Konumsal Uyarlanmış Çatılara Göre Fokal Yüzeyler

Esin Şahin

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

Matematik - Bilgisayar  Anabilim Dalı

Eylül 2023

Focal Surfaces According to Pasitional Adapted Frames

Esin Şahin

**MASTER OF SCIENCE THESIS**

Department of Mathematics - Computer Science

September 2023

# Konumsal Uyarlanmış Çatılara Göre Fokal Yüzeyler

Esin Şahin

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği Uyarınca
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Ş. Nevin Gürbüz

Eylül 2023

# ONAY

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS öğrencisi Esin Şahin'in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Konumsal Uyarlanmış Çatılara Göre Fokal Yüzeyler" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

**Danışman** : Prof. Dr. Ş. Nevin GÜRBÜZ

**İkinci Danışman** :

**Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:**

**Üye :** Prof. Dr. Ş. Nevin GÜRBÜZ

**Üye :** Prof. Dr. Cansel AYCAN

**Üye :** Prof. Dr. Cumali EKİCİ

**Üye :**

**Üye :**

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. .....
Enstitü Müdürü

# ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Ş. Nevin Gürbüz danışmanlığında hazırlamış olduğum "Konumsal Uyarlanmış Çatılara Göre Fokal Yüzeyler" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 11/09/2023

Esin ŞAHİN

# ÖZET

Bu çalışmada, 3 boyutlu Öklid uzayında 1. tip konumsal uyarlanmış ve regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatılara göre üç sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeyleri inceliyoruz. Aynı zamanda, bu fokal yüzeylerin birinci, ikinci temel formlarını, Gauss ve ortalama eğriliklerini elde ediyoruz.

Beş bölümden oluşan bu çalışmada, giriş ve literatür araştırması bölümlerinde çalışmanın tarihsel gelişimi hakkında bilgilere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayı ilgili temel tanım ve teoremler sunulmuş, 1. tip konumsal uyarlanmış çatı, regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatı ve fokal yüzeyler hakkında bilgi verilmiştir. Dördüncü bölümde, 1. tip konumsal uyarlanmış çatıya göre üç sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeyler incelenmiştir. Beşinci bölümde, regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre üç sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeyler incelenmiştir.

**Anahtar Kelimeler**: 1. Tip konumsal uyarlanmış çatı, Regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatı, Fokal yüzeyler, Akı

# SUMMARY

In this work, we study focal surfaces by produced vortex filament flow for three classes according 1.type positional adapted frame and positional adapted frame on regular surface in Euclidean 3-space. Also, we obtain the first and second fundamental forms, the Gauss and the mean curvatures of this focal surfaces in Euclidean 3-space.

This work consists of five sections. In introduction and literature search sections, some informations about historical development of the subject is given. In the third section, basic definitions and theorems, 1. type positional adapted frame, positional adapted frame on regüler surfaces and focal surfaces 3-dimensional Euclidean space are given. In the fourth section, focal surfaces by produced vortex filament flow for three classes according 1.type positional adapted frame are obtained. The fifth section, the focal surfaces produced by vortex filament flow for the three classes of positional adapted frame on regular surface in 3-dimensional Euclidean space are derived .

**Key Words**: 1st Type positional adapted frame, Positional adapted frame on regular surface, Focal surfaces, Flow.

# TEŞEKKÜR

Konumsal Uyarlanmış Çatılara Göre Fokal Yüzeyler adlı tez çalışmamda bana her konuda yardımcı olan, değerli bilgilerini ve deneyimlerini benimle paylaşan, tez çalışmamın yürütülmesi boyunca bana desteğini esirgemeyen her zaman bana inanan ve ve güvenen çok kıymetli Sayın

Prof.Dr. Şerife Nevin Gürbüz

hocama, bugünlere gelmemde maddi ve manevi her türlü desteği üzerimden hiç eksik etmeyen anneme, canım ablama, bu çalışmaya başladığım ilk günden beri beni hep motive eden ve desteğini esirgemeyen sevgili eşime teşekkürü iletmeyi borç bilirim.

ESKİŞEHİR, 2023
Esin Şahin

# İÇİNDEKİLER

Sayfa

**ÖZET** . . . . . **vi**

**SUMMARY** . . . . . **vii**

**TEŞEKKÜR** . . . . . **viii**

**İÇİNDEKİLER** . . . . . **ix**

**ŞEKİLLER DİZİNİ** . . . . . **xi**

**SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ** . . . . . **xii**

**1. GİRİŞ VE AMAÇ** . . . . . **1**

**2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI** . . . . . **2**

**3. TEMEL KAVRAMLAR** . . . . . **5**

3.1. Eğriler ve Frenet Çatısı . . . . . 5

3.2. Konumsal Uyarlanmış Çatılar . . . . . 11

3.3. Fokal Yüzeyler . . . . . 17

**4. $\mathbb{E}^3$ UZAYINDA 1.TİP KONUMSAL UYARLANMIŞ ÇATIYA GÖRE GİRDAP FİLAMENT AKILARI TARAFINDAN ÜRETİLEN FOKAL YÜZEYLER** . . . . . **19**

4.1. 1.Tip Konumsal Uyarlanmış Çatıya Göre Birinci Sınıf için Girdap Filament Akısı Tarafından Üretilen Fokal Yüzeyler . . . . . 19

4.2. 1.Tip Konumsal Uyarlanmış Çatıya Göre İkinci Sınıf için Girdap Filament Akısı Tarafından Üretilen Fokal Yüzeyler . . . . . 25

4.3. 1.Tip Konumsal Uyarlanmış Çatıya Göre Üçüncü Sınıf için Girdap Filament Akısı Tarafından Üretilen Fokal Yüzeyler . . . . . 31

**5. $\mathbb{E}^3$ UZAYINDA REGÜLER YÜZEY ÜZERİNDE KONUMSAL UYARLANMIŞ ÇATIYA GÖRE GİRDAP FİLAMENT AKILARI TARAFINDAN ÜRETİLEN FOKAL YÜZEYLER** . . . . . **40**

5.1. Regüler Yüzey Üzerinde Konumsal Uyarlanmış Çatıya göre Birinci Sınıf için Girdap Filament Akısı Tarafından Üretilen Fokal Yüzeyler . . . . . 40

# İÇİNDEKİLER

**Sayfa**

5.2. Regüler Yüzey Üzerinde Konumsal Uyarlanmış Çatıya Göre İkinci Sınıf için Girdap Filament Akısı Tarafından Üretilen Fokal Yüzeyler . . . . . 47

5.3. Regüler Yüzey Üzerinde Konumsal Uyarlanmış Çatıya Üçüncü Sınıf için Girdap Filament Akısı Tarafından Üretilen Fokal Yüzeyler . . . . . 53

**6. BULGULAR VE TARTIŞMA . . . . . 60**

**7. SONUÇ VE ÖNERİLER . . . . . 61**

**KAYNAKLAR DİZİNİ . . . . . 62**

# ŞEKİLLER DİZİNİ


| Şekil | | Sayfa |
|---|---|---|
| 3.1 | Frenet vektörleri . . . . . | 7 |
| 3.2 | 1. tip konumsal uyarlanmış çatı( Özen ve Tosun, 2021b) . . . . . | 14 |
| 3.3 | Regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatı(Özen ve Tosun, 2021a) . . . | 17 |
| 3.4 | Yüzeyin Fokal yüzeyleri (Strucbecker,1969) . . . . . | 18 |
| 4.1 | h(s,u) girdap filament yüzeyi $s \in (-5, 5), u \in (0, \pi/2))$ . . . . . | 38 |
| 4.2 | 1. tip konumsal uyarlanmış çatıya göre birinci sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzey . . . . . | 38 |
| 4.3 | h(s,u) girdap filament yüzeyi ve 1. tip konumsal uyarlanmış çatıya göre birinci sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzey . . . . . | 39 |

# SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

| **Simgeler** | **Açıklama** |
|---|---|
| $\mathbb{R}$ | Reel Sayılar Cismi |
| $\alpha$ | Uzay Eğrisi |
| $h(s,u)$ | $\mathbb{E}^3$ de Yüzey |
| $M$ | Regüler Yüzey |
| $T$ | Birim Teğet Vektör |
| $N$ | Birim Normal Vektör |
| $B$ | Birim Binormal Vektör |
| $J$ | Konumsal Normal Vektör |
| $Z$ | Konumsal Binormal Vektör |
| $P$ | Regüler Yüzey Üzerinde Konumsal Normal Vektör |
| $R$ | Regüler Yüzey Üzerinde Konumsal Binormal Vektör |
| $\eta$ | Birinci Eğrilik |
| $\tau$ | İkinci Eğrilik |
| $\Upsilon$ | Fokal Yüzey |
| $\mathbb{N}$ | Girdap Filament Akı Yüzeyinin Birim Normal Vektör Alanı |
| $\tilde{\mathbb{N}}_1$ | Fokal Yüzeylerin Birim Normali |
| $H$ | Ortalama Eğrilik |
| $K$ | Gauss Eğrilik |
| $\|.\|$ | Norm Fonksiyonu |
| $E, F, G$ | h(s,u) Yüzeyinin I. Temel Form Katsayıları |
| $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ | Fokal Yüzeylerin I. Temel Form Katsayıları |
| $l, m, n$ | h(s,u) Yüzeyinin II. Temel Form Katsayıları |
| $\tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{n}$ | Fokal Yüzeylerin II. Temel Form Katsayıları |
| $<,>$ | İç Çarpım Fonksiyonu |
| $\times$ | Vektörel Çarpım Fonksiyonu |

# 1. GİRİŞ VE AMAÇ

3- boyutlu Öklid uzayında eğrilerin ve yüzeylerin diferensiyel geometrik üzerine birçok çalışma yapılmaktadır. Özellikle Frenet (1847) ve Serret (1851) tarafından önemli çalışmalar yapılmış ve {T,N,B} Serret-Frenet çatısı bulunmuştur. Bu çatı dışında bilinen diğer bir çatı ise Darboux çatısıdır. Bu çatılara ek olarak Özen ve Tosun (2021a), (2021b) ve (2021c) 1.tip ve regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatı, Özen vd. (2022) 2. tip konumsal uyarlanmış çatıyı tanıştırmışlardır.

Fokal yüzeyler, optik, mimarlık, otomotiv ve bilgisayar destekli tasarım vb. gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Hagen vd. (1991), fokal yüzeylerin doğruların kongrüansları olarak bilinen yüzeyler olması özelliğinden yararlanarak, doğru kongrüansları ilk defa görüntüleme alanında kullanmışlardır. Daha sonra Hagen ve Hahmann (1992) fokal yüzeyleri genelleştirmişlerdir.

Bu çalışmada, 1. tip konumsal uyarlanmış ve regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatılara göre üç sınıf için girdap filament akısı tarafında üretilen fokal yüzeyler inclenecektir.

# 2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

19. yy başlarında G. Monge ve C.F. Gauss'un çalışmaları ile yüzeyin geometrik özellikleri incelenmiş ve daha sonraki yıllarda diferensiyel geometride birçok çalışmalar yapılmıştır. Aynı zamanda Serret ve Frenet diferensiyel geometri üzerine çalışmalar yapmışlardır ve Serret-Frenet çatısı olarak bilinen ortonarmal çatıyı elde etmişlerdir. Serret - Frenet çatısı diferensiyel geometride önemli bir rol oynamakla beraber, bu çatıya alternatif olarak fransız matematikçi J.G Darboux, kendi ismini taşıyan Darboux çatıyı inşa etmiştir. Bu çatı diferensiyel geometri için önemli çalışmalara yol açmış ve ayrıca yeni çatılarında oluşumuna sebep olmuştur. Birçok matematikçi Darboux çatısına çalışmalarında yer vermiştir. Doğan ve Yaylı (2012) Darboux çatısını incelemiş, Gauss ve ortalama eğriliğini hesaplamıştır. Diğer bir çatı ise, Coquillart tarafından (1987) de tanımlanan $q$-çatıdır. $q$ vektörü, yüzeyin teğet vektörü ile izdüşüm vektörünün vektörel çarpımıdır. Ekici vd. (2017) ve (2021) Öklidyen ve Minkowski 3-uzayında q-çatısını incelemişlerdir.

Geçmişten günümüze birçok araştırmacı Serret-Frenet çatısının dışında alternatif çatılar geliştirdiler. Bu çatılara örnek olarak (1975) yılında R.L. Bishop tafafından tanıştırılan Bishop çatısı verilebilir. Serret-Frenet çatısının ortak bir vektörü olan, binormal vektör alanını kullanalarak Bishop çatısının yeni bir versiyonu olan 2. tip Bishop çatısı Yılmaz ve Turgut (2010) tarafından oluşturulmuştur. Soliman vd. (2019) 3. tip Bishop çatısını kullanarak zaman göre eğri evolüsyonunu incelemişlerdir. Bishop çatısı Öklid uzayı dışında Minkowski uzayında da çalışılmış ve yeni geometrik çalışmalara yol açmıştır.

Ortonormal hareketli çatılar diferensiyel geometrinin temel konularından bir tanesidir ve eğriler teorisi için önemli bir yere sahiptir. Tosun ve Özen (2021a), (2021b), (2021c) 1. tip konumsal uyarlanmış çatı ve regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıyı tanımlamışlar. Solouma (2021) 3 boyutlu Öklid uzayında konumsal uyarlanmış çatıyı kullanılarak sabit kütleli parçacıkları Smarandache yörünge eğrisi boyunca hareket ederken tanımlanmış ve değerlendirilmiştir. Aynı zamanda Özen vd. (2022b), 2. tip konumsal uyarlanmış çatıyı inşa etmişlerdir. Ertuğ Gürbüz (2022a), Minkowski uzayında elektrik alanının evolüsyonunu 1. tip konumsal uyarlanmış ve regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatılara göre incelemiştir.

Son yıllarda çalışılmış olan uzay eğrileri ve solitonlar arasındaki ilişkiler fiziksel alanlarda da geniş kullanıma sahip olmaları nedeniyle pek çok matematikçinin ilgi odağı olmuştur. İlk olarak Hasimoto (1971) bir girdap filament hareketinin elastik ile ilgili olan

bağlantısını araştırmıştır. Aynı zamanda 3 boyutlu Öklid uzayında, Hasimoto (1972), sıkıştırılamaz viskos olmayan akış içersindeki izole edilmiş ince girdap filamentin hareketinin doğrusal olmayan Schrödinger (NLS) denklemi

$$\begin{aligned} \frac{1}{i}\frac{\partial \Omega}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \Omega}{\partial s^2} + \frac{1}{2}(\mid \Omega \mid^2 + A)\Omega \\ \Omega &= \eta e^{(i\int_0^s \tau ds)} \end{aligned}$$

ile ilişkisini incelemiştir.

3 boyutlu Öklid uzayında hareketli uzay eğrisi $h$ ve $h = h(s,u)$ hareketli uzay eğrisinin konum vektörü olsun.

$$h_u = h_s \times h_{ss} \tag{2.1}$$

denklemi, girdap filament akı denklemi olarak adlandırılır. Burada $s$ yay parametresi ve $u$ zamanı göstermektedir. Herhangi bir form değişikliği içermeyen bu tür girdap hareketleri (NLS) denkleminin ilerleyen dalga çözümlerine karşılık gelir. NLS denklemiyle ilişkili yüzeye NLS yüzeyi. Hasimoto yüzeyi veye girdap filament yüzeyi denir.

Murugesh ve Balakrishnan (2001) Öklidyen uzayda Frenet çatısına göre eğri evolüsyonunun Lamb'ın (1977) vermiş olduğu birinci sınıf haricindeki doğrusal olmayan Schrödinger (NLS) denklemi ile ilişkili diğer iki sınıfı incelediler. Bir spin vektörünün zaman evolüsyonu için doğrusal olmayan Schrödinger denklemi arasındaki bağlantı Lakshmanan (1977) tarafından verilmiştir. Ayrıca Ertuğ Gürbüz (2010), (2015), (2017), (2018), (2019), (2021), (2022a) ve (2022b) çeşitli çatılara göre hareketli eğriler ve soliton denklemleri arasındaki ilişkileri ve uygulamalarını incelemiştir.

Matematik, fiziğin birçok alanında önemli bir rol oynamaktadır. Çalışmamızda da kullanacağımız fokal yüzeyler fizikte, optik ve geometri alanında oldukça önemlidir. Göz tedavileri için kullanılan fokal eğriler ve yüzeyler, iyi bir sonuç alabilmek için ışık ışınlarının ortak bir noktada toplanması ile sağlanır. Bu noktalar da fokal noktalar olacağından yüzeyden ne kadar uzaklıkta olduğunu bilmek önemlidir. Hagen vd. (1991), fokal yüzeylerin doğruların kongrüansları olarak bilinen yüzeyler olması özelliğinden yararlanarak bunu ilk defa görüntüleme alanında kullanmışlardır. Hagen ve Hahmann (1992) fokal yüzeyleri genelleştirmişlerdir. Özdemir ve Arslan (2008) Öklid uzayında fokal eğriler ve fokal yüzeylerin karakterizasyonlarını vermişlerdir. Özdemir ve Aslan (2016) n boyutlu Öklid uzayında fokal eğrileri incelemişlerdir. Güler (2022) de verilen bir parametrik yüzeyin offset yüzeyinin fokal yüzeylerinin geometrisi araştırmıştır. Al-Dayel vd. (2022), B-Darboux çatısı ve 2.tip Bishop çatısına göre tubular yüzeyleri vermişler ve tubular yüzeylerin fokal yüzeylerini incelemişlerdir. Eren vd. (2022) Öklid uzayda vortex filament akısının fokal yüzeylerini Serret-Frenet çatısına göre incelemişlerdir. Biz de bu çalışmamızda 1. tip konumsal uyarlanmış ve regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış

çatıya göre üç sınıf için girdap filament akısının fokal yüzeylerini üç sınıfta inceleyip Gauss ve ortama eğrilik gibi temel geometrik bulgulara ulaşacağız.

# 3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan teorem ve kullanacağımız temel kavramlar üzerine durulmuştur.

## 3.1. Eğriler ve Frenet Çatısı

**Tanım 3.1**: $X$ bir küme ve $X$'in alt kümelerinin bir koleksiyonu $\iota$ olsun. $\iota$ koleksiyonu aşağıdaki önermeleri doğrularsa $X$ üzerinde bir topoloji adını alır (Hacısalihoğlu, 2000):

$(T_1)$ $X$,$\emptyset \in \iota$,

$(T_2) \forall\ A_{1,}A_2 \in \iota \Longrightarrow A_1 \cap A_2 \in \iota$

$(T_3) \forall\ A_i \in \iota,\ i \in \iota, \cup A_i \in \iota$

**Tanım 3.2**: Bir $X$ kümesi ve üzerindeki bir $\iota$ topolojisinden oluşan $(X, \iota)$ ikilisine bir topolojik uzay denir (Hacısalihoğlu, 2000).

**Tanım 3.3:** $A \neq \emptyset$ ve bir $K$ cismi üstünde bir $V$ vektör uzayı tanımlansın. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f: \ A \times A \ \longmapsto V$$

fonksiyonu varsa A ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir (Hacısalihoğlu, 2000):

i) $\forall \dot{P}, \dot{Q}, \dot{R} \in A$ için $f(\dot{P}, \dot{Q}) + f(\dot{Q}, \dot{R}) = f(\dot{P}, \dot{R})$

ii) $\forall \dot{P} \in A$ ve $\forall \alpha \in A$ için $f(\dot{P}, \dot{Q}) = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

**Tanım 3.4:** $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında $u = (u_{1,}u_2, u_3)$ ve $v = (v_{1,}v_2, v_3)$ iki vektör olmak üzere olmak üzere

$$\langle u, v \rangle \ = \ \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \tag{3.1}$$

şeklinde Öklid iç çarpımı tanımlanır. Böylece Afin uzayı 3- boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ adını alır (Hacısalihoğlu, 2000).

**Tanım 3.5:** $n$- boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^n$ de $\forall x = (x_1, x_2..., x_n) \in \mathbb{E}^n$ için

$$\| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona x vektörünün normu denir (Hacısalihoğlu, 2000).

**Teorem 3.1:** $0 \leq \theta \leq \pi$ olmak üzere $\langle , \rangle : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall u, v \in \mathbb{R}$ için $\langle u, v \rangle = ||u||\ ||v|| \cos\theta$ biçiminde tanımlanan bir iç çarpımdır. Dolayısıyla $u$ ve $v$ gibi iki vektör arasındaki açı $\theta$ olmak üzere

$$\cos\theta = \frac{\langle u,v \rangle}{||u||\ ||v||} \tag{3.3}$$

biçiminde ifade edilebilir (Hacısalioğlu, 2000).

**Tanım 3.6:** 3- boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ de $\forall x = (x_1, x_2, x_3), \forall y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{E}^3$ için vektörel çarpımı

$$x \times y = (x_2y_3 - y_2x_3, x_3y_1 - y_3x_1, x_1y_2 - y_2x_1) \tag{3.4}$$

tanımlanır (Hacısalihoğlu, 2000).

**Tanım 3.7:** $n$- boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^n$ de

$$\begin{array}{lllll} l: & \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) \longrightarrow & l(x,y) & = & \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2} \end{array} \tag{3.5}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve $l(x, y)$ reel sayısına da $x, y \in \mathbb{E}^n$ noktaları arasındaki uzaklık denir (Hacısalihoğlu, 2000).

**Tanım 3.8:** $I$, $\mathbb{R}$ nin bir açık aralık olmak üzere $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ biçiminde düzgün bir $\alpha$ dönüşümüne $\mathbb{R}^n$ uzayı için bir eğri denir. $\mathbb{R}^n$ uzayında Öklidyen koordinat fonksiyonları $x_1, x_2, ..., x_n$ olmak üzere $\alpha$ dönüşümün değer kümesi $\mathbb{R}^n$ olduğundan

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \tag{3.6}$$

biçimindedir (Sabuncuoğlu, 2004).

**Tanım 3.9:** $(I, \alpha)$ koordinat komşuluğu ile bir $\alpha$ eğrisi verilsin. $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise $\alpha$ eğrisine $(I, \alpha)$ koordinat komşuluğuna göre birim hızlı eğri, $s$ parametresine de eğrinin yay-parametresi denir (Hacısalihoğlu, 2000).

**Tanım 3.10:** $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ eğrisi verilsin. $\forall t \in I, \alpha'(t) \neq 0$ ise $\alpha$ eğrisine regüler eğri denir (Sabuncuoğlu, 2004).

**Tanım 3.11:** 3- boyutlu Öklid uzayında $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi tanımlansın. Verilen eğri için

$$\alpha'(s) = T(s) \tag{3.7}$$

eşitliği ile belli $T(s)$ vektörüne $\alpha$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir. $T$, $\alpha$ eğrisi üstünde bir vektör alanıdır. Bu vektör alanına $\alpha$ eğrisinin birim teğet vektör alanı denir (Sabuncuoğlu, 2004).

**Tanım 3.12:** $\mathbb{R}^3$ uzayındaki birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$\begin{array}{rccc} \eta: & I & \to & \mathbb{R} \\ \eta(s) & = & \| & T'(s) \| \end{array} \tag{3.8}$$

fonksiyonuna $\alpha$ eğrisinin eğrilik fonkiyonu denir. $\eta(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir (Sabuncuoğlu, 2004).

**Tanım 3.13:** $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi için

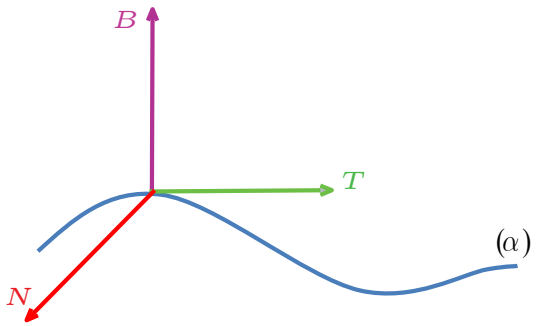
$$N(s) = \frac{T'(s)}{\eta(s)} \tag{3.9}$$

eşitliği ile belirlenen $N(s)$ vektörüne eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki birinci dik vektörü (asli normali) denir (Sabuncuoğlu, 2004).

**Tanım 3.14:** $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi için

$$B = T \times N \tag{3.10}$$

eşitliği ile tanımlanan $B$ vektör alanına, eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki ikinci dik vektörü (binormali) denir (Ekici, 2021).




Şekil 3.1 Frenet vektörleri

**Tanım 3.15:** $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi için Frenet vektör alanları $T, N, B$ olmak üzere $\tau : I \to \mathbb{R}$ için

$$\tau(s) = -< B'(s), N(s) > \tag{3.11}$$

fonksiyonuna $\alpha$ eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir (Sabuncuoğlu, 2004).

**Tanım 3.16:** 3- boyutlu $\mathbb{E}^3$ uzayında birim hızlı eğri olmak üzere $V_1 = T$ birim teğet, $V_2 = N$ birim normal, $V_3 = B$ binormal vektörleri için $\{T, N, B\}$ kümesine Frenet çatısı (3-ayaklısı) denir (Shifrin, 2008).

**Tanım 3.17:** $\mathbb{E}^3$ uzayında $\alpha$ eğrisi için $\{T, N, B\}$ 3- ayaklısı için Serret- Frenet türev formülleri matris gösterimi aşağıdaki gibi verilir (Shifrin, 2008).

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \eta(s) & 0 \\ -\eta(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$$

**Örnek 3.1:** $\alpha(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^3$ eğrisi $\alpha(s) = \left(1 + \frac{12}{13}s, \sin(\frac{5s}{13}), \cos(\frac{5s}{13})\right)$ parametrik olarak verilsin. Buna göre Frenet elemanlarını bulalım.

Öncelikle eğrinin türevi hesaplanırsa

$$\alpha'(s) = \left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\cos(\frac{5s}{13}), -\frac{5}{13}\sin(\frac{5s}{13})\right)$$

bulunur. Her $s \in I$ değerine karşılık

$$\|\alpha'(s)\| = \sqrt{\frac{144}{169} + \frac{25}{169}(\cos^2(\frac{5s}{13}) + \sin^2(\frac{5s}{13}))} = 1$$

bulunduğundan $s$ yay-parametresidir. $T$ birim teğet vektörü, $T(s) = \alpha'(s)$ olur. Yani

$$\begin{aligned} T(s) &= \left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\cos(\frac{5s}{13}), -\frac{5}{13}\sin(\frac{5s}{13})\right) \\ T'(s) &= \left(0, -\frac{25}{169}\sin(\frac{5s}{13}), -\frac{25}{169}\cos(\frac{3s}{13})\right) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.17) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \eta(s) &= \sqrt{\langle T'(s), T'(s)\rangle} \\ &= \sqrt{\left\langle \left(0, -\frac{25}{169}\sin(\frac{5s}{13}), -\frac{25}{169}\cos(\frac{3s}{13})\right), \left(0, -\frac{25}{169}\sin(\frac{5s}{13}), -\frac{25}{169}\cos(\frac{3s}{13})\right)\right\rangle} \\ &= \frac{25}{169} \end{aligned}$$

olur. Birim normal vektör alanı ise

$$\begin{aligned} N(s) = \frac{T'(s)}{\eta(s)} &= \frac{\left(0, -\frac{25}{169}\sin(\frac{5s}{13}), -\frac{25}{169}\cos(\frac{3s}{13})\right)}{\frac{25}{169}} \\ &= \left(0, -\sin(\frac{5s}{13}), -\cos(\frac{5s}{13})\right) \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} B(s) &= T(s) \times N(s) \\ &= \left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\cos(\frac{5s}{13}), -\frac{5}{13}\sin(\frac{5s}{13})\right) \times \left(0, -\sin(\frac{5s}{13}), -\cos(\frac{5s}{13})\right) \\ &= \left(-\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\cos(\frac{5s}{13}), -\frac{12}{13}\sin(\frac{5s}{13})\right) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$B'(s) = \left(0, -\frac{60}{169}\sin(\frac{5s}{13}), -\frac{60}{169}\cos(\frac{5s}{13})\right)$$

olduğundan torsiyon ise

$$\begin{aligned} \tau(s) &= -\left\langle \left(0, -\frac{60}{169}\sin(\frac{5s}{13}), -\frac{60}{169}\cos(\frac{5s}{13})\right), \left(0, -\sin(\frac{5s}{13}), -\cos(\frac{5s}{13})\right) \right\rangle \\ &= -\frac{60}{169} \end{aligned}$$

olarak ifade edilir.

**Tanım 3.18**: $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet vektör alanları $T, N, B$ olsun. $\{T(s), N(s)\}$ vektör kümesinin gerdiği düzleme $\alpha(s)$ noktasındaki oskülatör düzlem, $\{T(s), B(s)\}$ vektör kümesinin gerdiği düzleme $\alpha(s)$ noktasındaki rektifiyan düzlem, $\{N(s), B(s)\}$ vektör kümesinin gerdiği düzleme $\alpha(s)$ noktasındaki normal düzlem veya dik düzlem denir (Sabuncuoğlu, 2004).

**Tanım 3.19**: $M \subset \mathbb{E}^n$ bir alt küme olsun. Eğer M nin her $p \in M$ noktasında $p$ yi içeren bir $V$ komşuluğu var ve bir $X: U \subset \mathbb{E} \to V \cap M \subset \mathbb{E}^n$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlarsa, M ye bir regüler yüzey denir:

i) X diferensiyellenebilirdir,

ii) $X: U \to V \cap M$ bir homeomorfizmdir,

iii) Her $X : U \longrightarrow M$ dönüşümü bir regüler yamadır (Gray,1993).

**Tanım 3.20:** $M \subset \mathbb{E}^3$ bir yüzey ve $M$ yüzeyinin birim normal vektör alanı $\mathbb{N}$ olmak üzere , $M$'nin her bir $p$ noktasında

$$\begin{array}{rccc} S_p: & T_p(M) & \longrightarrow & T_p(M) \\ & S_p(v_p) & = & -D_{v_p}\mathbb{N} \end{array} \tag{3.12}$$

biçiminde tanımlı $S$ fonksiyonuna, $M$ üzerinde şekil operatörü adı verilir. (Hacısalihoğlu, 2000).

**Tanım 3.21:** $\mathbb{E}^3$ uzayında bir $M$ yüzeyi $h(s,u) = (a(s,u), b(s,u), c(s,u))$ biçiminde verilmiş olsun. Burada diferensiyellenebilir $a, b, c$ fonksiyonlarına $h$ 'nin koordinat fonksiyonları denir. Birinci ve ikinci temel formun katsayıları aşağıdaki gibi verilir:

$$E = < h_s, h_s >, \quad F = < h_s, h_u >, \quad G = < h_u, h_u > \tag{3.13}$$

$$l = < h_{ss}, \mathbb{N} > \quad m = < h_{su}, \mathbb{N} > \quad n = < h_{uu}, \mathbb{N} > \tag{3.14}$$

Burada

$$\mathbb{N} = \frac{h_s \times h_u}{\| h_s \times h_u \|} \tag{3.15}$$

yüzeyin birim normal vektör alanıdır. (3.13), (3.14) denklemleri kullanılarak yüzeyin $I.$ ve $II.$ temel formları sırasıyla

$$I = Eds^2 + 2Fdsdu + Gdu^2 \tag{3.16}$$

$$II = lds^2 + 2mdsdu + ndu^2 \tag{3.17}$$

ile gösterilir. Yüzeyin ortalama ve Gaus eğrilikleri sırasıyla

$$H = \frac{En + Gl - 2Fm}{2(EG - F^2)} \tag{3.18}$$

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2} \tag{3.19}$$

biçiminde verilir (Shifrin, 2008).

**Tanım 3.22:** $X : U \longrightarrow \mathbb{E}^3$ regüler bir yama olsun. $X'$in asli eğrilikleri $k_1$ ve $k_2$ aşağıdaki biçimde verilir (Hacısalihoğlu, 2000).

$$\begin{aligned} k_1 &= H + \sqrt{H^2 - K} \\ k_2 &= H - \sqrt{H^2 - K} \end{aligned}$$

**Teorem 3.2:** $\mathbb{E}^3$ uzayında bir yüzey içinde $\alpha$ birim hızlı eğri verilsin. Yüzeyin birim vektör alanı $U$ ve teğet vektör alanı $T$ olmak üzere $Y = T \times U$ şeklinde tanımlanan $Y$

vektör alanını göz önüne alalım. $\{T(s), Y(s), U(s)\}$ çatısına ortonormal bir taban olur. Bu tabana Darboux çatısı denir. Burada $T$, $\alpha$ eğrisinin birim tanjant vekrörü, $\mathbb{N}$ yüzeyin normali ve $Y = U \times T$ birim vektördür. Darboux çatısının türev formülleri aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ Y'(s) \\ U'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \eta_g(s) & \eta_n(s) \\ -\eta_g(s) & 0 & \tau_g(s) \\ -\eta_n(s) & -\tau_g(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ Y(s) \\ U(s) \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} \langle T, T \rangle &= \langle Y, Y \rangle = \langle U, U \rangle = 1 \\ \langle T, Y \rangle &= \langle T, U \rangle = \langle Y, U \rangle = 0 \end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned} \eta_g(s) &= \eta(s) \cos \phi \\ \eta_n(s) &= \eta(s) \sin \phi \\ \tau_g(s) &= \tau(s) - \phi' \end{aligned}$$

dır. Burada $\phi$, $M$ yüzeyin birim normali ile $\alpha(s)$ eğrisinin binormali arasındaki açıdır. $\eta_g(s)$ geodezik eğriliği, $\eta_n(s)$ normal eğrilik $\tau_g(s)$ geodezik torsiyon olarak adlandırılır (Doğan ve Yaylı, 2012).

## 3.2. Konumsal Uyarlanmış Çatılar

**1. Tip Konumsal Uyarlanmış Çatı**

Bu başlık altında, 1. tip konumsal uyarlanmış çatı tanımı yapılacaktır. 3 boyutlu Öklid uzayında hareket eden bir parçacığın kinematiği ile yörüngenin diferensiyel geometrisi arasında çok yakın bir ilişki vardır. Serret Frenet vektörleri bir cismin kinematiğini araştırmak için yaygın olarak kullanılır. Geçmişten günümüze birçok araştırmacı, Serret-Frenet ile ortak bir temel vektöre sahip yeni hareketli çatılar geliştirmiştir. Buna en yakın araştırma örneği Özen ve Tosun tarafından verilmiştir. Özen ve Tosun 3 boyutlu Öklid uzayında açısal momentuma sahip yörüngeler için 1. Tip konumsal uyarlanmış çatıyı tanıştırmışlardır Özen ve Tosun, 2021b).

1. tip konumsal uyarlanmış çatının inşasında $m$ kütleli hareket eden parçacığın orijine $O(0,0,0)$ göre açısal momentum vektörü önem taşımaktadır. Bu vektör Newton mekaniğinde önemli bir role sahiptir. Parçacığın Serret-Frenet çatısı için orijine $O(0,0,0)$ göre $u$ zamanında konum vektörü $x(s)$ olsun. Birim hızlı $\alpha(s)$ eğrisi verilsin. Burada $s$, $\alpha$ nın yay uzunluğu, $u$ zamana karşılık gelir. Birim teğet vektörü, hız vektörü ve $\alpha(s)$

noktasında ($u$ zamanında) doğrusal momentum aşağıdaki gibi verilir (Casey, 2011):

$$\begin{array}{rcccl} T(s) & = & \frac{dx}{ds} & & \\ v(u) & = & \frac{dx}{du} & = & (\frac{ds}{du})T(s) \\ p(u) & = & mv(u) & = & m(\frac{ds}{du})T(s) \end{array} \tag{3.21}$$

Orijine göre $\alpha(s)$ noktasında $u$ zamanına göre konum vektörü,

$$\begin{aligned} x(s) = & < \alpha(s), T(s) > T(s) + < \alpha(s), N(s) > N(s) \\ & + < \alpha(s), B(s) > B(s) \end{aligned} \tag{3.22}$$

biçiminde verilir. Momentum ve konum vektörleri vektörel çarpıldığında $u$ anında açısal momentum vektörü elde edilir:

$$H^o = m < \alpha(s), B(s) > (\tfrac{ds}{dt})N(s) - m < \alpha(s), N(s) > (\tfrac{ds}{dt})B(s) \tag{3.23}$$

Dışardan herhangi bir kuvvet gelmediği sürece açısal momentum vektörü korunur. Bu sebeple $< \alpha(s), B(s) >$ ve $< \alpha(s), N(s) >$ pozisyon vektörleri aynı anda sıfır olamaz. Aynı zamanda

$$\begin{aligned} -x(s) = & < -\alpha(s), T(s) > T(s) + < -\alpha(s), N(s) > N(s) \\ & + < -\alpha(s), B(s) > B(s) \end{aligned} \tag{3.24}$$

biçimindedir. $-x(s)$ vektörünün oskülatör düzlemi $W_1(s)$ ve rektifiyan düzlemi $W_2(s)$ üzerindeki izdüşümleri iki vektör verir. Bu iki vektör, hareketli çatıyı oluşturmak için önemli bir rol oynayacaktır. Başlangıç noktası $\alpha(s)$ ve bitiş noktası $O$'dan $W_1(s)$'ye olan dikmenin ayağı olan vektör $r(s)$, başlangıç noktası $\alpha(s)$ ve bitiş noktası $O$'dan $W_2(s)$'ye olan dikmenin ayağı olan vektör $r^*(s)$ aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{array}{rcl} r(s) & = & < -\alpha(s), T(s) > T(s) + < -\alpha(s), N(s) > N(s) \\ r^*(s) & = & < -\alpha(s), T(s) > T(s) + < -\alpha(s), B(s) > B(s) \end{array} \tag{3.25}$$

(3.25) denklemi yardımıyla

$$r(s) - r^*(s) = < -\alpha(s), N(s) > N(s) + < \alpha(s), B(s) > B(s) \tag{3.26}$$

elde edilir. (3.26) denkleminde verilen vektör normal düzlem $W_3(s)$ üzerinde tanımlanır. $r(s) - r^*(s)$ vektörünün birim normal vektörü

$$\begin{array}{rcl} Z(s) & = & \frac{r(s)-r^*(s)}{\|r(s)-r^*(s)\|} \\ & = & \dfrac{< -\alpha(s), N(s) > N(s) + < \alpha(s), B(s) > B(s)}{\sqrt{< \alpha(s), N(s) >^2 + < \alpha(s), B(s) >^2}} \end{array} \tag{3.27}$$

biçiminde tanımlanır. $Z(s)$ ve $T(s)$ vektörleri vektörel çarpıldığında

$$\begin{array}{rcl} J(s) & = & Z(s) \times T(s) \\ & = & \dfrac{< \alpha(s), B(s) > N(s) + < \alpha(s), N(s) > B(s)}{\sqrt{< \alpha(s), N(s) >^2 + < \alpha(s), B(s) >^2}} \end{array}$$

biçiminde elde edilir. Böylece $\{T(s), J(s), Z(s)\}$ 1. tip konumsal uyarlanmış çatı elde edilir (Özen ve Tosun, 2021b). Burada $T(s)$ vektörü iki çatı içinde ortak olduğu için $N(s), B(s), J(s)$ ve $Z(s)$ vektörleri aynı düzlem üzerinde yer alır. Dolayısıyla 1. tip konumsal uyarlanmış çatı ve Frenet çatısı arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır:

$$\begin{bmatrix} T(s) \\ J(s) \\ Z(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi(s) & -\sin\phi(s) \\ 0 & \sin\phi(s) & \cos\phi(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

Burada $\phi(s)$, $B(s)$'den $Z(s)$'ye pozitif yönlü olan $B(s)$ ve $Z(s)$ vektörleri arasındaki açıdır. (3.28) denkleminin $s$ ye göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} J_s(s) &= (\cos\phi(s)N(s) - \sin\phi(s)B(s))_s \\ &= (-\eta(s)\cos\phi(s))T(s) + (\tau(s) - \phi_s(s))Z(s) \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned} Z_s(s) &= (\sin\phi(s)N(s) + \cos\phi(s)B(s))_s \\ &= (-\eta(s)\sin\phi(s))T(s) + (\tau(s) - \phi_s(s))Z(s) \end{aligned} \tag{3.30}$$

elde edilir. Daha sonra $J(s) \times Z(s)$ ifadesinin türevi alınırsa,

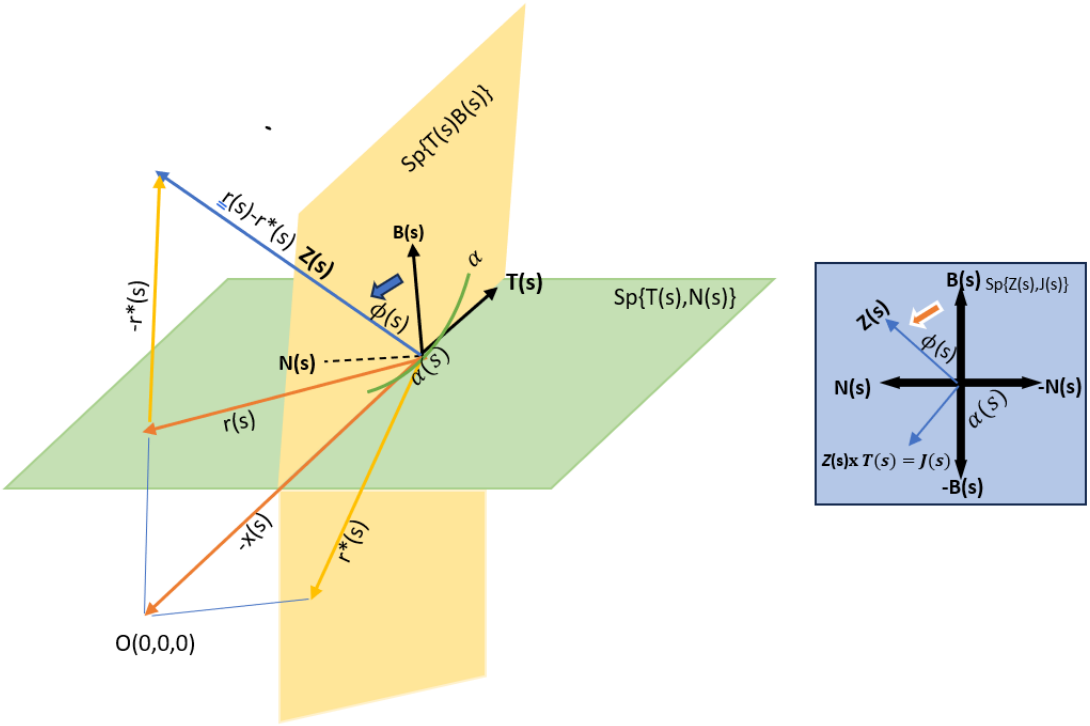
$$\begin{aligned} T_s(s) &= (J(s) \times Z(s))_s \\ &= J_s(s) \times Z(s) + J(s) \times Z_s(s) \\ &= (\eta(s)\sin\phi(s))J(s) + (\eta(s)\sin\phi(s))Z(s) \end{aligned} \tag{3.31}$$

bulunur. Böylece 1. tip konumsal uyarlanmış çatı için türev formülleri matrisi aşağıdaki gibi oluşturulur (Özen ve Tosun, 2021b).

$$\begin{bmatrix} T_s \\ J_s \\ Z_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \eta_1(s) & \eta_2(s) \\ -\eta_1(s) & 0 & \eta_3(s) \\ -\eta_2(s) & -\eta_3(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ J(s) \\ Z(s) \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

Burada

$$\begin{aligned} \eta_1(s) &= \eta(s)\cos\phi(s) \\ \eta_2(s &= \eta(s)\sin\phi(s) \\ \eta_3(s) &= \tau(s) - \phi_s(s) \\ \tan\phi(s) &= \tfrac{\eta_2(s)}{\eta_1(s)} \\ \eta(s) &= \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2} \end{aligned} \tag{3.33}$$




Şekil 3.2 1. tip konumsal uyarlanmış çatı( Özen ve Tosun, 2021b)

**Örnek 3.2:** $\mathbb{R}^3$ de sabit kütleli P parçacığın $\alpha\left(s\right) = \left(5\cos(\frac{s}{13}), 5\sin(\frac{s}{13}), \frac{12s}{13}\right)$ eğrisi boyunca hareket ettiğini varsayalım. Buna göre Frenet elemanlarını bulalım.Öncelikle eğrinin türevi hesaplanırsa

$$\alpha'(s) = \left(-\frac{5}{13}\sin(\frac{s}{13}), \frac{5}{13}\cos(\frac{5s}{13}), \frac{12}{13}\right)$$

bulunur. Her $s \in I$ değerine karşılık

$$\|\alpha'(s)\| = \sqrt{\frac{144}{169} + \frac{25}{169}(\cos^2(\frac{5s}{13}) + \sin^2(\frac{5s}{13}))} = 1$$

bulunduğundan $s$ yay-parametresidir. Frenet vektörleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} T(s) &= \left(-\frac{5}{13}\sin(\frac{s}{13}), \frac{5}{13}), \frac{12}{13}\right) \\ N(s) &= \left(-\cos(\frac{5s}{13}), -\sin(\frac{s}{13}), 0\right) \\ B(s) &= (\frac{12}{13}\sin(\frac{s}{13}), -\frac{12}{13}\cos(\frac{s}{13}), \frac{5}{13}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta(s) &= \frac{5}{169} \\ \tau(s) &= \frac{12}{169} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
< \alpha(s), N(s) > &= 5 \\
< \alpha(s), B(s) > &= \frac{60s}{169} \\
\phi(s) &= \arctan(\frac{169s}{12})
\end{aligned}
$$

Verilen bu bilgilerden 1. tip konumsal uyarlanmış çatı elemanları aşağıdaki gibi verilir:

$$
T(s) = \left(-\frac{5}{13}\sin(\frac{s}{13}), \frac{5}{13}), \frac{12}{13}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
J(s) = (&-\cos(\arctan(\frac{169s}{12})\cos(\frac{5s}{13}) - \frac{12}{13}\sin(\arctan(\frac{169s}{12})\sin(\frac{s}{13}), \\
&-\cos(\arctan(\frac{169s}{12})\sin(\frac{s}{13}) + \frac{12}{13}\sin(\arctan(\frac{169s}{12})\cos(\frac{s}{13}), \frac{12}{13}\sin(\arctan(\frac{169s}{12}))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z(s) = (&-\sin(\arctan(\frac{169s}{12})\cos(\frac{5s}{13}) + \frac{12}{13}\cos(\arctan(\frac{169s}{12})\sin(\frac{s}{13}), \\
&-\sin(\arctan(\frac{169s}{12})\sin(\frac{s}{13}) + -\frac{12}{13}\cos(\arctan(\frac{169s}{12})\cos(\frac{s}{13}), \frac{5}{13}\cos(\arctan(\frac{169s}{12}))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_1(s) &= \frac{5}{169}\cos(\arctan(\frac{169s}{12}) \\
\eta_2(s) &= \frac{5}{169}\sin(\arctan(\frac{169s}{12}) \\
\eta_3(s) &= \frac{12}{169} + \frac{2028}{144s+28561}
\end{aligned}
$$

**Regüler Yüzey Üzerinde Konumsal Uyarlanmış Çatı**

3- boyutlu Öklid uzayında sabit $m$ kütleli bir nokta parçacığı regüler bir $M$ yüzeyi üzerinde uzanan bir eğri üzerinde hareket etsin. Parçacığın Darboux çatısı için orijine $O(0,0,0)$ göre $u$ zamanında konum vektörü $x(s)$ olsun. Birim hızlı $\alpha(s)$ eğrisi verilsin, $s$, $\alpha$ nın yay uzunluğu, $u$ zamana karşılık gelir. Birim teğet vektörü, $u$ zamanında hız vektörü ve $\alpha(s)$ noktasında doğrusal momentum vektörü aşağıdaki şekilde verilir (Özen vd., 2017):

$$
\begin{aligned}
T(s) &= \frac{dx}{du} \\
v(u) &= \frac{dx}{du} = (\frac{ds}{du})T(s) \\
p(u) &= mv(u) = m(\frac{ds}{du})T(s)
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

Orijine göre $\alpha(s)$ noktasında $u$ zamanında konum vektörü aşağıdaki biçimde verilir:

$$
\begin{aligned}
x(s) = &< \alpha(s), T(s) > T(s) + < \alpha(s), Y(s) > Y(s) \\
&+ < \alpha(s), U(s) > U(s)
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

Doğrusal momentum ve konum vektörleri vektörel çarpıldığında $u$ zamanında açısal momentum vektörü aşağıdaki gibi verilir:

$$
H^o = m < \alpha(s), U(s) > (\frac{ds}{du})Y(s) - m < \alpha(s), Y(s) > (\frac{ds}{du})U(s) \tag{3.36}
$$

Dışardan herhangi bir kuvvet gelmediği sürece açısal momentum vektörü korunur. Bu sebeple $< \alpha(s), U(s) >$ ve $< \alpha(s), Y(s) >$ pozisyon vektörleri aynı anda sıfır olamaz. Aynı zamanda

$$\begin{aligned} -x(s) = \ & < -\alpha(s), T(s) > T(s) + < -\alpha(s), Y(s) > Y(s) \\ & + < -\alpha(s), U(s) > U(s) \end{aligned} \tag{3.37}$$

elde edilir. Bu vektörün $sp\{T(s), U(s)\}$ ve $sp\{T(s), Y(s)\}$ üzerindeki izdüşümleri iki vektör verir. Bu iki vektör hareketli çatıyı oluşturmak için önemli bir rol oynayacaktır. Başlangıç noktası $\alpha(s)$ ve bitiş noktası $O$'dan $sp\{T(s), Y(s)\}$'ye olan dikmenin ayağı olan vektör $r(s)$,başlangıç noktası $\alpha(s)$ ve bitiş noktası $O$'dan $sp\{T(s), U(s)\}$'ye olan dikmenin ayağı olan vektör $r^*(s)$ aşağıdaki gibi yazılabilir (Özen ve Tosun, 2021a):

$$\begin{aligned} r(s) &= < -\alpha(s), T(s) > T(s) + < -\alpha(s), Y(s) > Y(s) \\ r^*(s) &= < -\alpha(s), T(s) > T(s) + < -\alpha(s), U(s) > U(s) \end{aligned} \tag{3.38}$$

(3.38) denklemlerinde birim teğet vektörün katsayı fonksiyonları her iki denklemde de aynı olduğundan

$$r(s) - r^*(s) = \ < -\alpha(s), Y(s) > Y(s) + < \alpha(s), U(s) > U(s) \tag{3.39}$$

eşitliği verilir. $r(s) - r^*(s)$ vektörünün birim normal vektörü

$$\begin{aligned} R(s) &= \frac{r(s) - r^*(s)}{\|r(s) - r^*(s)\|} \\ &= \frac{< -\alpha(s), Y(s) > Y(s) + < \alpha(s), U(s) > U(s)}{\sqrt{< \alpha(s), U(s) >^2 + < \alpha(s), Y(s) >^2}} \end{aligned} \tag{3.40}$$

şeklinde tanımlanır. $R(s)$ ve $T(s)$ vektörlerini vektörel çarpıldığında

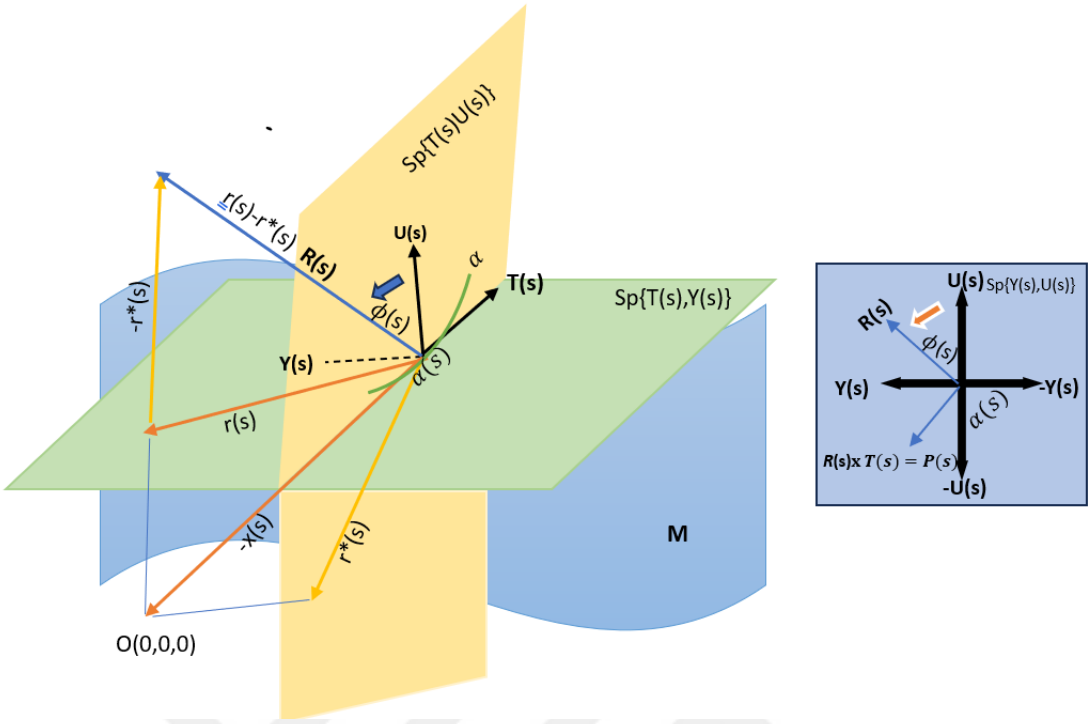
$$\begin{aligned} P(s) &= R(s) \times T(s) \\ &= \frac{< \alpha(s), U(s) > Y(s) + < \alpha(s), Y(s) > U(s)}{\sqrt{< \alpha(s), Y(s) >^2 + < \alpha(s), U(s) >^2}} \end{aligned} \tag{3.41}$$

biçiminde elde edilir. Burada $T(s)$ vektörü, iki çatı içinde ortak olduğu için $Y(s)$, $U(s)$, $P(s)$ ve $R(s)$ vektörleri aynı düzlem üzerinde yer alır. Dolayısıyla regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatı ve Darboux çatısı arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır (Özen ve Tosun, 2021a).

$$\begin{bmatrix} T(s) \\ P(s) \\ R(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi(s) & -\sin\phi(s) \\ 0 & \sin\phi(s) & \cos\phi(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ Y(s) \\ U(s) \end{bmatrix} \tag{3.42}$$

Burada $\phi(s)$, $U(s)$'den $R(s)$'ye pozitif yönlü olan $R(s)$ ve $U(s)$ vektörleri arasındaki açıdır.

$$\omega^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(v) = \{T, P, R : \ \xi \in \omega^{\varepsilon_1\varepsilon_2} \quad \xi_s = T, \ \ T \times P = R\}$$




Şekil 3.3 Regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatı(Özen ve Tosun, 2021a)

Burada $\eta \neq 0$ ve $\forall s \in [0,1]$. Öklidyen uzayda regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatı türev formülleri aşağıdaki gibi verilir (Özen ve Tosun, 2021a).

$$\begin{bmatrix} T_s(s) \\ P_s(s) \\ R_s(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_1(s) & \sigma_2(s) \\ -\sigma_1(s) & 0 & \sigma_3(s) \\ -\sigma_2(s) & -\sigma_3(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ P(s) \\ R(s) \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

Burada

$$\begin{aligned} \sigma_1(s) &= \sigma_g(s)\cos\phi(s) - \sigma_n(s)\sin\phi(s) \\ \sigma_2(s) &= \sigma_g(s)\sin\phi(s) + \sigma_s(s)\cos\phi(s) \\ \sigma_3(s) &= \tau_g(s) - \phi_s(s) \\ \tan\phi(s) &= \frac{\sigma_2(s)}{\sigma_1(s)} \end{aligned} \tag{3.44}$$

.

## 3.3. Fokal Yüzeyler

Fokal yüzeyler doğruların kongüransları olarak bilinen yüzeylerdir. $\mathbb{E}^3$ de bir $h(s,u)$ yüzeyi tanımlansın. $\mathbb{N}(s,u)$ vektörü de yüzey üzerinde birim normal vektör alanı olsun. Bununla birlikte $\zeta(s,u)$ birim vektörler kümesi olmak üzere doğru kongrüansı

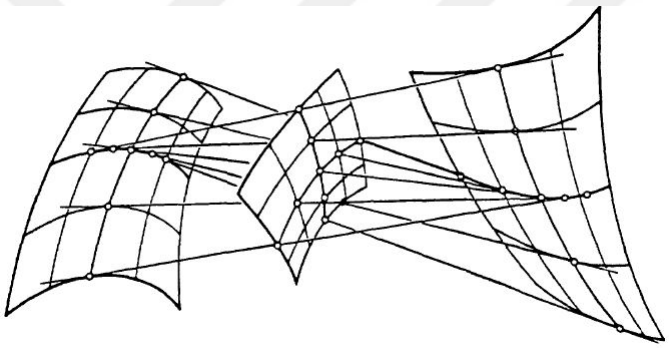
$$C(s,u,z) = h(s,u) + z\zeta(s,u) \tag{3.45}$$

ile tanımlanır. $\forall\ (s,u)$ için (3.45) denklemi kongrüansın bir doğrusunu belirtir ve üreteç olarak adlandırılır. Burada $z$ parametresi uzaklık belirtir. $C$ nin üreteç üzerinde fokal noktalar olarak adlandırılan iki reel noktası vardır. Bu noktalar üreteçli oskülatör noktalarıdır. Bu nedenle fokal yüzey fokal noktaların bir geometrik yeri olarak tanımlanır (Hagen vd., 1991; Hagen & Hahmann, 1992).

**Tanım 3.23:** $\mathbb{E}^3$ de bir $h(s,u)$ yüzeyi verilsin. $\mathbb{N}(s,u)$ vektörü de yüzeyin birim normal vektör alanı olmak üzere fokal yüzeyinin parametrik denklemi

$$\Upsilon_i(s,u) = h(s,u) + k_i^{-1}(s,u)\mathbb{N}(s,u), \qquad i = 1,2$$

biçiminde verilir. Burada $k_1$ ve $k_2$ fonksiyonları $\Upsilon(s,u)$ yüzeyinin asli eğrilik fonksiyonlarıdır. (Hagen vd., 1995).



Şekil 3.4 Yüzeyin Fokal yüzeyleri (Strucbecker,1969)

# 4. $\mathbb{E}^3$ UZAYINDA 1.TİP KONUMSAL UYARLANMIŞ ÇATIYA GÖRE GİRDAP FİLAMENT AKILARI TARAFINDAN ÜRETİLEN FOKAL YÜZEYLER

Bu bölümde 1. tip konumsal uyarlanmış çatıya göre üç sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeyler incelenecektir.

## 4.1. 1.Tip Konumsal Uyarlanmış Çatıya Göre Birinci Sınıf için Girdap Filament Akısı Tarafından Üretilen Fokal Yüzeyler

3 boyutlu Öklid uzayında hareketli uzay eğrisi $h$ ve $h = h(s,u)$ hareketli uzay eğrisinin konum vektörü olsun. Burada $s$ yay parametresi ve $u$ zamanı göstermektedir. Eğri boyunca uzanan 1. tip konumsal uyarlanmış çatı $\{T,J,Z\}$ ile gösterilsin. $T$, $h$ eğrisinin birim tanjant vektörü, $J$ yüzeyin normal vektörü ve $Z = T \times J$ birim vektördür. 1. tip konumsal uyarlanmış çatıya göre birinci sınıf için $\{T,J,Z\}$ çatısının $u$ zaman evolüsyonunun denklemleri aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{array}{rcccl} T_u & = & \Psi_1 \times T & = & yJ + wZ \\ J_u & = & \Psi_1 \times J & = & -yT + \gamma_1 Z \\ Z_u & = & \Psi_1 \times Z & = & -wT - \gamma_1 J \end{array} \tag{4.1}$$

Burada $\gamma_1, y, w$ diferensiyellebilir fonksiyonlar olmak üzere 1. tip konumsal uyarlanmış çatı vektörü, $\Psi_1 = \gamma_1 T + wJ + yZ$ olarak verilir. (3.32) ve (4.1) denklemlerinden

$$\begin{array}{rcl} T_s & = & \eta_1 J + \eta_2 Z \\ T_{su} & = & \eta_{1u} J + \eta_1 J_u + \eta_{2u} Z + \eta_2 Z_u \\ & = & \eta_{1u} J + \eta_1(-yT + \gamma_1 Z) + \eta_{2u} Z - \eta_2(wT + \gamma_1 J) \\ & = & \eta_{1u} J - \eta_1 yT + \eta_1\gamma_1 Z + \eta_{2u} Z - \eta_2 wT - \eta_2\gamma_1 J \\ & = & -(\eta_1 y + \eta_2 w)T + (\eta_{1u} - \eta_2\gamma_1)J + (\eta_1\gamma_1 + \eta_{2u})Z \end{array} \tag{4.2}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} T_u & = & yJ + wZ \\ T_{us} & = & y_s J + yJ_s + w_s Z + wZ_s \\ & = & y_s J + y(-\eta_1 T + \eta_3 Z) + w_s Z - w(\eta_2 T + \eta_3 J) \\ & = & y_s J - y\eta_1 T + y\eta_3 Z + w_s Z - w\eta_2 T - w\eta_3 J \\ & = & -(y\eta_1 + w\eta_2)T + (y_s - w\eta_3)J + (y\eta_3 + w_s)Z \end{array} \tag{4.3}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} J_s &= -\eta_1 T + \eta_3 Z \\ J_{su} &= -\eta_{1u} T - \eta_1 T_u + \eta_{3u} Z + \eta_3 Z_u \\ &= -\eta_{1u} T - \eta_1 (yJ + wZ) + \eta_{3u} Z - \eta_3 (wT + \gamma_1 J) \\ &= -\eta_{1u} T - \eta_1 yJ - \eta_1 wZ + \eta_{3u} Z - \eta_3 wT - \eta_3 \gamma_1 J \\ &= -(\eta_{1u} + \eta_3 w) T - (\eta_1 y + \eta_3 \gamma_1) J + (\eta_{3u} - \eta_1 w) Z \end{aligned} \tag{4.4}$$

ve

$$\begin{aligned} J_u &= -yT + \gamma_1 Z \\ J_{us} &= -y_s T - yT_s + \gamma_{1s} Z + \gamma_1 Z_s \\ &= -y_s T - y(\eta_1 J + \eta_2 Z) + \gamma_{1s} Z - \gamma_1 (\eta_1 T + \eta_3 J) \\ &= -y_s T - y\eta_1 J - y\eta_2 Z + \gamma_{1s} Z - \gamma_1 \eta_1 T - \gamma_1 \eta_3 J \\ &= -(y_s + \gamma_1 \eta_1) T - (y\eta_1 + \gamma_1 \eta_3) J + (\gamma_{1s} - y\eta_2) Z \end{aligned} \tag{4.5}$$

elde edilir.

$$T_{us} = T_{su}, J_{us} = J_{su} \tag{4.6}$$

kullanılarak

$$\begin{aligned} \eta_{1u} &= y_s + \eta_2 \gamma_1 - w\eta_3 \\ \eta_{2u} &= y\eta_3 - \eta_1 \gamma_1 + w_s \\ \eta_{3u} &= \eta_1 w - y\eta_2 + \gamma_{1s} \end{aligned} \tag{4.7}$$

elde edilir. Eğrinin hız vektörü

$$h_u = f_1 T + d_1 J + q_1 Z \tag{4.8}$$

olsun. (4.8) denklemi türevi alınarak

$$\begin{aligned} h_{us} &= f_{1s} T + f_1 T_s + d_{1s} J + d_1 J_s + q_{1s} Z + q_1 Z_s \\ &= (f_{1s} - d_1 y - q_1 \eta_1) T + (f_1 \eta_1 + d_{1s} - q_1 \eta_3) J + (f_1 \eta_2 + q_{1s} + d_1 \gamma_1) Z \end{aligned}$$

bulunur. Eğer denklem (2.1) de

$$h_s = T \tag{4.9}$$

alınırsa, (3.32) kullanılarak 1. tip konumsal uyarlanmış çatıya göre birinci sınıf için girdap filament akı denklemi aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} h_u &= T \times T_s \\ &= \eta_1 Z - \eta_2 J \end{aligned} \tag{4.10}$$

$h_{su} = h_{us}$ kullanılarak

$$\begin{aligned} f_{1s} &= d_1 y + q_1 \eta_1 \\ d_{1s} &= y + q_1 \eta_3 - f_1 \eta_1 \\ q_{1s} &= w - f_1 \eta_2 - d_1 \gamma_1 \end{aligned} \tag{4.11}$$

denklemleri bulunur. (4.8) ve (4.10) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} f_1 &= 0 \\ d_1 &= -\eta_2 \\ q_1 &= \eta_1 \end{aligned} \tag{4.12}$$

elde edilir. (4.12) deki eşitlikler (4.11) eşitliklerinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} y &= -(\eta_{2s} + \eta_3\eta_1) \\ w &= \eta_{1s} - \eta_2\eta_3 \end{aligned} \tag{4.13}$$

elde edilir. (4.13) türevi alındığında

$$\begin{aligned} w_s &= \eta_{1ss} - (\eta_2\eta_3)_s \\ y_s &= -(\eta_{2ss} + (\eta_3\eta_1)_s) \end{aligned} \tag{4.14}$$

bulunur. (4.13) ve (4.14) denklemleri (4.7) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \eta_{1u} &= \eta_2\gamma_1 - \eta_{2ss} - (\eta_3\eta_1)_s - \eta_3(\eta_{1s} - \eta_2\eta_3) \\ \eta_{2u} &= \eta_{1ss} - \eta_3(\eta_{2s} + \eta_3\eta_1) - \eta_1\gamma_1 - (\eta_2\eta_3)_s \\ \eta_{3u} &= \gamma_{1s} + \eta_1\eta_{1s} + \eta_2\eta_{2s} \end{aligned}$$

elde edilir. (4.13) ve (4.14) denklemleri (4.1) de yerine yazılırsa $\{T, J, Z\}$ çatısının $u$ zaman evolüsyonu aşıdaki gibi çıkarılır:

$$\begin{aligned} T_u &= -(\eta_{2s} + \eta_3\eta_1)J + (\eta_{1s} - \eta_2\eta_3)Z \\ J_u &= (\eta_{2s} + \eta_3\eta_1)T + \gamma_1 Z \\ Z_u &= (\eta_2\eta_3 - \eta_{1s})T - \gamma_1 J \end{aligned}$$

1. tip konumsal uyarlanmış çatıya göre birinci sınıf için girdap filament yüzeyinin birinci temel formun katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} E = \ \langle h_s, h_s\rangle \ &= \langle T, T\rangle = 1 \\ F = \ \langle h_s, h_u\rangle \ &= \langle T, \eta_1 Z - \eta_2 J\rangle = 0 \\ G = \ \langle h_u, h_u\rangle \ &= \langle \eta_1 Z - \eta_2 J, \eta_1 Z - \eta_2 J\rangle = \eta_1^2 + \eta_2^2 \end{aligned} \tag{4.15}$$

(3.16) ve (4.15) kullanılarak 1.tip konumsal uyarlanmış çatıya göre birinci sınıf girdap filament akı yüzeyinin birinci temel formu

$$I = ds^2 + (\eta_1^2 + \eta_2^2)du^2 \tag{4.16}$$

şeklinde bulunur. 1. tip konumsal uyarlanmış çatıya göre birinci sınıf için girdap filament yüzeyinin birim normali

$$\mathbb{N}_1 = \frac{h_s \times h_u}{\parallel h_s \times h_u \parallel} = \frac{T \times (\eta_1 Z - \eta_2 J)}{\parallel T \times (\eta_1 Z - \eta_2 J) \parallel} = -\frac{(\eta_1 J + \eta_2 Z)}{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}} \tag{4.17}$$

bulunur. 1. tip konumsal uyarlanmış çatıya göre birinci sınıf için girdap filament akı yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} h_{ss} &= \eta_1 J + \eta_2 Z \\ h_{su} &= -(\eta_{2s} + \eta_3\eta_1)J + (\eta_{1s} - \eta_2\eta_3)Z \\ h_{uu} &= -(\eta_1\eta_{1s} + \eta_2\eta_{2s})T - (\eta_{2u} + \eta_1\gamma_1)J + (\eta_{1u} - \eta_2\gamma_1)Z \end{aligned} \tag{4.18}$$

(4.17) ve (4.18) denklemlerinden

$$\begin{aligned} l &= < h_{ss}, \mathbb{N}_1 > \\ &= -< \eta_1 J + \eta_2 Z, \tfrac{(\eta_1 J + \eta_2 Z)}{\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}} > \\ &= -\tfrac{(\eta_1^2+\eta_2^2)}{\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}} \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned} m &= < h_{su}, \mathbb{N}_1 > \\ &= < -(\eta_{2s} + \eta_3\eta_1)J + (\eta_{1s} - \eta_2\eta_3)Z, -\tfrac{(\eta_1 J + \eta_2 Z)}{\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}} > \\ &= \tfrac{(\eta_3(\eta_1^2+\eta_2^2)+\eta_1\eta_{2s}-\eta_{1s}\eta_2)}{\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}} \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned} n &= < h_{uu}, \mathbb{N}_1 > \\ &= < -(\eta_1\eta_{1s} + \eta_2\eta_{2s})T - (\eta_{2u} + \eta_1\gamma_1)J + (\eta_{1u} - \eta_2\gamma_1)Z, -\tfrac{(\eta_1 J + \eta_2 Z)}{\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}} > \\ &= \tfrac{(\gamma_1(\eta_1^2+\eta_2^2)+\eta_1\eta_{2u}-\eta_2\eta_{1u})}{\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}} \end{aligned} \tag{4.21}$$

ikinci temel formun katsayıları elde edilir. (3.17), (4.19), (4.20) ve (4.21) ve denklemlerinden 1. tip konumsal uyarlanmış çatıya göre birinci sınıf girdap filament akı yüzeyinin ikinci temel formu

$$\begin{aligned} II = \tfrac{1}{\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}}((\eta_1^2+\eta_2^2)ds^2 + 2(\eta_3((\eta_1^2+\eta_2^2) + \eta_1\eta_{2s} + \eta_{1s}\eta_2)dsdu \\ +\gamma_1(\eta_1^2+\eta_2^2 - \eta_1\eta_{2u} - \eta_{1u}\eta_2))du^2 \end{aligned}$$

elde edilir. (3.28), (4.19), (4.20), (4.21) denklemleri kullanılarak 1.tip konumsal uyarlanmış çatıya göre birinci sınıf girdap filament akı yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$\begin{aligned} K &= \tfrac{ln-m^2}{EG-F^2} \\ &= \tfrac{-(\eta_1^2+\eta_2^2)(\gamma_1(\eta_1^2+\eta_2^2)+\eta_1\eta_{2u}-\eta_2\eta_{1u})+(\eta_1\eta_{2s}+\eta_3(\eta_1^2+\eta_2^2)+\eta_{1s}\eta_2)^2}{(\eta_1^2+\eta_2^2)^2} \end{aligned} \tag{4.22}$$

ve

$$\begin{aligned} H &= \tfrac{En+Gl-2Fm}{2(EG-F^2)} \\ &= \tfrac{(\gamma_1(\eta_1^2+\eta_2^2)-\eta_1\eta_{2u}-\eta_2\eta_{1u})+(\eta_1^2+\eta_2^2)^2}{2(\eta_1^2+\eta_2^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \tag{4.23}$$

biçiminde elde edilir. (4.22), (4.23) denklemleri kullanılarak 1. tip konumsal uyarlanmış çatıya göre birinci sınıf için girdap filament yüzeyinin asli eğrilikleri

$$\begin{aligned} k_1 &= H + \sqrt{H^2 - K} \\ &= \frac{(\gamma_1(\eta_1^2+\eta_2^2) - \eta_1\eta_{2u} - \eta_2\eta_{1u}) + (\eta_1^2+\eta_2^2)^2}{2(\eta_1^2+\eta_2^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad + \sqrt{\left(\tfrac{(\gamma_1(\eta_1^2+\eta_2^2)-\eta_1\eta_{2u}-\eta_2\eta_{1u})+(\eta_1^2+\eta_2^2)^2}{2(\eta_1^2+\eta_2^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2 + \tfrac{(\eta_1^2+\eta_2^2)(\gamma_1(\eta_1^2+\eta_2^2)+\eta_1\eta_{2u}-\eta_2\eta_{1u})-(\eta_1\eta_{2s}+\eta_3(\eta_1^2+\eta_2^2)+\eta_{1s}\eta_2)^2}{(\eta_1^2+\eta_2^2)^2}} \end{aligned} \tag{4.24}$$

ve

$$\begin{aligned} k_2 &= H - \sqrt{H^2 - K} \\ &= \frac{(\gamma_1(\eta_1^2+\eta_2^2) - \eta_1\eta_{2u} - \eta_2\eta_{1u}) + (\eta_1^2+\eta_2^2)^2}{2(\eta_1^2+\eta_2^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad - \sqrt{\begin{array}{c} \left(\frac{(\gamma_1(\eta_1^2+\eta_2^2)-\eta_1\eta_{2u}-\eta_2\eta_{1u})+(\eta_1^2+\eta_2^2)^2}{2(\eta_1^2+\eta_2^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2 \\ + \frac{(\eta_1^2+\eta_2^2)(\gamma_1(\eta_1^2+\eta_2^2)+\eta_1\eta_{2u}-\eta_2\eta_{1u})-(\eta_1\eta_{2s}+\eta_3(\eta_1^2+\eta_2^2)+\eta_{1s}\eta_2)^2}{(\eta_1^2+\eta_2^2)^2} \end{array}} \end{aligned} \tag{4.25}$$

elde edilir.

1.tip konumsal uyarlanmış çatıya göre birinci sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeyleri

$$\Upsilon_1(s,u) = h(s,u) + k_i^{-1}(s,u)\mathbb{N}_1(s,u), \quad i = 1,2 \tag{4.26}$$

biçiminde tanımlansın. $k_i$ (4.24) ve (4.25) denklemlerinde bulunan asli eğrilikler ve

$$\mathbb{N}_1 = -\frac{\eta_1 J + \eta_2 Z}{c}, c = \sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}$$

olarak alınır. (4.26) denkleminin $s$ yay paremetresi ve $u$ zamana bağlı türevini alırsak

$$\begin{aligned} \Upsilon_{1s}(s,u) &= \frac{\eta_1^2+\eta_2^2}{k_i c}T \\ &\quad + \frac{\eta_1 k_i^2 c^2 + (\eta_{1s}+\eta_2\eta_3)k_i c + \eta_1(k_i c_s - k_{is}c)}{k_i^2 c^2} J \\ &\quad + \frac{\eta_3 k_i^2 c^2 - (\eta_{2s}+\eta_1\eta_3)k_i c + \eta_2(k_i c_s - k_{is}c)}{k_i^2 c^2} Z \end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{1u}(s,u) &= \frac{\eta_{2s}\eta_1 - (\eta_1^2+\eta_2^2)\eta_3 - \eta_{1s}\eta_2}{k_i c}T \\ &\quad + \frac{(\gamma_1\eta_2 - \eta_{2u})k_i c + (\eta_1\eta_3 - \eta_{2s})k_i^2 c^2 + \eta_1(k_i c_u - k_{iu}c)}{k_i^2 c^2} J \\ &\quad + \frac{(\eta_{1s} - \eta_2\eta_3)k_i^2 c^2 - (\eta_{3u}+\gamma_1\eta_1)k_i c + \eta_2(k_i c_u - k_{iu}c)}{k_i^2 c^2} Z \end{aligned} \tag{4.28}$$

biçiminde elde edilir. 1. tip konumsal uyarlanmış çatıya göre birinci sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeylerinin birim normali

$$\tilde{\mathbb{N}}_1 = \frac{\lambda_1 T + \lambda_2 J + \lambda_3 Z}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}}, \sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2} \neq 0 \tag{4.29}$$

biçiminde bulunur. Burada

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mathring{b}_1\mathring{f}_1 - \mathring{c}_1\mathring{e}_1 \\ \lambda_2 &= \mathring{c}_1\mathring{d}_1 - \mathring{a}_1\mathring{f}_1 \\ \lambda_3 &= \mathring{a}_1\mathring{e}_1 - \mathring{b}_1\mathring{d}_1 \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{rcl}
\mathring{a}_1 & = & \frac{\eta_1^2+\eta_2^2}{k_i c} \\
\mathring{b}_1 & = & \frac{\eta_1 k_i^2 c^2+(\eta_{1s}+\eta_2\eta_3)k_i c+\eta_1(-k_i c_s+k_{is}c)}{k_i^2 c^2} \\
\mathring{c}_1 & = & \frac{\eta_3 k_i^2 c^2-(\eta_{2s}+\eta_1\eta_3)k_i c+\eta_2(k_i c_s-k_{is}c_2)}{k_i^2 c^2} \\
\mathring{d}_1 & = & \frac{\eta_{2s}\eta_1-(\eta_1^2+\eta_2^2)\eta_3-\eta_{1s}\eta_2}{k_i c} \\
\mathring{e}_1 & = & \frac{-(\eta_{2s}+\eta_1\eta_3)k_i^2 c^2+(\gamma_1\eta_2-\eta_{2u})k_i c+\eta_1(k_i c_u+k_{iu}c)}{k_i^2 c^2} \\
\mathring{f}_1 & = & \frac{(\eta_{1s}-\eta_2\eta_3)k_i^2 c^2-(\eta_{3u}+\gamma_1\eta_1)k_i c+\eta_2(k_i c_u-k_{iu}c)}{k_i^2 c^2}
\end{array}
$$

şeklinde verilmiştir. 1. tip konumsal uyarlanmış çatıya göre birinci sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeylerinin birinci temel formunun katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$
\begin{array}{rcl}
\tilde{E} & = & \langle \Upsilon_s(s,u), \Upsilon_s(s,u)\rangle \quad = \quad \mathring{a}_1^2+\mathring{b}_1^2+\mathring{c}_1^2 \\
\tilde{F} & = & \langle \Upsilon_s(s,u), \Upsilon_u(s,u)\rangle \quad = \quad \mathring{a}_1\mathring{d}_1+\mathring{b}_1\mathring{e}_1+\mathring{c}_1\mathring{f}_1 \\
\tilde{G} & = & \langle \Upsilon_u(s,u), \Upsilon_u(s,u)\rangle \quad = \quad \mathring{e}_1^2+\mathring{d}_1^2+\mathring{f}_1^2
\end{array}
\tag{4.30}
$$

1. tip konumsal uyarlanmış çatıya göre birinci sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeylerinin ikinci temel formunun katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$
\begin{array}{rcl}
\Upsilon_{1ss}(s,u) & = & \mathring{a}_{1s}T+\mathring{a}_1 T_s+\mathring{b}_{1s}J+\mathring{b}_1 J_s+\mathring{c}_{1s}Z+\mathring{c}_1 Z_s \\
& = & (\mathring{a}_{1s}-\mathring{b}_1\eta_1-\mathring{c}_1\eta_2)T+(\mathring{a}_1\eta_1+\mathring{b}_{1s}-\mathring{c}_1\eta_3)J \\
& & +(\mathring{a}_1\eta_2+\mathring{b}_1\eta_3+\mathring{c}_{1s})Z
\end{array}
\tag{4.31}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\Upsilon_{1uu}(s,u) & = & \mathring{d}_{1u}T+\mathring{d}_1 T_u+\mathring{e}_{1u}J+\mathring{e}_1 J_u+\mathring{f}_{1u}Z+\mathring{f}_1 Z_u \\
& = & (\mathring{d}_{1u}+\mathring{e}_1(\eta_{2s}+\eta_3\eta_1)+\mathring{f}_1(-\eta_{1s}+\eta_2\eta_3))T \\
& & +(\mathring{e}_{1u}-\mathring{d}_1(\eta_{2s}+\eta_3\eta_1)-\mathring{f}_1\gamma_1)J \\
& & +((\eta_{1s}-\eta_2\eta_3)\eta_2+\mathring{e}_1\gamma_1+\mathring{f}_{1u})Z
\end{array}
\tag{4.32}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\Upsilon_{1su}(s,u) & = & \mathring{a}_{1u}T+\mathring{a}_1 T_u+\mathring{b}_{1u}J+\mathring{b}_1 J_u+\mathring{c}_{1u}Z+\mathring{c}_1 Z_u \\
& = & (\mathring{a}_{1u}+\mathring{b}_1(\eta_{2s}+\eta_3\eta_1)+\mathring{c}_1(-\eta_{1s}+\eta_2\eta_3))T \\
& & +(\mathring{a}_{1u}+\mathring{b}_1(\eta_{2s}+\eta_3\eta_1)+\mathring{c}_1(-\eta_{1s}+\eta_2\eta_3))J \\
& & +(\mathring{a}_1(\eta_{1s}-\eta_2\eta_3)+\mathring{b}_1\gamma_1+\mathring{c}_u)Z
\end{array}
\tag{4.33}
$$

(4.29), (4.31), (4.32) ve (4.33) denklemleri kullanılarak, ikinci temel formunun katsayıları aşağıdaki gibi verilir:

$$
\begin{array}{rcl}
\tilde{l} & = & <\Upsilon_{ss}(s,u), \tilde{\mathbb{N}}_1> \\
& = & \frac{\mu_1\lambda_1+\mu_2\lambda_2+\mu_3\lambda_3}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}}
\end{array}
\tag{4.34}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\tilde{m} & = & <\Upsilon_{su}(s,u), \tilde{\mathbb{N}}_1> \\
& = & \frac{\varpi_1\lambda_1+\varpi_2\lambda_2+\varpi_3\lambda_3}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}}
\end{array}
\tag{4.35}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\tilde{n} & = & <\Upsilon_{uu}(s,u), \tilde{\mathbb{N}}_1> \\
& = & \frac{\varrho_3\lambda_1+\varrho_3\lambda_2+\varrho_3\lambda_3}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}}
\end{array}
\tag{4.36}
$$

Burada

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \mathring{a}_{1s} - \mathring{b}_1\eta_1 - \mathring{c}_1\eta_2 \\
\mu_2 &= \mathring{a}_1\eta_1 + \mathring{b}_{1s} - \mathring{c}_1\eta_3 \\
\mu_3 &= \mathring{a}_1\eta_2 + \mathring{b}_1\eta_3 + \mathring{c}_{1s} \\
\varpi_1 &= \mathring{a}_{1u} + \mathring{b}_1(\eta_{2s} + \eta_3\eta_1) + \mathring{c}_1(\eta_2\eta_3 - \eta_{1s}) \\
\varpi_2 &= (\mathring{a}_{1u} + \mathring{b}_1(\eta_{2s} + \eta_3\eta_1) + \mathring{c}_1(\eta_2\eta_3 - \eta_{1s}) \\
\varpi_3 &= \mathring{a}_1(\eta_{1s} - \eta_2\eta_3) + \mathring{b}_1\gamma_1 + \mathring{c}_u \\
\varrho_1 &= \mathring{d}_{1u} + \mathring{e}_1(\eta_{2s} + \eta_3\eta_1) + \mathring{f}_1(\eta_2\eta_3 - \eta_{1s}) \\
\varrho_2 &= \mathring{e}_{1u} - \mathring{d}_1(\eta_{2s} + \eta_3\eta_1) - \mathring{f}_1\gamma_1 \\
\varrho_3 &= (\eta_{1s} - \eta_2\eta_3)\eta_2 + \mathring{e}_1\gamma_1 + \mathring{f}_{1u}
\end{aligned} \tag{4.37}$$

.şeklinde verilir. (4.30), (4.34), (4.35), (4.36), (4.37) denklemleri kullanılarak 1.tip konumsal uyarlanmış çatıya göre birinci sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeylerinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
\tilde{K} &= \frac{\tilde{l}\tilde{n}-\tilde{m}^2}{\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2} \\
&= \frac{(\mu_1\lambda_1+\mu_2\lambda_2+\mu_3\lambda_3)(\varrho_3\lambda_1+\varrho_3\lambda_2+\varrho_3\lambda_3)-(\varpi_1\lambda_1+\varpi_2\lambda_2+\varpi_3\lambda_3)^2}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}((a_1^2+b_1^2+\mathring{c}_1^2)(a_1\mathring{d}_1+b_1e_1+\mathring{c}_1f_1)-(e^2+d^2+f^2)^2)}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\tilde{H} &= \frac{\tilde{E}\tilde{n}+\tilde{G}\tilde{l}-2\tilde{F}\tilde{m}}{2(\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2)} \\
&= \frac{\begin{array}{r}(\mathring{a}_1^2+\mathring{b}_1^2+\mathring{c}_1^2)(\varrho_3\lambda_1+\varrho_3\lambda_2+\varrho_3\lambda_3)+(\mathring{a}_1\mathring{d}_1+\mathring{b}_1\mathring{e}_1+\mathring{c}_1\mathring{f}_1)(\mu_1\lambda_1+\mu_2\lambda_2+\mu_3\lambda_3) \\ -2(\mathring{e}_1^2+\mathring{d}_1^2+\mathring{f}_1^2)(\varpi_1\lambda_1+\varpi_2\lambda_2+\varpi_3\lambda_3)\end{array}}{2\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}((\mathring{a}_1^2+\mathring{b}_1^2+\mathring{c}_1^2)(\mathring{a}_1\mathring{d}_1+\mathring{b}_1\mathring{e}_1+\mathring{c}_1\mathring{f}_1)-(\mathring{e}_1^2+\mathring{d}_1^2+\mathring{f}_1^2)^2)}
\end{aligned}$$

## 4.2. 1.Tip Konumsal Uyarlanmış Çatıya Göre İkinci Sınıf için Girdap Filament Akısı Tarafından Üretilen Fokal Yüzeyler

3 boyutlu Öklid uzayında hareketli uzay eğrisi $h$ ve $h = h(s,u)$ hareketli uzay eğrisinin konum vektörü olsun. 1. tip konumsal uyarlanmış çatıya göre ikinci sınıf için $u$ zaman evolüsyonunun denklemleri aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned}
T_u &= \Psi_2 \times T &&= -jJ + \gamma_2 Z \\
J_u &= \Psi_2 \times J &&= jT + w_2 Z \\
Z_u &= \Psi_2 \times Z &&= -\gamma_2 T - w_2 J
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Burada $j, w_2, \gamma_2$ difensiyellebilir fonksiyonlar olmak üzere 1. tip konumsal uyarlanmış çatı vektörü, $\Psi_2 = w_2 T - \gamma_2 J + yZ$ olarak verilir. (3.32) ve (4.38) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
T_s &= \eta_1 J + \eta_2 Z \\
T_{su} &= \eta_{1u} J + \eta_1 J_u + \eta_{2u} Z + \eta_2 Z_u \\
&= \eta_{1u} J + \eta_1(\gamma_2 Z - jJ) + \eta_{2u} Z - \eta_2(\gamma_2 T + w_2 J) \\
&= -(\eta_1 y + \eta_2\gamma_2)T + (\eta_{1u} - \eta_2 w_2)J + (\eta_1 w_2 + \eta_{2u})Z
\end{aligned} \tag{4.39}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} T_u &= \gamma_2 Z - jJ \\ T_{us} &= -j_s J - jJ_s + \gamma_{2s} Z + \gamma_2 Z_s \\ &= -j_s J + y(\eta_3 Z - \eta_1 T) + \gamma_{2s} Z - \gamma_2(\eta_2 T + \eta_3 J) \\ &= -(j\eta_1 + \gamma_2\eta_2)T + (j_s - \gamma_2\eta_3)J + (\gamma_{2s} - j\eta_3)Z \end{aligned} \tag{4.40}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} J_s &= \eta_3 Z - \eta_1 T \\ J_{su} &= -\eta_{1u} T - \eta_1 T_u + \eta_{3u} Z + \eta_3 Z_u \\ &= -\eta_{1u} T - \eta_1(\gamma_2 Z - jJ) + \eta_{3u} Z - \eta_3(\gamma_2 T + wJ) \\ &= -(\eta_{1u} + \eta_3\gamma_2)T + (\eta_1 j - \eta_3 w)J + (\eta_{3u} - \eta_1\gamma_2)Z \end{aligned} \tag{4.41}$$

ve

$$\begin{aligned} J_u &= jT + w_2 Z \\ J_{us} &= j_s T + jT_s + w_{2s} Z + w_2 Z_s \\ &= j_s T + j(\eta_1 J + \eta_2 Z) + w_{2s} Z - w(\eta_1 T + \eta_3 J) \\ &= (j_s - w_2\eta_2)T + (j\eta_1 - w_2\eta_3)J + (j\eta_2 + w_{2s})Z \end{aligned} \tag{4.42}$$

elde edilir.

$$T_{us} = T_{su}, J_{us} = J_{su} \tag{4.43}$$

eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \eta_{1u} &= \eta_2 w_2 - j_s - \gamma_2\eta_3 \\ \eta_{2u} &= y\eta_3 - \eta_1\gamma_1 + w_{2s} \\ \eta_{3u} &= \eta_1 w_2 - y\eta_2 + \gamma_{1s} \end{aligned} \tag{4.44}$$

elde edilir. Eğrinin hız vektörü

$$h_u = f_2 T + d_2 J + q_2 Z \tag{4.45}$$

olsun. (4.45) türevi alınarak (3.32) yardımıyla

$$\begin{aligned} h_{us} &= f_{2s} T + f_2 T_s + d_{2s} J + d_2 J_s + q_{2s} Z + q_2 Z_s \\ &= (f_{2s} - d_2 y - q_2\eta_1)T + (f_2\eta_1 + d_{2s} - q_2\eta_3)J + (f_2\eta_2 + q_{2s} + d_2\gamma_2)Z \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer denklem (2.1) de

$$X = h_s = J \tag{4.46}$$

alınırsa (3.32) yardımıyla 1. tip konumsal uyarlanmış çatıya göre ikinci sınıf girdap filament akı denklemleri aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} h_u &= J \times J_s \\ &= \eta_3 T + \eta_1 Z \end{aligned} \tag{4.47}$$

$h_{su} = h_{us}$ olduğundan

$$\begin{aligned} f_{2s} &= d_{2s}y - q_2\eta_1 \\ d_{2s} &= j + q_2\eta_3 - f_2\eta_1 \\ q_{2s} &= w_2 - f_2\eta_2 - d_2\gamma_2 \end{aligned} \tag{4.48}$$

denklemleri bulunur. (4.45) ve (4.47) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} f_2 &= \eta_3 \\ d_2 &= 0 \\ q_2 &= \eta_1 \end{aligned} \tag{4.49}$$

elde edilir. (4.49) deki eşitlikler (4.48) eşitliklerinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} j &= \eta_{3s} - \eta_2\eta_1 \\ w_2 &= \eta_{1s} + \eta_2\eta_3 \end{aligned} \tag{4.50}$$

elde edilir. (4.50) denkleminin türevi alındığında

$$\begin{aligned} j_s &= \eta_{3ss} - (\eta_2\eta_1)_s \\ w_{2s} &= \eta_{1ss} + (\eta_2\eta_3)_s \end{aligned} \tag{4.51}$$

bulunur. (4.50) ve (4.51) denklemlerinde bulunan eşitlikler (4.44) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \eta_{1u} &= \eta_3\gamma_2 + \eta_3\eta_{1s}\eta_2) - (\eta_{3ss} + (\eta_2\eta_1)_s \\ \eta_{2u} &= \gamma_{2s} - \eta_3(\eta_{3s} - \eta_1\eta_2) + \eta_1(\eta_2\eta_3 - \eta_{1s}) \\ \eta_{3u} &= \eta_2\left(\eta_{3s} - \eta_2\eta_1\right) + \eta_1\gamma_2 + \eta_{1ss} + (\eta_2\eta_2)_s \end{aligned}$$

elde edilir. (4.50) ve (4.51) denklemleri (4.38) de yerine yazılırsa $\{T, J, Z\}$çatısının $u$ zaman evolüsyonu aşıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} T_u &= (\eta_{3s} + \eta_2\eta_1)J + \gamma_2 Z \\ J_u &= (\eta_{3s} - \eta_2\eta_1)T + (\eta_{1s} + \eta_2\eta_3)Z \\ Z_u &= -\gamma_2 T - (\eta_{1s} + \eta_2\eta_3)J \end{aligned} \tag{4.52}$$

1 tip konumsal uyarlanmış çatıya göre ikinci sınıf için girdap filament akı yüzeyinin birinci temel formun katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} E &= \langle h_s, h_s\rangle = \langle J, J\rangle = 1 \\ F &= \langle h_s, h_u\rangle = \langle J, \eta_3 T + \eta_1 Z\rangle = 0 \\ G &= \langle h_u, h_u\rangle = \langle \eta_3 T + \eta_1 Z, \eta_3 T + \eta_1 Z\rangle = \eta_1^2 + \eta_3^2 \end{aligned} \tag{4.53}$$

(4.53) ve (3.16) kullanılarak,1.tip konumsal uyarlanmış çatıya göre ikinci sınıf girdap filament yüzeyinin birinci temel formu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$I = ds^2 + (\eta_1^2 + \eta_3^2)du^2$$

1 tip konumsal uyarlanmış çatıya ikinci sınıf için girdap filament akı yüzeyinin birim normali

$$\mathbb{N}_2 = \frac{h_s \times h_u}{\| h_s \times h_u \|} = \frac{J \times (\eta_3 T + \eta_1 Z)}{\| J \times (\eta_3 T + \eta_1 Z) \|} = \frac{\eta_1 T - \eta_3 Z}{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_3^2}} \tag{4.54}$$

bulunur. 1. tip konumsal uyarlanmış çatıya göre ikinci sınıf için girdap filament akı yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} h_{ss} &= \eta_3 Z - \eta_1 T \\ h_{su} &= (\eta_{3s} - \eta_1\eta_2)T + (\eta_{1s} + \eta_2\eta_3)Z \\ h_{uu} &= (\eta_{3u} - \eta_1\gamma_2)\,T + (\eta_3\eta_{3s} - \eta_1\eta_{1s})J + (\eta_3\gamma_2 + \eta_{1u})Z \end{aligned} \tag{4.55}$$

(4.54) ve (4.55) denklemleri kullanılarak ikinci temel formun katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} l &= < h_{ss}, \mathbb{N}_2 > \\ &= < \eta_3 Z - \eta_1 T, \frac{\eta_1 T - \eta_3 Z}{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_3^2}} > \\ &= -\frac{(\eta_1^2 + \eta_3^2)}{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_3^2}} \end{aligned} \tag{4.56}$$

$$\begin{aligned} m &= < h_{su}, \mathbb{N}_2 > \\ &= < (\eta_{3s} - \eta_1\eta_2)T + (\eta_{1s} + \eta_2\eta_3)Z, \frac{\eta_1 T - \eta_3 Z}{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_3^2}} > \\ &= -\frac{(\eta_2(\eta_1^2 + \eta_3^2) - \eta_1\eta_{3s} + \eta_{1s}\eta_3)}{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_3^2}} \end{aligned} \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned} n &= < h_{uu}, \mathbb{N}_2 > \\ &= < (\eta_{3u} - \eta_1\gamma_2)\,T + (\eta_3\eta_{3s} - \eta_1\eta_{1s})J + (\eta_3\gamma_2 + \eta_{1u})Z, \tfrac{\eta_1 T - \eta_3 Z}{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_3^2}} > \\ &= -\tfrac{(-\gamma_2(\eta_1^2 + \eta_3^2) + \eta_1\eta_{3u} - \eta_{1u}\eta_3)}{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_3^2}} \end{aligned} \tag{4.58}$$

(3.17), (4.56), (4.56) ve (4.58) denklemleri kullanılarak 1.tip konumsal uyarlanmış çatıya göre ikinci sınıf girdap filament yüzeyinin ikinci temel formu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} II = \tfrac{1}{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_3^2}}((\eta_1^2 + \eta_3^2)ds^2 + 2(\eta_1(\eta_{3s} - \eta_1\eta_2) - \eta_3(\eta_{1s} + \eta_2\eta_3))dsdu \\ -(\gamma_2(\eta_1^2 + \eta_3^2) + \eta_1\eta_{3u} + \eta_{1u}\eta_3)) \end{aligned} \tag{4.59}$$

(4.53), (4.56), (4.57), (4.58) denklemleri kullanılarak, 1.tip konumsal uyarlanmış çatıya göre ikinci sınıf girdap filament yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$\begin{aligned} K &= \tfrac{ln - m^2}{EG - F^2} \\ &= \tfrac{(\eta_1^2 + \eta_2^2)(\gamma_2(\eta_1^2 + \eta_3^2) - \eta_1\eta_{3u} + \eta_{1u}\eta_3) - ((\eta_2(\eta_1^2 + \eta_3^2) - \eta_1\eta_{3s} + \eta_{1s}\eta_3))^2}{(\eta_1^2 + \eta_3^2)^2} \end{aligned} \tag{4.60}$$

ve

$$\begin{aligned} H &= \tfrac{En + Gl - 2Fm}{2(EG - F^2)} \\ &= \tfrac{(\eta_1\eta_{3u} - \gamma_2(\eta_1^2 + \eta_3^2) - \eta_{1u}\eta_3) + (\eta_1^2 + \eta_3^2)^2}{2(\eta_1^2 + \eta_3^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \tag{4.61}$$

biçiminde elde edilir. (4.60), (4.61) denklemleri kullanılarak , 1.tip konumsal uyarlanmış çatıya göre ikinci sınıf için girdap filament yüzeyinin asli eğrilikleri

$$\begin{aligned} k_1 &= H+\sqrt{H^2-K} \\ &= \frac{(\eta_1\eta_{3u}-\gamma_2(\eta_1^2+\eta_3^2)-\eta_{1u}\eta_3)+(\eta_1^2+\eta_3^2)^2}{2(\eta_1^2+\eta_3^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &+\sqrt{\begin{array}{c}\left(\frac{(\eta_1\eta_{3u}-\gamma_2(\eta_1^2+\eta_3^2)-\eta_{1u}\eta_3)+(\eta_1^2+\eta_3^2)^2}{2(\eta_1^2+\eta_3^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2 \\ -\frac{(\eta_1^2+\eta_2^2)(-\gamma_2(\eta_1^2+\eta_3^2)+\eta_1\eta_{3u}-\eta_{1u}\eta_3)-(\eta_2(\eta_1^2+\eta_3^2)-\eta_1\eta_{3s}+\eta_{1s}\eta_3)^2}{(\eta_1^2+\eta_3^2)^2}\end{array}} \end{aligned} \tag{4.62}$$

ve

$$\begin{aligned} k_2 &= H-\sqrt{H^2-K} \\ &= \frac{(\eta_1\eta_{3u}-\gamma_2(\eta_1^2+\eta_3^2)-\eta_{1u}\eta_3)+(\eta_1^2+\eta_3^2)^2}{2(\eta_1^2+\eta_3^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &-\sqrt{\begin{array}{c}\left(\frac{(\eta_1\eta_{3u}-\gamma_2(\eta_1^2+\eta_3^2)-\eta_{1u}\eta_3)+(\eta_1^2+\eta_3^2)^2}{2(\eta_1^2+\eta_3^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2 \\ -\frac{(\eta_1^2+\eta_2^2)(-\gamma_2(\eta_1^2+\eta_3^2)+\eta_1\eta_{3u}-\eta_{1u}\eta_3)-((\eta_2(\eta_1^2+\eta_3^2)-\eta_1\eta_{3s}+\eta_{1s}\eta_3))^2}{(\eta_1^2+\eta_3^2)^2}\end{array}} \end{aligned} \tag{4.63}$$

elde edilmiş olur.

1.tip konumsal uyarlanmış çatıya göre ikinci sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeyleri

$$\Upsilon_2(s,u) = h(s,u)+k_i^{-1}(s,u)\mathbb{N}_2(s,u), \quad i=1,2 \tag{4.64}$$

şeklinde tanımlansın. $k_i$ (4.62) ve (4.63) denklemlerinde bulunan asli eğrilikler ve

$$\mathbb{N}_2=\frac{\eta_1 T-\eta_3 Z}{c_2}, c_2=\sqrt{\eta_1^2+\eta_3^2}$$

olarak alınır. (4.64) eşitliğinin $s$ yay paramentresi ve $u$ zaman bağlı türevi alındığında

$$\begin{aligned} \Upsilon_{2s}(s,u) &= \frac{\eta_1 k_i^2c_2^2+(\eta_{1s}+\eta_2\eta_3)k_ic_2-\eta_1(k_{is}c_2-k_ic_{2s})}{k_i^2c_2^2}T \\ &+\frac{\eta_1^2+\eta_3^2}{k_ic_2}J \\ &+\frac{\eta_3k_i^2c_2^2+(\eta_{3s}+\eta_1\eta_2)k_ic_2+\eta_3(k_{is}c_2-k_ic_{2s})}{k_i^2c_2^2}Z \end{aligned} \tag{4.65}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{2u}(s,u) &= \frac{(\eta_{3s}-\eta_1\eta_2)k_i^2c_2^2+(\eta_{1u}+\gamma_2\eta_3)k_ic_2+\eta_1(k_ic_{2u}-k_{iu}c_2)}{k_i^2c_2^2}T \\ &+\frac{(\eta_1^2+\eta_3^2)\eta_{2s}+\eta_{3s}\eta_1+\eta_3\eta_{1s}}{k_ic_2}J \\ &+\frac{(\eta_{1s}-\eta_2\eta_3)k_i^2c_2^2+(\gamma_2\eta_1-\eta_{3u})k_ic_2-\eta_3(k_{iu}c_2-k_ic_{2u})}{k_i^2c_2^2}Z \end{aligned} \tag{4.66}$$

biçimnde elde edilir. 1. tip konumsal uyarlanmış çatıya göre ikinci sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeylerinin birim normali

$$\tilde{\mathbb{N}}_2 = \frac{\lambda_4T+\lambda_5J+\lambda_6Z}{\sqrt{\lambda_4^2+\lambda_5^2+\lambda_6^2}}, \sqrt{\lambda_4^2+\lambda_5^2+\lambda_6^2}\neq 0 \tag{4.67}$$

şeklinde bulunur. Burada

$$\lambda_4 = \mathring{b}_2\mathring{f}_2-\mathring{c}_2\mathring{e}_2$$

$$\lambda_5 = \mathring{c}_2\mathring{d}_2 - \mathring{a}_2\mathring{f}_2$$

$$\lambda_6 = \mathring{a}_2\mathring{e}_2 - \mathring{b}_2\mathring{d}_2$$

$$\begin{aligned}
\mathring{a}_2 &= \tfrac{\eta_1 k_i^2 c_2^2 + (\eta_{1s}+\eta_2\eta_3)k_i c_2 - \eta_1(k_{is}c_2 - k_i c_{2s})}{k_i^2 c_2^2} \\
\mathring{b}_2 &= \tfrac{\eta_1^2+\eta_3^2}{k_i c_2} \\
\mathring{c}_2 &= \tfrac{\eta_3 k_i^2 c_2^2 + (\eta_{3s}+\eta_1\eta_2)k_i c_2 + \eta_3(k_{is}c_2 - k_i c_{2s})}{k_i^2 c_2^2} \\
\mathring{d}_2 &= \tfrac{(\eta_{3s}-\eta_1\eta_2)k_i^2 c_2^2 + (\eta_{1u}+\gamma_2\eta_3)k_i c_2 - \eta_1(k_{iu}c_2 - k_i c_{2u})}{k_i^2 c_2^2} \\
\mathring{e}_2 &= \tfrac{(\eta_1^2+\eta_3^2)\eta_{2s} + \eta_{3s} + \eta_3\eta_{1s}}{k_i c_2} \\
\mathring{f}_2 &= \tfrac{(\eta_{1s}-\eta_2\eta_3)k_i^2 c_2^2 + (-\eta_{3u}+\gamma_2\eta_1)k_i c_2 + \eta 3(k_i c_{2u} - k_{iu}c_2)}{k_i^2 c_2^2}
\end{aligned}$$

şeklinde verilmiştir. 1. tip konumsal uyarlanmış çatıya göre ikinci sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeylerinin birinci temel formun katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
\tilde{E} &= \langle \Upsilon_{2s}(s,u), \Upsilon_{2s}(s,u)\rangle = \mathring{a}_2^2 + \mathring{b}_2^2 + \mathring{c}_2^2 \\
\tilde{F} &= \langle \Upsilon_{2s}(s,u), \Upsilon_{2u}(s,u)\rangle = \mathring{a}_2\mathring{d}_2 + \mathring{b}_2\mathring{e}_2 + \mathring{c}_2\mathring{f}_2 \\
\tilde{G} &= \langle \Upsilon_{2u}(s,u), \Upsilon_{2u}(s,u)\rangle = \mathring{d}_2^2 + \mathring{e}_2^2 + \mathring{f}_2^2
\end{aligned} \tag{4.68}$$

1. tip konumsal uyarlanmış çatıya göre ikinci sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeylerinin ikinci temel formunun katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{2ss}(s,u) &= \mathring{a}_{2s}T + \mathring{a}_2 T_s + \mathring{b}_{2s}J + \mathring{b}_2 J_s + \mathring{c}_{2s}Z + \mathring{c}_2 Z_s \\
&= (\mathring{a}_{2s} - \mathring{b}_2\eta_1 - \mathring{c}_2\eta_2)T + (\mathring{a}_2\eta_1 + \mathring{b}_{2s} - \mathring{c}_2\eta_3)J \\
&\quad +(\mathring{a}_2\eta_2 + \mathring{b}_2\eta_3 + \mathring{c}_{2s})Z
\end{aligned} \tag{4.69}$$

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{2_{uu}}(s,u) &= \mathring{d}_{2u}T + \mathring{d}_2 T_u + \mathring{e}_{2u}J + \mathring{e}_2 J_u + \mathring{f}_{2u}Z + \mathring{f}_2 Z_u \\
&= (\mathring{d}_{2u} + \mathring{e}_2(\eta_{3s} - \eta_2\eta_1) - \mathring{f}_2\gamma_2)T \\
&\quad +(\mathring{d}_2(\eta_{3s} + \eta_2\eta_1) + \mathring{e}_{2u} - \mathring{f}_2(\eta_{1s} + \eta_2\eta_3))J \\
&\quad +(\mathring{d}_2\gamma_2 + (\eta_{1s} + \eta_2\eta_3)\eta_2 + \mathring{e}_2(\eta_{1s} + \eta_2\eta_3) + \mathring{f}_{2u})Z
\end{aligned} \tag{4.70}$$

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{2_{su}}(s,u) &= \mathring{a}_{2u}T + \mathring{a}_2 T_u + \mathring{b}_{2u}J + \mathring{b}_2 J_u + \mathring{c}_{2u}Z + \mathring{c}_2 Z_u \\
&= (\mathring{a}_{2u} + \mathring{b}_2(\eta_{3s} + \eta_2\eta_1) - \mathring{c}_2\gamma_2)T \\
&\quad +(\mathring{a}_2(\eta_{3s} + \eta_2\eta_1) + \mathring{b}_{2u} + \mathring{c}_2(\eta_{1s} + \eta_2\eta_3))J \\
&\quad +(\mathring{a}_2\gamma_2 + \mathring{b}_2(\eta_{1s} + \eta_2\eta_3) + \mathring{c}_{2u})Z
\end{aligned} \tag{4.71}$$

(4.67), (4.69), (4.70) ve (4.71) denklemleri kullanılarak 1. tip konumsal uyarlanmış çatıya göre girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeylerinin ikinci temel formunun kat sayıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
\tilde{l} &= < \Upsilon_{2ss}(s,u), \tilde{\mathbb{N}}_2 > \\
&= \tfrac{\mu_4\lambda_4 + \mu_5\lambda_5 + \mu_6\lambda_6}{\sqrt{\lambda_4^2+\lambda_5^2+\lambda_6^2}}
\end{aligned} \tag{4.72}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{m} &= < \Upsilon_{2_{su}}(s,u), \tilde{\mathbb{N}}_2 > \\
&= \tfrac{\varpi_4\lambda_4 + \varpi_5\lambda_5 + \varpi_6\lambda_6}{\sqrt{\lambda_4^2+\lambda_5^2+\lambda_6^2}}
\end{aligned} \tag{4.73}$$

$$\begin{aligned} \tilde{n} &= <\Upsilon_{2_{uu}}(s,u), \tilde{\mathbb{N}}_2> \\ &= \frac{\varrho_4\lambda_4+\varrho_5\lambda_5+\varrho_6\lambda_6}{\sqrt{\lambda_4^2+\lambda_5^2+\lambda_6^2}} \end{aligned} \tag{4.74}$$

Burada

$$\begin{aligned} \mu_4 &= \mathring{a}_{2s} - \mathring{b}_2\eta_1 - \mathring{c}_2\eta_2 \\ \mu_5 &= \mathring{a}_2\eta_1 + \mathring{b}_{2s} - \mathring{c}_2\eta_3 \\ \mu_6 &= \mathring{a}_2\eta_2 + \mathring{b}_2\eta_3 + \mathring{c}_{2s} \\ \varpi_4 &= \mathring{d}_{2u} + \mathring{e}_2(\eta_{3s} - \eta_2\eta_1) - \mathring{f}_2\gamma_2 \\ \varpi_5 &= \mathring{d}_2(\eta_{3s} + \eta_2\eta_1) + \mathring{e}_{2u} - \mathring{f}_2(\eta_{1s} + \eta_2\eta_3) \\ \varpi_6 &= \mathring{d}_2\gamma_2 + (\eta_{1s} + \eta_2\eta_3)\eta_2 + \mathring{e}_2(\eta_{1s} + \eta_2\eta_3) + \mathring{f}_{2u} \\ \varrho_4 &= \mathring{a}_{2u} + \mathring{b}_2(\eta_{3s} + \eta_2\eta_1) - \mathring{c}_2\gamma_2 \\ \varrho_5 &= \mathring{a}_2(\eta_{3s} + \eta_2\eta_1) + \mathring{b}_{2u} + \mathring{c}_2(\eta_{1s} + \eta_2\eta_3) \\ \varrho_6 &= \mathring{a}_2\gamma_2 + \mathring{b}_2(\eta_{1s} + \eta_2\eta_3) + \mathring{c}_{2u} \end{aligned} \tag{4.75}$$

biçiminde verilir. (4.68),(4.72),(4.73),(4.74),(4.75) denklemleri kullanılarak 1.tip konumsal uyarlanmış çatıya göre ikinci sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeylerinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= \frac{\tilde{l}\tilde{n}-\tilde{m}^2}{\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2} \\ &= \frac{(\mu_4\lambda_4+\mu_5\lambda_5+\mu_6\lambda6)(\varrho_4\lambda_4+\varrho_5\lambda_5+\varrho_6\lambda_6)-(\varpi_4\lambda_4+\varpi_5\lambda_5+\varpi_6\lambda_6)^2}{\sqrt{\lambda_4^2+\lambda_5^2+\lambda_6^2}(\mathring{a}_2^2+\mathring{b}_2^2+\mathring{c}_2^2)(\mathring{a}_2\mathring{d}_2+\mathring{b}_2\mathring{e}_2+\mathring{c}_2\mathring{f}_2)-(\mathring{d}_2^2+\mathring{e}_2^2+\mathring{f}_2^2)^2)} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \frac{\tilde{E}\tilde{n}+\tilde{G}\tilde{l}-2\tilde{F}\tilde{m}}{2(\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2)} \\ &= \frac{\begin{array}{r}(\mathring{a}_2^2+\mathring{b}_2^2+\mathring{c}_2^2(\varrho_4\lambda_4+\varrho_5\lambda_5+\varrho_6\lambda_6)+(\mathring{a}_2\mathring{d}_2+\mathring{b}_2\mathring{e}_2+\mathring{c}_2\mathring{f}_2)(\mu_4\lambda_4+\mu_5\lambda_5+\mu_6\lambda6) \\ -2(\mathring{d}_2^2+\mathring{e}_2^2+\mathring{f}_2^2)(\varpi_4\lambda_4+\varpi_5\lambda_5+\varpi_6\lambda_6)\end{array}}{2\sqrt{\lambda_4^2+\lambda_5^2+\lambda_6^2}(\mathring{a}_2^2+\mathring{b}_2^2+\mathring{c}_2^2)(\mathring{a}_2\mathring{d}_2+\mathring{b}_2\mathring{e}_2+\mathring{c}_2\mathring{f}_2)-(\mathring{d}_2^2+\mathring{e}_2^2+\mathring{f}_2^2)^2)} \end{aligned}$$

biçiminde çıkarılır.

## 4.3. 1.Tip Konumsal Uyarlanmış Çatıya Göre Üçüncü Sınıf için Girdap Filament Akısı Tarafından Üretilen Fokal Yüzeyler

3 boyutlu Öklid uzayında hareketli uzay eğrisi $h$ ve $h = h(s,u)$ hareketli uzay eğrisinin konum vektörü olsun. 1. tip konumsal uyarlanmış çatıya göre üçüncü sınıf için $u$ zaman evolüsyonunun denklemleri aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} T_u &= \Psi_3 \times T = \gamma_3 J - j_2 Z \\ J_u &= \Psi_3 \times J = -\gamma_3 T - vZ \\ Z_u &= \Psi_3 \times Z = j_2 T + vJ \end{aligned} \tag{4.76}$$

Burada $\gamma_3, j_2, v$ diferensiyellebilir fonksiyonlar olmak üzere 1. tip konumsal uyarlanmış çatı vektörü $\Psi_3 = j_2T + vJ + \gamma_3 Z$ olarak verilir. Burada (3.32) ve (4.76) kullanılarak

$$\begin{aligned} T_s &= \eta_1 J + \eta_2 Z \\ T_{su} &= \eta_{1u} J + \eta_1 J_u + \eta_{2u} Z + \eta_2 Z_u \\ &= \eta_{1u} J - \eta_1(\gamma_3 T + vZ) + \eta_{2u} Z + \eta_2(j_2 T + vJ) \\ &= (\eta_2 j_2 - \eta_1\gamma_3)T + (\eta_{1u} + \eta_2 v)J + (\eta_{2u} - \eta_1 v)Z \end{aligned} \tag{4.77}$$

ve

$$\begin{aligned} T_u &= \gamma_3 J - j_2 Z \\ T_{us} &= \gamma_{3s} J + \gamma_3 J_s - j_{2s} Z - j_2 Z_s \\ &= \gamma_{3s} J + \gamma_3(\eta_3 Z - \eta_1 T) - j_{2s} Z + j(\eta_1 T + \eta_3 J) \\ &= -(\gamma_3\eta_1 + j_2\eta_2)T + (\gamma_{3s} + j_2\eta_3)J + (\gamma_3\eta_3 - j_{2s})Z \end{aligned} \tag{4.78}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} Z_s &= -\eta_2 T - \eta_3 J \\ Z_{su} &= -\eta_{2u} T - \eta_2 T_u - \eta_{3u} J - \eta_3 J_u \\ &= (\eta_3\gamma_3 - \eta_{2u})T - (\eta_2\gamma_3 + \eta_{3u})J + (\eta_3 v + \eta_2 j)Z \end{aligned} \tag{4.79}$$

ve

$$\begin{aligned} Z_u &= j_2 T + vJ \\ Z_{us} &= j_{2s} T + j_2 T_s + v_s J + vJ_s \\ &= (j_{2s} - v\eta_1)T + (j_2\eta_1 + v_s)J + (j_2\eta_2 + v\eta_3)Z \end{aligned} \tag{4.80}$$

elde edilir.

$$T_{us} = T_{su}, Z_{us} = Z_{su} \tag{4.81}$$

eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \eta_{1u} &= \gamma_{3s} - \eta_2 v + j_2\eta_3 \\ \eta_{2u} &= \eta_1 v + \gamma_3\eta_3 - j_{2s} \\ \eta_{3u} &= -(\eta_2\gamma_3 + j_2\eta_1 + v_s) \end{aligned} \tag{4.82}$$

elde edilir. Eğrinin hız vektörü

$$h_u = f_3 T + d_3 J + q_3 Z \tag{4.83}$$

olsun. (4.83) türevi alınarak (3.32) yardımıyla

$$\begin{aligned} h_{us} &= f_{3s} T + f_3 T_s + d_{3s} J + d_3 J_s + q_{3s} Z + q_3 Z_s \\ &= (f_{3s} - d_3\eta_1 - q_3\eta_2)T + (f_3\eta_1 + d_{3s} - q_3\eta_3)J + (f_3\eta_2 + q_{3s} + d_3\eta_3)Z \end{aligned}$$

bulunur. Eğer denklem (2.1) de

$$X = h_s = Z \tag{4.84}$$

alınırsa (3.32) yardımıyla 1. tip konumsal uyarlanmış çatıya göre üçüncü sınıf için girdap filament denklemi aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} h_u &= Z \times Z_s \\ &= \eta_3 T - \eta_2 J \end{aligned} \tag{4.85}$$

$h_{su} = h_{us}$ olduğundan

$$\begin{aligned} f_{3s} &= d_3\eta_1 + q_3\eta_2 + j_2 \\ d_{3s} &= f_3\eta_1 - v - q_3\eta_3 \\ q_{3s} &= -(f_3\eta_2 + d_3\gamma_3) \end{aligned} \tag{4.86}$$

denklemleri bulunur. (4.83) ve (4.85) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} f_3 &= \eta_3 \\ d_3 &= -\eta_2 \\ q_3 &= 0 \end{aligned} \tag{4.87}$$

elde edilir. (4.87) deki eşitlikler, (4.86) eşitliklerinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} j_2 &= \eta_{3s} + \eta_2\eta_1 \\ v &= \eta_{2s} + \eta_1\eta_3 \end{aligned} \tag{4.88}$$

elde edilir. (4.88) denkleminin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} j_{2s} &= \eta_{3ss} + (\eta_2\eta_1)_s \\ v_s &= \eta_{2ss} + (\eta_1\eta_3)_s \end{aligned} \tag{4.89}$$

bulunur. (4.88) ve (4.89) denklemlerinde bulunan eşitlikler (4.82) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \eta_{1u} &= \gamma_{3s} - \eta_2(\eta_{2s} + \eta_1\eta_3) + \eta_3(\eta_{3s} + \eta_2\eta_1) \\ \eta_{2u} &= \eta_1\gamma_3 - (\eta_{3ss} + (\eta_2\eta_1)_s) - \eta_1(\eta_{2s} + \eta_1\eta_3) \\ \eta_{3u} &= -(\eta_{2ss} + (\eta_1\eta_3)_s) - \eta_1(\eta_{3s} + \eta_2\eta_1) - \eta_2\gamma_3 \end{aligned}$$

elde edilir. (4.88) ve (4.89) denklemleri (4.76) dekleminde yerine yazılırsa $\{T, J, Z\}$ çatısının $u$ zaman evolüsyonu aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} T_u &= \gamma_3 J - (\eta_{3s} + \eta_2\eta_1)Z \\ J_u &= -\gamma_3 T - (\eta_{2s} + \eta_1\eta_3)Z \\ Z_u &= (\eta_{3s} + \eta_2\eta_1)T + (\eta_{2s} + \eta_1\eta_3)J \end{aligned} \tag{4.90}$$

1. tip konumsal uyarlanmış çatıya göre üçüncü sınıf için girdap filament yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} E &= \langle h_s, h_s\rangle = \langle Z, Z\rangle = 1 \\ F &= \langle h_s, h_u\rangle = \langle Z, \eta_3 T - \eta_2 J\rangle = 0 \\ G &= \langle h_u, h_u\rangle = \langle \eta_3 T - \eta_2 J, \eta_3 T - \eta_2 J\rangle = \eta_2^2 + \eta_3^2 \end{aligned} \tag{4.91}$$

(3.16) ve (4.91) kullanılarak yazıldığında 1.tip konumsal uyarlanmış çatıya göre üçüncü sınıf girdap filament yüzeyinin birinci temel formu

$$I = ds^2 + (\eta_2^2 + \eta_3^2)du^2 \tag{4.92}$$

biçiminde bulunur. 1. tip konumsal uyarlanmış çatıya üçüncü sınıf için girdap filament yüzeyinin birim normali

$$\mathbb{N}_3 = \frac{h_s \times h_u}{\| h_s \times h_u \|} = \frac{Z \times (\eta_3 T - \eta_2 J)}{\| Z \times (\eta_3 T - \eta_2 J) \|} = \frac{\eta_2 T + \eta_3 J}{\sqrt{\eta_2^2 + \eta_3^2}} \tag{4.93}$$

bulunur. 1. tip konumsal uyarlanmış çatıya göre üçüncü sınıf için girdap filament yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} h_{ss} &= -\eta_2 T - \eta_3 J \\ h_{su} &= (\eta_{3s} + \eta_2\eta_1)T + (\eta_{2s} + \eta_1\eta_3)J \\ h_{uu} &= (\eta_{3u} + \eta_2\gamma_3)T + (\eta_3\gamma_3 - \eta_{2u})J + (\eta_2\eta_{2s} - \eta_3\eta_{3s})Z \end{aligned} \tag{4.94}$$

(4.93) ve (4.94) denklemlerinden

$$\begin{aligned} l &= < h_{ss}, \mathbb{N}_3 > \\ &= - < (\eta_2 T + \eta_3 J), \tfrac{\eta_2 T + \eta_3 J}{\sqrt{\eta_2^2 + \eta_3^2}} > \\ &= -\tfrac{(\eta_2^2 + \eta_3^2)}{\sqrt{\eta_2^2 + \eta_3^2}} \end{aligned} \tag{4.95}$$

$$\begin{aligned} m &= < h_{su}, \mathbb{N}_3 > \\ &= < (\eta_{3s} + \eta_2\eta_1)T + (\eta_{2s} + \eta_1\eta_3)J, \tfrac{\eta_2 T + \eta_3 J}{\sqrt{\eta_2^2 + \eta_3^2}} > \\ &= \tfrac{(\eta_{3s}\eta_2 + \eta_1(\eta_2^2 + \eta_3^2) + \eta_3\eta_{2s})}{\sqrt{\eta_2^2 + \eta_3^2}} \end{aligned} \tag{4.96}$$

$$\begin{aligned} n &= < h_{uu}, \mathbb{N}_3 > \\ &= < (\eta_{3u} + \eta_2\gamma_3)T + (\eta_3\gamma_3 - \eta_{2u})J + (-\eta_3^2 + \eta_2^2)Z, \tfrac{\eta_2 T + \eta_3 J}{\sqrt{\eta_2^2 + \eta_3^2}} > \\ &= \tfrac{(\gamma_3(\eta_2^2 + \eta_3^2) + \eta_2\eta_{3u} - \eta_3\eta_{2u})}{\sqrt{\eta_2^2 + \eta_3^2}} \end{aligned} \tag{4.97}$$

ikinci temel formun katsayıları elde edilir. (3.17), (4.95), (4.96) ve (4.97) denklemleri kullanılarak 1.tip konumsal uyarlanmış çatıya göre üçüncü sınıf girdap filament yüzeyinin ikinci temel formu aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} II = \tfrac{1}{\sqrt{\eta_2^2 + \eta_3^2}}((\eta_2^2 + \eta_3^2)ds^2 + 2(\eta_{3s}\eta_2 + \eta_1(\eta_2^2 + \eta_3^2) + \eta_3\eta_{2s})dsdu \\ +(\gamma_3(\eta_2^2 + \eta_3^2) + \eta_2\eta_{3u} - \eta_3\eta_{2u})du^2) \end{aligned} \tag{4.98}$$

(4.91), (4.95), (4.96), (4.97) denklemleri kullanılarak, 1.tip konumsal uyarlanmış çatıya göre üçüncü sınıf girdap filament yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$\begin{aligned} K &= \tfrac{ln - m^2}{EG - F^2} \\ &= \tfrac{-(\eta_2^2 + \eta_3^2)(\gamma_3(\eta_2^2 + \eta_3^2) + \eta_2\eta_{3u} - \eta_3\eta_{2u}) + (\eta_{3s}\eta_2 + \eta_1(\eta_2^2 + \eta_3^2) + \eta_3\eta_{2s})^2}{(\eta_1^2 + \eta_2^2)^2} \end{aligned} \tag{4.99}$$

ve

$$\begin{aligned} H &= \tfrac{En + Gl - 2Fm}{2(EG - F^2)} \\ &= -\tfrac{\gamma_3(\eta_2^2 + \eta_3^2) + \eta_2\eta_{3u} - \eta_3\eta_{2u} + (\eta_2^2 + \eta_3^2)^2}{2(\eta_2^2 + \eta_3^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \tag{4.100}$$

biçiminde elde edilir. (4.99), (4.100) denklemleri kullanılarak, 1.tip konumsal uyarlanmış çatıya göre üçüncü sınıf için girdap filament yüzeyinin asli eğrilikleri

$$\begin{aligned} k_1 &= H+\sqrt{H^2-K} \\ &= -\frac{\gamma_3(\eta_2^2+\eta_3^2)+\eta_2\eta_{3u}-\eta_3\eta_{2u}+(\eta_2^2+\eta_3^2)^2}{2(\eta_2^2+\eta_3^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad +\sqrt{\begin{array}{c}(-\frac{\gamma_3(\eta_2^2+\eta_3^2)+\eta_2\eta_{3u}-\eta_3\eta_{2u}+(\eta_2^2+\eta_3^2)^2}{2(\eta_2^2+\eta_3^2)^{\frac{3}{2}}})^2 \\ -\frac{(\eta_2^2+\eta_3^2)(\gamma_3(\eta_2^2+\eta_3^2)+\eta_2\eta_{3u}-\eta_3\eta_{2u})-(\eta_{3s}\eta_2+\eta_1(\eta_2^2+\eta_3^2)+\eta_3\eta_{2s})^2}{(\eta_1^2+\eta_2^2)^2}\end{array}} \end{aligned} \tag{4.101}$$

ve

$$\begin{aligned} k_2 &= H-\sqrt{H^2-K} \\ &= -\frac{\gamma_3(\eta_2^2+\eta_3^2)+\eta_2\eta_{3u}-\eta_3\eta_{2u}+(\eta_2^2+\eta_3^2)^2}{2(\eta_2^2+\eta_3^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad -\sqrt{\begin{array}{c}(-\frac{\gamma_3(\eta_2^2+\eta_3^2)+\eta_2\eta_{3u}-\eta_3\eta_{2u}+(\eta_2^2+\eta_3^2)^2}{2(\eta_2^2+\eta_3^2)^{\frac{3}{2}}})^2 \\ -\frac{(\eta_2^2+\eta_3^2)(\gamma_3(\eta_2^2+\eta_3^2)+\eta_2\eta_{3u}-\eta_3\eta_{2u})-(\eta_{3s}\eta_2+\eta_1(\eta_2^2+\eta_3^2)+\eta_3\eta_{2s})^2}{(\eta_1^2+\eta_2^2)^2}\end{array}} \end{aligned} \tag{4.102}$$

elde edilmiş olur.

1.tip konumsal uyarlanmış çatıya göre üçüncü sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeyleri

$$\Upsilon_3(s,u) = h(s,u)+k_i^{-1}(s,u)\mathbb{N}_3(s,u), \quad i=1,2 \tag{4.103}$$

şeklinde tanımlansın. (4.101) ve (4.102) denklemlerinde bulunan asli eğrilikler ve

$$\mathbb{N}_3=\frac{\eta_2 T+\eta_3 J}{c_3}, c_3=\sqrt{\eta_2^2+\eta_3^2}$$

olarak alınır. $k_i$ (4.103) eşitliğinin $s$ yay parametresi ve $u$ zamana bağlı türevini alırsak;

$$\begin{aligned} \Upsilon_{3s}(s,u) &= \frac{(\eta_{2s}-\eta_1\eta_3)k_ic_3+\eta_2(k_{is}c_3+k_ic_{3s})-\eta_2k_i^2c_3^2}{k_i^2c_3^2}T \\ &\quad +\frac{(\eta_{3s}+\eta_1\eta_2)k_ic_3+\eta_3(k_{is}c_3+k_ic_{3s})-\eta_3k_i^2c_3^2}{k_i^2c_3^2}J \\ &\quad +\frac{\eta_2^2+\eta_3^2}{k_ic_3}Z \end{aligned} \tag{4.104}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{3u}(s,u) &= \frac{(\eta_{3s}+\eta_1\eta_2)k_i^2c_3^2+(\eta_{2u}-\gamma_3\eta_3)k_ic_3+\eta_2(k_{iu}c_3+k_ic_{3u})}{k_i^2c_3^2}T \\ &\quad +\frac{(\eta_{2s}+\eta_1\eta_3)k_i^2c_3^2+(\gamma_3\eta_2-\eta_{3u})k_ic_3+\eta3(k_{iu}c_3+k_ic_{3u})}{k_i^2c_3^2}J \\ &\quad -\frac{(\eta_2^2+\eta_2^2)\eta_1+\eta_{3s}\eta_2-\eta_3\eta_{2s}}{k_ic_3}Z \end{aligned} \tag{4.105}$$

elde edilir. 1.tip konumsal uyarlanmış çatıya göre üçüncü sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeylerinin birim normali

$$\tilde{\mathbb{N}}_3 = \frac{\lambda_7 T+\lambda_8 J+\lambda_9 Z}{\sqrt{\lambda_7^2+\lambda_8^2+\lambda_9^2}}, \sqrt{\lambda_7^2+\lambda_8^2+\lambda_9^2}\neq 0 \tag{4.106}$$

şeklinde bulunur. Burada

$$\lambda_7 = \mathring{b}_3\mathring{d}_3-\mathring{c}_3\mathring{e}_3$$

$$\lambda_8 = \mathring{c}_3\mathring{d}_3 - \mathring{a}_3\mathring{f}_3$$

$$\lambda_9 = \mathring{a}_3\mathring{e}_3 - \mathring{b}_3\mathring{d}_3$$

$$\begin{aligned}
\mathring{a}_3 &= \tfrac{(\eta_{2s}-\eta_1\eta_3)k_ic_3+\eta_2(k_{is}c_3+k_ic_{3s})-\eta_2k_i^2c_3^2}{k_i^2c_3^2}\\
\mathring{b}_3 &= \tfrac{(\eta_{3s}+\eta_1\eta_2)k_ic_3+\eta_3(k_{is}c_3+k_ic_{3s})-\eta_3k_i^2c_3^2}{k_i^2c_3^2}\\
\mathring{c}_3 &= \tfrac{\eta_2^2+\eta_3^2}{k_ic_3}\\
\mathring{d}_3 &= \tfrac{(\eta_{3s}+\eta_1\eta_2)k_i^2c_3^2+(\eta_{2u}-\gamma_3\eta_3)k_ic_3+\eta_2(k_{iu}c_3+k_ic_{3u})}{k_i^2c_3^2}\\
\mathring{e}_3 &= \tfrac{(\eta_{2s}+\eta_1\eta_3)k_i^2c_3^2+(-\eta_{3u}+\gamma_3\eta_2)k_ic_3+\eta 3(k_{iu}c_3+k_ic_{3u})}{k_i^2c_3^2}\\
\mathring{f}_3 &= \tfrac{-(\eta_2^2+\eta_2^2)\eta_1-\eta_{3s}\eta_2+\eta_3\eta_{2s}}{k_ic_3}
\end{aligned}$$

şeklinde verilmiştir. 1. tip konumsal uyarlanmış çatıya göre üçüncü sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeylerinin birinci temel formun katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
\tilde{E} &= \langle \Upsilon_{3s}(s,u), \Upsilon_{3s}(s,u)\rangle = \mathring{a}_3^2 + \mathring{b}_3^2 + \mathring{c}_3^2\\
\tilde{F} &= \langle \Upsilon_{3s}(s,u), \Upsilon_{3u}(s,u)\rangle = \mathring{a}_3\mathring{d}_3 + \mathring{b}_3\mathring{e}_3 + \mathring{c}_3\mathring{f}_3\\
\tilde{G} &= \langle \Upsilon_{3u}(s,u), \Upsilon_{3u}(s,u)\rangle = \mathring{d}_3^2 + \mathring{e}_3^2 + +\mathring{f}_3^2
\end{aligned} \tag{4.107}$$

1. tip konumsal uyarlanmış çatıya göre üçüncü sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeylerinin ikinci temel formun katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{3ss}(s,u) &= \mathring{a}_{6s}T + \mathring{a}_3T_s + \mathring{b}_{6s}J + \mathring{b}_3J_s + \mathring{c}_{3s}Z + \mathring{c}_3Z_s\\
&= (\mathring{a}_{6s} - \mathring{b}_3\eta_1 - \mathring{c}_3\eta_2)T + (\mathring{a}_3\eta_1 + \mathring{b}_{3s} - \mathring{c}_3\eta_3)J\\
&\quad +(\mathring{a}_3\eta_2 + \mathring{b}_3\eta_3 + \mathring{c}_{3s})Z
\end{aligned} \tag{4.108}$$

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{3uu}(s,u) &= \mathring{d}_{3u}T + \mathring{d}_3T_u + \mathring{e}_{3u}J + \mathring{e}_3J_u + \mathring{f}_{3u}Z + \mathring{f}_3Z_u\\
&= (\mathring{d}_{3u} - \mathring{e}_3\gamma_3 + \mathring{f}_3(\eta_{3s} + \eta_1\eta_2))T\\
&\quad +(\mathring{d}_3\gamma_3 + \mathring{e}_{3u} + \mathring{f}_3(\eta_{3s} + \eta_1\eta_2))J\\
&\quad +(\mathring{d}_3(\eta_{3s} + \eta_1\eta_2) - (\eta_{2s} + \eta_1\eta_3)\mathring{e}_3 + \mathring{f}_{3u})Z
\end{aligned} \tag{4.109}$$

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{3_{su}}(s,u) &= \mathring{a}_{3u}T + \mathring{a}_3T_u + \mathring{b}_{3u}J + \mathring{b}_3J_u + \mathring{c}_{3u}Z + \mathring{c}_3Z_u\\
&= (\mathring{a}_{3u} - \mathring{b}_3\gamma_3 + \mathring{c}_3(\eta_{3s} + \eta_1\eta_3))T\\
&\quad +(\mathring{a}_3\gamma_3 + \mathring{b}_3(\eta_{2s} + \eta_3\eta_1) + \mathring{c}_3(\eta_{2s} + \eta_1\eta_3))J\\
&\quad +(-\mathring{a}_3(\eta_{3s} + \eta_1\eta_2) + \mathring{b}_3(\eta_{2s} + \eta_1\eta_3) + \mathring{c}_{3u})Z
\end{aligned} \tag{4.110}$$

bulunur. (4.106), (4.108), (4.109) ve (4.110) denklemleri kullanılarak ikinci temel formun katsayıları aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned}
\tilde{l} &= < \Upsilon_{3ss}(s,u), \tilde{\mathbb{N}}_3 >\\
&= \tfrac{\mu_7\lambda_7+\mu_8\lambda_8+\mu_9\lambda_{18}}{\sqrt{\lambda_7^2+\lambda_8^2+\lambda_9^2}}
\end{aligned} \tag{4.111}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{m} &= < \Upsilon_{3_{su}}(s,u), \tilde{\mathbb{N}}_3 >\\
&= \tfrac{\varpi_7\lambda_7+\varpi_8\lambda_8+\varpi_{18}\lambda_9}{\sqrt{\lambda_7^2+\lambda_8^2+\lambda_9^2}}
\end{aligned} \tag{4.112}$$

$$\begin{aligned}\tilde{n} &= <\Upsilon_{3_{uu}}(s,u),\tilde{\mathbb{N}}_3> \\ &= \frac{\varrho_7\lambda_7+\varrho_8\lambda_8+\varrho_{18}\lambda_9}{\sqrt{\lambda_7^2+\lambda_8^2+\lambda_9^2}}\end{aligned} \tag{4.113}$$

Burada

$$\begin{aligned}\mu_7 &= \mathring{a}_{6s}-\mathring{b}_3\eta_1-\mathring{c}_3\eta_2 \\ \mu_8 &= \mathring{a}_3\eta_1+\mathring{b}_{6s}-\mathring{c}_3\eta_3 \\ \mu_9 &= \mathring{a}_3\eta_2+\mathring{b}_3\eta_3+\mathring{c}_{3s} \\ \varpi_7 &= \mathring{d}_{3u}-\mathring{e}_3\gamma_3+\mathring{f}_3(\eta_{3s}+\eta_1\eta_2) \\ \varpi_8 &= \mathring{d}_3\gamma_3+\mathring{e}_{3u}+\mathring{f}_3(\eta_{3s}+\eta_1\eta_2) \\ \varpi_9 &= \mathring{d}_3(\eta_{3s}+\eta_1\eta_2)-(\eta_{2s}+\eta_1\eta_3)\mathring{e}_3+\mathring{f}_{3u} \\ \varrho_7 &= \mathring{a}_{3u}-\mathring{b}_3\gamma_3+\mathring{c}_3(\eta_{3s}+\eta_1\eta_3) \\ \varrho_8 &= \mathring{a}_3\gamma_3+\mathring{b}_3(\eta_{2s}+\eta_3\eta_1)+\mathring{c}_3(\eta_{2s}+\eta_1\eta_3) \\ \varrho_9 &= \mathring{c}_{3u}-\mathring{a}_3(\eta_{3s}+\eta_1\eta_2)+\mathring{b}_3(\eta_{2s}+\eta_1\eta_3)\end{aligned} \tag{4.114}$$

şeklinde verilir.(4.107), (4.111), (4.112), (4.113),(4.114) denklemleri kullanılarak 1. tip konumsal uyarlanmış çatıya göre üçüncü sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeylerinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$\begin{aligned}\tilde{K} &= \frac{\tilde{l}\tilde{n}-\tilde{m}^2}{\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2} \\ &= \frac{\begin{array}{r}(\mu_7\lambda_7+\mu_8\lambda_8+\mu_9\lambda_9)(\varrho_7\lambda_7+\varrho_8\lambda_8+\varrho_9\lambda_9) \\ -(\varpi_7\lambda_7+\varpi_8\lambda_8+\varpi_9\lambda_9)^2\end{array}}{\sqrt{\lambda_7^2+\lambda_8^2+\lambda_9^2}(\mathring{a}_3^2+\mathring{b}_3^2+\mathring{c}_3^2)(\mathring{a}_3\mathring{d}_3+\mathring{b}_3\mathring{e}_3+\mathring{c}_3\mathring{f}_3)-(\mathring{d}_3^2+\mathring{e}_3^2++\mathring{f}_3^2)^2)}\end{aligned}$$

ve

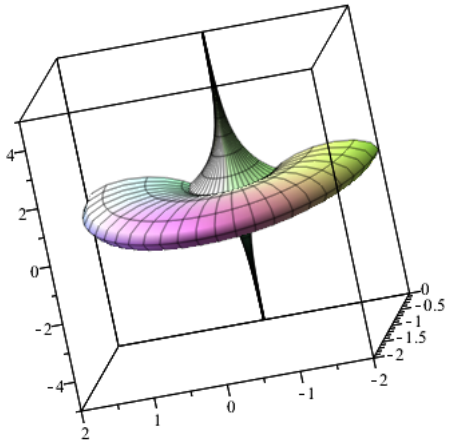
$$\begin{aligned}\tilde{H} &= \frac{\tilde{E}\tilde{n}+\tilde{G}\tilde{l}-2\tilde{F}\tilde{m}}{2(\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2)} \\ &= \frac{\begin{array}{l}(\mathring{a}_3^2+\mathring{b}_3^2+\mathring{c}_3^2)(\varrho_{16}\lambda_7+\varrho_8\lambda_8+\varrho_9\lambda_9) \\ +(\mathring{a}_3\mathring{d}_3+\mathring{b}_3\mathring{e}_3+\mathring{c}_3\mathring{f}_3)(\mu_7\lambda_7+\mu_8\lambda_{17}+\mu_9\lambda_9) \\ -2(\mathring{d}_3^2+\mathring{e}_3^2++\mathring{f}_3^2)(\varpi_{16}\lambda_7+\varpi_8\lambda_8+\varpi_9\lambda_9)\end{array}}{2\sqrt{\lambda_7^2+\lambda_8^2+\lambda_9^2}((\mathring{a}_3^2+\mathring{b}_3^2+\mathring{c}_3^2)(\mathring{a}_3\mathring{d}_3+\mathring{b}_3\mathring{e}_3+\mathring{c}_3\mathring{f}_3)-(\mathring{d}_3^2+\mathring{e}_3^2++\mathring{f}_3^2)^2)}\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.

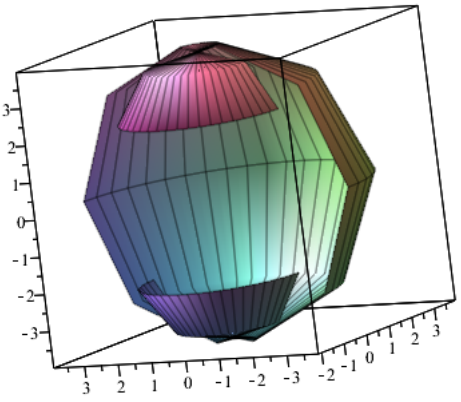
**Örnek 4.1**: $\mathbb{E}^3$ de eğrilik ve burulması, $\eta(s) = 2\sec h(s)$ ve $\tau(s) = 0$ şeklinde verilen

$$h(s,u) = ((s) - 2\tanh(s), -2\sec h(s)\cos(u), 2\sec h(s)\sin(u))$$

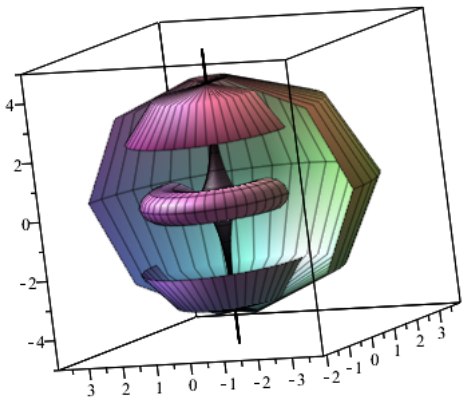
yüzeyinin 1. tip konumsal uyarlanmış çatısı için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeylerin fokal yüzeylerin şekilleri aşağıda verilmiştir.




Şekil 4.1 h(s,u) girdap filament yüzeyi $s \in (-5,5), u \in (0,\pi/2))$




Şekil 4.2 1. tip konumsal uyarlanmış çatıya göre birinci sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzey




Şekil 4.3 h(s,u) girdap filament yüzeyi ve 1. tip konumsal uyarlanmış çatıya göre birinci sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzey

# 5. $\mathbb{E}^3$ UZAYINDA REGÜLER YÜZEY ÜZERİNDE KONUMSAL UYARLANMIŞ ÇATIYA GÖRE GİRDAP FİLAMENT AKILARI TARAFINDAN ÜRETİLEN FOKAL YÜZEYLER

Bu bölümde regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre üç sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeyler incelenecektir.

## 5.1. Regüler Yüzey Üzerinde Konumsal Uyarlanmış Çatıya göre Birinci Sınıf için Girdap Filament Akısı Tarafından Üretilen Fokal Yüzeyler

3 boyutlu Öklid uzayında hareketli uzay eğrisi $h$ ve $h = h(s,u)$ hareketli uzay eğrisinin konum vektörü olsun. Burada $s$ yay parametresi ve $u$ zamanı göstermektedir. Eğri boyunca uzanan regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatı $\{T,P,R\}$ ile gösterelim. $T$, $h$ eğrisinin birim tanjant vektörü, $P$ yüzeyin normal vektörü ve $R = T \times P$ birim vektördür. Birinci sınıf için regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre $u$ zaman evolüsyonunun denklemleri aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{array}{rcccl} T_u & = & \Psi_4 \times T & = & y_1 P + w_3 R \\ P_u & = & \Psi_4 \times P & = & -y_1 T + \gamma_4 R \\ R_u & = & \Psi_4 \times R & = & -w_3 T - \gamma_4 P \end{array} \tag{5.1}$$

Burada $\gamma_4, y_1, w_3$ diferensiyellebilir fonksiyonlar olmak üzere regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatı vektörü, $\Psi_4 = \gamma_4 T + w_3 P + y_1 R$ olarak verilir (5.1) ve (3.32) denklemlerinden

$$\begin{array}{rcl} T_s & = & \sigma_1 P + \sigma_2 R \\ T_{su} & = & \sigma_{1u} P + \sigma_1 P_u + \sigma_{2u} R + \sigma_2 R_u \\ & = & \sigma_{1u} P + \sigma_1(\gamma_4 R - y_1 T) + \sigma_{2u} R - \sigma_2(w_3 T + \gamma_4 P) \\ & = & \sigma_{1u} P - \sigma_1 y_1 T + \sigma_1 \gamma_4 R + \sigma_{2u} R - \sigma_2 w_3 T - \sigma_2 \gamma_4 P \\ & = & -(\sigma_1 y_1 + \sigma_2 w_3) T + (\sigma_{1u} - \sigma_2 \gamma_4) P + (\sigma_1 \gamma_4 + \sigma_{2u}) R \end{array} \tag{5.2}$$

ve

$$\begin{aligned} T_u &= y_1 P + w_3 R \\ T_{us} &= y_{1s} P + y_1 P_s + w_{3s} R + w_3 R_s \\ &= y_{1s} P + y_1(\sigma_3 R - \sigma_1 T) + w_{3s} R - w_3(\sigma_1 T + \sigma_3 P) \\ &= y_{1s} P - y_1\sigma_1 T + y_1\sigma_3 R + w_{3s} R - w_3\sigma_1 T - w_3\sigma_3 P \\ &= -(\sigma_1 y_1 + \sigma_2 w_3)T + (y_{1s} - w_3\sigma_3)P + (y_1\sigma_3 + w_{3s})R \end{aligned} \tag{5.3}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} P_s &= -\sigma_1 T + \sigma_3 R \\ P_{su} &= -\sigma_{1u} T - \sigma_1 T_u + \sigma_{3u} R + \sigma_3 R_u \\ &= -\sigma_{1u} T - \sigma_1(yP + wR) + \sigma_{3u} R - \sigma_3(wT + \gamma_4 P) \\ &= -\sigma_{1u} T - \sigma_1 yP - \sigma_1 wR + \sigma_{3u} R - \sigma_3 wT - \sigma_3\gamma_4 P \\ &= -(\sigma_{1u} + \sigma_3 w)T - (\sigma_1 y + \sigma_3\gamma_4)P + (\sigma_{3u} - \sigma_1 w)R \end{aligned} \tag{5.4}$$

ve

$$\begin{aligned} P_u &= -y_1 T + \gamma_4 R \\ P_{us} &= -y_{1s} T - y_1 T_s + \gamma_{4s} R + \gamma_4 R_s \\ &= -y_{1s} T - y_1(\sigma_1 P + \sigma_2 R) + \gamma_{4s} R - \gamma_4(\sigma_1 T + \sigma_3 P) \\ &= -y_{1s} T - y_1\sigma_1 P - y_1\sigma_2 R + \gamma_{4s} R - \gamma_4\sigma_1 T - \gamma_4\sigma_3 P \\ &= -(y_{1s} + \gamma_4\sigma_1)T - (y_1\sigma_1 + \gamma_4\sigma_3)P + (\gamma_{4s} - y_1\sigma_2)R \end{aligned} \tag{5.5}$$

elde edilir.

$$T_{us} = T_{su}, P_{us} = P_{su}$$

kullunılarak

$$\begin{aligned} \sigma_{1u} &= y_{1s} + \sigma_2\gamma_4 - w_3\sigma_3 \\ \sigma_{2u} &= y_1\sigma_3 - \sigma_1\gamma_4 + w_{3s} \\ \sigma_{3u} &= \sigma_1 w_3 - y_1\sigma_2 + \gamma_{4s} \end{aligned} \tag{5.6}$$

elde edilir. Eğrinin hız vektörü

$$h_u = f_4 T + d_4 P + q_4 R \tag{5.7}$$

olsun. O halde

$$\begin{aligned} h_{us} &= f_{4s} T + f_4 T_s + d_{4s} P + d_4 P_s + q_{4s} R + q_4 R_s \\ &= (f_{4s} - d_4 y_1 - q_4\sigma_1)T + (f_4\sigma_1 + d_{4s} - q_4\sigma_3)P + (f_4\sigma_2 + q_{4s} + d_4\gamma_4)R \end{aligned}$$

bulunur (5.7) türevi alınarak

$$X = h_s = T \tag{5.8}$$

regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre birinci sınıf için girdap filament akı denklemi aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} h_u &= T \times T_s \\ &= \sigma_1 R - \sigma_2 P \end{aligned} \tag{5.9}$$

$h_{su} = h_{us}$ olduğundan

$$\begin{aligned} f_{4s} &= d_4 y_1 + q_4 \sigma_1 \\ d_{4s} &= y_1 + q_4 \sigma_3 - f_4 \sigma_1 \\ q_{4s} &= w_3 - f_4 \sigma_2 - d_4 \gamma_4 \end{aligned} \tag{5.10}$$

denklemleri bulunur. (5.7) ve (5.9) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} f_4 &= 0 \\ d_4 &= -\sigma_2 \\ q_4 &= \sigma_1 \end{aligned} \tag{5.11}$$

elde edilir. (5.11) deki eşitlikler (5.10) eşitliklerinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} y_1 &= -(\sigma_{2s} + \sigma_3 \sigma_1) \\ w_3 &= \sigma_{1s} - \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned} \tag{5.12}$$

elde edilir. (5.12) denkleminin türevi alındığında

$$\begin{aligned} y_{1s} &= -\sigma_{2ss} - (\sigma_3 \sigma_1)_s \\ w_{3s} &= \sigma_{1ss} - (\sigma_2 \sigma_3)_s \end{aligned} \tag{5.13}$$

bulunur. (5.12) ve (5.13) denklemlerinde bulunan eşitlikler (5.6) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \sigma_{1u} &= \sigma_2 \gamma_4 - \sigma_{2ss} - (\sigma_3 \sigma_1)_s + -\sigma_3(\sigma_{1s} - \sigma_2 \sigma_3)\sigma_{2u} \\ \sigma_{2u} &= -\sigma_3(\sigma_{2s} + \sigma_3 \sigma_1) - \sigma_1 \gamma_4 + \sigma_{1ss} - (\sigma_2 \sigma_3)_s \\ \sigma_{3u} &= \sigma_2 (\sigma_{2s} + \sigma_3 \sigma_1) + \gamma_{4s} + \sigma_1(\sigma_{1s} - \sigma_2 \sigma_3) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.50) ve (4.51) denklemleri (5.1) de yerine yazılırsa $\{T, P, R\}$ çatısının $u$ zaman evolüsyonu aşıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} T_u &= -(\sigma_{2s} + \sigma_3 \sigma_1) P + (\sigma_{1s} - \sigma_2 \sigma_3) R \\ P_u &= (\sigma_{2s} + \sigma_3 \sigma_1) T + \gamma_4 R \\ R_u &= (\sigma_2 \sigma_3 - \sigma_{1s}) T - \gamma_4 P \end{aligned} \tag{5.14}$$

Regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre birinci sınıf için girdap filament yüzeyinin birinci temel formun katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} E &= \langle h_s, h_s \rangle = \langle T, T \rangle = 1 \\ F &= \langle h_s, h_u \rangle = \langle T, -\sigma_2 P + \sigma_1 R \rangle = 0 \\ G &= \langle h_u, h_u \rangle = \langle -\sigma_2 P + \sigma_1 R, -\sigma_2 P + \sigma_1 R \rangle = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \end{aligned} \tag{5.15}$$

(4.14) ve (3.16) kullanılarak yazıldığında regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre birinci sınıf girdap filament yüzeyinin birinci temel formu aşağıdaki gibi verilir:

$$I = ds^2 + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) du^2 \tag{5.16}$$

Regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya birinci sınıf için girdap filament yüzeyinin birim normali

$$\mathbb{N}_4 = \frac{h_s \times h_u}{\| h_s \times h_u \|} = \frac{T \times (\sigma_1 R - \sigma_2 P)}{\| T \times (\sigma_1 R - \sigma_2 P) \|} = -\frac{(\sigma_1 P + \sigma_2 R)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \tag{5.17}$$

biçiminde bulunur. Regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre birinci sınıf için girdap filament yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$h_{ss} = \sigma_1 P + \sigma_2 R \tag{5.18}$$

$$h_{su} = -(\sigma_{2s} + \sigma_3\sigma_1)P + (\sigma_{1s} - \sigma_2\sigma_3)R \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned} h_{uu} &= -\sigma_{2u}P_u - \sigma_2 P_u + \sigma_{1u}R + \sigma_1 R_u \\ &= -(\sigma_1\sigma_{1s} + \sigma_2\sigma_{2s})T - (\sigma_{2u} + \sigma_1\gamma_4)P + (\sigma_{1u} - \sigma_2\gamma_4)R \end{aligned} \tag{5.20}$$

(5.17), (5.18), (5.19) ve (5.20) denklemleri kullanılarak ikinci temel formun katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} l &= < h_{ss,}\mathbb{N}_4, > \\ &= - < \sigma_1 P + \sigma_2 R, \tfrac{(\sigma_1 P + \sigma_2 R)}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} > \\ &= -\tfrac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \end{aligned} \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned} m &= < h_{su}, \mathbb{N}_4 > \\ &= < -(\sigma_{2s} + \sigma_3\sigma_1)P + (\sigma_{1s} - \sigma_2\sigma_3)R, -\tfrac{(\sigma_1 P + \sigma_2 R)}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} > \\ &= \tfrac{(\sigma_1\sigma_{2s} + \sigma_3(\sigma_1^2+\sigma_2^2) - \sigma_{1s}\sigma_2)}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \end{aligned} \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned} n &= < h_{uu}, \mathbb{N}_4 > \\ &= < -(\sigma_1\sigma_{1s} + \sigma_2\sigma_{2s})T - (\sigma_{2u} + \sigma_1\gamma_4)P + (\sigma_{1u} - \sigma_2\gamma_4)R, -\tfrac{(\sigma_1 P + \sigma_2 R)}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} > \\ &= \tfrac{(\gamma_4(\sigma_1^2+\sigma_2^2) + \sigma_1\sigma_{2u} - \sigma_2\sigma_{1u})}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \end{aligned} \tag{5.23}$$

(3.17), (5.21), (5.22) ve (5.23) denklemleri kullanılarak regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre birinci sınıf girdap filament yüzeyinin ikinci temel formu

$$\begin{aligned} II = \tfrac{1}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}((\sigma_1^2+\sigma_2^2)ds^2 + 2(\sigma_3((\sigma_1^2+\sigma_2^2) + \sigma_1\sigma_{2s} + \sigma_{1s}\sigma_2)dsdu \\ +\gamma_4(\sigma_1^2+\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_{2u} - \sigma_{1u}\sigma_2)du^2 \end{aligned} \tag{5.24}$$

elde edilir. (5.17), (5.21), (5.22),(5.23) denklemleri kullanılarak regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre birinci sınıf girdap filament yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$\begin{aligned} K &= \tfrac{ln-m^2}{EG-F^2} \\ &= \tfrac{-(\sigma_1^2+\sigma_2^2)(\gamma_4(\sigma_1^2+\sigma_2^2) - \sigma_1\sigma_{2u} + \sigma_2\sigma_{1u}) + ((\sigma_1\sigma_{2s} + \sigma_3(\sigma_1^2+\sigma_2^2) - \sigma_{1s}\sigma_2))^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2} \end{aligned} \tag{5.25}$$

ve

$$\begin{aligned} H &= \frac{En+Gl-2Fm}{2(EG-F^2)} \\ &= -\frac{(\gamma_4(\sigma_1^2+\sigma_2^2)+\sigma_1\sigma_{2u}-\sigma_2\sigma_{1u})+(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \tag{5.26}$$

biçiminde elde edilir. (5.25), (5.26) denklemleri kullanılarak regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatısına göre girdap filament yüzeyinin asli eğrilikleri

$$\begin{aligned} k_1 &= H+\sqrt{H^2-K} \\ &= \frac{(-\gamma_4(\sigma_1^2+\sigma_2^2)-\sigma_1\sigma_{2u}+\sigma_2\sigma_{1u})-(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad +\sqrt{\begin{array}{c}(\frac{(-\gamma_4(\sigma_1^2+\sigma_2^2)-\sigma_1\sigma_{2u}+\sigma_2\sigma_{1u})-(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^{\frac{3}{2}}})^2 \\ +\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)(\gamma_4(\sigma_1^2+\sigma_2^2)-\sigma_1\sigma_{2u}+\sigma_2\sigma_{1u})-((\sigma_1\sigma_{2s}+\sigma_3(\sigma_1^2+\sigma_2^2)-\sigma_{1s}\sigma_2))^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}\end{array}} \end{aligned} \tag{5.27}$$

ve

$$\begin{aligned} k_2 &= H-\sqrt{H^2-K} \\ &= \frac{(-\gamma_4(\sigma_1^2+\sigma_2^2)-\sigma_1\sigma_{2u}+\sigma_2\sigma_{1u})-(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad -\sqrt{\begin{array}{c}(\frac{(-\gamma_4(\sigma_1^2+\sigma_2^2)-\sigma_1\sigma_{2u}+\sigma_2\sigma_{1u})-(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^{\frac{3}{2}}})^2 \\ +\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)(\gamma_4(\sigma_1^2+\sigma_2^2)-\sigma_1\sigma_{2u}+\sigma_2\sigma_{1u})-((\sigma_1\sigma_{2s}+\sigma_3(\sigma_1^2+\sigma_2^2)-\sigma_{1s}\sigma_2))^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}\end{array}} \end{aligned} \tag{5.28}$$

elde edilmiş olur.

Regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre birinci sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeyleri

$$\Upsilon_4(s,u) = h(s,u)+k_i^{-1}(s,u)\mathbb{N}_4(s,u), \quad i=1,2 \tag{5.29}$$

şeklinde tanımlansın. $k_i$ (5.27) ve (5.28) denklemlerinde bulunan asli eğrilikler ve

$$\mathbb{N}_4 = -\frac{\sigma_1 P+\sigma_2 R}{c_4}, c_4 = \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$$

olarak alınır. (5.29) eşitliğinin $s$ yay parametresi ve $u$ zaman evolüsyonuna göre türevini alırsak

$$\begin{aligned} \Upsilon_{4s}(s,u) &= \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{k_i c_4}T \\ &\quad +\frac{\sigma_1 k_i^2 c_4^2+(\sigma_{1s}+\sigma_2\sigma_3)k_i c_4+\sigma_1(k_i c_{4s}-k_{is}c_4)}{k_i^2 c_4^2}P \\ &\quad +\frac{\sigma_3 k_i^2 c^2-(\sigma_{2s}-\sigma_1\sigma_3)k_i c+\sigma_2(k_i c_s-k_{is}c_2)}{k_i^2 c_4^2}R \end{aligned} \tag{5.30}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{4u}(s,u) &= \frac{\sigma_{2s}\sigma_1-(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\sigma_3-\sigma_{1s}\sigma_2}{k_i c_4}T \\ &\quad +\frac{-(\sigma_{2s}+\sigma_1\sigma_3)k_i^2 c_4^2+(\gamma_1\sigma_2-\sigma_{2u})k_i c_4+\sigma_1(k_i c_{4u}-k_{iu}c_4)}{k_i^2 c_4^2}P \\ &\quad +\frac{(\sigma_{1s}-\sigma_2\sigma_3)k_i^2 c_4^2-(\sigma_{3u}+\gamma_1\sigma_1)k_i c_4+\sigma_2(k_i c_{4u}-k_{iu}c_4)}{k_i^2 c_4^2}R \end{aligned} \tag{5.31}$$

biçiminde elde edilir. Regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre birinci sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeylerinin birim normali

$$\tilde{\mathbb{N}}_4 = \frac{\lambda_{10}T+\lambda_{11}P+\lambda_{12}R}{\sqrt{\lambda_{10}^2+\lambda_{11}^2+\lambda_{12}^2}}, \sqrt{\lambda_{10}^2+\lambda_{11}^2+\lambda_{12}^2} \neq 0 \tag{5.32}$$

şeklinde bulunur. Burada

$$\begin{aligned}
\lambda_{10} &= \mathring{b}_4\mathring{d}_4 - \mathring{c}_4\mathring{e}_4 \\
\lambda_{11} &= \mathring{c}_4\mathring{d}_4 - \mathring{a}_4\mathring{f}_4 \\
\lambda_{12} &= \mathring{a}_4\mathring{e}_4 - \mathring{b}_4\mathring{d}_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathring{a}_4 &= \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{k_i c_4} \\
\mathring{b}_4 &= \frac{\sigma_1 k_i^2 c_4^2+(\sigma_{1s}+\sigma_2\sigma_3)k_i c_4-\sigma_1(k_{is}c_4-k_i c_{4s})}{k_i^2 c_4^2} \\
\mathring{c}_4 &= \frac{\sigma_3 k_i^2 c_4^2-(\sigma_{2s}+\sigma_1\sigma_3)k_i c_4-\sigma_2(k_{is}c_4-k_i c_{4s})}{k_i^2 c_4^2} \\
\mathring{d}_4 &= \frac{\sigma_{2s}\sigma_1-(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\sigma_3-\sigma_{1s}\sigma_2}{k_i c_4} \\
\mathring{e}_4 &= \frac{-(\sigma_{2s}+\sigma_1\sigma_3)k_i^2 c_4^2+(\gamma_4\sigma_2-\sigma_{2u})k_i c_4+\sigma_1(k_i c_{4u}-k_{iu}c_4)}{k_i^2 c_4^2} \\
\mathring{f}_4 &= \frac{(\sigma_{1s}-\sigma_2\sigma_3)k_i^2 c_4^2-(\sigma_{3u}+\gamma_4\sigma_1)k_i c_4+\sigma_2(k_i c_{4u}-k_{iu}c_4)}{k_i^2 c_4^2}
\end{aligned}$$

şeklinde verilmiştir. Regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre birinci sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeylerinin birinci temel formun katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
\tilde{E} &= \langle \Upsilon_{4s}(s,u), \Upsilon_{4s}(s,u)\rangle = \mathring{a}_4^2+\mathring{b}_4^2+\mathring{c}_4^2 \\
\tilde{F} &= \langle \Upsilon_{4s}(s,u), \Upsilon_{4u}(s,u)\rangle = \mathring{a}_4\mathring{d}_4+\mathring{b}_4\mathring{e}_4+\mathring{c}_4\mathring{f}_4 \\
\tilde{G} &= \langle \Upsilon_{4u}(s,u), \Upsilon_{4u}(s,u)\rangle = \mathring{d}_4^2+\mathring{e}_4^2+\mathring{f}_4^2
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre birinci sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeylerinin ikinci temel formunun katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{4ss}(s,u) &= \mathring{a}_{4s}T+\mathring{a}_4T_s+\mathring{b}_{4s}P+\mathring{b}_4P_s+\mathring{c}_{4s}R+\mathring{c}_4R_s \\
&= (\mathring{a}_{4s}-\mathring{b}_4\sigma_1-\mathring{c}_4\sigma_2)T+(\mathring{a}_4\sigma_1+\mathring{b}_{4s}-\mathring{c}_4\sigma_3)P \\
&\quad +(\mathring{a}_4\sigma_2+\mathring{b}_4\sigma_3+\mathring{c}_{4s})R
\end{aligned} \tag{5.34}$$

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{4uu}(s,u) &= \mathring{d}_{4u}T+\mathring{d}_4T_u+\mathring{e}_{4u}P+\mathring{e}_4P_u+\mathring{f}_{4u}R+\mathring{f}_4R_u \\
&= (\mathring{d}_{4u}+e_1(\sigma_{2s}+\sigma_3\sigma_1)+f_4(\sigma_2\sigma_3-\sigma_{1s}))T \\
&\quad -(\mathring{d}_4(\sigma_{2s}+\sigma_3\sigma_1)-\mathring{e}_{4u}+\mathring{f}_4\gamma_1)P \\
&\quad +((\sigma_{1s}-\sigma_2\sigma_3)\mathring{d}_4+\mathring{e}_4\gamma_4+\mathring{f}_{4u})R
\end{aligned} \tag{5.35}$$

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{4su}(s,u) &= \mathring{a}_{4u}T+\mathring{a}_4T_u+\mathring{b}_{4u}P+\mathring{b}_4P_u+\mathring{c}_{4u}R+\mathring{c}_4R_u \\
&= (\mathring{a}_{4u}+\mathring{b}_4(\sigma_{2s}+\sigma_3\sigma_1)+\mathring{c}_4(\sigma_2\sigma_3-\sigma_{1s}))T \\
&\quad +(\mathring{e}_{4u}-\mathring{d}_4(\sigma_{2s}+\sigma_3\sigma_1)-\mathring{f}_4\gamma_4)P \\
&\quad +(\mathring{a}_4(\sigma_{1s}-\sigma_2\sigma_3)+\mathring{b}_4\gamma_4+\mathring{c}_{4u})R
\end{aligned} \tag{5.36}$$

bulunur. (5.36),(5.32), (5.34) ve (5.35) denklemleri kullanılarak ikinci temel formun katsayıları aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} \tilde{l} &= <\Upsilon_{4ss}(s,u), \tilde{\mathbb{N}}_4> \\ &= \frac{\mu_{10}\lambda_{10}+\mu_{11}\lambda_{11}+\mu_{12}\lambda_{12}}{\sqrt{\lambda_{10}+\lambda_{11}+\lambda_{12}}} \end{aligned} \tag{5.37}$$

$$\begin{aligned} \tilde{m} &= <\Upsilon_{4su}(s,u), \tilde{\mathbb{N}}_4> \\ &= \frac{\varpi_{10}\lambda_{10}+\varpi_{11}\lambda_{11}\varpi_{12}\lambda_{12}}{\sqrt{\lambda_{10}+\lambda_{11}+\lambda_{12}}} \end{aligned} \tag{5.38}$$

$$\begin{aligned} \tilde{n} &= <\Upsilon_{4uu}(s,u), \tilde{\mathbb{N}}_4> \\ &= \frac{\varrho_{10}\lambda_{10}+\varrho_{11}\lambda_{11}+\varrho_{12}\lambda_{12}}{\sqrt{\lambda_{10}+\lambda_{11}+\lambda_{12}}} \end{aligned} \tag{5.39}$$

Burada

$$\begin{aligned} \mu_{10} &= \mathring{a}_{4s} - \mathring{b}_4\sigma_1 - \mathring{c}_4\sigma_2 \\ \mu_{11} &= \mathring{a}_4\sigma_1 + \mathring{b}_{4s} - \mathring{c}_4\sigma_3 \\ \mu_{12} &= \mathring{a}_4\sigma_2 + \mathring{b}_4\sigma_3 + \mathring{c}_{4s} \\ \varpi_{10} &= \mathring{d}_{4u} + \mathring{e}_4(\sigma_{2s} + \sigma_3\sigma_1) + \mathring{f}_4(-\sigma_{1s} + \sigma_2\sigma_3) \\ \varpi_{11} &= -\mathring{d}_4(\sigma_{2s} + \sigma_3\sigma_1) + \mathring{e}_{4u} - \mathring{f}_4\gamma_4 \\ \varpi_{12} &= (\sigma_{1s} - \sigma_2\sigma_3)\mathring{d}_4 + \mathring{e}_4\gamma_4 + \mathring{f}_{4u} \\ \varrho_{10} &= \mathring{a}_{4u} + \mathring{e}_4(\sigma_{2s} + \sigma_3\sigma_1) + \mathring{c}_4(\sigma_2\sigma_3 - \sigma_{1s}) \\ \varrho_{11} &= \mathring{e}_{4u} - \mathring{d}_4(\sigma_{2s} + \sigma_3\sigma_1) - \mathring{f}_4\gamma_4 \\ \varrho_{12} &= \mathring{a}_4(\sigma_{1s} - \sigma_2\sigma_3) + \mathring{b}_4\gamma_4 + \mathring{c}_{4u} \end{aligned}$$

şeklinde verilir. (5.33), (5.37), (5.38), (5.39) denklemleri kullanılarak regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre birinci sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeylerinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= \frac{\tilde{l}\tilde{n}-\tilde{m}^2}{\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2} \\ &= \frac{\begin{array}{r}(\mu_{10}\lambda_{10}+\mu_{11}\lambda_{11}+\mu_{12}\lambda_{12})(\varrho_{10}\lambda_{10}+\varrho_{11}\lambda_{11}+\varrho_{12}\lambda_{12}) \\ -(\varpi_{10}\lambda_{10}+\varpi_{11}\lambda_{11}\varpi_{12}\lambda_{12})^2\end{array}}{\sqrt{\lambda_{10}+\lambda_{11}+\lambda_{12}}((\mathring{a}_4^2+\mathring{b}_4^2+\mathring{c}_4^2)(\mathring{a}_4\mathring{d}_4+\mathring{b}_4\mathring{e}_4+\mathring{c}_4\mathring{f}_4)-(\mathring{d}_4^2+\mathring{e}_4^2+\mathring{f}_4^2)^2)} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \frac{\tilde{E}\tilde{n}+\tilde{G}\tilde{l}-2\tilde{F}\tilde{m}}{2(\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2)} \\ &= \frac{\begin{array}{r}(\mathring{a}_4^2+\mathring{b}_4^2+\mathring{c}_4^2)(\varrho_{10}\lambda_{10}+\varrho_{11}\lambda_{11}+\varrho_{12}\lambda_{12}) \\ +(\mathring{a}_4\mathring{d}_4+\mathring{b}_4\mathring{e}_4+\mathring{c}_4\mathring{f}_4)(\mu_{10}\lambda_{10}+\mu_{11}\lambda_{11}+\mu_{12}\lambda_{12}) \\ -2(\mathring{d}_4^2+\mathring{e}_4^2+\mathring{f}_4^2)(\varpi_{10}\lambda_{10}+\varpi_{11}\lambda_{11}\varpi_{12}\lambda_{12})\end{array}}{2\sqrt{\lambda_{10}+\lambda_{11}+\lambda_{12}}((\mathring{a}_1^2+\mathring{b}_1^2+\mathring{c}_1^2)(\mathring{a}_4\mathring{d}_4+\mathring{b}_4\mathring{e}_4+\mathring{c}_4\mathring{f}_4)-(\mathring{d}_4^2+\mathring{e}_4^2+\mathring{f}_4^2)^2)} \end{aligned}$$

şeklinde verilmiş olur.

## 5.2. Regüler Yüzey Üzerinde Konumsal Uyarlanmış Çatıya Göre İkinci Sınıf için Girdap Filament Akısı Tarafından Üretilen Fokal Yüzeyler

3 boyutlu Öklid uzayında hareketli uzay eğrisi $h$ ve $h = h(s,u)$ hareketli uzay eğrisinin konum vektörü olsun. İkinci sınıf için regüler yüzey üzerinde üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre $u$ zaman evolüsyonunun denklemleri aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{array}{rcccl} T_u & = & \Psi_5 \times T & = & -j_2 P + \gamma_5 R \\ P_u & = & \Psi_5 \times P & = & j_2 T + w_4 R \\ R_u & = & \Psi_5 \times R & = & -\gamma_5 T - w_4 P \end{array} \tag{5.40}$$

Burada $\gamma_5,\ j_2,\ w_4$ diferensiyellebilir fonksiyonlar olmak üzere regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatı vektörü $\Psi_5 = j_2 T - \gamma_5 P + w_4 R$ olarak verilir. (5.40) ve(3.32) denklemlerinden kullanırsak

$$\begin{array}{rcl} T_s & = & \sigma_1 P + \sigma_2 R \\ T_{su} & = & \sigma_{1u} P + \sigma_1 P_u + \sigma_{2u} R + \sigma_2 R_u \\ & = & \sigma_{1u} P + \sigma_1(-j_2 P + \gamma_5 R) + \sigma_{2u} Z - \sigma_2(\gamma_5 T + w_4 P) \\ & = & -(\sigma_1 j_2 + \sigma_2 \gamma_5) T + (\sigma_{1u} - \sigma_2 w_4) P + (\sigma_1 w_4 + \sigma_{2u}) R \end{array} \tag{5.41}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} T_u & = & \gamma_5 R - j_2 P \\ T_{us} & = & -j_{2s} P - j_2 P_s + \gamma_{5s} R + \gamma_5 R_s \\ & = & -j_{2s} P + y(\sigma_3 R - \sigma_1 T) + \gamma_{5s} Z - \gamma_5(\sigma_2 T + \sigma_3 P) \\ & = & -(j_2 \sigma_1 + \gamma_5 \sigma_2) T + (j_{2s} - \gamma_5 \sigma_3) P + (\gamma_{5s} - j_2 \sigma_3) R \end{array} \tag{5.42}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{array}{rcl} P_s & = & \sigma_3 R - \sigma_1 T \\ P_{su} & = & -\sigma_{1u} T - \sigma_1 T_u + \sigma_{3u} R + \sigma_3 R_u \\ & = & -\sigma_{1u} T - \sigma_1(-jP + \gamma_5 R) + \sigma_{3u} R - \sigma_3(\gamma_2 T + wP) \\ & = & -(\sigma_{1u} + \sigma_3 \gamma_5) T + (\sigma_1 j - \sigma_3 w) P + (\sigma_{3u} - \sigma_1 \gamma_5) R \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} P_u & = & j_2 T + w_4 R \\ P_{us} & = & j_{2s} T + j_2 T_s + w_{4s} R + w_4 R_s \\ & = & j_{2s} T + j_2(\sigma_1 P + \sigma_2 R) + w_{4s} R - w_4(\sigma_1 T + \sigma_3 P) \\ & = & (j_{2s} - w_4 \sigma_2) T + (j_2 \sigma_1 - w_4 \sigma_3) P + (j_2 \sigma_2 + w_{4s}) R \end{array} \tag{5.43}$$

bulunur.

$$T_{us} = T_{su}, P_{us} = P_{su} \tag{5.44}$$

kullanılarak

$$\begin{aligned} \sigma_{1u} &= \sigma_2 w - j_{2s} - \gamma_2\sigma_3 \\ \sigma_{2u} &= j_2\sigma_3 - \sigma_1\gamma_5 + w_{4s} \\ \sigma_{3u} &= \sigma_1 w - j_2\sigma_2 + \gamma_{5s} \end{aligned} \tag{5.45}$$

elde edilir. Eğrinin hız vektörü

$$h_u = f_5 T + d_5 P + q_5 R \tag{5.46}$$

olsun. (5.46) türevi alınarak

$$\begin{aligned} h_{us} &= f_{5s}T + f_5 T_s + d_{5s}P + d_5 P_s + q_{5s}R + q_5 R_s \\ &= (f_{5s} - d_5 j_2 - q_5\sigma_1)T + (f_5\sigma_1 + d_{5s} - q_5\sigma_3)E + (f_5\sigma_2 + q_{5s} + d_5\gamma_5)R \end{aligned}$$

bulunur. Eğer denklem (2.1) de

$$X = h_s = P \tag{5.47}$$

alınırsa regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre ikinci sınıf girdap filament akı denklemleri aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} h_u &= P \times P_s \\ &= \sigma_3 T + \sigma_1 R \end{aligned} \tag{5.48}$$

$h_{su} = h_{us}$ olduğundan

$$\begin{aligned} f_{5s} &= d_{5s} j_2 - q_5\sigma_1 \\ d_{5s} &= j_2 + q_5\sigma_3 - f_5\sigma_1 \\ q_{5s} &= w_4 - f_5\sigma_2 - d_5\gamma_5 \end{aligned} \tag{5.49}$$

denklemleri bulunur. (5.46) ve (5.48) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} f_5 &= \sigma_3 \\ d_5 &= 0 \\ q_5 &= \sigma_1 \end{aligned} \tag{5.50}$$

elde edilir. (5.11) deki eşitlikler (5.10) eşitliklerinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} j_2 &= \sigma_{3s} - \sigma_2\sigma_1 \\ w_4 &= \sigma_{1s} + \sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \tag{5.51}$$

elde edilir. (5.51) denkleminin türevi alındığında

$$\begin{aligned} j_{2s} &= \sigma_{3ss} - (\sigma_2\sigma_1)_s \\ w_{4s} &= \sigma_{1ss} + (\sigma_2\sigma_3)_s \end{aligned} \tag{5.52}$$

bulunur. (5.51) ve (5.52) denklemlerinde bulunan eşitlikler (5.45) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \sigma_{1u} &= -(\sigma_{3ss} + (\sigma_2\sigma_1)_s + \sigma_3\gamma_5 + \sigma_3\sigma_{1s}\sigma_2) \\ \sigma_{2u} &= \gamma_{5s} - \sigma_3(\sigma_{3s} - \sigma_1\sigma_2) + \sigma_1(\sigma_2\sigma_3 - \sigma_{1s}) \\ \sigma_{3u} &= \sigma_2\left(\sigma_{3s} - \sigma_2\sigma_1\right) + \sigma_1\gamma_5 + \sigma_{1ss} + (\sigma_2\sigma_2)_s \end{aligned}$$

elde edilir. denklemleri, (5.51) ve (5.52) denklemleri (5.40) denkleminde yerine yazılırsa $\{T, P, R\}$ çatısının $u$ zaman evolüsyonu tekrar aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned} T_u &= (\sigma_{3s} + \sigma_2\sigma_1)P + \gamma_5 R \\ P_u &= (\sigma_{3s} - \sigma_2\sigma_1)T + (\sigma_{1s} + \sigma_2\sigma_3)R \\ R_u &= -\gamma_5 T - (\sigma_{1s} + \sigma_2\sigma_3)P \end{aligned} \tag{5.53}$$

Regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre ikinci sınıf için girdap filament yüzeyinin birinci temel formun katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} E &= \langle h_s, h_s\rangle = \langle P, P\rangle = 1 \\ F &= \langle h_s, h_u\rangle = \langle P, \sigma_3 T + \sigma_1 R\rangle = 0 \\ G &= \langle h_u, h_u\rangle = \langle \sigma_3 T + \sigma_1 R, \sigma_3 T + \sigma_1 R\rangle = \sigma_1^2 + \sigma_3^2 \end{aligned} \tag{5.54}$$

(3.16) ve (5.54) kullanılarak yazıldığında regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre ikinci sınıf girdap filament yüzeyinin birinci temel formu aşağıdaki gibi verilir:

$$I = ds^2 + (\sigma_1^2 + \sigma_3^2)du^2 \tag{5.55}$$

Regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya ikinci sınıf için girdap filament yüzeyinin birim normali

$$\mathbb{N}_5 = \frac{h_s \times h_u}{\parallel h_s \times h_u \parallel} = \frac{P \times (\sigma_3 T + \sigma_1 R}{\parallel T \times (\sigma_1 R + \sigma_3 T) \parallel} = \frac{\sigma_1 T - \sigma_3 R}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2}} \tag{5.56}$$

bulunur. Regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre ikinci sınıf için için girdap filament yüzeyinin ikinci temel formun katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$h_{ss} = \sigma_3 R - \sigma_1 T \tag{5.57}$$

$$h_{su} = (\sigma_{3s} - \sigma_1\sigma_2)T + (\sigma_{1s} + \sigma_2\sigma_3)R \tag{5.58}$$

$$\begin{aligned} h_{uu} &= \sigma_{3u} T + \sigma_3 T_u + \sigma_{1u} R + \sigma_1 R_u \\ &= (\sigma_{3u} - \sigma_1\gamma_5)\, T + (\sigma_3\sigma_{3s} - \sigma_1\sigma_{1s})P + (\sigma_3\gamma_5 + \sigma_{1u})R \end{aligned} \tag{5.59}$$

(5.56), (5.57), (5.58) ve (5.59) denklemleri kullanılarak ikinci temel formun katsayıları aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} l &= < h_{ss}, \mathbb{N}_5 > \\ &= < \sigma_3 R - \sigma_1 T, \frac{\sigma_1 T - \sigma_3 R}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2}} > \\ &= -\frac{(\sigma_1^2 + \sigma_3^2)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2}} \end{aligned} \tag{5.60}$$

$$\begin{aligned} m &= < h_{su}, \mathbb{N}_5 > \\ &= < (\sigma_{3s} - \sigma_1\sigma_2)T + (\sigma_{1s} + \sigma_2\sigma_3)R, \frac{\sigma_1 T - \sigma_3 R}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2}} > \\ &= \frac{(\sigma_1\sigma_{3s} - \sigma_2(\sigma_1^2 + \sigma_3^2) - \sigma_{1s}\sigma_3)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2}} \end{aligned} \tag{5.61}$$

$$\begin{aligned} n &= < h_{uu}, \mathbb{N}_5 > \\ &= < (\sigma_{3u} - \sigma_1\gamma_5)\,T + (\sigma_3\sigma_{3s} - \sigma_1\sigma_{1s})P + (\sigma_3\gamma_5 + \sigma_{1u})R, \tfrac{\sigma_1 T - \sigma_3 R}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_3^2}} > \\ &= \tfrac{(\gamma_5(\sigma_1^2+\sigma_3^2) - \sigma_1\sigma_{3u} + \sigma_{1u}\sigma_3)}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_3^2}} \end{aligned} \tag{5.62}$$

(3.17),(5.60), (5.61) ve (5.62) denklemlerinden regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre birinci sınıf girdap filament akı yüzeyinin ikinci temel formu

$$\begin{aligned} II = \tfrac{1}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_3^2}}((\sigma_1^2+\sigma_3^2)ds^2 + 2(\sigma_1(\sigma_{3s} - \sigma_1\sigma_2) - \sigma_3(\sigma_{1s} + \sigma_2\sigma_3))dsdu \\ +(-\gamma_5(\sigma_1^2+\sigma_3^2) - \sigma_1\sigma_{3u} - \sigma_{1u}\sigma_3)) \end{aligned} \tag{5.63}$$

elde edilir. (5.54), (5.60), (5.61), (5.62) denklemleri kullanılarak regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre ikinci sınıf girdap filament yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$\begin{aligned} K &= \tfrac{ln-m^2}{EG-F^2} \\ &= -\tfrac{(\sigma_1^2+\sigma_3^2)(\gamma_5(\sigma_1^2+\sigma_3^2) - \sigma_1\sigma_{3u} + \sigma_{1u}\sigma_3) + (\sigma_1\sigma_{3s} - \sigma_2(\sigma_1^2+\sigma_3^2) - \sigma_{1s}\sigma_3)^2}{(\sigma_1^2+\sigma_3^2)^2} \end{aligned} \tag{5.64}$$

ve

$$\begin{aligned} H &= \tfrac{En+Gl-2Fm}{2(EG-F^2)} \\ &= \tfrac{\gamma_5(\sigma_1^2+\sigma_3^2)\sigma_1\sigma_{3u} + \sigma_{1u}\sigma_3 - (\sigma_1^2+\sigma_3^2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_3^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \tag{5.65}$$

elde edilir. (5.64), (5.65) denklemleri kullanılarak regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatısına göre girdap filament yüzeyinin asli eğrilikleri

$$\begin{aligned} k_1 &= H + \sqrt{H^2 - K} \\ &= \tfrac{\gamma_5(\sigma_1^2+\sigma_3^2)\sigma_1\sigma_{3u} + \sigma_{1u}\sigma_3 - (\sigma_1^2+\sigma_3^2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_3^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad + \sqrt{\tfrac{(\frac{\gamma_5(\sigma_1^2+\sigma_3^2)\sigma_1\sigma_{3u} + \sigma_{1u}\sigma_3 - (\sigma_1^2+\sigma_3^2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_3^2)^{\frac{3}{2}}})^2}{\frac{(\sigma_1^2+\sigma_3^2)(\gamma_5(\sigma_1^2+\sigma_3^2) - \sigma_1\sigma_{3u} + \sigma_{1u}\sigma_3) + (\sigma_1\sigma_{3s} - \sigma_2(\sigma_1^2+\sigma_3^2) - \sigma_{1s}\sigma_3)^2}{(\sigma_1^2+\sigma_3^2)^2}}} \end{aligned} \tag{5.66}$$

ve

$$\begin{aligned} k_2 &= H + \sqrt{H^2 - K} \\ &= -\tfrac{-\gamma_5(\sigma_1^2+\sigma_3^2) + \sigma_1\sigma_{3u} - \sigma_{1u}\sigma_3 + (\sigma_1^2+\sigma_3^2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_3^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad - \sqrt{\tfrac{(\frac{\gamma_5(\sigma_1^2+\sigma_3^2)\sigma_1\sigma_{3u} + \sigma_{1u}\sigma_3 - (\sigma_1^2+\sigma_3^2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_3^2)^{\frac{3}{2}}})^2}{\frac{(\sigma_1^2+\sigma_3^2)(\gamma_5(\sigma_1^2+\sigma_3^2) - \sigma_1\sigma_{3u} + \sigma_{1u}\sigma_3) + (\sigma_1\sigma_{3s} - \sigma_2(\sigma_1^2+\sigma_3^2) - \sigma_{1s}\sigma_3)^2}{(\sigma_1^2+\sigma_3^2)^2}}} \end{aligned} \tag{5.67}$$

elde edilmiş olur.

Regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre ikinci sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeyleri

$$\Upsilon_5(s,u) = h(s,u) + k_i^{-1}(s,u)\mathbb{N}_5(s,u), \quad i = 1,2 \tag{5.68}$$

şeklinde tanımlansın. $k_i$ (5.66) ve (5.67) denklemlerinde bulunan asli eğrilikler ve

$$\mathbb{N}_5 = \frac{\sigma_1 T - \sigma_3 Z}{c_5}, c_5 = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2}$$

olarak alınır. (5.68) eşitliğinin $s$ yay parametresine ve $u$ zaman bağlı türevini alırsak;

$$\begin{aligned}\Upsilon_{5s}(s,u) &= \frac{\sigma_1 k_i^2 c_5^2 + (\sigma_{1s}+\sigma_2\sigma_3)k_i c_5 - \sigma_1(k_{is}c_5 - k_i c_{5s})}{k_i^2 c_5^2} T \\ &\quad + \frac{\sigma_1^2+\sigma_3^2}{k_i c_5} P \\ &\quad + \frac{\sigma_3 k_i^2 c_5^2 + (\sigma_{3s}+\sigma_1\sigma_2)k_i c_5 + \sigma_3(k_{is}c_5 - k_i c_{5s})}{k_i^2 c_5^2} R \end{aligned} \tag{5.69}$$

$$\begin{aligned}\Upsilon_{5u}(s,u) &= \frac{(\sigma_{3s}-\sigma_1\sigma_2)k_i^2 c_2^2 + (\sigma_{1u}+\gamma_2\sigma_3)k_i c_5 - \sigma_1(k_{iu}c_5 - k_i c_{5u})}{k_i^2 c_5^2} T \\ &\quad + \frac{(\sigma_1^2+\sigma_3^2)\sigma_{2s} + \sigma_{3s}\sigma_1 + \sigma_3\sigma_{1s}}{k_i c_5} P \\ &\quad + \frac{(\sigma_{1s}-\sigma_2\sigma_3)k_i^2 c_5^2 + (\gamma_2\sigma_1 - \sigma_{3u})k_i c_5 - \sigma 3(k_{iu}c_5 - k_i c_{5u})}{k_i^2 c_5^2} R \end{aligned} \tag{5.70}$$

biçinde elde edilir. Regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre ikinci sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeylerinin birim normali

$$\tilde{\mathbb{N}}_4 = \frac{\lambda_{13}T + \lambda_{14}P + \lambda_{15}R}{\sqrt{\lambda_{13}^2+\lambda_{14}^2+\lambda_{15}^2}}, \sqrt{\lambda_{13}^2 + \lambda_{14}^2 + \lambda_{15}^2} \neq 0 \tag{5.71}$$

şeklinde bulunur. Burada

$$\begin{aligned}\lambda_{13} &= \mathring{b}_5 \mathring{f}_5 - \mathring{c}_5 \mathring{e}_5 \\ \lambda_{14} &= \mathring{c}_5 \mathring{d}_5 - \mathring{a}_5 \mathring{f}_5 \\ \lambda_{15} &= \mathring{a}_5 \mathring{e}_5 - \mathring{b}_5 \mathring{d}_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathring{a}_5 &= \frac{\sigma_1 k_i^2 c_5^2 + (\sigma_{1s}+\sigma_2\sigma_3)k_i c_5 - \sigma_1(k_{is}c_5 - k_i c_{5s})}{k_i^2 c_5^2} \\ \mathring{b}_5 &= \frac{\sigma_1^2+\sigma_3^2}{k_i c_5} \\ \mathring{c}_5 &= \frac{\sigma_3 k_i^2 c_5^2 + (\sigma_{3s}+\sigma_1\sigma_2)k_i c_5 + \sigma_3(k_{is}c_5 - k_i c_{5s})}{k_i^2 c_5^2} \\ \mathring{d}_5 &= \frac{(\sigma_{3s}-\sigma_1\sigma_2)k_i^2 c_5^2 + (\sigma_{1u}+\gamma_2\sigma_3)k_i c_5 - \sigma_1(k_{iu}c_5 - k_i c_{5u})}{k_i^2 c_5^2} \\ \mathring{e}_5 &= \frac{(\sigma_1^2+\sigma_3^2)\sigma_{2s} + \sigma_{3s} + \sigma_3\sigma_{1s}}{k_i c_2} \\ \mathring{f}_5 &= \frac{(\sigma_{1s}-\sigma_2\sigma_3)k_i^2 c_5^2 + (\gamma_2\sigma_1 - \sigma_{3u})k_i c_5 - \sigma 3(k_{iu}c_5 - k_i c_{5u})}{k_i^2 c_5^2} \end{aligned}$$

şeklinde verilmiştir. Regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre ikinci sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeylerinin birinci temel formun katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}\tilde{E} &= \langle \Upsilon_{5s}(s,u), \Upsilon_{5s}(s,u) \rangle = \mathring{a}_5^2 + \mathring{b}_5^2 + \mathring{c}_5^2 \\ \tilde{F} &= \langle \Upsilon_{5s}(s,u), \Upsilon_{5u}(s,u) \rangle = \mathring{a}_5 \mathring{d}_5 + \mathring{b}_5 \mathring{e}_5 + \mathring{c}_5 \mathring{f}_5 \\ \tilde{G} &= \langle \Upsilon_{5u}(s,u), \Upsilon_{5u}(s,u) \rangle = \mathring{d}_5^2 + \mathring{e}_5^2 + \mathring{f}_5^2 \end{aligned} \tag{5.72}$$

Regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre ikinci sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeylerinin ikinci temel formun katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}\Upsilon_{5ss}(s,u) &= \mathring{a}_{5s}T + \mathring{a}_5 T_s + \mathring{b}_{5s}P + \mathring{b}_5 P_s + \mathring{c}_{5s}R + \mathring{c}_5 R_s \\ &= (\mathring{a}_{5s} - \mathring{b}_5\sigma_1 - \mathring{c}_5\sigma_2)T + (\mathring{a}_5\sigma_1 + \mathring{b}_{5s} - \mathring{c}_5\sigma_3)P \\ &\quad + (\mathring{a}_5\sigma_2 + \mathring{b}_5\sigma_3 + \mathring{c}_{5s})R \end{aligned} \tag{5.73}$$

$$\begin{aligned}\Upsilon_{5_{uu}}(s,u) &= \mathring{d}_{5u}T + \mathring{d}_5T_u + \mathring{e}_{5u}P + \mathring{e}_5P_u + \mathring{f}_{5u}R + \mathring{f}_5R_u \\ &= (\mathring{d}_{5u} + \mathring{e}_5(\sigma_{3s} - \sigma_2\sigma_1) - \mathring{f}_5\gamma_2)T \\ &\quad +(\mathring{d}_5(\sigma_{3s} + \sigma_2\sigma_1) + \mathring{e}_{5u} - \mathring{f}_5(\sigma_{1s} + \sigma_2\sigma_3))P \\ &\quad +(\mathring{d}_5\gamma_2 + (\sigma_{1s} + \sigma_2\sigma_3)\mathring{e}_5 + \mathring{f}_{5u})R\end{aligned} \tag{5.74}$$

$$\begin{aligned}\Upsilon_{5_{su}}(s,u) &= \mathring{a}_{5u}T + \mathring{a}_5T_u + \mathring{b}_{5u}P + \mathring{b}_5P_u + \mathring{c}_{5u}R + \mathring{c}_5R_u \\ &= (\mathring{a}_{5u} + \mathring{b}_5(\sigma_{3s} + \sigma_2\sigma_1) - \mathring{c}_5\gamma_2)T \\ &\quad +(\mathring{a}_5(\sigma_{3s} + \sigma_2\sigma_1) + \mathring{b}_{5u} + \mathring{c}_5(\sigma_{1s} + \sigma_2\sigma_3))P \\ &\quad +(\mathring{a}_5\gamma_2 + \mathring{b}_5(\sigma_{1s} + \sigma_2\sigma_3) + \mathring{c}_{5u})R\end{aligned} \tag{5.75}$$

bulunur. (5.71), (5.73), (5.74) ve (5.75) denklemleri kullanılarak ikinci temel formun katsayıları aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned}\tilde{l} &= <\Upsilon_{5ss}(s,u), \tilde{\mathbb{N}}_5> \\ &= \frac{\mu_{13}\lambda_{13}+\mu_{14}\lambda_{14}+\mu_{15}\lambda_{15}}{\sqrt{\lambda_{13}^2+\lambda_{14}^2+\lambda_{15}^2}}\end{aligned} \tag{5.76}$$

$$\begin{aligned}\tilde{m} &= <\Upsilon_{5_{su}}(s,u), \tilde{\mathbb{N}}_5> \\ &= \frac{\varpi_{13}\lambda_{13}+\varpi_{14}\lambda_{14}+\varpi_{15}\lambda_{15}}{\sqrt{\lambda_{13}^2+\lambda_{14}^2+\lambda_{15}^2}}\end{aligned} \tag{5.77}$$

$$\begin{aligned}\tilde{n} &= <\Upsilon_{5_{uu}}(s,u), \tilde{\mathbb{N}}_5> \\ &= \frac{\varrho_{13}\lambda_{13}+\varrho_{14}\lambda+\varrho_{15}\lambda_{15}}{\sqrt{\lambda_{13}^2+\lambda_{14}^2+\lambda_{15}^2}}\end{aligned} \tag{5.78}$$

ikinci temel formun katsayıları elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}\mu_{13} &= \mathring{a}_{5s} - \mathring{b}_5\sigma_1 - \mathring{c}_5\sigma_2 \\ \mu_{14} &= \mathring{a}_5\sigma_1 + \mathring{b}_{5s} - \mathring{c}_5\sigma_3 \\ \mu_{15} &= \mathring{a}_5\sigma_2 + \mathring{b}_5\sigma_3 + \mathring{c}_{5s} \\ \varpi_{13} &= \mathring{d}_{5u} + \mathring{e}_5(\sigma_{3s} - \sigma_2\sigma_1) - \mathring{f}_5\gamma_2 \\ \varpi_{14} &= \mathring{d}_5(\sigma_{3s} + \sigma_2\sigma_1) + \mathring{e}_{5u} - \mathring{f}_5(\sigma_{1s} + \sigma_2\sigma_3) \\ \varpi_{15} &= \mathring{d}_5\gamma_2 + (\sigma_{1s} + \sigma_2\sigma_3)\mathring{e}_5 + \mathring{f}_{5u} \\ \varrho_{13} &= \mathring{a}_{5u} + \mathring{b}_5(\sigma_{3s} + \sigma_2\sigma_1) - \mathring{c}_5\gamma_2 \\ \varrho_{14} &= \mathring{a}_5(\sigma_{3s} + \sigma_2\sigma_1) + \mathring{b}_{5u} + \mathring{c}_5(\sigma_{1s} + \sigma_2\sigma_3) \\ \varrho_{15} &= \mathring{a}_5\gamma_2 + \mathring{b}_5(\sigma_{1s} + \sigma_2\sigma_3) + \mathring{c}_{5u}\end{aligned} \tag{5.79}$$

şeklinde verilir. (5.72), (5.76), (5.77), (5.78),(5.79) denklemleri kullanılarak regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre ikinci sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeylerinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$\begin{aligned}\tilde{K} &= \frac{\tilde{l}\tilde{n}-\tilde{m}^2}{\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2} \\ &\quad (\mu_{13}\lambda_{13} + \mu_{14}\lambda_{14} + \mu_{15}\lambda_{15})(\varrho_{13}\lambda_{13} + \varrho_{14}\lambda + \varrho_{15}\lambda_{15}) \\ &\quad -(\varpi_{13}\lambda_{13} + \varpi_{14}\lambda_{14} + \varpi_{15}\lambda_{15})^2 \\ &= \frac{}{\sqrt{\lambda_{13}+\lambda_{14}+\lambda_{15}}((\mathring{a}_5^2+\mathring{b}_5^2+\mathring{c}_5^2)(\mathring{a}_5\mathring{d}_5+\mathring{b}_5\mathring{e}_5+\mathring{c}_5\mathring{f}_5)-(\mathring{d}_5^2+\mathring{e}_5^2+\mathring{f}_5^2)^2)}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= \frac{\tilde{E}\tilde{n}+\tilde{G}\tilde{l}-2\tilde{F}\tilde{m}}{2(\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2)} \\ &\quad (\mathring{a}_5^2+\mathring{b}_5^2+\mathring{c}_5^2)(\varrho_{13}\lambda_{13}+\varrho_{14}\lambda+\varrho_{15}\lambda_{15}) \\ &\quad +(\mathring{a}_5\mathring{d}_5+\mathring{b}_5\mathring{e}_5+\mathring{c}_5\mathring{f}_5)(\mu_{13}\lambda_{13}+\mu_{14}\lambda_{14}+\mu_{15}\lambda_{15}) \\ &= \frac{-2(\mathring{d}_5^2+\mathring{e}_5^2+\mathring{f}_5^2)(\varpi_{13}\lambda_{13}+\varpi_{14}\lambda_{14}+\varpi_{15}\lambda_{15})}{2\sqrt{\lambda_{13}+\lambda_{14}+\lambda_{15}}((\mathring{a}_5^2+\mathring{b}_5^2+\mathring{c}_5^2)(\mathring{a}_5\mathring{d}_5+\mathring{b}_5\mathring{e}_5+\mathring{c}_5\mathring{f}_5)-(\mathring{d}_5^2+\mathring{e}_5^2+\mathring{f}_5^2)^2)}\end{aligned}$$

şeklinde verilmiş olur.

## 5.3. Regüler Yüzey Üzerinde Konumsal Uyarlanmış Çatıya Üçüncü Sınıf için Girdap Filament Akısı Tarafından Üretilen Fokal Yüzeyler

3 boyutlu Öklid uzayında hareketli uzay eğrisi $h$ ve $h = h(s,u)$ hareketli uzay eğrisinin konum vektörü olsun. Üçüncü sınıf için regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre $u$ zaman evolüsyonunun denklemleri aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned}T_u &= \Psi_6 \times T = \gamma_6 P - j_3 R \\ P_u &= \Psi_6 \times P = -\gamma_6 T - v_2 R \\ R_u &= \Psi_6 \times R = j_3 T + v_2 P\end{aligned} \tag{5.80}$$

Burada $\gamma_6, j_3, v_2$ diferensiyellebilir fonksiyonlar olmak üzere regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatı vektörü, $\Psi_6 = j_3 T + v_2 P + \gamma_6 R$ olarak verilir. (5.80) ve (3.32) kullanılarak kullanırsak

$$\begin{aligned}T_s &= \sigma_1 P + \sigma_2 Z \\ T_{su} &= \sigma_{1u} P + \sigma_1 P_u + \sigma_{2u} R + \sigma_2 R_u \\ &= \sigma_{1u} P + \sigma_1(\gamma_6 P - j_3 R) + \sigma_{2u} R + \sigma_2(j_3 T + v_2 P) \\ &= (\sigma_2 j_3 - \sigma_1 \gamma_6) T + (\sigma_{1u} + \sigma_2 v_2) P + (\sigma_{2u} - \sigma_1 v_2) R\end{aligned} \tag{5.81}$$

ve

$$\begin{aligned}T_u &= \gamma_6 P - j_3 R \\ T_{us} &= \gamma_{6s} P + \gamma_6 P_s - j_{3s} R - j_3 R_s \\ &= \gamma_{6s} P + \gamma_6(\sigma_3 R - \sigma_1 T) + j_{3s} R - j_3(\sigma_1 T + \sigma_3 P) \\ &= -(\gamma_6 \sigma_1 + j_3 \sigma_2) T + (\gamma_{6s} + j_3 \sigma_3) P + (\gamma_6 \sigma_3 - v_s) R\end{aligned} \tag{5.82}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}R_s &= -\sigma_2 T - \sigma_3 P \\ R_{su} &= -\sigma_{2u} T - \sigma_2 T_u - \sigma_{3u} P - \sigma_3 P_u \\ &= (\sigma_3 \gamma_3 - \sigma_{2u}) T + (\sigma_2 \gamma_6 + \sigma_{3u}) P (\sigma_3 v_2 - \sigma_2 j_3) R\end{aligned} \tag{5.83}$$

ve

$$\begin{aligned}R_u &= j_3 T + v_2 P \\ R_{us} &= j_{3s} T + j_3 T_s + v_{2s} P + v_2 P_s \\ &= (j_{3s} - v_2 \sigma_1) T + (j_3 \sigma_1 + v_{2s}) P + (j_3 \sigma_2 + v_2 \sigma_2) R\end{aligned} \tag{5.84}$$

elde edilir.

$$T_{us} = T_{su}, R_{us} = R_{su} \tag{5.85}$$

kullanılarak

$$\begin{aligned} \sigma_{1u} &= \gamma_{6s} - \sigma_2 v_2 + j\sigma_3 \\ \sigma_{2u} &= \sigma_1 v_2 + \gamma_3 \sigma_3 - j_{3s} \\ \sigma_{3u} &= -(\sigma_2 \gamma_3 - j_3 \sigma_1 + v_{2s}) \end{aligned} \tag{5.86}$$

elde edilir. Eğrinin hız vektörü

$$h_u = f_6 T + d_6 P + q_6 R \tag{5.87}$$

olsun. (5.87) türevi alırsa

$$\begin{aligned} h_{us} &= f_{6s} T + f_6 T_s + d_{6s} P + d_6 P_s + q_{6s} R + q6_3 R_s \\ &= (f_{6s} - d_6\sigma_1 - q_6\sigma_2)T + (f_6\sigma_1 + d_{6s} - q_6\sigma_3)P + (f_6\sigma_2 + q_{6s} + d_6\sigma_3)R \end{aligned}$$

bulunur. Eğer denklem (2.1) de

$$X = h_s = R \tag{5.88}$$

alırsa regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre üçüncü sınıf için girdap filament akı denklemleri aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} h_u &= R \times R_s \\ &= \sigma_3 T - \sigma_2 P \end{aligned} \tag{5.89}$$

$h_{su} = h_{us}$ olduğundan

$$\begin{aligned} f_{6s} &= d_3\sigma_1 + q_3\sigma_2 + j_3 \\ d_{6s} &= f_3\sigma_1 - v_2 - q_3\sigma_3 \\ q_{6s} &= -f_3\sigma_2 - d_3\gamma_6 \end{aligned} \tag{5.90}$$

denklemleri bulunur. (5.87) ve (5.89) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} f_6 &= \sigma_3 \\ d_6 &= -\sigma_2 \\ q_6 &= 0 \end{aligned} \tag{5.91}$$

elde edilir. (5.91) deki eşitlikler (5.90) eşitliklerinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} j_3 &= \sigma_{3s} + \sigma_2\sigma_1 \\ v_2 &= \sigma_{2s} + \sigma_1\sigma_3 \end{aligned} \tag{5.92}$$

elde edilir. (5.92) denkleminin türevi alındığında

$$\begin{aligned} j_{3s} &= \sigma_{3ss} + (\sigma_2\sigma_1)_s \\ v_{2s} &= \sigma_{2ss} + (\sigma_1\sigma_3)_s \end{aligned} \tag{5.93}$$

bulunur. (5.92) ve (5.93) denklemlerinde bulunan eşitlikler (5.86) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\sigma_{1u} &= \gamma_6 - \sigma_2(\sigma_{2s} + \sigma_1\sigma_3) + \sigma_3(\sigma_{3s} + \sigma_2\sigma_1)\\ \sigma_{2u} &= \sigma_1\gamma_6 - (\sigma_{3ss} + (\sigma_2\sigma_1)_s) - \sigma_1(\sigma_{2s} + \sigma_1\sigma_3)\\ \sigma_{3u} &= -(\sigma_{2ss} + (\sigma_1\sigma_3)_s) - \sigma_1(\sigma_{3s} + \sigma_2\sigma_1) - \sigma_2\gamma_6\end{aligned}$$

elde edilir. (5.92) ve (5.93) denklemleri (5.80) denkleminde yerine yazılırsa $\{T, P, R\}$ çatısının $u$ zaman evolüsyonu tekrar aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned}T_u &= \gamma_6 P - (\sigma_{3s} + \sigma_2\sigma_1)R\\ P_u &= -\gamma_6 T - (\sigma_{2s} + \sigma_1\sigma_3)R\\ R_u &= (\sigma_{3s} + \sigma_2\sigma_1)T + (\sigma_{2s} + \sigma_1\sigma_3)P\end{aligned} \tag{5.94}$$

Regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre üçüncü sınıf için girdap filament yüzeyinin birinci temel formun katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}E &= \langle h_s, h_s\rangle = \langle R, R\rangle = 1\\ F &= \langle h_s, h_u\rangle = \langle P, \sigma_3 T - \sigma_2 P\rangle = 0\\ G &= \langle h_u, h_u\rangle = \langle \sigma_3 T - \sigma_2 P, \sigma_3 T - \sigma_2 P\rangle = \sigma_2^2 + \sigma_3^2\end{aligned} \tag{5.95}$$

(5.95) ve (3.16) kullanılarak yazıldığında regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre ikinci sınıf girdap filament yüzeyinin birinci temel formu aşağıdaki gibi verilir:

$$I = ds^2 + (\sigma_2^2 + \sigma_3^2)du^2 \tag{5.96}$$

Regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya ikinci sınıf için girdap filament yüzeyinin birim normali

$$\mathbb{N}_6 = \frac{h_s \times h_u}{\parallel h_s \times\ h_u \parallel} = \frac{R \times (\sigma_3 T - \sigma_2 P)}{\parallel R \times (\sigma_3 T - \sigma_2 P \parallel} = \frac{\sigma_2 T + \sigma_3 P}{\sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}} \tag{5.97}$$

bulunur. Regüler yüzey üzerindekonumsal uyarlanmış çatıya göre ikinci sınıf için için girdap filament akı yüzeyinin ikinci temel formun katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$h_{ss} = -(\sigma_2 T + \sigma_3 P) \tag{5.98}$$

$$h_{su} = (\sigma_{3s} + \sigma_2\sigma_1)T + (\sigma_{2s} + \sigma_1\sigma_3)P \tag{5.99}$$

$$\begin{aligned}h_{uu} &= \sigma_{3u}T + \sigma_3 T_u - \sigma_{2u}P - \sigma_2 P_u\\ &= (\sigma_{3u} + \sigma_2\gamma_6)T + (\sigma_3\gamma_6 - \sigma_{2u})P + (\sigma_2\sigma_{2s} - \sigma_3\sigma_{3s})R\end{aligned} \tag{5.100}$$

(5.97), (5.98), (5.99) ve (5.100) denklemleri kullanılarak ikinci temel formun katsayıları aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned}l &= < h_{ss}, \mathbb{N}_6 >\\ &= - < (\sigma_2 T + \sigma_3 P), \tfrac{\sigma_2 T + \sigma_3 P}{\sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}} >\\ &= -\tfrac{(\sigma_2^2 + \sigma_3^2)}{\sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}}\end{aligned} \tag{5.101}$$

$$\begin{aligned} m &= < h_{su}, \mathbb{N}_6 > \\ &= < (\sigma_{3s}+\sigma_2\sigma_1)T + (\sigma_{2s}+\sigma_1\sigma_3)P, \tfrac{\sigma_2 T+\sigma_3 P}{\sqrt{\sigma_2^2+\sigma_3^2}} > \\ &= \tfrac{(\sigma_{3s}\sigma_2+\sigma_1(\sigma_2^2+\sigma_3^2)+\sigma_3\sigma_{2s})}{\sqrt{\sigma_2^2+\sigma_3^2}} \end{aligned} \tag{5.102}$$

$$\begin{aligned} n &= < h_{uu}, \mathbb{N}_6 > \\ &= < (\sigma_{3u}+\sigma_2\gamma_6)T + (\sigma_3\gamma_6-\sigma_{2u})P + (\sigma_2\sigma_{2s}-\sigma_3\sigma_{3s})R, \tfrac{\sigma_2 T+\sigma_3 P}{\sqrt{\sigma_2^2+\sigma_3^2}} > \\ &= \tfrac{(\gamma_6(\sigma_2^2+\sigma_3^2)+\sigma_2\sigma_{3u}-\sigma_3\sigma_{2u})}{\sqrt{\sigma_2^2+\sigma_3^2}} \end{aligned} \tag{5.103}$$

(3.17), (5.101), (5.102) ve (5.103) denklemlerinden regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre birinci sınıf girdap filament akı yüzeyinin ikinci temel formu

$$\begin{aligned} II = \tfrac{1}{\sqrt{\sigma_2^2+\sigma_3^2}}((\sigma_2^2+\sigma_3^2)ds^2 + 2(\sigma_{3s}\sigma_2+\sigma_1(\sigma_2^2+\sigma_3^2)+\sigma_3\sigma_{2s})dsdu \\ +(\gamma_6(\sigma_2^2+\sigma_3^2)+\sigma_2\sigma_{3u}-\sigma_3\sigma_{2u})du^2) \end{aligned} \tag{5.104}$$

elde edilir. (5.95),(5.101), (5.102), (5.103) denklemleri kullanılarak regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre ikinci sınıf girdap filament yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$\begin{aligned} K &= \tfrac{ln-m^2}{EG-F^2} \\ &= \tfrac{-(\sigma_2^2+\sigma_3^2)(\gamma_6(\sigma_2^2+\sigma_3^2)+\sigma_2\sigma_{3u}-\sigma_3\sigma_{2u})+(\sigma_{3s}\sigma_2+\sigma_1(\sigma_2^2+\sigma_3^2)+\sigma_3\sigma_{2s})^2}{(\sigma_2^2+\sigma_3^2)^2} \end{aligned} \tag{5.105}$$

ve

$$\begin{aligned} H &= \tfrac{En+Gl-2Fm}{2(EG-F^2)} \\ &= -\tfrac{\gamma_6(\sigma_2^2+\sigma_3^2)+\sigma_2\sigma_{3u}-\sigma_3\sigma_{2u}+(\sigma_2^2+\sigma_3^2)^2}{2(\sigma_2^2+\sigma_3^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \tag{5.106}$$

elde edilir. (5.105), (5.106) denklemleri kullanılarak rügüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatısına göre girdap filament yüzeyinin asli eğrilikleri

$$\begin{aligned} k_1 &= H+\sqrt{H^2-K} \\ &= -\tfrac{\gamma_6(\sigma_2^2+\sigma_3^2)+\sigma_2\sigma_{3u}-\sigma_3\sigma_{2u}+(\sigma_2^2+\sigma_3^2)^2}{2(\sigma_2^2+\sigma_3^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad +\sqrt{\begin{array}{c}(-\tfrac{\gamma_6(\sigma_2^2+\sigma_3^2)+\sigma_2\sigma_{3u}-\sigma_3\sigma_{2u}+(\sigma_2^2+\sigma_3^2)^2}{2(\sigma_2^2+\sigma_3^2)^{\frac{3}{2}}})^2 \\ -\tfrac{(\sigma_2^2+\sigma_3^2)(\gamma_6(\sigma_2^2+\sigma_3^2)-\sigma_2\sigma_{3u}+\sigma_3\sigma_{2u})-(\sigma_{3s}\sigma_2+\sigma_1(\sigma_2^2+\sigma_3^2)+\sigma_3\sigma_{2s})^2}{(\sigma_2^2+\sigma_3^2)^2}\end{array}} \end{aligned} \tag{5.107}$$

ve

$$\begin{aligned} k_2 &= H+\sqrt{H^2-K} \\ &= -\tfrac{\gamma_6(\sigma_2^2+\sigma_3^2)+\sigma_2\sigma_{3u}-\sigma_3\sigma_{2u}+(\sigma_2^2+\sigma_3^2)^2}{2(\sigma_2^2+\sigma_3^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad -\sqrt{\begin{array}{c}(-\tfrac{\gamma_6(\sigma_2^2+\sigma_3^2)+\sigma_2\sigma_{3u}-\sigma_3\sigma_{2u}+(\sigma_2^2+\sigma_3^2)^2}{2(\sigma_2^2+\sigma_3^2)^{\frac{3}{2}}})^2 \\ -\tfrac{(\sigma_2^2+\sigma_3^2)(\gamma_6(\sigma_2^2+\sigma_3^2)-\sigma_2\sigma_{3u}+\sigma_3\sigma_{2u})-(\sigma_{3s}\sigma_2+\sigma_1(\sigma_2^2+\sigma_3^2)+\sigma_3\sigma_{2s})^2}{(\sigma_2^2+\sigma_3^2)^2}\end{array}} \end{aligned} \tag{5.108}$$

elde edilmiş olur.

Regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre üçüncü sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeyleri

$$\Upsilon_6(s,u) = h(s,u) + k_i^{-1}(s,u)\mathbb{N}_6(s,u), \quad i = 1,2 \tag{5.109}$$

şeklinde tanımlansın. $k_i$ (5.107) ve (5.108) denklemlerinde bulunan asli eğrilikler ve

$$\mathbb{N}_6 = \frac{\sigma_2 T + \sigma_3 P}{c_6}, c_6 = \sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}$$

olarak alınır. (5.109) eşitliğinin $s$ yay parametresi ve $u$ zamana bağlı türevini alırsak;

$$\begin{aligned}\Upsilon_{6s}(s,u) &= \frac{(\sigma_{2s}-\sigma_1\sigma_3)k_i c_6 - \sigma_2 k_i^2 c_6^2 + \sigma_2(k_{is}c_6 + k_i c_{6s})}{k_i^2 c_6^2} T \\ &+ \frac{(\sigma_{3s}+\sigma_1\sigma_2)k_i c_6 - \sigma_3 k_i^2 c_6^2 + \sigma_3(k_{is}c_6 + k_i c_{6s})}{k_i^2 c_6^2} P \\ &+ \frac{\sigma_2^2+\sigma_3^2}{k_i c_6} R\end{aligned} \tag{5.110}$$

$$\begin{aligned}\Upsilon_{6u}(s,u) &= \frac{(\sigma_{3s}+\sigma_1\sigma_2)k_i^2 c_6^2 + (\sigma_{2u}-\gamma_3\sigma_3)k_i c_6 + \sigma_2(k_{iu}c_6 + k_i c_{6u})}{k_i^2 c_6^2} T \\ &+ \frac{(\sigma_{2s}+\sigma_1\sigma_3)k_i^2 c_6^2 + (-\sigma_{3u}+\gamma_3\sigma_2)k_i c_6 + \sigma 3(k_{iu}c_6 + k_i c_{6u})}{k_i^2 c_6^2} P \\ &+ \frac{-(\sigma_2^2+\sigma_2^2)\sigma_1 - \sigma_{3s}\sigma_2 + \sigma_6\sigma_{2s}}{k_i c_6} R\end{aligned} \tag{5.111}$$

elde edilir. Regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya üçüncü sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeylerin birim normali

$$\tilde{\mathbb{N}}_6 = \frac{\lambda_{16}T + \lambda_{17}P + \lambda_{18}R}{\sqrt{\lambda_{16}^2+\lambda_{17}^2+\lambda_{18}^2}}, \sqrt{\lambda_{16}^2+\lambda_{17}^2+\lambda_{18}^2} \neq 0 \tag{5.112}$$

şeklinde bulunur. Burada

$$\begin{aligned}\lambda_{16} &= \mathring{f}_6\mathring{d}_6 - \mathring{c}_6\mathring{e}_6 \\ \lambda_{17} &= \mathring{c}_6\mathring{d}_6 - \mathring{a}_6\mathring{f}_6 \\ \lambda_{18} &= \mathring{a}_6\mathring{e}_6 - \mathring{b}_6\mathring{d}_6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathring{a}_6 &= \frac{(\sigma_{2s}-\sigma_1\sigma_3)k_i c_6 - \sigma_2 k_i^2 c_6^2 + \sigma_2(k_{is}c_6 + k_i c_{6s})}{k_i^2 c_6^2} \\ \mathring{b}_6 &= \frac{(\sigma_{3s}+\sigma_1\sigma_2)k_i c_6 - \sigma_3 k_i^2 c_6^2 + \sigma_3(k_{is}c_6 + k_i c_{6s})}{k_i^2 c_6^2} \\ \mathring{c}_6 &= \frac{\sigma_2^2+\sigma_3^2}{k_i c_6} \\ \mathring{d}_6 &= \frac{(\sigma_{3s}+\sigma_1\sigma_2)k_i^2 c_6^2 + (\sigma_{2u}-\gamma_3\sigma_3)k_i c_6 + \sigma_2(k_{iu}c_6 + k_i c_{6u})}{k_i^2 c_6^2} \\ \mathring{e}_6 &= \frac{(\sigma_{2s}+\sigma_1\sigma_3)k_i^2 c_6^2 + (\gamma_3\sigma_2-\sigma_{3u})k_i c_6 + \sigma 3(k_{iu}c_6 + k_i c_{6u})}{k_i^2 c_6^2} \\ \mathring{f}_6 &= \frac{-(\sigma_2^2+\sigma_2^2)\sigma_1 - \sigma_{3s}\sigma_2 + \sigma_3\sigma_{2s}}{k_i c_6}\end{aligned}$$

şeklinde verilmiştir. Regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre üçüncü sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeylerinin birinci temel formun katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}\tilde{E} &= \langle \Upsilon_{6s}(s,u), \Upsilon_{6s}(s,u)\rangle = \mathring{a}_6^2 + \mathring{b}_6^2 + \mathring{c}_6^2 \\ \tilde{F} &= \langle \Upsilon_{6s}(s,u), \Upsilon_{6u}(s,u)\rangle = \mathring{a}_6\mathring{d}_6 + \mathring{b}_6\mathring{e}_6 + \mathring{c}_6\mathring{f}_6 \\ \tilde{G} &= \langle \Upsilon_{6u}(s,u), \Upsilon_{6u}(s,u)\rangle = \mathring{d}_6^2 + \mathring{e}_6^2 + +\mathring{f}_6^2\end{aligned} \tag{5.113}$$

Regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre üçüncü sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeylerinin ikinci temel formun katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}\Upsilon_{6ss}(s,u) &= \mathring{a}_{6s}T + \mathring{a}_6 T_s + \mathring{b}_{6s}P + \mathring{b}_6 P_s + \mathring{c}_{6s}R + \mathring{c}_6 R_s \\ &= (\mathring{a}_{6s} - \mathring{b}_6\sigma_1 - \mathring{c}_6\sigma_2)T + (\mathring{a}_6\sigma_1 + \mathring{b}_{6s} - \mathring{c}_6\sigma_3)P \\ &\quad +(\mathring{a}_6\sigma_2 + \mathring{b}_6\sigma_3 + \mathring{c}_{6s})R\end{aligned} \tag{5.114}$$

$$\begin{aligned}\Upsilon_{3_{uu}}(s,u) &= \mathring{d}_{6u}T + \mathring{d}_6 T_u + \mathring{e}_{6u}P + \mathring{e}_6 P_u + \mathring{f}_{6u}R + \mathring{f}_6 R_u \\ &= (\mathring{d}_{6u} - \mathring{e}_6\gamma_6 + \mathring{f}_6(\sigma_{3s} + \sigma_1\sigma_2))T \\ &\quad +(\mathring{d}_6\gamma_6 + \mathring{e}_{6u} + \mathring{f}_6(\sigma_{3s} + \sigma_1\sigma_2))P \\ &\quad +(\mathring{d}_6(\sigma_{3s} + \sigma_1\sigma_2) - (\sigma_{2s} + \sigma_1\sigma_3)\mathring{e}_6 + \mathring{f}_{6u})R\end{aligned} \tag{5.115}$$

$$\begin{aligned}\Upsilon_{3_{su}}(s,u) &= \mathring{a}_{6u}T + \mathring{a}_6 T_u + \mathring{b}_{6u}P + \mathring{b}_6 P_u + \mathring{c}_{6u}R + \mathring{c}_6 R_u \\ &= (\mathring{a}_{6u} - \mathring{b}_6\gamma_6 + \mathring{c}_6(\sigma_{3s} + \sigma_1\sigma_3))T \\ &\quad +(\mathring{a}_6\gamma_6 + \mathring{b}_6(\sigma_{2s} + \sigma_3\sigma_1) + \mathring{c}_6(\sigma_{2s} + \sigma_1\sigma_3))P \\ &\quad +(-\mathring{a}_6(\sigma_{3s} + \sigma_1\sigma_2) + \mathring{b}_6(\sigma_{2s} + \sigma_1\sigma_3) + \mathring{c}_{6u})R\end{aligned} \tag{5.116}$$

bulunur. (5.112),(5.114),(5.115) ve (5.116) denklemleri kullanılarak ikinci temel formun katsayıları aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned}\tilde{l} &= <\Upsilon_{6ss}(s,u), \tilde{\mathbb{N}}_6> \\ &= \frac{\mu_{16}\lambda_{16}+\mu_{17}\lambda_{17}+\mu_{18}\lambda_{18}}{\sqrt{\lambda_{16}^2+\lambda_{17}^2+\lambda_{18}^2}}\end{aligned} \tag{5.117}$$

$$\begin{aligned}\tilde{m} &= <\Upsilon_{6su}(s,u), \tilde{\mathbb{N}}_6> \\ &= \frac{\varpi_{16}\lambda_{16}+\varpi_{17}\lambda_{17}+\varpi_{18}\lambda_{18}}{\sqrt{\lambda_{16}^2+\lambda_{17}^2+\lambda_{18}^2}}\end{aligned} \tag{5.118}$$

$$\begin{aligned}\tilde{n} &= <\Upsilon_{6_{uu}}(s,u), \tilde{\mathbb{N}}_6> \\ &= \frac{\varrho_{16}\lambda_{16}+\varrho_{17}\lambda_{17}+\varrho_{18}\lambda_{18}}{\sqrt{\lambda_{16}^2+\lambda_{17}^2+\lambda_{18}^2}}\end{aligned} \tag{5.119}$$

Burada

$$\begin{aligned}\mu_{16} &= \mathring{a}_{6s} - \mathring{b}_6\sigma_1 - \mathring{c}_6\sigma_2 \\ \mu_{17} &= \mathring{a}_6\sigma_1 + \mathring{b}_{6s} - \mathring{c}_6\sigma_3 \\ \mu_{18} &= \mathring{a}_6\sigma_2 + \mathring{b}_6\sigma_3 + \mathring{c}_{6s} \\ \varpi_{16} &= \mathring{d}_{6u} - \mathring{e}_6\gamma_6 + \mathring{f}_6(\sigma_{3s} + \sigma_1\sigma_2) \\ \varpi_{17} &= \mathring{d}_6\gamma_6 + \mathring{e}_{6u} + \mathring{f}_6(\sigma_{3s} + \sigma_1\sigma_2) \\ \varpi_{18} &= \mathring{d}_6(\sigma_{3s} + \sigma_1\sigma_2) - (\sigma_{2s} + \sigma_1\sigma_3)\mathring{e}_6 + \mathring{f}_{6u} \\ \varrho_{16} &= \mathring{a}_{6u} - \mathring{b}_6\gamma_6 + \mathring{c}_6(\sigma_{3s} + \sigma_1\sigma_3) \\ \varrho_{17} &= \mathring{a}_6\gamma_6 + \mathring{b}_6(\sigma_{2s} + \sigma_3\sigma_1) + \mathring{c}_6(\sigma_{2s} + \sigma_1\sigma_3) \\ \varrho_{18} &= \mathring{c}_{6u} - \mathring{a}_6(\sigma_{3s} + \sigma_1\sigma_2) + \mathring{b}_6(\sigma_{2s} + \sigma_1\sigma_3)\end{aligned} \tag{5.120}$$

şeklinde verilir. (5.113), (5.117), (5.118), (5.119) ve (5.120) denklemleri kullanılarak regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre üçüncü sınıf için girdap filament

akısı tarafından üretilen fokal yüzeylerinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$\begin{aligned}\tilde{K} &= \frac{\tilde{l}\tilde{n}-\tilde{m}^2}{\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2} \\ &\quad (\mu_{16}\lambda_{16}+\mu_{17}\lambda_{17}+\mu_{18}\lambda_{18})(\varrho_{16}\lambda_{16}+\varrho_{17}\lambda_{17}+\varrho_{18}\lambda_{18}) \\ &= \frac{-(\varpi_{16}\lambda_{16}+\varpi_{17}\lambda_{17}+\varpi_{18}\lambda_{18})^2}{\sqrt{\lambda_{16}^2+\lambda_{17}^2+\lambda_{18}^2}(\mathring{a}_6^2+\mathring{b}_6^2+\mathring{c}_6^2)(\mathring{a}_6\mathring{d}_6+\mathring{b}_6\mathring{e}_6+\mathring{c}_6\mathring{f}_6)-(\mathring{d}_6^2+\mathring{e}_6^2++\mathring{f}_6^2)^2)}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= \frac{\tilde{E}\tilde{n}+\tilde{G}\tilde{l}-2\tilde{F}\tilde{m}}{2(\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2)} \\ &\quad (\mathring{a}_6^2+\mathring{b}_6^2+\mathring{c}_6^2)(\varrho_{16}\lambda_{16}+\varrho_{17}\lambda_{17}+\varrho_{18}\lambda_{18}) \\ &\quad +(\mathring{a}_6\mathring{d}_6+\mathring{b}_6\mathring{e}_6+\mathring{c}_6\mathring{f}_6)(\mu_{16}\lambda_{16}+\mu_{17}\lambda_{17}+\mu_{18}\lambda_{18}) \\ &= \frac{-2(\mathring{d}_6^2+\mathring{e}_6^2++\mathring{f}_6^2)(\varpi_{16}\lambda_{16}+\varpi_{17}\lambda_{17}+\varpi_{18}\lambda_{18})}{2\sqrt{\lambda_{16}^2+\lambda_{17}^2+\lambda_{18}^2}((\mathring{a}_6^2+\mathring{b}_6^2+\mathring{c}_6^2)(\mathring{a}_6\mathring{d}_6+\mathring{b}_6\mathring{e}_6+\mathring{c}_6\mathring{f}_6)-(\mathring{d}_6^2+\mathring{e}_6^2++\mathring{f}_6^2)^2)}\end{aligned}$$

şeklinde verilmiş olur.

# 6. BULGULAR VE TARTIŞMA

Fokal yüzeyler son zamanlarda bir çok bilim insanı tarafından çalışılan ve farklı bilim alanlarında kullanılan geometri konusudur. Bu çalışmada 3 boyutlu Öklid uzayında fokal yüzeyler üzerinde kapsamlı bir çalışma yapılmış, yeni ve ilginç çıkarımlar elde edilmiştir. 3 boyutlu Öklid uzayında 1. tip konumsal uyarlanmış çatı ve regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeyler üç sınıfta incelenmiştir. Ayrıca bu üç sınıf için 1. tip konumsal uyarlanmış çatı ve regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatıya göre fokal yüzeyin Gauss denklemi, ortalama eğrilik ve asli eğrilikleri bulunmuştur.

Bu tezde elde edilen sonuçlar bu alanda ve bilimin diğer alanlarında yeni çalışmalara ilham olacak niteliktedir.

# 7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada 3-boyutlu Öklid uzayında 1. tip konumsal uyarlanmış çatı ve regüler yüzey üzerinde konumsal uyarlanmış çatılara göre üç sınıf için girdap filament akısı tarafından üretilen fokal yüzeyler sunuldu. Bu fokal yüzeylerin Gauss, ortalama eğrilik ve asli eğrilikleri hesaplandı. Mapple yardımı ile 1. tip konumsal uyarlanmış çatıya göre birinci sınıf için girdap filament akı yüzeyleri tarafından üretilen fokal yüzeylerin şekilleri verilmiştir.

Çalışmamız 3 boyutlu Öklid uzayında olup yapılan çalışma 3-boyutlu Minkowski uzayına akatarılabilir ve farklı çatılar üzerinde üç durum için incelenebilir. Her bir sınıf için farklı teoremler bulunarak yeni sonuçlar elde edilebilir.

# KAYNAKLAR DİZİNİ


Abdel-All, N. H., Hussien, R. A., & Youssef, T. (2012). *Hasimoto surfaces*. Life Science Journal, 9(3), 556-560.

Al-Dayel,I., Solouma, E., & Khan, M. (2022). O*n geometry of focal surfaces due to B-Darboux and type-2 Bishop frames in Euclidean 3-space*. AIMS Mathematics, 7(7), 13454-13468. https://doi.org/10.3934/math.2022744

Bishop, R.L. (1975). *There is more than one way to frame a curve*. The American Mathematical Monthly, 82(3), 246-251.https://doi.org/10.2307/2319846

Casey, J. (2011). *Siacci's resolution of the acceleration vector for a space curve.* Meccanica, 46, 471-476. https://doi.org/10.1007/s11012-010-9296-x

Coquillart, S. (1987). *Computing offsets of B-spline curves*. Computer-Aided Design, 19(6), 305-09.

Çakmak, A. (2018). *Öklid 3-Uzayında Hasimoto Yüzeylerinin Paralel Yüzeyleri.* BEU Journal of Science, 7(1), 125-132.https://doi.org/10.17798/bitlisfen.419931

Do Carmo, M.P. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, p. 503.

Doğan, F., Yaylı, Y. (2012). *Tubes with Darboux frame*. Int. J. Contemp. Math. Sciences, 7(16), 751-758.

Eisenhart, L. P. (1904). *Three Particular Systems of Lines on a Surface.* Transactions of the American Mathematical Society, 5, 421-437.

Ekici, C. (2021). *Eğriler ve Yüzeylerin Diferensiyel Geometrisi*. ESOGU Basımevi.

Ekici, C., Tozak, H., & Dede, M. (2017). *Timelike directional Tubular Surface.* Journal of Mathematical Analysis, 8(5), 1-11.

Ekici, C., Kaymanlı. G.U., & Okur. S. (2021). *A New Characterization of Ruled Surfaces According to q-Frame Vectors in Euclidean 3-Space.* International J.Math. Combin , (3), 20-31.

# KAYNAKLAR DİZİNİ


Elsharkawy, A., Cesarano, C., Tawfiq, A., & Ismail, A. A. (2022). *The non-linear Schrödinger equation associated with the soliton surfaces in Minkowski 3-space*. AIMS Mathematics, 7 ,10:17879-17893. https://doi.org/10.3934/math.2022985

Erdoğdu, M., Yavuz, A. (2021). *Differential geometric aspects of nonlinear Schrödinger equation*. Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, 70(1), 510-521. https://doi.org/10.31801/cfsuasmas.724634

Eren, K., Myrzakulova, Z., Ersoy, S., Nugmanova, G., & Myrzakulov, R. (2022). *Focal Surfaces of Integrable Isotropic and Anisotropic Vortex Filament Flows*. https://www.researchgate.net/publication/363840850_Focal_Surfaces_of_Integrable_Isotropic_and_Anisotropic_Vortex_Filament_Flows. Erişim tarihi: 7.12.2022

Gökçelik, F. (2012). *Fokal Eğriler ve Yüzeyler Üzerine*. [Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bİlimleri Enstitüsü],80. http://hdl.handle.net/20.500.12575/31992

Gray, A. (1993). *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces*. CRC Press

Gürbüz, N. (2010). *Intrinstic geometry of NLS equation and heat system in 3-dimensional Minkowski space*. Adv. Studies Theor. Phys., 4(1), 557-564.

Güler, F. (2022). The focal surfaces of offset surface. Optik - International Journal for Light and Electron Optics, 271,170053. https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2022.170053

Gürbüz, N. (2015). *Moving non-null curves according to Bishop frame in Minkowski 3-space.* International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. 12(5), 1550052. https://doi.org/10.1142/S0219887815500528

Gürbüz, N. (2018). *Öklidyen uzayda Darboux çatısına göre eğri evolüsyonunun üç sınıfına göre Hasimoto yüzeyleri*. Fen bilimleri ve matematik alanında akademik çalışmalar, Gece Publishing, 49-62.

Gürbüz, N.E. (2022a). *The evolution of an electric field with respect to the type-1 PAF and the PAFORS frames in* $R_1^3$. Optik 250, 168285.

Gürbüz, N.E. (2022b). *The evolution of electric field in pseudo-Galilean 3-space* $G_1^3$. Optik, 269, 169818. https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2022.169818

# KAYNAKLAR DİZİNİ


Gürbüz, N.E. (2021). *Three geometric phases with the visco-Da Rios equation for the hybrid frame in* $R_1^3$. Optik. 248,168116. https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2021

Gürbüz, N. (2019). *Three anholonomy densities according to Bishop frame in Euclidean 3-space*, Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry.15(4), 510–525. https://doi.org/10.15407/mag15.04.510

Gürbüz, N. (2023). *The evolution of an electric field, Hasimoto surfaces and three differential formulas with the new frame in* $R_1^3$. Optik - International Journal for Light and Electron Optics. 272, 170217. https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2022.170217

Gürbüz, N., Yoon, D. W. (2020). *Hasimoto surfaces for two classes of curve evolution in Minkowski 3-space.* Demonstratio Mathematica, 53, 277-284. https://doi.org/10.1515/dema-2020-0019

Gürbüz, N., Yoon, D. W. (2022). *Geometric phases for three cases of the electric field with new type Bishop frame in* $R_1^3$. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. 19(08), 2250115 https://doi.org/10.1142/S0219887822501158

Gürbüz, N., Yoon, D. W.(2023). *The evolution of the electric field along opticalfiber with respect to the type-2 and 3 PAFs in Minkowski 3-space.* Tamkang Journal of Mathematics. https://doi.org/10.5556/j.tkjm.55.2024.5028

Hacısalihoğlu, H.H., (2000). *Diferensiyel Geometri*, Cilt I, Ankara Üniversitesi, s.272.

Hagen, H., Hahmann, S., (1992). *Generalized Focal Surfaces: a New Method for Surface Interrogation*, IEEE Proceedings Visualization, 70-76.

Hagen, H., Müller, H., & Nielson, G. M. (1991). *Focus on Scientific Visualization,*Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 252-258

Hagen, H., Hahmann, S., & Schreiber, T. (1995). *Visualization And Computation of Curvature Behaviour Freeform Curves And Surfaces*. Computer-Aided Design, 27(7), 545-552. https://doi.org/10.1016/0010-4485(95)93587-P

Hasimoto, H. (1971). *Motion of a vortex filament and its relation to elastica*. J. Phys. Soc. Jpn., 31. 293-294.

# KAYNAKLAR DİZİNİ

Hasimoto, H. (1972). *A soliton on a vortex filament.* J. Fluid. Mech. 51, 477-485.

Keskin, Ö. & Yaylı,Y. (2017). *An application of N-Bishop frame to spherical images for direction curves*. Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., 14(11), 1750162. https://doi.org/10.1142/S0219887817501626

Lakshmanan, M. (1977). *Continuum spin system as an exactly solvable dynamical system.* Phys. Lett. A. 61, 53–54.

Lamb Jr, G. L. (1977). *Solitons on moving space curves*. Journal of Mathematical Physics, 18(8), 1654-1661. https://doi.org/10.1063/1.523453

Langer, J., Perline, R. (1990). *The Hasimoto transformation and integrable flows on curves*. Applied Mathematics Letters, 3(2), 61-64. https://doi.org/10.1016/0893-9659(90)90015-4

Monge, G. (1807). *Applications de L'Analyse à la Gèomètrie.* A L'usage de J'Ecole Imperiale Polytechnique, Paris, 123-175.

Murugesh, S.,Balakrishnan, R. (2001). *New connections between moving curves and soliton equations*. Physics Letters A 290(1-2), 81-87. https://doi.org/10.1016/S0375-9601(01)00632-6

Özdemir, B., Arslan, K. (2008). Focal curves and focal surfaces in $\mathbb{E}^n$. [Doktora Tezi, Uludağ Universitesi] http://hdl.handle.net/11452/3351

Öztürk, G., Arslan, K. (2016). *On focal curves in Euclidean n-space* $\mathbb{R}^n$. Novi Sad J. Math, 46(1), 35-44. https://doi.org/10.30755/nsjom.2013.058

Özen, K.E., Tosun, M. (2021a). *A New Moving Frame For Trajectories on Regular Surfaces*. Ikonion Journal of Mathematics, 3(1), 20-34

Özen, K.E., Tosun, M. (2021b). *A New Moving Frame for Trajectories with Non-Vanishing Angular Momentum*. Journal of Mathematical Sciences and Modelling, 4(1), 7-18. https://doi.org/10.33187/jmsm.869698

Özen, K.E., Tosun, M. (2021c). S*ome Characterızatıons On Geodesic, Asyptotic and Slant Helical Trajetories According To PAFORS*. Maltepe Journal of Mathematics, 3(2), 74-90. https://doi.org/10.47087/mjm.926078

# KAYNAKLAR DİZİNİ

Özen, K.E., Tosun, M. & Akyiğit, M. (2022a). *Siacci's Theorem According to Darboux Frame.* An. Şt. Univ. Ovidius Constanta, 25(3), 155-165. https://doi.org/10.1515/auom-2017-0042

Özen, K.E., Tosun, M. & Avcı, K. (2022b). *Type 2-Positional Adapted Frame and Its Application to Tzitzeica and Smarandache Curves.* Çankırı Karatekin Üniversitesi Karatekin Üniversitesi Fen Fakültesi Dergisi, 1(1), 42-53.

Özen, K.E., Tosun, M. & İşbilir Z. (2023). *Spinor Representations of Positional Adapted Frame in the Euclidean 3-Space.* International electronic Journal of Geometry, 16(1), 62-72. https://doi.org/10.36890/iejg.1179503

Sabuncuoğlu, A. (2004). *Diferensiyel geometri*. Nobel Yayınevi, Ankara, 99-103.

Shifrin, T. (2008). *Differential geometry: a first course in curves and surfaces*. University of Georgia.

Soliman, M.A., Abdel-All, N. H. , Hussien, R. A., & Youssef ,T. (2019). *Evolution of space curves using Type-3 Bishop frame*. Caspian J. Math. Sci., 8(1), 58-73.https://doi.org/10.22080/CJMS.2018.14455.1344

Solouma, E.M. (2021). *Characterization of Smarandache trajectory curves of constant mass point particles as they move along the trajectory curve via PAF*. Bulletin of Mathematical Analysis and Applications,13(4) ,14-30. https://doi.org/ 10.54671/bmaa-2021-4-2

Strubecker, K., (1969). *Differential geometri III*. De Gruyter Berlin.

Yılmaz, S., Turgut, M. (2010). *New Version of Bishop frame and an Application to Spherical Images.* Journal of Mathematical Analysis and Applications. 371, 764-776. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.06.012

Yüce, S. (2017). *Öklid Uzayında Diferansiyel Geometri*, Pegem Akademi Yayıncılık, Ankara, 557.

Zhong, S., Zhao, Z., & Wan, X. (2022). *Geometry of solutions of the geometric curve flows in space*. School of Mathematics and Computer Sciences Gannan Normal University Ganzhou. https://doi.org/10.22541/au.166756688.88270742/v1