}(\ell)$

$$\frac{r^2y'}{(amax\{|x'|,|y'|\} + bmin\{|x'|,|y'|\})^2} + a_3 = 0$$

eşitliğini sağladığı görülür. Buradan

$$r^2y' + a_3(amax\{|x'|,|y'|\} + bmin\{|x'|,|y'|\})^2 = 0 \ldots. \quad (6.1)$$

elde edilir. $|x'| > |y'|$ iken (6.1) den

$$r^2y' + a_3(a|x'| + b|y'|)^2 = 0 \ \ldots \quad (6.2)$$

denklemine indirgenir.

i) $x' < 0,\ y' < 0$ iken (6.2) den

$$r^2y' + a_3(a(-x')) + b(y(-y'))^2 = 0,$$

$$r^2y' + a_3(ax' + by')^2 = 0,$$

$$r^2y' + a_3(a^2(x')^2 + 2abx'y' + b^2(y')^2) = 0,$$

$$a_3a^2(x')^2 + (2ab)a_3x'y' + a_3b^2(y')^2 + r^2y' = 0 \quad (6.3)$$

elde edilir. (6.3) ile belirtilen eğri için,

$$d = \begin{vmatrix} a_3a^2 & aba_3 \\ aba_3 & a_3b^2 \end{vmatrix} = a_3{}^2(a^2b^2 - a^2b^2) = 0$$

olduğundan eğri parabolik eğridir. Ayrıca,

$$D = \begin{vmatrix} a_3a^2 & a_3ab & 0 \\ a_3ab & a_3b^2 & \frac{r^2}{2} \\ 0 & \frac{r^2}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{r^2}{2}a_3a^2\left(\frac{r^2}{2}\right) = -a_3a^2\left(\frac{r^2}{2}\right)^2$$

olur. Böylece $\forall a_3 \epsilon \mathbb{R} - \{0\}$ için (6.3) bir parabol belirtir.

ii) $x' < 0,\ y' \geq 0$ iken (6.2) denkleminden

$$r^2y' + a_3(a\,(-x') + b\,(y'))^2 = 0$$

elde edilir. Buradan

$$r^2y' + a_3(a^2(x')^2 - 2abx'y' + b^2(y')^2) = 0\ ..\qquad (6.4)$$

olur. (6.4) deki eğri için

$$d = \begin{vmatrix} a_3a^2 & -a_3ab \\ -a_3ab & a_3b^2 \end{vmatrix} = a_3{}^2(a^2b^2 - a^2b^2) = 0$$

olduğundan eğri parabolik eğridir. Ayrıca,

$$D = \begin{vmatrix} a_3a^2 & -a_3ab & 0 \\ -a_3ab & a_3b^2 & \frac{r^2}{2} \\ 0 & \frac{r^2}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{r^2}{2}(a_3a^2\frac{r^2}{2}) = -a_3a^2\left(\frac{r^2}{4}\right)$$

$a_3 < 0$ ve $a_3 > 0$ iken sırasıyla $D > 0$ ve $D < 0$ olup (6.4) deki eğri bir paraboldür.

iii) $x' \geq 0,\ y' < 0$ iken (6.2) den

$$r^2y' + a_3(ax' - by')^2 = 0,$$

$$r^2y' + a_3(a^2(x')^2 - 2abx'y' + b^2(y')^2) = 0\ ..\qquad .(6.5)$$

eşitliği elde edilir. Bu (6.4) ile aynı denklem olup (ii) ve (iii) durumlarındaki bölgelerde aynı parabolün iki parçası görüntüde bulunmaktadır.

iv) $x' \geq 0,\ y' \geq 0$ iken (6.2) denkleminden

$$r^2y' + a_3(ax' + by')^2 = 0,$$

$$r^2y' + a_3(a^2(x')^2 + 2abx'y' + b^2(y')^2) = 0\ ..\qquad (6.6)$$

eşitliği elde edilir. Bu (6.6) ve (6.3) aynı denklem olup (i) ve (iv) durumlarındaki bölgelerde bu parabolün parçaları görüntüde bulunmaktadır.

$|x'| \leq |y'|$ iken (6.1) denkleminden

$$r^2y' + a_3(a|y'| + b|x'|)^2 = 0 \ \ldots. \tag{6.7}$$

denklemi elde edilir. Yukarıdaki incelemeye benzer olarak (6.7) ifadesi aşağıdaki gibi incelenir.

i) $x' < 0,\ y' < 0$ iken (6.7) den

$$r^2y' + a_3(-ay' - bx')^2 = 0,$$

$$r^2y' + a_3(ay' + bx')^2 = 0 \ \ldots.$$

$$a_3b^2(x')^2 + (2ab)a_3x'y' + a_3a^2(y')^2 + r^2y' = 0 \tag{6.8}$$

elde edilir. (6.8) eşitliğinden,

$$d = \begin{vmatrix} a_3b^2 & a_3ab \\ a_3ab & a_3a^2 \end{vmatrix} = a_3{}^2(a^2b^2 - a^2b^2) = 0$$

olduğundan eğri paraboliktir. Ayrıca,

$$D = \begin{vmatrix} a_3b^2 & a_3ab & 0 \\ a_3ab & a_3a^2 & \frac{r^2}{2} \\ 0 & \frac{r^2}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{r^2}{2}(a_3b^2\frac{r^2}{2}) = -a_3b^2\left(\frac{r^2}{2}\right)^2$$

olup $a_3 > 0$ ve $a_3 < 0$ iken sırasıyla $D < 0$ ve $D > 0$ olur. Buradan (6.8) deki eğri bir parabol belirtir. $|x'| \leq |y'|$ ve $x' < 0,\ y' < 0$ bölgesinde bu parabolün yayı ℓ doğru görüntüsünde yer alır.

ii) $x' < 0,\ y' \geq 0$ iken (6.7) eşitliğinden,

$$r^2y' + a_3(ay' - bx')^2 = 0,$$

$$r^2y' + a_3a^2(y')^2 - (2ab)a_3x'y' + a_3b^2(x')^2 = 0 \tag{6.9}$$

olur.

$$d = \begin{vmatrix} a_3b^2 & -a_3ab \\ -a_3ab & a_3a^2 \end{vmatrix} = a_3{}^2(a^2b^2 - a^2b^2) = 0$$

olduğundan eğri paraboliktir. Ayrıca,

$$D = \begin{vmatrix} a_3b^2 & -a_3ab & 0 \\ -a_3ab & a_3a^2 & \frac{r^2}{2} \\ 0 & \frac{r^2}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{r^2}{2}(a_3b^2\frac{r^2}{2}) = -a_3b^2\left(\frac{r^2}{2}\right)^2$$

olup $a_3 > 0$ ve $a_3 < 0$ iken sırasıyla $D < 0$ ve $D > 0$ olur. Sonuç olarak (6.9) bir parabol belirtir. Böylece $|x'| \leq |y'|$ ve $x' < 0$, $y' < 0$ bölgesinde (6.9) parabolünün yayı ℓ doğrusunun görüntüsünde yer alır.

iii) $x' \geq 0$, $y' < 0$ iken (6.7) denkleminden

$$r^2y' + a_3(-ay' + bx')^2 = 0 \tag{6.10}$$

elde edilir. (6.10) eşitliği (ii) durumundaki (6.9) eşitliği ile aynıdır. Bu yüzden, $|x'| \leq |y'|$ iken (ii) ve (iii) durumlarındaki bölgelerde bu parabolün parçaları görüntüde bulunmaktadır.

iv) $x' \geq 0$, $y' \geq 0$ iken (6.7) denkleminden

$$r^2y' + a_3(ay' + bx')^2 = 0 \tag{6.11}$$

eşitlik elde edilir. (6.11) ve (6.8) aynı denklem olduğundan (i) ve (iv) oluşan bölgelerde bu parabolün iki parçası görüntüde bulunmaktadır.

Böylece ℓ doğrusunun $I_{\mathcal{C}}$ inversiyonu altında görüntüsü

$$\{(x',y') \mid a_3(ax' + by')^2 + r^2y' = 0,\ |x'| > |y'| \text{ ve } x'.y' \geq 0\},$$

$$\{(x',y') \mid a_3(ax' - by')^2 + r^2y' = 0,\ |x'| > |y'| \text{ ve } x'.y' \leq 0\},$$

$$\{(x',y') \mid a_3(ay' + bx')^2 + r^2y' = 0,\ |x'| \leq |y'| \text{ ve } x'.y' \geq 0\}$$

$$\{(x',y') \mid a_3(ay' - bx')^2 + r^2y' = 0,\ |x'| \leq |y'| \text{ ve } x'.y' \leq 0\}$$

parabol yaylarının birleşiminden oluşur.

Örnek 6.3. $a = 2$, $b = \frac{1}{2}$ parametrelerine karşılık gelen genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde $\mathcal{C}$ birim çember olsun. $y + 3 = 0$ yatay doğrusunun $I_{\mathcal{C}}$ inversiyonu altında görüntüsü aşağıdaki gibi bulunur.

$I_{\mathcal{C}}$ inversiyonu tanımından

$$(x,y) = \frac{1}{\left(2\max\{|x'|,|y'|\} + \frac{1}{2}\min\{|x'|,|y'|\}\right)^2}(x',y')$$

eşitliği geçerlidir. Verilen doğrunun $I_{\mathcal{C}}$ inversiyonu altındaki görüntüsü

$$\frac{y'}{\left(2\max\{|x'|,|y'|\} + \frac{1}{2}\min\{|x'|,|y'|\}\right)^2} + 3 = 0,$$

$$y' + 3\left(2\max\{|x'|, |y'|\} + \frac{1}{2}\min\{|x'|, |y'|\}\right)^2 = 0 \qquad (6.12)$$

olur. $|x'| > |y'|$ iken (6.12) den

$$y' + 3\left(2|x'| + \frac{1}{2}|y'|\right)^2 = 0$$

$$y' + 3(4(x')^2 + 2|x'y'| + \frac{1}{4}(y')^2 = 0\,,$$

$$y' + 12(x')^2 + 6|x'y'| + \frac{3}{4}(y')^2 = 0$$

olur. $x'.y' > 0$ iken

$$y' + 12(x')^2 + 6x'y' + \frac{3}{4}(y')^2 = 0 \qquad (6.13)$$

ve $x'.y' \leq 0$ iken

$$y' + 12(x')^2 - 6x'y' + \frac{3}{4}(y')^2 = 0 \qquad (6.14)$$

parabollerinin yaylarından oluşur. Benzer şekilde $|x'| \leq |y'|$ iken (6.12) den

$$y' + 3\left(2|y'| + \frac{1}{2}|x'|\right)^2 = 0$$

$$y' + 3(4(y')^2 + 2|x'y'| + \frac{1}{4}(x')^2 = 0\,,$$

$$y' + 12(y')^2 + 6|x'y'| + \frac{3}{4}(x')^2 = 0$$

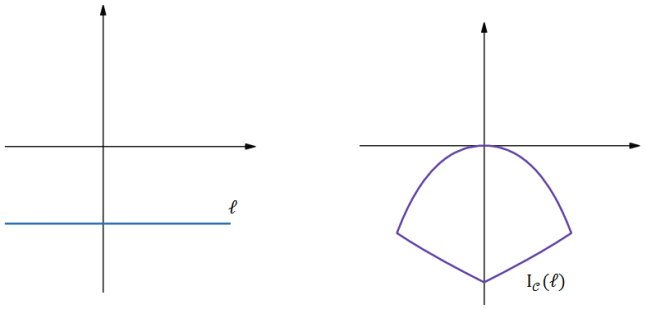
olur. $x'.y' > 0$ iken

$$y' + 12(y')^2 + 6x'y' + \frac{3}{4}(x')^2 = 0 \qquad (6.15)$$

ve $x'.y' \leq 0$ iken

$$y' + 12(y')^2 - 6x'y' + \frac{3}{4}(x')^2 = 0 \qquad (6.16)$$

parabollerinin yaylarından oluşur, (Şekil 6.1).



Şekil 6.1. Yatay doğru ve inversi

Teorem 6.4. $\mathbb{R}_g^2$ genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde $\mathcal{C}$, O merkezli, r yarıçaplı çember olsun. İnversiyon merkezi O dan geçmeyen dikey doğrunun $\mathcal{C}$ çemberine göre inversiyon altında görüntüsü parabol yaylarının birleşiminden oluşur.

İspat. Sıfırdan farklı a_3 reel sayısı için herhangi $x + a_3 = 0$ denklemli dikey doğru ℓ olsun. ℓ doğrusunun $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}$ inversiyonu altında görüntüsü $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}(\ell)$

$$\frac{r^2x'}{(amax\{|x'|,|y'|\}+bmin\{|x'|,|y'|\})^2}+a_3=0$$

eşitliğini sağladığı görülür. Buradan

$$r^2x'+a_3(amax\{|x'|,|y'|\}+bmin\{|x'|,|y'|\})^2=0 \ldots. \tag{6.17}$$

elde edilir. $|x'|>|y'|$ iken (6.17) den

$$r^2x'+a_3(a|x'|+b|y'|)^2=0 \ \ldots \tag{6.18}$$

denklemine indirgenir.

i) $x'<0,\ y'<0$ iken (6.18) den

$$r^2x'+a_3(a(-x'))+b(y(-y'))^2=0,$$

$$r^2x'+a_3(ax'+by')^2=0,$$

$$r^2x'+a_3(a^2(x')^2+2abx'y'+b^2(y')^2)=0,$$

$$a_3a^2(x')^2+(2ab)a_3x'y'+a_3b^2(y')^2+r^2x'=0 \tag{6.19}$$

elde edilir. (6.19) ile belirtilen eğri için,

$$d=\begin{vmatrix} a_3a^2 & aba_3 \\ aba_3 & a_3b^2 \end{vmatrix}=a_3{}^2(a^2b^2-a^2b^2)=0$$

olduğundan eğri parabolik eğridir. Ayrıca,

$$D = \begin{vmatrix} a_3a^2 & a_3ab & \frac{r^2}{2} \\ a_3ab & a_3b^2 & 0 \\ \frac{r^2}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{r^2}{2}a_3b^2\left(\frac{r^2}{2}\right) = -a_3b^2\left(\frac{r^2}{2}\right)^2$$

olur. Böylece $\forall a_3 \epsilon \mathbb{R} - \{0\}$ ve $b \neq 0$ için (6.19) bir parabol belirtir. $b = 0$ iken uzaklık maksimum uzaklığın a katı olup eğri paralel iki doğru olacaktır.

ii) $x' < 0,\ y' \geq 0$ iken (6.18) denkleminden

$$r^2x' + a_3(a\,(-x') + b\,(y'))^2 = 0$$

elde edilir. Buradan

$$r^2x' + a_3(a^2(x')^2 - 2abx'y' + b^2(y')^2) = 0 \qquad (6.20)$$

olur. (6.20) deki eğri için

$$d = \begin{vmatrix} a_3a^2 & -a_3ab \\ -a_3ab & a_3b^2 \end{vmatrix} = a_3{}^2(a^2b^2 - a^2b^2) = 0$$

olduğundan eğri parabolik eğridir. Ayrıca,

$$D = \begin{vmatrix} a_3a^2 & -a_3ab & \frac{r^2}{2} \\ -a_3ab & a_3b^2 & 0 \\ \frac{r^2}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{r^2}{2}(a_3b^2\frac{r^2}{2}) = -a_3b^2\left(\frac{r^2}{4}\right)$$

$b \neq 0$ olmak üzere $a_3 < 0$ ve $a_3 > 0$ iken sırasıyla $D > 0$ ve $D < 0$ olup (6.20) deki eğri bir paraboldür. (i) deki gibi $b = 0$ iken eğri paralel iki doğru olacaktır.

iii) $x' \geq 0,\ y' < 0$ iken (6.18) den

$$r^2x' + a_3(ax' - by')^2 = 0,$$

$$r^2x' + a_3(a^2(x')^2 - 2abx'y' + b^2(y')^2) = 0\ . \qquad (6.21)$$

eşitliği elde edilir. Bu (6.20) ile aynı denklem olup (ii) ve (iii) durumlarındaki bölgelerde aynı parabolün iki parçası görüntüde bulunmaktadır.

iv) $x' \geq 0,\ y' \geq 0$ iken (6.18) denkleminden

$$r^2x' + a_3(ax' + by')^2 = 0,$$

$$r^2x' + a_3(a^2(x')^2 + 2abx'y' + b^2(y')^2) = 0\ . \qquad (6.22)$$

eşitliği elde edilir. Bu (6.22) ve (6.19) aynı denklem olup (i) ve (iv) durumlarındaki bölgelerde bu parabolün parçaları görüntüde bulunmaktadır.

$|x'| \leq |y'|$ iken (6.17) denkleminden

$$r^2x' + a_3(a|y'| + b|x'|)^2 = 0 \tag{6.23}$$

denklemi elde edilir. Yukarıdaki incelemeye benzer olarak (6.23) ifadesi aşağıdaki gibi incelenir.

i) $x' < 0,\ y' < 0$ iken (6.23) den

$$r^2x' + a_3(-ay' - bx')^2 = 0,$$

$$r^2x' + a_3(ay' + bx')^2 = 0 \ \ldots.$$

$$a_3b^2(x')^2 + (2ab)a_3x'y' + a_3a^2(y')^2 + r^2x' = 0 \tag{6.24}$$

elde edilir. (6.24) eşitliğinden,

$$d = \begin{vmatrix} a_3b^2 & a_3ab \\ a_3ab & a_3a^2 \end{vmatrix} = a_3{}^2(a^2b^2 - a^2b^2) = 0$$

olduğundan eğri paraboliktir. Ayrıca,

$$D = \begin{vmatrix} a_3b^2 & a_3ab & \frac{r^2}{2} \\ a_3ab & a_3a^2 & 0 \\ \frac{r^2}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{r^2}{2}(a_3b^2\frac{r^2}{2}) = -a_3b^2\left(\frac{r^2}{2}\right)^2$$

olup $b \neq 0$ iken $a_3 > 0$ ve $a_3 < 0$ iken sırasıyla $D < 0$ ve $D > 0$ olur. Buradan (6.24) deki eğri bir parabol belirtir. $|x'| \leq |y'|$ ve $x' < 0,\ y' < 0$ bölgesinde bu parabolün yayı ℓ doğru görüntüsünde yer alır. $b = 0$ iken eğri paralel iki doğru olur.

ii) $x' < 0,\ y' \geq 0$ iken (6.23) eşitliğinden,

$$r^2x' + a_3(ay' - bx')^2 = 0,$$

$$r^2x' + a_3a^2(y')^2 - (2ab)a_3x'y' + a_3b^2(x')^2 = 0 \tag{6.25}$$

olur.

$$d = \begin{vmatrix} a_3b^2 & -a_3ab \\ -a_3ab & a_3a^2 \end{vmatrix} = a_3{}^2(a^2b^2 - a^2b^2) = 0$$

olduğundan eğri paraboliktir. Ayrıca,

$$D = \begin{vmatrix} a_3b^2 & -a_3ab & \frac{r^2}{2} \\ -a_3ab & a_3a^2 & 0 \\ \frac{r^2}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{r^2}{2}(a_3a^2\frac{r^2}{2}) = -a_3a^2\left(\frac{r^2}{2}\right)^2$$

olup $a_3 > 0$ ve $a_3 < 0$ iken sırasıyla $D < 0$ ve $D > 0$ olur. Sonuç olarak (6.25) bir parabol belirtir. Böylece $|x'| \leq |y'|$ ve $x' < 0$, $y' < 0$ bölgesinde (6.25) parabolünün yayı ℓ doğrusunun görüntüsünde yer alır.

iii) $x' \geq 0$, $y' < 0$ iken (6.23) denkleminden

$$r^2x' + a_3(-ay' + bx')^2 = 0 \ldots \quad . (6.26)$$

elde edilir. (6.26) eşitliği (ii) durumundaki (6.25) eşitliği ile aynıdır. Bu yüzden, $|x'| \leq |y'|$ iken (ii) ve (iii) durumlarındaki bölgelerde bu parabolün parçaları görüntüde bulunmaktadır.

iv) $x' \geq 0$, $y' \geq 0$ iken (6.23) denkleminden

$$r^2x' + a_3(ay' + bx')^2 = 0 \ldots \quad . (6.27)$$

eşitlik elde edilir. (6.27) ve (6.24) aynı denklem olduğundan (i) ve (iv) oluşan bölgelerde bu parabolün iki parçası görüntüde bulunmaktadır.

Böylece ℓ doğrusunun $I_{\mathcal{C}}$ inversiyonu altında görüntüsü

$$\{(x',y') \mid a_3(ax' + by')^2 + r^2x' = 0, \ |x'| > |y'| \text{ ve } x'.y' \geq 0\}, \quad (6.19)$$

$$\{(x',y') \mid a_3(ax' - by')^2 + r^2x' = 0, \ |x'| > |y'| \text{ ve } x'.y' \leq 0\}, \quad (6.20)$$

$$\{(x',y') \mid a_3(ay' + bx')^2 + r^2x' = 0, \ |x'| \leq |y'| \text{ ve } x'.y' \geq 0\} \quad (6.24)$$

$$\{(x',y') \mid a_3(ay' - bx')^2 + r^2x' = 0, \ |x'| \leq |y'| \text{ ve } x'.y' \leq 0\} \quad (6.25)$$

parabol yaylarının birleşiminden oluşur.

Örnek 6.5. $a = 2$, $b = \frac{1}{2}$ parametrelerine karşılık gelen genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde $\mathcal{C}$ birim çember olsun. $x + \frac{1}{3} = 0$ dikey doğrusunun $I_{\mathcal{C}}$ inversiyonu altında görüntüsü

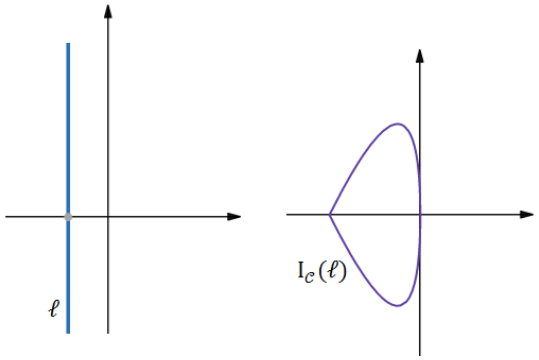
$$\left\{(x',y') \mid \tfrac{1}{3}(2x' + \tfrac{1}{2}y')^2 + x' = 0, \ |x'| > |y'| \text{ ve } x'.y' \geq 0\right\},$$

$$\left\{(x',y') \left| \frac{1}{3}(2x'-\frac{1}{2}y')^2 + x' = 0, \quad |x'| > |y'| \text{ ve } x'.y' \leq 0 \right.\right\},$$

$$\left\{(x',y') \left| \frac{1}{3}(2y'+\frac{1}{2}x')^2 + x' = 0, \quad |x'| \leq |y'| \text{ ve } x'.y' \geq 0 \right.\right\},$$

$$\left\{(x',y') \left| \frac{1}{3}(2y'-\frac{1}{2}x')^2 + x' = 0, \quad |x'| \leq |y'| \text{ ve } x'.y' \leq 0 \right.\right\}$$

parabol yaylarının birleşiminden oluşur, (Şekil 6.2).



Şekil 6.2. Dikey doğru ve inversi

Teorem 6.6. $\mathbb{R}_g^2$ genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde $\mathcal{C}$, O merkezli, r yarıçaplı çember olsun. İnversiyon merkezi O dan geçmeyen ayıraç doğrunun $\mathcal{C}$ çemberine göre inversiyon altında görüntüsü parabol yaylarının birleşiminden oluşur.

İspat. Sıfırdan farklı a_3 reel sayısı için herhangi $x + y + a_3 = 0$ denklemli ayıraç doğru ℓ olsun. ℓ doğrusunun $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}$ inversiyonu altında görüntüsü $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}(\ell)$

$$\frac{r^2x'}{(amax\{|x'|,|y'|\}+bmin\{|x'|,|y'|\})^2} + \frac{r^2y'}{(amax\{|x'|,|y'|\}+bmin\{|x'|,|y'|\})^2} + a_3 = 0$$

eşitliğini sağladığı görülür. Buradan

$$r^2x' + r^2y' + a_3(amax\{|x'|,|y'|\}+bmin\{|x'|,|y'|\})^2 = 0 \tag{6.26}$$

elde edilir. $|x'| > |y'|$ iken (6.26) dan

$$r^2x' + r^2y' + a_3(a|x'|+b|y'|)^2 = 0 \tag{6.27}$$

denklemine indirgenir.

i) $x' < 0,\ y' < 0$ iken (6.27) den

$$r^2x' + r^2y' + a_3(a(-x')) + b(y(-y'))^2 = 0,$$

$$r^2x' + r^2y' + a_3(ax' + by')^2 = 0,$$

$$r^2x' + r^2y' + a_3(a^2(x')^2 + 2abx'y' + b^2(y')^2) = 0,$$

$$a_3a^2(x')^2 + (2ab)a_3x'y' + a_3b^2(y')^2 + r^2x' + r^2y' = 0 \qquad (6.28)$$

elde edilir. (6.28) ile belirtilen eğri için,

$$d = \begin{vmatrix} a_3a^2 & aba_3 \\ aba_3 & a_3b^2 \end{vmatrix} = a_3{}^2(a^2b^2 - a^2b^2) = 0$$

olduğundan eğri parabolik eğridir. Ayrıca,

$$D = \begin{vmatrix} a_3a^2 & a_3ab & \frac{r^2}{2} \\ a_3ab & a_3b^2 & \frac{r^2}{2} \\ \frac{r^2}{2} & \frac{r^2}{2} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{r^2}{2}\right)^2 a_3(a^2 - b^2)$$

olur. Böylece $\forall a_3 \epsilon \mathbb{R} - \{0\}$ için $a_3 < 0$ ve $a_3 > 0$ iken sırasıyla $D > 0$ ve $D < 0$ olup (6.28) deki eğri bir paraboldür.

ii) $x' < 0,\ y' \geq 0$ iken (6.27) denkleminden

$$r^2x' + r^2y' + a_3(a(-x') + b(y'))^2 = 0$$

elde edilir. Buradan

$$r^2x' + r^2y' + a_3(a^2(x')^2 - 2abx'y' + b^2(y')^2) = 0 \qquad (6.29)$$

olur. (6.29) daki eğri için

$$d = \begin{vmatrix} a_3a^2 & -a_3ab \\ -a_3ab & a_3b^2 \end{vmatrix} = a_3{}^2(a^2b^2 - a^2b^2) = 0$$

olduğundan eğri parabolik eğridir. Ayrıca,

$$D = \begin{vmatrix} a_3a^2 & -a_3ab & \frac{r^2}{2} \\ -a_3ab & a_3b^2 & \frac{r^2}{2} \\ \frac{r^2}{2} & \frac{r^2}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\left(\frac{r^2}{2}\right)^2 a_3(a+b)^2$$

olup $a_3 < 0$ ve $a_3 > 0$ iken sırasıyla $D > 0$ ve $D < 0$ olup (6.29) daki eğri bir paraboldür.

iii) $x' \geq 0,\ y' < 0$ iken (6.27) den

$$r^2x' + r^2y' + a_3(ax' - by')^2 = 0,$$

$$r^2x' + r^2y' + a_3(a^2(x')^2 - 2abx'y' + b^2(y')^2) = 0 . \quad (6.30)$$

eşitliği elde edilir. Bu (6.30) ile aynı denklem olup (ii) ve (iii) durumlarındaki bölgelerde aynı parabolün iki parçası görüntüde bulunmaktadır.

iv) $x' \geq 0,\ y' \geq 0$ iken (6.27) denkleminden

$$r^2x' + r^2y' + a_3(ax' + by')^2 = 0,$$

$$r^2x' + r^2y' + a_3(a^2(x')^2 + 2abx'y' + b^2(y')^2) = 0 . \quad (6.31)$$

eşitliği elde edilir. Bu (6.28) ve (6.31) aynı denklem olup (i) ve (iv) durumlarındaki bölgelerde bu parabolün parçaları görüntüde bulunmaktadır.

$|x'| \leq |y'|$ iken (6.26) denkleminden

$$r^2x' + r^2y' + a_3(a|y'| + b|x'|)^2 = 0 \quad (6.32)$$

denklemi elde edilir. Yukarıdaki incelemeye benzer olarak (6.32) ifadesi aşağıdaki gibi incelenir.

i) $x' < 0,\ y' < 0$ iken (6.32) den

$$r^2x' + r^2y' + a_3(-ay' - bx')^2 = 0,$$

$$r^2x' + r^2y' + a_3(ay' + bx')^2 = 0$$

$$a_3b^2(x')^2 + (2ab)a_3x'y' + a_3a^2(y')^2 + r^2x' + r^2y' = 0 \quad (6.33)$$

elde edilir. (6.33) eşitliğinden,

$$d = \begin{vmatrix} a_3b^2 & a_3ab \\ a_3ab & a_3a^2 \end{vmatrix} = 0$$

olduğundan eğri paraboliktir. Ayrıca,

$$D = \begin{vmatrix} a_3b^2 & a_3ab & \frac{r^2}{2} \\ a_3ab & a_3a^2 & \frac{r^2}{2} \\ \frac{r^2}{2} & \frac{r^2}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\left(\frac{r^2}{2}\right)^2 a_3(b-a)^2$$

olup $a_3 > 0$ ve $a_3 < 0$ iken sırasıyla $D < 0$ ve $D > 0$ olur. Buradan (6.33) deki eğri bir parabol belirtir. $|x'| \leq |y'|$ ve $x' < 0,\ y' < 0$ bölgesinde bu parabolün yayı ℓ doğru görüntüsünde yer alır.

ii) $x' < 0,\ y' \geq 0$ iken (6.32) eşitliğinden,

$$r^2x' + r^2y' + a_3(ay' - bx')^2 = 0,$$

$$r^2x' + r^2y' + a_3a^2(y')^2 - (2ab)a_3x'y' + a_3b^2(x')^2 = 0 \qquad (6.34)$$

olur.

$$d = \begin{vmatrix} a_3b^2 & -a_3ab \\ -a_3ab & a_3a^2 \end{vmatrix} = 0$$

olduğundan eğri paraboliktir. Ayrıca,

$$D = \begin{vmatrix} a_3b^2 & -a_3ab & \frac{r^2}{2} \\ -a_3ab & a_3a^2 & \frac{r^2}{2} \\ \frac{r^2}{2} & \frac{r^2}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\left(\frac{r^2}{2}\right)^2 a_3(a+b)^2$$

olup $a_3 > 0$ ve $a_3 < 0$ iken sırasıyla $D < 0$ ve $D > 0$ olur. Sonuç olarak (6.34) bir parabol belirtir. Böylece $|x'| \leq |y'|$ ve $x' < 0,\ y' < 0$ bölgesinde (6.34) parabolünün yayı ℓ doğrusunun görüntüsünde yer alır.

iii) $x' \geq 0,\ y' < 0$ iken (6.32) denkleminden

$$r^2x' + r^2y' + a_3(-ay' + bx')^2 = 0 \qquad (6.35)$$

elde edilir. (6.35) eşitliği (ii) durumundaki (6.34) eşitliği ile aynıdır. Bu yüzden, $|x'| \leq |y'|$ iken (ii) ve (iii) durumlarındaki bölgelerde bu parabolün parçaları görüntüde bulunmaktadır.

iv) $x' \geq 0,\ y' \geq 0$ iken (6.32) denkleminden

$$r^2x' + r^2y' + a_3(ay' + bx')^2 = 0 \qquad (6.36)$$

eşitlik elde edilir. (6.36) ve (6.33) aynı denklem olduğundan (i) ve (iv) oluşan bölgelerde bu parabolün iki parçası görüntüde bulunmaktadır.

Böylece ℓ doğrusunun I_C inversiyonu altında görüntüsü

$$\{(x',y') |\ a_3(ax'+by')^2 + r^2x' + r^2y' = 0,\ \ |x'| > |y'| \text{ ve } x'.y' \geq 0\}, \quad (6.28)$$

$$\{(x',y') |\ a_3(ax'-by')^2 + r^2x' + r^2y' = 0,\ \ |x'| > |y'| \text{ ve } x'.y' \leq 0\}, \quad (6.29)$$

$$\{(x',y') |\ a_3(ay'+bx')^2 + r^2x' + r^2y' = 0,\ \ |x'| \leq |y'| \text{ ve } x'.y' \geq 0\} \quad (6.33)$$

$$\{(x',y') |\ a_3(ay'-bx')^2 + r^2x' + r^2y' = 0,\ \ |x'| \leq |y'| \text{ ve } x'.y' \leq 0\}$$

(6.34)

parabol yaylarının birleşiminden oluşur.

Örnek 6.7. $a = 2$, $b = \frac{1}{2}$ parametrelerine karşılık gelen genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde $\mathcal{C}$ birim çember olsun. $x + y + \frac{1}{3} = 0$ dikey doğrusunun $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}$ inversiyonu altında görüntüsü

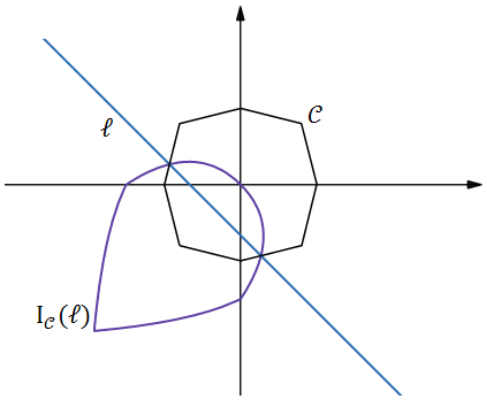
$$\left\{(x',y') \left| \tfrac{1}{3}(2x'+\tfrac{1}{2}y')^2 + x' + y' = 0,\ \ |x'| > |y'| \text{ ve } x'.y' \geq 0 \right.\right\},$$

$$\left\{(x',y') \left| \tfrac{1}{3}(2x'-\tfrac{1}{2}y')^2 + x' + y' = 0,\ \ |x'| > |y'| \text{ ve } x'.y' \leq 0 \right.\right\},$$

$$\left\{(x',y') \left| \tfrac{1}{3}(2y'+\tfrac{1}{2}x')^2 + x' + y' = 0,\ \ |x'| \leq |y'| \text{ ve } x'.y' \geq 0 \right.\right\}$$

$$\left\{(x',y') \left| \tfrac{1}{3}(2y'-\tfrac{1}{2}x')^2 + x' + y' = 0,\ \ |x'| \leq |y'| \text{ ve } x'.y' \leq 0 \right.\right\}$$

parabol yaylarının birleşiminden oluşur, (Şekil 6.3).



Şekil 6.3. Ayıraç doğru ve inversi

Teorem 6.8. $\mathbb{R}^2_g$ genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde $\mathcal{C}$, O merkezli, r yarıçaplı çember olsun. İnversiyon merkezi O dan geçmeyen yataysal doğrunun $\mathcal{C}$ çemberine göre inversiyon altında görüntüsü parabol yaylarının birleşiminden oluşur.

İspat. $\mathbb{R}_g^2$ düzlemde inversiyon çemberi $\mathcal{C}$, merkezi $O = (0,0)$ yarıçapı r olan bir çember ve ℓ, $a_1x + a_2y + a_3 = 0$ denklemli merkezden geçmeyen yataysal doğru olsun. Bu durumda $a_3 \neq 0$ ve $|a_1| < |a_2|$ olup $a_2 \neq 0$ olmalıdır. O zaman $a_2 = 1$ almak genelliği bozmayacaktır. $a_1x + y + a_3 = 0$ denklemli ℓ doğrusunun $I_{\mathcal{C}}$ inversiyonu altında görüntüsü $I_{\mathcal{C}}(\ell)$

$$a_1 \frac{r^2x'}{(amax\{|x'|,|y'|\} + bmin\{|x'|,|y'|\})^2} + \frac{r^2y'}{(amax\{|x'|,|y'|\} + bmin\{|x'|,|y'|\})^2} + a_3 = 0$$

eşitliğini sağladığı görülür. Buradan

$$r^2a_1x' + r^2y' + a_3(amax\{|x'|,|y'|\} + bmin\{|x'|,|y'|\})^2 = 0 \tag{6.37}$$

elde edilir. $|x'| > |y'|$ iken (6.37) den

$$r^2a_1x' + r^2y' + a_3(a|x'| + b|y'|)^2 = 0 \tag{6.38}$$

denklemine indirgenir.

i) $x' < 0$, $y' < 0$ iken (6.38) den

$$r^2a_1x' + r^2y' + a_3(a(-x')) + b(y(-y'))^2 = 0,$$

$$r^2a_1x' + r^2y' + a_3(ax' + by')^2 = 0,$$

$$r^2a_1x' + r^2y' + a_3(a^2(x')^2 + 2abx'y' + b^2(y')^2) = 0,$$

$$a_3a^2(x')^2 + (2ab)a_3x'y' + a_3b^2(y')^2 + r^2a_1x' + r^2y' = 0 \tag{6.39}$$

elde edilir. (6.39) ile belirtilen eğri için,

$$d = \begin{vmatrix} a_3a^2 & aba_3 \\ aba_3 & a_3b^2 \end{vmatrix} = 0$$

olduğundan eğri parabolik eğridir. Ayrıca,

$$D = \begin{vmatrix} a_3a^2 & a_3ab & \frac{r^2}{2}a_1 \\ a_3ab & a_3b^2 & \frac{r^2}{2} \\ \frac{r^2}{2}a_1 & \frac{r^2}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\left(\frac{r^2}{2}\right)^2 a_3(a - a_1b)^2$$

olur. Böylece $\forall a_3 \epsilon \mathbb{R} - \{0\}$ için $a_3 < 0$ ve $a_3 > 0$ iken sırasıyla $D > 0$ ve $D < 0$ olup (6.39) daki eğri bir paraboldür.

ii) $x' < 0,\ y' \geq 0$ iken (6.38) denkleminden

$$r^2a_1x' + r^2y' + a_3(a(-x') + b(y'))^2 = 0$$

elde edilir. Buradan

$$r^2a_1x' + r^2y' + a_3(a^2(x')^2 - 2abx'y' + b^2(y')^2) = 0 \qquad (6.40)$$

olur. (6.40) daki eğri için

$$d = \begin{vmatrix} a_3a^2 & -a_3ab \\ -a_3ab & a_3b^2 \end{vmatrix} = 0$$

olduğundan eğri parabolik eğridir. Ayrıca,

$$D = \begin{vmatrix} a_3a^2 & -a_3ab & \frac{r^2}{2}a_1 \\ -a_3ab & a_3b^2 & \frac{r^2}{2} \\ \frac{r^2}{2}a_1 & \frac{r^2}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\left(\frac{r^2}{2}\right)^2 a_3(a + a_1b)^2$$

olup $a_3 < 0$ ve $a_3 > 0$ iken sırasıyla $D > 0$ ve $D < 0$ olup (6.40) daki eğri bir paraboldür.

iii) $x' \geq 0,\ y' < 0$ iken (6.38) den

$$r^2a_1x' + r^2y' + a_3(ax' - by')^2 = 0,$$

$$r^2a_1x' + r^2y' + a_3(a^2(x')^2 - 2abx'y' + b^2(y')^2) = 0\ . \qquad (6.41)$$

eşitliği elde edilir. (6.41) ve (6.40) aynı denklem olup (ii) ve (iii) durumlarındaki bölgelerde aynı parabolün iki parçası görüntüde bulunmaktadır.

iv) $x' \geq 0,\ y' \geq 0$ iken (6.38) denkleminden

$$r^2a_1x' + r^2y' + a_3(ax' + by')^2 = 0,$$

$$r^2a_1x' + r^2y' + a_3(a^2(x')^2 + 2abx'y' + b^2(y')^2) = 0 \qquad (6.42)$$

eşitliği elde edilir. Bu (6.39) ve (6.42) aynı denklem olup (i) ve (iv) durumlarındaki bölgelerde bu parabolün parçaları görüntüde bulunmaktadır.

$|x'| \leq |y'|$ iken (6.37) denkleminden

$$r^2a_1x' + r^2y' + a_3(a|y'| + b|x'|)^2 = 0 \qquad (6.43)$$

denklemi elde edilir. Yukarıdaki incelemeye benzer olarak (6.43) ifadesi aşağıdaki gibi incelenir.

i) $x' < 0,\ y' < 0$ iken (6.43) den

$$r^2a_1x' + r^2y' + a_3(-ay' - bx')^2 = 0,$$

$$r^2a_1x' + r^2y' + a_3(ay' + bx')^2 = 0$$

$$a_3b^2(x')^2 + (2ab)a_3x'y' + a_3a^2(y')^2 + r^2a_1x' + r^2y' = 0 \qquad (6.44)$$

elde edilir. (6.44) eşitliğinden,

$$d = \begin{vmatrix} a_3b^2 & a_3ab \\ a_3ab & a_3a^2 \end{vmatrix} = 0$$

olduğundan eğri paraboliktir. Ayrıca,

$$D = \begin{vmatrix} a_3b^2 & a_3ab & \frac{r^2}{2}a_1 \\ a_3ab & a_3a^2 & \frac{r^2}{2} \\ \frac{r^2}{2}a_1 & \frac{r^2}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\left(\frac{r^2}{2}\right)^2 a_3(b - a_1a)^2$$

olup $a_3 > 0$ ve $a_3 < 0$ iken sırasıyla $D < 0$ ve $D > 0$ olur. Buradan (6.44) deki eğri bir parabol belirtir. $|x'| \leq |y'|$ ve $x' < 0,\ y' < 0$ bölgesinde bu parabolün yayı ℓ doğru görüntüsünde yer alır.

ii) $x' < 0,\ y' \geq 0$ iken (6.43) eşitliğinden,

$$r^2a_1x' + r^2y' + a_3(ay' - bx')^2 = 0,$$

$$r^2a_1x' + r^2y' + a_3a^2(y')^2 - (2ab)a_3x'y' + a_3b^2(x')^2 = 0 \qquad (6.45)$$

olur.

$$d = \begin{vmatrix} a_3b^2 & -a_3ab \\ -a_3ab & a_3a^2 \end{vmatrix} = 0$$

olduğundan eğri paraboliktir. Ayrıca,

$$D = \begin{vmatrix} a_3b^2 & -a_3ab & \frac{r^2}{2}a_1 \\ -a_3ab & a_3a^2 & \frac{r^2}{2} \\ \frac{r^2}{2}a_1 & \frac{r^2}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\left(\frac{r^2}{2}\right)^2 a_3(aa_1 + b)^2$$

olup $a_3 > 0$ ve $a_3 < 0$ iken sırasıyla $D < 0$ ve $D > 0$ olur. Sonuç olarak (6.45) bir parabol belirtir. Böylece $|x'| \leq |y'|$ ve $x' < 0,\ y' < 0$ bölgesinde (6.45) parabolünün yayı ℓ doğrusunun görüntüsünde yer alır.

iii) $x' \geq 0,\ y' < 0$ iken (6.43) denkleminden

$$r^2 a_1 x' + r^2 y' + a_3(-ay' + bx')^2 = 0 \tag{6.46}$$

elde edilir. (6.46) eşitliği (ii) durumundaki (6.45) eşitliği ile aynıdır. Bu yüzden, $|x'| \leq |y'|$ iken (ii) ve (iii) durumlarındaki bölgelerde bu parabolün parçaları görüntüde bulunmaktadır.

iv) $x' \geq 0,\ y' \geq 0$ iken (6.43) denkleminden

$$r^2 a_1 x' + r^2 y' + a_3(ay' + bx')^2 = 0 \tag{6.47}$$

eşitlik elde edilir. (6.44) ve (6.47) aynı denklem olduğundan (i) ve (iv) oluşan bölgelerde bu parabolün iki parçası görüntüde bulunmaktadır.

Böylece ℓ doğrusunun $I_{\mathcal{C}}$ inversiyonu altında görüntüsü

$$\{(x',y') \mid a_3(ax' + by')^2 + r^2 a_1 x' + r^2 y' = 0,\ |x'| > |y'| \text{ ve } x'.y' \geq 0\},$$

$$\{(x',y') \mid a_3(ax' - by')^2 + r^2 a_1 x' + r^2 y' = 0,\ |x'| > |y'| \text{ ve } x'.y' \leq 0\},$$

$$\{(x',y') \mid a_3(ay' + bx')^2 + r^2 a_1 x' + r^2 y' = 0,\ |x'| \leq |y'| \text{ ve } x'.y' \geq 0\}$$

$$\{(x',y') \mid a_3(ay' - bx')^2 + r^2 a_1 x' + r^2 y' = 0,\ |x'| \leq |y'| \text{ ve } x'.y' \leq 0\}$$

parabol yaylarının birleşiminden oluşur.

Örnek 6.9. $a = 2,\ b = \frac{1}{2}$ parametrelerine karşılık gelen genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde $\mathcal{C}$ birim çember olsun. $x + 3y + 1 = 0$ yataysal doğrusunun $I_{\mathcal{C}}$ inversiyonu altında görüntüsü

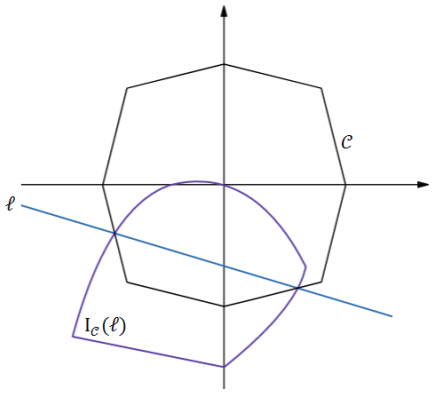
$$\left\{(x',y') \left| \tfrac{1}{3}(2x' + \tfrac{1}{2}y')^2 + \tfrac{1}{3}x' + y' = 0,\ |x'| > |y'| \text{ ve } x'.y' \geq 0 \right.\right\},$$

$$\left\{(x',y') \left| \tfrac{1}{3}(2x' - \tfrac{1}{2}y')^2 + \tfrac{1}{3}x' + y' = 0,\ |x'| > |y'| \text{ ve } x'.y' \leq 0 \right.\right\},$$

$$\left\{(x',y') \left| \tfrac{1}{3}(2y' + \tfrac{1}{2}x')^2 + \tfrac{1}{3}x' + y' = 0,\ |x'| \leq |y'| \text{ ve } x'.y' \geq 0 \right.\right\}$$

$$\left\{(x',y') \left| \frac{1}{3}(2y' - \frac{1}{2}x')^2 + \frac{1}{3}x^{'} + y^{'} = 0, \ \ |x^{'}| \leq |y^{'}| \text{ ve } x'.y' \leq 0 \right.\right\}$$

parabol yaylarının birleşiminden oluşur, (Şekil 6.4).



Şekil 6.4. Yataysal doğru ve inversi

d_g uzaklığının tanımında $a \geq b \geq 0$ olduğundan $\frac{b}{a}$ değeri 1'den küçüktür. ℓ doğrusunun eğimi mutlak değerce $\frac{b}{a}$ olduğunda ℓ bir yataysal doğrudur. $\frac{b}{a}x + y + a_3 = 0$ denklemli ℓ doğrusunun $I_{\mathcal{C}}$ inversiyonu altında görüntüsü

$$\left\{(x',y') \left| \ a_3(ax' + by')^2 + r^2\frac{b}{a}x^{'} + r^2y^{'} = 0, \ \ |x^{'}| > |y^{'}| \text{ ve } x'.y' \geq 0 \right.\right\},$$

$$\left\{(x',y') \left| \ a_3(ax' - by')^2 + r^2\frac{b}{a}x^{'} + r^2y^{'} = 0, \ \ |x^{'}| > |y^{'}| \text{ ve } x'.y' \leq 0 \right.\right\},$$

$$\left\{(x',y') \left| \ a_3(ay' + bx')^2 + r^2\frac{b}{a}x^{'} + r^2y^{'} = 0, \ \ |x^{'}| \leq |y^{'}| \text{ ve } x'.y' \geq 0 \right.\right\}$$

$$\left\{(x',y') \left| \ a_3(ay' - bx')^2 + r^2\frac{b}{a}x^{'} + r^2y^{'} = 0, \ \ |x^{'}| \leq |y^{'}| \text{ ve } x'.y' \leq 0 \right.\right\}$$

parabol yaylarının birleşiminden oluşur.

Örnek 6.10. $a = 2, b = \frac{1}{2}$ parametrelerine karşılık gelen genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde $\mathcal{C}$ birim çember olsun. $\frac{1}{4}x + y + 1 = 0$ yataysal doğrusunun $I_{\mathcal{C}}$ inversiyonu altında görüntüsü

$$\left\{(x',y') \left| (2x' + \frac{1}{2}y')^2 + \frac{1}{4}x^{'} + y^{'} = 0, \ \ |x^{'}| > |y^{'}| \text{ ve } x'.y' \geq 0 \right.\right\},$$

$$\left\{(x',y')\left|(2x'-\frac{1}{2}y')^2+\frac{1}{4}x'+y'=0,\quad |x'|>|y'| \text{ ve } x'.y'\le 0\right.\right\},$$

$$\left\{(x',y')\left|(2y'+\frac{1}{2}x')^2+\frac{1}{4}x'+y'=0,\quad |x'|\le|y'| \text{ ve } x'.y'\ge 0\right.\right\},$$

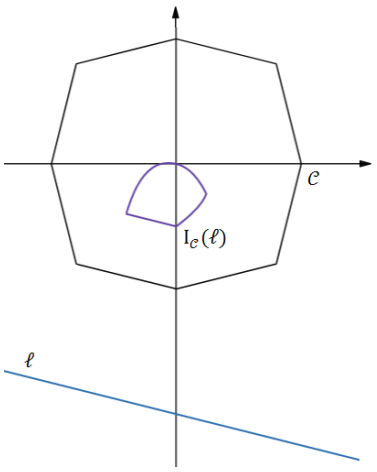
$$\left\{(x',y')\left|(2y'-\frac{1}{2}x')^2+\frac{1}{4}x'+y'=0,\quad |x'|\le|y'| \text{ ve } x'.y'\le 0\right.\right\}$$

kümelerinin birleşiminden oluşmaktadır. Daha açık yazarsak

$x'+4y'+(4x'-y')^2=0, -\frac{1}{16}\le x'\le\frac{3}{25}$ parabol yayları;

$x'+4y'+(4x'+y')^2=0, -\frac{6}{25}\le x'\le-\frac{1}{16}$ parabol yayı;

$x'+4y'+(x'-4y')^2=0,\ 0\le x'\le\frac{3}{25}$ parabol yayı ve $x'+4y'+1=0,\ -\frac{1}{5}\le x'\le 0$ doğru parçasından oluşur. Görüldüğü üzere $I_{\mathcal{C}}(\ell)$ üç parabol yayı ve bir doğru parçasının birleşiminden oluşmaktadır. Doğru parçası ℓ doğrusuna paraleldir.



Şekil 6.5. Eğimi $\frac{b}{a}$ olan yataysal doğru ve inversi

Teorem 6.11. $\mathbb{R}_g^2$ genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde $\mathcal{C}$, O merkezli, r yarıçaplı çember olsun. İnversiyon merkezi O dan geçmeyen dikeysel doğrunun $\mathcal{C}$ çemberine göre inversiyon altında görüntüsü parabol yaylarının birleşiminden oluşur.

İspat. $\mathbb{R}_g^2$ düzlemde inversiyon çemberi $\mathcal{C}$, merkezi $O=(0,0)$ yarıçapı r olan bir çember ve ℓ, $a_1x+a_2y+a_3=0$ denklemli merkezden geçmeyen dikeysel doğru olsun. Bu durumda $a_3\neq 0$ ve $|a_1|>|a_2|$ olup $a_1\neq 0$ olmalıdır. Teorem 6.8 in ispatına benzer şekilde $a_1=1$ almak genelliği bozmayacaktır. $x+a_2y+a_3=0$ denklemli ℓ doğrusunun $I_{\mathcal{C}}$ inversiyonu altında görüntüsü $I_{\mathcal{C}}(\ell)$

$$\frac{r^2x'}{(amax\{|x'|,|y'|\}+bmin\{|x'|,|y'|\})^2}+a_2\frac{r^2y'}{(amax\{|x'|,|y'|\}+bmin\{|x'|,|y'|\})^2}+a_3=0$$

eşitliğini sağladığı görülür. Buradan

$$r^2x'+r^2a_2y'+a_3(amax\{|x'|,|y'|\}+bmin\{|x'|,|y'|\})^2=0 \tag{6.48}$$

elde edilir. $|x'|>|y'|$ iken (6.48) den

$$r^2x'+r^2a_2y'+a_3(a|x'|+b|y'|)^2=0 \tag{6.49}$$

denklemine indirgenir.

i) $x'<0,\ y'<0$ iken (6.49) dan

$$a_3a^2(x')^2+(2ab)a_3x'y'+a_3b^2(y')^2+r^2x'+r^2a_2y'=0 \tag{6.50}$$

elde edilir. (6.50) ile belirtilen eğri için,

$$d=\begin{vmatrix} a_3a^2 & aba_3 \\ aba_3 & a_3b^2 \end{vmatrix}=0$$

ve

$$D=\begin{vmatrix} a_3a^2 & a_3ab & \frac{r^2}{2} \\ a_3ab & a_3b^2 & \frac{r^2}{2}a_2 \\ \frac{r^2}{2} & \frac{r^2}{2}a_2 & 0 \end{vmatrix}=-\left(\frac{r^2}{2}\right)^2a_3(a_2a-b)^2$$

olur. Böylece $\forall a_3\epsilon\mathbb{R}-\{0\}$ için $a_3<0$ ve $a_3>0$ iken sırasıyla $D>0$ ve $D<0$ olup (6.50) daki eğri bir paraboldür.

ii) $x'<0,\ y'\geq 0$ iken (6.49) denkleminden

$$r^2x'+r^2a_2y'+a_3(a^2(x')^2-2abx'y'+b^2(y')^2)=0 \tag{6.51}$$

olup

$$d=\begin{vmatrix} a_3a^2 & -a_3ab \\ -a_3ab & a_3b^2 \end{vmatrix}=0$$

ve

$$D = \begin{vmatrix} a_3a^2 & -a_3ab & \frac{r^2}{2} \\ -a_3ab & a_3b^2 & \frac{r^2}{2}a_2 \\ \frac{r^2}{2} & \frac{r^2}{2}a_2 & 0 \end{vmatrix} = -\left(\frac{r^2}{2}\right)^2 a_3(a_2a+b)^2$$

olur. Böylece $a_3 < 0$ ve $a_3 > 0$ iken sırasıyla $D > 0$ ve $D < 0$ olup (6.51) deki eğri bir paraboldür.

iii) $x' \geq 0,\ y' < 0$ iken (6.49) dan

$$r^2x' + r^2a_2y' + a_3(a^2(x')^2 - 2abx'y' + b^2(y')^2) = 0 \qquad (6.51)$$

eşitliği elde edilir. Böylece (ii) ve (iii) durumlarındaki bölgelerde aynı parabolün iki parçası görüntüde bulunmaktadır.

iv) $x' \geq 0,\ y' \geq 0$ iken (6.49) denkleminden

$$r^2x' + r^2a_2y' + a_3(a^2(x')^2 + 2abx'y' + b^2(y')^2) = 0 \qquad (6.50)$$

eşitliği elde edilir. Böylece (i) ve (iv) durumlarındaki bölgelerde bu parabolün parçaları görüntüde bulunmaktadır.

$|x'| \leq |y'|$ iken (6.48) denkleminden

$$r^2x' + r^2a_2y' + a_3(a|y'| + b|x'|)^2 = 0 \qquad (6.52)$$

denklemi elde edilir.

i) $x' < 0,\ y' < 0$ iken (6.52) den

$$a_3b^2(x')^2 + (2ab)a_3x'y' + a_3a^2(y')^2 + r^2x' + r^2a_2y' = 0 \qquad (6.53)$$

elde edilir.

$$d = \begin{vmatrix} a_3b^2 & a_3ab \\ a_3ab & a_3a^2 \end{vmatrix} = 0$$

ve

$$D = \begin{vmatrix} a_3b^2 & a_3ab & \frac{r^2}{2} \\ a_3ab & a_3a^2 & \frac{r^2}{2}a_2 \\ \frac{r^2}{2} & \frac{r^2}{2}a_2 & 0 \end{vmatrix} = -\left(\frac{r^2}{2}\right)^2 a_3(a_2b-a)^2$$

olup $a_3 > 0$ ve $a_3 < 0$ iken sırasıyla $D < 0$ ve $D > 0$ olur. Buradan (6.53) deki eğri bir parabol belirtir. $|x'| \leq |y'|$ ve $x' < 0,\ y' < 0$ bölgesinde bu parabolün yayı ℓ doğru görüntüsünde yer alır.

ii) $x' < 0,\ y' \geq 0$ iken (6.52) eşitliğinden,

$$r^2x' + r^2a_2y' + a_3a^2(y')^2 - (2ab)a_3x'y' + a_3b^2(x')^2 = 0 \qquad (6.54)$$

olur. Buradan

$$d = \begin{vmatrix} a_3b^2 & -a_3ab \\ -a_3ab & a_3a^2 \end{vmatrix} = 0$$

ve

$$D = \begin{vmatrix} a_3b^2 & -a_3ab & \frac{r^2}{2} \\ -a_3ab & a_3a^2 & \frac{r^2}{2}a_2 \\ \frac{r^2}{2} & \frac{r^2}{2}a_2 & 0 \end{vmatrix} = -\left(\frac{r^2}{2}\right)^2 a_3(a + ba_2)^2$$

olup $a_3 > 0$ ve $a_3 < 0$ iken sırasıyla $D < 0$ ve $D > 0$ olur. Sonuç olarak (6.54) bir parabol belirtir. Böylece $|x'| \leq |y'|$ ve $x' < 0,\ y' < 0$ bölgesinde (6.54) parabolünün yayı ℓ doğrusunun görüntüsünde yer alır.

iii) $x' \geq 0,\ y' < 0$ iken (6.52) denkleminden

$$r^2x' + r^2a_2y' + a_3(-ay' + bx')^2 = 0 \qquad (6.54)$$

elde edilir. Bu yüzden, $|x'| \leq |y'|$ iken (ii) ve (iii) durumlarındaki bölgelerde bu parabolün parçaları görüntüde bulunmaktadır.

iv) $x' \geq 0,\ y' \geq 0$ iken (6.52) denkleminden

$$r^2x' + r^2a_2y' + a_3(ay' + bx')^2 = 0 \qquad (6.53)$$

eşitlik elde edilir. Bu yüzden (i) ve (iv) oluşan bölgelerde bu parabolün iki parçası görüntüde bulunmaktadır.

Böylece ℓ doğrusunun I_c inversiyonu altında görüntüsü

$$\{(x',y') \mid a_3(ax' + by')^2 + r^2x' + r^2a_2y' = 0,\ |x'| > |y'| \text{ ve } x'.y' \geq 0\},$$

$$\{(x',y') \mid a_3(ax' - by')^2 + r^2x' + r^2a_2y' = 0,\ |x'| > |y'| \text{ ve } x'.y' \leq 0\},$$

$$\{(x',y')|\ a_3(ay'+bx')^2+r^2x'+r^2a_2y'=0,\quad |x'|\le|y'| \text{ ve } x'.y'\ge 0\}$$

$$\{(x',y')|\ a_3(ay'-bx')^2+r^2x'+r^2a_2y'=0,\quad |x'|\le|y'| \text{ ve } x'.y'\le 0\}$$

parabol yaylarının birleşiminden oluşur.

Örnek 6.12. $a=2, b=\frac{1}{2}$ parametrelerine karşılık gelen genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde $\mathcal{C}$ birim çember olsun. $3x+y+1=0$ dikeysel doğrusunun $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}$ inversiyonu altında görüntüsü

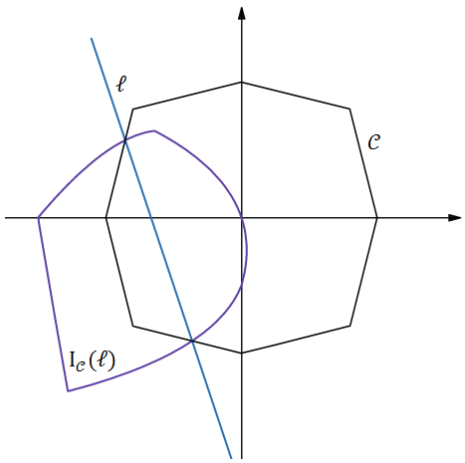
$$\left\{(x',y')\left|\frac{1}{3}(2x'+\frac{1}{2}y')^2+x'+\frac{1}{3}y'=0,\quad |x'|>|y'| \text{ ve } x'.y'\ge 0\right.\right\},$$

$$\left\{(x',y')\left|\frac{1}{3}(2x'-\frac{1}{2}y')^2+x'+\frac{1}{3}y'=0,\quad |x'|>|y'| \text{ ve } x'.y'\le 0\right.\right\},$$

$$\left\{(x',y')\left|\frac{1}{3}(2y'+\frac{1}{2}x')^2+x'+\frac{1}{3}y'=0,\quad |x'|\le|y'| \text{ ve } x'.y'\ge 0\right.\right\}$$

$$\left\{(x',y')\left|\frac{1}{3}(2y'-\frac{1}{2}x')^2+x'+\frac{1}{3}y'=0,\quad |x'|\le|y'| \text{ ve } x'.y'\le 0\right.\right\}$$

parabol yaylarının birleşiminden oluşur, (Şekil 6.6).



Şekil 6.6. Dikeysel doğru ve inversi

d_g uzaklığının tanımında $a\ge b\ge 0$ olduğundan $\frac{a}{b}$ değeri 1'den büyüktür. ℓ doğrusunun eğimi mutlak değerce $\frac{a}{b}$ olduğunda ℓ bir dikeysel doğrudur. $\mathrm{X}+\frac{b}{a}\mathrm{y}+a_3=0$ denklemli ℓ doğrusunun $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}$ inversiyonu altında görüntüsü

$$\left\{(x',y')\left|\ a_3(ax'+by')^2+r^2x'+r^2\frac{b}{a}y'=0,\quad |x'|>|y'| \text{ ve } x'.y'\ge 0\right.\right\},$$

$$\left\{(x',y') \;\middle|\; a_3(ax'-by')^2 + r^2x' + r^2\frac{b}{a}y' = 0, \quad |x'| > |y'| \text{ ve } x'.y' \le 0\right\},$$

$$\left\{(x',y') \;\middle|\; a_3(ay'+bx')^2 + r^2x' + r^2\frac{b}{a}y' = 0, \quad |x'| \le |y'| \text{ ve } x'.y' \ge 0\right\}$$

$$\left\{(x',y') \;\middle|\; a_3(ay'-bx')^2 + r^2x' + r^2\frac{b}{a}y' = 0, \quad |x'| \le |y'| \text{ ve } x'.y' \le 0\right\}$$

parabol yaylarının birleşiminden oluşur.

Örnek 6.13. $a = 2, b = \frac{1}{2}$ parametrelerine karşılık gelen genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde $\mathcal{C}$ birim çember olsun. $x + \frac{1}{4}y + 1 = 0$ dikeysel doğrusunun $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}$ inversiyonu altında görüntüsü

$$\left\{(x',y') \;\middle|\; (2x'+\tfrac{1}{2}y')^2 + x' + \tfrac{1}{4}y' = 0, \quad |x'| > |y'| \text{ ve } x'.y' \ge 0\right\},$$

$$\left\{(x',y') \;\middle|\; (2x'-\tfrac{1}{2}y')^2 + x' + \tfrac{1}{4}y' = 0, \quad |x'| > |y'| \text{ ve } x'.y' \le 0\right\},$$

$$\left\{(x',y') \;\middle|\; (2y'+\tfrac{1}{2}x')^2 + x' + \tfrac{1}{4}y' = 0, \quad |x'| \le |y'| \text{ ve } x'.y' \ge 0\right\}$$

$$\left\{(x',y') \;\middle|\; (2y'-\tfrac{1}{2}x')^2 + x' + \tfrac{1}{4}y' = 0, \quad |x'| \le |y'| \text{ ve } x'.y' \le 0\right\}$$

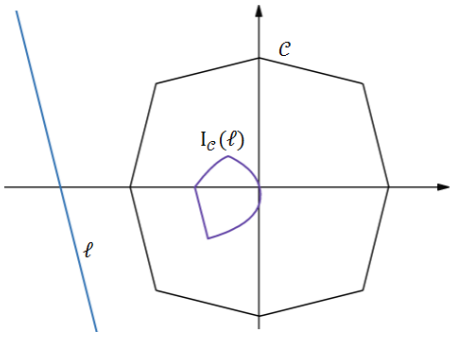
parabol yaylarının birleşiminden oluşur. Daha açık yazarsak

$4x' + y' + (x' - 4y')^2 = 0, -\frac{1}{16} \le y' \le \frac{3}{25}$ parabol yayı;

$4x' + y' + (4x' - y')^2 = 0, -\frac{1}{4} \le x' \le -\frac{3}{25}$ parabol yayı;

$4x' + y' + (x' + 4y')^2 = 0, -\frac{1}{5} \le x' \le 0$ parabol yayı ve $4x' + y' + 1 = 0, -\frac{1}{4} \le x' \le -\frac{1}{5}$ doğru parçasından oluşur. Görüldüğü üzere $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}(\ell)$ üç parabol yayı ve bir doğru parçasının birleşiminden oluşmaktadır. Doğru parçası ℓ doğrusuna paraleldir.

(Şekil 6.7).



Şekil 6.7. Eğimi $\frac{a}{b}$ olan dikeysel doğru ve inversi

Sonuç 6.14. $\mathbb{R}_g^2$ düzlemde $\mathcal{C}$, merkezi O yarıçapı r olan bir çember olsun.

i) $I_{\mathcal{C}}$ inversiyonu, inversiyon merkezi O noktasından geçen doğruları kendisine dönüştürür.

ii) $I_{\mathcal{C}}$ inversiyonu, inversiyon merkezi O noktasından geçmeyen doğruları Öklidyen parabol yaylarını içeren eğrilere dönüştürür. Bu eğriler $\mathbb{R}_g^2$ düzleminin çemberleri değildir.

Teorem 6.15. $\mathbb{R}_g^2$ düzleminde $\mathcal{C}$, merkezi O yarıçapı r olan bir çember olsun. O zaman $I_{\mathcal{C}}$ inversiyonu $\mathbb{R}_g^2$ düzleminin O merkezli bir çemberini yine O merkezli bir çembere dönüştürür.

İspat: $\mathbb{R}_g^2$ düzlemde $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{C}'$, sırasıyla, merkezleri $O=(0,0)$, yarıçapları r ve r′ olan çemberler olsun. $\mathcal{C}'$ çemberi

$$amax\{|x|,|y|\}+bmin\{|x|,|y|\}=r'$$

olup $I_{\mathcal{C}}$ inversiyonu altında $\mathcal{C}'$ çemberinin görüntüsü $I_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}')$

$$amax\{\Delta_1,\Delta_2\}+bmin\{\Delta_1,\Delta_2\}=r' \qquad (6.55)$$

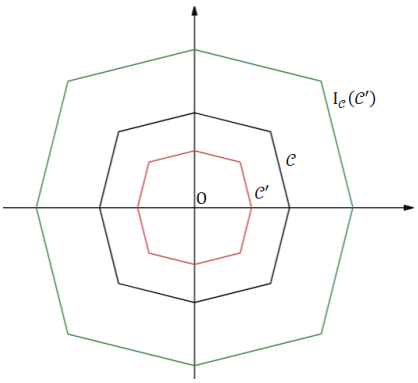
denklemini sağlar, burada $\Delta_1=\frac{|r^2x_I|}{(amax\{|x_I|,|y_I|\}+bmin\{|x_I|,|y_I|\})^2}$ ve $\Delta_2=\frac{|r^2y_I|}{(amax\{|x_I|,|y_I|\}+bmin\{|x_I|,|y_I|\})^2}$ dır. (6.55)

$$\frac{r^2}{(amax\{|x'|,|y'|\}+bmin\{|x'|,|y'|\})^2}(amax\{|x'|,|y'|\}+bmin\{|x'|,|y'|\})=r'$$

biçiminde yazarız, buradan

$$amax\{|x'|,|y'|\}+bmin\{|x'|,|y'|\}=\frac{r^2}{r'} \qquad (6.56)$$

elde edilir. (6.56) $\mathbb{R}_g^2$ düzleminin merkezi $O=(0,0)$ ve $\frac{r^2}{r'}$ yarıçaplı çemberidir. (Şekil 6.8).



Şekil 6.8. Merkezi inversiyon merkezi olan $\mathcal{C}'$ çemberi ve inversi

7.SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, genelleştirilmiş mutlak değer uzaklığı ile tanımlanan düzlemde ($\mathbb{R}_g^2$) çembere göre inversiyon dönüşümleri ve bu dönüşümlerin bazı temel özellikleri incelenmiştir. Öncelikle genelleştirilmiş mutlak değer uzaklığı ve bu uzaklık fonksiyonunun analitik düzleme kazandırdığı geometrik yapı ele alınmıştır. Bu metrik altında elde edilen düzlemin ($\mathbb{R}_g^2$), Öklidyen düzleme benzer bazı özellikler taşımakla birlikte uzaklık kavramına bağlı olarak farklı geometrik yapıya sahip olduğu görülmüştür. Çalışmada $\mathbb{R}_g^2$ düzleminde çemberlere göre tanımlanan inversiyon dönüşümleri tanımlanarak dönüşümün temel özellikleri araştırılmıştır. İnversiyon dönüşümünün noktalar arasındaki uzaklıklar üzerindeki etkisi incelenmiş ve belirli durumlarda sağlanan bağıntılar gösterilmiştir. $\mathbb{R}_g^2$ düzlemindeki farklı iki noktanın belirttiği doğrunun inversiyon merkezinden geçmesi durumunda noktaların inversleri arasındaki uzaklık ile ilgili eşitlik verilmiş, ancak doğrunun inversiyon merkezinden geçmemesi durumunda aynı eşitliğin her zaman geçerli olmadığı örneklerle ortaya konulmuş ve eşitliğin sağlanması için gereken koşullar belirlenmiştir. $\mathbb{R}_g^2$ düzleminde, yönlü doğru parçalarının uzunluğu, çifte oran ve harmonik eşlenik kavramları mevcut literatüre uygun bir şekilde tanımlanmıştır. Doğrudan dört noktanın dizilişine bağlı olarak genelleştirilmiş mutlak değer çifte oranının işareti belirlenmiş ve bu, Öklid geometrisindeki durumla paralellik gösterdiği tespit edilmiştir. Çalışmada $\mathbb{R}_g^2$ düzleminde, inversiyon merkezinden geçen bir doğru üzerindeki dört noktanın çifte oranının, inversiyon dönüşümü altında değişmediği ispatlanmıştır. Ayrıca, harmonik bölme ve inversiyon dönüşümü arasındaki ilişkiyi veren teorem ve ispatı sunulmuştur.

Elde edilen tüm teorik sonuçlar, belirli uzaklık parametreleri seçilerek sayısal örneklerle somutlaştırılmıştır. Daha sonra $\mathbb{R}_g^2$ düzleminde çembere göre inversiyon dönüşümü altında doğruların ve çemberlerin görüntüleri incelenmiştir. Öklid geometrisinde iyi bilinen inversiyon özelliklerinin bu Öklidyen olmayan düzlemde ne ölçüde geçerli olduğu araştırılmıştır. Öklid geometrisine benzer şekilde, inversiyon merkezinden geçen doğruların $\mathbb{R}_g^2$ düzleminde de inversiyon dönüşümü altında kendilerine dönüştüğü ispatlanmıştır. İnversiyon merkezinden geçmeyen doğruların görüntüleri Öklidyen düzlemde, inversiyon merkezinden geçen çemberlere dönüşürken, $\mathbb{R}_g^2$ düzleminde durum farklıdır. Bu doğruların yatay, dikey, ayıraç, yataysal, dikeysel tipte olmalarına göre inversiyon altındaki görüntüleri incelenmiştir. Bu incelemeler

sonucunda, inversiyon merkezinden geçmeyen doğruların görüntülerinin $\mathbb{R}_g^2$ düzleminin çemberleri olmadığı, farklı Öklidyen parabol yaylarının birleşiminden oluşan eğriler olduğu gösterilmiştir. Son olarak merkezi inversiyon merkezi ile aynı olan $\mathbb{R}_g^2$ düzleminin çemberlerinin inversiyon altında görüntüleri incelenerek yine merkezi inversiyon merkezi olan başka bir $\mathbb{R}_g^2$ nin çemberi olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Çalışma, $\mathbb{R}_g^2$ düzlemindeki inversiyon dönüşümlerin anlaşılmasına yönelik temel teoremler sunmakta ve literatüre katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

İnversiyon dönüşümünün temel geometrik objeler üzerindeki etkisini inceleyen bu çalışma, ileride yapılacak araştırmalara yön vermek amacıyla, koniklerin inversiyon dönüşümü altında nasıl eğrilere dönüştüğünün araştırılmasını içerecek şekilde derinleştirilebilir. Tezde elde edilen iki boyutlu sonuçların, üç boyutlu genelleştirilmiş mutlak değer uzayına taşınması, çalışmanın kapsamını ve etkisini artırabilir. Bu bağlamda, kürelere göre inversiyon, doğruların, düzlemlerin ve kürelerin bu inversiyonlar altında görüntüleri incelenebilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Aylıkçı, D. (2025). Investigations in the Generalized Absolute Value Plane. Eskişehir: Eskişehir Osmangazi University, Inst. of Sci. and Tech.

Bayar, A., ve Akça, Z. (2024). On Inversions İn Generalized Taxicab Space. Pioneer and Innovative Studies In Natural Science and Mathematics , All Sciences Academy, 277-294.

Bayar, A., ve Ekmekçi, S. (2014). On Circular Inversions In Taxicab Plane. Journal of Advanced Research in Pure Mathematics, 6(4), 33-39.

Bayar, A., Ekmekçi, S., ve Akça, Z. (2008). On the Plane Geometry with Generalized Absolute Value Metric. Mathematical Problems in Engineering, 1-8.

Bilgin, Y. (2023). Inversions With Respect To Circles In The Generalized Taxicab Plane. Eskişehir, Turkey: MSc, Eskişehir Osmangazi University.

Can, Z. (2022). On Spherical Inversions in Three Dimensional Tetrakis Hexahedron Space. Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 38(1), 100--108.

Cırık, Y., ve Ekmekçi, S. (2022). On The Maksimum Spherical Inversions. Journal of Science and Technology, 15(1), 360-371.

Ekmekçi, S. (2023). A note on the maximum circle inverses of lines in the maximum plane. Ikonion Journal of Mathematics, 5(2), 1-9.

Ekmekçi, S. (2023). On The Maxımum Cırcular Inverses Of Maxımum Cırcles. Eskişehir Technıcal Unıversıty Journal Of Scıence and Technology A- Applıed Scıences and Engıneerıng, 24(4), 324–335.

Ekmekçi, S. (2025). A Study Of Some Geometric Properties İn The Plane Equipped With The Generalized Absolute Value Metric. Current Concepts and Innovatıve Research In Natural Scıence and Mathematıcs, All Sciences Academy, 310-328.

Ekmekçi, S., ve Bilgin, Y. (2023). On The Inverses Of Lines Under The Inversion İn A Generalized Taxicab Circle. Hagia Sopia Journal Of Geometry, 5(2), 41-49.

Ekmekçi, S., ve Bilgin, Y. (2023). On The Inversion İn A Generalized Taxicab Circle. Hagia Sopia Journal Of Geometry, 5(2), 50-58.

Gelişgen, Ö., ve Ermiş, T. (2023). Inversions and Fractal Patterns in Alpha Plane. Int. Electron. J. Geom., 16(1), 398-411.

Kaya, R., Gelişgen, Ö., Ekmekçi, S., ve Bayar, A. (2009). On The Group of Isometries of The Plane with Generalized Absolute Value Metric. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 39(2), 591-603.

Krause, E. F. (1975). Taxicab Geometry. Menlo Park, California, USA: Addison-Wesley Publishing Company.

Pekzorlu, A., ve Bayar, A. (2020 (a)). On The Chinese Checkers Spherical Inversions In Three Dimensional Chinese Checkers Space. Com.Fac. of Sci.Univ. of Ank.Ser. A1 Math. and Stat 69, 69(2), 1498-1507.

Pekzorlu, A., ve Bayar, A. (2020 (b)). Taxicab Spherical Incersions In Taxicab Space. Journal of Mahani Math. Research Center, 9(1-2), 45-54.

Pekzorlu, A., ve Bayar, A. (2022). On the Chinese Checkers Circular İnversions in the Chinese Checkers Plane. Hagia Sophia Journal of Geometry, 4(2), 28-34.

Yüca, G., ve Can, Z. (2020). On The Circular Inversion in Maximum Plane. Ikonion Journal of Mathematics, 2(2), 26-34.