Bazı Geometrik Konfigürasyonlar

Yasin Taban

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı

Haziran 2022

Some Geometric Configurations

Yasin Taban

MASTER OF SCIENCE THESIS

Mathematic - Computer Science Department

June 2022

Bazı Geometrik Konfigürasyonlar

Yasin Taban

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Ayşe Bayar

Haziran 2022

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Ayşe Bayar danışmanlığında hazırlamış olduğum "**Bazı Geometrik Konfigürasyonlar**" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 13/06/2022

Yasin Taban

ÖZET

Bu tezde nokta ve doğruların konfigürasyonları, simetrik konfigürasyonlar, 3-konfigürasyonlar, klasik 3-konfigürasyonlar ve geometrik konfigürasyonların kullanıldığı modellemeler çalışılmıştır.

Sekiz bölümden oluşan bu tezin birinci bölümde geometrik konfigürasyonların geometrideki yeri ve tarihsel gelişimi, ikinci bölümde literatür araştırması incelenmiştir. Üçüncü bölümde geometrik konfigürasyonlarla ilgili temel kavramlar verilmiştir. Çalışmanın dördüncü bölümünde nokta ve doğruların konfigürasyonunun tanımı, simetrik konfigürasyon tanımı, konfigürasyon örnekleri, konfigürasyonların gösterimleri ve bazı klasik konfigürasyon teoremleri verilmiştir. Beşinci bölümde ise 3-konfigürasyonlar ve klasik 3-konfigürasyonlar olan Fano, Mobius-Kantor, Pappus, Desargues, Cremona-Richmond konfigürasyonlarının tabloları, gösterim şekillleri, inşa edilmeleri, Levi grafları ve genelleştirilmiş Petersen grafları incelenmiştir. Altıncı bölümde çözümlerinde geometrik konfigürasyonların kullanıldığı problemler tasarlanıp sunulmuştur. Yedinci bölümde çalışma sonucunda elde edilen bulgular verilmiştir. Son bölümde ise çalışmanın sonuç ve önerileri sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler : Geometrik konfigürasyon, Simetrik konfigürasyon, 3-konfigürasyon, Fano, Mobius-Kantor, Pappus, Desargues, Cremona-Richmond

SUMMARY

In this thesis, configurations of points and lines, symmetrical configurations, 3-configurations, classical 3-configurations and models using geometric configurations are studied.

The place and historical development of geometric configurations in geometry are given in the first part of this thesis, which consists of eight chapters, and in the second part, literature research is examined. In the third chapter, the basic concepts related to geometric configurations are given. In the fourth part of the study, the definition of the configuration of points and lines, the definition of symmetrical configuration, configuration examples, the representations of configurations and some classical configuration theorems are given. In the fifth chapter: 3-configurations and Fano, Mobius-Kantor, Pappus, Desargues, Cremona-Richmond from classical 3-configurations and their configuration tables, representations, constructions, Levi graphs and generalized Petersen graphs are examined. In the sixth chapter, the problems such that geometric configurations are used in their solutions are designed and presented. In the seventh chapter, the findings obtained as a result of the study are given. In the last section, the results and recommendations of the study are presented.

Keywords: Geometric Configuration, Symetric Configuration, 3-Configuration, Fano, Mobius-Kantor, Pappus, Desargues, Cremona-Richmond.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET . . . . . **v**

SUMMARY . . . . . **vi**

İÇİNDEKİLER . . . . . **vii**

ŞEKİLLER DİZİNİ . . . . . **ix**

ÇİZELGELER DİZİNİ . . . . . **xi**

1. GİRİŞ VE AMAÇ **1**

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI **5**

3. TEMEL KAVRAMLAR **6**
3.1. Incidence Geometri 6
3.2. Afin Düzlemler 6
3.3. Projektif Düzlem 8
3.4. Topoloji 8
3.5. Graflar 10

4. NOKTA VE DOĞRULARIN KONFİGÜRASYONU **16**
4.1. Temel Konfigürasyonlar 16
4.2. Simetrik Konfigürasyonlar 17
4.3. Bazı Konfigürasyonlar 17
4.3.1. $(6_2, 4_3)$ Pasch Konfigürasyonu 17
4.3.2. $(9_4, 12_3)$ Hesse Konfigürasyonu 18
4.3.3. (21_4) Grünbaum-Rigby Konfigürasyonu 18
4.4. Konfigürasyonların Gösterimi 19
4.5. Bazı Klasik Konfigürasyon Teoremleri 24
4.5.1. Pascal Teoremi 24
4.5.2. Pappus Teoremi 29
4.5.3. Dezargues Teoremi 31

5. 3-KONFİGÜRASYONLAR **34**
5.1. Klasik 3-Konfigürasyonlar 35
5.1.1. (7_3) Fano Konfigürasyonu 35

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

5.1.1.1. GF(q) cismi üzerinde Fano Düzleminin inşaası 36
5.1.2. (8_3) Mobius-Kantor Konfigürasyonu 37
5.1.2.1. (8_3) Konfigürasyonunun inşası 42
5.1.3. (9_3) Pappus Konfigürasyonu 43
5.1.3.1. Bağımsız 5 nokta ile Pappus konfigürasyonunun inşası . 47
5.1.4. (10_3) Desargues Konfigürasyonu 48
5.1.5. (15_3) Cremona-Richmond Konfigürasyonu 51
5.2. (n_3) Konfigürasyonlarının Sayıları 53
5.3. Klasik olmayan 3-konfigürasyon Örnekleri 54

6. GEOMETRİK KONFİGÜRASYON UYGULAMALARI 59
6.1. Afin Düzlem ve $(9_4, 12_3)$ Konfigürasyonu ile Modellenen Bir Aşı Uygulaması 59
6.2. (13_4) Konfigürasyonu ile Bir Yarışmanın Gruplarının Modellenmesi 63
6.3. (7_3) Fano Konfigürasyonu ile Modellenen Kura Uygulaması 65
6.4. 14 Girdili Bir Kura Problemin Çözümünün (7_3) Fano Konfigürasyonu ile Modellenmesi 67

7. BULGULAR VE TARTIŞMA 69

8. SONUÇ VE ÖNERİLER 70

KAYNAKLAR DİZİNİ 71

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil		Sayfa
3.1	köşeleri m, n, p, q ve r olan bir graf örneği	10
3.2	dereceleri 1, 2, 3 ve 5 olan regüler graflar	11
3.3	Petersen Graflar	12
3.4	K_6 Tam Grafı	12
3.5	Bir G grafı ve ilişki (incidence) matrisi	13
3.6	Bir G grafı ve komşuluk (adjacency) matrisi	13
3.7	İki parçalı olarak ayrılabilen graf örneği	14
3.8	Fano düzlemi ve Levi grafı	15
4.1	$(6_2, 4_3)$ Pasch Konfigürasyonu	17
4.2	$(9_4, 12_3)$ Hesse Konfigürasyonu	18
4.3	Grünbaum-Rigby (21_4) Konfigürasyonu	19
4.4	$(16_3, 12_4)$ Konfigürasyonu	20
4.5	Şekil 4.4'ün Dual Konfigürasyonu	21
4.6	Çizelge 4.3 te verilen (10_3) Konfigürasyonu	23
4.7	Çizelge 4.4'te verilen (10_3) Konfigürasyonunun Levi Grafı	24
4.8	Elips üzerinde Pascal Doğrusu	25
4.9	Çember üzerinde Pascal Doğrusu	25
4.10	Parabol üzerinde Pascal Doğrusu	26
4.11	Hiperbol üzerinde Pascal Doğrusu	27
4.12	Menelaus Teoremi	27
4.13	Pappus Teoremi	29
4.14	Pappus Teoremi İspatı	31
4.15	Bir noktadan ve bir eksenden perspektif üçgenler	32
4.16	Desargues Teoremi	33
5.1	(7_3) Fano Konfigürasyonu	36
5.2	(7_3) Fano Konfigürasyonu Levi Grafı	38
5.3	(7_3) Fano Konfigürasyonu inşası-1	38
5.4	(7_3) Fano Konfigürasyonu inşası-2	39
5.5	(7_3) Fano Konfigürasyonu inşası-3	39
5.6	(8_3) Mobius-Kantor Konfigürasyonu	40
5.7	(8_3) Mobius-Kantor Konfigürasyonunun farklı bir gösterimi	41
5.8	(8_3) Mobius-Kantor konfigürasyonunun Levi grafının içi içe geçmiş küpler ile gösterimi	42

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

Şekil		Sayfa
5.9	(8_3) Mobius-Kantor Konfigürasyonunun Levi Grafı	43
5.10	(8_3) Mobius-Kantor Konfigürasyonunun Genelleştirilmiş Petersen Grafı	43
5.11	(8_3) Mobius-Kantor Konfigürasyonunun İnşası	44
5.12	(9_3) Pappus Konfigürasyonu	46
5.13	(9_3) Pappus Konfigürasyonu Levi Grafı	46
5.14	Düzlemde rastgele seçilen 5 nokta ile P2P5 ve P3P4 doğrularının alınması	47
5.15	P7 ve P9 noktalarının belirlenmesi	47
5.16	P6 ve P8 noktalarının belirlenmesi	48
5.17	Seçilen 5 nokta ile farklı Pappus Konfigürasyonları	48
5.18	(10_3) Desargues Konfigürasyonu	50
5.19	(10_3) Desargues Konfigürasyonu Levi Grafı	51
5.20	(10_3) Desargues Konfigürasyonu Genelleştirilmiş Petersen Grafı	52
5.21	(15_3) Cremona-Richmond Konfigürasyonu	53
5.22	(15_3) Cremona-Richmond Konfigürasyonu Levi Grafı	55
5.23	(11_3) Konfigürasyonu	55
5.24	(12_3) Konfigürasyonu	56
5.25	(14_3) Konfigürasyonu	56
5.26	(17_3) Konfigürasyonu	57
5.27	(18_3) Konfigürasyonu	57
5.28	(22_3) Konfigürasyonu	58
5.29	(27_3) Konfigürasyonu	58
6.1	Aşı örneği uygulama safhaları ve dozaj miktarlarının nokta olarak tanımlaması	60
6.2	Uygulama safhalarında farklı dozaj uygulandığında her uygulama seviyesinde elde edilen sonuçlar	60
6.3	Uygulama safhalarında aynı dozaj uygulandığında elde edilen sonuçlar	61
6.4	Farklı uygulama safhalarında farklı dozajlar uygulandığında her uygulama seviyesinde elde edilen sonuçlar	61
6.5	Tüm sonuçların tek şekil üzerinde değerlendirilmesi	62
6.6	13 yarışmacı ve 13 grup ile elde edilen (13_4) konfigürasyon örneği	64
6.7	(7_3) Fano konfigürasyonunun noktalarının çift sayılarak 14 nokta olarak kabulu	68

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge **Sayfa**

4.1 Şekil 4.4'te verilen $(16_3, 12_4)$ konfigürasyonunun konfigürasyon tablosu 20
4.2 Şekil 4.4'te ve Çizelge 4.1'de verilen $(16_3, 12_4)$ konfigürasyonunun dual konfigürasyon tablosu 21
4.3 (10_3) konfigürasyon tablosu 22
4.4 (10_3) Levi Incedence tablosu 22

5.1 $n \leq 6$ konfigürasyon oluşturma çizelgesi 34
5.2 $n \geq 7$ kombinatoryal konfigürasyon oluşturma çizelgesi 35
5.3 (7_3) Fano konfigürasyonu 36
5.4 (7_3) Fano konfigürasyonu üzerinde bulunma tablosu 37
5.5 (7_3) Fano konfigürasyonu ilişki matrisi 37
5.6 (8_3) Mobius-Kantor konfigürasyonu 40
5.7 (8_3) Mobius-Kantor konfigürasyonu üzerinde bulunma tablosu 41
5.8 (9_3) Pappus konfigürasyonu 44
5.9 (9_3) Pappus konfigürasyonu üzerinde bulunma tablosu 45
5.10 (10_3) kombinatoryal konfigürasyon tablosu 49
5.11 (10_3) Desargues konfigürasyon tablosu 50
5.12 (10_3) Desargues konfigürasyonu üzerinde bulunma tablosu 51
5.13 (15_3) konfigürasyon tablosu 53
5.14 (15_3) Cremona-Richmond konfigürasyonu üzerinde bulunma tablosu 54
5.15 (n_3) konfigürasyonların sayısı 54

6.1 Yarışmacıların gruplarının belirlendiği tablo 63
6.2 A ve B yarışmacılarının günlere göre rakam seçim tablosu örneği 65
6.3 14 nokta ile Fano konfigürasyonunun düzenlenmesi 67

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Geometrinin başlangıcı Antik Yunan dönemine dayandırılsa da daha önceki dönemlerde de geometrinin kullanıldığı, arkeolojik buluntularda Babiller, Mezopotamyalılar, Çin ve Mısırlıların da geometriyi kullandığı görülmektedir.

Birçok kaynakta geometri sözcüğünün yine Yunancadan "geometrein" sözcüğünden geldiği belirtilmektedir. Burada geo'nun yer, metrein'in ise ölçme anlamında kullanıldığı kabul görmektedir. Bu tanımlama kabulüne göre geometri'nin arazi ölçümü ile başlangıç aldığı algısı kuvvetlenmektedir.

Günümüzde halen kullanımı yoğun olan ve ortaöğretim boyunca derslerde anlatılan Öklid Geometrisi'nin kaynak kitabı Elemanlar'ın yazarı İskenderiyeli Eucleides bu kitabı yazdığında M.Ö. 300 lü yıllardı. Öklid kendinden önceki dönemlerde yaşayan Thales ve Pisagor'dan aldığı 11 geometri bilgisini Aristoles'in postulatlar üzerine kurulmuş olan sistemi üzerinde inşa edip geliştirmiştir. (Heath, 1956)

Elemanlar, bir geometri, oranlar ve sayılar kuramı kitabıdır. Kitabın önemi, içerdiği geometri bilgilerinin yanı sıra bu bilgileri sistematik bir yapı içinde sunmasındandır. Her yeni bilgi sadece daha önce kanıtlanmış bilgiler kullanılarak ve belli bir akıl yürütme düzeni içinde kanıtlanır. İlk kanıtların dayanacağı daha önce yapılmış kanıtlar olmadığı için kitabın başında geometriye özgü beş belit ve akıl yürütmeye yarayacak beş ortak kavram sıralanır. Böylece kitaptaki tüm önermeler sıkı bir mantık zinciri içinde hep daha önceki sonuçlara dayanarak ve bu belitler ile ortak kavramlar kullanılarak geliştirilir. Kitabın bu belitsel yaklaşımı, Doğu ve Batı uygarlıklarını eşit düzeyde ve derinden etkilemiştir. Kitabın etkisi öyle güçlü olmuştur ki yazılmasının üzerinden ikibin yıldan fazla bir zaman geçmesine rağmen herhangi bir konuda yazılacak her kitap Elemanlar'ın yöntemiyle yazılmaya çalışılmaktadır. (Ertöz, 2019)

Öklid Geometrisi üç temel kavrama dayandırılmıştır: tanımlar, aksiyomlar ve postülatlar. Tanımlar, alışılan anlamda, yani kendine özgü bir takım özellikleri olan geometrik nesneleri belirlemek ya da diğerlerinden ayırmak için onlara kısa ad vermekten ibarettir. Bununla birlikte Öklid'in orijinal tanımlarında oldukça çok belirsizlik ve eksiklikler vardır. Örneğin, doğruyu tanımlayan "çizgi genişliği olmayan bir uzunluktur" ve " doğru her noktada kendisinin aynı kalan çizgidir" ifadeleri gerçekte doğru denilen çizgilerin varlığından söz etmektedir. Aksiyomlar, doğruluğundan şüphelenmeksizin ispatsız olarak kabul edilen temel önermelerdir. Postülatlar da aksiyomlar gibi ispatsız

kabul olunan ama doğruluklarına o zamanki anlayışa göre, aksiyomlar kadar kesin gözle bakılmayan temel önermelerdir (Kaya, 2005).

Günümüzde de geometride önemli yer tutan Öklidyen Geometrinin temelini oluşturan beş postulatı şöyledir;

1. Herhangi bir noktadan başka herhangi bir noktaya bir doğru çizilebilir.

2. Bir doğru istenildiği kadar yine bir doğru olacak şekilde uzatılabilir.

3. Herhangi bir merkez ve bir uzunluk verildiğinde bir çember çizilebilir.

4. Bütün dik açılar birbirine eşittir.

5. Eğer bir doğru iki doğruyu kestiğinde bu doğrunun aynı tarafındaki iç açılar iki dik açıdan küçükse bu iki doğru o yönde uzatıldıklarında kesişir. (Ertöz, 2019)

Buna göre 5. Postulat, bir doğruya paralel olan ve bu doğru dışında verilen bir noktadan geçen bir tek doğru vardır anlamındadır (Kaya, 2005).

Paralellik postulatı olan 5. Postulat'a uzun yıllar boyunca matematikçiler kuşku ile yaklaşmışlardır. Bu postulatın geçerliliği ispatlanmaya çalışılmış ama sonuç alınamamıştır. Paralelliğin olmayabileceği ile B.Riemann'a (1852-1856) yakın dönem matematikçilerin varsayımı olmuştur ama paralelliğin olmadığı ilk geometrinin geliştirilmesi Riemann tarafndan sağlanmıştır.

2000 yılı aşkın bir süre geçmesine rağmen farklı bir geometrinin olduğu ancak kabul görmüştür. Paralellik postulatının olmadığı tüm geometriler bundan sonra Öklidyen olmayan geometri olarak tanımlanmıştır. Bu bağlamda paralellik aksiyomunun olmadığı Afin, Projektif ve Hiperbolik Geometri birer Öklidyen olmayan geometri örnekleridir. Bu çalışmada da Öklid Geometrisine bağlı kalmadan nokta ve doğruların konfigürasyonları incelenecektir.

Konfigürasyon çalışmaları, klasik geometri olarak adlandırılan kombinatorik, topoloji, cebirsel geometri, hesaplama ve hatta analiz ve sayı teorisi gibi birçok alana dayanır. Birçok konfigürasyon türünde görsel bir çekicilik olması matematikçileri bu alanda çalışmaya yönlendirmiştir (Grünbaum, 2009).

Konfigürasyonların yapılandırmalarında sıkça baş vurduğumuz konik üzerine işaretlenen altı nokta ile elde edilen altıgeni kullanarak oluşturduğu ve bizim de Pascal Doğrusu olarak bildiğimiz doğrunun sahibi, Blaise Pascal (1623 - 1662) bahsi geçen doğruyu işaret eden Pascal Teoremini 1640 yılında, ilk mekanik hesap makinesini icat etmeden iki yıl önce teoremi içeren Essai Pour Les Coniques adlı küçük bir broşür yayınladığında henüz 16 yaşındaydı. Konik üzerindeki 6 farklı nokta dairesel sıralamada 60 farklı altıgen oluşumunu sağlar. Bu 60 altıgen ve 60 Pascal Doğrusu, Pascal'ın ardından Kirkman, Cayley, Steiner, Plucker ve Salmon tarafından incelenmiştir (Pisanski, Servatius 2010).

Bir asır önce açıklanan çalışmaların dışında çok daha önce başlatılan bu alanda uzun yıllar ön araştırmaya dayanmayan dikkat çekici çalışmalar vardı. Konfigürasyon yapılandırma çalışmalarının dikkat çekici yönü, sonuçlarının azlığıdır. 19. yüzyılın sonlarında ilk çalışma patlaması birkaç temel sonuç doğurdu. Neredeyse bir asırı bulan bir süreç geçmesine rağmen bu sonuçlar, karşılaştırılabilir derecede önemli yeni başarılarla eşleşmedi. Ancak 20. yüzyılın sonlarına doğru, ilk sonuçların yanlış olduğu ortaya çıktı ve bu, yeniden değerlendirilmiş bir konfigürasyon çalışması için itici gücün bir parçası haline geldi.

Konfigürasyonların incelenmesinde simetrilerin önemli bir rol oynayabileceğinin yakın zamanda anlaşılması, konfigürasyonlara ek bakış açıları sağlamıştır. Bilgisayar grafiğindeki gelişmelerle mümkün kılınan konfigürasyonları gerçekten görselleştirme becerisinin artmasıyla birlikte, eskiden yapılmış hataları düzeltmek ve geçmişte hiç düşünülmemiş konfigürasyonları incelemek için yenilenen çabalar için olanak oluşturuldu (Grünbaum, 2009).

Neden konfigürasyonlar? Konfigürasyonlar konusu, çeşitli nedenlerle çalışmaya değer gibi görünüyor. Pek çok büyük matematikçi konfigürasyonların gelişmesine katkıda bulundu. Konfigürasyonlar, çeşitli matematik disiplinlerinin kesişme noktasında bulunur. Günümüzde de kombinatoriklerin bir parçasını oluşturuyorlar, ancak kökenleri 19. yüzyılın geometrisinde yatıyor. Özellikle, projektif geometrinin eğrileri ve yüzeyleri, bazı önemli tarihsel konfigürasyonlara yol açar. Konfigürasyonlar, Levi grafikleri aracılığıyla grafik teorik bir bakış açısından incelenebilir. Simetriler, konfigürasyonların incelenmesinde önemli bir rol oynar. Modern kombinatoriklerin ana teması muhtemelen bizim görüşümüze göre çok dar bir yapı olan kombinatoryal tasarım kavramıdır. Geçmişte incelenen tüm konfigürasyonları anlamak istiyorsak, daha genel kombinatoryal yapıları dikkate almalıyız (Pisanski ve Servatius 2010).

Kombinatoryal tasarım teorisinin başlangıcı için 1850 yılına gidelim ve 1841 ile 1871 yılları arasında yayın hayatını devam ettiren Lady's and Gentleman's Diary isimli matematik dergisinde yayımlanması için Thomas Kirkman'ın gönderdiği probleme bir göz atalım. "Bir okuldaki on beş kız öğrenci, arka arkaya yedi gün boyunca üç kişilik gruplar halinde yan yana yürüyecektir. Kız öğrencilerden ikisi yan yana iki kez yürümeyecek şekilde nasıl sıralayabiliriz?". Elbette kombinatoryal matematik sorusu olarak görebileceğimiz bu problemin birden fazla çözümü vardır. 1910'da problem George Conwell tarafından Galois geometrisi kullanılarak ele alınmıştır. 15 noktası ve her doğrusu üzerinde 3 noktası bulunan bu yapı bir geometrik konfigürasyondur.

Yirminci yüzyılın ikinci yarısında grafik teorisi çalışmaları büyük artış gösterdi. Konfigürasyon yapılarının simetrileri, grup teorisi ve kombinatorikler arasında önemli bir bağlantı kurar. Konfigürasyonlarla ilgili ilk kitap, konfigürasyonların disiplinler arası doğasına işaret eden Friedrich Levi tarafından 1929'da yazılmıştır (Pisanski ve Servatius 2010).

Konfigürasyonlarla ilgili günümüze yakın çalışmalara ve sık sık kaynaklarına başvuracağımız çalışmaların sahipleri Branco Grümbaum , Tomaz Pisanski ve Brigitte Servatius'u öne çıkarabiliriz.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Her ne kadar günümüzdeki geometrik konfigürasyon tanımlaması kendi yaşadığı dönemde kullanılmasa da antik dönemin son temsilcilerinden olan Pappus'un teoremi, klasik geometrik konfigürasyonlardan bir tanesidir. Konfigürasyon kavramı, ilk kez 1876'da Theodor Reye tarafından kullanılsa da daha önceki dönem matematikçilerinden Blaise Pascal'ın (1623-1662) Pascal teoremi, Girard Desargues'ın (1591-1661) Desargues teoremi konfigürasyon inşalarında kullanılmıştır.

Daha geç dönem matematikçileri August Ferdinand Möbius (1790-1868), Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918), Gino Fano (1871-1952), Antonio Luigi Gaudenzio Giuseppe Cremona (1830–1903) ve Herbert William Richmond'un (1863-1918) çalışmaları klasik geometrik konfigürasyonu olarak değerlendirilmiştir.

Geometrik konfigürasyonların (p_q, n_k) biçiminde ifadesi ise ilk olarak 1992'de H.Gropp tarafından kullanılmıştır.

Nokta ve doğruların konfigürasyonları Branko Grünbaum 2009'da incelenmiş, klasik konfigürasyonlar ise Toma˘z Pisanski ve Brigitte Servatius tarafından 2013'te ele alınmıştır.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde Öklidyen olmayan geometrilerle ilgili temel kavramlar verilmiştir. Incidence Geometrisi, Afin Düzlem ve Projektif Düzlem, Topoloji, Graflar ve bazı graf türleri tanıtılmıştır.

3.1. Incidence Geometri

Bir incidence yapısı veya incidence sistemi nesneler (genellikle noktalar, doğrular ve düzlemler vb.) arasındaki belirli durumlardan oluşur (Moorhouse, 2007).

Bu çalışmada sadece nokta ve doğrular arasındaki belli durumları incelenmektedir.

Tanım 3.1.1. $\mathcal{N}$ noktalar kümesi, $\mathcal{D}$ doğrular kümesi ve $o \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{D}$ olmak üzere $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$ üçlüsüne bir **incidence yapısı** denir. o ise bir insidence bağıntısıdır (Dembowski, 1997).

o nın elemanları Flaglar olarak adlandırılır. N bir nokta ve d bir doğru olmak üzere eğer bir (N, d) ikilisi o bağıntısının bir elemanı ise N noktası d doğrusu üzerindedir veya d doğrusu N noktasından geçiyor (d doğrusu N noktası üzerinde) denir. Eğer bir (N, d) ikilisi o bağıntısının bir elemanı değil ise N noktası d doğrusu üzerinde değildir denir. Bu durumu $d\phi N$ ya da $N\phi d$ biçiminde göstereceğiz.

Öklid düzlemi gibi bir geometrik yapı uzunluk, açılar, süreklilik ve aralık gibi bir çok karmaşık kavramı içeren bir nesnedir. Bir incidence yapısı ise bu kavramlar kaldırıldığında elde edilen yapıdır. Geriye kalan tek şey aslında hangi noktaların hangi doğrular üzerinde olduğu veya hangi doğruların hangi noktalardan geçtiği hakkındaki verilerdir. Bu kısıtlamalar altında bile teoremler ispatlanabilmekte ve zengin bir geometri oluşturulabilmektedir.

3.2. Afin Düzlemler

Tanım 3.2.1. $\mathcal{N}$ noktalar kümesi, $\mathcal{D}$ doğrular kümesi ve $o \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{D}$ olmak üzere $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$ üçlüsü ile gösterdiğimiz geometrik yapıyı temel alalım.

$N_1, N_2, N_3, ... \in \mathcal{N}$ noktaları için $N_i o d, i = 1, 2, 3, ...$ olacak şekilde bir $d \in \mathcal{D}$ doğrusu varsa bu noktalara **doğrudaş noktalar**,

$d_1, d_2, d_3, ... \in \mathcal{D}$ doğruları için $d_i o N, i = 1, 2, 3, ...$ olacak şekilde bir $N \in \mathcal{N}$ noktası varsa bu doğrulara **noktadaş doğrular**,

$d_1, d_2 \in \mathcal{D}$ ve $d_1 \neq d_2$ olsun. Eğer Nod_1 ve Nod_2 olacak şekilde bir $N \in \mathcal{N}$ noktası yoksa d_1, d_2 doğrularına **paralel doğrular** denir. c ve d doğruları paralel ise $c//d$ biçiminde gösterilecektir.

Tanım 3.2.2. $\mathcal{N}$ noktalar kümesi, $\mathcal{D}$ doğrular kümesi ve $o \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{D}$ olmak üzere $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$ üçlüsü ile gösterdiğimiz geometrik yapı üzerinde aşağıda verilen A_1, A_2 ve A_3 aksiyomlarını sağlanıyorsa $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$ sistemine **Afin Düzlem** denir.

A1. Her $M, N \in \mathcal{N}, M \neq N$ noktaları için Mod ve Nod olacak şekilde bir tek $d \in \mathcal{D}$ doğrusu vardır.

A2. No/d olmak üzere her $N \in \mathcal{N}$ ve $d \in \mathcal{D}$ için Noc ve $c//d$ olacak şekilde bir tek $c \in \mathcal{D}$ doğrusu vardır.

A3. Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.

A1 aksiyomu farklı iki noktayı birleştiren yalnız bir doğru olduğunu ifade eder. Farklı M ve N noktaları tek bir doğru belirtir ve bu doğru M ve N noktalarını birleştiren doğrudur. M ve N noktalarını birleştiren doğruyu MN veya $M \cup N$ biçiminde gösterilir.

Teorem 3.2.1. Her sonlu A Afin düzlemi için aşağıdaki koşulları sağlayan bir $n \geq 2$ tamsayısı vardır. Bu tam sayıya A nın **mertebesi** denir.

(i:) A nın her doğrusu üzerinde tam olarak n tane nokta bulunur.

(ii:) A nın her noktası tam olarak $n + 1$ tane doğru üzerindedir.

(iii:) A nın toplam nokta sayısı n^2 tanedir.

(iiii:) A nın toplam doğru sayısı $n^2 + n$ tanedir.

3.3. Projektif Düzlem

Tanım 3.3.1. $\mathcal{N}$ noktalar kümesi, $\mathcal{D}$ doğrular kümesi ve $o \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{D}$ olmak üzere $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$ üçlüsü ile gösterdiğimiz geometrik yapı üzerinde aşağıda verilen P_1, P_2 ve P_3 aksiyomlarını sağlanıyorsa $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$ sistemine **Projektif Düzlem** denir.

P1. Her $M, N \in \mathcal{N}, M \neq [N]$ noktaları için Mod ve Nod olacak şekilde bir tek $d \in \mathcal{D}$ doğrusu vardır.

P2. Her $c, d \in \mathcal{D}$ için Noc ve Nod olacak şekilde en az bir $N \in \mathcal{N}$ noktası vardır.

P3. Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır (Kaya, 2005).

Projektif düzlemi P ile göstereceğiz.

Teorem 3.3.1. Her sonlu $P = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$ Projektif düzlemi için aşağıdaki koşulları sağlayan bir $n \geq 2$ tamsayısı vardır. Bu tam sayıya P nın mertebesi denir.

(1) P nın her doğrusu üzerinde tam olarak $n + 1$ tane nokta bulunur.

(2) P nın her noktası tam olarak $n + 1$ tane doğru üzerindedir.

(3) P nın toplam nokta sayısı $n^2 + n + 1$ tanedir.

(4) P nın toplam doğru sayısı $n^2 + n + 1$ tanedir.

3.4. Topoloji

Topoloji bir kaç dala sahip matematiğin anadallarından biridir. Sahip olduğu dallardan başlıcaları genel topoloji (nokta-küme topolojisi), cebirsel topoloji ve diferansiyel topoloji sayılabilir. Bu çalışmada ise sadece genel topolojiye değinilecektir.

Tanım 3.4.1. Bir E kümesinin tüm alt kümelerinin oluşturduğu kümeye E 'nin **kuvvet kumesi** denir ve $P(E)$ ile gösterilir.

X bir küme ve $\tau \in P(X)$ olsun. Eğer;

T1) $\oslash, X \in \tau$

T2) $A, B \in \tau \implies A \cap B \in \tau$.

T3)

$$(A_i)_{i\in I}, A_i \in \tau \implies \bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$$

koşulları sağlanıyorsa τ ya X üzerinde bir topoloji denir (Özdamar ve Görgülü, 1986).

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesi üzerinde,

$\tau_1 = \{X, \oslash, \{1\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}\}$,

$\tau_2 = \{X, \oslash, \{1\}, \{6\}, \{1, 6\}, \{1, 3, 6\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}$,

$\tau_3 = \{X, \oslash, \{1\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 5\}$,

şeklinde tanımlı τ_1, τ_2, τ_3 ün X üzerinde bir topoloji olup olmadığını inceleyelim.

τ_1; T1, T2 ve T3 ü sağladığınan X üzerinde bir topolojidir.

τ_2 de ise $\{1, 3, 5\} \in \tau_2$ ve $\{2, 3, 5\} \in \tau_2$ iken

$\{1, 3, 5\} \cap \{2, 3, 5\} = \{3, 5\} \notin \tau_2$

olduğundan τ_2 , X üzerinde bir topoloji değildir.

τ_3 de ise $\{3, 4\} \in \tau_3$ ve $\{1, 3, 5\} \in \tau_3$ iken

$\{1, 3, 5\} \cup \{2, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 5\} \notin \tau_3$

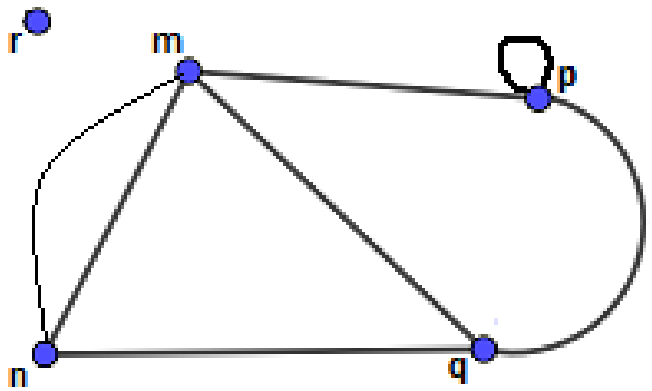
olduğundan τ_3 , X üzerinde bir topoloji değildir.

Tanım 3.4.2. X kümesi üzerinde bir topoloji τ olsun. (X, τ) ikilisine bir **Topolojik Uzay** denir ve τ nun elemanlarına **Açık Küme**' ler denir. X kümesinin elemanlarına da (X, τ) uzayının **Nokta**'ları denir.

3.5. Graflar

Tanım 3.5.1. D, elemanları düğümler (vertices) olarak adlandırılan boştan farklı bir küme ve A da elemanları ayrıtlar (edges) olarak adlandırılan ve D nin bir ya da iki elemanlı alt kümelerinden biri ile eşleştirilebilen bir küme olsun. Bu şekilde tanımlanan $G = (D, A)$ ikilisine **graf (graph)** adı verilir.

Köşeleri $D = \{m, n, p, q, r\}$ kümesinin elemanlarından oluşan ve ayrıtları ise $A = \{(m, n)_1, (m, n)_2, (n, q), (m, q), (m, p), (p, q), (p, p)\}$ kümesinin elemanları olan bir graf örneği Şekil 3.1'de görülmektedir.



Şekil 3.1 köşeleri m, n, p, q ve r olan bir graf örneği

Bir grafta bir düğümü kendisi ile eşleştiren ayrıtlara döngü (loop) denir. Şekil 3.1'deki (p, p) ayrıtı bir döngüdür.

Bir grafta aynı iki düğüm çiftini eşleştiren ayrıtlara katlı veya paralel ayrıtlar denir. Şekil 3.1'deki $(m, n)_1$ ve $(m, n)_2$ ayrıtları katlı ayrıtlardır (Aldous ve Wilson, 2005).

Tanım 3.5.2. Katlı ayrıtlar ya da döngü bulunduran graflar **pseudo graf**, sadece katlı ayrıtlar içeren graflar **çoklu (multi) graf**, katlı ayrıt ve döngü içermeyen graflar **basit (simple) graf** olarak isimlendirilir. Ayrıt bağlantısı olmayan düğümlere ayrık veya tekil düğüm denir. Şekil 3.1'deki örnekte r düğümü bir ayrık düğümdür.

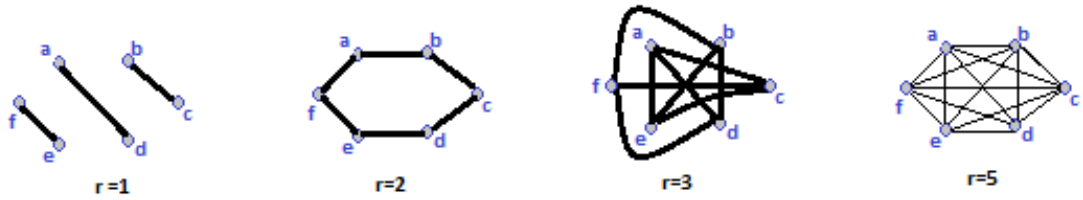
Tanım 3.5.3. Düğüm sayısı ve ayrıt sayısı sonlu olan graflara **sonlu graf**, bir graftaki düğüm sayısına grafın mertebesi, ayrıt sayısına ise grafın boyutu denir. n mertebeli ve n boyutlu bir sonlu graf $G(n, m)$ biçiminde gösterilir.

Tanım 3.5.4. Bir graf üzerindeki bir düğüme gelen ayrıtlar toplamı o düğümün **derecesidir**. Her ayrıt düğüme bir derece kazandırırken döngüler düğüme iki derece kazandırır. m düğümünün derecesi $deg(m)$ ile gösterilir.

Şekil 3.1'deki graf örneğinde verilen düğümlerin dereceleri sırasıyla, $deg(m) = 4$, $deg(n) = 3$, $deg(p) = 4$, $deg(q) = 3$, $deg(r) = 0$ şeklinde olacaktır.

Bir grafın tüm düğümlerinin dereceleri büyükten küçüğe doğru dizilerek oluşturulan diziye o grafın **derece dizisi** denir. Şekil 3.1'deki grafın derece dizisi $(4, 4, 3, 3, 0)$ dır.

Eğer bir grafın tüm düğümlerinin dereceleri r ise grafa **r-regüler graf** denir. Şekil 3.2'de r =1, r =2, r =3 ve r =5 için regüler graf örnekleri verilmiştir.



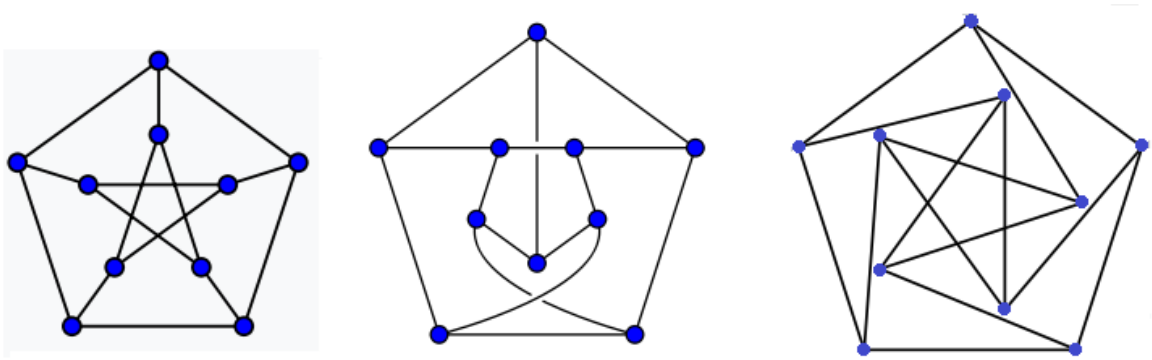
Şekil 3.2 dereceleri 1, 2, 3 ve 5 olan regüler graflar

Tanım 3.5.5. 3-regüler graflar **kübik graf** olarak adlandırılır. Julius Petersen (1839-1910) tarafından bulunan Petersen Grafları kübik graf örnekleridir. Şekil 3.3'te Petersen Grafları görülmektedir.

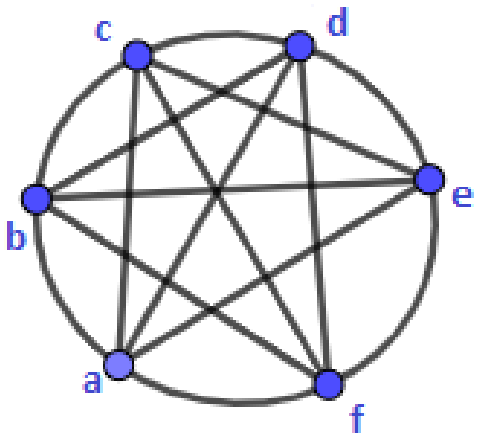
Tanım 3.5.6. $n \geq 3$ olmak üzere; n tane düğüm içeren bir grafın tüm düğümleri diğer düğümlere bir ayrıt ile bağlı ise **tam (Complete) Graf** denir. n tane düğüm içeren bir tam graf K_n ile gösterilir. Şekil 3.4'te bir K_6 grafı gösterilmiştir. n tane düğüm sayısı olan bir tam graftaki ayrıt sayısı;

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

tanedir.

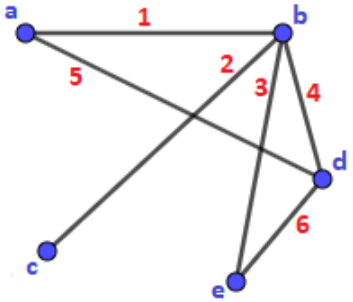


Şekil 3.3 Petersen Graflar



Şekil 3.4 K_6 Tam Grafı

Tanım 3.5.7. Köşe ve ayrıt sayıları sonlu sayıda olan graflar sonlu graf olarak isimlendirilmektedir. Sonlu bir G grafında n tane düğüm ve m tane ayrıt olsun. nxm boyutlu bir matriste düğümleri satırlara, ayrıtları ise sütunlara yerleştirdiğimizde bir düğüm ve bir ayrıt ilişkilendirilmiş (bağlı) ise o düğüm ve ayrıtın matriste kesiştikleri yere 1, ilişkilendirilmemiş ise 0 değeri yazılarak elde edilen düğümler ile ayrıtlar arasındaki ilişkiyi gösteren bu matrise **ilişki (incidence) matrisi** denir. Satırlardaki 1 lerin toplamı ait olduğu satırdaki düğümün derecesini verir. Şekil 3.5'te bir graf örneği ve ilişki (incidence) matrisi gösterilmiştir.



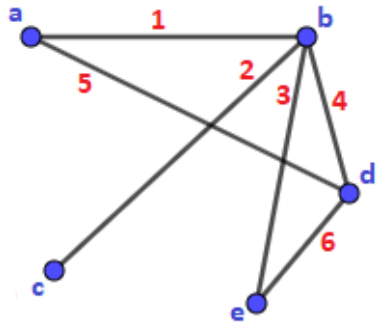
G grafı

	1	2	3	4	5	6
a	1	0	0	0	1	0
b	1	1	1	1	0	0
c	0	1	0	0	0	0
d	0	0	0	1	1	1
e	0	0	1	0	0	1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Şekil 3.5 Bir G grafı ve ilişki (incidence) matrisi

Tanım 3.5.8. n tane düğüme sahip olan sonlu bir G matrisinde düğümler arasındaki ilişkiyi gösteren matrise **bitişiklik (adjacency) matrisi** denir. Bu matrisin satırları ve sütunları düğümlerden oluşacağından nxn tipinde bir kare matris oluşacaktır. Birbirlerine bir ayrıt ile bağlı olan düğümlerin matriste kesiştikleri hücre değeri bağlı oldukları ayrıt sayısı kadardır. Herhangi bir ayrıt ile bağlı olmayan düğümlerin kesiştikleri hücre değerleri ise 0 olacaktır. Şekil 3.5'te kullanılan G grafı ile elde edilen komşuluk (adjacency) matrisi Şekil 3.6'da gösterilmiştir. Komşuluk matrisi simetrik bir matristir. Yani matris transpozu ile aynıdır. Düğümlerin derecesini bulmak için ilgili satır veya sütunlardaki 1 değerleri toplanır (Bondy J.A., Morty U.S.R. 1985).



G grafı

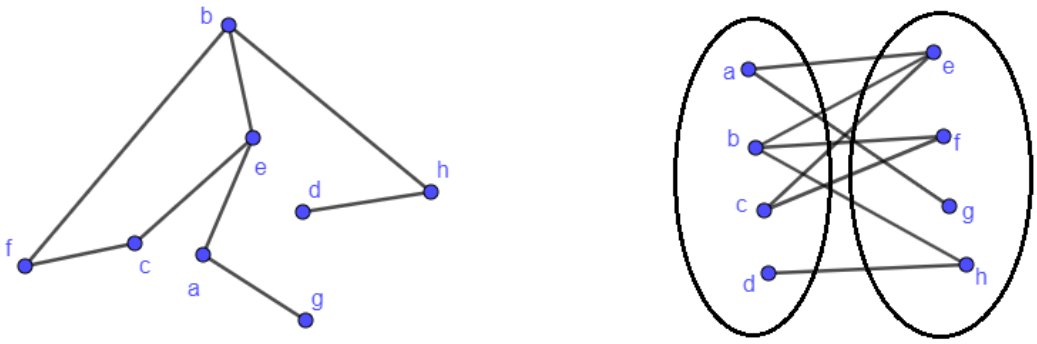
	a	b	c	d	e
a	0	1	0	1	0
b	1	0	1	1	1
c	0	1	0	0	0
d	1	1	0	0	1
e	0	1	0	1	0

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Şekil 3.6 Bir G grafı ve komşuluk (adjacency) matrisi

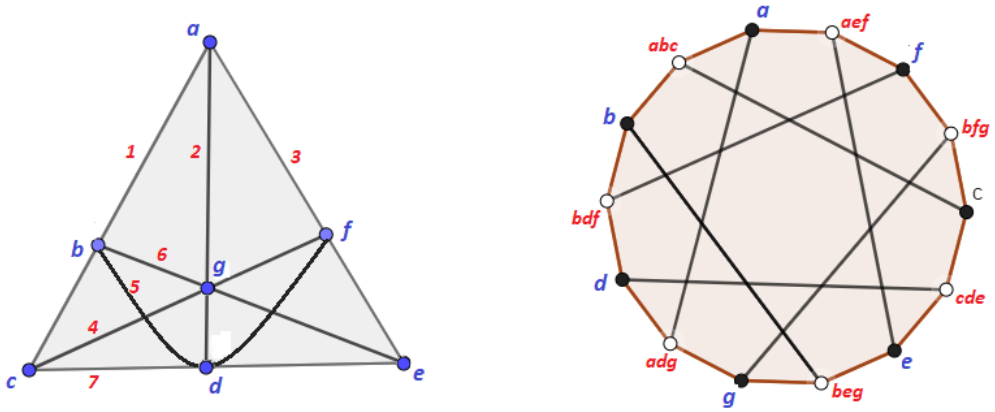
Tanım 3.5.9. Bir grafta o grafı oluşturan düğümler, kendi kümesindeki düğümleri birleştiren herhangi bir ayrıt içermeyecek ve sadece diğer kümenin düğümleri ile

birleştirilerek elde edilmiş ayrıtlara sahip olacak şekilde iki farklı kümenin elemanları olarak yazılabiliyorsa grafa **iki parçalı (bipartite) graf** denir. Şekil 3.7'de iki parçalı (bipartite) graf örneği görülmektedir. Düğümler iki farklı kümeye ayrılmış ve bu ayrımdan sonra aynı küme içinde yer alan düğümler arasında herhangi bir ayrıt bulunmamaktadır.



Şekil 3.7 İki parçalı olarak ayrılabilen graf örneği

Tanım 3.5.10. İki parçalı bir grafta düğümleri siyah nokta, ayrıtları da beyaz noktalarla düğüm olarak kabul ettiğimizde grafımızda düğümleri birleşimini gösteren ayrıtlar kalmayacaktır. Siyah noktalarla gösterilen düğümler, beyaz noktalarla gösterilen ayrıtlarla bağlanacaklardır. Bu bağlantılara **Levi Kenarları** denir. Elde edilen grafa da **Levi Graf** denir (Grünbaum, 2009). Levi Graf ismini ilk olarak onlar hakkında 1942'de yazan Friedrich Wilhelm Daniel Levi'den almıştır. Şekil 3.8'de bir graf (Fano Düzlemi) ve bu grafın bir Levi Graf örneği gösterilmiştir.



Şekil 3.8 Fano düzlemi ve Levi grafı

4. NOKTA VE DOĞRULARIN KONFİGÜRASYONU

Bu bölümde nokta ve doğruların konfigürasyonu ile ilgili temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Nokta ve doğruların konfigürasyonu kavramı konusu ele alındığında temel olarak konfigürasyondaki toplam nokta ve toplam doğru sayısı, doğru üzerindeki nokta sayısı, bir noktada kesişen doğru sayısı ve nokta ve doğruların birbirleri ile ilgili durumları gibi kavramlar ele alınmaktadır.

Bu kavramların bir konfigürasyonun öğeleri olabilmesi için her bir noktadan geçen doğru sayısı ve her doğru üzerindeki nokta sayısının eşit olması gerekir.

4.1. Temel Konfigürasyonlar

Tanım 4.1.1. Toplam nokta sayısı p, toplam doğru sayısı n, bir noktadan geçen doğru sayısı q, bir doğru üzerindeki nokta sayısı k parametreleri ile verilen bir konfigürasyon nokta ve doğruların bir ailesidir ve (p_q, n_k) biçiminde gösterilir. Bir konfigürasyonun toplam nokta sayısına ve toplam doğru sayısına konfigürasyonun öğeleri denir.

(p_q, n_k) biçiminde ifade edilen bir konfigürasyonda;

$$p.q = n.k$$

eşitliği sağlanmalıdır.

(p_q, n_k) konfigürasyonunda p tane sayıdaki noktanın her biri n tane sayıdaki doğru ailesinin q tanesi ile, n tane sayıdaki doğru ailesinin her biri p tane sayıdaki nokta ailesinin k tanesi ile bir durum oluşturur. Yani p tane noktanın her birinden q tane doğru geçer ve n tane noktanın her birinde k tane nokta vardır (Grünbaum, 2009).

Bir konfigürasyonda nokta ve doğrular arasındaki ilişki karşılıklıdır. Bir nokta veya bir doğru sadece bir durum belirtir. İki nokta sadece bir doğru üzerinde olabilir veya iki doğru sadece bir noktada kesişebilir.

4.2. Simetrik Konfigürasyonlar

(p_q, n_k) konfigürasyonunda p ve n değerleri birbirine eşit ise bu gösterim $[q, k]$ biçiminde ifade edebilir. Eğer konfigürasyondaki toplam nokta sayısı ile toplam doğru sayısı eşit ($p = n$) ise

$$p.q = n.k$$

eşitliğinden $q = k$ olur. Yani bir noktadan geçen doğru sayısı ve bir doğru üzerindeki nokta sayısı da eşit olur. Bu durumdaki konfigürasyonlara simetrik konfigürasyonlar denir. Bu konfigürasyon ise (n_k) biçiminde gösterilir ve $k-$ konfigürasyonu olarak ifade edilir.

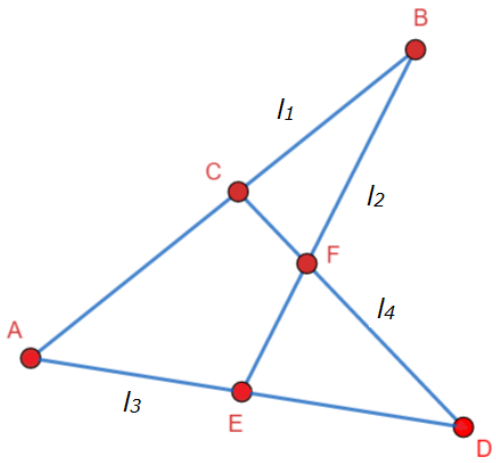
4.3. Bazı Konfigürasyonlar

4.3.1. $(6_2, 4_3)$ Pasch Konfigürasyonu

(p_q, n_k) konfigürasyonuna örnek olarak $(6_2, 4_3)$ konfigürasyonunu örnek verebiliriz. $p = 6$, $q = 2$, $n = 4$ ve $k = 3$ olduğundan,

$$6.2 = 4.3$$

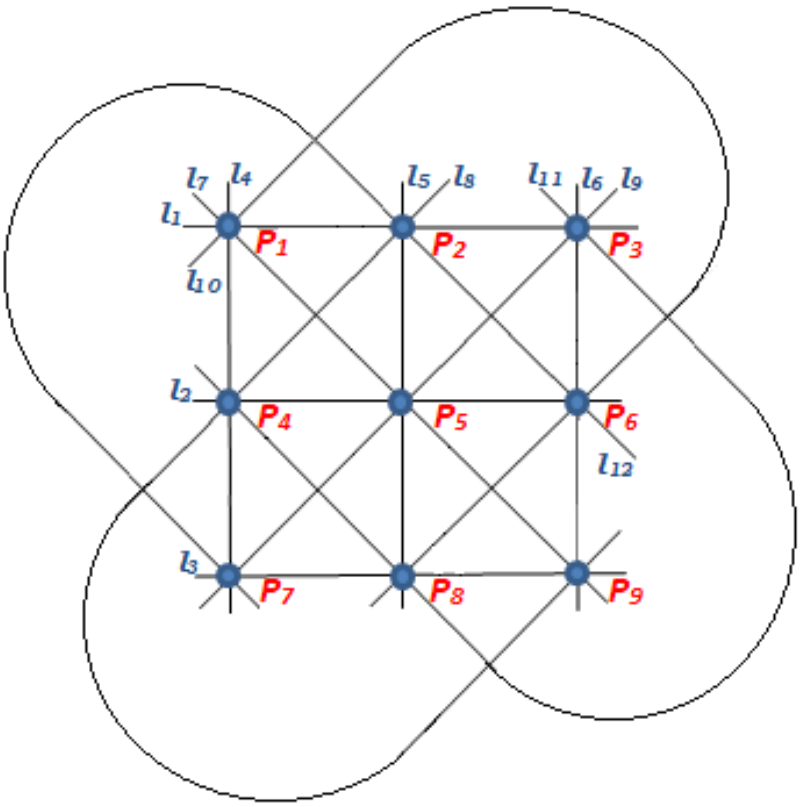
eşitliği de sağlanmaktadır. Özel olarak Pasch Konfigürasyonu olarak da adlandırılan $(6_2, 4_3)$ konfigürasyonu Şekil 4.1'de görülmektedir. Konfigürasyonda noktalar kümesi $\{A, B, C, D, E, F\}$ ve doğrular kümesi $\{l_1, l_2, l_3, l_4\}$ tür. Her noktadan geçen 2 adet doğru, her doğru üzerinde 3 adet nokta bulunmaktadır.



Şekil 4.1 $(6_2, 4_3)$ Pasch Konfigürasyonu

4.3.2. $(9_4, 12_3)$ Hesse Konfigürasyonu

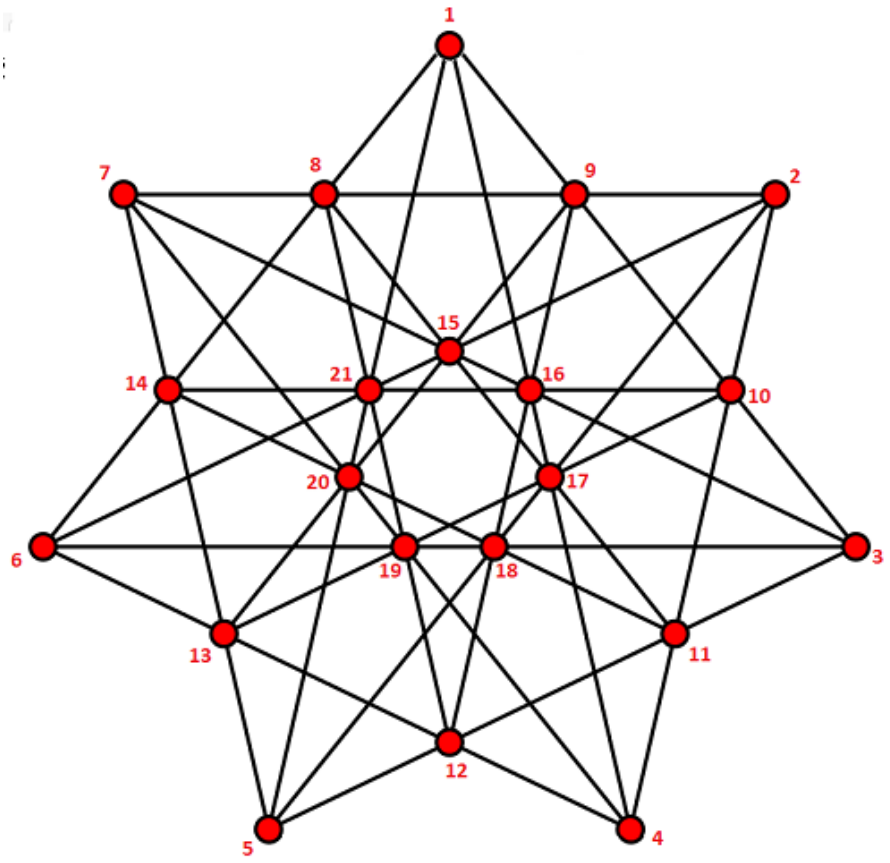
9 nokta ve 12 doğruya sahip bir konfigürasyondur. Konfigürasyonun her noktasından 4 doğru geçer ve her doğrusu üzerinde 3 nokta bulunmaktadır. $p = 9$, $q = 4$, $n = 12$ ve $k = 3$ olduğundan, konfigürasyon $(9_4, 12_3)$ konfigürasyonudur. $(9_4, 12_3)$ konfigürasyonu, Hesse Konfigürasyonu olarak da bilinmektedir. Hesse Konfigürasyonu Şekil 4.2'de gösterilmiştir.



Şekil 4.2 $(9_4, 12_3)$ Hesse Konfigürasyonu

4.3.3. (21_4) Grünbaum-Rigby Konfigürasyonu

21 nokta ve 21 doğruya sahip bir konfigürasyondur. Her doğrusu üzerinde 4 nokta bulunur ve her noktasında 4 doğru geçtiğinden bir simetrik 4-konfigürasyon örneği olan (21_4) konfigürasyonu (Grünbaum-Rigby Konfigürasyonu) Şekil 4.3'te gösterilmiştir (Grünbaum, 2009).



Şekil 4.3 Grünbaum-Rigby (21_4) Konfigürasyonu

4.4. Konfigürasyonların Gösterimi

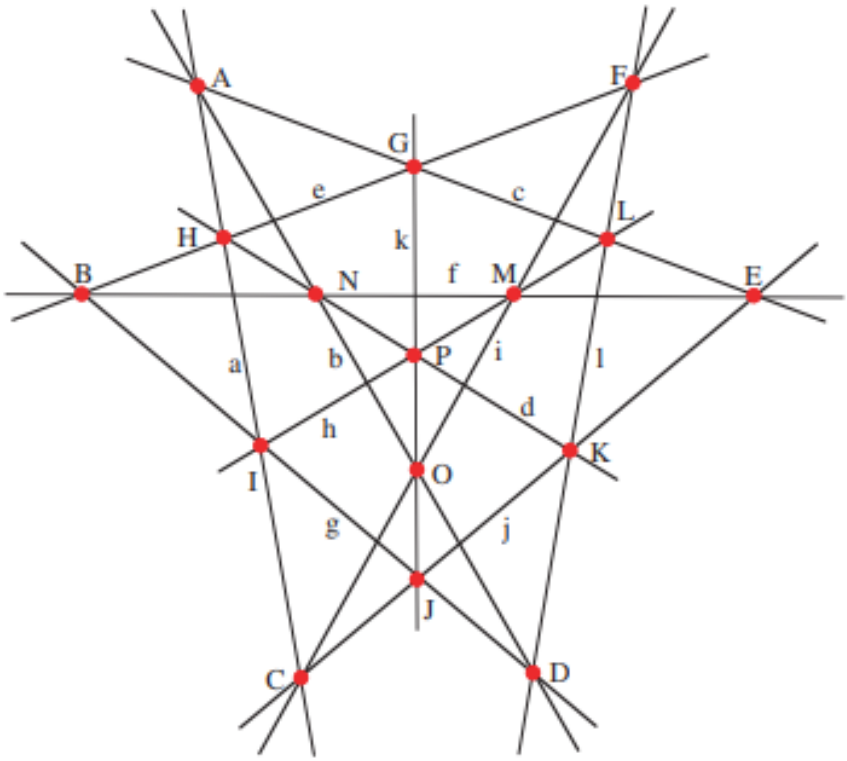
Bu tezde aksi özellikle belirtilmedikçe, konfigürasyonları gerçek Öklid düzleminde ya da gerçek projektif düzlemde düşüneceğiz ve bu tür konfigürasyonları **geometrik konfigürasyon** olarak adlandıracağız. Geometrik konfigürasyonları sunmanın en doğal yolu, ”noktaların” düz noktalarla ve ”doğruların” düz doğrularla temsil edildiği diyagramlardır. Şekil 4.1, Şekil 4.2 ve Şekil 4.3 birer diyagram örnekleridir.

Konfigürasyonları sunmanın yaygın yollarından biri de konfigürasyon tablolarıdır. Konfigürasyon tablolarında noktalar veya doğrular ilk satırda etiketlenebilir. Şekil 4.4’te verilen $(16_3, 12_4)$ konfigürasyonun konfigürasyon tablosu Çizelge 4.1’te gösterilmiştir. Altı çizili olan ilk satırda konfigürasyondaki doğrular etiketlenmiş ve her sütunda da ilk satırdaki doğru üzerindeki noktalar işaretlenmiştir. Konfigürasyon tablosundaki etiket satırında doğrular yerine noktaların (veya noktalar yerine doğruların) işaretleri etiketlenerek yeni bir konfigürasyon elde edildiğinde konfigürasyonlara birbirinin **dualidir** denir.

Çizelge 4.1 Şekil 4.4'te verilen $(16_3, 12_4)$ konfigürasyonunun konfigürasyon tablosu

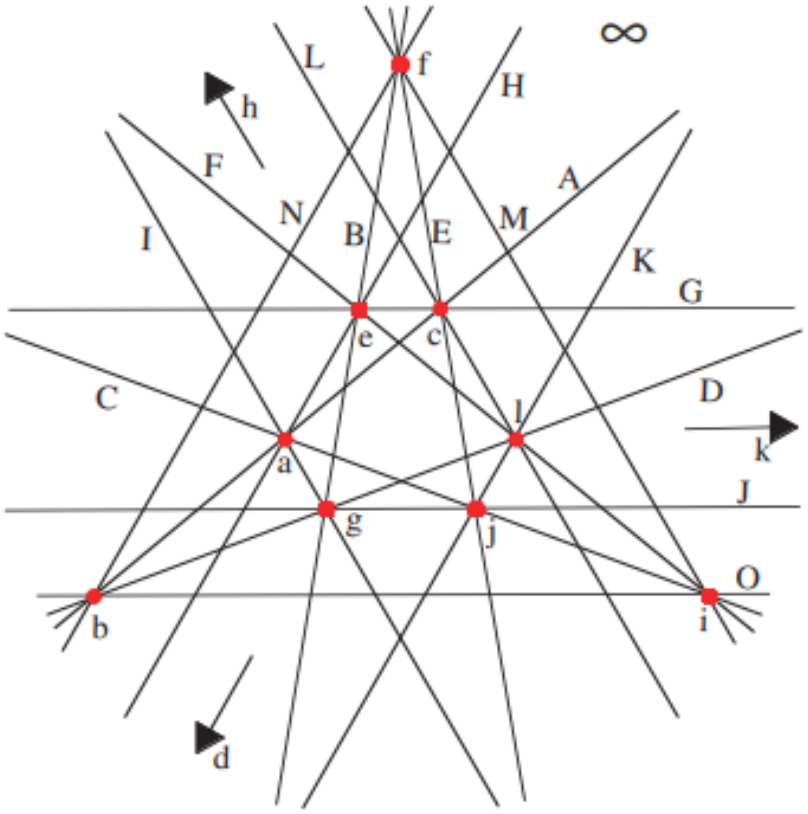
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
A	A	A	H	B	B	B	I	C	C	J	D
H	N	G	N	H	N	I	P	O	J	O	K
I	O	L	P	G	M	J	M	M	K	P	L
C	D	E	K	F	E	D	L	F	E	G	F

Çizelge 4.2'de Çizelge 4.1'in duali ve Şekil 4.5'te ise Şekil 4.4'ün duali gösterilmiştir. Şekil 4.5'teki oklar sonsuzluktaki noktaları, sonsuz sembolü de sonsuzda doğru yapılandırmasının bir parçasıdır.



Şekil 4.4 $(16_3, 12_4)$ Konfigürasyonu

Konfigürasyonları sunma metodlarından biri de Levi Graflar ve Levi incidence matrisidir. (10_3) konfigürasyonunun bir konfigürasyon tablosu Çizelge 4.3'te ve bu konfigürasyon tablosu baz alarak oluşturulan Levi Incedence Tablosu Çizelge 4.4'te gösterilmiştir. Aynı konfigürasyon ve konfigürasyonun Levi Grafı sırasıyla Şekil 4.6 ve Şekil 4.7'de gösterilmiştir.



Şekil 4.5 Şekil 4.4'ün Dual Konfigürasyonu

Çizelge 4.2 Şekil 4.4'te ve Çizelge 4.1'de verilen $(16_3, 12_4)$ konfigürasyonunun dual konfigürasyon tablosu

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
a	e	a	b	c	e	c	a	a	g	d	c	f	b	b	d
b	f	i	g	f	i	e	d	g	j	j	h	h	d	i	h
c	g	j	l	j	l	k	e	h	k	l	l	i	f	k	k

Nokta ve doğruların konfigürasyonları geçmişte kombinatoryal geometride önemli bir rol oynamıştır . Bununla birlikte, birçok sorun hala açıktır ve çeşitli geometrik yöntemleri test etmek için kullanılabilir.

Bir (n_k) konfigürasyonunda iki doğru yalnızca bir noktada kesişebilir ve iki nokta en fazla bir ortak doğru üzerinde yer alabilir. Her zaman konfigürasyonların bağlı olduğunu, yani konfigürasyonun bir hipergraf olarak bağlı olduğunu varsayıyoruz.

Çizelge 4.3 (10_3) konfigürasyon tablosu

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
2	3	4	5	1	3	1	2	1	2
9	8	6	7	6	5	4	5	3	4
7	0	9	0	8	6	7	8	9	0

Çizelge 4.4 (10_3) Levi Incedence tablosu

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
1					X		X		X	
2	X							X		X
3		X				X			X	
4			X				X			X
5				X		X		X		
6			X		X	X				
7	X			X			X			
8		X			X			X		
9	X		X						X	
0		X		X						X

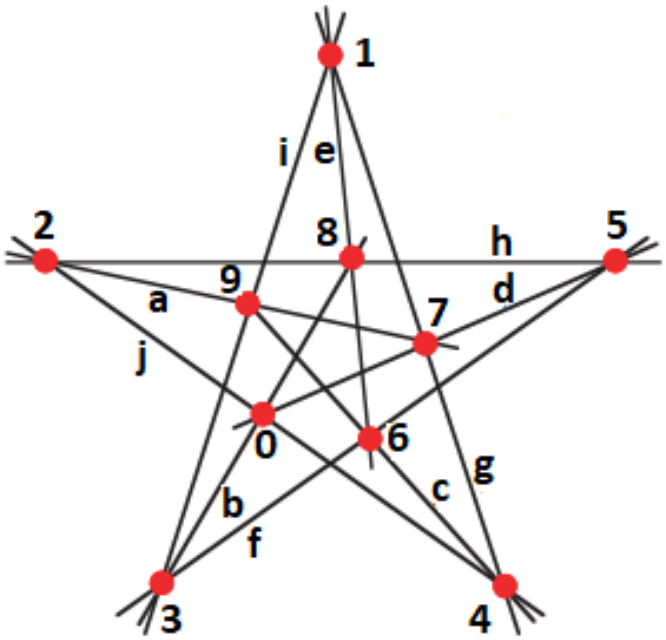
Konfigürasyonlar, genellikte listelenen üç tür yapılandırma ile birbirinden ayırt edilir.

Geometrik: Noktalar ve doğrular, gerçek projektif düzlemdeki sıradan noktalar ve doğrulardır.

Topolojik: Noktalar, gerçek projektif düzlemdeki sıradan noktalardır, ancak doğrular sözde dizidir.

Kombinatoryal: Sadece soyut bir küme sistemi.

Pseudoline kavramı ilk olarak Friedrich Willhelm Daniel Levi (1888-1966) tarafından kullanıldı. Özellikle her bir pseudoline'nın düz bir doğruya izotopik olduğunu ve her iki pseudoline'nın enine kesiştiği bilinir. Her bir doğru bir pseudoline olduğundan, her bir geometrik konfigürasyon topolojik bir konfigürasyondur ve her bir topolojik konfigürasyon da bir kombinatoryal konfigürasyondur. Fakat tersi ifadeler doğru değildir.

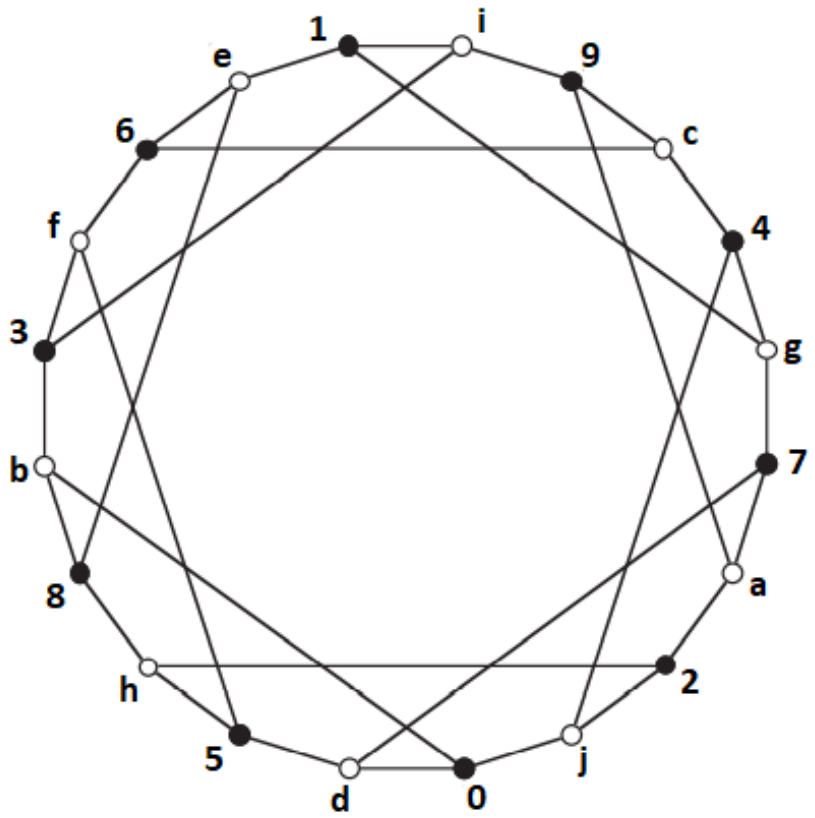


Şekil 4.6 Çizelge 4.3 te verilen (10_3) Konfigürasyonu

Örneğin, Fano konfigürasyonu (7_3) kombinatoryaldir ancak topolojik değildir. (10_3) konfigürasyonu geometrik olmayan bir topolojik konfigürasyon örneğidir.

Verilen k değerine karşın hangi n değerleri için (n_k) kombinatoryal, topolojik veya geometrik konfigürasyonlarının var olduğunu sormak doğal bir sorudur. Bir (n_2) konfigürasyonu genel konumda herhangi bir n nokta $(n{\geq}2)$ tarafından oluşturulabileceğinden, soru $k = 2$ için önemsizdir. $k = 3$ durumunda da tam bir cevap bilinmektedir. Tüm $n{\geq}7$ için kombinatoryal konfigürasyonlar mevcuttur. $n = 7$ ve $n = 8$ için kombinatoryal konfigürasyonlar topolojik konfigürasyonlara dönüştürülemez ve n≥ 9 için geometrik konfigürasyonlar her zaman mevcuttur.

$n = 17$ durumu, topolojik konfigürasyon olarak gerçekleştirmeye izin veren tek bir kombinatoryal konfigürasyon olması açısından özeldir (Bokowski ve Grünbaum, 2009).



Şekil 4.7 Çizelge 4.4'te verilen (10_3) Konfigürasyonunun Levi Grafı

4.5. Bazı Klasik Konfigürasyon Teoremleri

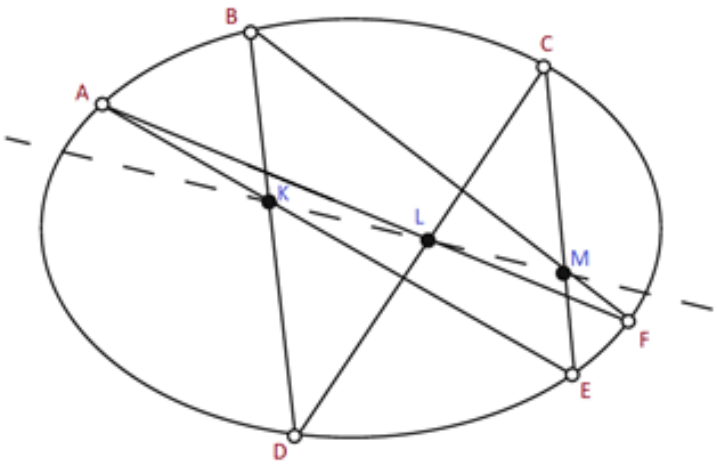
4.5.1. Pascal Teoremi

Blaise Pascal tarafından 1639'da henüz 16 yaşında iken formüle edilmiş bir teoremdir. Bir konik üzerinde seçilen altı nokta ile edilen bir altıgende, karşı taraf çiftlerinin kesiştiği üç nokta doğrudaştır (Pisanski ve Servatius, 2013).

Konik üzerinde alınan 6 nokta ile oluşturulan altıgenin düzgün altıgen hatta dışbükey olması bile gerekmez. Varlığı yukarıdaki teoremle öne sürülen doğruya altıgenin Pascal doğrusu denir.

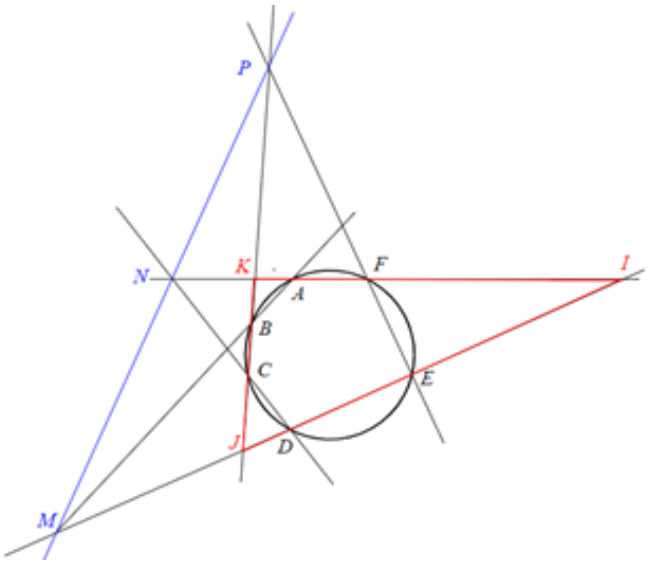
Farklı konik türleri üzerinde (elips, çember, parabol, hiperbol) elde edilebilen Pascal doğrularını inceleyelim.

i) Elips üzerinde inşa edilen Pascal doğrusu: Elips üzerinde alınan A,B,C,D,E,F noktaları ile inşa edilen ABCDEF altıgeni ve AE∩BD =K, AF∩CD =L ve BF∩CE =M kesişim noktaları ile oluşan KLM Pascal doğrusu Şekil 4.8'de gösterilmiştir.



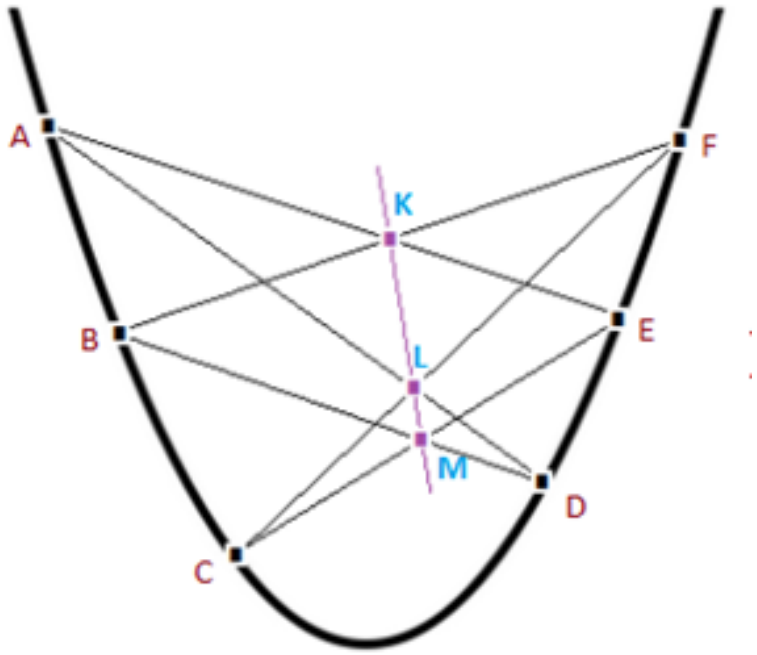
Şekil 4.8 Elips üzerinde Pascal Doğrusu

ii) Çember üzerinde inşa edilen Pascal doğrusu: Çember üzerinde seçilen A, B, C, D, E ve F noktaları ile inşa edilen altıgen ve AB∩ED =M, AF∩CD =N ve BF∩CE =M olacak şekilde elde edilen MNP Pascal doğrusu Şekil 4.9'da gösterilmiştir.



Şekil 4.9 Çember üzerinde Pascal Doğrusu

iii) Parabol üzerinde inşa edilen Pascal doğrusu: Parabol üzerinde seçilen A, B, C, D, E ve F noktaları ile inşa edilen altıgen ve AE∩FB =K, AD∩CF =L ve BD∩CE =M olacak şekilde elde edilen MNP Pascal doğrusu Şekil 4.10'da gösterilmiştir.



Şekil 4.10 Parabol üzerinde Pascal Doğrusu

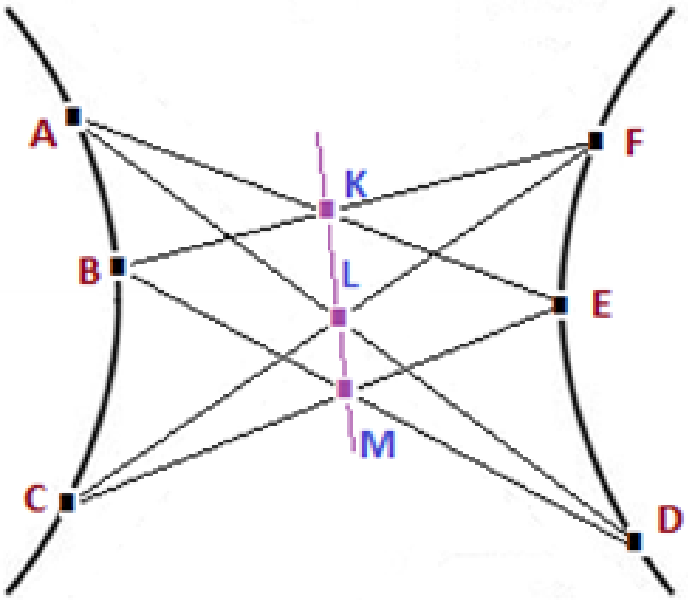
iiii) Hiperbol üzerinde inşa edilen Pascal doğrusu: Hiperbol üzerinde seçilen A, B, C, D, E ve F noktaları ile inşa edilen altıgen ve AE∩FB =K, AD∩CF =L ve BD∩CE =M olacak şekilde elde edilen MNP Pascal doğrusu Şekil 4.11'de gösterilmiştir.

Pascal Teoreminin ispatlarından bir tanesi için Menelaus Teoremi'nden faydalanılmaktadır.

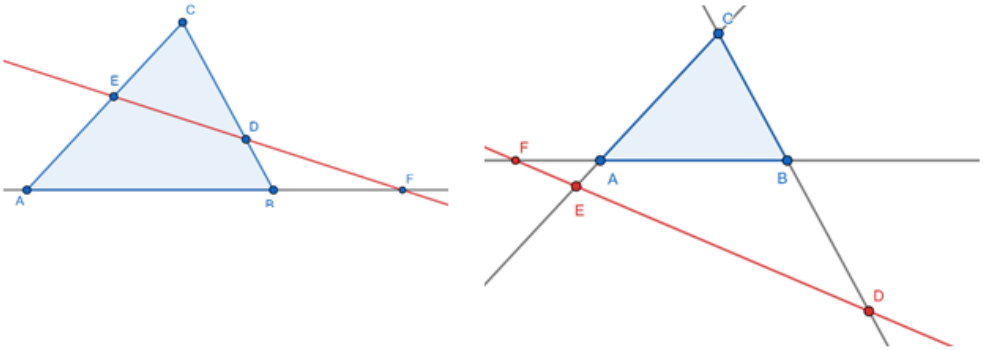
Yardımcı Teorem (Menelaus Teoremi): ABC üçgeninde sırasıyla BC, AC ve AB doğruları üzerinde bulunan ve üçgenin köşelerinden farklı D, E ve F noktalarının aynı doğru üzerinde olabilmesi ancak ve ancak:

$$\frac{|AF|}{|FB|}.\frac{|BD|}{|DC|}.\frac{|CE|}{|EA|}=1$$

denkleminin sağlanması ile mümkündür. Menelaus Teoreminde EDF doğrusu ABC üçgeninin içinden geçer veya DEF doğrusu ABC üçgeninin tamamen dışındadır (Şekil 4.12).



Şekil 4.11 Hiperbol üzerinde Pascal Doğrusu



Şekil 4.12 Menelaus Teoremi

Pascal teoreminin Menelaus teoremi ile ispatı : Pascal teoreminin ispatı için çember üzerinde oluşan Pascal doğrusunun doğrudaşlığını ispatlayalım (Şekil 4.9).

Çember üzerinde aldığımız A, B, C, D, E ve F noktaları ile ABCDEF altıgenini alalım. Sırasıyla AF∩BC =K, BC∩DE =J ve AF∩DE =I noktaları ile elde edilen KIJ üçgeni elde edilsin. Altıgen üzerindeki noktalar ile AB∩DE =M, AF∩CD =N ve BC∩FE =P ile elde edilen M,N ve P noktaları Pascal Teoremine göre doğrudaştır ve bu doğruya Pascal doğrusu diyorduk. Aslında M noktamız üçgenin bir kenarını üzerinde bulunduran IJ doğrusu üzerinde ve N noktası da üçgenin başka bir kenarını üzerinde IK doğrusu

üzerindedir. M ve N noktaları ile oluşan MN doğrusu ile üçgenin üçüncü kenarını üzerinde bulunduran KJ doğrusunun kesişim noktası olan P noktası Menelaus Teoremini sağlayan nokta ise M, N ve P noktaları doğrudaş olacaktır.

Menelaus Teoremine göre; FE yi IKJ üçgeninin JI ve IK kenarlarının bir keseni kabul edersek BC∩FE =P olduğunu biliyoruz. Yani KJ∩FE =P olacağından EFP doğrudaştır. Bu da Menelaus teoreminin sağlandığını göstermektedir.

$$\frac{|JE|}{|EI|}.\frac{|IF|}{|FK|}.\frac{|PK|}{|PJ|}=1$$

eşitliği elde edilir. EFP doğrusu için uygulanan işlemler DCN için de uygulanarak Menelaus Teoreminin sağlandığı görülür. Benzer şekilde;

$$\frac{|JD|}{|DI|}.\frac{|IN|}{|KN|}.\frac{|KC|}{|CJ|}=1$$

eşitliği elde edilir.

Son olarak keseni ABM doğrusu olarak alındığında benzer yolla Menelaus teoreminin sağlandığı görülür. O halde elde edilen son eşitlik;

$$\frac{|IA|}{|AK|}.\frac{|KB|}{|BJ|}.\frac{|JM|}{|MI|}=1$$

olur. Elde edilen üç eşitlik taraf tarafa çarpılarak;

$$\frac{|JE|}{|EI|}.\frac{|IF|}{|FK|}.\frac{|PK|}{|PJ|}.\frac{|JD|}{|DI|}.\frac{|IN|}{|KN|}.\frac{|KC|}{|CJ|}.\frac{|IA|}{|AK|}.\frac{|KB|}{|BJ|}.\frac{|JM|}{|MI|}=1$$

eşitliği elde edilir.

Çemberde kuvvet özelliğinden

$$|JE|\cdot|JD|=|JB|\cdot|JC|,$$

$$|KC|\cdot|KB|=|KF|\cdot|KA|$$

ve

$$|IA|\cdot|IF|=|ID|\cdot|IE|$$

eşitliklerini yukarıdaki eşitlikte kullanarak gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\frac{|JM|}{|MI|}.\frac{|IN|}{|KN|}.\frac{|PK|}{|PJ|}=1$$

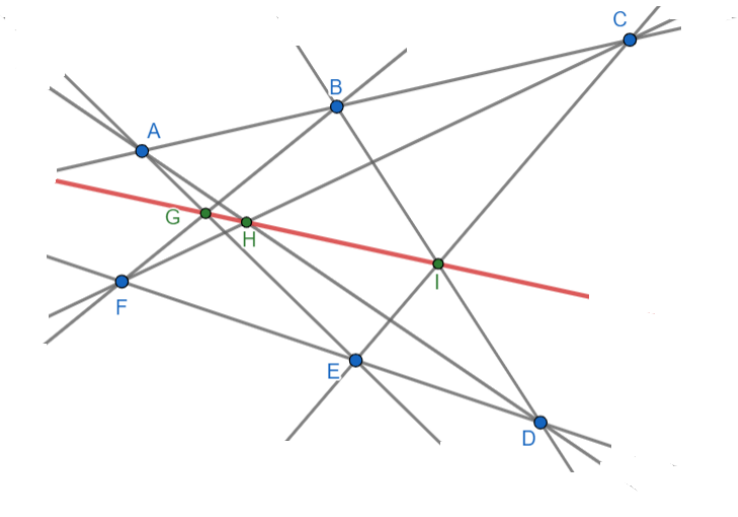
eşitliği elde edilir.

Elde edilen bu eşitlik IJK üçgenine göre de Menelaus Teoreminin sağlandığını gösterir. Yani M, N ve P noktaları doğrudaştır. Böylece Pascal Teoremini ispatı tamamlanmış olur.

4.5.2. Pappus Teoremi

A, B ve C noktaları ile D, E ve F noktaları farklı iki doğru üzerinde doğrudaş noktalar olsun. G =AE∩BF, H =AD∩FC ve I =BD∩EC biçiminde elde edilen G,H ve I noktaları da doğrudaş olur (Şekil 4.13).

Pappus Teoremi aslında Pascal Teoreminin bir özel uygulamasıdır. Pascal teoreminde aldığımız konik birbirinden farklı iki doğruya sınırlandırılığında Pappus Teoremi elde edilir. Pappus Teoremi her ne kadar Pascal Teoreminin bir özel uygulaması olsa da teoremin sahibi İskenderiyeli Pappus, Blaise Pascal'dan dönem olarak çok daha önce yaşamıştır. Antik Yunan Matematiği döneminin son matematikçilerinden birisidir (MS 290-350).



Şekil 4.13 Pappus Teoremi

İspat : İspat için yine Menelaus Teoremi'nden faydalanalım. A,B ve C noktaları ile F,E ve D noktaları doğrudaş noktalar olsun.

$$L = AE \cap CF$$

$$K = BD \cap FC$$

$$J = BD \cap AE$$

olmak üzere LKJ üçgenini alalım (Şekil 4.14).

FD, EC, AD,FB ve AC doğruları KLJ üçgeninin birer kesenidir. Bu kesenler için Menelaus teoremi sırayla uygulanırsa;

$$\frac{|KF|}{|LF|}.\frac{|LE|}{|IE|}.\frac{|JD|}{|KD|} = 1,$$

$$\frac{|LC|}{|KC|}.\frac{|KI|}{|JI|}.\frac{|JE|}{|EL|} = 1,$$

$$\frac{|JA|}{|LA|}.\frac{|LH|}{|KH|}.\frac{|KD|}{|JD|} = 1,$$

$$\frac{|LF|}{|KF|}.\frac{|KB|}{|JB|}.\frac{|JG|}{|LG|} = 1,$$

ve

$$\frac{|KC|}{|LC|}.\frac{|JB|}{|KB|}.\frac{|LA|}{|JA|} = 1$$

eşitlikleri elde edilir. Eşitlikler taraf tarafa çarpılırsa,

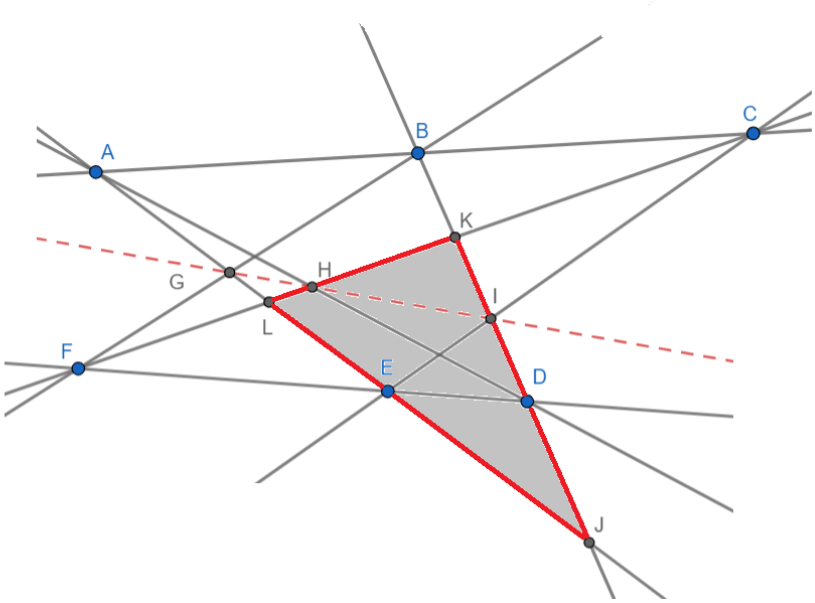
$$\frac{|KF|}{|LF|}.\frac{|LE|}{|IE|}.\frac{|JD|}{|KD|}.\frac{|LC|}{|KC|}.\frac{|KI|}{|JI|}.\frac{|JE|}{|EL|}.\frac{|JA|}{|LA|}.\frac{|LH|}{|KH|}.\frac{|KD|}{|JD|}.\frac{|LF|}{|KF|}.\frac{|KB|}{|JB|}.\frac{|JG|}{|LG|}.\frac{|KC|}{|LC|}.\frac{|JB|}{|KB|}.\frac{|LA|}{|JA|} = 1$$

eşitliği elde edilir ve bu eşitlikte gerekli sadeleştirmeler yapıldığında,

$$\frac{|JG|}{|LG|}.\frac{|LH|}{|LK|}.\frac{|KI|}{|JI|} = 1$$

elde edilir. Böylece Menenalaus teoremine göre; G, H ve I noktaları doğrudaş olur.

Tanım 4.5.1: A1, B1, C1, A2, B2 ve C2 bir geometrik yapının herhangi altı noktası olsun. Eğer A1,B1 ve C1 doğrudaş değilse $A1, B1, C1$ kümesine bir üçgen denir. A1B1C1 ve



Şekil 4.14 Pappus Teoremi İspatı

A2B2C2 iki üçgen olsun. Bu üçgenlerin karşılıklı köşelerini birleştiren doğruların arakesit noktası

$$M = A1A2 \cap B1B2 = B1B2 \cap C1C2 = A1A2 \cap C1C2$$

olacak şekilde bir M noktası varsa bu üçgenler M noktasından perspektiftir denir. M noktasına da **perspektiflik merkezi** denir. Ayrıca bu üçgenlerin karşılıklı kenarlarının arakesit noktaları,

$$G = A1B1 \cap A2B2,$$

$$E = A1C1 \cap A2C2$$

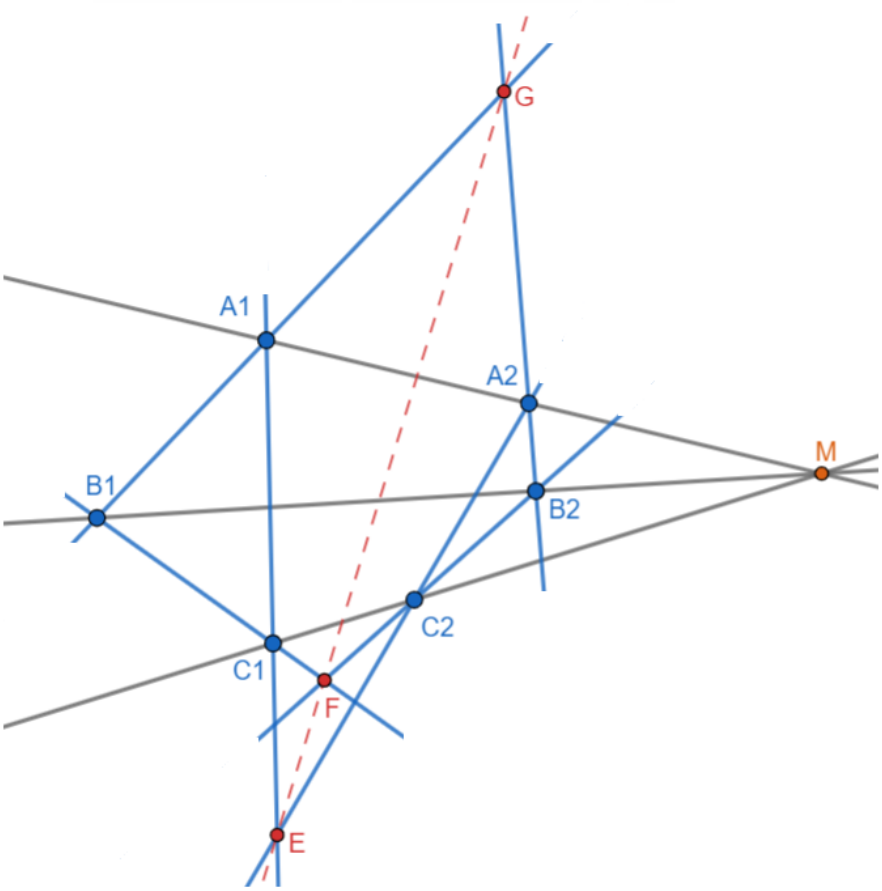
ve

$$F = B1C1 \cap B2C2$$

olsun. G, E ve F doğrudaşsa bunların üzerinde bulunduğu doğruya perspektiflik ekseni denir. Bu iki üçgene de GF (EF veya GE) ekseninden perspektif üçgenler denir. Şekil 4.15 ve Şekil 4.16'da M noktasına ve GF eksenine göre perstektif olan üçgenler görülmektedir.

4.5.3. Dezargues Teoremi

İki üçgenin karşılıklı köşelerini birleştiren doğrular noktadaşsa, bu üçgenlerin karşılıklı kenarlarının arakesit noktaları doğrudaştır (Şekil 3.15 ve Şekil 3.16). Başka bir ifade ile teorem "Bir noktadan perspektif olan iki üçgen bir doğrudan da perspektif olur." biçiminde ifade edilir.



Şekil 4.15 Bir noktadan ve bir eksenden perspektif üçgenler

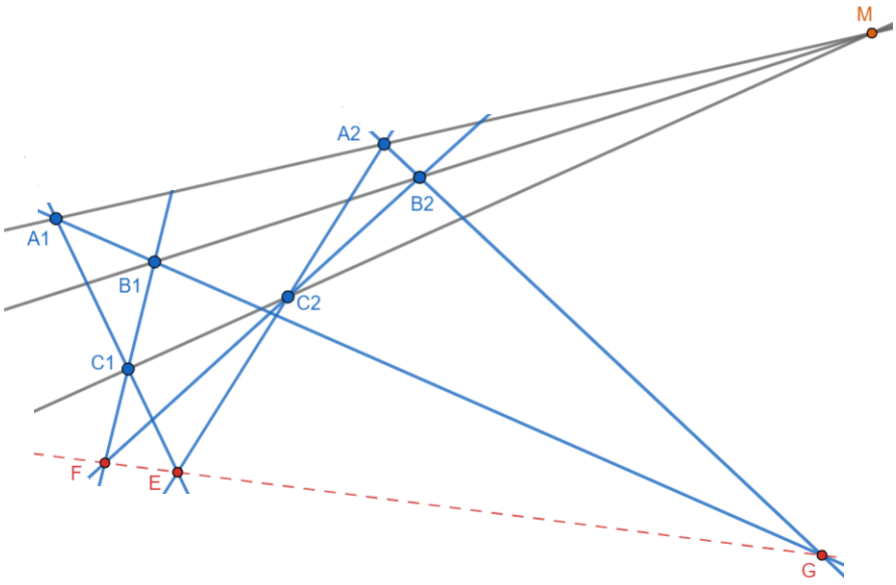
Fransız matematikçi Girard Desargues tarafından 1639 yılında geliştirilen Desargues Teoremi Projektif düzlem tanımında P4 aksiyomu olarak da kabul edilmektedir. P4 aksiyomunu gerçekleyen bir projektif düzleme *Dezargsel Düzlem*, gerçeklemeyen projektif düzleme ise *Dezargsel Olmayan Projektif Düzlem* denir.

Benzer şekilde Pappus Teoremi de P5 aksiyomu olarak kabul edilmekte ve P5 aksiyomu sağlayan projektif düzleme *Pappussel Projektif Düzlem* denir. Her Pappussel Projektif Düzlem aynı zamanda Dezargsel Projektif Düzlemdir. Tersi doğru değildir (Kaya, 2005).

İspat : $B1C1F$ doğrusu, $MB2C2$ üçgeni için; $A1C1E$, $MA2C2$ üçgeni için ve AD, KLJ üçgeni için birer kesendir. Sırasıyla Menelaus teoremi uygulanırsa,

$$\frac{|FB2|}{|FC2|}.\frac{|MB1|}{|B1B2|}.\frac{|C1C2|}{|MC1|} = 1,$$

$$\frac{|EC2|}{|EA2|}.\frac{|A1A2|}{|MA1|}.\frac{|MC1|}{|C1C2|} = 1$$



Şekil 4.16 Desargues Teoremi

ve

$$\frac{|GA2|}{|GB2|}.\frac{|MA1|}{|A1A2|}.\frac{|B1B2|}{|MB1|}=1$$

eşitlikleri elde edilir. Eşitlikler taraf tarafa çarpılırsa;

$$\frac{|FB2|}{|FC2|}.\frac{|MB1|}{|B1B2|}.\frac{|C1C2|}{|MC1|}.\frac{|EC2|}{|EA2|}.\frac{|A1A2|}{|MA1|}.\frac{|MC1|}{|C1C2|}.\frac{|GA2|}{|GB2|}.\frac{|MA1|}{|A1A2|}.\frac{|B1B2|}{|MB1|}=1$$

eşitliği elde edilir. Sadeleştirmeler sonucunda;

$$\frac{|FB2|}{|FC2|}.\frac{|EC2|}{|EA2|}.\frac{|GA2|}{|GB2|}=1$$

olduğundan E, F ve G doğrudaş olur.

5. 3-KONFİGÜRASYONLAR

Bu bölümde 3-konfigürasyonlar tanıtılmıştır. (n_3) konfigürasyonları n değerleri için konfigürasyonun var olduğu incelenmektedir. Klasik 3-konfigürasyonlar, n değerine göre oluşturulabilecek kombinatoryal konfigürasyon sayılıları ve klasik olarak adlandırılmayan 3-konfigürasyon örnekleri diyagramları ile verilmiştir.

Çalışılan düzlem veya uzaydaki toplam nokta sayısı ve toplam doğru sayısının birbirine eşit olduğu, her doğru üzerinde 3 noktanın bulunduğu ve her noktasından 3 doğru geçtiği konfigürasyonlar 3- konfigürasyonlardır. Toplam nokta veya doğru sayısı ise konfigürasyonun ismini belirlemektedir. Örneğin 12 nokta ve 12 doğrusu bulunan bir 3-konfigürasyon (12_3) biçiminde gösterilir.

En az sayıdaki nokta ve doğruya sahip olan 3-konfigürasyon için nokta ve doğru sayısı kaç olmalıdır?

Toplam nokta sayısı n kabul edelirse, n≤6 değeri için 3-konfigürasyon oluşturmak imkansızdır. Örneğin noktalar kümesi $\{A, B, C, D, E, F\}$ olduğu 6 noktalı bir düzlemde A, B ve C doğrudaş olsun. bir doğru üzerinde 3 nokta olacağından A, B ve C noktalarının oluşturduğu doğru üzerinde başka nokta bulunmaz. Her noktadan 3 nokta geçeceğinden A noktasından farklı 2 doğru daha geçmelidir. A noktasından geçen 2. doğru için D, E ve F noktalarından 2 tanesi göz önüne alındığında, üzerinde 3 nokta bulunması gereken 3. doğruyu inşa edecek iki nokta kalmayacaktır. Bu durumda noktalar kümesinde doğru tanımlanmamış sadece bir nokta kaldığından 3. doğru inşa edilemez (Çizelge 5.1). 6 noktalı bir yapı ile bir noktadan geçen 3. doğru inşa edilemediğinden ve benzer şekilde 6 noktadan daha az sayıda nokta içeren bir yapıda da 3-konfigürasyon inşa edilemez.

7 veya daha fazla noktaya sahip kombinatoryal konfigürasyonlarda Çizelge 5.2'de verilen yapı kullanılarak konfigürasyon inşa edilebilir.

Çizelge 5.1 n≤6 konfigürasyon oluşturma çizelgesi

d_1	d_2	d_3	...
A	A	A	...
B	D	F	...
C	E	?	...

Çizelge 5.2 $n \geq 7$ kombinatoryal konfigürasyon oluşturma çizelgesi

d_1	d_2	d_3	d_4	...	d_n-3	d_n-2	d_n-1	d_n
1	2	3	4	...	$n-3$	$n-2$	$n-1$	n
2	3	4	5	...	$n-2$	$n-1$	n	1
4	5	6	7	...	n	1	2	3

5.1. Klasik 3-Konfigürasyonlar

Bu bölümde nokta ve doğru sayılarının konfigürasyona ismini verdiği 3-konfigürasyonlardan daha önce üzerinde çalışan ve bulguları olan, ayrıca konfigürasyona ait özel isimleri ile de anılan klasik 3-konfigürasyonlar ve bunların inşaları, diyagramları, üzerinde bulunma tabloları, ilişki matrisleri, sahip oldukları özellikler, Levi ve varsa genelleştirilmiş Petersen grafları verilmiştir.

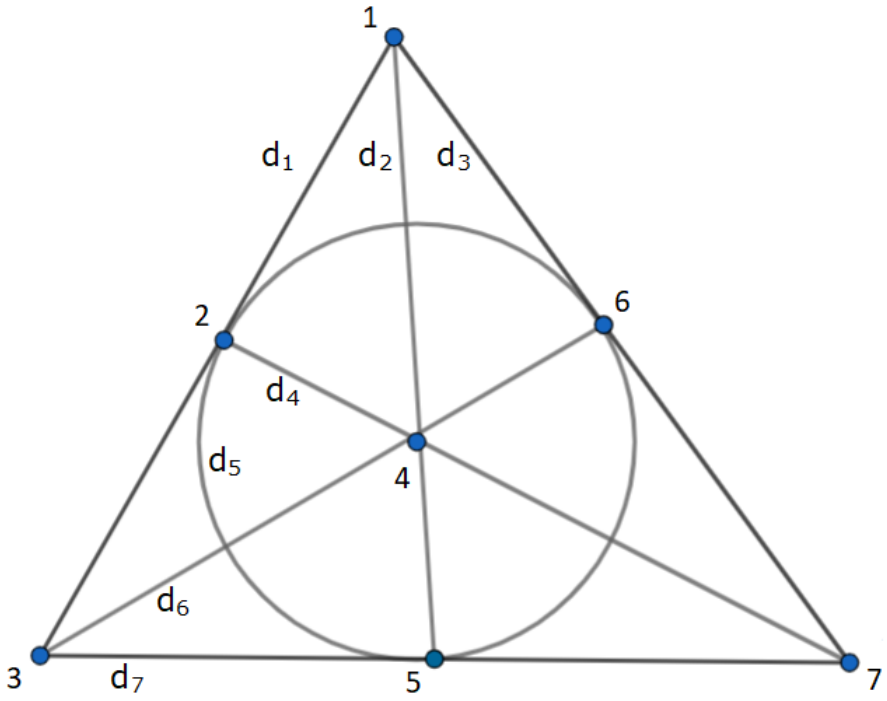
5.1.1. (7_3) Fano Konfigürasyonu

3-konfigürasyonlar arasında mümkün olan en az sayıdaki nokta ve doğru sayısına sahip konfigürasyondur. 7 nokta ve 7 doğruya sahip her noktasından 3 doğru geçen ve her doğrusu üzerinde 3 nokta bulunan konfigürasyondur. Mümkün olan en az sayıda noktaya sahip projektif düzlemdir.

Bu konfigürasyon sonlu geometrinin kurucusu olarak da bilinen İtalyan matematikçi Gino Fano'dan (1871-1952) ismini alır ve Fano Konfigürasyonu veya Fano Düzlemi olarak adlandırılır.

Konfigürasyondaki doğrulardan bir tanesi düz temsil edilemediğinden Öklid düzleminde gösterilemez (Şekil 5.1).

Şekil 5.1 de verilen konfigürasyonun konfigürasyon tablosu Çizelge 5.3'te, üzerinde bulunma tablosu Çizelge 5.4'te, ilişki matrisi Çizelge 5.5'te, Levi grafı ise Şekil 5.2 de verilmiştir. Levi grafta içi boş olan köşeler doğruları, içi dolu olan köşeler ise noktaları temsil etmektedir. Düzgün bir 14-genin köşeleri sırasıyla bir nokta ve bir doğru olacak şekilde grafın köşeleri olarak temsil edildiğinde 14-genin tüm köşeleri komşu köşelerle ve tüm doğruları temsil eden köşeler saat yönünde 5 ilerideki köşeler ile birleştirildiğinde Fano Konfigürasyonunun Levi grafı elde edilir.



Şekil 5.1 (7_3) Fano Konfigürasyonu

Çizelge 5.3 (7_3) Fano konfigürasyonu

d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7
1	1	1	2	2	3	3
2	4	6	4	5	4	5
3	5	7	7	6	6	7

5.1.1.1 GF(q) cismi üzerinde Fano Düzleminin inşaası

(1,0,0), (0,1,0) ve (0,0,1) noktalarını ve bunları ikişerli olarak birleştiren [0,0,1], [1,0,0] ve [0,1,0] doğruları göz önüne alalım (Şekil 5.3).

[0,1,0] doğrusu üzerindeki herhangi bir nokta (x,0,1) şeklinde koordinatlara sahiptir. Benzer biçimde [1,0,0] doğrusu üzerindeki herhangi bir nokta (0,y,1) şeklinde koordinatlara sahiptir. Köşe noktalarından farklı olması için x≠0 ve y≠0 olmalıdır. (0,1,0) ve (x,0,1) noktaları birleştiren doğru $[-x^{-1},0,1]$ ve (1,0,0) ile (0,y,1) noktalarını birleştiren doğru denklemi $[0,-y^{-1},1]$ dir (Şekil 5.4).

Çizelge 5.4 (7_3) Fano konfigürasyonu üzerinde bulunma tablosu

	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7
1	X	X	X				
2	X			X	X		
3	X					X	X
4		X		X		X	
5		X			X		X
6			X		X	X	
7			X	X			X

Çizelge 5.5 (7_3) Fano konfigürasyonu ilişki matrisi

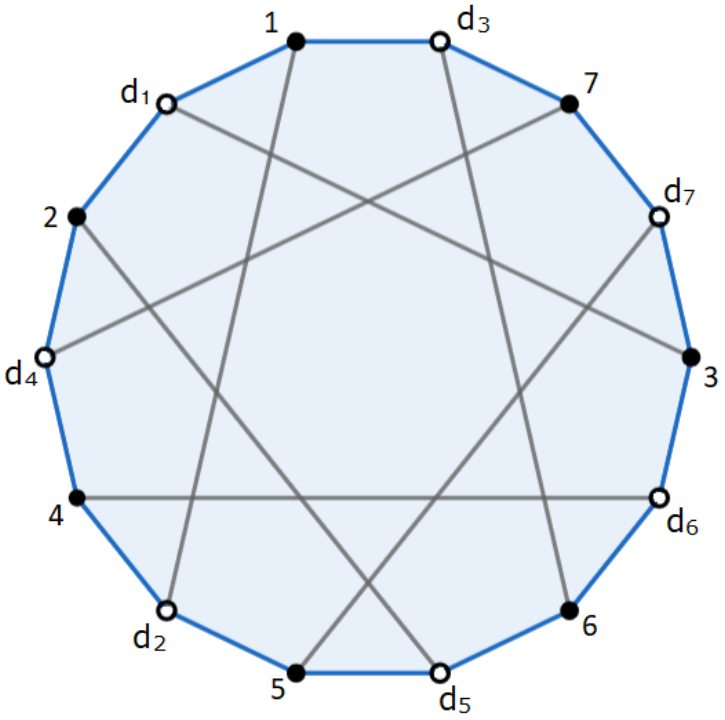
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$[-x^{-1},0,1]$ ve $[0,-y^{-1},1]$ doğrularının arakesit noktası (x,y,1) ile (0,0,1) noktasını birleştiren doğrunun denklemi [-y,x,0] olur (Şekil 5.5).

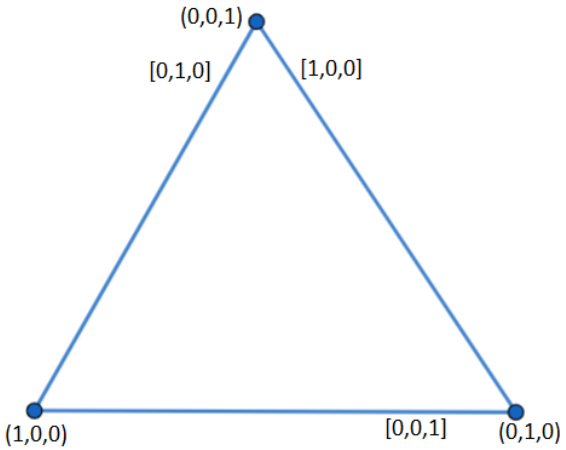
[-y,x,0] doğrusu ile [0,0,1] doğrusunun arakesit noktası (x,y,0) olarak elde edilir. (7_3) konfigürasyona ulaşmak için (x,0,1), (0,y,1) ve (x,y,0) noktalarının doğrudaş olmaları gerekir. Bu noktalar $[-x^{-1},-y^{-1},1]$ doğrusu üzerindedir (Şekil 5.6). Buradan üzerinde bulunma bağıntısından 2≡0 elde edilir. Bu da ancak GF(2) cismi üzerinde mümkündür.

5.1.2. (8_3) Mobius-Kantor Konfigürasyonu

(8_3) konfigürasyonunda toplam 8 nokta ve 8 doğru vardır. Her noktasından 3 doğru geçer ve her doğrusu üzerinde 3 nokta vardır. Bir kombinatoryal konfigürasyonudur. Adını Alman matematikçi August Ferdinand Möbius (1790-1868) ve Avusturya-Macaristan İmparatorluğunda doğan Yahudi asıllı matematikçi Seligmann Kantor'dan (1857-1903) alan (8_3) konfigürasyonu Mobius – Kantor konfigürasyonu olarak adlandırılır (Wells, 2008; Bečvářová, 2019).

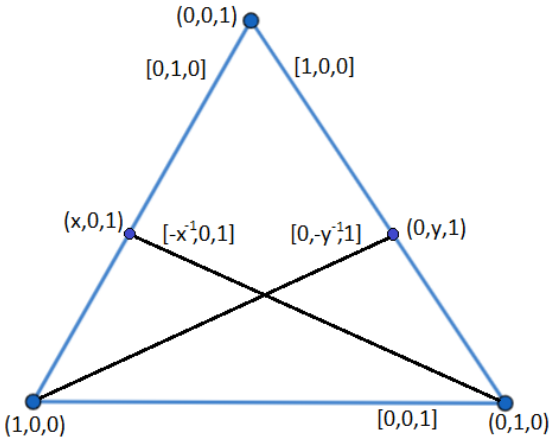


Şekil 5.2 (7_3) Fano Konfigürasyonu Levi Grafı

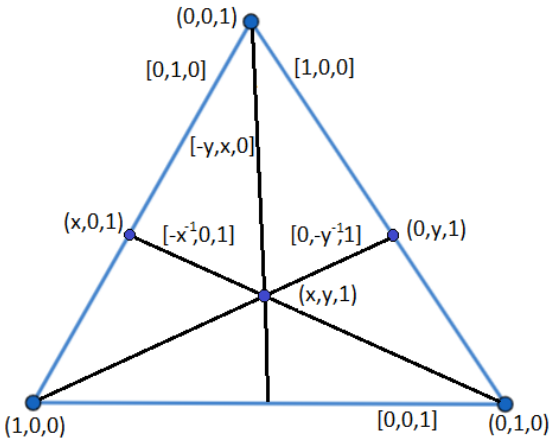


Şekil 5.3 (7_3) Fano Konfigürasyonu inşası-1

Fano konfigürasyonu gibi, Mobius-Kantor Konfigürasyonunun Öklid düzleminde temsili yoktur. Şekil 5.6'da verilen bir Mobius-Kantor konfigürasyonu örneğinde ve d_8 doğrusu düz bir doğru yerine çember ile temsil edilmiştir.



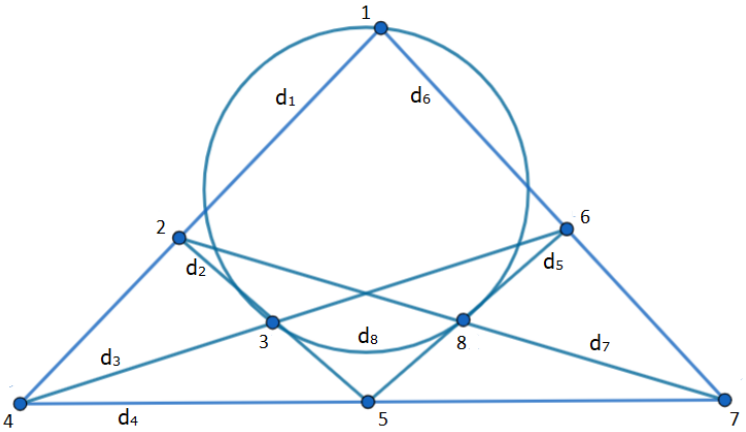
Şekil 5.4 (7_3) Fano Konfigürasyonu inşası-2



Şekil 5.5 (7_3) Fano Konfigürasyonu inşası-3

Şekil 5.6'da verilen (8_3) konfigürasyonunun konfigürasyon tablosu Çizelge 5.6'da, üzerinde bulunma tablosu Çizelge 5.7'de verilmiştir. Aynı konfigürasyonun farklı bir gösterimi ise Şekil 5.7'deki gibidir.

Şekli ve tabloları verilen bu konfigürasyon Şekil 5.8 deki gibi veya iç içe çizilmiş iki tane küp ile de gösterilebilmektedir. Noktalar kümesi $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, doğrular kümesi $\{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8\}$ olmak üzere içi boş köşeler doğruları, içi dolu köşeler ise noktaları temsil etsin. Ön yüzü $d_1, 2, d_2$ ve 3'ten arka yüzü $1, d_7, 8$ ve d_8 den oluşan büyük küp ile bu kübün içine çizilen ön yüzü $4, d_4, 5$ ve d_3 ten arka yüzü $d_6, 7, d_5$ ve 6 dan oluşan küçük kübün birlikte kullanılıp aynı taraftaki köşelerinin birleştirilmesi ile (8_3)



Şekil 5.6 (8_3) Mobius-Kantor Konfigürasyonu

Çizelge 5.6 (8_3) Mobius-Kantor konfigürasyonu

d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8
1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	5	6	7	8	1
4	5	6	7	8	1	2	3

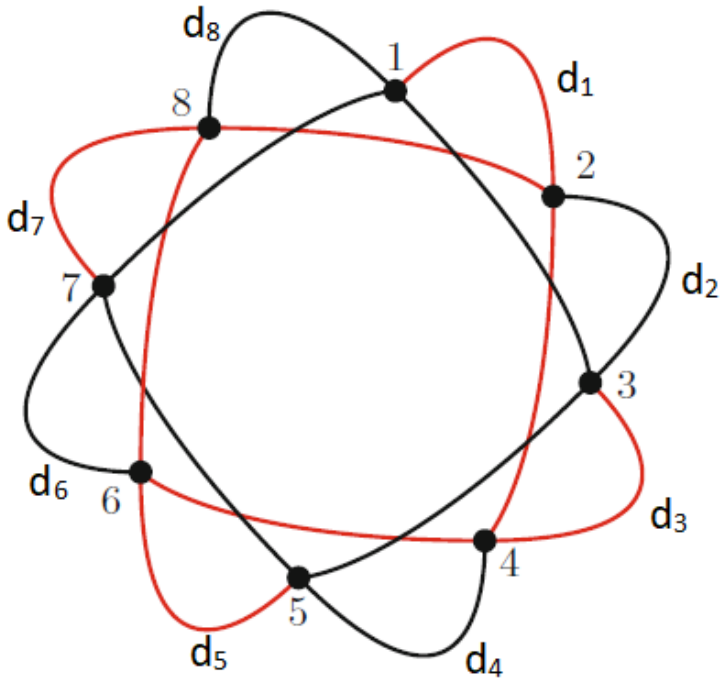
konfigürasyonu elde edilmektedir (Şekil 5.8). Bu gösterimde 1 noktası ve 5 noktası herhangi ortak bir doğru üzerinde yer almadıklarından 1 noktası büyük küpün sol arka köşesi iken 5 noktası, 1 noktası ile herhangi bir ortak noktası olmayan küçük küpün sağ ön köşesi olur. Benzer şekilde büyük küpün sol ön köşesindeki 2 noktası ile konfigürasyonumuzda 6 noktasının bir ortak bir doğrusu olmadığından 6 noktası için küçük küpün sağ üst köşesi işaretlenir. Benzer şekilde diğer noktaların konumları da seçilir.

Şekil ve tablolarda verilen bu konfigürasyonun Levi Grafı ise Şekil 5.9 daki gibidir. Levi graf oluşturulurken bir düzgün 16-genin köşeleri sırasıyla içi bir dolu bir boş olacak şekilde işaretlenir. İçi boş olan köşeler doğruları, içi dolu olan köşeler noktaları temsil etmek üzere 16-gen üzerindeki tüm köşeler komşu köşelerle birleştirildiğinde çokgenin kenarları ile elde bu birleştirmeler sonucunda grafımızdaki her köşe 2 bağlantısını yapmış olur. 3. bağlantılar için doğruları temsil eden köşeler saat yönünde beş köşe ilerideki köşelerle birleştirildiğinde tüm köşelerin 3. bağlantıları da kurulmuş olur.

(8_3) Mobius-Kantor konfigürasyonun genelleştirilmiş Petersen grafının inşaası için bir sekizgen alınır ve köşeleri sırasıyla bir nokta ve bir doğru olacak şekilde temsili olarak

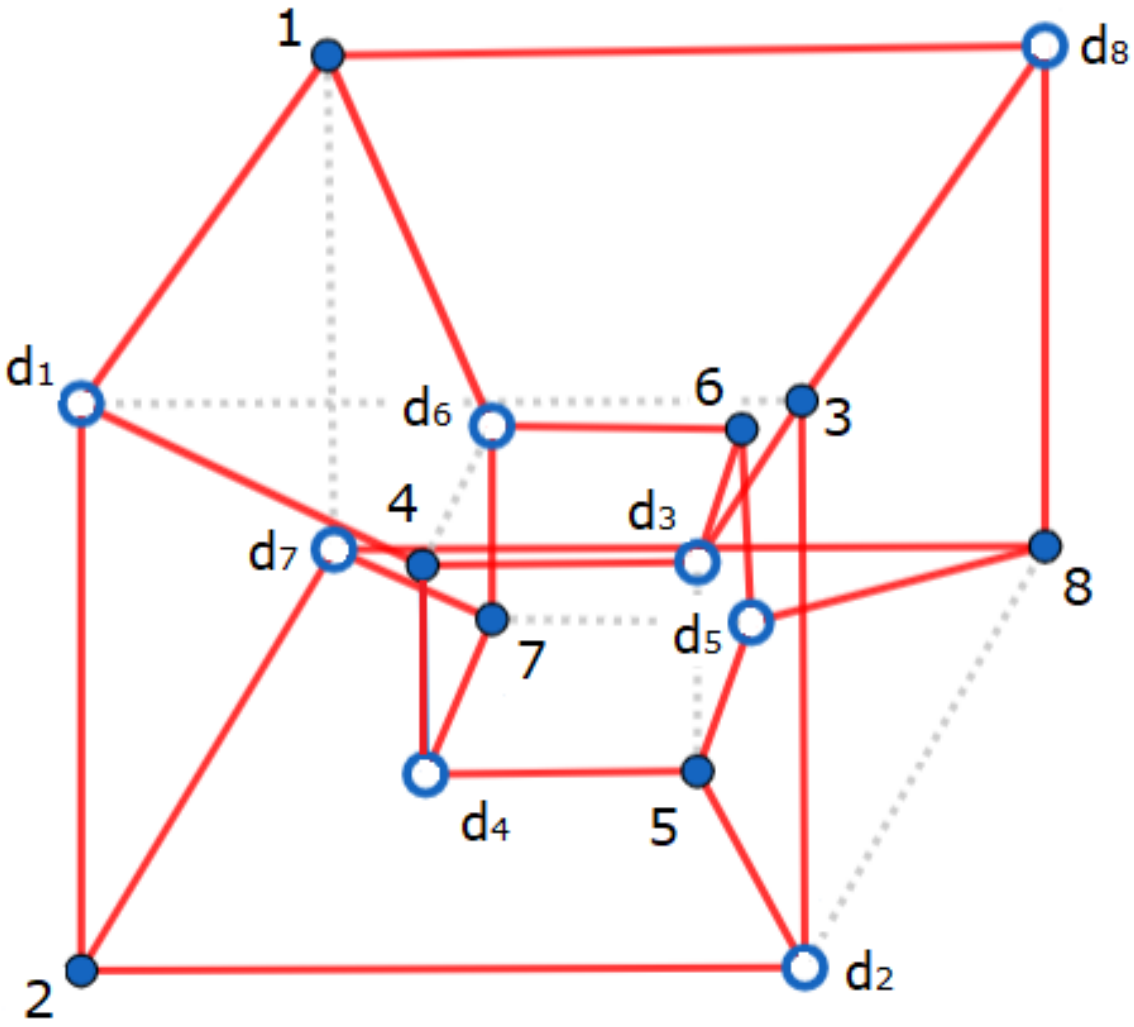
Çizelge 5.7 (8_3) Mobius-Kantor konfigürasyonu üzerinde bulunma tablosu

	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8
1	X					X		X
2	X	X					X	
3		X	X					X
4	X		X	X				
5		X		X	X			
6			X		X	X		
7				X		X	X	
8					X		X	X



Şekil 5.7 (8_3) Mobius-Kantor Konfigürasyonunun farklı bir gösterimi

işaretlenir. Levi graf çizimindekine benzer şekilde noktalar içi dolu, doğrular içi boş köşeler olsun. Sekizgenin içine sekiz köşeli bir yıldız çizilip yıldızın köşeleri de sekizgende olduğu gibi sırasıyla nokta ve doğruları temsil edecek şekilde işaretlenir. Yıldızın her köşesi hem saat yönünde hem de saat yönünün tersi yönde 3 ilerisindeki köşe ile birleştirilir. Yıldızdaki her köşe yine yıldızdaki iki köşe ile birleşmiş olur. Birleştirilen köşe nokta ise 3 ilerisindeki noktalar sırayla işaretleme yapıldığından doğrular, doğru ise noktalar ile birleştirilmiş olur.

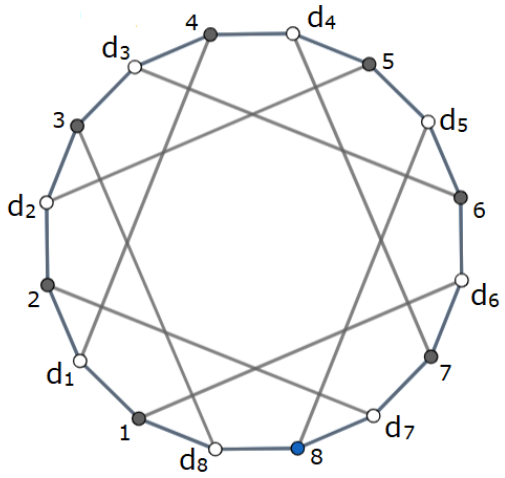


Şekil 5.8 (8_3) Mobius-Kantor konfigürasyonunun Levi grafının içi içe geçmiş küpler ile gösterimi

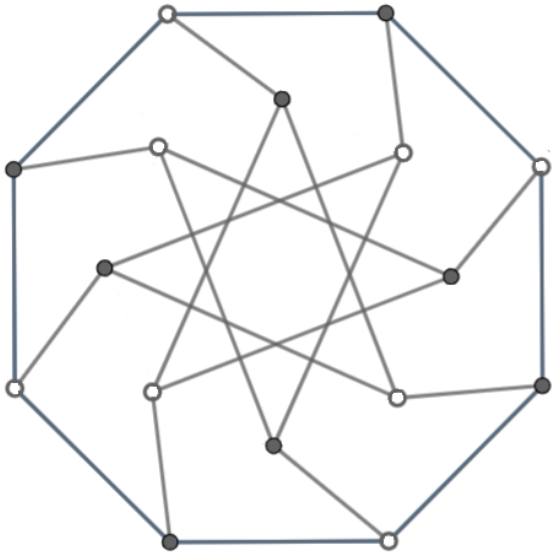
Sekizgende ise birleştirme işlemi alınan köşenin yine sekizgen üzerindeki iki taraftaki komşu köşelerle birleştirilmesi ile yapılır. Hem sekizgende hem de yıldızda her köşe 2 köşe ile birleşmiş olduğundan 3. birleştirme işlemi sekizgen ve yıldız arasında olur. Sekizgen üzerinde aldığımız köşe nokta ise yıldız üzerindeki en yakın doğru ile doğru ise yıldız üzerindeki en yakın nokta ile birleştirilir (Şekil 5.10).

5.1.2.1 (8_3) Konfigürasyonunun inşası

(8_3) konfigürasyonunun inşaası için $\{X, x_1, x_2, x_3, Y, y_1, y_2, y_3\}$ noktalar kümesini alalım. $\{x_1, x_2, x_3\}$ ve $\{y_1, y_2, y_3\}$ ve doğrudaş noktalar olsun. Diğer 6 doğruyu ise $\{X, y_i, x_i + 1\}$ ve $\{Y, x_i, y_i+1\}$ (mod 3) e göre inşa edelim. Böylelikle $\{X, y_1, x_2\}$, $\{X, y_2, x_3\}$, $\{X, y_3, x_1\}$, $\{Y, x_1, y_2\}$, $\{Y, x_2, y_3\}$ ve $\{Y, x_3, y_1\}$ noktalarının oluşturduğu 6 doğruyu inşaa etmiş oluruz



Şekil 5.9 (8_3) Mobius-Kantor Konfigürasyonunun Levi Grafı

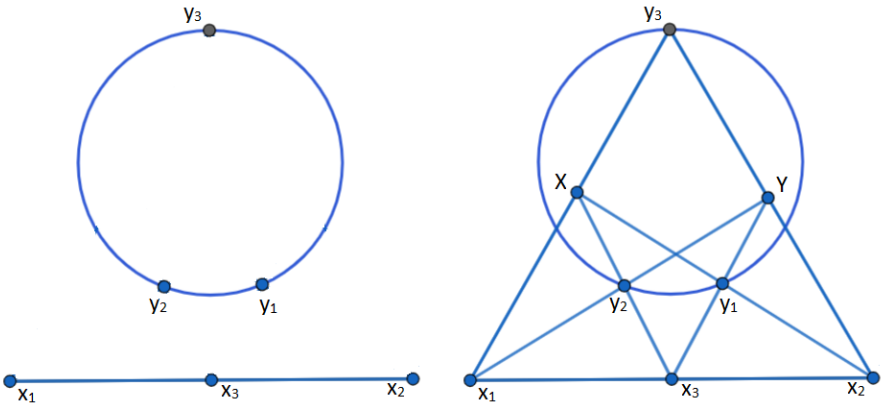


Şekil 5.10 (8_3) Mobius-Kantor Konfigürasyonunun Genelleştirilmiş Petersen Grafı

(Şekil 5.11). Bu yapıda $\{X, Y\}$, $\{x_1, y_1\}$, $\{x_2, y_2\}$ ve $\{x_3, y_3\}$ nokta ikililerinin doğrudaş olmadıkları da görülmektedir.

5.1.3. (9_3) Pappus Konfigürasyonu

9 nokta ve 9 nokta barındıran her noktasından 3 doğru geçen ve her doğrusu üzerinde 3 nokta bulunduran konfigürasyona (9_3) konfigürasyonu denir. Bu konfigürasyon Pappus



Şekil 5.11 (8_3) Mobius-Kantor Konfigürasyonunun İnşası

Çizelge 5.8 (9_3) Pappus konfigürasyonu

d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9
1	1	1	2	2	3	3	4	7
2	4	5	4	6	5	6	5	8
3	8	9	7	9	7	8	6	9

teoreminden de (4.5.2 Pappus Teoremi) bilindiği üzere farklı iki doğru üzerinde ve birbirinden farklı 3 er tane olmak üzere alınan 6 nokta ve teoremin uygulanmasıyla oluşan 3 doğrusal noktanın ilavesi ile oluşan yapıda, toplam 9 nokta ve 9 doğru olması ve her noktadan 3 doğru geçmesi ve her doğru üzerinde 3 nokta olması sebebiyle Pappus Konfigürasyonu olarak da bilinir.

Fano, Mobius-Kantor ve Pappus konfigürasyonlarını incelediğimizde şu sonuçlara varabiliriz:

i) (7_3) Fano konfigürasyonunda her nokta diğer noktaların tamamıyla doğrudaştır.

ii) (8_3) Mobius-Kantor konfigürasyonunda ise her nokta, noktalar kümesindeki noktalardan bir nokta ile aynı doğru üzerinde olmamaktadır.

iii) (9_3) Pappus konfigürasyonun da ise her noktanın doğrudaş olamadığı farklı iki nokta vardır.

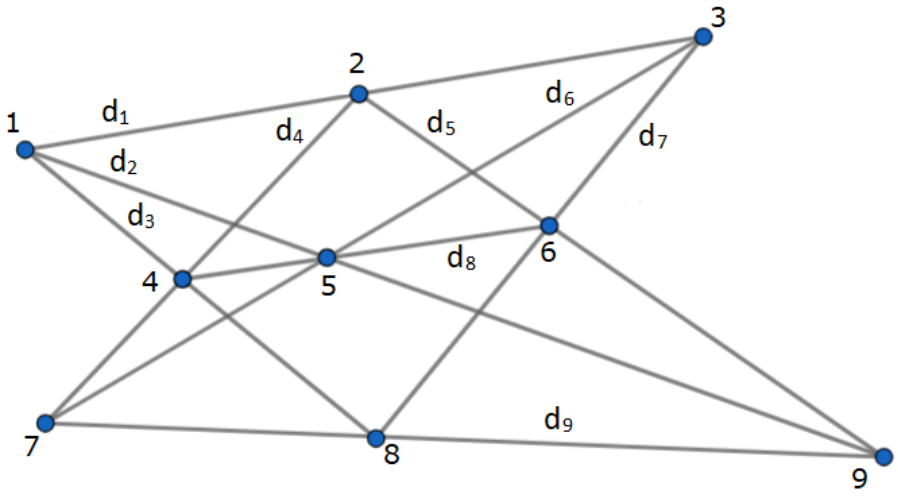
Çizelge 5.9 (9_3) Pappus konfigürasyonu üzerinde bulunma tablosu

	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9
1	X	X	X						
2	X			X	X				
3	X					X	X		
4		X		X				X	
5			X			X		X	
6					X		X	X	
7				X		X			X
8		X					X		X
9			X		X				X

Çizelge 5.8 de bir (9_3) konfigürasyonunun konfigürasyon tablosu, Çizelge 5.9 da ise aynı konfigürasyonun üzerinde bulunma tablosu görülmektedir. Tabloda da görüldüğü üzere noktalar kümesi $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ve doğrular kümesi $\{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8, d_9\}$ olan konfigürasyonda 1 noktası 6 ve 7 noktaları ile 2 noktası 5 ve 8 noktaları ile 3 noktası 4 ve 9 noktaları ile aynı doğru üzerinde bulunmamaktadır.

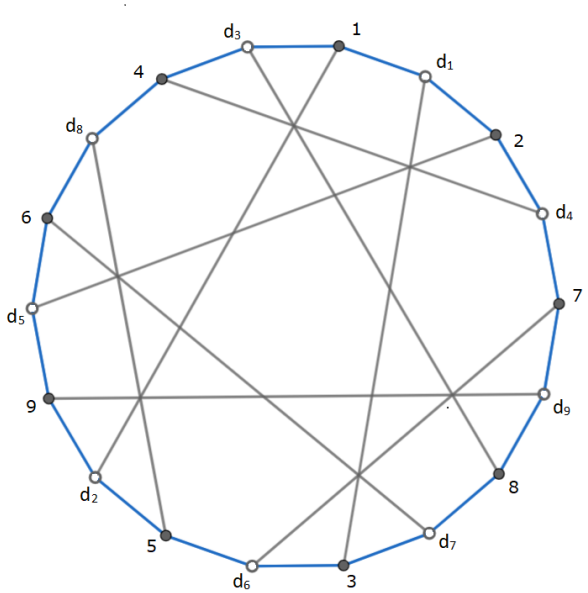
Pappus teoremi ile oluşturulabilen bir (9_3) konfigürasyonu Şekil 5.12 deki gibidir. Doğruların tamamı düz olarak gösterilebildiğinden konfigürasyon Öklid düzleminde gösterilebilmektedir. Her cisimden elde edilen projektif düzlem Pappussel olduğundan Pappus konfigürasyonunu içerir. Pappus konfigürasyonu dejenere olmuş bir altıgen üzerindeki 6 nokta için düşünüldüğünde Pascal teoremininin özel bir halidir. O zaman noktalar bir konik üzerinde alınan 6 nokta yerine iki farklı doğru üzerinde üçer tane olacak şekilde düzenlenmektedir.

Şekil 5.12 de verilen Pappus konfigürasyonunun Levi grafı ise Şekil 5.13 teki gibidir. İçi boş olarak işaretli köşeler doğruları, içi dolu olarak işaretlenen köşeler noktaları göstermektedir. Konfigürasyonun Levi grafında 9 nokta ve 9 doğru olduğundan gösterimde 18 köşe kullanılmaktadır. 18 köşenin her biri komşu köşe ile birleşir. Sonrasında doğruları temsil 9 köşeyi komşu olmak üzere 3 erli gruplara ayırabiliriz. Birinci grup $\{d_3, d_1, d_4\}$, ikinci grup $\{d_9, d_7, d_6\}$, üçüncü grup $\{d_2, d_5, d_8\}$ olsun. Her grubun 1. ve 2. elemanı saat yönündeki 7 ilerideki köşe ile, 3. elemanını ise saat yönünün tersinde 5 gerideki köşe ile birleştirildiğinde toplam 9 birleştirme daha yapılmış olur. Böylelikle tüm nokta ve doğruların 3. bağlantıları da tamamlanmış olur. 18 gen üzerindeki komşu köşelerle yapılan 18 birleştirmeden sonra yapılan bu 9 birleştirme ile grafta 18 köşe ve 27 bağlantı olur.



Şekil 5.12 (9_3) Pappus Konfigürasyonu

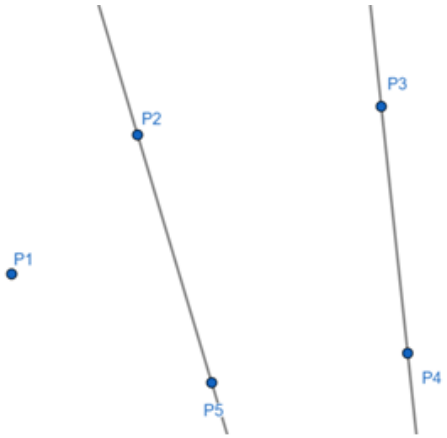
(9_3) konfigürasyonunun genelleştirilmiş Petersen grafı için 2 adet 9-gen kullanılmalıdır. Fakat bu durumda nokta ve doğruların sırayla kullanıldığı düzende iki nokta veya iki doğru komşu olur. O zaman iki nokta veya iki doğru komşu olduğunda Petersen Grafını oluşturmak mümkün değildir.



Şekil 5.13 (9_3) Pappus Konfigürasyonu Levi Grafı

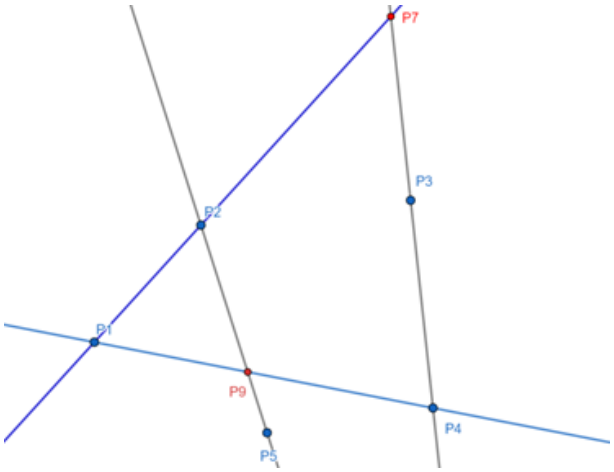
5.1.3.1 Bağımsız 5 nokta ile Pappus konfigürasyonunun inşası

Şekil 5.12 de ve Çizelge 5.8 de verilen konfigürasyon sadece bir Pappus Konfigürasyonu örneğidir. Düzlemdeki herhangi bir Pappus konfigürasyonunu inşa etmek mümkün müdür? Konfigürasyonun 9 noktası ve 9 doğrusunu inşa etmek için düzlemde herhangi üçü doğrudaş olmayan serbest olarak seçilen noktalar $P1$, $P2$, $P3$, $P4$, $P5$ olsun. $P2$ ve $P5$ noktaları ile $P3$ ve $P4$ noktalarının oluşturduğu doğrular çizilsin (Şekil 5.14).



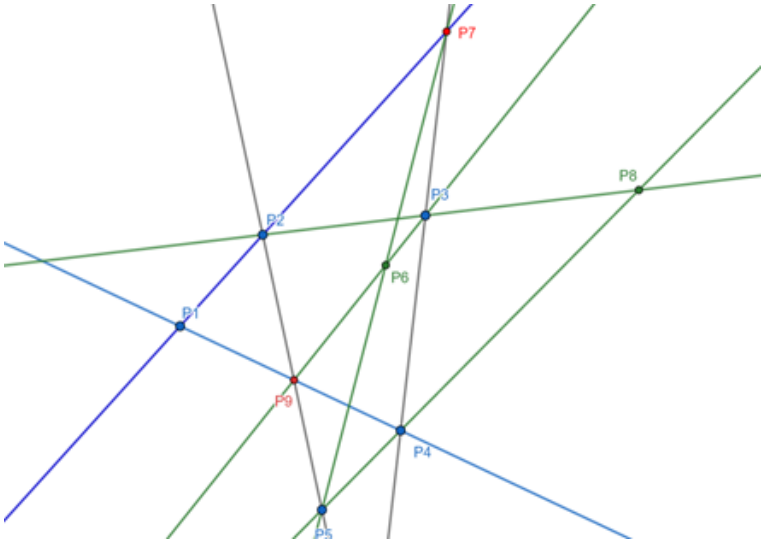
Şekil 5.14 Düzlemde rastgele seçilen 5 nokta ile P2P5 ve P3P4 doğrularının alınması

$P1P2$ ile $P3P4$ doğrularının kesişimi $P7$ noktası, $P1P4$ ve $P2P5$ doğrularının kesişimi ise $P9$ noktası olarak adlandırılsın (Şekil 5.15).



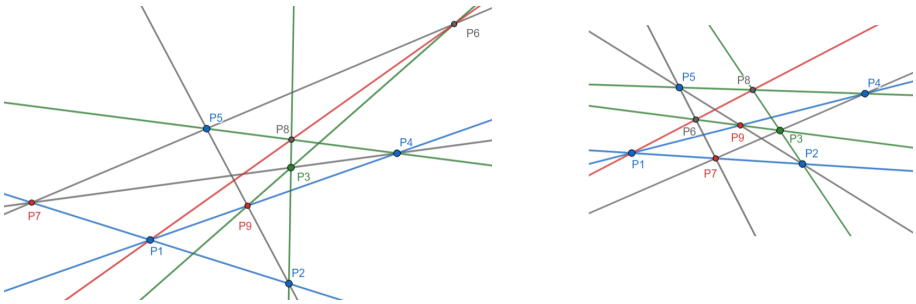
Şekil 5.15 P7 ve P9 noktalarının belirlenmesi

Elde edilen 7 noktaya ilave olarak $P8$ noktası $P2P3$ ve $P4P5$ doğrularının arakesiti olsun. $P6$ noktası ise $P3P9$ ve $P5P7$ doğrularının kesişimi olarak alındığında $P1$, $P8$ ve $P6$ noktaları da doğrudaş olur. Böylelikle 9 nokta ve 9 doğrulu (9_3) konfigürasyonu elde edilir. Böylece düzlemde seçilen bağımsız 5 nokta ile Pappus Konfigürasyonu elde edilebildiği gösterilmiş olur (Şekil 5.16).



Şekil 5.16 P6 ve P8 noktalarının belirlenmesi

Serbest seçilen $P1$, $P2$, $P3$, $P4$, $P5$ noktaları ile elde edilen farklı Pappus Konfigürasyonlarından iki tanesi Şekil 5.17 de görülmektedir.



Şekil 5.17 Seçilen 5 nokta ile farklı Pappus Konfigürasyonları

5.1.4. (10_3) Desargues Konfigürasyonu

10 nokta ve 10 doğruya sahip, her doğrusu üzerinde 3 nokta bulunduran ve her noktasından 3 doğru geçen konfigürasyondur. Desargues Teoremi ile bu konfigürasyon elde

Çizelge 5.10 (10_3) kombinatoryal konfigürasyon tablosu

d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	1
4	5	6	7	8	9	10	1	2	3

edilebildiğinden (10_3) konfigürasyonu Fransız matematikçi Girard Desargues'tan (1591-1661) adını alarak Desargues konfigürasyonu olarak adlandırılmaktadır. Çizelge 5.2'de (n_3) kombinatoryal konfigürasyonların konfigürasyon tablosunun oluşturulmasında kullanılan doğruların inşa modelinde görülüyor ki $(modn)$ ye göre d_i doğruları i, $i+1$ ve $i+3$ noktalarından oluşmaktadır. Bu oluşum Desargues konfigürasyonundaki doğrular için geçerli değildir. Yani,

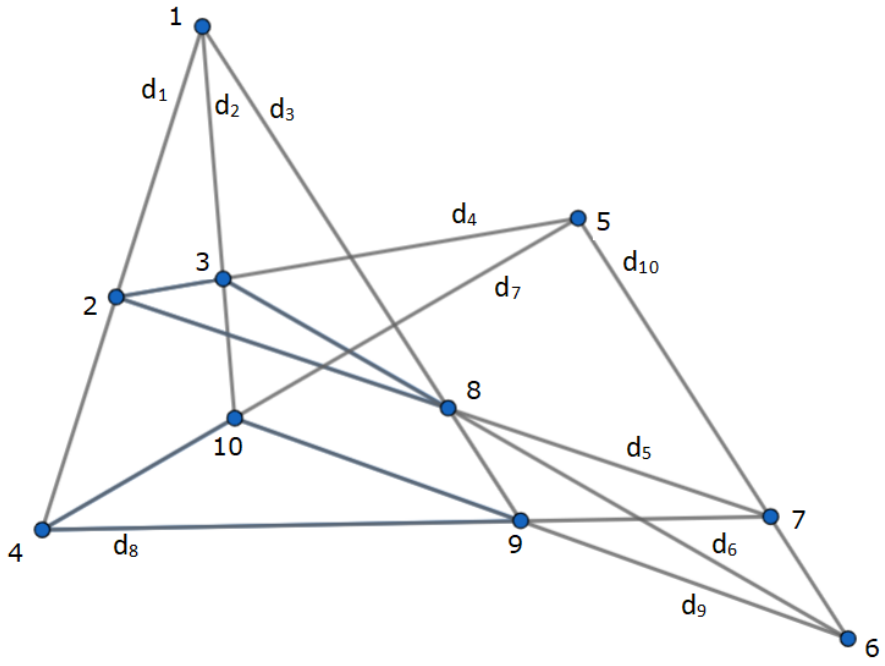
$$d_i = \{i, i+1, i+3\}(mod10)$$

biçiminde oluşturulamamaktadır. Her nokta kendi dışındaki 6 nokta ile bir doğru oluştururken bu 6 nokta dışındaki 3 nokta ile doğrudaş olamaz. Örneğin $\{1,2,4\}$, $\{8,9,1\}$ ve $\{10,1,3\}$ doğrularının ortak noktası $\{1\}$ noktasıdır. $\{1\}$ noktası $\{5\}$, $\{6\}$ ve $\{7\}$ noktaları ile aynı doğru üzerinde bulunmamaktadır. Benzer şekilde $\{2,3,5\}$, $\{9,10,2\}$ ve $\{1,2,4\}$ doğrularının ortak noktası $\{2\}$ noktasıdır. $\{2\}$ noktası $\{6\}$, $\{7\}$ ve $\{8\}$ noktaları ile bir doğru oluşturmamaktadır. Aynı şekilde devam edildiğinde $\{3\}$ noktası $\{7\}$, $\{8\}$ ve $\{9\}$ noktaları ile aynı doğru üzerinde bulunmamaktadır (Çizelge 4.10). Doğrular, $d_i = i, i+1, i+3(mod10)$ şeklinde seçildiğinden perspektiflik merkezi olarak aldığımız nokta ne olursa olsun eksenden perspektifliği sağlayacak doğru bu şekilde elde edilemez.

Şekil 5.18'de bir Desargues Konfigürasyonu gösterilmiştir. Şekil 5.18 e göre $\{2,8,3\}$ ve $\{4,9,10\}$ üçgenlerinin perspektiflik merkezi $\{1\}$ noktası, perspektiflik ekseni ise $\{5,7,6\}$ doğrusudur.

Şekil 5.18'de verilen (10_3) konfigürasyonunun konfigürasyon tablosu Çizelge 5.11'de, üzerinde bulunma tablosu ise Çizelge 5.12'deki gibidir.

Şekil 5.18'de verilen (10_3) konfigürasyonunun Levi grafı Şekil 5.19'da verilmiştir. Bu grafın çizilmesi için 20 köşeli bir çokgenin köşelerinin sırasıyla nokta ve doğru olacak şekilde köşelerinin doğrular için içi boş noktalar için içi dolu noktalar ile işaretlenir. Çokgenin tüm köşeleri komşu köşelerle birleştirilir. Böylelikle konfigürasyonun tüm köşeleri ikişer bağlantı gerçekleştirmiş olur. Üçüncü bağlantılar için doğruları temsil eden



Şekil 5.18 (10_3) Desargues Konfigürasyonu

Çizelge 5.11 (10_3) Desargues konfigürasyon tablosu

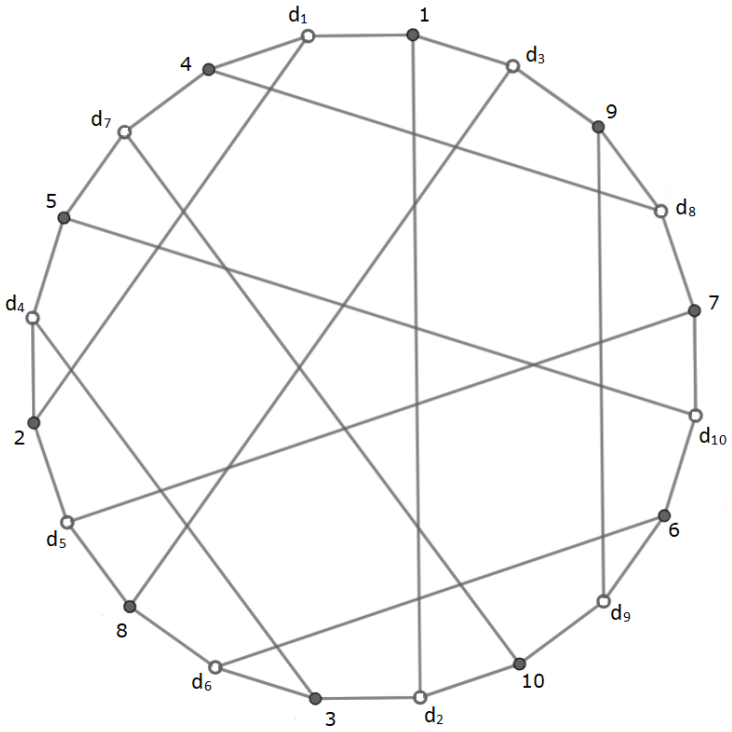
d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_10
1	1	1	2	2	3	4	4	6	5
2	3	8	3	7	6	5	7	9	6
4	10	9	5	8	8	10	9	10	7

köşeler sırasıyla saat yönünün tersi yönünde beş ilerideki köşe ile bir sonraki doğruyu temsil eden köşe ise saat yönünün tersinde dokuz ilerideki köşe ile birleştirilir. Sırasıyla tüm doğrular için birleştirme işlemi yapıldığında tüm köşelerin üçüncü bağlantıları yapılmış olur. Sonuç olarak 20 köşeli, 30 bağlantılı (10_3) konfigürasyonunun Levi grafı elde edilmiş olur (Şekil 5.19).

Desargues Konfigürasyonun genelleştirilmiş Petersen grafı, Mobius-Kantor konfigürasyonunda oluşturulan genelleştirilmiş Petersen grafının oluşturulduğu yöntem ile oluşturulabilir. Yani bir düzgün ongen ve içine çizilen on köşeli yıldız ile elde edilir (Şekil 5.20).

Çizelge 5.12 (10_3) Desargues konfigürasyonu üzerinde bulunma tablosu

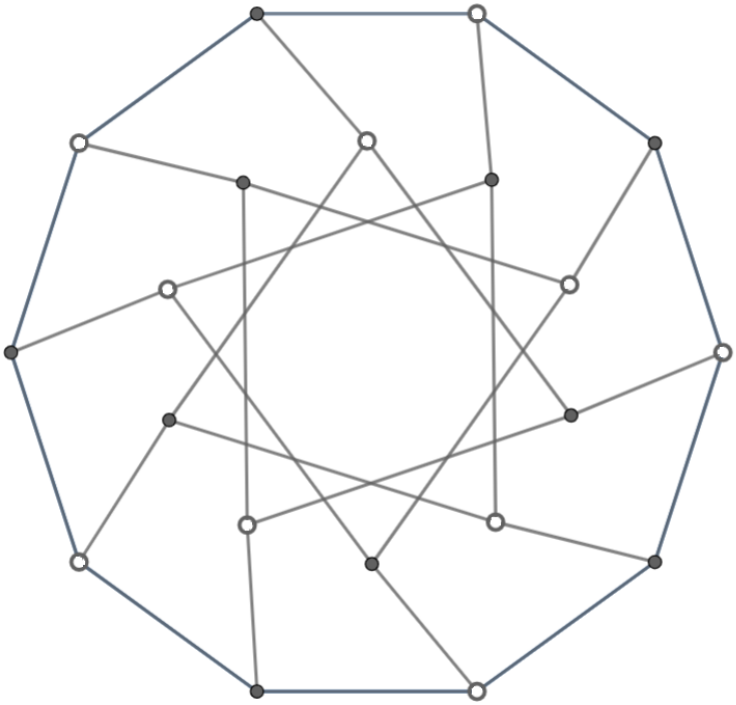
	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_10
1	X	X	X							
2	X			X	X					
3		X		X		X				
4	X						X	X		
5				X			X			X
6						X			X	X
7					X			X		X
8			X		X	X				
9			X					X	X	
10		X					X		X	



Şekil 5.19 (10_3) Desargues Konfigürasyonu Levi Grafı

5.1.5. (15_3) Cremona-Richmond Konfigürasyonu

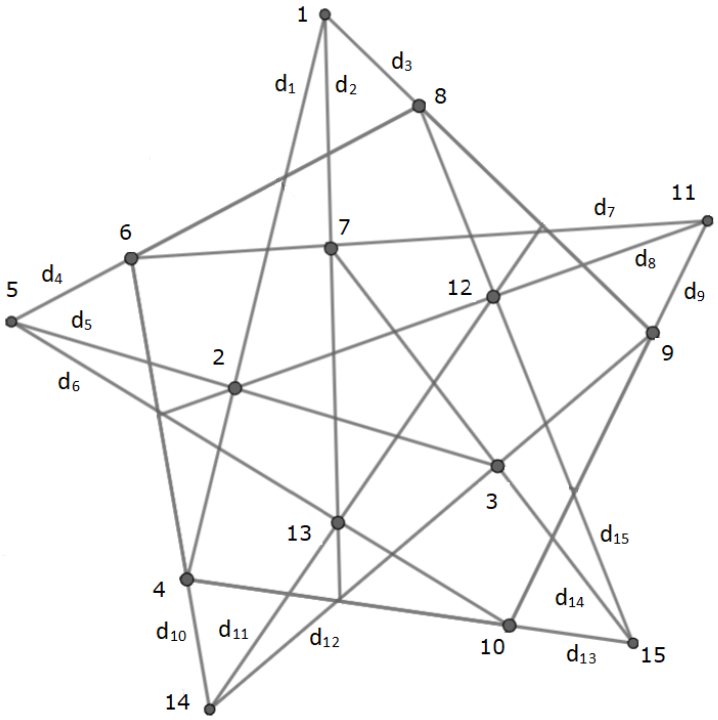
15 nokta ve 15 doğruya sahip, her doğrusu üzerinde 3 nokta bulunduran ve her noktasında 3 doğru geçen konfigürasyondur. Konfigürasyonun farklı bir özelliği nokta ve doğru



Şekil 5.20 (10_3) Desargues Konfigürasyonu Genelleştirilmiş Petersen Grafı

bağlantıları ile üçgen oluşmamasıdır (Şekil 5.21). İtalyan matematikçi Antonio Luigi Gaudenzio Giuseppe Cremona (1830-1913) ve İngiliz matematikçi Herbert William Richmond (1863-1948) tarafından incelenen (153) konfigürasyonu Cremona – Richmond konfigürasyonu olarak bilinmektedir (Pisanski ve Servatius, 2013).

Şekil 5.21 de verilen (15_3) konfigürasyon örneğinin konfigürasyon tablosu Çizelge 5.12'de, üzerinde bulunma tablosu ise Çizelge 5.13'te Levi grafı ise Şekil 5.22 de gösterilmiştir. Levi grafı oluşturmak için düzgün 20-gen içine çizilen bir 10-gen kullanılmıştır. 20-genin 10 köşesi doğru, 10 köşesi nokta, 10-genin 5 köşesi nokta, 5 köşesi doğruları temsil etmektedir. 20-genin kenarları birleştirilir. 20-gen üzerindeki her köşe kenarların birleştirilmesiyle 2 bağlantısını yapmış olur. 20-gen üzerindeki doğruyu temsil eden bir köşe 7 ilerideki köşe (nokta) ile birleştirilir. Aynı işlem doğrular için birer doğru atlayarak 7 köşe ilerideki köşe ile birleştirilir. Bu birleştirmeler sonucunda 20-gendeki 5 nokta ve 5 doğru 3 bağlantısını tamamlar. Diğer 5 nokta ve 5 doğru ise 10-genin kendine yakın köşeleri ile birleşir ve 3. bağlantılarını tamamlarlar. 10-gen 10 köşe birer bağlantısını 20-gen ile birleşerek tamamlamış olur. 10-gendeki noktalar saat yönünde 3 ve 5 köşe ilerideki doğrularla, doğrular ise saat yönünün tersi istikamette 3 ve 5 köşe ilerideki noktalarla birleştirilir. Bu işlem sonucunda tüm köşelerin 3. bağlantısı da tamamlanmış olur.



Şekil 5.21 (15_3) Cremona-Richmond Konfigürasyonu

Çizelge 5.13 (15_3) konfigürasyon tablosu

d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{15}
1	1	1	5	2	5	6	2	9	4	12	3	4	3	8
2	7	8	6	3	10	7	11	10	6	13	9	10	7	12
4	13	9	8	5	13	11	12	11	14	14	14	15	15	15

5.2. (n_3) Konfigürasyonlarının Sayıları

3-konfigürasyonların gerçekleştirilebilirliğinden bağımsız olarak izomorfik olmayan konfigürasyon sayıları Çizelge 5.15'te verilmiştir (Gropp, 1997). (n_3) konfigürasyonlar n<7 için tanımlı olmadığından konfigürasyon sayısı çizelgede gösterilmemiştir. Çizelgeye göre (10_3) konfigürasyon sayısı 10 tanedir. Klasik 3-konfigürasyonlar arasında (10_3) Desargues konfigürasyonu bu 10 konfigürasyondan bir tanesidir.

Çizelge 5.14 (15_3) Cremona-Richmond konfigürasyonu üzerinde bulunma tablosu

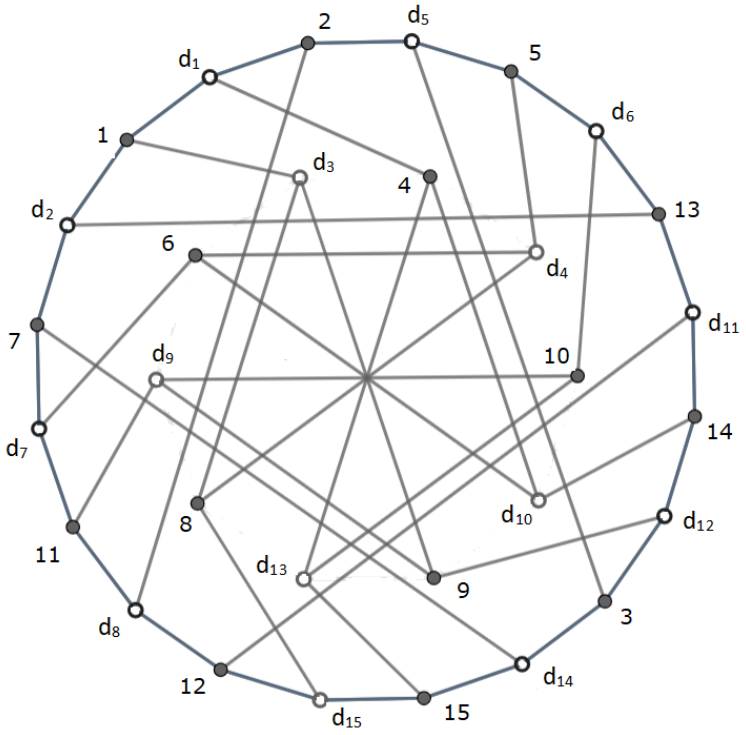
	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{15}
1	X	X	X												
2	X				X			X							
3					X							X		X	
4	X									X			X		
5				X	X	X									
6				X			X			X					
7		X					X							X	
8			X	X											X
9			X						X			X			
10						X			X				X		
11							X	X	X						
12								X			X				X
13		X				X					X				
14										X	X	X			
15													X	X	X

Çizelge 5.15 (n_3) konfigürasyonların sayısı

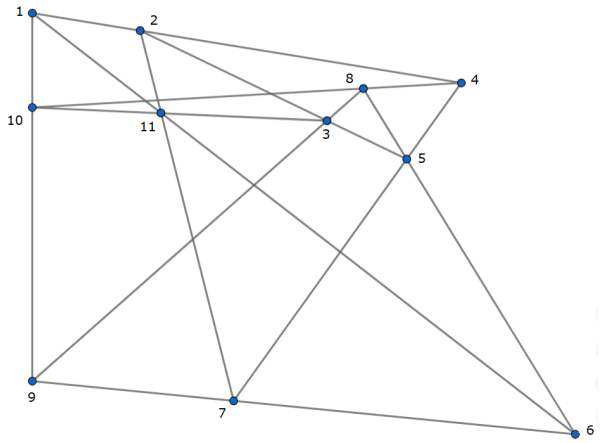
7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
1	1	3	10	31	229	2036	21399	245342	...

5.3. Klasik olmayan 3-konfigürasyon Örnekleri

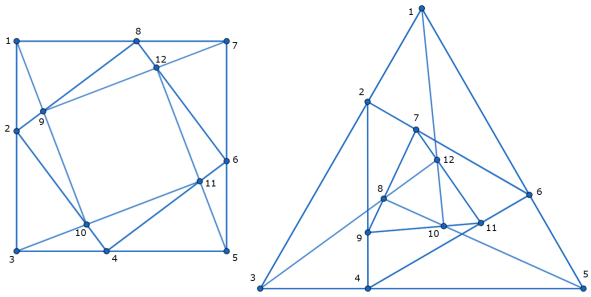
Klasik olarak adlandırılmayan diğer 3-konfigürasyonlardan (11_3) konfigürasyonunun diyagramı Şekil 5.23'te, (12_3) konfigürasyonunun diyagramı Şekil 5.24'te, (14_3) konfigürasyonunun diyagramı Şekil 5.25'te, (17_3) konfigürasyonunun diyagramı Şekil 5.26'da, (18_3) konfigürasyonunun diyagramı Şekil 5.27'de, (22_3) konfigürasyonunun diyagramı Şekil 5.28'de ve (27_3) konfigürasyonunun diyagramı da Şekil 5.29'da görülmektedir.



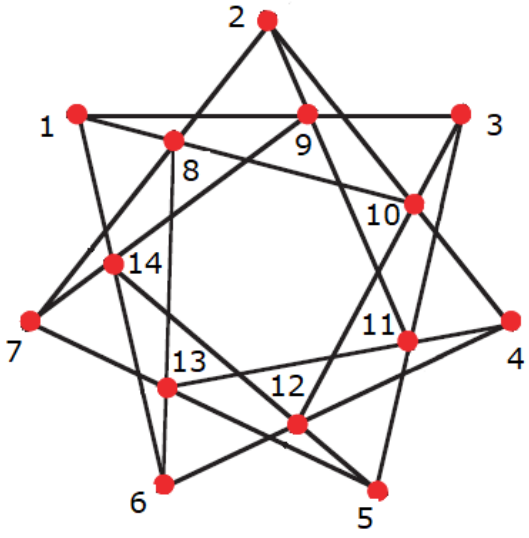
Şekil 5.22 (15_3) Cremona-Richmond Konfigürasyonu Levi Grafı



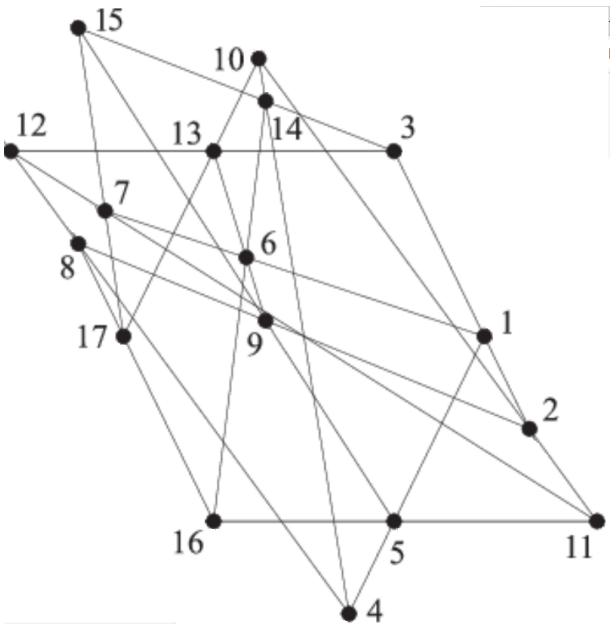
Şekil 5.23 (11_3) Konfigürasyonu



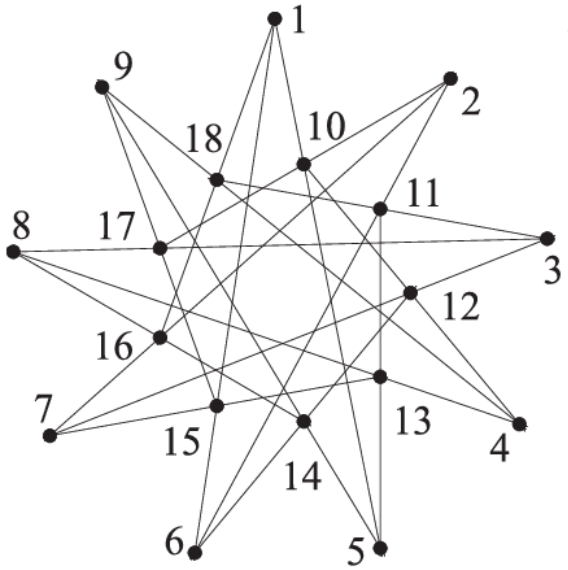
Şekil 5.24 (12_3) Konfigürasyonu



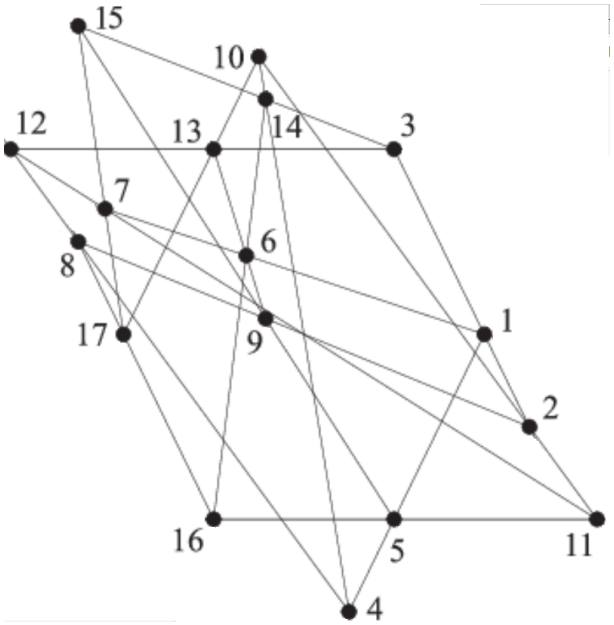
Şekil 5.25 (14_3) Konfigürasyonu



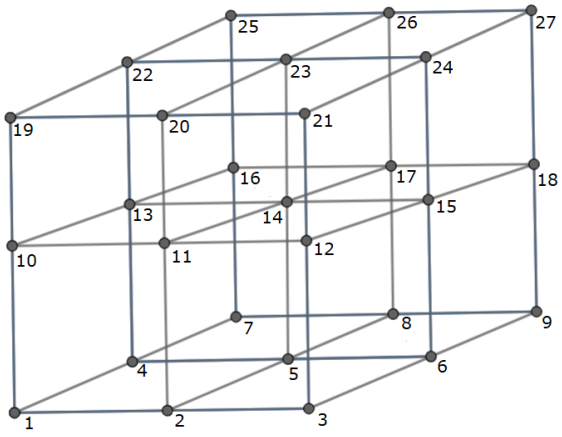
Şekil 5.26 (17_3) Konfigürasyonu



Şekil 5.27 (18_3) Konfigürasyonu



Şekil 5.28 (22_3) Konfigürasyonu



Şekil 5.29 (27_3) Konfigürasyonu

6. GEOMETRİK KONFİGÜRASYON UYGULAMALARI

Bu bölümde günlük hayat problemlerine geometrik konfigürasyonlarla çözüm üretilen dört adet uygulama örneği tasarlanarak sunulmuştur.

6.1. Afin Düzlem ve $(9_4, 12_3)$ Konfigürasyonu ile Modellenen Bir Aşı Uygulaması

Bir aşı firması yeni geliştirdiği bir aşıyı birer ay ara ile toplamda üç kere yeteri sayıda denek içeren denek gruplarına uygulayarak sonuçlarını analiz etmek istemektedir. Her uygulama safhasında uygulanan aşı miktarını da 3 farklı dozajda uygulayarak aşının etkisini de aynı zamanda belirlemek istemektedir. Firmanın bu uygulama sonucunda görmek istediği sonuçlar ise şunlardır;

1) Bir uygulama seviyesinde farklı dozajlar verildiğinde uygulamanın verdiği sonuçlar,

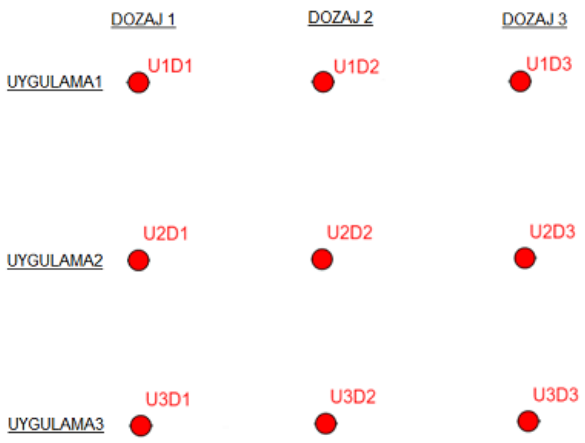
2) Üç uygulama safhasında da dozajların sabit tutulması durumunda dozajların verdiği sonuçlar,

3) Her uygulama seviyesinde farklı dozajlar uygulandığında elde edilen sonuçlar.

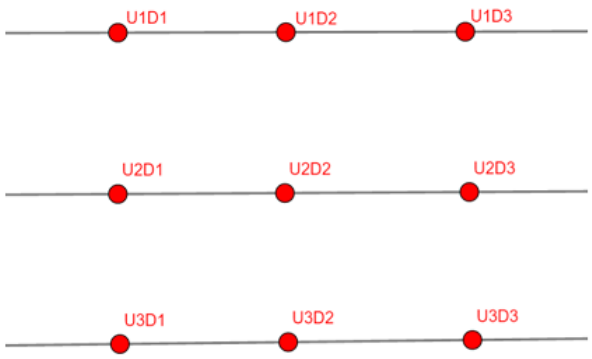
Uygulamaları sırasıyla U1, U2, U3 ve kullanılan aşı dozaj miktarlarını da sırasıyla D1, D2 ve D3 olarak etiketlendirilsin. i,j indisleri $\{1, 2, 3\}$ kümesinin elemanları olmak üzere; i. uygulamada kullanılan j dozaj miktarı UiDj noktası ile gösterilsin. Örneğin 1. Uygulamada dozaj seviyesi D1 kullanılmış ise U1D1, D2 kullanılmış ise U1D2 noktasını belirtir. Tüm uygulama safhalarını ve kullanılan dozaj miktarlarını belirleyen UiDj noktalarının tümü Şekil 6.1'de gösterilmiştir.

Görmek istenilen 3 sonuç tipi doğrular ile temsil edilsin.

1) Bir uygulama safhasında farklı seviyede dozajlar verildiğinde uygulama safhalarının verdiği sonuçları temsil eden doğrular ise Şekil 6.2'de gösterilmiştir. Üç uygulama safhasını temsil eden üç doğru paraleldir.



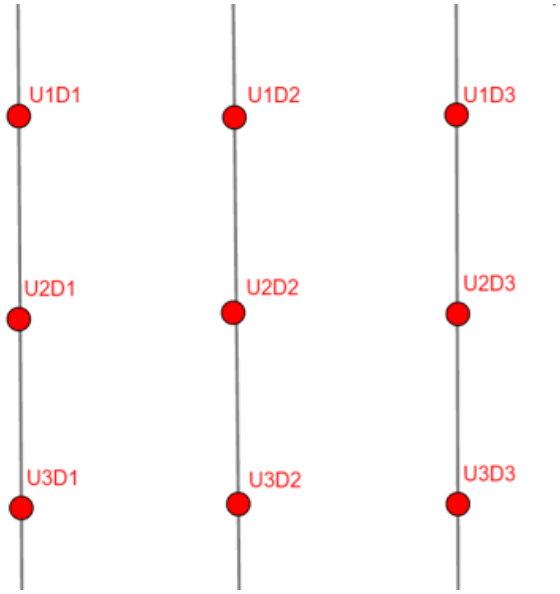
Şekil 6.1 Aşı örneği uygulama safhaları ve dozaj miktarlarının nokta olarak tanımlaması



Şekil 6.2 Uygulama safhalarında farklı dozaj uygulandığında her uygulama seviyesinde elde edilen sonuçlar

2) Uygulama safhalarında aynı seviyede dozajların kullanılması durumunda elde edilen sonuçları Şekil 6.3'deki görülen doğrular temsil eder. Elde edilen bu üç doğru yine paraleldir ve 3 uygulamada da dozaj seviyesinin 1. seviye, dozaj seviyesinin 2. ve dozaj seviyesinin 3. seviye olduğu durumlar görülmektedir.

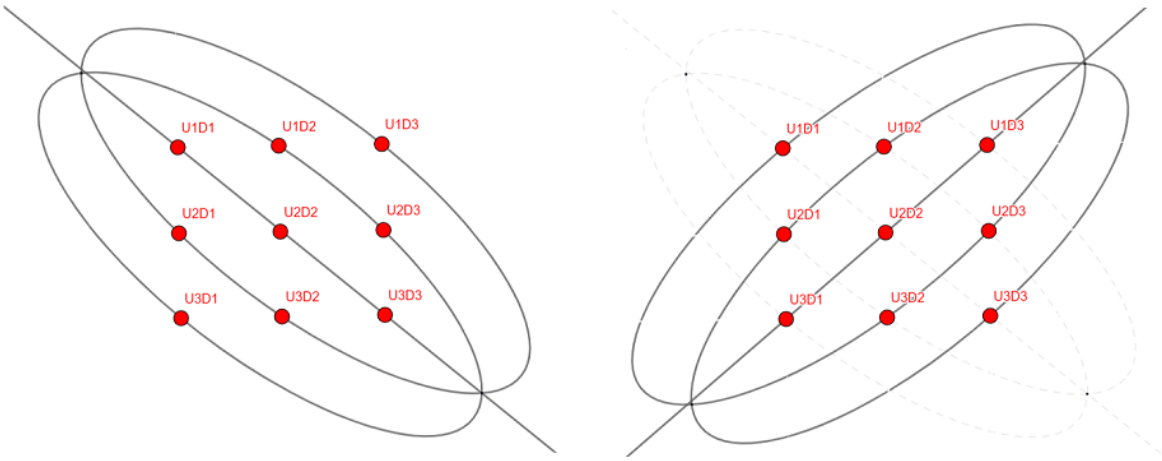
3) Her uygulama safhasında farklı seviyede dozajlarda aşı uygulandığında elde edilen sonuçlar incelenirse örneğin birinci aşı uygulama safhasında dozaj miktarı 1, ikinci aşı uygulama safhasında uygulanan dozaj miktarı 2, üçüncü aşı uygulama safhasında uygulanan aşı dozaj miktarı 3 olduğunda bu sonuç bir doğru ile ve benzer şekilde birinci aşı uygulama safhasında dozaj miktarı 1, ikinci aşı uygulama safhasında dozaj miktarı 3,



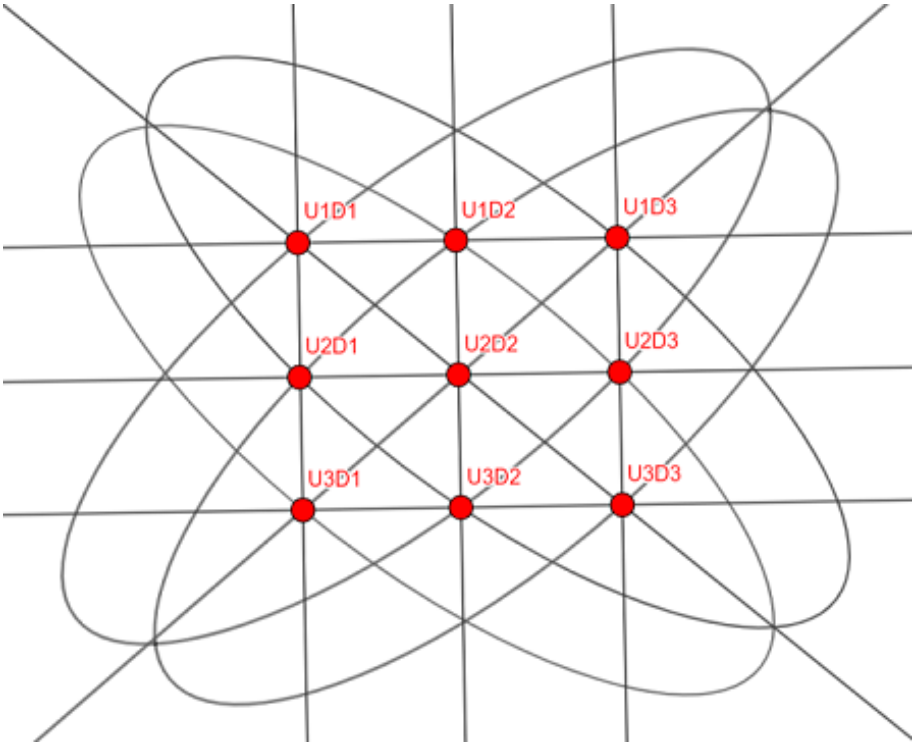
Şekil 6.3 Uygulama safhalarında aynı dozaj uygulandığında elde edilen sonuçlar

üçüncü aşı uygulama safhasında dozaj miktarı 3 olduğunda sonucu yine farklı bir doğru ile gösterilebilir. Bu şekilde farklı safhalarda farklı dozaj miktarları ile elde edilebilecek sonuçları gösteren doğrular yine paralel olur (Şekil 6.4).

Tüm sonuç tiplerini aynı şekilde birleştirirsek Şekil 6.5'teki yapıyı elde edilir. Şekilde toplam $3^2 = 9$ nokta ve $3^2 + 3 = 12$ tane doğru görülmektedir. Mertebesi 3 olan 9 noktalı ve 12 doğrulu Afin Düzlem modellemesi elde edilmiştir.



Şekil 6.4 Farklı uygulama safhalarında farklı dozajlar uygulandığında her uygulama seviyesinde elde edilen sonuçlar



Şekil 6.5 Tüm sonuçların tek şekil üzerinde değerlendirilmesi

Şekil üzerinde alınan her nokta ikilisini birleştiren doğru vardır ve bu doğrulardır tektir. Yani Afin Düzlem Aksiyomlarından 1. si sağlanmış olur.

Alınan herhangi bir doğru üzerinde olmayan noktaların her birinden aldığımız doğru ile kesişim kümeleri boş küme olan bir doğru vardır. Her doğrunun üzerinde olmayan bir noktadan bir paralel çizilebildiğinden 2. Aksiyomda sağlanmış olur.

U1D1, U1D2 ve U2D3 noktaları doğrudaş değildir. Doğrudaş olmayan 3 nokta olma aksiyomu olan 3. Aksiyomun da sağlandığı görülmektedir. Böylelikle Şekil 6.5'te toplam nokta sayısı 9, toplam doğru sayısı 12 olan 3. mertebeden bir Afin Düzlem örneği görülmektedir.

9 noktalı ve 12 doğrulu bu düzlem aynı zamanda her noktasından 4 doğru geçen ve her doğrusu üzerinde 3 nokta bulunduran bir $(12_3, 9_4)$ konfigürasyonudur.

Çizelge 6.1 Yarışmacıların gruplarının belirlendiği tablo

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8	G_9	G_{10}	G_{11}	G_{12}	G_{13}
Y_1	1			1	1					1			
Y_2		1			1			1	1				
Y_3	1					1			1			1	
Y_4	1		1					1			1		
Y_5			1		1		1					1	
Y_6				1			1		1		1		
Y_7			1						1	1			1
Y_8	1	1					1						1
Y_9					1	1					1		1
Y_{10}				1				1				1	1
Y_{11}						1	1	1		1			
Y_{12}		1								1	1	1	
Y_{13}		1	1	1		1							

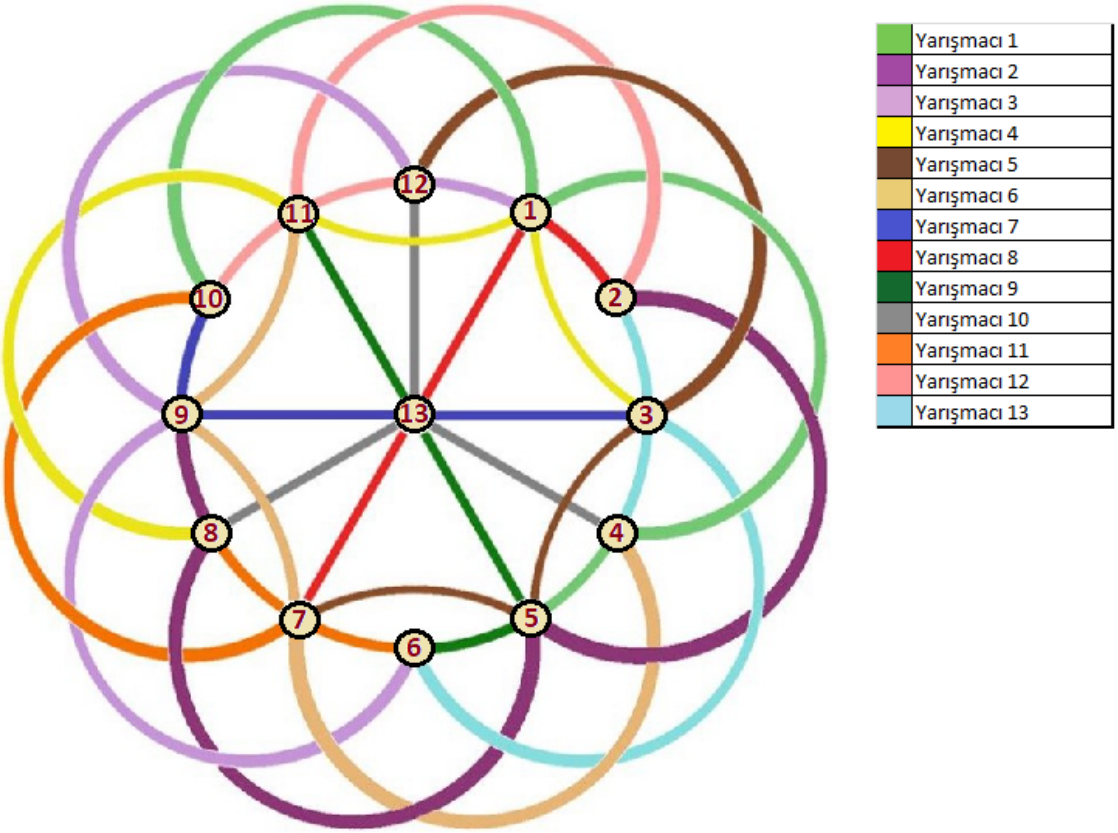
6.2. (13_4) Konfigürasyonu ile Bir Yarışmanın Gruplarının Modellenmesi

Bir televizyon kanalının düzenlediği bilgi yarışması programında 13 yarışmacı finalde yarışmaya hak kazanmıştır. Yarışma formatı gereği 4 erli gruplar oluşturularak yarışmacıların her birinin diğer yarışmacılarla yarışması sağlanacaktır. Belirlenen her 4 lü grupta yarışmacılar aldıkları puanları muhafaza edecektir. Yarışma sonunda her yarışmacı kendisi haricindeki tüm yarışmacılarla kesinlikle aynı grupta bir kere yer alıp yarışmalı, iki yarışmacı aynı grupta sadece bir kere yer almalıdır. Bu koşulları sağlayan grupları belirleyip bir konfigürasyon oluşturalım.

Yarışmacılar, $\{Y_1,\ Y_2,\ Y_3,\ ...\ ,\ Y_{13}\}$ kümesinin elemanları, gruplar, $\{G_1, G_2, G_3, ..., G_{13}\}$ kümesinin elemanları olsun.

Yarışmacıları satırlarda, grupları sütunlarda gösterecek şekilde oluşturulacak kombinatoryal çözümlerden bir tanesi Çizelge 6.1'de gösterilmiştir. Üzerinde bulunma tablosu olarak da daha önce adlandırılan bu tabloda Y_1 yarışmacısının bulunduğu gruplar G_1, G_4, G_5 ve G_{10} dur. Yine tabloya göre G_1 grubunda Y_1, Y_3, Y_4 ve Y_8 yarışmacıları yarışacaktır. Oluşturulan bu tabloda her yarışmacının diğer tüm yarışmacılarla aynı grupta yer aldığı ve sadece bir kere aynı grupta yer aldığı görülmektedir. Toplamda 13 grup oluşturulmuş her grupta 4 yarışmacı yarışmaktadır.

Bu yarışmada yarışmacılar doğrular ve gruplar noktalar ile temsil edilsin. Doğruları farklı renklerle temsil ederek noktaları problemin çözümlerinden birisi verilmiş olan Çizelge 6.1'e uygun şekilde doğrularla bağlanırsa Şekil 6.6'daki model elde edilir.



Şekil 6.6 13 yarışmacı ve 13 grup ile elde edilen (13_4) konfigürasyon örneği

Bu konfigürasyonda toplam 13 nokta ve 13 doğru vardır. Alınan birbirinden farklı iki nokta kesinlikle aynı doğru üzerinde yer almakta ve sadece bir kere aynı doğru üzerinde yer almaktadır. Bu ifade ile projektif düzlem aksiyomlarından 1. si sağlanmış olur.

Yine aldığımız her farklı iki doğrunun aynı grupta yer aldığı bir grup kesinlikle vardır. Projektif düzlem olma koşullarından 2. aksiyom da sağlanmış olur.

Herhangi üçü doğrudaş olmayan 4 noktanın varlığı da görüldüğünden 3. aksiyom da sağlanır.

Her doğru üzerinde; $3 + 1 = 4$ nokta vardır.

Çizelge 6.2 A ve B yarışmacılarının günlere göre rakam seçim tablosu örneği

A

Pazartesi	Salı	Çarşamba	Perşembe	Cuma	Cumartesi	Pazar
$1,2,3$	$1,2,4$	$3,4,5$	$2,4,6$	$3,5,7$	$1,3,5$	$2,4,7$

B

Pazartesi	Salı	Çarşamba	Perşembe	Cuma	Cumartesi	Pazar
$3,4,5$	$1,2,5$	$2,3,6$	$1,3,4$	$2,3,4$	$1,6,7$	$4,5,6$

Her nokta üzerinden; $3+1=4$ doğru geçmektedir.

Düzlemde toplam; $3^2+3+1=13$ nokta ve yine aynı formülle 13 doğru vardır.

Bu konfigürasyonda 3. mertebeden bir projektif düzlem örneği görülmektedir.

13 noktaya ve 13 doğruya sahip bu konfigürasyonda her noktadan 4 doğru geçtiğinden ve her doğru üzerinde 4 nokta olduğundan bu konfigürasyon bir (13_4) konfigürasyonudur.

6.3. (7_3) Fano Konfigürasyonu ile Modellenen Kura Uygulaması

Birden fazla kişinin katıldığı bir yarışmada yarışmacılardan bir kısmının bir haftalık süreç sonunda eleneceği söyleniyor. Yarışmacılardan 1'den 7'ye kadar olan rakamlardan her gün için 3 adet rakam seçmesi isteniyor. 7 günün herbiri için yarışmacılar seçeceği 3 rakam için herhangi bir kısıtlamaya tabi olmayacaktır. Haftanın ilk günü yarışma kurulu da kura yöntemi ile bir kereye mahsus olmak üzere 3 rakam seçecek ve her günün sonunda yarışmacıların seçtiği 3 rakam ile kurada çıkan 3 rakamın en az 2 tanesinin aynı olması durumunda yarışmacımız yarışmaya devam etme hakkına sahip olacaktır. Yarışmacılar başlangıçta her güne ait seçimlerini yaptığından 2. Gün ve sonraki günler için de aynı kural işletilecek ve yarışmacılar en az 2 rakamı doğru yakaladıkları gün sonunda yarışmaya bir sonraki hafta için devam etme hakkını kazanacaktır. Fakat 7 günün sonunda hiçbir gün 2 veya 3 rakam yakalayamayan yarışmacı varsa yarışmadan elenecektir.

Örneğin A yarışmacısı ve B yarışmacısı Çizelge 6.2'deki gibi haftanın 7 gününe ait seçimleri yapsınlar.

Sadece haftanın ilk günü bir kereye mahsus yapılacak kura çekiminde $\{1, 6, 7\}$ rakamları çekilirsin. A yarışmacısı seçimlerinin hiçbirinde kurada çekilen bu rakam üçlüsünden herhangi ikisi veya üçü bulunmadığından o haftanın sonunda yarışmadan elenecektir. B yarışmacısının Cumartesi gününe ait seçimininde $1ve7$ rakamları vardır ve aynı güne ait seçiminde kuradaki seçilen iki adet rakamı aynı olduğundan o hafta elenmeyecektir.

Bu yarışmadan elenmemeyi garantileyecek seçim yapılabilir mi?

7 adet rakam arasından 3 tanesinin seçimi 35 farklı şekilde olabilir. 35 farklı seçimden 4 tanesi kurada çekilen hiçbir rakamı yakalayamaz. Örneğin kurada 1, 4 ve 5 rakamları çıktı ise (2,3,6),(2,3,7),(2,6,7),(3,6,7) kümesinin elemanlarını seçmiş olanlar hiçbir rakamı yakalayamamış olur. Benzer şekilde 18 farklı seçimin sadece bir adet rakamı yakalayabildiği, 12 seçimin iki rakamı ve 1 seçimin üç rakamı da yakalayacağı hesaplanabilir. O halde bir seçimde iki veya üç rakamı yakalama olasılığı 13/35 olur.

7 günlük tercih sonucunda elenmeme olasılığı yüksektir fakat garanti midir? Yani yarışmacının yapacağı 7 günlük seçim ile kurada seçilecek herhangi bir rakam üçlüsünün en az bir kez iki veya üç rakamının seçtiğimiz bir üçlü grubu ile aynı olması için nasıl bir yol izlenmelidir?

Birinci gün 1, 2 ve 3 rakamlarını seçildiğini düşünelim. İkinci gün yapılacak seçimlerde ise şansın azaltılmaması için bu üç rakamın herhangi ikisi aynı seçimde kullanılmamalıdır. Bir düzen içinde seçim devam ettirilirse 1 rakamı sabit bırakılarak ikinci gün için 1, 4 ve 5 rakamları seçibilir. Aynı düzen ile üçüncü günün seçimi 1, 6 ve 7 rakamları olmalıdır. Dördüncü gün için 2, 4 ve 7, beşinci gün için 2, 5 ve 6, altıncı gün için 3, 4 ve 6 ve son olarak yedinci gün için 3, 5 ve 7 rakamları seçilebilir. Aslında bu seçimler ile Çizelge 5.3 ve Şekil 5.1' de verilen Fano konfigürasyonu elde edilir. 5. bölümde de değinildiği üzere Fano Konfigürasyonunda her nokta diğer noktalarla bir kere aynı doğru üzerinde bulunuyordu. Yani Fano Konfigürasyonu kullanıldığı durumda kurada hangi rakam üçlüsü seçilirse seçilsin en az iki tanesi yapılan üçlü seçimlerin içinde yer alacaktır. Bu koşullarda bir haftalık seçimler ile haftayı elenmeden tamamlamak garantilenmiş olur.

Çizelge 6.3 14 nokta ile Fano konfigürasyonunun düzenlenmesi

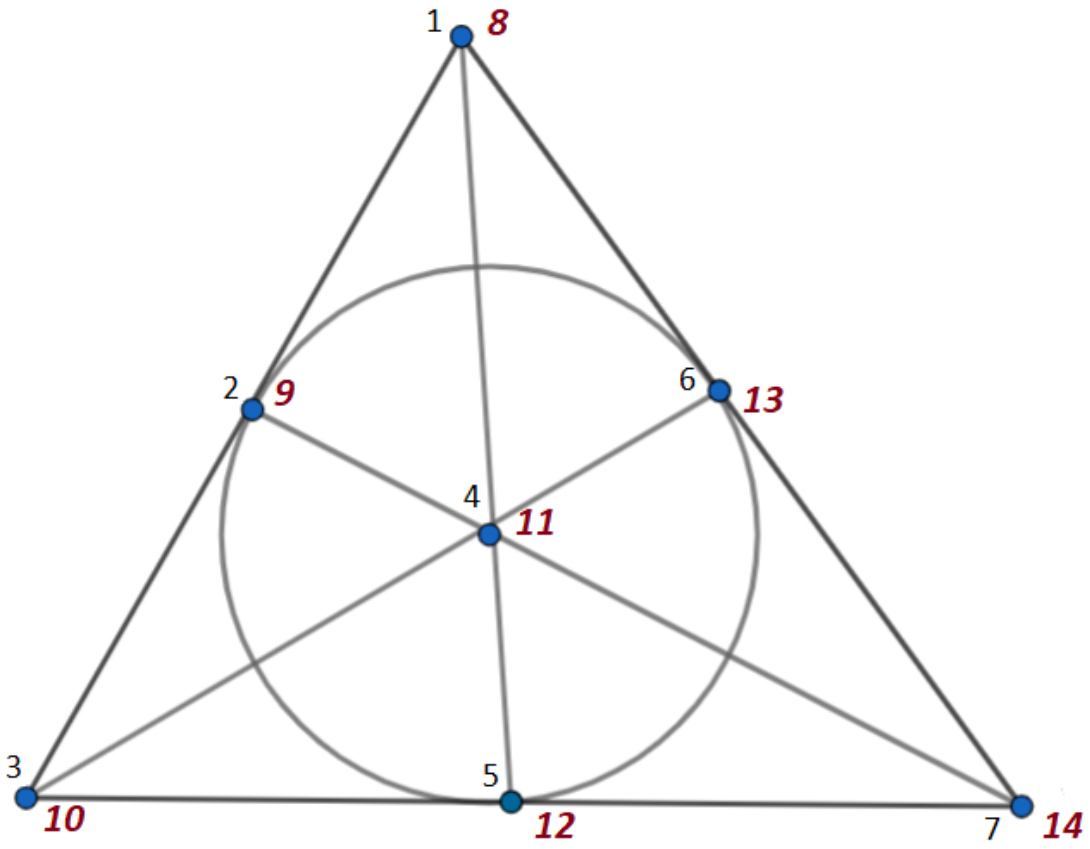
d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}
1	1	1	2	2	3	3	8	8	8	9	9	10	10
2	4	6	4	5	4	5	9	11	13	11	12	11	12
3	5	7	7	6	6	7	10	12	14	14	13	13	14

6.4. 14 Girdili Bir Kura Problemin Çözümünün (7_3) Fano Konfigürasyonu ile Modellenmesi

Önceki örnekte 7 rakam ile düzenlenen kura 1 den 14'e kadar olan sayılarla yine üç sayı seçerek düzenlenmiş olsaydı elenmemeyi garantilemek mümkün müdür? Elenmemeyi garantilemek için en az kaç üçlü sayı seçimi yapılmadır ve bu seçimler nasıl olmalıdır?

Önceki örnekteki gibi yine Fano düzlemini çözüm için kullanılabilir. Kazanmayı garantilemek için bu sefer 14 seçim yapılmalıdır. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ nokta kümesi için oluşturduğumuz Fano düzlemini yine aynı nokta işaretleri ile yine sırasıyla $\{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ nokta kümesi ile işaretleyerek yapılır.

Kura ile ilk gün çekilen sayı üçlüsünün tamamı ilk kümeden yani $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinden ise önceki örnekteki şekilde çözümün sağlandığını görülür. Çekilen sayı üçlüsünün tamamı ikinci kümeden yani $\{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ kümesinden ise yine aynı durum olacağından çözümün sağlandığı görülür. Seçilen üç rakamdan ikisinin birinci kümeden, üçüncünün ikinci kümeden veya ikisinin ikinci kümeden üçüncünün birinci kümeden olması durumunda Fano konfigürasyonunda seçilen herhangi iki nokta her zaman aynı doğru üzerinde yer aldığından yine çözüm sağlanmış olur. Şekil 6.7'de Fano düzleminin iki grup halinde kullanımı gösterilmiştir. Çizelge 6.3'te de bu doğrular gösterilmiştir.



Şekil 6.7 (7_3) Fano konfigürasyonunun noktalarının çift sayılarak 14 nokta olarak kabulu

7. BULGULAR VE TARTIŞMA

Genel olarak 6 bölümden oluşan bu tezin ilk bölümünde geometrik konfigürasyonların geometrideki yeri, önemi ve tarihsel gelişimine, ikinci bölümünde ise literatür araştırmasına yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde geometrik konfigürasyonlarla ilgili öncül kavram ve tanımlara yer verilmiştir. Incidence geometri, afin düzlem, projektif düzlem, topoloji ve graf kavramları bu bölümde verilmiştir.

Dördüncü bölümde nokta ve doğruların konfigürasyonlarının genel tanımı, simetrik konfigürasyon tanımı verilip temel konfigürasyon örnekleri diyagramları ile gösterilmiştir. Nokta ve doğru konfigürasyonlarının gösterimlerinde kullanılan bazı geometrik gösterim yöntemleri ve tabloları da bu bölümde verilmiş, nokta ve doğru konfigürasyonların gösterimlerinde kullanılan bazı klasik teoremler ile bölüm tamamlanmıştır.

Beşinci bölümde simetrik konfigürasyonlardan 3-konfigürasyonlar genel olarak ve klasik olarak tanımlanan 3-konfigürasyonlardan Fano, Mobius-Kantor, Pappus, Desargues ve Cremona-Richmond konfigürasyonlarının diyagramları, çizelgeleri, gösterim şekillleri, inşa edilmeleri için genel metodlar, Levi grafları ve genelleştirilmiş Petersen grafları incelenmiş, (n_3) konfigürasyon sayıları n değişkenine göre verilmiştir. Klasik olarak adlandırılmayan diğer 3-konfigürasyonlardan bazılarının diyagramları da bu bölümde yer verilmiştir.

Altıncı bölümde geniş bir uygulama alanına sahip olan geometrik konfigürasyonların günlük hayat problemlerine çözüm üreten uygulama modelleri sunulmuştur.

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde geometrik konfigürasyonların temel kavramları, özellikleri ve gösterimleri incelenmiştir. Simetrik konfigürasyon tanımı verilmiştir ve bunların içinde yer alan 3-konfigürasyonlar konfigürasyon tabloları, diyagramları, üzerinde bulunma tabloları, inşaları, Levi ve Petersen grafları ile sunulmuştur. 3-konfigürasyonların ilgili oldukları temel teoremler ve sonuçları incelenmiştir. Diyagramların, Levi graf ve genelleştirilmiş Petersen grafların çiziminde Geogebra programı, tezin yazımında Latex programı kullanılmıştır. Simetrik olmayan konfigürasyonların, 4-konfigürasyon gibi diğer simetrik konfigürasyonların da gösterimleri ve konfigürasyonlar arasındaki ilişkiler incelenebilir. Tüm konfigürasyon türleri için konfigürasyonların farklı gösterim şekillleri de yine çalışma konusu olabilir.

Geometrik konfigürasyon kavramının pozitif bilimlerde ve sosyal bilimlerde geniş uygulama alanına sahip olabileceği görülmüştür. Tezimizin son bölümünde ise geometrik konfigürasyonlar ile güncel hayat problemleri ilişkilendirilmiştir. Özellikle kombinatoryal anlamda çözüme ulaşması güç ve uzun çözümleri olan problemlerin geometrik konfigürayonlar ile daha kolay çözüme ulaştırılabileceği ve çözümlerin konfigürasyon haline getirildiğinde anlaşılırlığının daha kolay olduğu görülmüştür.

Benzer yapıdaki problemlerin çözümleri, geometrik konfigürasyonlarla standart hale getirildiği zaman bilgisayar programları aracılığıyla sadece problem girdilerinin veri olarak programa girilmesi sağlanarak hem sonuçlara ulaşmak hem de çözümün anlaşılırlığının kolaylık kazanması bakımından daha işlevsel olacaktır.

Web sitelerinin tasarımında veya sunum programlarında karmaşık yapıya sahip problemlerin sonuçlarına ulaşması istenilen kişilerin, geometrik konfigürasyonların diyagramlarını kullanmasını sağlanarak sonuçlara ulaşmasını çok daha hızlı ve anlaşılabilir şekilde sağlamak mümkün olacaktır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Aldaus, J.M., Wilson, R.J., 2005, Graphs An Applications An Introductory Approach.

Bečvářová, M., 2019, Seligmann Kantor ze Sobědruh–osudem zkoušený matematik. Pokroky Matematiky, Fyziky a Astronomie. 64 (1): 29–54.

Bokowski J., Grünbaum B., 2009, Lars Schewe a European Journal of Combinatorics 30, 1778–1785.

Bondy, J.A., Murty, U.S.R., 1985, Graph Theory With Applications, American Elsevier, New York.

Dembowski, P., 1997, Finite Geometries, Reprint of the 1968 Edution.

Ertöz A. S., 2019, Tubitak Popüler Bilim Kitapları, Öklid'in Elemanları.

Gropp, H., 1997, Configurations and Their Realization, Discrete Mathematics, 174 (1–3): 137–151.

Grünbaum, B., 2009, Configurations of the Points and Lines, Graduate Studies in Mathematics, Vol.103., American Mathematical Soc.

Heath, T. L., 1956, Euclid, The Thirteen Books of The Elements, 2nd ed., Vol.I, Dover Pub., Inc., New York, 1956, pp. 1, 3.

Kaya R., 2005, Projektif Geometri, Osmangazi Üniversitesi Yayınları.

Moorhouse G.E., 2007, Incidence Geometry, University Of Wyoming, Math 5700-Fall 2007.

Özdamar E., Görgülü A., 1986, Genel Topolojiye Giriş , Sf.2 , sf.17.

Pisanski T., Servatius B., 2013, Configurations from a Graphical Viewpoint.

Wells, J. C., 2008, Longman Pronunciation Dictionary (3rd ed.). Longman. ISBN 978-1-4058-8118-0.