Düzenli Uzun Dalga Denkleminin Yaklaşık Çözümleri için B-Spline Kolokeyşin-Galerkin Sonlu Elemanlar Algoritmaları

Fatma Dila Topgül

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Ekim 2013

B-Spline Finite Element Algorithms for Regularized Long Wave Equation

Fatma Dila Topgül

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics and Computer Sciences

October 2013

Düzenli Uzun Dalga Denkleminin Yaklaşık Çözümleri için B-Spline Kolokeyşin-Galerkin Sonlu Elemanlar Algoritmaları

Fatma Dila Topgül

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Bilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof.Dr. Mahmut Koçak

Ekim 2013

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Yüksek Lisans öğrencisi Fatma Dila Topgül'ün YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Düzenli Uzun Dalga Denkleminin Yaklaşık Çözümleri için B-Spline Kolokeyşin-Galerkin Sonlu elemanlar Algoritmaları" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman **:** Prof. Dr. Mahmut KOÇAK

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. İdris DAĞ

Üye : Prof. Dr. Mahmut KOÇAK

Üye : Doç. Dr. Bülent SAKA

Üye : Doç.Dr. Murat SARI

Üye : Yrd. Doç. Dr. Dursun IRK

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tezde, RLW denkleminin yaklaşık çözümleri B-spline sonlu elemanlar metodu kullanılarak elde edilmiştir.

Birinci bölümde, spline fonksiyonu tanıtılmıştır. Ayrıca RLW denklemi ve RLW denklemin yaklaşık çözümünden bahsedilmiştir.

İkinci, üçüncü ve dördüncü bölümlerde RLW denkleminin yaklaşık çözümleri sırasıyla; kolokeyşin, galerkin ve en küçük kareler sonlu elemanlar algoritmaları kullanılarak incelenmiştir.

Beşinci bölümde birinci ve ikinci mertebeden türevler için kübik B-spline diferansiyel quadrature yaklaşımı anlatılmıştır. Kübik B-spline diferensiyel quadrature metoduyla RLW denkleminin konum ayrışımı incelenmiştir.

Altıncı bölümde RLW denkleminin extended kübik B-spline kolokeyşin metoduyla çözümü incelenmiştir. Tek solitary dalgasının yayılımı, dalga undulation ve dalga üretimi test problemleri çözümleri anlatılmıştır.

Son bölümde çalışılan metotların tek dalga yayılımı sonuçlarının hatası ve korunum kanunu sabitleri tablo halinde verilmiştir. Tek dalganın yayılımı analitik çözümü ile metotların yaklaşık çözümleri karşılaştırılması yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: B-spline, Extended Kübik B-spline, Kolokeyşın metodu, Galerkin metodu, En Küçük Kareler metodu, Diferensiyel Quadrature metodu.

SUMMARY

This thesis deals with the numerical solutions of the RLW equation using the finite element method with B-Spline functions.

In the first chapter, B-spline Functions are introduced. A short survey of the numerical solutions of the RLW equation is given.

In the second, third and fourth chapters;, The B-spline collocation,Galerkin and Least square methods are studied for the numerical solutions of the RLW Equations

In the fifth chapter; the appplication of the cubic B-spline differantial quadrature methods for finding numerical solutions of the RLW equation is examined

In the sixth chapter ;numerical solution the of RLW equation using the finite element method with extended cubic B-Spline functions is studied and results of Standard text problems are shown in tables and figures.

In the last chapter, results of the single solitary solution of the RLW equation is illusrated in table and comparison is done for the methods introduced in the thesis.

Keywords: B-spline, Extended cubic B-spline, Collocation Method, Galerkin Method, Least Square Method, differantial quadrature method.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarım sırasında, derslerimde ve tez çalışmalarımda değerli vaktinden ayırıp yardım eden Prof. Dr. İdris Dağ'a, danışmanım Prof. Dr. Mahmut Koçak'a ve maddi manevi desteklerini esirgemeyen aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET v
SUMMARY vi
TEŞEKKÜR vii
ŞEKİLLER DİZİNİ x
TABLOLAR DİZİNİ xii
KISALTMALAR DİZİNİ xiii

1. TEMEL KAVRAMLAR 1
1.1 Spline Fonksiyonu 1
1.1.1 Lineer B-spline fonksiyonlar 3
1.1.2 Kuadratik B-spline fonksiyonlar 4
1.1.3 Kübik B-spline fonksiyonlar 5
1.1.4 Kuartik B-spline fonksiyonlar 7
1.1.5 Kuintik B-spline fonksiyonlar 8
1.1.6 Sektik B-spline fonksiyonlar 11
1.1.7 Septik B-spline fonksiyonlar 12
1.1.8 Genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlar 14
1.2 REGULARİZED LONG WAVE (RLW) Denklemi 16

2. RLW DENKLEMİNİN KOLOKEYŞİN METODU İLE ÇÖZÜMÜ 20
2.1 Kuadratik B-Spline Kolokeyşin Metodu 20
2.2 Kübik B- Spline Kolokeyşin Metodu 23
2.3 Kübik B- Spline Kolokeyşin Metodu 2 25
2.4 Kuartik B-Spline Kolokeyşin Metodu 31
2.5 Sextic B-Spline Kolokeyşin Metodu 39
2.6 Septic B-Spline Kolokeyşin Metodu 43

İÇİNDEKİLER (Devam Ediyor)

Sayfa

3. RLW DENKLEMİNİN GALERKİN METODU İLE ÇÖZÜMÜ 46
3.1 Lineer B-Spline Galerkin Metodu 46
3.2 Kuadratik B-Spline Galerkin Metodu..... 49
3.3 Kuartik B-Spline Galerkin Metodu 52
3.4 Kuintik B-Spline Galerkin Methodu 56

4. RLW DENKLEMİNİN EN KÜÇÜK KARELER SONLU ELEMANLAR METODU İLE ÇÖZÜMÜ..... 62
4.1 Kuadratik B-Spline En Küçük Kareler Metodu..... 62
4.2 Kübik B-Spline En Küçük Kareler Metodu..... 67

5. RLW DENKLEMİNİN KÜBİK B-SPLİNE DİFERENSİYEL QUADRATURE İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ..... 75
5.1 Kübik B-Spline Diferensiyel Quadrature (CBSDQ) 75
5.2 Birinci Mertebeden Türev Yaklaşımları..... 76
5.3 İkinci Mertebeden Türev Yaklaşımları..... 79
5.4 RLWE' nin Ayrıştırılması 81
6. GENİŞLETİLMİŞ KÜBİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN METOD……...83

7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER..... 92

KAYNAKLAR DİZİNİ..... 95

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil		Sayfa
6.1	L_∞ hata normu, $-0.05 \leq \lambda \leq 0.05$	86
6.2	Solitary dalga profilleri	86
6.3	Başlangıç koşulu ve dalga undulation t=250, d=2	88
6.4	Başlangıç koşulu ve dalga undulation t=250, d=5	88
6.5	Korunum sabitleri için mutlak hata	89
6.6	Sınır zorlamalı üretilen dalga profilleri	91

TABLOLAR DİZİNİ

Tablo **Sayfa**

1.1 $\boldsymbol{\phi}'_{\boldsymbol{m}}(x)$ fonksiyonunun bazı bölünme noktalarındaki değerleri 4

1.2 $\boldsymbol{\phi}'_{\boldsymbol{m}}(x), \boldsymbol{\phi}''_{\boldsymbol{m}}(x)$ fonksiyonlarının bazı bölünme noktalarındaki değerleri 6

1.3 $\boldsymbol{\phi}'_{\boldsymbol{m}}(x), \boldsymbol{\phi}''_{\boldsymbol{m}}(x), \boldsymbol{\phi}'''_{\boldsymbol{m}}(x)$ fonksiyonlarının bazı bölünme noktalarındaki değerleri 7

1.4 $\boldsymbol{\phi}_m(x), \boldsymbol{\phi}'_{\boldsymbol{m}}(x), \boldsymbol{\phi}''_{\boldsymbol{m}}(x), \boldsymbol{\phi}'''_{\boldsymbol{m}}(x), \boldsymbol{\phi}''''_{\boldsymbol{m}}(x)$ fonksiyonlarının bazı bölünme noktalarındaki değerleri 10

1.5 $\boldsymbol{\phi}_m(x), \boldsymbol{\phi}'_{\boldsymbol{m}}(x), \boldsymbol{\phi}''_{\boldsymbol{m}}(x), \boldsymbol{\phi}'''_{\boldsymbol{m}}(x)$ fonksiyonlarının bazı bölünme noktalarındaki değerleri 12

1.6 $\boldsymbol{\phi}_m(x), \boldsymbol{\phi}'_{\boldsymbol{m}}(x), \boldsymbol{\phi}''_{\boldsymbol{m}}(x), \boldsymbol{\phi}'''_{\boldsymbol{m}}(x)$ fonksiyonlarının bazı bölünme noktalarındaki değerleri 14

1.7 $\boldsymbol{Q}_m(x), \boldsymbol{Q}'_{\boldsymbol{m}}(x), \boldsymbol{Q}''_{\boldsymbol{m}}(x)$ fonksiyonlarının bazı bölünme noktalarındaki değerleri 16

6.1 Tek bir solitary dalgası için hata normu ve korunum sabitleri t=20, c=0.1 ve $-40 \leq x \leq 60$..... 87

6.2 Korunum sabitleri $U_0=2$, $h=0.4$, $\Delta t=0.1$ 90

7.1 Sonuçlar 100

KISALTMALAR DİZİNİ

Kısaltmalar	Açıklama
dd	Diğer durumlarda
RLW	Regularized Long Wave (Düzenli uzun dalga denklemi)
CBSDQ	Kübik B-Spline Diferensiyel Quadrature

BÖLÜM 1

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanacağımız bazı temel kavramlar hakkında bilgi verildi. İlk olarak B spline fonksiyonu tanıtıldı. Lineer B-spline, Kuadratik B-spline, Kübik B-spline, Kuartik B-spline, Kuintik B-spline, Sektik B-spline, Septic B-spline ve genişletilmiş Kübik B-spline fonksiyonlarından kısaca bahsedildi. Daha sonra RLW denklemi ve RLW denkleminin analitik çözümü incelenmiştir.

1.1 Spline Fonksiyonu

Spline terimi, ilk olarak Schoenberg tarafından 1946' da tanıtılmıştır. Spline fonksiyonu, farklı parçaların birleştirilmesi ile oluşan sürekli fonksiyonlara verilen addır. Fonksiyona spline adının verilmesi parçalı polinomlarla, spline adı verilen mekanik bir alet arasındaki ilişkiden kaynaklanmıştır. Spline fonksiyonları parçalı polinomların bir sınıfından olup polinomların süreklilik özelliği taşıyan dizilişleri ile oluşmaktadır. Parçalar farklı eğilimli doğru parçaları olabilecekleri gibi, doğrusal olmayan fonksiyonlar da olabilirler. Fonksiyon parçaların birleşme noktalarında kırılma gösterir. Yapısal değişikliğin incelenmesinde kullanılır.

1960' lardan sonra parçalı sürekli fonsiyonlar konusu öncelikli bir çalışma konusu haline gelmiştir. Özellikle spline fonksiyonları konusu bu tarihlerde çalışılmaya başlanmıştır. Bu fonksiyonlar sayısal integrasyon, diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri, interpolasyon, yaklaşım teorisi, veri uydurma, eğri ve yüzey uydurma gibi birçok uygulamalarda kullanılmaktadır. Ayrıca günümüz dünyasındaki büyük gelişmeler sayesinde bilgisayar çizimlerinde eğrileri tanımlayabilmek için çok yönlü yaklaşımlar sunan B-spline fonkiyonlar, geometrik modelleme bilgisayar çizimleri ve daha birçok alanda önemli bir konuma gelmiştir.

Çok sayıdaki veri noktalarına bir tek eğri ile yaklaşmak büyük kolaylık sağlasa da bazı hallerde bu durum büyük hatalara neden olabilir. Ayrıca bu amaçla kullanılan Newton ve Lagrange interpolasyon polinomlarının derecesi nokta sayısı arttıkça artacağından, bu tür polinomlarla yapılacak işlemler zorlaşır. Bu durumda, düğüm olarak

adlandırılan noktalarda birbirlerine bağlı, polinom eğri parçalarından oluşan B spline fonksiyonlar yardımıyla yapılan yaklaşımlar bir alternetif olarak çıkar karşımıza. Spline interpolasyonu; tanımlanan aralık üzerinde, biribirlerini örtmeyen alt aralıklarda, daha küçük dereceden polinom bulma esasına dayanmaktadır. Spline fonksiyonlar, aşağıdaki özellikleri sağlayan parçalı polinom fonksiyonlardır:

• Spline fonksiyonlar, düzgün (smooth) fonksiyonlardır.

• Spline fonksiyonlar, uygun tabana sahip olan sonlu boyutlu lineer uzaylardır.

• Spline fonksiyonların elle hesaplanması ve bilgisayar programlarının yapılması kolaydır.

• Spline fonksiyonların türevleri ve integralleri de spline fonksiyonlardır.

• Küçük dereceden spline fonksiyonlar oldukça esnektir ve polinomlardaki gibi salınım sergilemez. Sonsuz aralık için bölünme noktalar:

$$\cdots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \cdots \quad \text{ve} \quad \lim_{m\to 0} x_m = \infty = -\lim_{m\to 0} x_m$$

olarak alınabilir. Bölünme noktalarında farklı dereceden B-spline fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanabilir. Bu durumda 0. dereceden B-spline fonksiyonu

$$B_m^0 = \begin{cases} 1, & x_m \le x \le x_{m+1} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

formunda tanımlanır. B_m^0 B-spline fonksiyonunun süreksiz olduğu açıktır. Ayrıca sıçramanın oluştuğu her noktada, her m ve x_m için;

$$\lim_{x\to x_{m+}} B_m^0(x) = 1 = B_m^0(x_m)$$

$$\lim_{x_{m+1}^+} B_m^0(x) = 0 = B_m^0(x_{m+1})$$

olduğundan B_m^0 B-spline fonksiyonu sağdan süreklidir. Yukarıdaki verilen iki eşitlikten dolayı $B_m^0(x)$ B spline fonksiyonunun

$$\forall\ m \text{ ve } x_m \text{ için} \quad B_m^0(x) \ge 0,$$

$$\forall\ x \text{ için} \qquad \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_i^0(x) = 1 = B_m^0(x_{i+1})$$

özelliklerini sağladığı ve sadece $[x_m, x_{m+1})$ aralığında değer aldığı açıktır. Yüksek dereceden B-spline fonksiyonlar ise

$$B_m^k = \frac{x - x_m}{x_{m+k} - x_m} B_m^{k-1}(x) + \frac{x_{m+k+1} - x}{x_{m+k+1} - x_{m+1}} B_{m+1}^{k-1}(x)$$

$(k = 1, 2, \ldots)$ ve $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ indirgeme bağıntısı yardımıyla türetilebilir (Höllig, 2003). B_m^k B-spline fonksiyonu aynı nokta dizileri için tanımlı ve derecesi k olan spline fonksiyonlar için tabandır.

Ayrıca derecesi k olan B-spline fonksiyonu, -$\infty \leq m \leq \infty$ ve

$$(x - x_{m+i})_+^k = \begin{cases} (x - x_{m+i})^k, & x_{m+i} \leq x \\ 0, & x_{m+i} > x \end{cases}$$

olmak üzere

$$B_i^k(x) = \frac{1}{h^k} \sum_{k=o}^{k+1} \binom{k+1}{m} (-1)^m (x - x_{m+i})_+^k$$

formülü kullanılarak da elde edilebilir. Yazılan bu son eşitlik $x \leq x_m$ ve $x \geq x_{m+i+1}$ olduğundan $B_m^k(x) = 0$ durumunu sağlar. Ayrıca derecesi k olan B-spline, k-1 kez sürekli türeve sahiptir.

1.1.1 Lineer B-spline fonksiyonlar

Herhangi bir $[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$$

olsun. Bu aralığın x_m noktalarında $L_m(x)$ lineer B-spline fonkiyonları,

$$L_m(x) = \frac{1}{h} \begin{cases} (x_{m+1} - x) - 2(x_m - x), & [x_{m-1}, x_m] \\ x_{m+1} - x, & [x_m, x_{m+1}] \\ 0, & d.d \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Burada geçen $h = x_{m+1} - x_m$ dir. $[x_{m-1}, x_m]$ aralığı yukarıda tanımlanan lineer B-spline fonksiyonlarıyla L_m ve L_{m+1} biçimindeki iki spline tarafından örtülür.

1.1.2 Kuadratik B-spline fonksiyonlar

Herhangi bir $[a,b]$ aralığını

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$$

noktalarında eşit uzunluklu alt aralıklara bölelim. Bu alt aralıklar üzerinde oluşturulan kuadratik B-spline fonksiyonları $m = -1, 0, 1, \ldots, N$ olmak üzere,

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^2} \begin{cases} (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2 + 3(x_m - x)^2, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^2, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & d.d \end{cases} \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlanır (d.d: diğer durumlarda). $[a,b]$ üzerinde tanımlı fonksiyonların bir bazının

$$X_N = L\left\{\phi_{-1}, \phi_0, ..., \phi_{N-1}, \phi_N\right\}$$

kuadratik B-spline fonksiyonları olduğu ifade edilmiştir (Prenter, 1975). Kuadratik B-spline $\phi_m(x)$ ve onun türevi $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığının dışında sıfırdır. $\phi_m(x)$ ve onun birinci türevi olan $\phi_m^{'}(x)$ fonksiyonunun bazı bölüm noktalarındaki değerleri aşağıda Tablo (1. 1) de verilmiştir:

Tablo 1.1: $\phi_m^{'}(x)$ fonksiyonunun bazı bölünme noktalarındaki değerleri

x	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
ϕ_m	0	1	1	0
$\phi_m^{'}$	0	$\frac{2}{h}$	$-\frac{2}{h}$	0

Her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı ϕ_{m-1}, ϕ_m, ϕ_{m+1} gibi ardışık üç spline tarafından örtülür. x_m bölünme noktalarında kuadratik B-spline $a \leq x \leq b$ bölgesi üzerinde bir taban

oluşturur. $[a,b]$ aralığı üzerinde ve t zamanı için tanımlı her U_N fonksiyonu

$$U_N(x,t)=\sum_{m=-1}^{N}\delta_m(t)\,Q_m(x) \tag{1.2}$$

formunda yaklaşık olarak yazılabilir. Yukarıda ki ifadede δ_m bağımlı parametredir ve kuadratik B-spline tarafından tanımlıdır.

(1.2) yaklaşımını ve (1.1) splineları kullanarak U_m nodal değerlerini ve onun birinci türevi olan $U_m^{'}$ i x_m bölünme noktalarında eleman parametresi açısından $'$ sembolü x e göre türevi ifade etmek üzere,

$$\begin{aligned}U_m&=U(x_m)=\delta_{m-1}+\delta_m\\ hU_m^{'}&=hU^{'}(x_m)=2(\delta_m-\delta_{m-1})\end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz.

1.1.3 Kübik B-spline fonksiyonlar

Herhangi bir $[a,b]$ aralığını

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b$$

noktalarında eşit uzunluklu alt aralıklara bölelim. Bu alt aralıklar üzerinde oluşturulan kübik B-spline fonksiyonları, $m=-1,0,1,\ldots,N+1$ olmak üzere,

$$\phi_m(x)=\frac{1}{h^3}\begin{cases}(x-x_{m-2})^3, & [x_{m-2},x_{m-1}]\\ h^3+3h^2(x-x_{m-1})\\ +3h(x-x_{m-1})^2-3(x-x_{m-1})^3, & [x_{m-1},x_m]\\ h^3+3h^2(x_{m+1}-x)\\ +3h(x_{m+1}-x)^2-3(x_{m+1}-x)^3, & [x_m,x_{m+1}]\\ (x_{m+2}-x)^3, & [x_{m+1},x_{m+2}]\\ 0, & d.d\end{cases} \tag{1.3}$$

bağıntısı ile tanımlanır (Prenter, 1975). $[a,b]$ üzerinde tanımlı fonksiyonların bir tabanının

$$X_N=L\left\{\phi_{-1},\phi_0,\ldots,\phi_N,\phi_{N+1}\right\}$$

kübik B-spline fonksiyonları olduğu ifade edilmiştir. Kübik B-spline $\phi_m(x)$ ve kübik B-spline' nın birinci ve ikinci türevleri $[x_{m-2},x_{m+2}]$ aralığının dışında sıfırdır. $\phi_m(x)$

ve $\phi_m^{'}(x)$, $\phi_m^{''}(x)$ türevlerinin x_m bölünme noktalarındaki değerleri aşağıda tablo (1. 2) de verilmiştir:

Tablo 1.2:$\phi_m^{'}(x)$, $\phi_m^{''}(x)$ fonksiyonlarının bazı bölünme noktalarındaki değerleri

x	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
ϕ_m	0	1	4	1	0
$\phi_m^{'}$	0	$\frac{3}{h}$	0	$-\frac{3}{h}$	0
$\phi_m^{''}$	0	$\frac{6}{h^2}$	$-\frac{12}{h^2}$	$\frac{6}{h^2}$	0

Her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı ϕ_{m-1}, ϕ_m, ϕ_{m+1} ve ϕ_{m+2} gibi dört spline tarafından örtülür. $U(x,t)$ analitik çözümüne bir yaklaşık çözüm olan $U_N(x,t)$, spline fonksiyonlar yardımıyla

$$U_N(x,t) = \sum_{j=-1}^{N+1} \phi_j(x)\,\delta_j(t)$$

şeklinde tanımlanabilir. Ayrıca x_m bölünme noktalarında U_N ve ilk iki türevi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} U(x_m) &= \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1} \\ U^{'}(x_m) &= \frac{3}{h}(\delta_{m+1} - \delta_{m-1}) \\ U_m^{''}(x_m) &= \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) \end{aligned}$$

1.1.4 Kuartik B-spline fonksiyonlar

Herhangi bir $[a,b]$ aralığını

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$$

noktalarında eşit uzunluklu alt aralıklara bölelim. Bu alt aralıklar üzerinde oluşturulan $\phi_m(x)$ kuartik B-spline fonksiyonları , $m = -2,-1,0,1,\ldots,N+1$ olmak üzere,

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^4}\begin{cases} (x-x_{m-2})^4, & [x_{m-2},x_{m-1}] \\ (x-x_{m-2})^4 - 5(x-x_{m-1})^4, & [x_{m-1},x_m] \\ (x-x_{m-2})^4 - 5(x-x_{m-1})^4 + 10(x-x_m)^4, & [x_m,x_{m+1}] \\ (x_{m+3}-x)^4 - 5(x_{m+2}-x)^4, & [x_{m+1},x_{m+2}] \\ (x_{m+3}-x)^4, & [x_{m+2},x_{m+3}] \\ 0, & d.d \end{cases} \tag{1.4}$$

bağıntısı ile tanımlanır (Prenter, 1975). $\phi_m(x)$ B-spline fonksiyonu ve onun ilk üç türevi $[x_{m-2},x_{m+3}]$ aralığının dışında sıfırdır. (1.4) deki fonksiyonlar her bir $[x_m,x_{m+1}]$ aralığı ϕ_{m-2}, ϕ_{m-1}, ϕ_m ve ϕ_{m+1} gibi dört spline tarafından örtülür.

$'$, $''$ ve $'''$ sembolleri x'e göre birinci, ikinci ve üçüncü türevleri göstermek üzere $[x_{m-2},x_{m+3}]$ aralığında $\phi_m(x)$,$\phi_m^{'}(x)$,$\phi_m^{''}(x)$ ve $\phi_m^{'''}(x)$ fonksiyonlarının bazı bölünme noktalarındaki değerleri aşağıda Tablo (1. 3) de verilmiştir:

Tablo 1.3: $\phi_m^{'}(x)$, $\phi_m^{''}(x)$, $\phi_m^{'''}(x)$ fonksiyonlarının bazı bölünme noktalarındaki değerleri

x	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}
ϕ_m	0	1	11	11	1	0
$h\phi_m^{'}$	0	4	12	-12	-4	0
$h^2\phi_m^{''}$	0	12	-12	-12	12	0
$h^3\phi_m^{''}$	0	24	-72	72	-24	0

Ayrıca x_m bölünme noktalarında U_N ve ilk üç türevi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} U_N(x_m,t) &= \delta_{m-2} + 11\delta_{m-1} + 11\delta_m + \delta_{m+1}, \\ U_N^{'}(x_m,t) &= \frac{4}{h}\left(\delta_{m+1} + 3\delta_m - 3\delta_{m-1} - \delta_{m-2}\right), \\ U_N^{''}(x_m,t) &= \frac{12}{h^2}\left(\delta_{m+1} - \delta_m - \delta_{m-1} + \delta_{m-2}\right), \\ U_N^{'''}(x_m,t) &\quad \frac{24}{h^3}\left(\delta_{m+1} - 3\delta_m + 3\delta_{m-1} - \delta_{m-2}\right). \end{aligned}$$

1.1.5 Kuintik B-spline fonksiyonlar

Herhangi bir $[a,b]$ aralığını

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$$

noktalarında eşit uzunluklu alt aralıklara bölelim. Bu alt aralıklar üzerinde oluşturulan

$\phi_m(x)$ kuintik B-spline fonksiyonları $m = -2, -1, 0, 1, ..., N+2$ olmak üzere,

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} (x - x_{m-3})^5, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 \\ +15(x - x_{m-1})^5, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 \\ +15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 \\ +15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 \\ +15(x - x_{m+1})^5, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 \\ +15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 \\ +15(x - x_{m+1})^5 - 6(x - x_{m+2})^5, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 0, & d.d \end{cases} \tag{1.5}$$

şeklinde tanımlanır (Prenter, 1975). $\phi_m(x)$ Kuintik B-spline fonksiyonu ve onun türevleri $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığının dışında sıfırdır. (1.5) deki fonksiyonlar her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı ϕ_{m-2}, ϕ_{m-1}, ϕ_m, ϕ_{m+1} ve ϕ_{m+2} gibi beş spline tarafından örtülür.

$'$, $''$, $'''$ ve $''''$ sembolleri x' e göre birinci, ikinci ,üçüncü ve dördüncü mertebeden türevleri göstermek üzere $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığında $\phi_m(x)$,$\phi_m^{'}(x)$, $\phi_m^{''}(x)$, $\phi_m^{'''}(x)$, $\phi_m^{''''}(x)$ fonksiyonlarının bazı bölünme noktalarındaki değerleri Tablo (1.4) de verilmiştir.

Tablo 1.4: $\phi_m(x)$,$\phi_m^{'}(x)$,$\phi_m^{''}(x)$, $\phi_m^{'''}(x)$, $\phi_m^{''''}(x)$ fonksiyonlarının bazı bölünme noktalarındaki değerleri

x	x_{m-3}	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}
ϕ_m	0	1	26	66	26	1	0
$h\phi_m^{'}$	0	5	50	0	-50	-5	0
$h^2\phi_m^{''}$	0	20	40	-120	40	20	0
$h^3\phi_m^{'''}$	0	60	-120	0	-120	60	0
$h^4\phi_m^{''''}$	0	120	-480	720	-480	120	0

Ayrıca x_i bölünme noktasında U_N ve ilk dört türevi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
U_N(x,t) &= \delta_{m+2} + 26\delta_{m+1} + 66\delta_m + 26\delta_{m-1} + \delta_{m-2}, \\
U_N'(x,t) &= \frac{5}{h}\left(\delta_{m+2} + 10\delta_{m+1} - 10\delta_{m-1} - \delta_{m-2}\right), \\
U_N''(x,t) &= \frac{20}{h^2}\left(\delta_{m+2} + 2\delta_{m+1} - 6\delta_m + 2\delta_{m-1} + \delta_{m-2}\right), \\
U_N'''(x,t) &= \frac{60}{h^3}\left(\delta_{m+2} - 2\delta_{m+1} + 2\delta_{m-1} - \delta_{m-2}\right), \\
U_N''''(x,t) &= \frac{120}{h^4}\left(\delta_{m+2} - 4\delta_{m+1} + 6\delta_m - 4\delta_{m-1} + \delta_{m-2}\right).
\end{aligned} \tag{1.6}$$

1.1.6 Sektik B-spline fonksiyonlar

Herhangi bir $[a,b]$ aralığını

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$$

noktalarında eşit uzunluklu alt aralıklara bölelim.

$$h = x_{m+1} - x_m, m = -3, \ldots, N+2$$

olmak üzere $\phi_m(x)$ sektik B-spline fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^6} \begin{cases} (x - x_{m-3})^6, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-3})^6 - 7(x - x_{m-2})^6, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-3})^6 - 7(x - x_{m-2})^6 \\ +21(x - x_{m-1})^6, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-3})^6 - 7(x - x_{m-2})^6 \\ +21(x - x_{m-1})^6 - 35(x - x_m)^6, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x - x_{m+4})^6 - 7(x - x_{m+3})^6 \\ +21(x - x_{m+2})^6, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x - x_{m+4})^6 - 7(x - x_{m+3})^6, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ (x - x_{m+4})^6, & [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0, & d.d \end{cases} \tag{1.7}$$

$\{\phi_{-3}, \phi_{-2}, \ldots, \phi_{N+2}\}$ sektik B-spline kümesi, $[a,b]$ tanım kümesi üzerinde bir taban oluşturmaktadır (Prenter, 1975). Böylece $\phi_m(x)$ x_i, $i = m-3, \ldots, m+4$ noktaları üzerinde altıncı dereceden B-spline olarak tanımlanır.

$[x_{m-4}, x_{m+4}]$ aralığında $\phi_m(x)$, ϕ_m', ϕ_m'', ϕ_m''' fonksiyonlarının bölünme noktalarındaki değerleri aşağıda Tablo (1. 5) de verilmiştir:

Tablo 1.5: $\phi_m(x)$, $\phi_m^{'}(x)$, $\phi_m^{''}(x)$, $\phi_m^{'''}(x)$ fonksiyonlarının bazı bölünme noktalarındaki değerleri

x	x_{m-4}	x_{m-3}	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}
ϕ_m	0	1	57	302	302	57	1	0
$\frac{h}{6}\phi_m^{'}(x)$	0	-1	-25	-40	40	25	1	0
$\frac{h^2}{30}\phi_m^{''}(x)$	0	1	9	-10	-10	9	1	0
$\frac{h^3}{120}\phi_m^{'''}(x)$	0	-1	-1	8	-8	1	1	0

Nodal U değeri ve onun x_m bölünme noktalarındaki $U^{'}$, $U^{''}$, $U^{'''}$ türevleri

$$\begin{aligned} U_m = U(x_m) &= \delta_{m-3} + 57\delta_{m-2} + 302\delta_{m-1} \\ &\quad +302\delta_m + 57\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_m^{'} = U^{'}(x_m) &= \frac{6}{h}(\delta_{m+2} + 25\delta_{m+1} + 40\delta_m \\ &\quad -40\delta_{m-1} - 25\delta_{m-2} - \delta_{m-3}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_m^{''} = U^{''}(x_m) &= \frac{30}{h^2}(\delta_{m+2} + 9\delta_{m+1} - 10\delta_m \\ &\quad -10\delta_{m-1} + 9\delta_{m-2} + \delta_{m-3}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_m^{'''} = U^{'''}(x_m) &= \frac{120}{h^3}(\delta_{m+2} + \delta_{m+1} - 8\delta_m \\ &\quad +8\delta_{m-1} - \delta_{m-2} - \delta_{m-3}). \end{aligned}$$

olarak verilir.

1.1.7 Septik B-spline fonksiyonlar

Herhangi bir $[a, b]$ aralığını

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$$

noktalarında eşit uzunluklu alt aralıklara bölelim.

$$h = x_{m+1} - x_m, m = 0, \ldots, N-1$$

olmak üzere $\phi(m)$ septik B-spline fonksiyonları,

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^7}\begin{cases} (x-x_{m-4})^7, & [x_{m-4}, x_{m-3}] \\ (x-x_{m-4})^7 - 8(x-x_{m-3})^7, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x-x_{m-4})^7 - 8(x-x_{m-3})^7 \\ +28(x-x_{m-2})^7, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x-x_{m-4})^7 - 8(x-x_{m-3})^7 \\ +28(x-x_{m-2})^7 - 56(x-x_{m-1})^7, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+4}-x)^7 - 8(x_{m+3}-x)^7 \\ +28(x_{m+2}-x)^7 - 56(x_{m+1}-x)^7, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+4}-x)^7 - 8(x_{m+3}-x)^7 \\ +28(x_{m+2}-x)^7, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x_{m+4}-x)^7 - 8(x_{m+3}-x)^7, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ (x_{m+4}-x)^7, & [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0, & d.d \end{cases} \tag{1.8}$$

şeklindedir (Prenter, 1975). $\phi_m(x)$ B-spline fonksiyonları ve onun birinci, ikinci ve üçüncü dereden türevleri $[x_{m-4}, x_{m+4}]$ aralığı dışında sıfırdır.

$[x_{m-4}, x_{m+4}]$ aralığında $\phi_m(x)$, $\phi_m'(x)$, $\phi_m''(x)$ ve $\phi_m'''(x)$ fonksiyonlarının bazı bölünme noktalarındaki değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Tablo 1.6: $\phi_m(x)$, $\phi_m^{'}(x)$, $\phi_m^{''}(x)$, $\phi_m^{'''}(x)$ fonksiyonlarının bazı bölünme noktalarındaki değerleri

x	x_{m-4}	x_{m-3}	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}	x_{m+4}
ϕ_m	0	1	120	1191	2416	1191	120	1	0
$h\phi_m^{'}(x)$	0	7	392	1715	0	-1715	-392	-7	0
$h^2\phi_m^{''}(x)$	0	42	1008	630	-3360	630	1008	42	0
$h^3\phi_m^{'''}(x)$	0	210	1680	-3990	0	3990	-1680	-210	0

x_m bölünme noktasında U_N ve ilk üç türevi,

$$\begin{aligned}
U_N(x,t) &= (\delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m \\
&\quad +1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
U_N^{'}(x,t) &= \frac{1}{h}(7\delta_{m-3} + 392\delta_{m-2} + 1715\delta_{m-1} \\
&\quad -1715\delta_{m+1} - 392\delta_{m+2} - 7\delta_{m+3}), \\
U_N^{''}(x,t) &= \frac{1}{h^2}(42\delta_{m-3} + 1008\delta_{m-2} + 63\delta_{m-1} - 3360\delta_m \\
&\quad +630\delta_{m+1} + 1008\delta_{m+2} + 42\delta_{m+3}), \\
U_N^{'''}(x,t) &= \frac{1}{h^3}(210\delta_{m-3} + 1680\delta_{m-2} - 3990\delta_{m-1} \\
&\quad +3990\delta_{m+1} - 1680\delta_{m+2} - 210\delta_{m+3}).
\end{aligned} \tag{1.9}$$

şeklinde elde edilir.

1.1.8 Genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlar

$[a,b]$ aralığını

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$$

$$h = x_m - x_{m-1} = (b-a)/N$$

$m = 0, \ldots, N$ için $[x_{m-1}, x_m]$ alt aralıklara bölelim. x_m, $m = 0, \ldots, N$ bölünme nokta-

ları üzerinde $Q_m(x)$ genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonları $Q_m,\ m=-1,\ldots,N+1$

$$Q_m(x)=\frac{1}{24h^4}\begin{cases} 4h(1-\lambda)(x-x_{m-2})^3+3\lambda(x-x_{m-2})^4, & [x_{m-2},x_{m-1}],\\ (4-\lambda)h^4+12h^3(x-x_{m-1})+6h^2(2+\lambda)(x-x_{m-1})^2 & \\ -12h(x-x_{m-1})^3-3\lambda(x-x_{m-1})^4, & [x_{m-1},x_m],\\ (4-\lambda)h^4+12h^3(x_{m-1}-x)+6h^2(2+\lambda)(x_{m+1}-x)^2 & \\ -12h(x_{m+1}-x)^3-3\lambda(x_{j+1}-x)^4, & [x_m,x_{m+1}],\\ 4h(1-\lambda)(x_{m+2}-x)^3+3\lambda(x_{m+2}-x)^4, & [x_{m+1},x_{m+2}],\\ 0, & d.d, \end{cases} \tag{1.10}$$

olarak tanımlanmıştır. Genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonları $\lambda=0$ için $Q_m(x)$ kübik B-spline fonkiyonuna dönüşür. İsminden de anlaşıldığı gibi genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonları kübik B spline fonksiyonlarından oluşturulmuştur. Kübik B-spline fonksiyonun bir genişlemesidir. Ayrıca kübik B-spline'a benzer olarak $\{Q_{-1},\ Q_0,\ \ldots,\ Q_{N+1}\}$ genişletilmiş kübik B-spline kümesi $[a,b]$ üzerinde bir tabandır. $[a,b]$ aralığı üzerinde bir U fonksiyonu yaklaşık olarak

$$U_N(x,t)=\sum_{j=-1}^{N+1}\delta_j Q_j \tag{1.11}$$

formunda yazılabilir. Ayrıca dört ardışık genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonu $[x_m,x_{m+1}]$ elemenını örter. $[x_{m-2},x_{m+2}]$ aralığı dışında genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonu tanımlı değildir. Böylelikle $U(x,t)$ $[x_m,x_{m+1}]$ aralığında

$$U_N(x,t)=\sum_{j=m-2}^{m+2}\delta_j Q_j \tag{1.12}$$

olarak tanımlanır. Burada δ_{m-1}, δ_m, δ_{m+1}, δ_{m+2} eleman parametresini göstermektedir. Genişletilmiş kübik B-spline $Q_m(x)$ ve onun $Q'(x)$, $Q''(x)$ ardışık türevlerinin bölünme

noktalarındaki değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Tablo 1.7: $Q_m(x)$, $Q'_m(x)$, $Q''_m(x)$ fonksiyonlarının bazı bölünme noktalarındaki değerleri

x	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
Q_m	0	$\frac{4-\lambda}{24}$	$\frac{8+\lambda}{12}$	$\frac{4-\lambda}{24}$	0
Q'_m	0	$-\frac{1}{2h}$	0	$\frac{1}{2h}$	0
Q''_m	0	$\frac{2+\lambda}{2h^2}$	$-\frac{2+\lambda}{h^2}$	$\frac{2+\lambda}{2h^2}$	0

Tablo yardımı ile x_i bölünme noktalarında (1.11) denklemi,onun birinci ve ikinci türevleri

$$U_m = U(x_m) = \frac{4-\lambda}{24}\delta_{m-1} + \frac{8+\lambda}{12}\delta_m + \frac{4-\lambda}{24}\delta_{m+1},$$

$$U'_m = U'(x_m) = -\frac{\delta_{m-1}}{2h} + \frac{\delta_{m+1}}{2h},$$

$$U''_m = U''(x_m) = \frac{2+\lambda}{2h^2}\delta_{m-1} - \frac{2+\lambda}{h^2}\delta_m + \frac{2+\lambda}{2h^2}\delta_{m+1}.$$

olarak hesaplanır. (Hamid, et al., 2011)

1.2 REGULARİZED LONG WAVE (RLW) Denklemi

Düzenlenmiş uzun dalga denklemi lineer olmayan önemli bir dalga denklemidir. Özellikle ilerleyen dalgaları modellemek için kullanılır. Bu denklem KdV denkleminden daha alışıldık, lineer olmayan yayılma dalgaları olarak da tanımlanabilir.

ε ve μ reel sabitler, t ve x indisleri ise türevleri göstermek üzere

$$U_t + U_x + \varepsilon U U_x - \mu U_{xxt} = 0 \tag{1.13}$$

biçiminde verilir. Sınır ve başlangıç koşulları ise sırasıyla aşağıdaki gibidir :

$$\begin{aligned} &U(a,t) = \alpha_1, \\ &U(b,t) = \alpha_2, \\ &U_x(a,t) = 0, \\ &U_x(b,t) = 0, \\ &U_{xx}(a,t) = 0, \\ &U_{xx}(b,t) = 0, \\ &t \in (0,T], \\ &U(x,0) = f(x), \ a \leq x \leq b \end{aligned} \tag{1.14}$$

Denklem lineer olmadığından analitik çözümü bazı kısıtlı başlangıç koşulları altında vardır. Bazende elde edilen analitik çözümler kullanışlı olmayabilir. Bundan dolayı RLW denklemi sayısal olarak, değişik başlangıç ve sınır şartları kullanılarak farklı yöntemlerle çözülmüştür. Uygun koşullar altında RLW denkleminin çözümlerinin varlığını ve tekliğini Bona ve Pryant incelemiştir. İlk olarak (Peregrine,1966) , durgun suya akan suyun üzerinde oluşan ardışık dalga oluşumunu tanımlamak için RLW denklemini kullanmış ve sonlu farklar metodunu kullanarak bu deklemin ilk nümerik çözümünü elde etmiştir. Benjamin, Bona ve Mahony (1972) ise, RLW denkleminin dalga denklemi çözümlerinin daha yaygın olarak bilinen lineer olmayan Korteweg-deVries (KdV) denkleminin dalga denklemi çözümlerine benzerliğini göstermişlerdir. RLW denklemi sığ su dalgalarını modellemesinin yanı sıra, bazı elektrik ve elektromagnetik dalgaların modellemesinde de kullanılmaktadır. RLW denkleminde tek dalga yayılımı analitik çözümünün var olmasından dolayı birçok sayısal metot içinde test problemi olarak kullanılmaktadır. Eilbeck ve McGuire (1975,1977), birinci ve ikinci mertebeden iki adımlı ve ikinci mertebeden üç adımlı sonlu farklar metotlarını kullanarak RLW denkleminin sayısal çözümleri üzerinde çalışmışlardır. Ayrıca 1977 yılında, üç adımlı sonlu farklar yöntemi üzerinde daha ayrıntılı bir çalışma yapmışlardır (Eilbeck and McGuire, 1977). P.C.Jain ve L.İskander RLW denkleminin sayısal çözümünü bulabilmek için yarı lineerleştirme ve sabit yerleştirme yaklaşımın birleşmi yardımıyla bir sonlu fark metodu vermişlerdir. M. E.Alexander ve J. L. L. Morris, Kübik spline kullanarak, Galerkin metoduyla RLW denkleminin nümerik çözümüyle uğraşmışlardır. L. R. T. Gardner, G. A. Gardner ve L. R. T. Gardner, İ. Dağ, kübik B-spline kullanarak, Galerkin

metoduyla RLW denkleminin nümerik çözümlerini sunmuştur. Chang ve arkadaşları (1991), RLW denklemine korunumlu fark metodunu uygulamışlar metodun yakınsaklığını ve kararlılığını göstermişlerdir. Gardner ve arkadaşları (1995), kuadratik B-spline Galerkin metodu ile RLW denkleminin sayısal çözümlerini elde etmişlerdir. Gardner ve arkadaşları (1996), lineer şekil fonksiyonları yardımıyla en küçük kareler metodu ile sayısal çözüm elde etmişlerdir. Gardner ve arkadaşları (1997), kuintik B-spline kullanarak Petrov-Galerkin metoduyla sayısal çözüm üzerine çalışmışlardır. İ. Dağ (2000), kuadratik Bspline yardımıyla en küçük kareler metodunu RLW denklemine uygulamıştır. Bhardwaj ve Shankar (2000), RLW denklemini parçalayıp kuintik spline kullanarak sonlu farklar metodu ile sayısal çözüm araştırmışlar, yerel kesme hatasını ve kararlılığını göstermişlerdir. İ. Dağ ve M. N. Özer (2001), kübik B-spline kullanarak en küçük kareler metodunu RLW denklemine uygulamış ve sayısal çözüm bulmuşlardır. Abdülkadir Doğan, (2001,2002), kuadratik B-spline kullanarak Petrov-Galerkin ve lineer şekil fonksiyonları yardımıyla Galerkin metodlarını RLW denklemine uygulayıp sayısal çözümler araştırmıştır. RLW denkleminin yaklaşık çözümünü elde edebilmek için yapılan çalışmalar bugünde devam etmektedir ve değişik algoritmalar ile en iyi sayısal çözüm bulmak amaçlanmaktadır.

Olver (1979), RLW denkleminin aşağıda verilen C_1, C_2 ve C_3 üç korunum kuralına sahip olduğunu göstermiştir:

$$C_1 = \int_{-\infty}^{\infty} U dx,\ C_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(U^2 + \mu \left(U_x\right)^2\right) dx,\ C_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(U^3 + 3U^2\right) dx$$

Bu korunum kuralları ve ortalama hata normu L_2

$$L_2 = \sqrt{h \sum_{j=0}^{N} \left|U_j^{tam} - U_j^{nümerik}\right|^2}$$

ile maksimum normu L_∞

$$L_\infty = \left\|U_j^{tam} - U_j^{nümerik}\right\|_\infty = \max_j \left|U_j^{tam} - U_j^{nümerik}\right|$$

algoritmanın doğruluğunu test etmek için hesaplanacaktır.

1.2.1 RLW denkleminin analitik çözümü

Tek solitary dalgasının yayılımı

RLW denkleminin teorik solitary dalga çözümü

$$U(x,t) = 3csech^2(k[x - x_0 - vt]),$$

olarak verilir. Denklemin başlangıç koşulu

$$U(x,0) = 3csech^2(k[x - x_0])$$

dir. Burada $v = 1 + \varepsilon c$ dalga hızını, $3c$ solitary dalgasının genliğini, x_0 başlangıçta merkezleşmiş dalganın en yüksek noktasını ifade etmektedir. Ayrıca $k = \sqrt{\dfrac{\varepsilon c}{4\mu v}}$,

$$U(a,t) = 0,\ U(b,t) = 0.$$

olarak seçilmiş sınır koşullarıdır.

Dalga undulation

$$U(x,0) = 0.5U_0\left[1 - \tanh\left(\frac{x - x_c}{d}\right)\right]$$

başlangıç koşulu ve

$$U(a,t) = U_0,\ U(b,t) = 0$$

sınır koşullarının kullanılmasıyla elde edilen RLW denkleminin çözümü dalga undulation olarak bilinir. Burada d durgun su ve derin su arasındaki eğimi ifade etmektedir.

Dalga üretimi

$$U(a,t) = \begin{cases} U_0\dfrac{t}{\tau}, & 0 \le t \le \tau \\ U_0, & \tau \le t \le t_0 - \tau \\ U_0\dfrac{t_0 - t}{\tau}, & t_0 - \tau \le t \le t_0 \\ 0, & \text{d.d} \end{cases}$$

formundaki sol sınır koşullarının kullanılmasıyla RLW denklemi için solitary dalgalar elde edilir. Sağ sınır koşulu ise sıfır olarak alınır. Solitary dalgasının sayısı sol sınır koşulunun uygulanma süresi ve büyüklüğüne bağlıdır.

BÖLÜM 2

RLW DENKLEMİNİN KOLOKEYŞİN METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde RLW denkleminin yaklaşık çözümleri kuadratik B-spline, kübik B-spline, kuartik B-spline, sektik B-spline ve septic B-spline kolokeyşin sonlu elemanlar algoritları kullanılarak ayrı ayrı incelenmiştir.

2.1 Kuadratik B-Spline Kolokeyşin Metodu

RLW denkleminde $V(x,t) = -U_x(x,t)$ yazarak denklemi ve denklemin sınır ve başlangıç koşullarını yeniden yazarsak

$$\begin{aligned} &U_t - (1+\varepsilon U)V + \mu V_{xt} = 0, \\ &V + U_x = 0 \\ &U(a,t) = \alpha_1,\ U(b,t) = \alpha_2,\ V(a,t) = V(b,t) = 0,\ t \in (0,T] \\ &U(x,0) = f(x),\ V(x,0) = -f'(x),\ a \le x \le b \end{aligned} \tag{2.1}$$

elde edilir. RLW denklemindeki $U(x,t)$ ve $V(x,t)$ analitik fonksiyonlarının yaklaşık çözümlerinin, $U_N(x,t)$ ve $V_N(x,t)$ olduğunu kabul edelim. Bu yaklaşık çözümler B-spline fonksiyonları cinsinden

$$\begin{aligned} U_N(x,t) &= \sum_{m=-1}^{N} \delta_m(t) Q_m(x) \\ V_N(x,t) &= \sum_{m=-1}^{N} \sigma_m(t) Q_m(x) \end{aligned} \tag{2.2}$$

olarak ifade edilir. Yukarıdaki ifadede geçen δ_m ve σ_m (2.1) denkleminin kübik kolokeyşin formundan ve yine aynı ifadede geçen sınır koşulları kullanılarak elde edilecek zamana bağlı parametrelerdir.

U_m, U_m', V_m ve V_m' nodal değişkenleri (2.2) ifadesi ve (1.1) spline'ları kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$
\begin{aligned}
U_m &= U\left(x_m\right) = \delta_{m-1} + \delta_m \\
hU_m^{'} &= hU^{'}\left(x_m\right) = 2\left(\delta_m - \delta_{m-1}\right) \\
V_m &= V\left(x_m\right) = \sigma_{m-1} + \sigma_m \\
hV_m^{'} &= hV^{'}\left(x_m\right) = 2\left(\sigma_m - \sigma_{m-1}\right)
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

(2.1) denkleminde (2.3) denklemleri yerine yazılarak birinci mertebeden $2N + 2$ denklem sistemi elde edilir.

$$
\begin{aligned}
& h\left(\overset{\circ}{\delta}_{m-1} + \overset{\circ}{\delta}_m\right) + 2\mu\left(\overset{\circ}{\sigma}_{m-1} - \overset{\circ}{\sigma}_m\right) - \left(1 + \varepsilon z_m\right) h\left(\sigma_{m-1} + \sigma_m\right) = 0 \\
& h\left(\sigma_{m-1} + \sigma_m\right) + 2\left(\delta_m - \delta_{m-1}\right) = 0
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

$\circ$ sembolü zamana bağlı türevi ifade eder. Ayrıca $z_m = \delta_{m-1} + \delta_m$ dir. δ_m ve σ_m eleman parametrelerinin iki ardışık zaman adımı olan n ve $n+1$ arasındaki lineer interpolasyonla

$$
\begin{aligned}
\delta_m &= \frac{\delta_m^{n+1} + \delta_m^n}{2}, \\
\sigma_m &= \frac{\sigma_m^{n+1} + \sigma_m^n}{2}
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

ve bunların zamana göre türevleri Crank-Nicolson yaklaşımıyla

$$
\begin{aligned}
\overset{\circ}{\delta}_m &= \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\Delta t} \\
\overset{\circ}{\sigma}_m &= \frac{\sigma_m^{n+1} - \sigma_m^n}{\Delta t}
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

yazılırsa (2.4) denklemi

$$\beta_{m1} = 4\mu + z_m h\Delta t,$$

$$\beta_{m2} = 4\mu - z_m h\Delta t,$$

$$z_m = 1 + \varepsilon\left(\delta_{m-1} + \delta_m\right).$$

$m = 0, \ldots, N$ olmak üzere

$$2h\delta_{m-1}^{n+1} - \beta_{m1}\sigma_{m-1}^{n+1} + 2h\delta_m^{n+1} + \beta_{m2}\sigma_m^{n+1}$$

$$= 2h\delta_{m-1}^{n} - \beta_{m2}\sigma_{m-1}^{n} + 2h\delta_m^{n} + \beta_{m1}\sigma_m^{n},$$

$$-2\delta_{m-1}^{n+1} + h\sigma_{m-1}^{n+1} + 2\delta_m^{n+1} + h\sigma_m^{n+1}$$

$$= 2\delta_{m-1}^{n} - h\sigma_{m-1}^{n} - 2\delta_m^{n} - h\sigma_m^{n}$$

$2N + 4$ bilinmeyenli $2N + 2$ cebirsel denklem sistemi elde edilir.

$U_0 = \delta_{-1} + \delta_0$ ve $V_N = \sigma_{N-1} + \sigma_N$ sınır koşulları yerine yazılarak $(2N + 2) \times (2N + 2)$ boyutlu 7 sütun elemanlı köşegen denklem sistemi elde edilir. Bu sistem Thomas algoritması ile çözülebilir.

δ_m^0, σ_m^0 başlangıç parameterlerini hesapladıktan sonra δ_m^n, σ_m^n parametrelerinin zaman değişimi aşağıda verilen sınır ve başlangıç koşullarının yardımı ile elde edilir.

$$\left(U_N\right)_x (a, 0) = 0,$$

$$\left(V_N\right)_x (a, 0) = 0,$$

$$U_N (x, 0) = U\left(x_m, 0\right), \ m = 0, \ldots, N \ ,$$

$$V_N (x, 0) = V\left(x_m, 0\right), \ m = 0, \ldots, N$$

Bu koşullar yardımıyla zaman türevleri arasındaki aşağıdaki ilişki elde edilir:

$$\delta_{-1}^{0} = \frac{U(a,0)}{2},$$

$$\delta_{0}^{0} = \frac{U(a,0)}{2},$$

$$\delta_{m}^{0} = U(x_m,0) - \delta_{m-1}^{0}$$

$$\sigma_{-1}^{0} = \frac{V(a,0)}{2},$$

$$\sigma_{0}^{0} = \frac{V(a,0)}{2},$$

$$\sigma_{m}^{0} = V(x_m,0) - \sigma_{m-1}^{0},\ m = 0, \ldots N.$$

(Dağ, et al. ,2003)

2.2 Kübik B- Spline Kolokeyşin Metodu

Kolokeyşin noktalarını x_i, $i = 1, \ldots, m$ bölünme noktaları olarak seçelim. U_m nodal değerleri ve onun ardışık ilk iki türevi olan $U_m^{'}$, $U_m^{''}$ değerleri (1.13)denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki birinci dereceden denklemlerden oluşan matris sistemi

$$\begin{aligned} &h^2\left(\overset{\circ}{\delta}_{m-1} + 4\overset{\circ}{\delta}_{m} + \overset{\circ}{\delta}_{m+1}\right) + 3h\left(1 + \varepsilon z_m\right)\left(\delta_{m+1} - \delta_{m-1}\right) \\ &-6\mu\left(\overset{\circ}{\delta}_{m-1} - 2\overset{\circ}{\delta}_{m} + \overset{\circ}{\delta}_{m+1}\right) = 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede geçen $\circ$ sembolü zamana bağlı türev anlamına gelmektedir.

$$z_m = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}$$

δ_m lineer olmayan terimlerinin n ve $n+1$ iki zaman dilimi arasında ayrışımı ve onun zamana bağlı türevlerinin yaklaşımı

$$\begin{aligned} \delta_m &= \frac{\delta_m^n + \delta_m^{n+1}}{2}, \\ \overset{\circ}{\delta}_m &= \frac{1}{\Delta t}\left(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n\right). \end{aligned} \tag{2.8}$$

olarak yazılabilir. (2.8) ifadesini (2.7) matris sisteminde yerine yazarsak

$$\alpha_{m1}\delta_{m-1}^{n+1} + \alpha_{m2}\delta_{m}^{n+1} + \alpha_{m3}\delta_{m+1}^{n+1} = \alpha_{m3}\delta_{m-1}^{n} + \alpha_{m2}\delta_{m}^{n} + \alpha_{m1}\delta_{m+1}^{n}$$

$$m = 0, 1, \ldots, N$$

ifadesine ulaşırız. Burada geçen α_{m1}, α_{m2}, α_{m3} aşağıda verilmiştir:

$$\alpha_{m1} = 2h^2 - 3h\Delta t\,(1 + z_m\varepsilon) - 12\mu,$$

$$\alpha_{m2} = 8h^2 + 24\mu,$$

$$\alpha_{m3} = 2h^2 + 3h\Delta t\,(1 + z_m\varepsilon) - 12\mu.$$

Lineer olmayan z_m terimindeki δ_m parametrelerinin n zamanındaki değerleri kullanılarak

$$z_m = \delta_{m-1}^{n} + 4\delta_{m}^{n} + \delta_{m+1}^{n}$$

lineer denklem oluşturulur. Böylece sistem $N+3$ bilinmeyenli $N+1$ denklem elde edilir. $U(a,t) = U(b,t) = 0$ sınır koşulları δ_{-1}^{n}, δ_{N+1}^{n} parametrelerini denklem sisteminden elimine eder. Böylece matris sistemi $(N+1)\times(N+1)$ boyutlu matris sisteme dönüşür. Bu matris sistemi üç sütun elemanlı köşegen bir matristir. Dolayısıyla Thomas algoritması ile kolaylıkla çözülebilir. δ_{m}^{n} eleman parametresini bulabilmek için δ_{m}^{0} başlangıç vektörünü aşağıdaki eşitlikleri sağlayacak şekilde seçmeliyiz:

$$(U_N)_x(a,0) = 0,$$

$$U_N(x,0) = U(x_m,0),\ m = 0, 1, \ldots, N,$$

$$(U_N)_x(b,0) = 0.$$

Dolayısıyla üç sütun elemanlı köşegenel denklem sistemi elde edilir. Böylelikle δ_{m}^{0} belirlenir. (Dağ, et al. ,2003)

2.3 Kübik B- Spline Kolokeyşin Metodu 2

$$U_t + U_x + \varepsilon U U_x - \mu U_{xxt} = 0$$

denkleminde

$$V(x,t) = -U_x(x,t)$$

dönüşümü yapılırsa

$$\begin{gathered} U_t - (1+\varepsilon U)V + \mu V_{xt} = 0 \\ V + U_x = 0 \end{gathered} \tag{2.9}$$

bulunur. Sınır ve başlangıç koşulları sırasıyla

$$\begin{aligned} &U(a,t) = \alpha_{1,} \\ &U(b,t) = \alpha_{2,} \\ &V(a,t) = 0, \\ &V(b,t) = 0, \\ &t \in (0,T], \\ &U(x,0) = f(x), \\ &V(x,0) = -f'(x), \ a \le x \le b \end{aligned} \tag{2.10}$$

şeklindedir. $[a,b]$ aralığının bölünme noktalarını

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$$

olarak seçelim ve $\phi_m(x)$, $m = -1, 0, 1, \ldots, N, N+1$ fonksiyonları bölüm noktalarında tanımlı kübik B-spline fonksiyonlar olsun. Parçalı RLW denklemindeki $U(x,t)$ ve $V(x,t)$ analitik fonksiyonlarının yaklaşık çözümlerinin $U_N(x,t)$ ve $V_N(x,t)$ olduğunu varsayalım. Bu yaklaşık çözümler B-spline fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi yazıla-

bilir:

$$\begin{array}{|l|l|}\hline U_N(x,t) & = \delta_{-1}(t)\,\phi_{-1}(x)+\delta_0(t)\,\phi_0(x)+\ldots+\delta_{N+1}(t)\,\phi_{N+1}(x) \\ \hline & = \sum_{m=-1}^{N+1}\delta_m(t)\,\phi_m(x), \\ \hline \end{array} \tag{2.11}$$

$$\begin{array}{|l|l|}\hline V_N(x,t) & = \sigma_{-1}(t)\,\phi_{-1}(x)+\sigma_0(t)\,\phi_0(x)+\ldots+\sigma_{N+1}(t)\,\phi_{N+1}(x) \\ \hline & = \sum_{m=-1}^{N+1}\sigma_m(t)\,\phi_m(x) \\ \hline \end{array}$$

Kübik B-spline fonksiyonlar ardışık dört aralığı örttüğünden $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu aralığı dört ardışık B-spline şekil fonksiyonu tarafından örtülür. Böylece U ve V yaklaşık çözümleri $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında ardışık kübik B-spline şekil fonksiyonları cinsinden

$$U_m = \sum_{j=m-1}^{m+2}\delta_j\phi_j$$
$$V_m = \sum_{j=m-1}^{m+2}\sigma_j\phi_j$$

biçiminde yazılabilir. (2.11) denklemi ve Tablo (1.2) kullanılarak, bölünme noktalarında eleman parametreleri U_m ve V_m yaklaşık çözümleri

$$\begin{aligned} U_m &= U(x_m) = \delta_{m-1}+4\delta_m+\delta_{m+1} \\ U_{m+1} &= U(x_{m+1}) = \delta_m+4\delta_{m+1}+\delta_{m+2} \\ V_m &= V(x_m) = \sigma_{m-1}+4\sigma_m+\sigma_{m+1} \\ V_{m+1} &= V(x_{m+1}) = \sigma_m+4\sigma_{m+1}+\sigma_{m+2} \end{aligned} \tag{2.12}$$

ve onların ikinci mertebeye kadarki türevleri

$$\begin{aligned} U'_m &= U'(x_m) = \frac{3}{h}(\delta_{m+1}-\delta_{m-1}) \\ U''_m &= U''_m(x_m) = \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1}-2\delta_m+\delta_{m+1}) \\ V'_m &= V'(x_m) = \frac{3}{h}(\sigma_{m+1}-\sigma_{m-1}) \\ V''_m &= V''_m(x_m) = \frac{6}{h^2}(\sigma_{m-1}-2\sigma_m+\sigma_{m+1}) \end{aligned} \tag{2.13}$$

olarak kolayca bulunabilir.

$^{\circ}$ sembolü zamana bağlı türev ve

$$z_m = 1 + \varepsilon\left(\delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}\right)$$

olmak üzere, U_N, V_N in bölüm noktalarındaki (2.12) değerleri ve (2.13) türevleri (2.9) denklem sisteminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &\delta^{\circ}_{m-1} + 4\delta^{\circ}_m + \delta^{\circ}_{m+1} + \frac{3\mu}{h}\left(\sigma^{\circ}_{m+1} - \sigma^{\circ}_{m-1}\right) \\ &-z_m\left(\sigma_{m-1} + 4\sigma_m + \sigma_{m+1}\right) = 0 \\ &\sigma_{m-1} + 4\sigma_m + \sigma_{m+1} + \frac{3}{h}\left(\delta_{m+1} - \delta_{m-1}\right) = 0 \end{aligned} \tag{2.14}$$

birinci mertebeden $2N+2$ diferensiyel denklem sistemi elde edilir. δ_m ve σ_m eleman parametrelerinin iki ardışık zaman adımı n ve n+1 arasındaki lineer interpolasyonla

$$\begin{aligned} \delta_m &= \frac{\delta^{n+1}_m + \delta^n_m}{2} \\ \sigma_m &= \frac{\sigma^{n+1}_m + \sigma^n_m}{2} \end{aligned}$$

ve bunların zamana göre türevleri Crank- Nicolson formülü yardımıyla

$$\delta^{\circ}_m = \frac{\delta^{n+1}_m - \delta^n_m}{\Delta t}, \quad \sigma^{\circ}_m = \frac{\sigma^{n+1}_m - \sigma^n_m}{\Delta t}$$

olarak bulunur. Bu ifadeler (2.14) denklem sisteminde kullanılırsa

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Delta t}\left(\delta^{n+1}_{m-1} - \delta^n_{m-1} + 4\delta^{n+1}_m - 4\delta^n_m + \delta^{n+1}_{m+1} - \delta^n_{m+1}\right) \\ &-\frac{z_m}{2}\left(\sigma^{n+1}_{m-1} + \sigma^n_{m-1} + 4\sigma^{n+1}_m + 4\sigma^n_m + \sigma^{n+1}_{m+1} + \sigma^n_{m+1}\right) \\ &+\frac{3\mu}{h\Delta t}\left(\sigma^{n+1}_{m+1} - \sigma^n_{m+1} - \sigma^{n+1}_{m-1} + \sigma^n_{m-1}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(\sigma^{n+1}_{m-1} + \sigma^n_{m-1} + 4\sigma^{n+1}_m + 4\sigma^n_m + \sigma^{n+1}_{m+1} + \sigma^n_{m+1}\right) \\ &+\frac{3}{2h}\left(\delta^{n+1}_{m+1} + \delta^n_{m+1} - \delta^{n+1}_{m-1} - \delta^n_{m-1}\right) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu sistem $m = 0, \ldots, N$ için

$$\begin{aligned} & 2h\delta_{m-1}^{n+1} - \beta_{m1}\sigma_{m-1}^{n+1} + 8h\delta_m^{n+1} - \beta_{m2}\sigma_m^{n+1} + 2h\delta_{m+1}^{n+1} + \beta_{m3}\sigma_{m+1}^{n+1} \\ & = 2h\delta_{m-1}^{n} - \beta_{m3}\sigma_{m-1}^{n} + 8h\delta_m^{n} + \beta_{m2}\sigma_m^{n} + 2h\delta_{m+1}^{n} + \beta_{m1}\sigma_{m+1,}^{n} \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} & -3\delta_{m-1}^{n+1} + h\sigma_{m-1}^{n+1} + 4h\sigma_m^{n+1} + 3\delta_{m+1}^{n+1} + h\sigma_{m+1}^{n+1} \\ & = 3\delta_{m-1}^{n} - h\sigma_{m-1}^{n} - 4\sigma_m^{n} - 3\delta_{m+1}^{n} - h\sigma_{m+1}^{n} \end{aligned}$$

olarak yeniden düzenlenirse, $2N + 6$ bilinmeyenli $2N + 2$ cebirsel denklem sistemi bulunur. Bu ifadede geçen β_{m1}, β_{m2}, β_{m3} aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} \beta_{m1} &= 6\mu + z_m h\Delta t, \\ \beta_{m2} &= 4z_m h\Delta t, \\ \beta_{m3} &= 6\mu - z_m h\Delta t, \end{aligned}$$

Denklemdeki δ_{-1}, σ_{-1}, δ_{N+1}, σ_{N+1} parametreleri sınır koşulları kullanılarak yok edilecektir. Böylece $(2N + 2) \times (2N + 2)$ boyutlu 7 sütun elemenlı köşegen denklem sistemi elde edilir. (2.10) sınır koşulları eleman parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned} \delta_{-1} - 2\delta_0 + \delta_1 &= 0, \\ \sigma_{-1} + 4\sigma_0 + \sigma_1 &= 0, \\ \delta_{N-1} - 2\delta_N + \delta_{N+1} &= 0, \\ \sigma_{N-1} + 4\sigma_N + \sigma_{N+1} &= 0 \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Bu denklemlerden sınır parametrelerinin değerleri

$$\begin{aligned} \delta_{-1} &= 2\delta_0 - \delta_1 \\ \sigma_{-1} &= -4\sigma_0 - \sigma_1 \\ \delta_{N+1} &= -\delta_{N-1} + 2\delta_N \\ \sigma_{N+1} &= -\sigma_{N-1} - 4\sigma_N \end{aligned} \tag{2.16}$$

olarak yazılabilir ve (2.15) denklem sisteminde yerlerine yazıldığında bu parametreler yok edilir.

$$\begin{aligned} F_1 &= 2h\delta_{-1}^n - \beta_{m3}\sigma_{-1}^n + 8h\delta_0^n + \beta_{m2}\sigma_0^n + 2h\delta_1^n + \beta_{m1}\sigma_1^n \\ F_2 &= 3\delta_{-1}^n - h\sigma_{-1}^n - 4h\sigma_0^n - 3\delta_1^n - h\sigma_1^n \\ F_{2N+1} &= 2h\delta_{N-1}^n - \beta_{m3}\sigma_{N-1}^n + 8h\delta_N^n + \beta_{m2}\sigma_N^n + 2h\delta_{N+1}^n + \beta_{m1}\sigma_{N+1}^n \\ F_{2N+2} &= 3\delta_{N-1}^n - h\sigma_{N-1}^n - 4h\sigma_N^n - 3\delta_{N+1}^n - h\sigma_{N+1}^n \end{aligned}$$

olmak üzere (2.15) denklem sisteminden $m = 0$ için,

$$\begin{aligned} 2h\delta_{-1}^{n+1} - \beta_{m1}\sigma_{-1}^{n+1} + 8h\delta_0^{n+1} - \beta_{m2}\sigma_0^{n+1} + 2h\delta_1^{n+1} + \beta_{m3}\sigma_1^{n+1} &= F_1 \\ -3\delta_{-1}^{n+1} + h\sigma_{-1}^{n+1} + 4h\sigma_0^{n+1} + 3\delta_1^{n+1} + h\sigma_1^{n+1} &= F_2 \end{aligned} \tag{2.17}$$

ve $m = N$ için,

$$\begin{aligned} 2h\delta_{N-1}^{n+1} - \beta_{m1}\sigma_{N-1}^{n+1} + 8h\delta_N^{n+1} - \beta_{m2}\sigma_N^{n+1} + 2h\delta_{N+1}^{n+1} + \beta_{m3}\sigma_{N+1}^{n+1} &= F_{2N+1} \\ -3\delta_{N-1}^{n+1} + h\sigma_{N-1}^{n+1} + 4h\sigma_N^{n+1} + 3\delta_{N+1}^{n+1} + h\sigma_{N+1}^{n+1} &= F_{2N+2} \end{aligned} \tag{2.18}$$

yazılır. (2.16) eleman parametreleri (2.17) ve (2.18) denklemlerinde yerlerine yazılıp denklemler düzenlenirse ilk iki denklem

$$\begin{aligned} 12h\delta_0^{n+1} + (4\beta_{m1} - \beta_{m2})\,\sigma_0^{n+1} + 0\delta_1^{n+1} + (\beta_{m1} + \beta_{m3})\,\sigma_1^{n+1} &= F_1 \\ -6\delta_0^{n+1} + 0\sigma_0^{n+1} + 6\delta_1^{n+1} + 0\sigma_1^{n+1} &= F_2 \end{aligned} \tag{2.19}$$

ve son iki denklem

$$\begin{aligned} 0\delta_{N-1}^{n+1} - (\beta_{m1} + \beta_{m3})\,\sigma_{N-1}^{n+1} + 12h\delta_N^{n+1} - (\beta_{m2} + 4\beta_{m3})\,\sigma_N^{n+1} &= F_{2N+1} \\ -6\delta_{N-1}^{n+1} + 0\sigma_{N-1}^{n+1} + 6\delta_N^{n+1} + 0\sigma_N^{n+1} &= F_{2N+2} \end{aligned} \tag{2.20}$$

olarak bulunur. Buna göre denklem sistemi

$$F = Bd_n,$$

$$d_{n+1} = \left[\delta_0^{n+1}, \sigma_0^{n+1}, \delta_1^{n+1}, \sigma_1^{n+1}, \ldots, \delta_N^{n+1}, \sigma_N^{n+1}\right]^T$$

ve

$$A = \begin{bmatrix}
12h & b & 0 & a & & & & & \\
-6 & 0 & 6 & 0 & 0 & & & & \\
2h & -\beta_{m1} & 8h & -\beta_{m2} & 2h & \beta_{m3} & & & \\
-3 & h & 0 & 4h & 3 & h & 0 & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & 0 & 2h & -\beta_{m1} & 8h & -\beta_{m2} & 2h & \beta_{m3} \\
 & & & -3 & h & 0 & 4h & 3 & h \\
 & & & & 0 & 0 & -a & 12h & c \\
 & & & & & -6 & 0 & 6 & 0
\end{bmatrix}$$

olmak üzere, $(a = \beta_{m1} + \beta_{m3},\ b = 4\beta_{m1} - \beta_{m2},\ c = -\beta_{m2} - 4\beta_{m3})$,

$$Ad_{n+1} = F$$

matris formunda bulunmuş olur. Burada

$$B = \begin{bmatrix}
2h & -\beta_{m3} & 8h & \beta_{m2} & 2h & \beta_{m1} & & & & & \\
3 & -h & 0 & -4h & -3 & -h & 0 & & & & \\
 & 0 & 2h & -\beta_{m3} & 8h & \beta_{m2} & 2h & \beta_{m1} & & & \\
 & & 3 & -h & 0 & -4h & -3 & -h & 0 & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & & 0 & 2h & -\beta_{m3} & 8h & \beta_{m2} & 2h & \beta_{m1} \\
 & & & & & 3 & -h & 0 & -4h & -3 & -h
\end{bmatrix}$$

ve

$$d_n = \left[\delta_{-1}^n, \sigma_{-1}^n, \delta_{0,}^n \sigma_0^n, \ldots, \delta_{N+1}^n, \sigma_{N+1}^n\right]^T$$

dir. δ_{-1}, σ_{-1}, δ_{N+1} ve σ_{N+1} sınır parametreleri her zaman adımında (2.16) denklemlerinden hesaplanabilir. (Saka,2002)

2.4 Kuartik B-Spline Kolokeyşin Metodu

$[a,b]$ aralığını örtecek şekildeki (1.4) şeklinde tanımlanan kuartik B-spline fonksiyonlarını oluşturmak için sekiz ilave bölünme noktasına ihtiyaç vardır. Bu bölünme noktaları

$$x_{-4} < x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0 \text{ ve } x_N < x_{N+1} < x_{N+2} < x_{N+3} < x_{N+4}$$

olarak konumlanmıştır.

$\circ$ sembolü zamana bağlı türevi ifade etmek üzere ve

$$z_m = \delta_{m-2} + 11\delta_{m-1} + 11\delta_m + \delta_{m+1}$$

olmak üzere, $U_N,\ V_N$ nin bölüm noktalarındaki

$$\begin{aligned}
U_N(x_m,t) &= \sum_{j=m-2}^{m+2} \phi_j(x)\,\delta_j(t) = \delta_{m-2} + 11\delta_{m-1} + 11\delta_m + \delta_{m+1},\\
U_N^{'}(x_m,t) &= \sum_{j=m-2}^{m+2} \phi_j^{'}(x)\,\delta_j(t) = \frac{4}{h}\left(\delta_{m+1} + 3\delta_m - 3\delta_{m-1} - \delta_{m-2}\right),\\
U_N^{''}(x_m,t) &= \sum_{j=m-2}^{m+2} \phi_j^{''}(x)\,\delta_j(t) = \frac{12}{h^2}\left(\delta_{m+1} - \delta_m - \delta_{m-1} + \delta_{m-2}\right),\\
U_N^{'''}(x_m,t) &= \sum_{j=m-2}^{m+2} \phi_j^{'''}(x)\,\delta_j(t) = \frac{24}{h^3}\left(\delta_{m+1} - 3\delta_m + 3\delta_{m-1} - \delta_{m-2}\right)
\end{aligned}$$

değerleri

$$\begin{aligned}
U_t + (1+\varepsilon U)\,U_x - \mu V_t &= 0\\
V - U_{xx} &= 0
\end{aligned}$$

denklem sisteminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\overset{\circ}{\delta}_{m-2} + 11\overset{\circ}{\delta}_{m-1} + 11\overset{\circ}{\delta}_m + \overset{\circ}{\delta}_{m+1}\\
&+\frac{4d}{h}\left(\delta_{m+1} + 3\delta_m - 3\delta_{m-1} - \delta_{m-2}\right)\\
&-\mu\left(\overset{\circ}{\sigma}_{m-2} + 11\overset{\circ}{\sigma}_{m-1} + 11\overset{\circ}{\sigma}_m + \overset{\circ}{\sigma}_{m+1}\right) = 0,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\sigma_{m-2} + 11\sigma_{m-1} + 11\sigma_m + \sigma_{m+1} - \frac{12}{h^2}\left(\delta_{m+1} - \delta_m - \delta_{m-1} + \delta_{m-2}\right) = 0$$

birinci mertebeden $2N+2$ diferensiyel denklemden oluşan bir sistem elde edilir. Burada $d = 1 + \varepsilon z_m$ dir. δ_m ve σ_m eleman parametreleri ve bunların zamana göre türevleri Crank-Nicolson yaklaşımıyla

$$\delta_m = \frac{\delta_m^{n+1} + \delta_m^n}{2}, \quad \sigma_m = \frac{\sigma_m^{n+1} + \sigma_m^n}{2} \tag{2.22}$$

ve

$$\overset{\circ}{\delta}_m = \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\Delta t}, \quad \overset{\circ}{\sigma}_m = \frac{\sigma_m^{n+1} - \sigma_m^n}{\Delta t} \tag{2.23}$$

olarak ifade edilir. Bu ifadeler (2.21) denklem sisteminde yerlerine yazılırsa

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\delta_{m-2}^{n+1} - \delta_{m-2}^n + 11\delta_{m-1}^{n+1} - 11\delta_{m-1}^n + 11\delta_m^{n+1} - 11\delta_m^n + \delta_{m+1}^{n+1} - \delta_{m+1}^n\right)$$

$$+\frac{2d}{h}\left(\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+1}^n + 3\delta_m^{n+1} + 3\delta_m^n - 3\delta_{m-1}^{n+1} - 3\delta_{m-1}^n - \delta_{m-2}^{n+1} - \delta_{m-2}^n\right)$$

$$-\frac{\mu}{\Delta t}\left(\sigma_{m-2}^{n+1} - \sigma_{m-2}^n + 11\sigma_{m-1}^{n+1} - 11\sigma_{m-1}^n + 11\sigma_m^{n+1} - 11\sigma_m^n + \sigma_{m+1}^{n+1} - \sigma_{m+1}^n\right) = 0,$$

$$\frac{1}{2}\left(\sigma_{m-2}^{n+1} + \sigma_{m-2}^n + 11\sigma_{m-1}^{n+1} + 11\sigma_{m-1}^n + 11\sigma_m^{n+1} + 11\sigma_m^n + \sigma_{m+1}^{n+1} + \sigma_{m+1}^n\right)$$

$$-\frac{6}{h^2}\left(\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+1}^n - \delta_m^{n+1} - \delta_m^n - \delta_{m-1}^{n+1} - \delta_{m-1}^n + \delta_{m-2}^{n+1} + \delta_{m-2}^n\right) = 0$$

sistemi bulunur. Bu sistem $m = 0, \ldots, N$ için

$$\begin{aligned}
&\beta_1\delta_{m-2}^{n+1} - h\mu\sigma_{m-2}^{n+1} + \beta_2\delta_{m-1}^{n+1} - 11h\mu\sigma_{m-1}^{n+1} \\
&+\beta_3\delta_{m}^{n+1} - 11h\mu\sigma_{m}^{n+1} + \beta_4\delta_{m+1}^{n+1} - h\mu\sigma_{m+1}^{n+1} \\
&= \beta_4\delta_{m-2}^{n} - h\mu\sigma_{m-2}^{n} + \beta_3\delta_{m-1}^{n} - 11h\mu\sigma_{m-1}^{n} \\
&+\beta_2\delta_{m}^{n} - 11h\mu\sigma_{m}^{n} + \beta_1\delta_{m+1}^{n} - h\mu\sigma_{m+1}^{n}, \\
&-12\delta_{m-2}^{n+1} + h^2\sigma_{m-2}^{n+1} + 12\delta_{m-1}^{n+1} \\
&+11h^2\sigma_{m-1}^{n+1} + 12\delta_{m}^{n+1} + 11h^2\sigma_{m}^{n+1} - 12\delta_{m+1}^{n+1} + h^2\sigma_{m+1}^{n+1} \\
&= 12\delta_{m-2}^{n} - h^2\sigma_{m-2}^{n} - 12\delta_{m-1}^{n} - 11h^2\sigma_{m-1}^{n} \\
&-12\delta_{m}^{n} - 11h^2\sigma_{m}^{n} + 12\delta_{m+1}^{n} - h^2\sigma_{m+1}^{n}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

olarak yeniden düzenlenirse, $2N + 8$ bilinmeyenli $2N + 2$ cebirsel denklemden oluşan bir sistem bulunur. Burada

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= h - 2d\Delta t, \\
\beta_2 &= 11h - 6d\Delta t, \\
\beta_3 &= 11h + 6d\Delta t, \\
\beta_4 &= h + 2d\Delta t
\end{aligned}$$

dir. Bu denklem sistemindeki δ_{-2}, σ_{-2}, δ_{-1}, σ_{-1}, δ_{N+1}, σ_{N+1} eleman parametreleri sınır koşulları kullanılarak yok edilecektir. Böylece $(2N + 2) \times (2N + 2)$ boyutlu 8 sütun elemanlı köşegen denklem sistemi elde edilir.

$$U(a,t) = \alpha_1, \quad V(a,t) = 0$$

$$U(b,t) = \alpha_2, \quad V(b,t) = 0, \ t \in (0,T]$$

Sınır koşulları eleman parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned}
&\delta_{-2} + 11\delta_{-1} + 11\delta_0 + \delta_1 = \alpha_1,\\
&\sigma_{-2} + 11\sigma_{-1} + 11\sigma_0 + \sigma_1 = 0,\\
&\delta_1 + 3\delta_0 - 3\delta_{-1} - \delta_{-2} = 0,\\
&\sigma_1 + 3\sigma_0 - 3\sigma_{-1} - \sigma_{-2} = 0,\\
&\delta_{N-2} + 11\delta_{N-1} + 11\delta_N + \delta_{N+1} = \alpha_2,\\
&\sigma_{N-2} + 11\sigma_{N-1} + 11\sigma_N + \sigma_{N+1} = 0
\end{aligned} \tag{2.25}$$

olarak yazılabilir. Bu ifadelerden

$$\begin{aligned}
\delta_{-2} &= \frac{33}{4}\delta_0 + \frac{7}{4}\delta_1 - \frac{3}{8}\alpha_1,\\
\sigma_{-2} &= \frac{33}{4}\sigma_0 + \frac{7}{4}\sigma_1,\\
\delta_{-1} &= -\frac{7}{4}\delta_0 - \frac{1}{4}\delta_1 + \frac{1}{8}\alpha_1,\\
\sigma_{-1} &= -\frac{7}{4}\sigma_0 - \frac{1}{4}\sigma_1,\\
\delta_{N+1} &= \alpha_2 - \delta_{N-2} - 11\delta_{N-1} - 11\delta_N,\\
\sigma_{N+1} &= -\sigma_{N-2} - 11\sigma_{N-1} - 11\sigma_N,
\end{aligned} \tag{2.26}$$

elde edilir.

$$
\begin{aligned}
F_1 \quad &= \beta_4\delta_{-2}^n - h\mu\sigma_{-2}^n + \beta_3\delta_{-1}^n - 11h\mu\sigma_{-1}^n \\
&\quad +\beta_2\delta_0^n - 11h\mu\sigma_0^n + \beta_1\delta_1^n - h\mu\sigma_1^n, \\
F_2 \quad &= 12\delta_{-2}^n - h^2\sigma_{-2}^n - 12\delta_{-1}^n - 11h^2\sigma_{-1}^n \\
&\quad -12\delta_0^n - 11h^2\sigma_0^n + 12\delta_1^n - h^2\sigma_1^n, \\
F_3 \quad &= \beta_4\delta_{-1}^n - h\mu\sigma_{-1}^n + \beta_3\delta_0^n - 11h\mu\sigma_0^n \\
&\quad +\beta_2\delta_1^n - 11h\mu\sigma_1^n + \beta_1\delta_2^n - h\mu\sigma_2^n, \\
F_4 \quad &= 12\delta_{-1}^n - h^2\sigma_{-1}^n - 12\delta_0^n - 11h^2\sigma_0^n \\
&\quad -12\delta_1^n - 11h^2\sigma_1^n + 12\delta_2^n - h^2\sigma_2^n, \\
F_{2N+1} \quad &= \beta_4\delta_{N-2}^n - -h\mu\sigma_{N-2}^n + \beta_3\delta_{N-1}^n - 11h\mu\sigma_{N-1}^n \\
&\quad +\beta_2\delta_N^n - 11h\mu\sigma_N^n + \beta_1\delta_{N+1}^n - h\mu\sigma_{N+1}^n, \\
F_{2N+2} \quad &= 12\delta_{N-2}^n - h^2\sigma_{N-2}^n - 12\delta_{N-1}^n - 11h^2\sigma_{N-1}^n \\
&\quad -12\delta_N^n - 11h^2\sigma_N^n + 12\delta_{N+1}^n - h^2\sigma_{n+1}^n
\end{aligned}
$$

olmak üzere (2.24) denklem sisteminden, $m = 0$ için,

$$
\begin{aligned}
F_1 \quad &= \beta_1\delta_{-2}^{n+1} - h\mu\sigma_{-2}^{n+1} + \beta_2\delta_{-1}^{n+1} - 11h\mu\sigma_{-1}^{n+1} \\
&\quad +\beta_3\delta_0^{n+1} - 11h\mu\sigma_0^{n+1} + \beta_4\delta_1^{n+1} - h\mu\sigma_1^{n+1}, \\
F_2 \quad &= -12\delta_{-2}^{n+1} + h^2\sigma_{-2}^{n+1} + 12\delta_{-1}^{n+1} + 11h^2\sigma_{-1}^{n+1} \\
&\quad +12\delta_0^{n+1} + 11h^2\sigma_0^{n+1} - 12\delta_1^{n+1} + h^2\sigma_1^{n+1}
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

$m = 1$ için,

$$\begin{aligned} F_3 &= \beta_1\delta_{-1}^{n+1} - h\mu\sigma_{-1}^{n+1} + \beta_2\delta_0^{n+1} - 11h\mu\sigma_0^{n+1} \\ &\quad +\beta_3\delta_1^{n+1} - 11h\mu\sigma_1^{n+1} + \beta_4\delta_2^{n+1} - h\mu\sigma_2^{n+1}, \\ F_4 &= -12\delta_{-1}^{n+1} + h^2\sigma_{-1}^{n+1} + 12\delta_0^{n+1} + 11h^2\sigma_0^{n+1} \\ &\quad +12\delta_1^{n+1} + 11h^2\sigma_1^{n+1} - 12\delta_2^{n+1} + h^2\sigma_2^{n+1} \end{aligned} \tag{2.28}$$

ve $m = N$ için,

$$\begin{aligned} F_{2N+1} &= \beta_1\delta_{N-2}^{n+1} - h\mu\sigma_{N-2}^{n+1} + \beta_2\delta_{N-1}^{n+1} - 11h\mu\sigma_{N-1}^{n+1} \\ &\quad +\beta_3\delta_N^{n+1} - 11h\mu\sigma_N^{n+1} + \beta_4\delta_{N+1}^{n+1} - h\mu\sigma_{N+1}^{n+1}, \\ F_{2N+2} &= -12\delta_{N-2}^{n+1} + h^2\sigma_{N-2}^{n+1} + 12\delta_{N-1}^{n+1} + 11h^2\sigma_{N-1}^{n+1} \\ &\quad +12\delta_N^{n+1} + 11h^2\sigma_N^{n+1} - 12\delta_{N+1}^{n+1} + h^2\sigma_{N+1}^{n+1} \end{aligned} \tag{2.29}$$

yazılır. (2.26) eleman parametreleri (2.27) ve (2.28) denklemlerinde yerlerine yazılıp,

denklemler düzenlenirse ilk iki denklem

$$\left(\frac{33}{4}\beta_1 - \frac{7}{4}\beta_2 + \beta_3\right)\delta_0^{n+1} + \left(\frac{7}{4}\beta_1 - \frac{1}{4}\beta_2 + \beta_4\right)\delta_1^{n+1}$$
$$= F_1 + \frac{3}{8}\alpha_1\beta_1 - \frac{1}{8}\alpha_1\beta_2,$$

$$-108\delta_0^{n+1} - 36\delta_1^{n+1} \quad = F_2 - 6\alpha_1,$$

$$\left(-\frac{7}{4}\beta_1 + \beta_2\right)\delta_0^{n+1} - \frac{33}{7}h\mu\sigma_0^{n+1} + \left(-\frac{1}{4}\beta_1 + \beta_3\right)\delta_1^{n+1}$$
$$-\frac{43}{4}h\mu\sigma_1^{n+1} + \beta_4\delta_2^{n+1} - h\mu\sigma_2^{n+1} = F_3 - \frac{1}{8}\alpha_1\beta_1,$$

$$33\delta_0^{n+1} + \frac{37}{4}h^2\sigma_0^{n+1} + 15\delta_1^{n+1} + \frac{43}{4}h^2\sigma_1^{n+1}$$
$$-12\delta_2^{n+1} + h^2\sigma_2^{n+1} = F_4 + \frac{3}{2}\alpha_1$$

ve (2.29) denklemlerinde yazılırsa son iki denklem

$$\left(\beta_1 - \beta_4\right)\delta_{N-2}^{n+1} + \left(\beta_2 - 11\beta_4\right)\delta_{N-1}^{n+1} + \left(\beta_3 - 11\beta_4\right)\delta_N^{n+1}$$
$$= F_{2N+1} - \beta_4\alpha_2,$$

$$144\delta_{N-1}^{n+1} + 144\delta_N^{n+1} \quad = F_{2N+2} + 12\alpha_2$$

olarak yeniden yazılabilir. Buna göre denklem sistemi

$$F = Bd_n$$

$$d_{n+1} = \left[\delta_0^{n+1}, \sigma_0^{n+1}, \delta_1^{n+1}, \sigma_1^{n+1}, \ldots, \delta_N^{n+1}, \sigma_N^{n+1}\right]^T$$

ve

$$A=\begin{bmatrix}
a & 0 & b & 0 & & & & & & \\
-108 & 0 & -36 & 0 & & & & & & \\
c & -\frac{37}{4}h\mu & d & -\frac{43}{4}h\mu & \beta_4 & -h\mu & & & & \\
33 & \frac{37}{4}h^2 & 15 & \frac{43}{4}h^2 & -12 & h^2 & 0 & & & \\
\beta_1 & -h\mu & \beta_2 & -11h\mu & \beta_3 & -11h\mu & \beta_4 & -h\mu & & \\
-12 & h^2 & 12 & 11h^2 & 12 & 11h^2 & -12 & h^2 & 0 & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
 & & 0 & 0 & 0 & e & 0 & f & 0 & g & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 144 & 0 & 144 & 0
\end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\begin{pmatrix}
\alpha = \frac{33}{4}\beta_1 - \frac{7}{2}\beta_2 + \beta_3 \\
b = \frac{7}{4}\beta_1 - \frac{1}{4}\beta_2 + \beta_4 \\
c = -\frac{7}{4}\beta_1 + \beta_2 \\
d = -\frac{1}{4}\beta_1 + \beta_3 \\
e = \beta_1 - \beta_4 \\
f = \beta_2 - 11\beta_4 \\
g = \beta_3 - 11\beta_4
\end{pmatrix}$$

$$Ad_{n+1} = F \tag{2.30}$$

matris formunda bulunmuş olur. Burada

$$B=\begin{bmatrix}
\beta_4 & -h\mu & \beta_3 & -11h\mu & \beta_2 & -11h\mu & \beta_1 & -h\mu & & & \\
12 & -h^2 & -12 & -11h^2 & -12 & -11h^2 & 12 & -h^2 & 0 & & \\
 & 0 & \beta_4 & -h\mu & \beta_3 & -11h\mu & \beta_2 & -11h\mu & \beta_1 & -h\mu & \\
 & & 12 & -h^2 & -12 & -11h^2 & -12 & -11h^2 & 12 & -h^2 & 0 \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
 & & & 0 & \beta_4 & -h\mu & \beta_3 & -11h\mu & \beta_2 & -11h\mu & \beta_1 & -h\mu \\
 & & & 0 & 12 & -h^2 & -12 & -11h^2 & -12 & -11h^2 & 12 & -h^2
\end{bmatrix}$$

ve

$$d_n = \left[\delta_{-2}^n, \sigma_{-2}^n, \delta_{-1}^n, \sigma_{-1}^n, \ldots, \delta_{N+1}^n, \sigma_{N+1}^n\right]^T$$

dir. $\delta_{-2},\ \sigma_{-2},\ \delta_{-1},\ \sigma_{-1},\ \delta_{N+1}$ ve σ_{N+1} sınır parametreleri her zaman adımında (2.26) denkleminde hesaplanabilir. (Saka and Dağ, 2006)

2.5 Sektik B-Spline Kolokeyşin Metodu

$[a, b]$ aralığını örtecek şekildeki (1.7) şeklinde tanımlanan sektik B-spline fonksiyonlarını oluşturmak için bu aralığın dışında 12 ilave bölünme noktasına ihtiyaç vardır. Bu ek noktalar aşağıda verilmiştir:

$$x_{-6} < x_{-5} < x_{-4} < x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0 \text{ ve}$$

$$x_N < x_{N+1} < x_{N+2} < x_{N+3} < x_{N+4} < x_{N+5} < x_{N+6.}$$

$\{Q_{-3},\ Q_{-2},\ \ldots,\ Q_{N+2}\}$ sektik B-spline kümesi $[a, b]$ tanım kümesi üzerinde bir taban oluşturmaktadır. Böylece $Q_m(x)\ x_i,\ i = m-3, \ldots, m+4$ noktaları üzerinde altıncı dereceden B-spline olarak tanımlanır.

$U_N(x, t)$ çözümü diferansiyel denklemdeki $U(x, t)$ fonksiyonuna

$$U_N(x, t) = \sum_{i=-3}^{N+2} \delta_i(t)\, Q_i(x) \tag{2.31}$$

formunda yaklaşık bir fonksiyon yazılabilir. Burada geçen δ_i zamana bağlı parametredir.

(1.7) ve (2.31) denklemleri kullanılarak nodal U değeri ve onun x_i bölünme nokta-

larındaki $U^{'}$, $U^{''}$, $U^{'''}$ türevleri eleman parametreleri türünden

$$\begin{aligned}
U_m = U\left(x_m\right) &= \delta_{m-3} + 57\delta_{m-2} + 302\delta_m \\
&\quad +57\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \\
U_m^{'} = U^{'}\left(x_m\right) &= \frac{6}{h}(\delta_{m+2} + 25\delta_{m+1} + 40\delta_m \\
&\quad -40\delta_{m-1} - 25\delta_{m-2} - \delta_{m-3}), \\
U_m^{''} = U^{''}\left(x_m\right) &= \frac{30}{h^2}(\delta_{m+2} + 9\delta_{m+1} - 10\delta_m \\
&\quad -10\delta_{m-1} + 9\delta_{m-2} + \delta_{m-3}), \\
U_m^{'''} = U^{'''}\left(x_m\right) &= \frac{120}{h^3}(\delta_{m+2} + \delta_{m+1} - 8\delta_m \\
&\quad +8\delta_{m-1} - \delta_{m-2} - \delta_{m-3}),
\end{aligned} \tag{2.32}$$

olarak yazılır. Burada $'$, $''$ ve $'''$ sembolleri sırasıyla x e bağlı birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden türevi ifade etmektedir. Kolokeyşin noktaları tesadüfi bölünme noktaları ile seçilir. U_m nodal değeri yerine onun ilk iki ardışık $U_m^{'}$, $U_m^{''}$ türevleri (1.13) denkleminde yerine yazılır. $\circ$ zaman türevini ifade etmek üzere

$$\delta_m = \left(\delta_m^{n+1} + \delta_m^n\right)/2,$$

$$\overset{\circ}{\delta}_m = \left(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n\right)/\Delta t$$

Crank-Nicolson yaklaşımı kullanılarak n ve$n+1$ iki zaman adımı arasında eleman parametrelerinin tekrarlayan ilişkisi

$$\begin{aligned}
&\alpha_{m1}\delta_{m-3}^{n+1} + \alpha_{m2}\delta_{m-2}^{n+1} + \alpha_{m3}\delta_{m-1}^{n+1} + \alpha_{m4}\delta_m^{n+1} + \alpha_{m5}\delta_{m+1}^{n+1} + \alpha_{m6}\delta_{m+2}^{n+1} \\
&= \alpha_{m6}\delta_{m-3}^{n} + \alpha_{m5}\delta_{m-2}^{n} + \alpha_{m4}\delta_{m-1}^{n} + \alpha_{m3}\delta_m^{n} + \alpha_{m2}\delta_{m+1}^{n} + \alpha_{m1}\delta_{m+2}^{n}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki ifadeyi kısaltmak için kullanılan α_{m1}, α_{m2}, α_{m3}, α_{m4}, α_{m5},

α_{m6} ve lineer olmayan d, z_m değerleri aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned}
\alpha_{m1} &= h^2 - 3dh\Delta t - 30\mu, \\
\alpha_{m2} &= 57h^2 - 75dh\Delta t - 270\mu, \\
\alpha_{m3} &= 302h^2 - 120dh\Delta t + 300\mu, \\
\alpha_{m4} &= 302h^2 + 120dh\Delta t + 300\mu, \\
\alpha_{m5} &= 57h^2 + 75dh\Delta t - 270\mu, \\
\alpha_{m6} &= h^2 + 3dh\Delta t - 30\mu,
\end{aligned} \tag{2.34}$$

$$d = 1 + \varepsilon z_m,$$

$$z_m = \delta_{m-3} + 57\delta_{m-2} + 302\delta_{m-1} + 302\delta_m + 57\delta_{m+1} + \delta_{m+2}$$

Böylelikle $(N+6)$ bilinmeyen parametreli $(N+1)$ denklemden oluşan bir sistem elde edilir.

$$U(a,t) = U_x(a,t) = U_{xx}(a,t) = 0,$$

$$U(b,t) = U_x(b,t) = 0,$$

Sınır koşulları δ_{-3}^{n+1}, δ_{-2}^{n+1}, δ_{-1}^{n+1}, δ_{N+1}^{n+1}, δ_{N+2}^{n+1} parametrelerini yok etmemize yardımcı olur. Böylece $(N+1)\times(N+1)$ boyutlu çözülebilir bir matris sistemi elde etmiş oluruz. Son olarak elde edilen altı bantlı matris sistemi Thomas algoritmasının bir çeşiti ile çözülebilir. (2.33) fark denklemini çözmeden önce d lineer olmayan terimi, δ_m eleman parametresi ile benzeri olan $n\Delta t$ zaman adımındaki δ_m^n parametresi yer değiştirilerek lineer hale getirilir. Lineer hale getirilmiş bu denklemin x_i bölünme noktalarındaki çözümü her bir zaman adımı için aşağıdaki eşitliğin iki yada üç kez uygulanmasıyla elde edilir:

$$(\delta^*)^{n+1} = \delta^n + \frac{1}{2}\left(\delta^{n+1} - \delta^n\right)$$

Burada geçen $(\delta^*)^{n+1}$, δ^{n+1} için yeni bir yaklaşımdır.

Tekrarlayan (2.33) sistemine başlamadan önce δ_m^0 bilinmeyen başlangıç parametresi

$$\begin{aligned}(U_N)_x(a,0) &= \delta_2^0 + 25\delta_1^0 + 40\delta_0^0 - 40\delta_{-1}^0 - 25\delta_{-2}^0 - \delta_{-3}^0,\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(U_N)_{xx}(a,0) &= \delta_2^0 + 9\delta_1^0 - 10\delta_0^0 - 10\delta_{-1}^0 + 9\delta_{-2}^0 + \delta_{-3}^0\\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(U_N)_{xxx}(a,0) &= \delta_2^0 + \delta_1^0 - 8\delta_0^0 + 8\delta_{-1}^0 - \delta_{-2}^0 - \delta_{-3}^0\\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(U_N)(x,0) &= \delta_{m-3}^0 + 57\delta_{m-2}^0 + 302\delta_{m-1}^0 + 302\delta_m^0 + 57\delta_{m+1}^0 + \delta_{m+2}^0\\ &= U(x_m,0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(U_N)_x(b,0) &= \delta_{N+2}^0 + 25\delta_{N+1}^0 + 40\delta_N^0 - 40\delta_{N-1}^0 - 25\delta_{N-2}^0 - \delta_{N-3}^0\\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(U_N)_{xx}(b,0) &= \delta_{N+2}^0 + 9\delta_{N+1}^0 - 10\delta_N^0 - 10\delta_{N-1}^0 + 9\delta_{N-2}^0 + \delta_{N-3}^0\\ &= 0.\end{aligned}$$

ifadeleri kullanılarak bulunur. Bu da bize altı bantlı Thomas algoritması ile çözülebilen $(N+1)\times(N+1)$ boyutlu denklem sistemini verir. (Saka, et al. , 2009)

2.6 Septic B-Spline Kolokeyşin Metodu

$[a, b]$ aralığını örtecek şekildeki (1.8) şeklinde tanımlanan septic B-spline fonksiyonlarını oluşturmak için bu aralığın dışında ondört ilave bölünme noktasına ihtiyaç vardır. Bu ilave noktalar aşağıda verilmiştir:

$$x_{-7} < x_{-6} < x_{-5} < x_{-4} < x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} \text{ ve}$$

$$x_{N+1} < x_{N+2} < x_{N+3} < x_{N+4} < x_{N+5} < x_{N+6} < x_{N+7}.$$

$\{Q_{-3}, Q_{-2}, \ldots, Q_{N+3}\}$ septic B-spline kümesi $[a, b]$ tanım kümesi üzerinde bir taban oluşturmaktadır. Böylece $Q_m(x)$ $x_i, i = m-4, \ldots, m+4$ noktaları üzerinde yedinci dereceden B-spline'dir.

Septik B-spline kolokeyşin metodunda septik B-spline fonksiyonları taban fonksiyonları olarak kullanılarak $U(x,t)$ analitik çözümü için yaklaşık çözüm

$$U_N(x,t) = \sum_{m=-3}^{N+3} \delta_m(t)\, Q_m(x) \tag{2.35}$$

dir. Burada geçen δ_m zamana bağlı parametredir.

(2.35) ifadesini ve (1.8) $Q_m(x)$ septic B-spline kullanarak nodal U değeri ve onun x_i bölünme noktalarındaki U', U'', U''' türevlerinin eleman parametreleri açısından ifadesi (1.9) da verilmiştir.

Burada geçen $'$, $''$, $'''$ sembolleri sırasıyla x e bağlı birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden türevleri ifade etmektedir. U_m nodal değerleri yerine onun ilk iki ardışık türevleri olan U'_m, U''_m (1.9) da yerine yazılır. $^\circ$ sembolü zamana bağlı türevi ifade etmek üzere

$$\delta_m = \left(\delta_m^{n+1} + \delta_m^n\right)/2,$$

$$\overset{\circ}{\delta}_m = \left(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n\right)/\Delta t$$

Crank-Nicolson yaklaşımı kullanılarak n ve $n+1$ iki zaman adımı arasında eleman

parametrelerinin tekrarlayan ilişkisi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\alpha_{m1}\delta_{m-3}^{n+1} + \alpha_{m2}\delta_{m-2}^{n+1} + \alpha_{m3}\delta_{m-1}^{n+1} + \alpha_{m4}\delta_{m}^{n+1} + \alpha_{m5}\delta_{m+1}^{n+1} + \alpha_{m6}\delta_{m+2}^{n+1} + \alpha_{7}\delta_{m+3}^{n+1}$$

$$= \alpha_{7}\delta_{m-3}^{n} + \alpha_{m6}\delta_{m-2}^{n} + \alpha_{m5}\delta_{m-1}^{n} + \alpha_{m4}\delta_{m}^{n} + \alpha_{m3}\delta_{m+1}^{n} + \alpha_{m2}\delta_{m+2}^{n} + \alpha_{m1}\delta_{m+3}^{n} \tag{2.36}$$

Yukarıdaki ifadeyi kısaltmak için kullanılan α_{m1}, α_{m2}, α_{m3}, α_{m4}, α_{m5}, α_{m6} ve lineer olmayan d, z_m değerleri

$$\alpha_{m1} = 2h^2 - 7dh\Delta t - 84\mu,$$

$$\alpha_{m2} = 240h^2 - 392dh\Delta t - 2016\mu,$$

$$\alpha_{m3} = 2382h^2 - 1715dh\Delta t - 1260\mu,$$

$$\alpha_{m4} = 4832h^2 + +6720\mu,$$

$$\alpha_{m5} = 2382h^2 + 1715dh\Delta t - 1260\mu,$$

$$\alpha_{m6} = 240h^2 + 392dh\Delta t - 2016\mu,$$

$$\alpha_{m7} = 2h^2 + 7dh\Delta t - 84\mu,$$

$$d = 1 + \varepsilon z_m,$$

$$z_m = \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 119\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3}$$

ile ifade edilebilirler. Sınır koşulları

$$U(a,t) = U_x(a,t) = U_{xx}(a,t) = 0,$$

$$U(b,t) = U_x(b,t) = 0,$$

δ_{-3}^{n+1}, δ_{-2}^{n+1}, δ_{-1}^{n+1}, δ_{N+1}^{n+1}, δ_{N+2}^{n+1}, δ_{N+3}^{n+1} parametrelerini yok etmemize yardımcı olur. Böylece $(N+1)\times(N+1)$ boyutlu çözülebilir bir matris sistemi elde etmiş oluruz. Bu sistem lineer olmayan terimdeki δ_i, $i = m-3, \ldots, m+3$ parametreleri ile n zaman adımındaki δ_m^n yer değiştirilerek lineer hale getirilir.

Böylece son olarak elde edilen matris sistemi Thomas algoritması ile çözülebilir. δ_m^0 başlangıç parametreleri

$$\begin{aligned}(U_N)_x(a,0) &= -\delta_{-3}^0 - 56\delta_{-2}^0 - 245\delta_{-1}^0 \\ &\quad +245\delta_1^0 + 56\delta_2^0 + \delta_3^0 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(U_N)_{xx}(a,0) &= \delta_{-3}^0 + 24\delta_{-2}^0 + 15\delta_{-1}^0 - 80\delta_0^0 \\ &\quad +15\delta_1^0 + 24\delta_2^0 + \delta_3^0 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(U_N)_{xxx}(a,0) &= -\delta_{-3}^0 - 8\delta_{-2}^0 + 19\delta_{-1}^0 - 19\delta_1^0 \\ &\quad +8\delta_2^0 + \delta_3^0 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(U_N)(x,0) &= \delta_{m-3}^0 + 120\delta_{m-2}^0 + 1911\delta_{m-1}^0 + 2416\delta_m^0 \\ &\quad +1191\delta_{m+1}^0 + 120\delta_{m+2}^0 + \delta_3^0 = U(x_m,0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(U_N)_x(b,0) &= -\delta_{N-3}^0 - 56\delta_{N-2}^0 - 245\delta_{N-1}^0 \\ &\quad +245\delta_{N+1}^0 + 56\delta_{N+2}^0 + \delta_{N+3}^0 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(U_N)_{xx}(b,0) &= \delta_{N-3}^0 + 24\delta_{N-2}^0 + 15\delta_{N-1}^0 - 80\delta_N^0 \\ &\quad +15\delta_{N+1}^0 + 24\delta_{N+2}^0 + \delta_{N+3}^0 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(U_N)_{xxx}(b,0) &= -\delta_{N-3}^0 - 8\delta_{N-2}^0 + 19\delta_{N-1}^0 - 19\delta_{N+1}^0 \\ &\quad +8\delta_{N+2}^0 + \delta_{N+3}^0 = 0.\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilen başlangıç sınır koşulları gibi belirlenir. (Saka, et al. , 2009)

BÖLÜM 3

RLW DENKLEMİNİN GALERKİN METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde düzenli uzun dalga (RLW) denkleminin yaklaşık çözümleri lineer, kuadratik ve kübik B-spline Galerkin sonlu elemanlar algoritmaları kullanılarak bulunacaktır.

3.1 Lineer B-Spline Galerkin Metodu

Düzenli uzun dalga denklemi W ağırlık fonksiyonu ile çarpılıp x_0 dan x_N e kadar integre edilirse

$$\int_{x_0}^{x_N} \left[U_t + U_x + \varepsilon U U_x - \mu U_{xxt}\right] W dx = 0 \tag{3.1}$$

integral denklemi elde edilir. $[x_0, x_N]$ aralığı x_m, $m = 0,\ 1, \ldots, N$ bölünme noktaları kullanılarak eşit uzunluklu sonlu sayıdaki aralıklara bölünür. Belirli bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı x genel koordinatlardan η yerel koordinatlara

$$x = x_m + \eta h,\ 0 \leq \eta \leq 1,\ h = (x_{m+1} - x_m) \tag{3.2}$$

dönüşümü yardımıyla yapılır. Böylece her $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı yukarıdaki dönüşüm yardımıyla $[0, 1]$ aralığına dönüştürülür. (3.1) integrali $[x_m, x_{m+n}]$ aralığı için (3.2) dönüşümü yardımıyla

$$\int_0^1 \left[U_t + \frac{1}{h} U_\eta + \frac{\varepsilon}{h} \widehat{U} U_\eta - \frac{\mu}{h^2} U_{\eta\eta t}\right] W_j d\eta = 0 \tag{3.3}$$

olarak bulunur. Burada $[x_m, x_{m+n}]$ aralığı için $W = W_J$ olarak seçilmiştir. $\widehat{U}$, (3.3) integralini basitleştirmek için bir sabit olarak alınır. Bundan dolayı (3.3) denklemi

$$\int_0^1 \left[U_t + v U_\eta - b U_{\eta\eta t}\right] W_j d\eta = 0$$

şekline dönüşür. Burada

$$b = \frac{\mu}{h^2}$$

ve

$$v = \frac{1}{h}\left(1 + \varepsilon \widehat{U}\right)$$

dır. b ve v her bir aralık üzerinden yerel sabit olarak alınır. $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinden U bilinmeyeni

$$U^e = \sum_{j=1}^{N} L_j u_j \tag{3.4}$$

olarak ifade edilir. Burada L_1, L_2 uzaysal lineer fonksiyonlardır ve u_1, u_2 ise nodal parametrelerdir. (3.4) de tanımlı lineer fonksiyonlar η koordinat sisteminde

$$L_1 = 1 - \eta,$$

$$L_2 = \eta.$$

olarak bulunur. Eğer W_j ağırlık fonksiyonları temel L_j olarak alınırsa

$$\int_0^1 \left[U_t + vU_\eta - bU_{\eta\eta t}\right] L_j d\eta = 0 \tag{3.5}$$

olarak bulunur. (3.5) denkleminin son ifadesi üzerine kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_0^1 \left[\left(U_t + vU_\eta\right) L_j + bU_{\eta t} L_j^{'}\right] d\eta = 0 \tag{3.6}$$

elde edilir. (3.4) denklemi (3.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{2} \int_0^1 \left[\left(L_k \frac{\partial u_k}{\partial t} + vL_k^{'} u_k\right) L_j + bL_k^{'} L_j^{'} \frac{\partial u_k}{\partial t}\right] d\eta = 0$$

şeklinde bulunur. Yukarıdaki eşitlikte kullanılan $'$ sembolü η ya göre türev anlamına gelir. Bu denklem matris olarak

$$\left[D^e + bF^e\right] \frac{\partial u^e}{\partial t} + E^u u^e = 0$$

şeklinde yazılabilir, Burada

$$u^e = (u_1, u_2)^T$$

dir. Eleman matrisleri

$$D_{jk}^e = \int_0^1 L_j L_k d\eta$$

$$E_{jk}^e = v \int_0^1 L_j L_k^{'} d\eta$$

$$F_{jk}^{e} = \int_{0}^{1} L_j^{'} L_k^{'} d\eta$$

integralleri ile verilir. 2×2 boyutlu D^e, F^e ve F^e matrisleri

$$D^e = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E^e = \frac{1}{2} v \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, v = \frac{1}{h} (1 + \varepsilon u_1)$$

$$F^e = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

olarak hesaplanır.

$[a, b]$ aralığındaki elemanlar üzerinde tanımlı 2×2 boyutlu denklemlerin birleştirlmesiyle

$$[D + bF] \frac{\partial u}{\partial t} + [E] u = 0 \tag{3.7}$$

global sistem elde edilir. Her matris için genel satır aşağıdaki şekildedir:

$$D : \frac{1}{6} (1, 4, 1)$$
$$F : (-1, 2, -1)$$
$$E : \frac{1}{2} (-v_{m-1}, v_{m-1} - v, v_m)$$

(3.7) denkleminin tipik bir satırı

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{1}{6} - b \right) u_{m-1} + \left(\frac{2}{3} + 2b \right) u_m + \left(\frac{1}{6} - b \right) u_{m+1} \right]$$

$$= \frac{1}{2} v_{m-1} u_{m-1} - \frac{1}{2} (v_{m-1} - v_m) u_m - \frac{1}{2} v_m u_{m+1}$$

şeklindedir. Bu ifadede geçen v_m

$$v_m = \frac{1}{h} (1 + \varepsilon u_m^n) \tag{3.8}$$

dir. Adi diferansiyel denklem sistemlerinin çözümünü bulmak için zamana göre Crank-Nicolson yaklaşımı uygulanır. Birim zaman

$$t = \left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t$$

olarak alınırsa

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t}\left(u_m^{n+1} - u_m^n\right)$$
$$u_m = \frac{1}{2}\left(u_m^{n+1} + u_m^n\right)$$

yazabiliriz. Bu ifadeler (3.7) da yerine yazılırsa

$$\left(\frac{1}{6} - b - \frac{\Delta t}{4}v_{m-1}\right)u_{m-1}^{n+1} + \left(\frac{2}{3} + 2b + \frac{\Delta t}{4}\left[v_{m-1} - v_m\right]\right)u_m^{n+1}$$

$$+\left(\frac{1}{6} - b + \frac{\Delta t}{4}v_m\right)u_{m+1}^{n+1} = \left(\frac{1}{6} - b - \frac{\Delta t}{4}v_{m-1}\right)u_{m-1}^{n}$$

$$+\left(\frac{2}{3} + 2b + \frac{\Delta t}{4}\left[v_{m-1} - v_m\right]\right)u_m^{n} + \left(\frac{1}{6} - b + \frac{\Delta t}{4}v_m\right)u_{m+1}^{n}$$

indirgeme bağıntısını buluruz.

$U\left(x_0, t\right) = 0$ ve $U\left(x_N, t\right) = 0$ sınır koşulları yardımıyla yukarıdaki denklem sisteminden $U_0 = 0$ ve $U_N = 0$ değerleri elimine edilir. Daha sonra verilen başlangıç koşulu yardımıyla belirlenen zaman adımlarında yaklaşık çözümler ardışık olarak elde edilir. (Doğan, 2001)

3.2 Kuadratik B-Spline Galerkin Metodu

$[x_0, x_N]$ bölgesinde

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b$$

olacak şekilde eşit uzunluklu bölünme noktalarını alalım.

$$h = \left(x_{m+1} - x_m\right)$$

olsun. Belirli bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı x genel koordinatlardan ξ, $0 \leq \xi \leq 1$ yerel koordinatlara

$$h\xi = x - x_m$$

dönüşümü yardımıyla yapılır. Bu aralıktaki kuadratik B-spline ' lar $Q_{m-1},\ Q_m,\ Q_{m+1}$ belirlenir ve u çözümü

$$\begin{aligned} u &= Q_{m-1}\delta_{m-1} + Q_m\delta_m + Q_{m+1}\delta_{m+1} = \mathbf{Q}^e \cdot \mathbf{d}^e \\ &= \left(1 - 2\xi + \xi^2, 1 + 2\xi - 2\xi^2, \xi^2\right) \cdot \left(\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}\right)^T \end{aligned} \tag{3.9}$$

olarak yazılabilir. $\mathbf{d}^e = (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1})^T$ eleman parametresi, $\mathbf{Q}^e = (Q_{m-1}, Q_m, Q_{m+1})$ kuadratik B-spline' lar ise şekil fonksiyonu olarak alınabilir. $[x_0, x_N]$ de $u(x,t)$ fonksiyonuna yaklaşımı

$$u_N(x,t) = \sum_{j=-1}^{N} Q_j(x)\,\delta_j(t)$$

olarak yazılabilir. Burada geçen δ_j zamana bağlı parametredir. $(Q_{-1}, Q_0, \ldots, Q_N)$ kuadratik B-spline'lar $[x_0, x_N]$ üzerinde tanımlanan fonksiyonlar için bir taban oluşturur.

$x = x_m$ bölünme noktasında $u_m,\ u_m^{'}$ değerleri δ_m parametreleri cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$u_m = \delta_m + \delta_{m-1}$$

$$hu_m^{'} = 2(\delta_m - \delta_{m-1})$$

Burada $'$ sembolü x e göre türev anlamına gelmektedir. (1.13) denklemini V_j ağırlık fonksiyonuyla çarpılıp $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında integre edilirse

$$\int_{x_0}^{x_N} V\left\{u_t + u_x + auu_x - bu_{xxt}\right\} dx = 0 \tag{3.10}$$

elde edilir. (3.10) ifadesinin en son terimine kısmi integrasyon uygulanır sınır değerleri yazılır. $[x_m, x_{m+1}]$ aralığındaki (3.10) Galerkin formunda u yerine (3.9) ve V yerine sırasıyla $(Q_{m-1},\ Q_m,\ Q_{m+1})$ şekil fonksiyonları yazılırsa aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$\sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \begin{array}{c} \int_{x_m}^{x_{m+1}} Q_i Q_j dx \dot{\delta}_j + \\ \int_{x_m}^{x_{m+1}} Q_i Q_j^{'} dx \delta_j + \sum_{k=m-1}^{m+1} a \int_{x_m}^{x_{m+1}} Q_i Q_k^{'} Q_j \delta_k dx \delta_j + \\ b \int_{x_m}^{x_{m+1}} Q_i^{'} Q_j^{'} dx \dot{\delta}_j \end{array} \right\} \tag{3.11}$$

Burada geçen $\dot{}$ sembolü t ye göre türevi ifade etmektedir. Bu ifadede j ve k indeksleri $m-1,\ m,\ m+1$ değerleri için yazılıp (3.11) matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\left(\mathbf{A}^e + b\mathbf{C}^e\right)\dot{\mathbf{d}}^e + \left(\mathbf{D}^e + a\mathbf{B}^e\right)\mathbf{d}^e \tag{3.12}$$

(3.12) ifadesinde kullanılan $\mathbf{A}^e, \mathbf{B}^e, \mathbf{C}^e$ ve $\mathbf{D}^e$ eleman matrisleri aşağıda ifade edilmiştir:

$$\mathbf{A}^e = \int_{x_m}^{x_{m+1}} Q_i Q_j dx = \frac{h}{30}\begin{bmatrix} 6 & 13 & 1 \\ 13 & 54 & 13 \\ 1 & 13 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^e = \int_{x_m}^{x_{m+1}} Q_i' Q_j' dx = \frac{2}{3h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}^e = \int_{x_m}^{x_{m+1}} Q_i Q_j' dx = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -8 & 0 & 8 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^e = \int_{x_m}^{x_{m+1}} Q_i Q_k' Q_j \delta_k dx = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} (-10,-19,-1)\,\mathbf{d}^e & (8,12,0)\,\mathbf{d}^e & (2,7,1)\,\mathbf{d}^e \\ (-19,-54,-7)\,\mathbf{d}^e & (12,0,-12)\,\mathbf{d}^e & (7,54,19)\,\mathbf{d}^e \\ (-1,-7,-2)\,\mathbf{d}^e & (0,-12,-8)\,\mathbf{d}^e & (1,19,10)\,\mathbf{d}^e \end{bmatrix}$$

Burada geçen $\mathbf{d}^e = (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1})^T$ dir. (3.12) ifadesindeki $A^e,\ C^e,\ D^e$ ve B^e (3×3) boyutlu matrislerinin $\mathbf{d}^e = (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1})^T$ bilinmeyenlerine göre birleştirilmesiyle

$$(\mathbf{A} + b\mathbf{C})\,\dot{\mathbf{d}} + (\mathbf{D} + a\mathbf{B})\,\mathbf{d} = \mathbf{0}$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Burada bilinmeyen parametreler vektörü

$$d = (\delta_{-1}, \delta_{0,} \ldots, \delta_N)^T$$

dir. $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ ve $\mathbf{D}$ matrisleri yukarıdaki $\mathbf{A}^e, \mathbf{B}^e, \mathbf{C}^e$ ve $\mathbf{D}^e$ eleman matrislerinin birleştirilmesiyle elde edilmiştir. Bu sistemde

$$\dot{\mathbf{d}} = \frac{d^{n+1} - d^n}{\Delta t},\ d = \frac{d^{n+1} + d^n}{2}$$

Crank-Nicolson zaman yaklaşımı kullanılırsa

$$\left[(\mathbf{A} + b\mathbf{C}) + \frac{\Delta t}{2}(\mathbf{D} + a\mathbf{B})\right]\mathbf{d}^{n+1} = \left[(\mathbf{A} + b\mathbf{C}) - \frac{\Delta t}{2}(\mathbf{D} + a\mathbf{B})\right]\mathbf{d}^n \qquad (3.13)$$

cebirsel iteratif denklem sistemi elde edilir. Bu sistem $(N+2)$ bilinmeyen parametreli $(N+1)$ denklemden oluşur. (3.13) iteratif sisteminin başlatılabilmesi için başlangıç vektörü d^0 ın belirlenmesi gerekir. Başlangıç koşulu ve türev koşulları

$$u_N^{'}(x_0,0)=0$$
$$u_N(x_i,0)=u(x_i,0)\ \ 0\leq i\leq N$$

yardımıyla başlangıç parametreleri

$$\delta_{-1}^0=\frac{u(x_0,0)}{2},\ \delta_0^0=\frac{u(x_0,0)}{2},\ \delta_j^0=u(x_j,0)-\delta_{j-1}^0$$

denklemlerinden bulunur. (Gardner, et al., 1995)

3.3 Kuartik B-Spline Galerkin Metodu

$[a,b]$ aralığı eşit aralıklı noktalarda

$$a=x_0<x_1<...<x_N=b$$

olarak bölünsün.

$$h=x_{m+1}-x_m,\ m=0,...,N-1.$$

Bu noktalara ek olarak $[a,b]$ aralığında kuartik B-spline tanımlamak için $[a,b]$ aralığı dışında

$$x_{-4}<x_{-3}<x_{-2}<x_{-1}\text{ ve }x_{N+1}<x_{N+2}<x_{N+3}<x_{N+4}$$

ilave bölünme noktalarına ihtiyaç vardır. $Q_m(x)$ kuartik B-spline fonksiyonu (1.4) formuna sahiptir.

$Q_m(x)$ kuartik B-spline $[x_{m-2},x_{m+3}]$ aralığı üzerinde tanımlıdır. $\{Q_{-2},Q_{-1},...,Q_{N+1}\}$ kuartik B-spline kümesi x_m bölünme noktalarında $[a,b]$ tanım kümesi üzerindeki bir tabandır. Bundan dolayı (1.13) denkleminin U analitik çözümüne U_N yaklaşımı

$$U_N(x,t)=\sum_{m=-2}^{N+1}\delta_m(t)Q_m(x) \tag{3.14}$$

olarak yazılabilir. Burada $\delta_m(t)$, eşitlik (1.13)' in kuartik Galerkin formu tarafından belirlenen zamana bağlı nodal parametrelerdir.

Bölünme noktalarında nodal değerler ve onların üçüncü mertebeye kadar ki türevleri aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} U_m &= U(x_m) = \delta_{m-2} + 11\delta_{m-1} + 11\delta_m + 11\delta_{m+1} \\ U_m^{'} &= U^{'}(x_m) = \tfrac{4}{h}(\delta_{m+1} + 3\delta_m - 3\delta_{m-1} - \delta_{m-2}) \\ U_m^{''} &= U^{''}(x_m) = \tfrac{12}{h^2}(\delta_{m+1} - \delta_m - \delta_{m-1} + \delta_{m-2}) \\ U_m^{'''} &= U^{'''}(x_m) = \tfrac{24}{h^3}(\delta_{m+1} - 3\delta_m + 3\delta_{m-1} - \delta_{m-2)} \end{aligned} \tag{3.15}$$

$[x_m, x_{m+1}]$ sonlu aralığı

$$\zeta = x - x_m$$

dönüşümü ile $[0, h]$ aralığına dönüşür. $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde tanımlı kuartik B-spline şekil fonksiyonları yukarıdaki dönüşümün kullanılmasıyla aşağıdaki forma dönüşür:

$$\begin{aligned} Q_{m-2} &= 1 - 4\tfrac{\zeta}{h} + 6\left(\tfrac{\zeta}{h}\right)^2 - 4\left(\tfrac{\zeta}{h}\right)^3 + \left(\tfrac{\zeta}{h}\right)^4 \\ Q_{m-1} &= 11 - 12\tfrac{\zeta}{h} - 6\left(\tfrac{\zeta}{h}\right)^2 + 12\left(\tfrac{\zeta}{h}\right)^3 - 4\left(\tfrac{\zeta}{h}\right)^4 \\ Q_m &= 11 + 12\tfrac{\zeta}{h} - 6\left(\tfrac{\zeta}{h}\right)^2 - 12\left(\tfrac{\zeta}{h}\right)^3 + 6\left(\tfrac{\zeta}{h}\right)^4 \\ Q_{m+1} &= 1 + 4\tfrac{\zeta}{h} + 6\left(\tfrac{\zeta}{h}\right)^2 + 4\left(\tfrac{\zeta}{h}\right)^3 - 4\left(\tfrac{\zeta}{h}\right)^4 \\ Q_{m+2} &= \left(\tfrac{\zeta}{h}\right)^4 \end{aligned}$$

(3.14) yaklaşık çözümü $[0, h]$ aralığında

$$U_N^e = U(\zeta, t) = \sum_{i=m-2}^{m+2} \delta_i(t) Q_i(\zeta) \tag{3.16}$$

olarak yazılabilir. Burada geçen δ_i bilinmeyen zaman parametreleridir.

Galerkin metodu (1.13) denklemine uygulanırsa

$$\int_0^h W(U_t + U_x + \varepsilon U U_x - \mu U_{xxt}) dx = 0 \tag{3.17}$$

elde edilir. Burada W ağırlık fonksiyonunu ifade etmektedir. W ağırlık fonksiyonu yerine kuartik B-spline şekil fonksiyonları ve (3.17) ifadesinde geçen U yerine (3.16)

ifadesi yazılırsa

$$\sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \begin{array}{c} \left(\int_0^h Q_i Q_j d\zeta \right) \overset{\circ}{\delta}_j + \left(\int_0^h Q_i Q_j' d\zeta \right) \delta_j \\ +\varepsilon \sum_{k=m-2}^{m+2} \left(\int_0^h Q_i Q_j Q_k' d\zeta \right) \delta_k \delta_j - \mu \left(\int_0^h Q_i Q_j'' d\zeta \right) \overset{\circ}{\delta}_j \end{array} \right\}$$

denklem sistemi elde edilir. Burada i, j ve k sadece $m-2$, $m-1$, m, $m+1$, $m+2$ ve $m = 0, 1, ..., N-1$ değerlerini alır. Ayrıca $^\circ$ sembolü de zamana bağlı türevi ifade etmektedir.

$$\delta^e = (\delta_{m-2}, \delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2})^T$$

olmak üzere yukarıdaki eşitliğin matris formu aşağıdaki gibi yazılabilir :

$$(A^e - \mu D^e)\overset{\circ}{\delta^e} + (C^e + \varepsilon(\delta^e)^T L^e)\delta^e \tag{3.18}$$

A^e, C^e ve D^e eleman matrisleri 5×5 boyutludur, L^e matrisinin boyutu $5 \times 5 \times 5$ dir ve

$$A^e_{i,j} = \int_0^h Q_i Q_j d\zeta,$$

$$C^e_{i,j} = \int_0^h Q_i Q_j' d\zeta,$$

$$L^e_{i,j} = \int_0^h Q_i Q_j Q_k' d\zeta,$$

$$D^e_{i,j} = \int_0^h Q_i Q_j'' d\zeta$$

L^e matrisi

$$B^e_{i,j} = \sum_{k=m-2}^{m+2} L^e_{i,j,k} \delta^e_k$$

olarak 5×5 boyutlu matris halinde düzenlenir. Böylece B^e matrisi δ^e parametre elemanına bağlı olarak ifade edilir.

$$\delta = (\delta_{-2}, \delta_{-1}, \ldots, \delta_{N+1})^T$$

olmak üzere A^e, B^e, C^e ve D^e her bir elemanı için tanımlanan eleman matrisleri birleştirilirse

$$(A - \mu D)\overset{\circ}{\delta} + (C + \varepsilon B)\delta = 0$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Bu sistem

$$\delta = \frac{\delta^n + \delta^{n+1}}{2},$$

$$\overset{\circ}{\delta} = \frac{\delta^{n+1} - \delta^n}{\Delta t}$$

ifadeleri kullanılarak tekrar düzenlenirse

$$(2A - 2\mu D + \Delta t C + \varepsilon \Delta t B)\,\delta^{n+1} = (2A - 2\mu D - \Delta t C - \varepsilon \Delta t B)\,\delta^n \tag{3.19}$$

bulunur. Denklemlerin kümesi $(N+4)$ bilinmeyen parametreli $(N+4)$ denklemden oluşur. Sol sınır koşulu

$$U(a,t) = \beta_1,\ U_x(a,t) = 0$$

ve sağ sınır koşulu

$$U(b,t) = \beta_2$$

yardımıyla $\delta_{-2}^{n+1},\ \delta_{-1}^{n+1},\ \delta_{N+1}^{n+1}$ parametreleri (3.19) denklem sisteminden elimine edilir. $\delta_{-2}^{n+1},\ \delta_{-1}^{n+1},\ \delta_{N+1}^{n+1}$ parametrelerini yok ettikten sonra her bir zaman adımında dokuz bantlı matris sistemi Gauss eliminasyon yöntemi ile çözülür. (3.19) sisteminde çözümlerin iyileştirilmesi için δ^{n+1} zaman parametrelerine

$$(\delta^*)^{n+1} = \delta^n + \frac{1}{2}\left(\delta^{n+1} - \delta^n\right)$$

iyileştirme prosedürü uygulayalım. (3.19) denklemindeki iterasyonu başlatabilmek için δ_m^0 başlangıç parametresi aşağıdaki başlangıç ve sınır koşulları kullanılarak tanımlan-

malıdır:

$$\begin{aligned}
\left(U_N\left(a,0\right)\right)_x = U^{'}\left(a,0\right) \quad &= \frac{4}{h}(\delta_1 + 3\delta_0 \\
&-3\delta_{-1} - \delta_{-2}) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(U_N\left(a,0\right)\right)_{xx} = U^{''}\left(a,0\right) \quad &= \frac{12}{h^2}(\delta_1 - \delta_0 \\
&-\delta_{-1} + \delta_{-2}) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_N\left(x_i,0\right) \quad &= (\delta_{i-2} + 11\delta_{i-1} \\
&+11\delta_i + \delta_{i+1}) = U\left(x_i\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(U_N\left(b,0\right)\right)_x = U^{'}\left(b,0\right) \quad &= \frac{4}{h}(\delta_{N+1} + 3\delta_N \\
&-3\delta_{N-1} - \delta_{N-2}) = 0
\end{aligned}$$

Bu bize bir matris denklemi verir ve bunun çözümü 9 bantlı Thomas algoritması ile elde edilir. (Saka and Dağ, 2008)

3.4 Kuintik B-Spline Galerkin Methodu

$[a,b]$ aralığı eşit aralıklı noktalarda

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$$

olarak bölünsün. Bu noktalara ek olarak $[a,b]$ aralığında kuintik B-spline tanımlamak için $[a,b]$ aralığı dışında

$$x_{-5} < x_{-4} < x_{-3} < x_{-2} < x_{-1}$$

ve

$$x_{N+1} < x_{N+2} < x_{N+3} < x_{N+4} < x_{N+5}$$

ilave bölünme noktalarına ihtiyaç vardır. Kuintik B-spline $\phi_m\left(x\right),\ m = -2,\ldots,N+2$ için (1.5) ifadesinde tanımlanmıştır. $\phi_m\left(x\right),\ m = -2,\ldots,N+2$ kuintik B-spline

kümesi $a \leq x \leq b$ bölgesi üzerinde bir tabandır. Bundan dolayı (1.13) denkleminin U analitik çözümüne U_N yaklaşımı

$$U_N(x,t) = \sum_{m=-2}^{N+2} \delta_m(t)\,\phi_m(x)$$

olarak yazılabilir. Burada $\delta_m(t)$ (1.13) denkleminin kuintik Galerkin formu tarafından belirlenmiş zamana bağlı nodal parametrelerdir. Kuintik B-spline fonksiyonu ve onun ilk dört türevi süreklidir. U nodal değerleri ve x_m noktalarında dördüncü mertebeye kadar onun türevleri (1.6) ifadesinde verilmiştir.

$$\xi = x - x_m$$

$0 < \xi < h$ local koordinat değişimi $[x_m, x_{m+1}]$ aralığını standart $[0,h]$ aralığına dönüştürür. Kuintik B-spline altı ardışık aralık kaplar böylece bir eleman altı ardışık B-spline tarafından örtülür. Dolayısıyla $[0,h]$ aralığı üzerinde eleman şekil fonksiyonları altı ardışık B-spline fonksiyonları tarafından elde edilir. Burada geçen altı ardışık B-spline

fonksiyonları $[0,h]$ aralığında aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} Q_{m-2} &= 1-5\frac{\xi}{h}+10\left(\frac{\xi}{h}\right)^2-10\left(\frac{\xi}{h}\right)^3 \\ &\quad +5\left(\frac{\xi}{h}\right)^4-\left(\frac{\xi}{h}\right)^5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{m-1} &= 26-50\frac{\xi}{h}+20\left(\frac{\xi}{h}\right)^2+20\left(\frac{\xi}{h}\right)^3 \\ &\quad -20\left(\frac{\xi}{h}\right)^4+5\left(\frac{\xi}{h}\right)^5, \end{aligned}$$

$$Q_m = 66-60\left(\frac{\xi}{h}\right)^2+30\left(\frac{\xi}{h}\right)^4-10\left(\frac{\xi}{h}\right)^5,$$

$$\begin{aligned} Q_{m+1} &= 26+50\frac{\xi}{h}+20\left(\frac{\xi}{h}\right)^2-20\left(\frac{\xi}{h}\right)^3 \\ &\quad -20\left(\frac{\xi}{h}\right)^4+10\left(\frac{\xi}{h}\right)^5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{m+2} &= 1+5\frac{\xi}{h}+10\left(\frac{\xi}{h}\right)^2+10\left(\frac{\xi}{h}\right)^3 \\ &\quad +5\left(\frac{\xi}{h}\right)^4-5\left(\frac{\xi}{h}\right)^5, \end{aligned}$$

$$Q_{m+3} = \left(\frac{\xi}{h}\right)^5.$$

$[0,h]$ aralığında U bilinmeyenine yaklaşık fonksiyon $Q_i,\ i=m-2,\ldots,m+3$ şekil fonksiyonları cinsinden

$$U(\xi,t) \approx U_N^e = \sum_{i=m-2}^{m+3} \delta_i(t)\, Q_i(\xi) \tag{3.20}$$

olarak yazılır. RLW denklemine Galerkin metodu uygulandığında

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} W\left(U_t + U_x + \varepsilon U U_x - \mu U_{xxt}\right) dx = 0 \tag{3.21}$$

integral denklemi elde edilir. Burada W ağırlık fonksiyonunu ifade etmektedir. W ağırlık fonksiyonu yerine (1.5) kuintik B-spline şekil fonksiyonları ve (3.21) de geçen U yerine (3.20) ifadesi yazılırsa

$$\sum_{i=m-2}^{m+3} \left\{ \begin{array}{c} \left(\int_0^h Q_i Q_j d\xi\right) \overset{\circ}{\delta}_j + \left(\int_0^h Q_i Q_j' d\xi\right) \delta_j \\ +\varepsilon \sum_{k=m-2}^{m+3} \left(\int_0^h Q_i Q_j Q_k' d\xi\right) \delta_k \delta_j - \mu \left(\int_0^h Q_i Q_j'' d\xi\right) \overset{\circ}{\delta}_j \end{array} \right\}$$

denklem sistemi elde edilir. Burada i, j ve k sadece $m-2, m-1, m, m+1, m+2, m+3$ ve $m = 0, 1, \ldots, N-1$ değerlerini alır. Ayrıca $\circ$ sembolü zamana göre türevi ifade eder. Matris formu

$$A^e \overset{\circ}{\delta^e} + C^e \delta^e + \varepsilon \delta^T L^e \delta^e - \mu D^e \overset{\circ}{\delta^e},$$

dir. Burada geçen A^e, C^e ve D^e matrislerinin boyutu 6×6 dır, L^e matrisinin boyutu ise $6 \times 6 \times 6$ dır ve matrisler aşağıdaki integrallerden hesaplanır:

$$\delta^e = (\delta_{m-2}, \delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2}, \delta_{m+3})$$

$$A^e_{i,j} = \int_0^h Q_i Q_j d\xi,$$

$$C^e_{i,j} = \int_0^h Q_i Q_j' d\xi,$$

$$L^e_{i,j,k} = \int_0^h Q_i Q_j Q_k' d\xi,$$

$$D^e_{i,j} = \int_0^h Q_i Q_j'' d\xi$$

L^e matrisi B^e,

$$B^e_{i,j} = \sum_{k=m-2}^{m+3} L^e_{i,j,k} \delta^e_k$$

gibi 6×6 boyutlu matris halinde düzenlenir. Böylece B^e matrisi δ^e eleman parametresine bağlı ifade edilebilir. Bütün elemanlar üzerindeki matrislerin birleştirilmesiyle

$$(\mathbf{A} - \boldsymbol{\mu}\mathbf{D})\,\overset{\circ}{\delta} + (\mathbf{C} + \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{B})\,\delta = 0 \tag{3.22}$$

matris diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Burada

$$\delta = (\delta_{-2}, \delta_{-1}, \ldots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2})$$

global eleman parametreleridir ve $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ sırasıyla A^e, B^e, C^e, D^e eleman matrislerinin birleştirilmesiyle bulunur. (3.22) denkleminde $\overset{\circ}{\delta}$ parametresinin zamana bağlı türevi;

$$\overset{\circ}{\delta} = \left(\delta^{n+1} - \delta^n\right)/\Delta t$$

genel sonlu fark yaklaşımı ve δ parametresinin

$$\delta = \left(\delta^n + \delta^{n+1}\right)/2$$

Crank-Nicolson formülü ile değişimi

$$(2\mathbf{A} - \mathbf{2}\boldsymbol{\mu}\mathbf{D} + \Delta t\mathbf{C} + \Delta t\varepsilon\mathbf{B})\,\delta^{n+1} = (2\mathbf{A} - \mathbf{2}\boldsymbol{\mu}\mathbf{D} - \Delta t\mathbf{C} - \Delta t\varepsilon\mathbf{B})\,\delta^n \tag{3.23}$$

iterasyon denklem sistemini verir. Bu denklem sistemi $N+5$ bilinmeyenli $N+5$ lineer denklemden oluşan köşegensel onbir bantlı bir matris sistemidir.

$$U(a,t) = \beta_1,$$

$$U(b,t) = \beta_2,$$

$$U_{xx}(a,t) = U_x(a,t) = 0$$

Sınır koşullarının uygulanmasıyla

$$\begin{aligned}
U_0 = U(x_0) &= (\delta_{-2} + 26\delta_{-1} + 66\delta_0 \\
&\quad +26\delta_1 + \delta_2) = \beta_1, \\
U_0'' = U''(x_0) &= \frac{20}{h^2}(\delta_{-2} + 2\delta_{-1} - 6\delta_0 \\
&\quad +2\delta_1 + \delta_2) = 0, \\
U_N = U(x_N) &= (\delta_{N-1} + 26\delta_N + 66\delta_{N+1} \\
&\quad +26\delta_{N+2} + \delta_{N+3} = \beta_2, \\
U_N' = U'(x_N) &= \frac{5}{h}(\delta_{N+3} + 10\delta_{N+2} \\
&\quad \delta_{N+3} + 10\delta_{N+2}) = 0
\end{aligned} \tag{3.24}$$

denklemleri bulunur. (3.23) iterasyon sisteminde ilk iki ve son iki denklem yerine sınır koşullarından gelen denklemler yazılır ve $\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}$ bilinmeyenleri elimine edilir. Böylece geriye kalan 11 bantlı $(N+1) \times (N+1)$ boyutlu matris sistemi her bir zaman adımı için Gauss eliminasyon yöntemi ile çözülür. Çözümlerin her bir zaman adımında doğruluğunu arttırmak için aşağıdaki iterasyon sistemi iki yada üç kez uygulanır:

$$(\delta^*)^{n+1} = \delta^n + \frac{1}{2}\left(\delta^{n+1} - \delta^n\right)$$

δ^0 başlangıç vektörü parametresi başlangıç ve sınır koşulları kullanılarak belirlenmelidir:

$$(U_N)_x(a,0) = 0$$

$$(U_N)_{xx}(a,0) = 0$$

$$(U_N)_x(b,0) = 0$$

$$(U_N)_{xx}(b,0) = 0$$

$$U_N(x,0) = U(x_m,0), m = 0,\ldots,N.$$

Yukarıdaki koşulların eleman parametreleri cinsinden yazılmasıyla aşağıdaki deklem sistemi elde edilir:

$$\begin{bmatrix}
-5 & -50 & 0 & 50 & 5 & & & & & & \\
20 & 40 & -120 & 40 & 20 & & & & & & \\
1 & 26 & 66 & 26 & 1 & & & & & & \\
 & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & & & & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & & & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & \\
 & & & & & & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \\
 & & & & & & 20 & 40 & -120 & 40 & 20 \\
 & & & & & & -5 & -50 & 0 & 50 & 5
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \delta^0_{-2} \\ \delta^0_{-1} \\ \delta^0_0 \\ \delta^0_1 \\ \vdots \\ \delta^0_{N-1} \\ \delta^0_N \\ \delta^0_{N+1} \\ \delta^0_{N+2} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U(x_0) \\ U(x_1) \\ \vdots \\ U(x_{N-1}) \\ U(x_N) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Başlangıç parametreleri bu matris sisteminin çözülmesiyle elde edilir. Yukarıdaki sistemden elde edilen parametreler (3.23) denkleminde yerine yazılarak iterasyona başlanır. Böylece her bir zaman adımındaki çözümler elde edilebilir. (Dağ,et al.,2006)

BÖLÜM 4

RLW DENKLEMİNİN EN KÜÇÜK KARELER SONLU ELEMANLAR METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde RLW denkleminin Kuadratik ve Kübik B-spline en küçük kareler metodu yardımıyla çözüm algoritması incelenecektir.

4.1 Kuadratik B-Spline En Küçük Kareler Metodu

$[a, b]$ aralığının bölünme noktalarını

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$$

olarak seçelim ve

$$h = (b - a)/N$$

olsun. x_i, $i = 0, \ldots, N$ bölünme noktaları üzerinde tanımlı kuadratik B-spline ' lar

$$\{Q_{-1},\ Q_0,\ \ldots,\ Q_N,\ Q_{N+1}\}$$

$[a, b]$ aralığında linner bağımsız fonksiyonlardır.

Zaman ve konum için en küçük kareler metodu RLW denklemine uygulanırsa

$$\delta \int_0^t \int_0^L \left(U_t + U_x + \varepsilon U U_x - \mu U_{xxt}\right)^2 dx dt = 0 \tag{4.1}$$

elde edilir.

$$\Delta x = (x_{m+1} - x_m) = h$$

(4.1) integral denklemi için temsili bir $[x_m, x_{m+1}]$ konum aralığında

$$x = x_m + \eta \Delta x,\ dx = d\eta \Delta x,\ 0 \leq \eta \leq 1$$

dönüşümü yapıldığında ve $[t^n, t^{n+1}]$ zaman aralığı içinse

$$t = \zeta \Delta t,\ 0 \leq \zeta \leq 1,\ dt = \Delta t d\zeta$$

dönüşümü yapıldığında

$$\delta \int_0^1 \int_0^1 \left(U_\zeta + \frac{\Delta t}{\Delta x} U_\eta + \varepsilon \frac{\Delta t}{\Delta x} \hat{U} U_\eta - \frac{\mu}{\Delta x^2} U_{\eta\eta\zeta} \right)^2 d\zeta d\eta = 0 \tag{4.2}$$

elde edilir. Bu ifadede $[x_m, x_{m+1}]$ üzerinde kısaltma amacı ile

$$U\left(x + \Delta t\right) = \hat{U}$$

olarak alınmıştır. (4.2) integraline δ varyasyonu uygulandığında

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[U_\zeta + \upsilon U_\eta - b U_{\eta\eta\zeta} \right] \delta \left[U_\zeta + \upsilon U_\eta - b U_{\eta\eta\zeta} \right] d\zeta d\eta = 0 \tag{4.3}$$

elde edilir. Burada

$$b = \frac{\mu}{\Delta x^2},$$
$$\upsilon = \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(1 + \varepsilon \hat{U} \right)$$

dir. Ağırlık fonksiyonu olarak

$$\delta \left[U_\zeta + \upsilon U_\eta - b U_{\eta\eta\zeta} \right]$$

düşünüldüğünde en küçük kareler metodu Galerkin metoduna dönüşür. $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde yaklaşım

$$U^e = \sum_{j=m-1}^{m+1} \left(\sigma_j + \zeta \Delta \sigma_j \right) Q_j \left(\eta \right), \tag{4.4}$$

olarak alınabilir. (4.4) de $\Delta\sigma_j$ bir zaman adımı boyunca nodal değer artışını ifade eder ve σ_m de zaman adımı başlangıcında nodal parametredir. Ayrıca $Q_m\left(\eta\right)$ local koordinat sisteminde tanımlı B-spline şekil fonksiyonları

$$Q_{m-1} = \left(1 - \eta\right)^2,$$

$$Q_m = \left(1 + 2\eta - 2\eta^2\right),$$

$$Q_{m+1} = \eta^2,$$

$$0 \leq \eta \leq 1$$

dir. x_m için nodal değerleri ve onların birinci türevleri eleman parametreleri açısından

$$u_m = u\left(x_m\right) = \sigma_{m-1} + \sigma_m,$$

$$u_m^{'} = u^{'}\left(x_m\right) = \frac{2}{\Delta x}\left(\sigma_m - \sigma_{m-1}\right)$$

dir. Burada $'$ sembolü x e göre türevi ifade etmektedir. (4.4) local yaklaşımına B-spline şekil fonksiyonları uygulandığında

$$\delta U^e = \sum_{j=m-1}^{m+1} Q_j\left(\eta\right)\zeta\Delta\sigma_j$$

eşitliği elde edilir. w_j ağırlık fonksiyonu

$$w_j = Q_j + \zeta\upsilon Q_j^{'} - bQ_j^{''}$$

formunu alır. w_j yi (4.3) da yerine yazılırsa

$$\int_0^1\int_0^1 \left[Q_j + \zeta\upsilon Q_j^{'} - bQ_j^{''}\right]\left[U_\zeta + \upsilon U_\eta - bU_{\eta\eta\zeta}\right]d\zeta d\eta = 0 \tag{4.5}$$

olarak bulunur.

(4.5) integralinde (4.4) ifadesini yerine yazılırsa

$$\sum_{j=m-1}^{m+1}\int_0^1 \begin{bmatrix} Q_iQ_j + 2bQ_i^{'}Q_j^{'} + \dfrac{\upsilon^2}{3}Q_i^{'}Q_j^{'} \\ +b^2Q_i^{''}Q_j^{''} + \dfrac{\upsilon}{2}\left(Q_iQ_j^{'} + Q_i^{'}Q_j\right) - \dfrac{b\upsilon}{2}\left(Q^{'}Q^{''} + Q^{''}Q^{'}\right) \end{bmatrix}\Delta\sigma_j$$
$$+\sum_{j=m-1}^{m+1}\int_0^1 \begin{bmatrix} \upsilon Q_iQ_j^{'} \\ +\dfrac{1}{2}\upsilon^2Q_i^{'}Q_j^{'} - b\upsilon Q_i^{''}Q_j^{'} \end{bmatrix}\sigma_j = 0,$$

elde edilir. Ayrıca matris formu olarak da

$$\begin{bmatrix} A^e + 2bB^e + \dfrac{\upsilon^2}{3}B \\ +b^2C + \dfrac{\upsilon}{2}\left(D + D^T\right) - \dfrac{b\upsilon}{2}\left(E + E^T\right) \end{bmatrix}\Delta\sigma^e + \begin{bmatrix} \upsilon D + \dfrac{\upsilon^2}{2}B \\ -b\upsilon E^T \end{bmatrix}\sigma^e$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadede geçen $\sigma^e, A^e_{ij}, B^e_{ij}, C^e_{ij}, D^e_{ij}, E^e_{ij}$ aşağıda verilmiştir:

$$\sigma^e = (\sigma_{i-1}, \sigma_i, \sigma_{i+1})$$

$$A^e_{ij} = \int_0^1 QQd\eta = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 6 & 13 & 1 \\ 13 & 54 & 13 \\ 1 & 13 & 6 \end{bmatrix},$$

$$B^e_{ij} = \int_0^1 Q'Q'd\eta = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$C^e_{ij} = \int_0^1 Q''Q''d\eta = 4\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D^e_{ij} = \int_0^1 QQ'd\eta = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -8 & 0 & 8 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E^e_{ij} = \int_0^1 Q'Q''d\eta = 2\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tüm bu verilerin düzenlenmesi

$$\sigma = (\sigma_{-1}, \sigma_0, \ldots, \sigma_N)^T$$

ifadesini verir. Ayrıca $A,\ B$, ve D de A^e, D^e, B^e eleman parametrelerinden türetilmiş olmak üzere

$$\begin{bmatrix} A + 2bB + \dfrac{\upsilon^2}{3}B + b^2C \\ +\dfrac{\upsilon}{2}\left(D + D^T\right) - \dfrac{b\upsilon}{2}\left(E + E^T\right) \end{bmatrix}\Delta\sigma + \begin{bmatrix} \upsilon D + \dfrac{\upsilon^2}{2}B \\ -b\upsilon E^T \end{bmatrix}\sigma = 0, \tag{4.6}$$

dir. υ sürekli elemanı aşağıda ifade edilmiştir:

$$\upsilon = \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(1 + \varepsilon\left[\sigma_j + \sigma_{j-1}\right]\right),$$

$$\sigma = \sigma^n,$$

$$\Delta\sigma = \sigma^{n+1} - \sigma^n$$

Bu eşitlikleri (4.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} A + 2bB + \dfrac{\upsilon^2}{3}B + b^2C \\ +\dfrac{\upsilon}{2}\left(D + D^T\right) - \dfrac{b\upsilon}{2}\left(E + E^T\right) \end{bmatrix} \sigma^{n+1} = \begin{bmatrix} A + 2bB - \dfrac{\upsilon^2}{6}B + b^2C \\ +\dfrac{\upsilon}{2}\left(-D + D^T\right) + \dfrac{b\upsilon}{2}\left(-E + E^T\right) \end{bmatrix} \sigma^n \tag{4.7}$$

elde edilir.

Tekrarlayan sınır koşullarını yukarıdaki sisteme uyguladığımızda $N \times N$ boyutlu matris sistemini elde ederiz. Bu sistem Thomas algoritması ile çözülebilir. Her bir zaman aralığında

$$\sigma^{n*} = \sigma^n + \frac{1}{2}\left(\sigma^n - \sigma^{n-1}\right)$$

iterasyon metodu doğruluğun ispatı için üç yada dört kez uygulanır. (4.7) ifadesindeki iterasyona başlamak için σ^0 ın belirlenmesi gerekir. Başlangıç ve snır koşullarını kullanarak σ^0 bilinmeyenleri belirlenebilir. Böylece

$$U_N(x,0) = \sum_{j=-1}^{N} Q_j(x)\,\sigma_j^0$$

ifadesinden bölünme noktalarında

$$U_N(x_i,0) = U(x_i,0),\ i = 0,\ldots,N$$

denklemleri elde edilir. Periyodik sınır koşulları kullanılarak

$$U(x_0,0) = U(x_N,0)$$

denklemine ulaşılır. Daha sonra bu denklemler matris formunda yazılarak $\sigma_i^0,\ i = -1,0,\ldots,N$ başlangıç parametreleri elde edilir:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & 1 \\ & 1 & 1 & & & \\ & . & . & . & & \\ & & & 1 & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_0^0 \\ \sigma_1^0 \\ . \\ \sigma_{N-2}^0 \\ \sigma_{N-1}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(x,0) \\ U(x,0) \\ . \\ U(x_{N-1},0) \\ U(x_N,0) \end{bmatrix}^0$$

$\sigma_i^0,\ i=-1,0,\ldots,N$ değerleri (4.7) de yerine yazılarak iteratif yolla elde edilen yaklaşık çözümler (4.4) denkleminden bulunabilir. (Dağ, 2000)

4.2 Kübik B-Spline En Küçük Kareler Metodu

$[a,b]$ sonlu aralığının eşit uzunluklu seçilmiş bölünme noktaları $x_m,\ m=1,\ldots,N$ olsun ve aralık içindeki ardışık iki nokta arasındaki uzaklık

$$\Delta x = x_m - x_{m-1} = (b-a)/N$$

ile gösterilsin. Bölünme noktaları üzerindeki $Q_m,\ m=-1,\ldots,N+1$ kübik B-spline (1.3) de ifade edilmiştir. $0 \le \eta \le 1$ için

$$x = x_m + \eta \Delta x \tag{4.8}$$

dönüşümü uygulandığında kübik B-spline şekil fonksiyonu $[x_m,\ x_{m+1}]$ elemanı üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{matrix} Q_{m-1} \\ Q_m \\ Q_{m+1} \\ Q_{m+2} \end{matrix} = \begin{cases} (1-\eta)^3, \\ 1+3(1-\eta)+3(1-\eta)^2-3(1-\eta)^3, \\ 1+3\eta+3\eta^2-3\eta^3, \\ \eta^3, \end{cases} \tag{4.9}$$

$[t^n, t^{n+1}]$ her bir zaman aralığı üzerinde

$$t = t^n + \zeta \Delta t,$$

$0 \le \zeta \le 1$ için

$$\Delta t = t^{n+1} - t^n$$

olarak değişir.

(1.13) denklemine zaman ve konum için en küçük kareler formülü uygulanırsa aşağıdaki integral elde edilir:

$$\delta \int_0^t \int_0^b \left(U_t + U_x + \varepsilon U U_x - \mu U_{xxt}\right)^2 dx dt = 0 \tag{4.10}$$

$[x_m, x_{m+1}]$ elemanı üzerinde (4.10) integraline (4.8) dönüşümü uygulanır.

$$\delta \int_0^1 \int_0^1 \left(U_\zeta + \frac{\Delta t}{\Delta x} U_\eta + \varepsilon \frac{\Delta t}{\Delta x} U U_\eta - \mu \frac{1}{\Delta x^2} U_{\eta\eta\zeta} \right)^2 d\eta d\zeta = 0$$

Kolaylık sağlaması için $U = \hat{U}$ sabit olarak alınır ve zamana göre δ değişimi uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 \left(U_\zeta + \upsilon U_\eta - b U_{\eta\eta\zeta} \right) \delta \left(U_\zeta + \upsilon U_\eta - b U_{\eta\eta\zeta} \right) d\eta d\zeta, \\ & b = \frac{\mu}{\Delta x^2}, \\ & \upsilon = \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(1 + \varepsilon \hat{U} \right) \end{aligned} \tag{4.11}$$

elde edilir. (4.11) de

$$\delta \left(U_\zeta + \upsilon U_\eta - b U_{\eta\eta\zeta} \right)$$

ağırlık fonksiyonu olarak düşünüldüğünde en küçük kareler metodu Petrov-Galerkin metoduna dönüşür. $[0, 1]$ elemanı üzerinde $Q_{m-1}(\eta)$, $Q_m(\eta)$, $Q_{m+1}(\eta)$, $Q_{m+2}(\eta)$ B-spline fonksiyonlarının bir kombinasyonu

$$U_N^e = \sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\sigma_j + \zeta \Delta \sigma_j \right) Q_j(\eta) \tag{4.12}$$

yaklaşım fonksiyonu olarak alınabilir. $\sigma_{m-1}, \sigma_m, \sigma_{m+1}, \sigma_{m+2}$ zaman adımı başlangıcında bilinmeyen parametrelerdir. $\Delta\sigma_{m-1}, \Delta\sigma_m, \Delta\sigma_{m+1}, \Delta\sigma_{m+2}$ parametreleri ise Δt zaman adımı içinde nodal parametrelerin artışını göstermektedir.

(4.12) yaklaşımını ve (4.9) kübik B-spline fonksiyonları kullanımıyla x_m bölünme noktalarında $(U_N)_m$ değerleri ve onun birinci ve ikinci $(U_N)_x, (U_N)_{xx}$ türevleri zaman adımı parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned} & (U_N)_m = U_N(x_m) = \sigma_{m-1} + 4\sigma_m + \sigma_{m+1}, \\ & (U_N)_m' = U_N'(x_m) = 3\left(-\sigma_{m-1} + \sigma_{m+1} \right), \\ & (U_N)_m'' = U_N''(x_m) = 6\left(\sigma_{m-1} - 2\sigma_m + \sigma_{m+1} \right), \end{aligned} \tag{4.13}$$

olarak elde edilir. $'$ sembolu η ye göre türevi göstermetedir. Ağırlık fonksiyonu

$$\delta W = \sum_{j=m-1}^{m+2} W_j \Delta\sigma_j = \delta \left(U_\zeta + \upsilon U_\eta - b U_{\eta\eta\zeta} \right)$$

ve (4.12) ifadesinin

$$\delta U^e = \sum_{j=m-1}^{m+2} \zeta Q_j \left(\eta \right) \Delta\sigma_j$$

kullanımıyla

$$W_m = \delta \left(U_\zeta + \upsilon U_\eta - b U_{\eta\eta\zeta} \right) = Q_m + \upsilon \zeta Q_m^{'} - b Q_m^{''}$$

ifadesi elde edilir. Elde edilen bu ifade (4.11) denkleminde yerine yazılırsa

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(U_\zeta + \upsilon U_\eta - b U_{\eta\eta\zeta} \right) \left(Q_m + \upsilon \zeta Q_m^{'} - b Q_m^{''} \right) d\eta d\zeta \tag{4.14}$$

olarak bulur. (4.14) integralindeki ikinci çarpan ağırlık fonksiyonu olarak düşünülür. (4.12) local yaklaşımını (4.14) integralinde yerine koyarsak ve kısmi integrasyon uygulanırsa aşağıdaki matris sistemi elde edilir:

$$\sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^1 \begin{bmatrix} Q_i Q_j + \left(2b + \dfrac{\upsilon^2}{3} \right) Q_i^{'} Q_j^{'} + b^2 Q_i^{''} Q_j^{''} \\ + \dfrac{\upsilon}{2} \left(Q_i Q_j^{'} + Q_i^{'} Q_j \right) - \dfrac{b\upsilon}{2} \left(Q_i^{'} Q_j^{''} + Q_i^{''} Q_j^{'} \right) \end{bmatrix} d\eta - b \left(Q_i Q_j^{'} + Q_i^{'} Q_j \right) |_0^1 \right\} \Delta\sigma_j$$

$$+ \sum_{j=m-1}^{m+2} \left[\int_0^1 \begin{pmatrix} \upsilon Q_i Q_j^{'} + \\ \dfrac{\upsilon^2}{2} Q_i^{'} Q_j^{'} - b\upsilon Q_i^{''} Q_j^{'} \end{pmatrix} d\eta \right] \sigma_j$$

Elde edilen bu matris sistemi aşağıdaki matris şeklinde de yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} A^e + \left(2b + \dfrac{\upsilon^2}{3} \right) B^e + b^2 C^e + \dfrac{\upsilon}{2} \left(D^e + \left(D^e \right)^T \right) \\ - \dfrac{b\upsilon}{2} \left(E^e + \left(E^e \right)^T \right) - b F^e \end{bmatrix} \Delta\sigma^e$$

$$+ \begin{bmatrix} \upsilon D^e + \dfrac{\upsilon^2}{2} B^e \\ - b\upsilon \left(E^e \right)^T \end{bmatrix} \sigma^e$$

Bu ifadede geçen σ^eeleman parametreleri ve $A^e_{ij},\ B^e_{ij},\ C^e_{ij},\ D^e_{ij},\ E^e_{ij},\ F^e_{ij}$ eleman matrisleri aşağıda verilmiştir:

$$\sigma^e = (\sigma_{m-1}, \sigma_m, \sigma_{m+1}, \sigma_{m+2}),$$

$$A^e_{ij} = \int_0^1 Q_i Q_j d\eta = \frac{1}{140}\begin{bmatrix} 20 & 129 & 60 & 1 \\ 129 & 1188 & 933 & 60 \\ 60 & 933 & 1188 & 129 \\ 1 & 60 & 129 & 20 \end{bmatrix},$$

$$B^e_{ij} = \int_0^1 Q'_i Q'_j d\eta = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 18 & 21 & -36 & -3 \\ 21 & 102 & -87 & -36 \\ -36 & -87 & 102 & 12 \\ -3 & -36 & 21 & 18 \end{bmatrix},$$

$$C^e_{ij} = \int_0^1 Q''_i Q''_j d\eta = \begin{bmatrix} 12 & -18 & 0 & 6 \\ -18 & 36 & -18 & 0 \\ 0 & -18 & 36 & -18 \\ -3 & 0 & -18 & 12 \end{bmatrix},$$

$$D^e_{ij} = \int_0^1 Q_i Q'_j d\eta = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} -10 & -9 & 18 & 1 \\ -71 & -150 & 183 & 38 \\ -38 & -183 & 150 & 71 \\ -1 & -18 & 9 & 10 \end{bmatrix},$$

$$E^e_{ij} = \int_0^1 Q'_i Q''_j d\eta = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -9 & 15 & -3 & -3 \\ -15 & 9 & 27 & -21 \\ 21 & -27 & -9 & 15 \\ 3 & 3 & -15 & 9 \end{bmatrix},$$

$$F^e_{ij} = \left(Q_i Q'_j + Q'_i Q_j\right)|_0^1 = \begin{bmatrix} 6 & 12 & 0 & 0 \\ 12 & -9 & -24 & 0 \\ 0 & -24 & -9 & 12 \\ 0 & 0 & 12 & 6 \end{bmatrix},$$

$[x_m, x_{m+1}]$ elemanı için $i,\ j$ sadece $m-1,\ m,\ m+1,\ m+2$ değerlerini alır. Elde edilen tüm verilerin toplanmasıyla aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} A+\left(2b+\dfrac{\upsilon^2}{3}\right)B+b^2C+\dfrac{\upsilon}{2}\left(D+(D)^T\right) \\ -\dfrac{b\upsilon}{2}\left(E+(E)^T\right)-bF \end{bmatrix}\Delta\sigma \\ &+\begin{bmatrix} \upsilon D+\dfrac{\upsilon^2}{2}B \\ -b\upsilon\,(E)^T \end{bmatrix}\sigma=0,\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\sigma=\left(\sigma_{-1},\sigma_0,\ldots,\sigma_N,\sigma_{N+1}\right)^T$$

Bu ifade de σ tüm nodal parametrelerdir ve A, B ve D sırasıyla A^e, B^e ve D^e eleman matrislerinden türetilmiştir. (4.15) sisteminde

$$\sigma=\sigma^n,$$

$$\Delta\sigma=\sigma^{n+1}-\sigma^n$$

tanımlaması ile bu sistem

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} A+2bB+\dfrac{\upsilon^2}{3}B+b^2C+\dfrac{\upsilon}{2}\left(D+D^T\right) \\ -\dfrac{b\upsilon}{2}\left(E+E^T\right)-bF \end{bmatrix}\sigma^{n+1} \\ &=\begin{bmatrix} A+2bB-\dfrac{\upsilon^2}{6}B+b^2C+\dfrac{\upsilon}{2}\left(-D+D^T\right) \\ +\dfrac{b\upsilon}{2}\left(-E+E^T\right)-bF \end{bmatrix}\sigma^n\end{aligned} \tag{4.16}$$

$(N+3)\times(N+3)$ boyutlu sekiz elemanlı köşegenel matris sistemine dönüşür. (4.16) matris sisteminin bir satırı bilinmeyen parametreler cinsinden

$$\begin{aligned}&a_1\sigma_{m-3}^{n+1}+a_2\sigma_{m-2}^{n+1}+a_3\sigma_{m-1}^{n+1}+a_4\sigma_m^{n+1}+a_3\sigma_{m+1}^{n+1}+a_2\sigma_{m+2}^{n+1}+a_1\sigma_{m+3}^{n+1} \\ &=a_5\sigma_{m-3}^{n}+a_6\sigma_{m-2}^{n}+a_7\sigma_{m-1}^{n}+a_8\sigma_m^{n}+a_7\sigma_{m+1}^{n}+a_6\sigma_{m+2}^{n}+a_5\sigma_{m+3}^{n}\end{aligned} \tag{4.17}$$

olarak yazılabilir. Bu ifadede geçen katsayılar

$$a_1 = \frac{1}{140} - \frac{3}{5}b - \frac{1}{10}\upsilon^2 + 6b^2,$$

$$a_2 = \frac{6}{7} - \frac{72}{5}b - \frac{12}{5}\upsilon^2,$$

$$a_3 = \frac{1191}{140} - 9b - \frac{3}{2}\upsilon^2 - 54b^2,$$

$$a_4 = \frac{604}{35} + 48b + 8\upsilon^2 + 96b^2,$$

$$a_5 = \frac{1}{140} - \frac{3}{5}b + \frac{1}{20}\upsilon^2 + 6b^2,$$

$$a_6 = \frac{6}{7} - \frac{72}{5}b + \frac{6}{5}\upsilon^2,$$

$$a_7 = \frac{1191}{140} - 9b + \frac{3}{4}\upsilon^2 - 54b^2,$$

$$a_8 = \frac{604}{35} + 48b - 4\upsilon^2 + 96b^2,$$

şeklinde ortaya çıkar. $[x_m, x_m]$ elemanı üzerindeki υ eleman sabiti

$$\upsilon_m = \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(1 + \varepsilon\hat{U}\right) = \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(1 + \varepsilon\left[\sigma_{m-1}^n + 4\sigma_m^n + \sigma_{m+1}^n\right]\right)$$

ile bulunur.

$$U(a,t) = U(b,t) = U'(a,t) = U'(b,t) = 0$$

Sınır koşullarının uygulanmasıyla

$$\sigma_{-1}^n = \sigma_1^n,$$

$$\sigma_0^n = -2\sigma_1^n,$$

$$\sigma_{N+1}^n = \sigma_{N-1}^n,$$

$$\sigma_N^n = -2\sigma_{N-1}^n$$

elde edilir. Elde edilen eşitlikler yardımıyla $\sigma_{-1}^n,\ \sigma_0^n,\ \sigma_{N+1}^n,\ \sigma_N^n$ denklem sisteminden elimine edilir. Böylece sistem $(N+1)\times(N+1)$ boyutlu Thomas algoritması ile

çözülebilen matris sistemine dönüşür. υ_m eleman sabiti (4.16) sistemindeki eleman parametresine bağlı olduğundan çözümlerin doğruluğunu arttırmak için aşağıdaki procedure tüm zaman adımlarında iki yada üç kez uygulanır:

$$\sigma^{n_*} = \sigma^n + \frac{1}{2}\left(\sigma^n - \sigma^{n-1}\right)$$

(4.16) ifadesindeki sistemi ardışık olarak çözmek için $\sigma^0 = \left(\sigma^0_{-1}, \ldots, \sigma^0_{N+1}\right)^T$ başlangıç vektör parametreleri belirlenmelidir. $[a, b]$ aralığı üzerinde $t = 0$ zamanında $U_N(x, 0)$ eşitliğini

$$U_N(x, 0) = \sum_{j=-1}^{N+1} Q_j(x)\, \sigma^0_j$$

olarak yazılabilir. Bölünme noktalarında $t = 0$ başlangıç zamanında başlangıç ve sınır koşullarından

$$U_N(x_i, 0) = U(x_i, 0), \; i = 0, 1, \ldots, N$$

$$U'(x_0, 0) = U'(x_N, 0) = 0,$$

elde edilir. Bu koşulların açık olarak yazılmasıyla

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 & & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & & & \\ & & \ldots & . & & & & \\ & & & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & & -3 & 0 & 3 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^0_{-1} \\ \sigma^0_0 \\ \ldots \\ \sigma^0_N \\ \sigma^0_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ U(x_0) \\ \ldots \\ U(x_N) \\ 0 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bu matrisin Thomas algoritmasıyla çözümü ile $t = 0$ zamanındaki başlangıç bilinmeyen parametreleri bulunmuş olur. Bu parametreler (4.16) de yerine yazılarak her zaman adımındaki çözümler bölünme noktalarında (4.13) ifadesinden bulunur. (Dağ and Özer, 2001)

BÖLÜM 5

RLW DENKLEMİNİN KÜBİK B-SPLİNE DİFERENSİYEL QUADRATURE İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde birinci ve ikinci mertebeden türevler için kübik B-spline diferansiyel quadrature yaklaşımı verilmiştir. Kübik B-spline diferensiyel quadrature metoduyla RLW denkleminin konum ayrışımı incelenmiştir.

5.1 Kübik B-Spline Diferensiyel Quadrature (CBSDQ)

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b$$

$[a, b]$ aralığının eşit uzunlukta alınmış bölünme noktaları olsun. $U(x,t)$ fonksiyonunun x_i inci bölünme noktasındaki fonksiyonel değeri $U(x_i,t)$ ile gösterilsin. $U(x,t)$ fonksiyonunun DQM türev yaklaşımları x_i noktasında

$$U_x^{(r)}(x_i,t) = \sum_{j=1}^{N} \omega_{ij}^{(r)} U(x_j,t), \quad i = 1,2,\ldots,N \tag{5.1}$$

olarak tanımlanır. Burada $\omega_{ij}^{(r)}$ r inci mertebeden x e göre türevin ağırlık katsayısını ifade etmektedir. DQM bölünme noktalarında fonksiyon değerlerinin ağırlıklı toplamı kullanılarak bir fonksiyonun türevine yaklaşım tekniğidir. (5.1) denkleminde verilen DQM kullanılarak herhangi bir fonksiyonun türev yaklaşımı uygulanırken $\omega_{ij}^{(r)}$ $r = 1$, 2 ağırlık katsayılarının belirlenmesi gerekir. Bu bölümde ağırlık katsayılarını belirlemek için test fonksiyonu olarak kübik B-spline fonksiyonları seçilmiştir. ϕ_m, $m = 0,1,\ldots,N+1$ kübik B-spline ' ları $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlıdır ve bir taban olduğu daha önce ifade edilmiştir. $\phi_m(x)$ kübik B-spline parçalı polinom olduğundan dolayı x_{m-1}, x_{m-2}, x_{m+1} bölünme noktalarında sıfırdan farklıdır.

Kübik B-spline fonksiyonları (5.1) denkleminde $U(x,t)$ lerin yerine yazılmasıyla

$$\phi_m^{(r)}(x_i) = \sum_{j=-1}^{N+2} \omega_{ij}^{(r)} \phi_m(x_j), \qquad i = 1,2,\ldots,N \tag{5.2}$$

$$m = 0,1,2,\ldots,N+1$$

denklemleri elde edilir. Tanım kümesi dışındaki x_{-1}, x_0, x_{N+1}, x_{N+2} bölünme noktaları hayali bölünme noktalarıdır. x_i bölünme noktalarıyla ilgili $\omega_{i,j}^{(r)}$,$j = -1, 0, \ldots, N+2$ ağırlık katsayıları aynı bölünme noktalarında $\phi_m, m = 0, 1, \ldots, N+1$ kübik B-spline test problemleri kullanılarak belirlenir.

5.2 Birinci Mertebeden Türev Yaklaşımları

$r = 1$ için x_1 noktasındaki $\omega_{1,j}^{(1)}$,$j = -1, 0, \ldots, N+2$ ağırlık katsayılarının hesaplanmasını gösterelim:

(5.2) denkleminde ϕ_m ,$m = 0, 1, 2, \ldots, N+1$ B-spline taban fonksiyonları sırasıyla yerine yazılır. $m = 0$ seçildiğinde

$$\phi_0^{'}(x_1) = \sum_{j=-1}^{1} w_{1,\,j}^{(1)} \phi_0(x_j) \tag{5.3}$$

elde edilir. (5.3) eşitliğinde kübik B-spline değerleri yerlerine yazılırsa

$$w_{1,\,-1}^{(1)} + 4w_{1,\,0}^{(1)} + w_{1,\,1}^{(1)} = -\frac{3}{h}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde $m = 1$ yazıldığında

$$w_{1,\,0}^{(1)} + 4w_{1,\,0}^{(1)} + w_{1,\,2}^{(1)} = 0$$

elde edilir. m nin değeri 2 den $N+1$ e kadar alınır ve aynı işlemler yapıldığında bütün denklemler matris formunda

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & & & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{1,-1}^{(1)} \\ \omega_{1,0}^{(1)} \\ \vdots \\ \omega_{1,N+2}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{h} \\ 0 \\ \frac{3}{h} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi $(N+4)$ bilinmeyenli $(N+2)$ denklemden oluşur. Bu denklem sisteminin çözülebilmesi için bilinmeyenler vektöründen $\omega_{1,-1}^{(1)}$ ve $\omega_{1,N+2}^{(1)}$ elemanları ile katsayı matrisinin $(1,-1)$ ve $(N+1, N+2)$ elemanları yok edilmelidir. Bunun içinde iki denkleme daha ihtiyaç vardır. Bu iki denklemden

birincisi (5.3) eşitliğinin türevinin alınmasıyla elde edilebilir. x_1 noktasında (5.3) denkleminin türevi

$$\phi_0^{''}(x_1) = \sum_{j=-1}^{N+2} \omega_{ij}^{(1)} \phi_0^{'}(x_j) \tag{5.5}$$

şeklinde bulunur. (5.5) eşitliğinin kübik B-spline değerleri yerlerine yazılırsa

$$\left(\frac{3}{h}\right) w_{1,\,-1}^{(1)} + \left(-\frac{3}{h}\right) w_{1,\,1}^{(1)} = \frac{6}{h^2} \tag{5.6}$$

elde edilir. (5.6) eşitliğinden

$$w_{1,\,-1}^{(1)} = \frac{2}{h} + w_{1,\,1}^{(1)} \tag{5.7}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\phi_{N+1}^{'}(x_1) = \sum_{j=-1}^{N+2} \omega_{1,j}^{(1)} \phi_0(x_j)$$

eşitliği türevlenirse

$$\phi_{N+1}^{''}(x_1) = \sum_{j=-1}^{N+2} \omega_{1,j}^{(1)} \phi_0^{'}(x_j)$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikten

$$\begin{gathered} \left(\frac{3}{h}\right) w_{1,\,N}^{(1)} + \left(-\frac{3}{h}\right) w_{1,\,N+2}^{(1)} = 0 \\ w_{1,\,N+2}^{(1)} = w_{1,\,N}^{(1)} \end{gathered} \tag{5.8}$$

elde edilir. (5.7) ve (5.8) eşitlikleri ile (5.4) sisteminden $w_{1,\,-1}^{(1)}$ ve $w_{1,\,N+2}^{(1)}$ elemanları elenir. Bu eleme ile (5.4) sistemi 3 bant şekilli bir matris

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & & & & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & & 1 & 4 & 1 & & \\ & & & & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & & & & 2 & 4 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{1,0}^{(1)} \\ \omega_{1,1}^{(1)} \\ \vdots \\ \omega_{1,N+1}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{h} \\ 0 \\ \frac{3}{h} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

sistemine dönüşür ki bu sistem Thomas algoritması ile çözülebilir.

Benzer şekilde $2 \leq m \leq N-1$ olmak üzere m. bölünme noktasıyla ilgili ağırlık katsayıları da, $w^{(1)}_{m,\ j}, j = 0,\ 1, \ldots,\ N+1$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & & & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^{(1)}_{m,0} \\ \omega^{(1)}_{m,1} \\ \vdots \\ \omega^{(1)}_{m,N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{3}{h} \\ 0 \\ \frac{3}{h} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

denklem sisteminin çözülmesiyle kolaylıkla tespit edilebilir. (5.9) ve (5.10) denklem sistemleri incelendiğinde eşitliğin sağ tarafında bulunan bilinenler vektöründe $m-1$. eleman sürekli olarak $-\frac{3}{h}$ ve $m+1$. elemanda sürekli olarak $\frac{3}{h}$ olarak oluşmaktadır.

N. bölünme noktası ağırlık katsayıları da $w^{(1)}_{N,\ j}, j = 0,\ 1, \ldots,\ N+1$, benzer şekilde N+2 tane taban fonksiyonunun kullanılmasıyla elde edilen

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & & & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^{(1)}_{N,0} \\ \omega^{(1)}_{N,1} \\ \vdots \\ \omega^{(1)}_{N,N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{3}{h} \\ 0 \\ \frac{5}{h} \end{bmatrix} \tag{5.11}$$

sisteminin çözülmesiyle bulunur.

5.3 İkinci Mertebeden Türev Yaklaşımları

Direk yaklaşımda, birinci mertebeden türev yaklaşımlarının ağırlık katsayılarını hesaplamak için kübik B-spline'ı kullanmak gerekmez. Kübik B-spline fonksiyonları ve onların ikinci türevleri yerine direk olarak DQM yaklaşım fonksiyonu kullanılır.

$$\begin{aligned} \phi_k^{(2)}(x) &= \sum_{j=-1}^{1} \omega_{ij}^{(2)} \phi_k(x_j), \qquad & i &= 1,2,\ldots,N \\ &= w_{1,-1}^{(2)}\phi_0(x_{-1}) + w_{1,0}^{(2)}\phi_0(x_0) + w_{1,1}^{(2)}\phi_0(x_1) & k &= 0,1,2,\ldots,N+1 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Tablo (1.2)de verilen fonksiyon ve türevleri (5.12) eşitliğinde yerine yazlırsa

$$w_{1,-1}^{(2)} + 4w_{1,0}^{(2)} + w_{1,1}^{(2)} = \frac{6}{h^2}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde r nin N+1 e kadar ilerletilmesiyle bütün test fonksiyonları uygulanırsa

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & & & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{1,-1}^{(2)} \\ \omega_{1,0}^{(2)} \\ \vdots \\ \omega_{1,N+2}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{h^2} \\ -\frac{12}{h^2} \\ \frac{6}{h^2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

eşitliği elde edilir. (5.13) sisteminden $\omega_{1,-1}^{(2)}$ ve $\omega_{1,N+2}^{(2)}$ ağırlık katsayılarının elenmesi gerekir. Kübik B-spline fonksiyonlarının bölünme noktalarında üçüncü türevleri bulunmadığından (5.12) denkleminin türevinin alınması ile bu eleme mümkün değildir. Bu durumda $\omega_{1,-1}^{(2)}$ ve $\omega_{1,N+2}^{(2)}$ ağırlık katsayılarının elenmesi için Lagrange interpolasyon polinomları taban diferansiyel quadrature metodu kullanılır. Lagrange interpolasyon polinomları tabanlı diferansiyel quadrature metodunda ikinci türev yaklaşımı ağırlık katsayıları

$$\omega_{i,j}^{(2)} = 2\omega_{i,j}^{(1)}\left(\omega_{i,i}^{(1)} - \frac{1}{x_i - x_j}\right), \quad i \neq j \tag{5.14}$$

eşitliğiyle bulunmaktadır (Shu, 2000). (5.14) eşitliğinde $i = 1$ ve $j = -1$ seçimi (5.13) sisteminden $\omega^{(2)}_{1,-1},\ i = 1$ ve $j = N + 2$ seçimiyle de $\omega^{(2)}_{1,N+2}$ ağırlık katsayıları elenebilir. Bu düzenlemeden sonra (5.13) sistemi

$$A = 2\omega^{(1)}_{1,-1}\left[\omega^{(1)}_{1,1} - \frac{1}{x_1 - x_{-1}}\right]$$

ve

$$B = 2\omega^{(1)}_{1,N+2}\left[\omega^{(1)}_{1,1} - \frac{1}{x_1 - x_{N+2}}\right]$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^{(2)}_{1,0} \\ \omega^{(2)}_{1,1} \\ \vdots \\ \omega^{(2)}_{1,N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{h^2} - A \\ -\frac{12}{h^2} \\ \frac{6}{h^2} \\ 0 \\ \vdots \\ -B \end{bmatrix} \tag{5.15}$$

eşitliğine dönüşür. Birinci türevdeki yaklaşım algoritmasına benzer şekilde $2 \leq m \leq N - 1$ olmak üzere m. bölünme noktası ile ilişkili ağırlık katsayıları da, $w^{(2)}_{m,\,j},\ j = 0,\ 1, \ldots, N + 1$

$$A = 2\omega^{(1)}_{m,-1}\left[\omega^{(1)}_{m,m} - \frac{1}{x_m - x_{-1}}\right]$$

ve

$$B = 2\omega^{(1)}_{m,N+2}\left[\omega^{(1)}_{m,m} - \frac{1}{x_m - x_{N+2}}\right]$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^{(2)}_{m,0} \\ \omega^{(2)}_{m,1} \\ \vdots \\ \omega^{(2)}_{m,N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{6}{h^2} \\ 0 \\ \vdots \\ -B \end{bmatrix} \tag{5.16}$$

cebirsel denklem sisteminin çözümüyle bulunur.

Benzer bir metodun uygulanmasıyla $N.$ bölünme noktasına ilişkin ağırlık katsayıları,

$$A = 2\omega_{N,-1}^{(1)}\left[\omega_{N,N}^{(1)} - \frac{1}{x_N - x_{-1}}\right]$$

ve

$$B = 2\omega_{N,N+2}^{(1)}\left[\omega_{N,N}^{(1)} - \frac{1}{x_N - x_{N+2}}\right]$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & & & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & & & 1 & 4 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{N,0}^{(2)} \\ \omega_{N,1}^{(2)} \\ \vdots \\ \omega_{N,N+1}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \dfrac{6}{h^2} \\ -\dfrac{12}{h^2} \\ \dfrac{6}{h^2} - B \end{bmatrix}$$

sisteminin çözümüyle bulunur.

5.4 RLWE'nin Ayrıştırılması

(1.13) denklemi için zaman ve konum ayrıştırmaları yapılmadan önce RLW dekleminin zaman değişkenine göre dördüncü mertebe Runge-Kutta metodunun uygulanabilmesi için karma türev içeren terimi yok etmemiz gerekmektedir. RLW denkleminde $V = U - \mu U_{xx}$ olarak alınıp denklem tekrar yazılırsa;

$$V_t = -U_x - \varepsilon U U_x \tag{5.17}$$

$$V = U - \mu U_{xx} \tag{5.18}$$

halini alır. Burada geçen V_t, V nin zamana bağlı türev fonksiyonunu ifade etmektedir. (5.17)-(5.18) denklem sistemi zamana bağlı kısmi diferensiyel denklem ve diferensiyel denklem içermektedir. (5.17)-(5.18) sistemine diferansiyel quadrature yaklaşımı yapılır ve sınır koşulları uygulanırsa denklem aşağıdaki hali alır:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x_i,t)}{\partial t} &= -\sum_{j=2}^{N-1} \omega_{ij}^{(1)} U(x_j,t) - \varepsilon U(x_i,t) \\ &\quad \times \sum_{j=2}^{N-1} \omega_{ij}^{(1)} U(x_j,t) + A \end{aligned} \tag{5.19}$$

$$U(x_i,t) - \mu \sum_{j=2}^{N-1} \omega_{ij}^{(2)} U(x_j,t) = V(x_i,t), \tag{5.20}$$

(5.19) de geçen A sınır koşullarını temsil etmektedir ve aşağıda verilmiştir:

$$A = -\omega_{i1}^{(1)}\beta_1 - \varepsilon\omega_{i1}^{(1)}\beta_1^2 - \omega_{iN}^{(1)}\beta_2 - \varepsilon\omega_{iN}^{(1)}\beta_2^2$$

(5.19)- (5.20) eşitliklerinde verilen denklem sistemi bir adi diferansiyel denklem ve bir cebirsel denklemden oluşmaktadır. Çözüm algoritmasında öncelikle (5.19) denklemi Runge-Kutta metoduyla çözülecek sonrada (5.20) sisteminin sağ tarafında yer alan yük vektörü (5.19) denkleminin çözümünde aldığı değer ile güncellendikten sonra Gauss eleme motoduyla çözülecektir. Önerilen algoritmanın çalıştırılabilmesi için iki başlangıç koşuluna ihtiyaç duyulmaktadır. $U(x,0) = f(x)$ başlangıç koşulu kullanılarak ve $V = U - \mu U_{xx}$ alınarak başlangıç koşulları tekrar düzenlendiğinde aşağıdaki ifade elde edilir:

$$U(x,0) = f(x)$$
$$V(x,0) = g(x)$$

Bu ifadede geçen $g(x) = f(x) - \mu f_{xx}(x)$ dir. Böylece ihtiyaç duyulan başlangıç koşulları da elde edilmiş olur. (Korkmaz and Dağ, 2012; Korkmaz, 2010)

BÖLÜM 6

GENİŞLETİLMİŞ KÜBİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN METOD

Bu bölümde RLW denkleminin genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin metoduyla çözümü incelenecektir. Tek solitary dalgasının yayılımı, dalga undulation ve dalga üretimi test problemleri çözümleri verilecektir.

6.1 Genişletilmiş Kübik B-Spline Kolokeyşin Metod

Herhangi bir $[a,b]$ aralığını

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$$

noktalarında eşit uzunluklu alt aralıklara bölelim. Bu alt aralıklar üzerinde oluşturulan genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonları (1.10) de verilmiştir. RLW denkleminin zamana göre ayrışımı Crank-Nicolson yöntemiyle yapıldığında

$$U^{n+1} - U^n + \frac{\Delta t}{2}\left[U_x^{n+1} + U_x^n + \varepsilon U^{n+1}U_x^{n+1} + \varepsilon U^n U_x^n\right] - \mu(U_{xx}^{n+1} - U_{xx}^n) = 0 \qquad (6.1)$$

elde edilir. (6.1) denklemindeki U^n, U_x^n, U_{xx}^n bilinmeyenleri için (1.11) ifadesinin bölünme noktalarındaki yaklaşımı yazıldığında

$$\begin{aligned}
&\left[\alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}\left(1+\varepsilon U_m^{n+1}\right)\gamma_1 - \mu\beta_1\right]\delta_{m-1}^{n+1} + \left[\alpha_2 - \mu\beta_2\right]\delta_m^{n+1} + \\
&\left[\alpha_1 + \frac{\Delta t}{2}\left(1+\varepsilon U_m^{n+1}\right)\gamma_2 - \mu\beta_1\right]\delta_{m+1}^{n+1} = \left[\alpha_1 - \frac{\Delta t}{2}\left(1+\varepsilon U_m^{n}\right)\gamma_1 - \mu\beta_1\right]\delta_{m-1}^{n} + \\
&\left[\alpha_2 - \mu\beta_2\right]\delta_m^n + \left[\alpha_1 - \frac{\Delta t}{2}\left(1+\varepsilon U_m^{n}\right)\gamma_2 - \mu\beta_1\right]\delta_{m+1}^{n} \\
&m = 0,\ 1, \ldots, N
\end{aligned} \qquad (6.2)$$

elde edilir. Bu ifadede geçen $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \beta_1,\ \beta_2$ değerleri aşağıda verilmiştir:

$$\alpha_1 = \frac{4-\lambda}{24}, \alpha_2 = \frac{8+\lambda}{12}, \gamma_1 = -\frac{1}{2h}, \gamma_2 = \frac{1}{2h}, \beta_1 = \frac{2+\lambda}{2h^2}, \beta_2 = -\frac{2+\lambda}{h^2}.$$

Böylece $t = t^{n+1}$ zaman adımında

$$d^{n+1} = \left(\delta_{-1}^{n+1}, \delta_0^{n+1}, \delta_1^{n+1}, \ldots, \delta_{N+1}^{n+1}\right)$$

$N+3$ bilinmeyenli $N+1$ denklem sistemi elde edilir. Bu sistemi çözebilmek için $U(a,t)=U_0,\ U(b,t)=0$ sınır koşullarından iki lineer denklem elde ederiz:

$$\begin{aligned}\delta_{-1}^{n+1} &= \frac{24}{(4-\lambda)}\left(U_0-\frac{(8+\lambda)}{12}\delta_0^{n+1}-\frac{(4-\lambda)}{24}\delta_1^{n+1}\right), \\ \delta_{N+1}^{n+1} &= -\frac{24}{(4-\lambda)}\left(\frac{(4-\lambda)}{24}\delta_N^{n+1}+\frac{(8+\lambda)}{12}\delta_{N-1}^{n+1}\right).\end{aligned} \tag{6.3}$$

Yukarıdaki iki denklemi kullanarak δ_{-1}^{n+1}, δ_{N+1}^{n+1} değişkenleri (6.2) sisteminden yok edilir. Böylece $(N+1)\times(N+1)$ boyutlu denklem sistemi elde edilir. Bu sistem linner olmayan cebirsel denklem sistemi olduğundan her zaman adımında aşağıdaki lineerleştirme işlemi en az beş defa tekrarlanarak sistemin çözümü elde edilir:

1.Adım: δ_{m-1}^{n+1} ve δ_{m+1}^{n+1} parametrelerinin katsayılarında olan U_m^{n+1} yerine U_m^n yazılarak denklem sistemi çözülür.

2.Adım:Yukarıdaki adım beş kez uygulanır.

Başlangıç durumu

(6.3) sistemini ardışık olarak çözmek için δ_{-1}^0, δ_0^0, $\ldots$, δ_{N+1}^0 başlangıç parametreleri belirlenmelidir. Başlangıç koşulu ve sınırlardaki türev koşulu yardımıyla aşağıdaki başlangıç parametreleri elde edilebilir:

$$U_N(x_m,0)=U(x_m,0),\ m=0,\ldots,N$$

$$(U_x)_N(x_0,0)=U'(x_0)$$

$$(U_x)_N(x_N,0)=U'(x_N)$$

Yukarıdaki koşullar aşağıdaki üçgensel matris sistemini verir:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2h} & 0 & \frac{1}{2h} & & & \\ \frac{4-\lambda}{24} & \frac{8+\lambda}{12} & \frac{4-\lambda}{24} & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & & \frac{4-\lambda}{24} & \frac{8+\lambda}{12} & \frac{4-\lambda}{24} \\ & & & -\frac{1}{2h} & 0 & \frac{1}{2h} \end{bmatrix}$$

Bu sistem Thomas algoritmasıyla çözülebilir.

Nümerik testler

Bu kısımda RLW denklemi için üç test problemi çalışılmıştır. Analitik çözümü bilinen birinci test problemi için max hata normu

$$L_\infty = \max_{0\le m\le N} \left|U_m^{\text{tam}} - U_m^{\text{nümerik}}\right| \tag{6.4}$$

hesaplanmıştır. Dalga undulation ve dalga üretimi test problemleri çalışılmıştır. RLW denkleminin kütle, momentum ve enerji korunumu aşağıdaki formüller yardımıyla yaklaşık olarak hesaplanır:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} U dx \approx \int_a^b U dx \approx \frac{h}{2}\sum_{m=0}^{N-1}\left(U_m + U_{m+1}\right),$$

$$\begin{aligned} I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (U^2 + \mu(U_x)^2)dx &\approx \int_a^b (U^2 + \mu(U_x)^2)dx \\ &\approx \frac{h}{2}\sum_{m=0}^{N-1}\left[(U^2)_m + \mu\left((U_x)^2\right)_m + (U^2)_{m+1} + \mu\left((U_x)^2\right)_{m+1}\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(U^3 + 3U^2\right) dx &\approx \int_a^b (U^3 + 3U^2)dx \\ &\approx \frac{h}{2}\sum_{m=0}^{N-1}\left[(U^3)_m + 3\left(U^2\right)_m + (U^3)_{m+1} + 3\left(U^2\right)_{m+1}\right]. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Tek solitary dalgasının yayılımı

RLW denkleminin teorik solitary dalga çözümü

$$U(x,t) = 3csech^2(k[x - x_0 - vt]) \tag{6.6}$$

olarak hesaplanmıştır. (6.6) denkleminde $t = 0$ yazılarak başlangıç koşulu

$$U(x,0) = 3csech^2(k[x - x_0]) \tag{6.7}$$

olarak elde edilir. $v = 1 + \varepsilon c$ dalga hızını, $3c$ solitary dalgasının genliğini ifade eder. (6.7) denkleminde $x = x_0$ değeri dalganın tepe noktasının konumunu belirtir. Ayrıca $k = \sqrt{\dfrac{\varepsilon c}{4\mu v}}$ dır ve

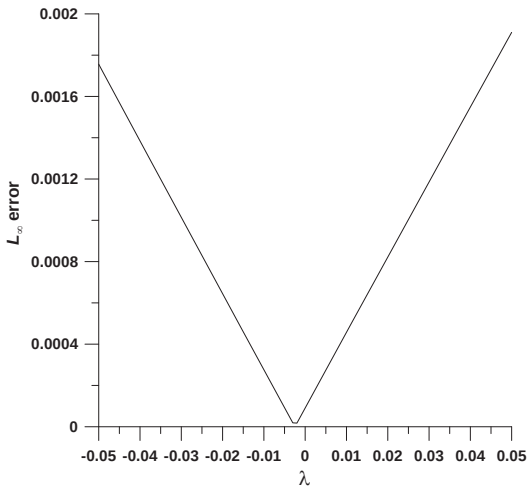
$$U(a,t) = 0,\ U(b,t) = 0$$

sınır koşulları kullanılmıştır.

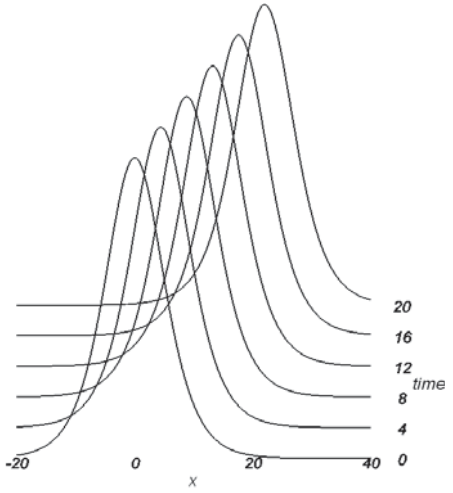
Bu çözüm sabit v hızında, şekli değişmeyen, sağa doğru hareket eden solitary dalgasını ifade eder. Sayısal çözüm konum için $-40 \leq x \leq 60$ aralığında, zaman için $0 \leq t \leq 20$ aralığında çalışılmıştır ve $c = 0,1,\ \varepsilon = \mu = 1,\ x_0 = 0$ parametreleri seçilmiştir. (6.7) başlangıç koşulu (6.5) korunum denklemlerinde yerlerine yazılarak analitik kütle, momentum ve enerji korunum sabitleri formülleri

$$I_1 = \frac{6c}{k}, \quad I_2 = \frac{12c^2}{k} + \frac{48kc^2\mu}{5}, \quad I_3 = \frac{36c^2}{k}\left(1 + \frac{4c}{5}\right).$$

olarak elde edilir. Tanımlanan algoritma $h = \Delta t = 0,1$ alındığında ve $t = 10$ zamanına kadar çalıştırıldığında genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonundaki en iyi λ serbest parametresi sayısal çözümlerin en doğru olacak şekildeki L_∞ hata normu bulunmuş ve bu durum λ $-L_\infty$ hata normu grafiği çizilerek Şekil 6.1 de gösterilmiştir. En iyi çözümü veren λ değeri $\lambda = -0,0026$ olarak belirlenmiştir. Başlangıç çözümü ve farklı zamanlardaki solitary dalga formu Şekil 6.2 de verilmiştir. $t = 20$ zamanındaki solitary dalgasının genliği $0,2999927325$ olarak ölçülmüştür. Başlangıçtaki genlik ile $t = 20$ zamanındaki genliği arasındaki fark $7,23 \times 10^{-6}$ olarak hesaplanmıştır. Böylece algoritmanın genliğinin fazla değişmediği gözlemlenmiştir.



Şekil 6.1: L_∞ hata normu, $-0.05 \leq \lambda \leq 0.05$



Şekil 6.2: Solitary dalga profilleri

Tablo 6. 1 de RLW denkleminin korunum kanunu sabitleri ve çözümlerin L_∞ hata normu $\lambda = 0, -0.0026$ için verilmiştir. Aynı tabloda karşılaştırma yapmak için farklı bazı metotlarla elde edilen çözümlerin korunum sabitleri ve L_∞ hata normu verilmiştir.

Tablo 6.1: Tek bir solitary dalgası için hata normu ve korunum sabitleri

$t = 20$, $c = 0.1$ ve $-40 \leq x \leq 60$.

$c = 0, 1$	I_1	I_2	I_3	L_∞
$(\lambda = 0)$	3,9798832	0,8104625	2,5790075	$9{,}98\times10^{-5}$
$(\lambda = -0, 0026)$	3,9798833	0,8104625	2,5790074	$1{,}27\times10^{-5}$
(Kutluay, et al., 2006), $h = 0, 1$	3,97997	0,810459	2,57901	$2{,}1\times10^{-4}$
(Gardner, et al., 1995), $h = 0, 1$	3,97989	0,810467	2,57902	$8{,}6\times10^{-5}$
(Gardner, et al., 1995), $h = 0, 125$	3,98203	0,808650	2,57302	$1{,}76\times10^{-3}$
(Dağ, et al., 2004), $h = 0, 125$	3,979883	0,8102762	2,57839258	$1{,}16\times10^{-4}$
(Raslan, 2005), $h = 0, 1$	3,978035	0,8097240	2,576573	$2{,}27\times10^{-4}$
(Saka, et al., 2008), $h = 0, 125$	3,9798879	0,8104622	2,5790063	$7{,}3\times10^{-5}$
Tam çözüm	3,9799497	0,8104625	2,5790074	

Dalga Undulation

Başlangıç koşulu ve

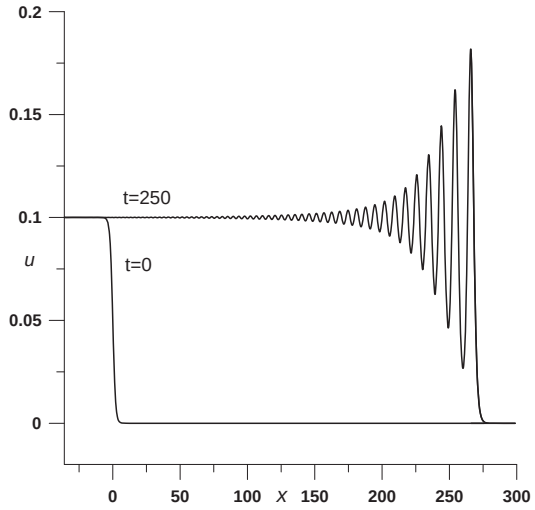
$$U(x,0) = 0.5U_0 \left[1 - \tanh\left(\frac{x - x_c}{d}\right)\right] \tag{6.8}$$

sınır koşullarının

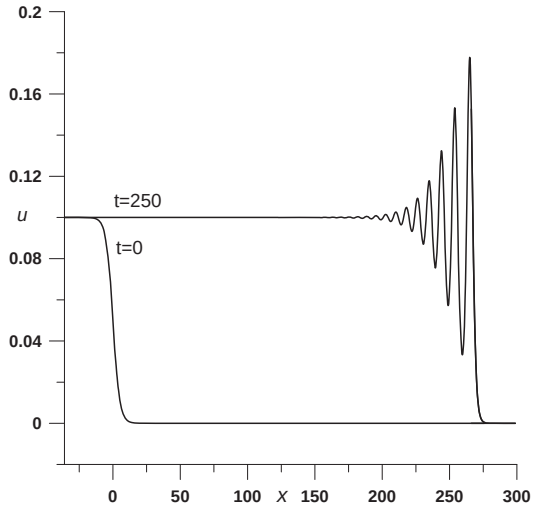
$$U(a,t) = U_0, \quad U(b,t) = 0, \tag{6.9}$$

kullanımıyla elde edilen RLW denkleminin çözümü dalga undulation olarak bilir. $U\,(x,0)$ sol taraftaki durgun su boyunca hareket eden nehrin su yüzeyinin yüksekliğini göstermektedir. Durgun su bu nehrin sağ tarafındadır ve nehirin durgun suya doğru akmasıyla oluşan dalgalara dalga undulation denir. Burada d durgun su ve derin su arasındaki eğimi ifade etmektedir.

Bu test problemi için $h = 0,24$ konum artımı ve $\Delta t = 0,1$ zaman artımı, $\varepsilon = 1,5,\ \mu = 0,16666667,\ U_0 = 0.1,\ x_c = 0,\ d = 2$ parametreleri kullanılmıştır. $-36 \leq x \leq 300$ konum aralığında çözümler elde edilmiştir. $d = 2$ olduğunda $t = 250$ zamanındaki dalga undulation grafiği Şekil 6. 3 de gösterilmiştir. Şekil 6. 4 da ise $d = 5$ için dalga undulation grafiği çizilmiştir.



Şekil 6.3: Başlangıç koşulu ve dalga undulation $t = 250$, $d = 2$



Şekil 6.4: Başlangıç koşulu ve undulation $t = 250$, $d = 5$

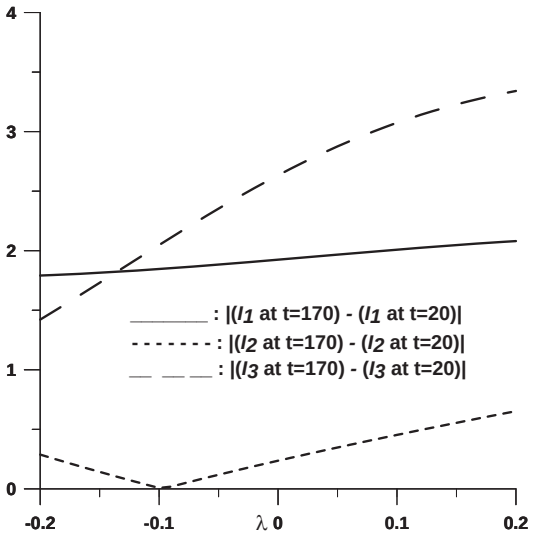
Dalga üretimi

$$U(a,t) = \begin{cases} U_0 \dfrac{t}{\tau}, & 0 \leq t \leq \tau \\ U_0, & \tau \leq t \leq t_0 - \tau \\ U_0 \dfrac{t_0 - t}{\tau}, & t_0 - \tau \leq t \leq t_0 \\ 0 & \text{d.d} \end{cases} \tag{6.10}$$

Formundaki sol sınır koşullarının kullanılmasıyla RLW denklemi için solitary dalgalar elde edilir. Sağ sınır koşulu ise sıfır olarak alınır. Solitary dalganın sayısı sol sınır

koşulunun uygulanma süresi ve büyüklüğüne bağlı olduğu gösterilmiştir. (Gardner and Dağ, 1995)

Bu test probleminde $0 \leq x \leq 400$ konum aralığında $U_0 = 2$, $h = 0,4$, $\Delta t = 0.1$, $\tau = 0,1$, $t_0 = 20$ değerlerini kullanacağız. Sol sınır koşulunun uygulanmasıyla sınır koşulu sıfır olduğundaki RLW denkleminin çözümlerinin korunum sabitlerinin değeri ile $t = 170$ zamanındaki değeri arasındaki mutlak hata Şekil 6.5 de verilmiştir. Bu hatalar için min hata $\lambda = -0.1$ için olduğu belirlenmiştir.

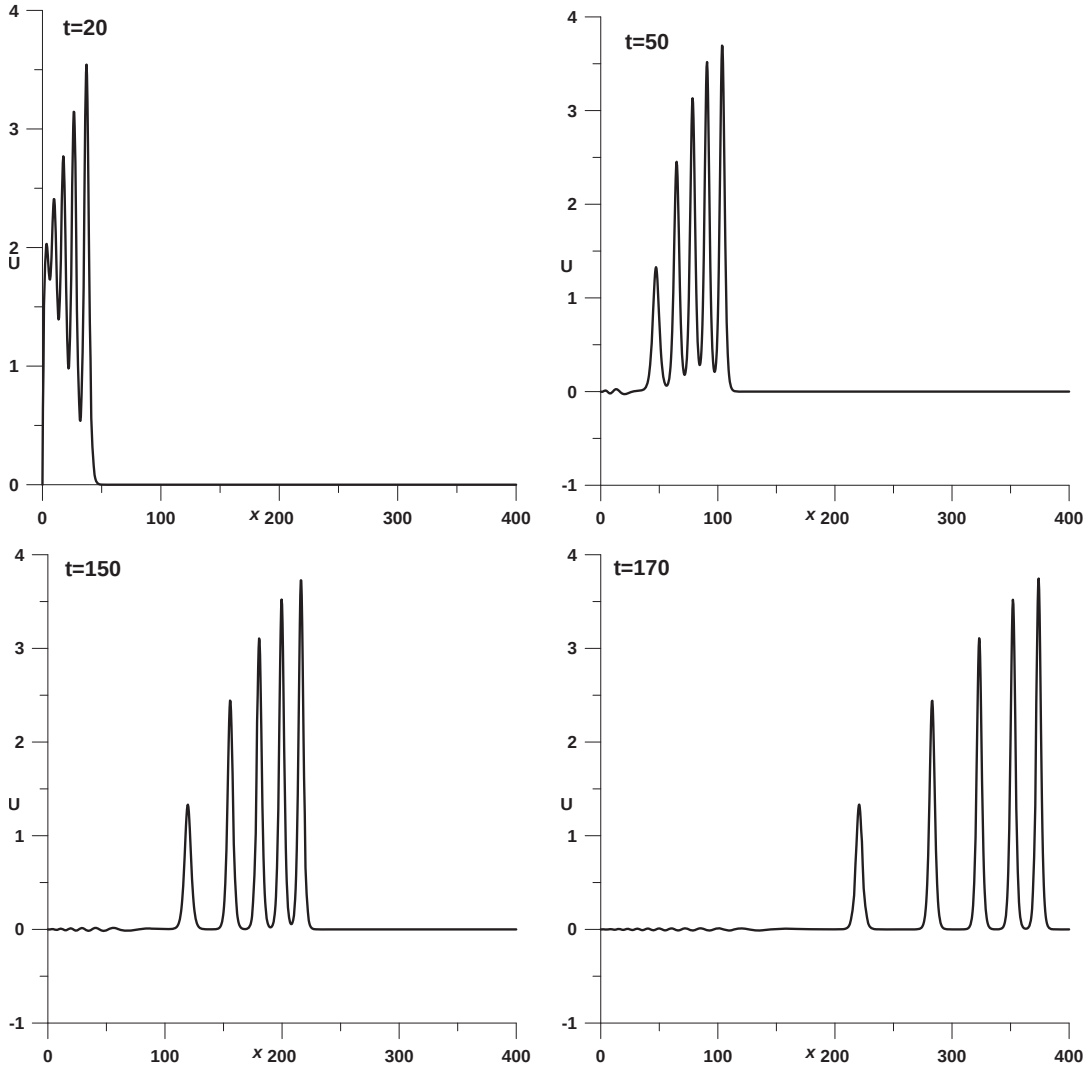


Şekil 6.5: Korunum sabitleri için mutlak hata

Tablo 6.2 te bazı zamanlarda $\lambda = 0,\ -0.1$ değerleri için $I_1,\ I_2,\ I_3$ korunum sabitleri verilmiştir. Sol sınır koşulu sıfır olduğunda üretilen dalgalar için korunum sabitlerinin yaklaşık olarak aynı olduğu tablodan görülmektedir. Ayrıca $t = 20,\ 50,\ 150,\ 170$ olduğunda ki RLW denkleminin solitary dalga çözümleri Şekil 6.6 de gösterilmiştir.

Tablo 6.2: Korunum sabitleri $U_0 = 2$, $h = 0,4$, $\Delta t = 0,1$

	Kübik B-spline ($\lambda = 0$)			Genişletilmiş Kübik B-spline ($\lambda = -0,1$)		
Zaman	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
2,5	9,4638608	17,4704013	79,2895174	9,4961812	17,7526545	80,7613283
5	19,8760581	42,4272914	209,8333039	19,8392160	42,4737659	209,6121430
7,5	29,8339490	65,5652620	329,0059600	29,8684215	65,9515323	330,4530123
10	39,7212311	88,4188042	446,3341135	39,7093499	88,6798418	446,6214452
15	59,7428357	135,1130459	686,7763197	59,7746901	135,6758717	688,0516886
20	77,6773926	177,6475420	897,5576327	77,7600763	178,5508779	899,9577527
50	79,6065562	177,4168208	900,2214704	79,6102148	178,5418149	902,0439907
100	79,6032922	177,4117322	900,1946299	79,6069937	178,5579215	902,0096543
150	79,6027120	177,4112808	900,1918145	79,6063945	178,5582137	902,0062494
170	79,6019082	177,4111512	900,1909754	79,6060481	178,5581064	902,0052622



Şekil 6.6: Sınır zorlamalı üretilen dalga profilleri

BÖLÜM 7

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada RLW denkleminin yaklaşık çözümlerinin bulunması için önerilen kolokeyşin, Galerkin ve en küçük kareler sonlu elemanlar algoritmaları çalışılmıştır. Bu yöntemler için deneme fonksiyonları B-spline fonksiyonları yardımıyla oluşturulmuştur. B-spline fonksiyonları ile oluşturulan yöntemlerin kullanılmasıyla elde edilen RLW denkleminin tek solitary çözümleri karşılaştırması aşağıdaki tablodan gözlemlenerek yapılabilir.Yapılan çalışmalarda kullanılan konum Δx ve zaman artımları Δt için $0,3$ dalga boyuna sahıp dalganın yayılımı sonuçları için hata ve korunum sabitleri tabloda toplanmıştır. Yapılan çalışmalar da bulunan L_2 and L_∞ hata normları ve C_1, C_2 ve C_3 korunum kanunlarını belirtmektedir.

Genlik=0,3	Δt	Δx	C_1	C_2	C_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10$
(Dağ, et al., 2006)							
Kuintik Galerkin metodu	0,1	0,125	3,9798	0,8104	2,5790	0,19	0,07
(Dağ, 2000)							
Kuadratik En küçük Kareler metodu.	0,1	0,125	3,9904	0,8234	2,6739	2,15	-
(Dağ and Özer, 2001)							
Kübik En Küçük Kareler metodu	0,1	0,125	3,9615	0,8041	2,5582	0,02	1,56
(Gardner, et al., 1995)							
Kuadratik Galerkin metodu	0,1	0,1	3,97989	0,81046	2,57902	0,220	0,086
(Dağ, et al., 2003)							
Kübik kolokeyşin metodu.	0,1	0,125	3,979958	0,81046	2,57890	0,261	0,103
(Dağ, et al., 2003)							
Kuadratik kolokyeşin metodu	0,1	0,125	3,9799	0,81046	2,57888	3,053	1,066
(Saka and Dağ, 2008)							
Kuartik Galerkin metodu	0,1	0,125	3,97989	0,81046	2,57901	0,192	0,073
(Korkmaz and Dağ, 2012)							
Kübik B-spline Diferansiyel Kuadrature metodu	0,01	0,25	3,9799	0,8104	2,5790	0,26	0,07
(Saka, et al., 2009)							
Septik Kolokeyşin metodu	0,1	0,125	3,97995	0,81046	2,57901	0,220	0,084
(Saka, et al., 2009)							
Septik Kolokeyşin metodu	0,1	0,1	3,97996	0,81046	2,57901	0,220	0,084
(Saka, et al., 2009)							

Algoritma maliyetinin az olması avantajına karşılık kuadratik B-spline kullanılarak oluşturulan sayısal yöntemlerin doğruluğunun daha az olduğu aynı şekilde Galerkin yöntemlerinin sonuçlarının kolokeyşın yöntemlerinden daha iyi olduğu tablodan gözlemlenebilir. kuintic B-spline Galerkin, kuadratic B-spline Galerkin, B-spline kubic kolokeyşın , kuartic B-spline Galerkin, Kübik B-spline diferential quadrature ve septic B-spline kolokeyşın metodlarının L_2 normunun aynı olduğu tablodan görülmektedir. Kubik en küçük kareler yönteminin L_2 normu en küçüktür. Kuadratik en küçük kareler ve kuadratik kolokeyşın metodlarının kullanımı ile elde edilen L_2 hata normu en büyüktür. Kuintic B-spline Galerkin, kuadratik B-spline Galerkin, kübic B-spline diferensiyel kuadrature, kuadratik B-spline Galerkin ve septic B-spline kolokeyşın yöntemleri için L_∞ normu aynıdır. B-spline Kuadratik Galerkin ve kübic B-spline en küçük kareler yöntemleri için L_∞ normu daha büyüktür. B-spline en küçük kareler yöntemi dışında bütün yöntemlerde korunum değişmezlerinin ilk üç rakamı aynı elde edilmiştir. B-spline fonksiyon kullanımı ile inşa edilen yaklaşık yöntemler genel olarak RLW denkleminin çözümümde güvenilir sonuçlar verdiği sonucuna varılabilir. Genel olarak B-spline kolekeyşin yönteminin B-spline Galerkin yöntemine göre algoritması kolay ve az maliyetlidir. Fakat B-spline Galerkin yöntemlerinin diferansiyel denklem çözümlerinde daha iyi sonuçlar verdiği ifade edilebilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Alexander, M. E. and Morris, J. LL, 1979, Galerkin methods applied to some model equations for non-linear dispersive Waves, J. Comput. Physics., 30, 428-451.

Raslan, K.R. , 2005, A computational method for the regularized long wave (RLW) equation, Appl. Math. Comput. 167 , 1101–1118.

Benjamin, T. B., Bona, J. L. and Mahony, J. J., 1972, Model equations for long waves in non-linear dispersive systems, Phil. Trans. Roy. Soc., London, A272, 47-78.

Bhardwaj, D. and Shankar, R., 2000, A computational method for regularised long wave equation, Comp. Math. Appl., 40, 1397-1404.

Dağ, İ., 2000, Least-squares quadratic B-spline finite element method for the regularised long wave equation, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 182, 205-215.

Dağ, İ. and Özer, N., 2001, Approximation of the RLW equation by the least square cubic B-spline finite element method, Applied Mathematical Modelling, 25, 221-231.

Dağ, İ. , Doğan, A. and Saka, B. , 2003, B-Spline Collacation Methods for Numerical Solutions of the RLW Equation, Intern. J. Computer Math. ,80, 743-757.

Dağ, İ. , Saka, B. and Irk, D. , 2004, Application of cubic B-splines for numerical solution of the RLW equation, Appl. Math. Comput. 15 2 ,373-389.

Dağ, İ., Saka, B. and Irk,D., 2006, Galerkin method for the numerical solution of the RLW equation using quintic B-splines, Journal of Computational and Applied Mathematics, 190, 532-547.

Doğan, A, 2001, Numerical solution of regularized long wave equation using Petrov-Galerkin method, Comm. Numer. Methods Eng., 17, 485-494.

Doğan, A. 2002, Numerical solution of RLW equation using linear finite elements within Galerkin's method, Applied Mathematical Modelling, 26 (7), 771-783.

Eilbeck, J. C and McGuire, G. R., 1975, Numerical study of the RLW equation I: Numerical Methods, J. Comput. Physics., 19, 43-57.

Eilbeck, J. C and McGuire, G. R., 1977, Numerical study of the RLW equation II: Interaction of Solitary Waves, J. Comput. Physics., 23, 63-73.

Gardner, L.R.T. and Dağ, İ., 1995, Boundary-Forced Regularised Long-wave Equation, Il Nuova Cımento, 110B,N. 12, 1487-1496.

Gardner, L.R.T., Gardner, G.A. and Dağ, İ. , 1995, A B-Spline finite element method for the regularızed long wave equation, Communications In Numerical Methods In Engineering, 11, 59-68.

Gardner, L. R. T., Gardner, G. A. and Dağ, İ., 1995, A B-spline Finite element method for the Regularized long wave Equation, Commum. Numer. Methods Eng.,11, 59-68.

Gardner, L. R. T., Gardner, G. A. and Doğan, A., 1996, A least squares finite element scheme for the RLWequation, Commun. Numer.Meth. En. 12, 795–804.

Hamıd, N.N.A., Majıd, A.A. and Ismaıl, A.I.M., 2011, Extended Cubic B-spline Method for Linear Two-Point Boundary Value Problems, Sains Malaysiana, 40, 11, 1285-1290.

Höllig, K., 2003, Finite element methods with B-splines, Society for Industrial & Applied Mathematics, 145 p.

Jain, P. C., Shankar, R. and Singh, T. V., 1993, Numerical solution of regularized long-wave equation, Commum. Numer., Methods Eng., 9, 579-586.

Korkmaz, A. and Dağ, İ., 2012, Numerical Simulations of Boundary-Forced RLW Equation with Cubic B-Spline-based Differential Quadrature Methods, Arab J Sci Eng, 38, 1151-1160.

Korkmaz, A., 2010, Bazı tek boyutlu kısmi türevli diferansiyel denklemlerin B-spline diferansiyel quadrature metotlar ile sayısal çözümleri, Doktora tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 21s.

Kutluay, S. and Esen, A., 2006, A finite difference solution of the regularized long wave equation, Math. Probl. Eng., 1–14.

Olver, P. J., 1979, Euler operators and cnservation laws of the BBM equation, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 85, 143-159.

Peregrine, D. H, 1966, Calculations of the development of an undular bore, J. Fluid.Mech. 25 (2), 321-330.

Prenter, P. M., 1975, Splines and variational methods, John Wiley&Sons, 336 p.

Saka, B. , 2002, RLW ve K-S Denklemklerinin B-Spline Kolokeyşin Metodları ile Çözümleri, Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,14s.

Saka, B. and Dağ, İ. , 2006, Quartic B-Spline Collacation Algorithms for Numerical Solution of the RLW Equation, Wiley InterScience.

Saka, B. and Dağ, İ. , 2008, A numerical solution of the RLW equation by Galerkin method using quartic B-splines, Commun. Numer. Meth. Engng., 24, 1339-1361.

Saka, B., Şahin, A. and Dağ, İ. , 2009, B-Spline Collocation Algorithms for Numerical Solution of the RLW Equation, Willey Online Library.

Shu, C., 2000, Differential Quadrature and its Application in Engineering, Springer-Verlag London Limited.