Maksimum Düzlem Geometride Apollonius Çemberleri ve Apollonius Kümelerin İncelenmesi

Aylin Palazoğlu

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı

Ocak 2022

Investigation of Apollonius Circles and Apollonius Sets in Maximum Plane Geometry

Aylin Palazoğlu

MASTER OF SCIENCE

Deparment of Mathematics - Computer

January 2022

Maksimum Düzlem Geometride Apollonius Çemberleri ve Apollonius Kümelerin İncelenmesi

Aylin Palazoğlu

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Özcan Gelişgen

Ocak 2022

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Özcan Gelişgen danışmanlığında hazırlamış olduğum "Maksimum Düzlem Geometride Apollonius Çemberinin İncelenmesi" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 17/01/2021

Aylin PALAZOĞLU

ÖZET

Sekiz bölümden oluşan bu tez çalışmasında maksimum düzlem geometride bir üçgenin iç teğet çemberi, çevrel çemberi, dış teğet çemberleri, Apollonius çemberi ve Apollonius küme kavramları incelenmiştir.

Birinci bölümde, tezde ele alınacak konuların genel anlamda kullanımından ve gelişiminden kısaca bahsedilerek konunun girişi ve amacı verilmiştir.

İkinci bölümde, tezde ele alınacak konu ve kavramların tarihsel gelişimi hakkında literatür özeti yapılmıştır.

Üçüncü bölümde, tez boyunca kullanılacak olan temel kavramlar, tanımlar, teoremler ve özellikler ispatsız olarak verilmiştir.

Dördüncü bölümde, maksimum düzlemde bir üçgenin iç teğet çemberinin ve çevrel çemberinin varlık koşulları ve özellikleri verilmiştir.

Beşinci bölümde, maksimum düzlemde bir üçgenin üç dış teğetini kapsayarak teğet olan çember tanımlaması ile ifade edilen Apollonius çember kavramı incelenmiş ve varlık koşulları ifade edilmiştir.

Altıncı bölümde, maksimum düzlemde sabit iki noktaya uzaklıkları oranı sabit olan noktalar kümesi şeklinde tanımlanan Apollonius küme kavramı ele alınmış ve bu kümeler sınıflandırılarak çeşitli özellikleri verilmiştir.

Yedinci ve sekizinci bölümde, tezde elde edilen bulgular ve sonuçlar kısaca özetlenmiş olup ilerde yapılması muhtemel çalışmalara dair öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Maksimum düzlem, iç teğet çember, çevrel çember, Apollonius çember, Apollonius küme

SUMMARY

In this thesis, which consists of eight chapters, in maximum plane geometry for a triangle the concepts of incircle, circumcircle, excircles, Apollonius circle and Apollonius set are examined.

In the first chapter, the general use and development of the subjects to be covered in the thesis are briefly mentioned, and the introduction and purpose of the handled subject are given.

In the second part, a literature summary was made about the historical development of the topics and concepts to be taken in the thesis.

In the third chapter, the basic concepts, definitions, theorems and properties that will be used throughout the thesis are given without proof.

In the fourth chapter, the existence conditions and properties of the incircle and circumcircle of a triangle in the maximum plane are given.

In the fifth chapter, the concept of Apollonius circle, which is expressed by the definition of a tangent circle by including three excircle of a triangle in the maximum plane, is examined and its existence conditions are expressed.

In the sixth chapter, the concept of the Apollonius set, which is defined as a set of points with a constant ratio of distances to two fixed points in the maximum plane, is considered, and these sets are classified and their various properties are given.

In the seventh and eighth chapters, the findings and results obtained in the thesis are summarized briefly and suggestions for possible future studies are presented.

Key Words: Maximum plane, incircle, circumcircle, Apollonius circle, Apollonius set

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET . . . . . **vi**

SUMMARY . . . . . **vii**

TEŞEKKÜR . . . . . **viii**

İÇİNDEKİLER . . . . . **ix**

ŞEKİLLER DİZİNİ . . . . . **x**

1. GİRİŞ VE AMAÇ **1**

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI **3**

3. TEMEL KAVRAMLAR **8**

4. MAKSİMUM DÜZLEMDE BİR ÜÇGENİN İÇ TEĞET VE ÇEVREL ÇEMBERİ **16**

5. MAKSİMUM DÜZLEMDE BİR ÜÇGENİN APOLLONIUS ÇEMBERİ . . **27**

6. MAKSİMUM DÜZLEMDE APOLLONIUS KÜMELER **38**

7. BULGULAR VE TARTIŞMA **56**

8. SONUÇ VE ÖNERİLER **57**

KAYNAKLAR DİZİNİ **59**

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil		Sayfa
2.1	Herhangi üç nesneye teğet çizilebilen çemberler	5
2.2	Verilen üç çembere teğet çizilebilen çemberler	6
3.1	P ve Q noktaları arasındaki Maksimum metriğin yolları	9
3.2	Merkezil birim Maksimum çemberi	11
3.3	Doğruların sınıflandırılması	11
3.4	Maksimum düzlemde minimum uzaklık kümeleri	13
3.5	Maksimum düzlemde orta kümeler	14
3.6	Maksimum açıortay	14
4.1	Öklidyen ve Maksimum düzlemde çembere teğet olma	17
4.2	Maksimum düzlemde temel pozisyondaki üçgenler	18
4.3	Temel pozisyondaki üçgenlerin iç teğet çemberleri	21
4.4	Temel pozisyondaki üçgenlerin çevrel çemberleri	23
4.5	Bir üçgenin çevrel çemberi	24
4.6	Sonsuz çokluktaki çevrel çember durumları	26
5.1	Öklidyen düzlemde Apollonius çemberi	27
5.2	Maksimum düzlemde üç dış teğet çembere sahip bir üçgen	31
5.3	Maksimum düzlemde iki dış teğet çembere sahip bir üçgen	32
5.4	Maksimum düzlemde Apollonius çemberinin bulunmama hali 1	34
5.5	Maksimum düzlemde Apollonius çemberinin bulunmama hali 2	35
5.6	Maksimum düzlemde Apollonius çemberinin bulunmama hali 3	36
5.7	Maksimum düzlemde Apollonius çemberine sahip bir üçgen	37
6.1	Maksimum düzlemde rehber dikdörtgenler	39
6.2	Maksimum düzlemdeki P ve Q noktalarına göre standart 9 bölge	40
6.3	Maksimum düzlemde orta küme durumları	41
6.4	Bir koordinat doğrusu üzerinde iki noktanın Apollonius kümesi	49
6.5	Maksimum düzlemde iki noktanın orta kümeleri	51
6.6	P ve Q noktalarının Apollonius kümesi	54
6.7	Bazı özel Apollonius kümeleri	55

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Bilim tarihi boyunca matematiğe ait gelişmelerin, ilerlemenin, keşiflerin yeri ve önemi son derece büyüktür. Matematiğin temelinde iki ana alan vardır. Bunlar Aritmetik ve Geometridir.

Geometri ismi matemetiğin bu temel alanının sistematik hale gelmeye başladığı Eski Yunanlılardan bu yana kullanılmaya başlamıştır. Bu bağlamda geometri sözcüğü Yunanca ”geometrien” sözcüğünden gelmektedir. Bu sözcükte geo: yer ve metrien: ölçmek anlamında olup dünyanın ölçümü anlamına gelmektedir. Şüphesiz isim matematiğin bu ana alanında ilk ortaya atılan bilgilere dayanmaktadır. Tarih boyunca geometri nedir sorusuna birçok cevap gelmiş olup bu noktada sadece Coxeter’ ın cevabı aktarılacaktır: ”Geometri belki de bilimin içinde insanın fiziksel dünya ile ilgili sonuçlara ulaşabilmesi konusunda en temel bilgidir. Onun gücü, doğruluğu, ispata açık olması ve elde edilen gözlemlerle genellemeler yapılabilmesinden kaynaklanır.”

Antik çağlardan günümüze kadar geometri alanı gelişmiş, ilerlemiş ve çeşitlenmiştir. Ancak geometri, matematiğin böylesine bir dev alanı olmasına rağmen günümüzde öğrenim hayatımızda ilk karşılaştığımız geometrik bilgiler Öklidyen geometriye aittir. Öklidyen geometrinin temelinde MÖ 300 de Euclides (Öklid)’in yazdığı ”Elements” adlı eserine dayanmaktadır. Hatta öğrenim yaşamımızda sıklıkla karşımıza çıkan Öklidyen geometriye ilişkin bilgilerin hemen hemen tamamı bu eserde yer almaktadır. Descartes’in kartezyen koordinatları ve Fréchet’in uzaklık fonksiyonunu veya metriği tanımlamasıyla en iyi bilinen ve kullanılan metrik uzay halini almıştır. İki nokta arasındaki mesafeyi bu iki noktayı birleştiren doğru parçasının uzunluğu olarak alan Öklidyen geometri iyi bilinmesine rağmen insanlar tarafından modernleştirilen dünyadaki yapıları modellemekte yetersiz ve anlamsız kalmaktadır.

Bu nedenle insanlar oluşturdukları yapıları modellemek için farklı metrikler kullanarak farklı geometriler oluşturmuşlardır. Örneğin ideal şehir adı verilen sokakların yatay ve düşey eksene paralel doğrular üzerinde oluşturulan yapılar için kuş uçuşu ölçümü yapan Öklidyen geometri yerine yatay ve düşey eksenden katedilen mesafeyi ölçen taksi metriği ile Taksi geometriyi geliştirmişlerdir. Böylelikle karşılaştıkları problemi çözmek için tutarlı ve iyi bir geometri inşaa etmişlerdir. Buna benzer Öklidyen geometriden farklı olan ya da diğer bir deyişle bir Öklidyen olmayan geometride maksimum geometridir. Maksimum geometrideki iki nokta arasındaki uzaklık yatay ve düşey eksendeki iz

düşümleri arasındaki mesafelerden maksimum olanı şeklinde ölçülmektedir. Maksimum geometri günlük hayatta depo lojistiğinde, bilgisayar destekli imalat aşamalarında ve özellikle bunların optimizasyon uygulamalarında kullanılmaktadır. Elbetteki uzaklık ölçme yöntemlerindeki değişiklik Öklidyen geometriden bildiğimiz uzaklığı içeren kavramların değişmesine sebep olmaktadır. Dolayısıyla bu tarz kavramların incelenmesi ilginç bir problem olarak görülmektedir.

Bu bağlamda bu tez çalışmasında maksimum düzlem geometride;

1. Maksiumum düzlemde bir üçgenin iç teğet çemberi var mıdır veya iç teğet çemberin var olup olmaması koşulları nedir?
2. Maksiumum düzlemde bir üçgenin çevrel çemberi var mıdır veya çevrel çemberin var olup olmaması koşulları nedir?
3. Maksimum düzlemde üçgenin iç açıortaylarının kesim noktası iç teğet çemberin merkezi midir?
4. Maksimum düzlemde üçgenin Apollonius çemberi var mıdır?
5. Maksimum düzlemde Apollonius kümeler nasıl yapılar ortaya koyar?

sorularının yanıtları aranacaktır. Yukarıdaki sorularda bahsedilen Apollonius çemberi kavramı MÖ 300 lü yıllarda Pergeli Apollonius tarafından çemberin sabit bir noktadan eşit uzaklıktaki noktalar kümesi tanımına denk olarak çemberin farklı bir şekilde tanımlamasını vermesi ile ortaya çıkmıştır. Öklidyen geometride Apollonius çemberin dört farklı tanımı söz konusu olup bu tez çalışmasında bu tanımdan iki tanesi ele alınarak maksimum geometrideki karşılıkları incelenecektir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Geometri ilk olarak antik dünyada inşaat, planlama ve matematiksel problemleri çözmek için amaca uygun olacak şekilde bir dizi kural ve formül olarak ortaya çıktı. Başlangıçta düzlemdeki ve uzaydaki şekillerin incelenmesini konu edindi. Bu şekiller somut nesnelerden türetilmesine rağmen geometri deneysel yöntemlerin kullanımını çok erken terk etti. Hatta bunun tam aksine şekilleri gerçek nesnelerin ideal biçimine indirmeye çalıştı. Üstelik bunun ötesinde gözleme ve ölçümlere dayanmayan aksiyomlar ve sonuçlar ile çalışan bir ispatlama yöntemi de geliştirdi.

Geometrinin ilk konuları insanların topraktan faydalanma amacı ile toprağa sahip olma isteği ile başlamıştır. Medeniyetin beşiği diye adlandırılan Nil vadisinde yer alan Nil nehrinin her yıl yağmur mevsiminde taşması sonu Nil kıyısında yer alan toprakların sınırları yok olurmuş. Doğal olarak sınırların yeniden oluşturulması zaruretinden kaynaklı olarak gökyüzünde yıldızlardan gözlemlenen üçgen, dörtgen vb gibi şekiller araziler üzerine çizilerek sorunun çözümlenmesi çabası ilk geometrik konuların ele almasına sebep oldu. Bu tarz çabalar geometrinin gelişmesine katkıda bulunmuştur.

Sonralarda Thales, Pisagor ve Platon gibi filozoflar uzayın doğasını geometri ile olan temel ilişkisinin farkına vararak geometriyi matematiğin temelinde yer alan önemli bir çalışma sahası olarak geliştirmesine ciddi katkı sağladılar. Kesin bir bilgi olmamakla birlikte muhtemelen Platon'un öğrencisi olan ve İskenderiye' ye öğretmenlik yapan Öklid (Euclides) MÖ 300 de Elements adlı eserini yazdı. Öklid 13 ciltlik eserinde gözlemlere ve ölçümlere dayanmayan tanım, aksiyom ve sonuçları kullanarak bilimsel ilkeler üretti ve geometriyi sistematik hale getirdi.

Sonraki çağlarda farklı medeniyetlerden bilim insanları evrenin modellerini oluşturmak için geometriyi kullanmaya devam ettiler. Buradaki büyük dölüm noktası 17. yüzyılda Descartes'in iki ve üç boyutlu uzaylarda noktaların konumlarını tanımlamak için geliştirdiği günümüzde sıklıkla kartezyen koordinatlar ismiyle anılan koordinat sistemlerin tanımlanması olmuştur. Bu sayede geometrik problemleri tanımlamak ve çözmek amacıyla geometri ve cebirin kesiştiği analitik geometri alanı doğmuş oldu.

Descartes'in çalışmaları sayesinde Öklid geometri aksiyomlarının sağlanmadığı küre yüzeyi gibi alanlarda çalışma imkanı bulunmuştur. Dolayısıyla Öklidyen olmayan geometriler keşfedilmesi ile eliptik ve hiperbolik geometriler gelişmeye başlamış ve sayı ile

geometriyi birleştiren ilkeler artmaya başlamıştır. 19. yüzyılın son yılında Hilbert Öklid' in aksiyomlarını ele alarak geometri için yeni ve daha genelleştirilmiş aksiyom sistemini tanıttı.

Öklidyen geometride iki nokta arasındaki mesafenin ölçülmesi bu iki noktayı birleştiren doğru parçasının ölçülmesi fikrine dayanır. Öklidyen geometride yapılan bu ölçüm şekli ki günümüzde buna metrik denilmekte olup insan hayatındaki bir çok problemin çözümünde veya matematiksel modellenmesinde anlamlı değildir. Bu nedenle farklı ölçüm yöntemlerine veya diğer deyişle metriklere ihtiyaç olmuştur. Bu bağlamda 1800'lü yıllarda Chebyshev kendi adını verdiği veya sonralardan onun adıyla anılacak bir metrik tanımladı. Bu metrik iki nokta arasındaki uzaklığı bu noktaların düşey ve yatay eksendeki iz düşümleri arasındaki mesafenin büyük olanına eşler. Aslında satranç tahtası uzaklığı olarakta bilinir. Çünkü satranç oyununda bir şahın bir satranç tahtasındaki bir konumdan bir diğer konuma gitmek için ihtiyaç duyduğu minimum hamle sayısı, ilgili konumlar arasındaki Chebyshev uzaklığına eşittir. Günümüzde bu kavram düzlemsel boyutta çalışan çizim veya delme makinaları gibi birçok araçta ve büyük depolarda veya inşaatlarda kullanılan gezer vinçlerde x ve y eksenlerinde aynı anda ve aynı hızda hareket etmesini sağlamak için kullanılan iki motorda kullanılır.

Ayrıca Chebyshev veya maksimum metriği matematikde ℓ_p metrik olarak bilinen $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ve $p \geq 1$ olmak üzere

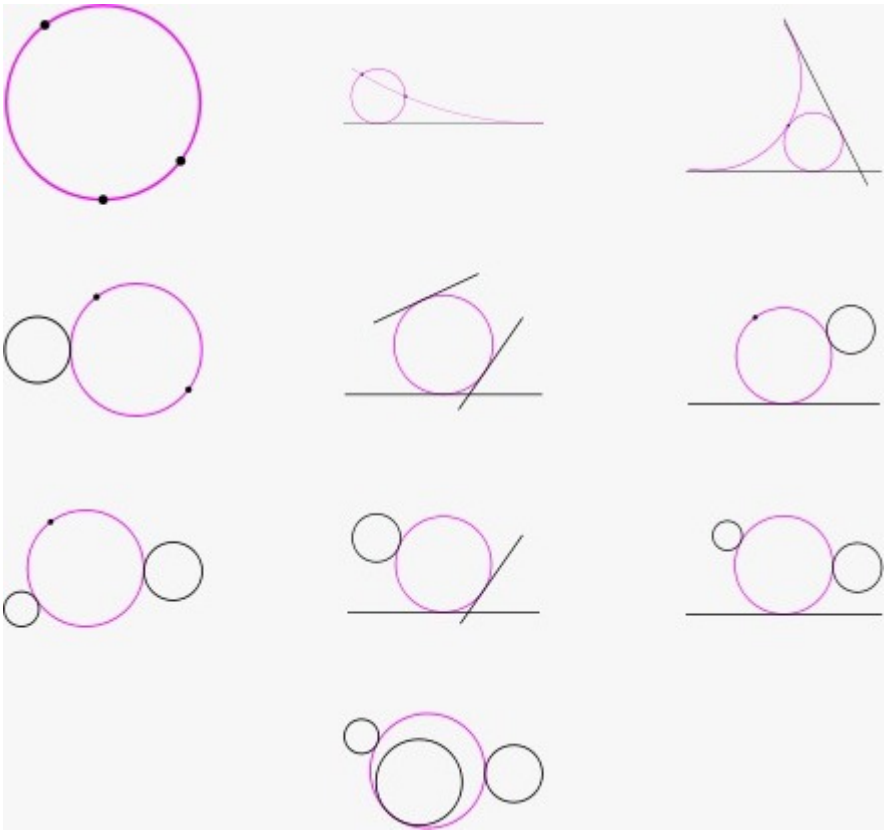
$$d_p(P, Q) = [(x_1 - x_2)^p + (y_1 - y_2)^p]^{1/p}$$

şeklinde tanımlı metriğin $p \to \infty$ için limit halidir.

Geometride çember kavramı sabit bir noktadan sabit uzaklıktaki noktaların kümesi olarak tanımlanır. Ancak MÖ 3. yüzyılda Pergeli Apollonius çemberin bu tanıma denk olan bir tanımlama geliştirdi. Apollonius'un ortaya attığı inşa problemi şuydu:

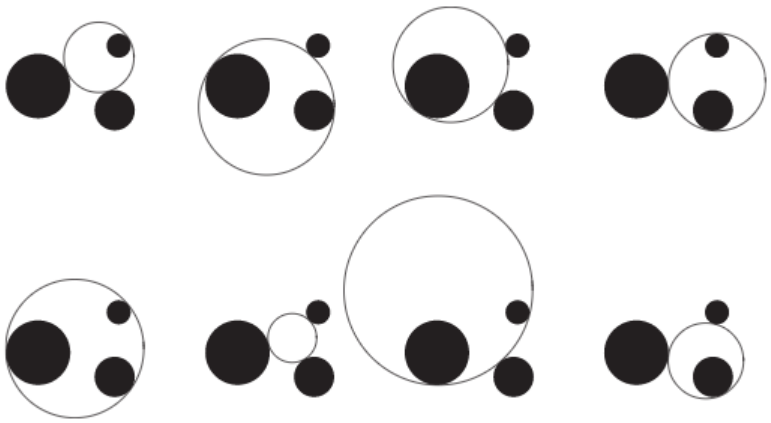
"Düzlemde bulunan üç nokta, üç doğru veya üç çemberden oluşan dokuz nesne verildiğinde bu dokuz nesneden herhangi üçünü alıp bu üç nesneye teğet olarak çizilebilecek bir çember var mıdır?"

Aşağıdaki şekil bu durumları göstermektedir.



Şekil 2.1 Herhangi üç nesneye teğet çizilebilen çemberler

Burada üç nokta ve üç doğru olması hali kolaydı ve Öklid, Elemets' de bu kolay iki durumu çözdü. En zor olanı üç çember olması hali idi. Bu durum Viète tarafından toplamda sekiz durum olarak çözüldü ve çözümlere Apollonius çemberi adı verildi. Ayrıca Apollonius düzlemde sabit iki noktaya uzaklıkları oranı sabit olan noktaların kümesinin bir çember olduğunu gösterdi. Doğal olarak bu çemberle de Apollonius çemberi denilmektedir. Bunların dışında düzlemde verilen bir üçgenin üç dış teğet çemberine teğet olup o çemberleri içeren çembere de Apollonius çemberi denir. Bir de düzlemde bir $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin A köşesindeki iç ve dış açıortaylarının $\overleftrightarrow{BC}$ doğrusunu kestiği noktalar U ve V olmak üzere $\overline{UV}$ çaplı çembere A-Apollonius çember denilir. Benzer şekilde B-Apollonius ve C-Apollonius çemberlerde oluşturulur. Bu durumda bu üç Apollonius çember adına izodinamik nokta denilen iki noktadan geçerler. Yukarıda ifade edilen ikinci ve üçüncü tanımlamalara göre Apollonius çemberin taksi düzlemdeki karşılıkları sırasıyla Bahuaud vd. 2019 ve Ermiş vd. 2018 çalışmlarında verilmiştir. Ayrıca ikinci tanımda ifade edilen Apollonius çember kavramının maksimum düzlem geometrideki karşılığı Gelişgen ve Ermiş, 2021 çalışmasında ele alınmıştır.



Şekil 2.2 Verilen üç çembere teğet çizilebilen çemberler

Tanım 2.1 *P ve Q analitik düzlemde iki farklı nokta ve $k \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olsun.*

$$\left\{ X \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{d_E(X,P)}{d_E(X,Q)} = k \right\}$$

kümesine Apollonius çember adı verilir.

Buradan Apollonius çemberin ikinci tanımına göre analitik düzlemde $P = (0,0)$, $Q = (2,1)$ ve $X = (x,y)$ noktalarını ele alalım. $k = \sqrt{2}$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{d_E((x,y),(0,0))}{d_E((x,y),(2,1))} &= \sqrt{2} \\ \sqrt{x^2+y^2} &= \sqrt{2}\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} \\ (x-4)^2+(y-2)^2 &= 10 \end{aligned}$$

elde edilir. Merkezi $(4,2)$ noktası ve yarıçapı $r = \sqrt{10}$ olan bir Apollonius çemberi bulunur.

Tanım 2.2 *Analitik düzlemde M_1, M_2 ve M_3 merkezli üç çember olsun. Bu üç çembere aynı anda teğet olan çembere Apollonius çember denir.*

Burada verilen Apollonius çemberi tanımına göre örneğin merkezi M_1, M_2 ve M_3 olan üç çember ele alalım. Bu çemberlerin merkezleri sırasıyla $(1,5)$, $(5,2)$ ve $\left(\frac{19}{2},5\right)$ olsun ve yarıçapları sırasıyla $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ ve $r_3 = \frac{1}{2}$ olsun. Bu çemberleri ele aldığımızda üçünede teğet olan $(5,5)$ merkezli $r = 5$ yarıçaplı bir Apollonius çemberi bulunur.

Tanım 2.3 *Analitik düzlemde verilen bir üçgenin üç dış teğet çemberine teğet olan ve o çemberi içeren çembere Apollonius çember denir.*

Bu tanıma göre örneklemek istersek bir önceki Apollonius çember tanımında oluşan sekiz durumun bir tanesini içermektedir.

Yukarıdaki tanımlara ve öreneklere bakıcak olursak hepsinde oluşan yapı bir çember tanımını verir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezin geri kalan kısmında ele alınacak olan maksimum düzlem geometrinin temel tanım, teorem, kavram ve özellikleri ispatsız bir şekilde ilgili ifadelerin sonunda işaret edilen kaynaklardan özetlenerek verilecektir.

Maksimum düzlem geometri Öklidyen olmayan geometrilerin en kolay anlaşılır en güzel örneklerinden biridir. Bir önceki bölümde de kısaca bahsedildiği gibi maksimum metriği büyük depolarda lojistiği sağlayan vinçlerin bir noktadan diğerine daha hızlı ve daha az mesafe katederek ulaşması için düşey ve yatay eksende hareketi sağlayan iki motorun aynı anda aynı hızla çalışma prensibinde kullanılır. Bunun yanı sıra iki boyutlu veya düzlemsel çizim ve delme araçlarında (tezgahlarda) aynı mantıkla kullanılır.

Bunun yanı sıra Thompson, 1996 da belirtildiği üzere maksimum düzlem geometri bir Minkowski geometridir. Minkowski geometri, eliptik ve hiperbolik geometrilerden farklı sonlu boyutlu bir Öklidyen olmayan geometridir. Minkowski geometrisinin lineer yapısı hemen hemen Öklidyen geometri ile aynıdır. Açıkca noktalar ve doğrular Öklidyen geometrinin nokta ve doğruları ile aynı olup açı ölçümüde Öklidyen geometrideki ile aynı yapılır. Bu yapıdaki tek fark uzaklığın (metriğin) tüm yönlerde aynı olmamasıdır. Bunun doğal sonucu olarak metrik içeren kavramlar değişmekte olup bunların incelenmesi güzel ve ilgi çekici bir konudur. Örneğin Öklidyen geometrideki alışılmış küre yerine gelen küre genel simetrik konveks küme olduğu gibi Minkowski geometride paralellik kavramı geçerli iken Pisagor teoremi geçerli değildir.

Tanım 3.1 *$X = \mathbb{R}^2$ olmak üzere $d_M : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_1) \in \mathbb{R}^2$ için*

$$d_M(P, Q) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

olacak şekilde tanımlı olsun. Buna göre d_M fonksiyonuna $\mathbb{R}^2$ de maksimum metrik ve $(\mathbb{R}^2, d_M)$ ikilisine de maksimum düzlem adı verilir. Ayrıca kısalığın hatrına maksimum düzlem ifadesi $\mathbb{R}^2_M$ ile gösterilecektir.

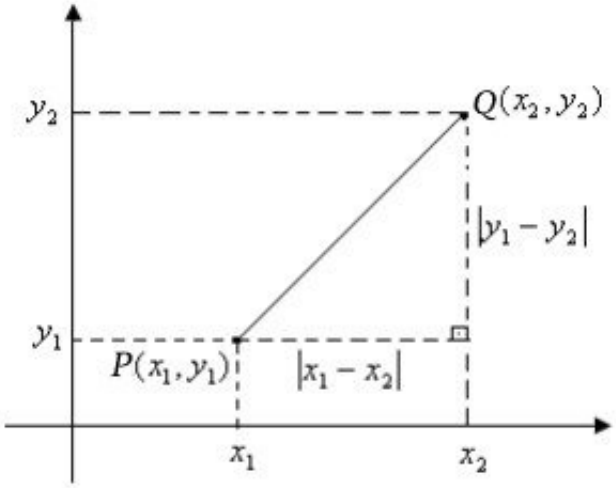
Öklidyen düzlem geometrideki noktalar, doğrular ve açı ölçüm yöntemi değiştirilmeksizin sadece $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ bu iki nokta arasındaki uzaklık için

$$d_E(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Öklidyen metriği yerine

$$d_M(P,Q) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

maksimum metriği alınarak maksimum düzlem geometri teşkil edilir. Burada geometrik olarak P ve Q noktaları arasındaki maksimum yolu Şekil 3.1 de görüldüğü gibi koordinat eksenlerinden birine paralel olan bir doğru parçası olup maksimum uzaklığı ise bu doğru parçasının Öklidyen uzunluğudur. Aşağıdaki yardımcı teorem maksimum metrik ile Öklidyen metrik arasındaki geçişi ifade etmektedir.



Şekil 3.1 P ve Q noktaları arasındaki Maksimum metriğin yolları

Yardımcı Teorem 3.1 *$P = (x_1, y_1)$ ve $Q = (x_2, y_2)$ analitik düzlemde herhangi iki nokta ve bu noktalardan geçen doğru ℓ olsun. Bu taktirde P ve Q noktalarından geçen doğrunun eğimi m olmak üzere ℓ dikey bir doğru değilse*

$$\delta(m) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}, & |m| < 1 \text{ ise} \\ \dfrac{|m|}{\sqrt{1+m^2}}, & |m| \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

için

$$d_M(P,Q) = \delta(m) d_E(P,Q)$$

olur. Ancak ℓ bir dikey doğru ise

$$d_M(P,Q) = d_E(P,Q)$$

olur. (Salihova, 2006)

Bu yardımcı teoremden anlaşıldığı üzere yatay veya dikey doğrultudaki iki nokta arasındaki Öklidyen ve masksimum uzaklıkları eşit iken geri kalan doğrultularda uzaklıklar birbirinden farklıdır. Bu yardımcı teoremden üretilen iki sonuç aşağıda ifade edilmiştir.

Sonuç 3.1 *P,Q ve X analitik düzlemde doğrudaş farklı üç nokta olsun. Bu taktirde*

$$d_E(P,X) = d_E(Q,X) \Longleftrightarrow d_M(P,X) = d_M(Q,X)$$

dir. (Salihova, 2006)

Sonuç 3.2 *P,Q ve X analitik düzlemde doğrudaş farklı üç nokta olsun. Bu taktirde*

$$\frac{d_E(P,X)}{d_E(Q,X)} = \frac{d_M(P,X)}{d_M(Q,X)}$$

dir. (Salihova, 2006)

Tanım 3.2 *$M = (m_1, m_2)$, $\mathbb{R}^2_M$ de bir nokta ve $r \geq 0$ olsun. Bu taktirde*

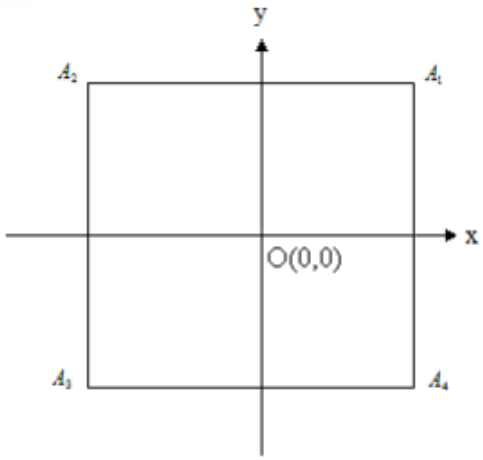
$$\left\{X = (x,y) \in \mathbb{R}^2_M \mid d_M(M,X) = r\right\}$$

ifadesine M merkezli, r yarıçaplı maksimum çemberi denir. (Salihova, 2006)

Buna göre maksimum çember ifadesi maksimum düzlemde sabit bir noktadan sabit r maksimum uzaklığındaki noktaların kümesidir. Matematiksel olarak

$$d_M(M,X) = r \Longleftrightarrow \max\{|x-m_1|, |y-m_2|\} = r$$

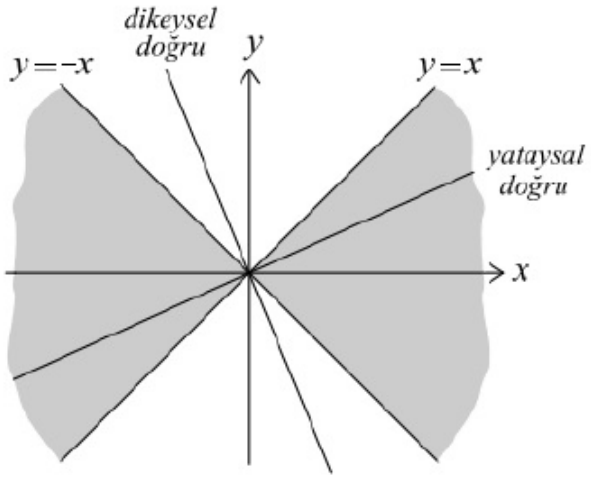
denklemini sağlayan $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2_M$ noktalarının kümesidir. Geometrik olarak maksimum çemberi köşegenlerinin kesişim noktası $M = (m_1, m_2)$, kenarları eksenlere paralel ve kenar uzunluğu $2r$ olan bir Öklidyen karedir. O halde merkezil maksimum birim çember $\max\{|x|, |y|\} = 1$ denklemini sağlayan $(x,y) \in \mathbb{R}^2_M$ noktalarının kümesidir. Şekil 3.2 de görüldüğü gibi köşe noktaları $A_1 = (1,1)$, $A_2 = (-1,1)$, $A_3 = (-1,-1)$, $A_4 = (1,-1)$ olan karedir.



Şekil 3.2 Merkezil birim Maksimum çemberi

Tanım 3.3 *ℓ maksimum düzlemde $ax + by + c = 0$ denklemi ile verilen doğru olsun. Bu taktirde ℓ ye $\left|-\frac{a}{b}\right| < 1$ ise yataysal doğru, $\left|-\frac{a}{b}\right| > 1$ ise dikeysel doğru ve $\left|-\frac{a}{b}\right| = 1$ ise ayıraç doğru adı verilir. Özel olarak bir yataysal doğru, x-eksenine paralel ise yatay doğru ve bir dikeysel doğru, y-eksenine paralel ise dikey doğru denir. (Krause 1986)*

Aşağıdaki şekil 3.3 bu sınıflandırmayı göstermektedir.



Şekil 3.3 Doğruların sınıflandırılması

Aşağıdaki tanım maksimum düzlemde bir noktanın bir doğruya olan uzaklığını ifade etmektedir.

Tanım 3.4 *$\mathbb{R}^2_M$ de bir $P = (x_0, y_0)$ noktasının $ax + by + c = 0$ denklemi ile verilen ℓ doğrusuna olan maksimum uzaklığı*

$$d_M(P, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|a| + |b|}$$

şeklinde ifade edilir. (Salihova, 2006)

Aşağıdaki önerme tıpkı Öklidyen ve maksimum metrik arasındaki geçiş bağlantısında olduğu gibi bir noktanın bir doğruya olan Öklidyen ve maksimum uzaklıkları arasındaki geçişi ifade etmektedir.

Önerme 3.1 *Analitik düzlemde P bir nokta ve ℓ eğimi m olan dikey olmayan bir doğru olsun. Bu taktirde*

$$\tau(m) = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{1 + |m|}$$

olmak üzere

$$d_M(P, \ell) = \tau(m) d_E(P, \ell)$$

olur. Eğer ℓ bir dikey doğru ise

$$d_M(P, \ell) = d_E(P, \ell)$$

dir. (Ermiş ve Gelişgen, 2015)

Aşağıdaki tanımlar ile maksimum düzlem geometride önemli kavramlar olan ve sıkça kullanılacak olan minimum uzaklık kümesi, orta küme ve açıortay kavramları ifade edilecektir.

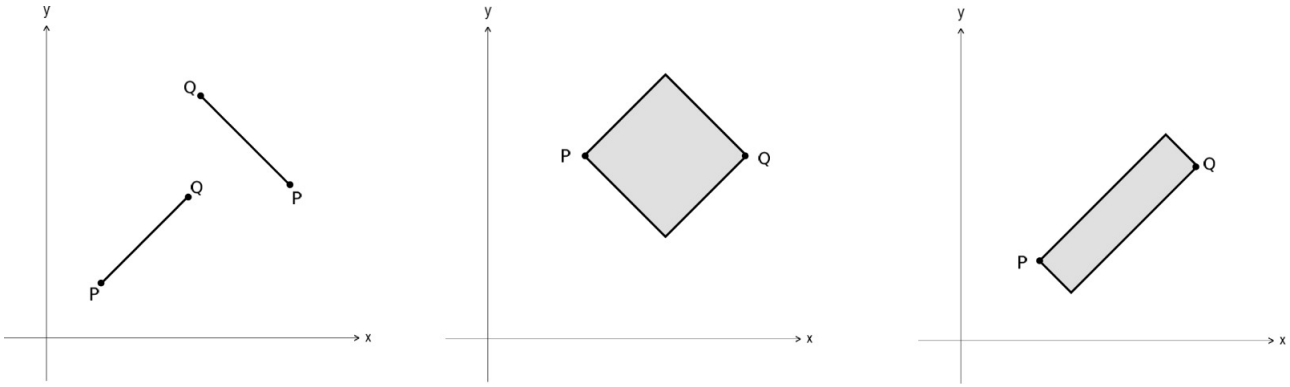
Tanım 3.5 *$\mathbb{R}^2_M$ de herhangi iki nokta P ve Q olsun. Bu taktirde*

$$\left\{X \in \mathbb{R}^2_M \mid d_M(P, X) + d_M(X, Q) = d_M(P, Q)\right\}$$

kümesi P ile Q nun minimum uzaklık kümesi adı verilir, ve $\overset{\square}{PQ}$ ile gösterilir.

Tanıma göre m, P ve Q noktasından geçen doğrunun eğimi olmak üzere $|m| = 1$ ise $\overset{\square}{PQ} = \overline{PQ}$ ($\overline{PQ}$ doğru parçası), $|m| \neq 1$ ve $m \to \infty$ ise $\overset{\square}{PQ}$, $\overline{PQ}$ köşegenli kenarları ± 1 eğimli doğrular olan dikdörtgendir.

Aşağıdaki şekil bu durumları göstermektedir.



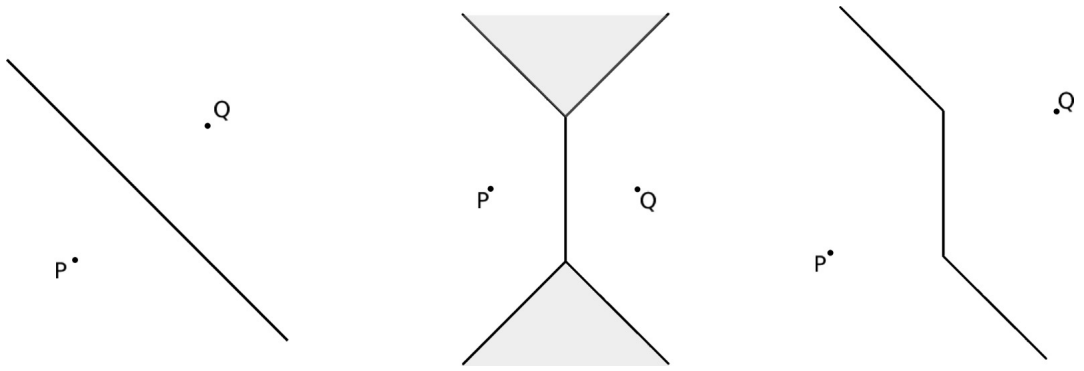
Şekil 3.4 Maksimum düzlemde minimum uzaklık kümeleri

Tanım 3.6 *$\mathbb{R}^2_M$ de herhangi iki nokta P ve Q olsun. Bu taktirde*

$$\left\{X \in \mathbb{R}^2_M \mid d_M(P,X) = d_M(Q,X)\right\}$$

kümesine P ile Q noktalarının orta kümesi denir.

Tanıma göre m, P ile Q noktalarından geçen doğrunun eğimi olmak üzere $|m| = 1$ ise orta küme $\dfrac{-1}{m}$ eğimli doğru, $m = 0$ veya $m \to \infty$ ise orta küme ∞ veya 0 eğimli doğru parçası ve iki düzlemsel bölge, $m \notin \{-1, 0, 1\}$ ve $m \nrightarrow \infty$ ise orta küme bir yatay veya bir dikey doğru parçası ve iki $+1$ veya -1 eğimli yarı doğrulardır. Aşağıdaki şekilde bu durumlar gözlemlenmektedir.



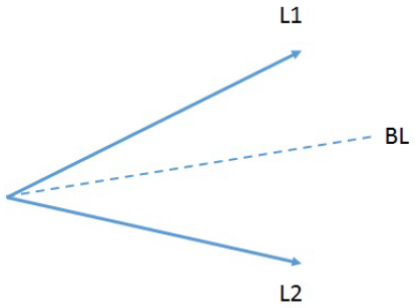
Şekil 3.5 Maksimum düzlemde orta kümeler

Tanım 3.7 *$\mathbb{R}^2_M$ de herhangi iki doğru ℓ_1 ve ℓ_2 olsun. Bu taktirde*

$$\{X \in \mathbb{R}^2_M \mid d_M(X, \ell_1) = d_M(X, \ell_2)\}$$

kümesine ℓ_1 ve ℓ_2 doğrularının maksimum açıortayları denir.

Tanıma göre ℓ_1 ve ℓ_2 doğruları birbirine dik ise maksimum açıortaylar ile Öklidyen açıortaylar aynı iken ℓ_1 ve ℓ_2 doğruları dik değilken maksimum açıortaylar ile Öklidyen açıortaylar farklıdır. Aşağıdaki şekilde bu durumları göstermektedir.



Şekil 3.6 Maksimum açıortay

Geometrik araştırmalardaki önemli konulardan biri adına izometri denilen uzaklık koruyan dönüşümlerin belirlenmesi ve özelliklerinin incelenmesidir. Bu bağlamda maksimum düzlemin izometrileri aşağıdaki önermelerde özetlenmiştir.

Önerme 3.2 *Her Öklidyen öteleme maksimum düzlemin bir izometrisidir. (Salihova, 2006)*

Önerme 3.3 *Maksimum düzlemde* $ax + by + c = 0$ *doğrusuna göre bir yansımanın izometri olması için gerek ve yeter koşul* $\frac{-a}{b} \in \{0, 1, -1\}$ *veya* $b = 0$ *olmasıdır. (Salihova, 2006)*

Önerme 3.4 *Maksimum düzlemde izometrik dönmeler bir noktada* $k = 0, 1, 2, 3$ *olmak üzere* $\theta = k\frac{\pi}{2}$ *radyanlık dönmelerdir. (Salihova, 2006)*

Bu elde edilen sonuçlar birlikte düşünüldüğünde $\mathbb{R}^2_M$ nın izometri grubu öklidyen karenin simetri grubu olan $D(4)$ dihedral grup ile Öklidyen düzlemin tüm ötelemelerin grubu $T(2)$ nin yarı-direkt çarpımıdır.

4. MAKSİMUM DÜZLEMDE BİR ÜÇGENİN İÇ TEĞET VE ÇEVREL ÇEMBERİ

Bu bölümde maksimum düzlemde ele alınan herhangi bir üçgenin iç teğet ve çevrel çemberi kavramları incelenecektir. Maksimum düzlemin noktaları ve doğruları Öklidyen düzlem ile aynı olduğundan maksimum düzlemin üçgenleri Öklidyen düzlemdekiler ile aynıdır. Ancak uzaklık farklı tanımlandığından dolayı çember kavramı farklıdır. Temel kavramlar bölümünde ifade edildiği üzere maksimum düzlemin çemberi kenarları eksenlere paralel olan Öklidyen karedir. Bu noktada Öklidyen düzlemde herhangi bir üçgenin bir iç teğet çemberi ve bir çevrel çemberinin olduğu iyi bilinmektedir. Ancak bu durum maksimum düzlemde incelenmeye değer bir problemdir. Bu bağlamda maksimum düzlemde bir üçgenin iç teğet ve çevrel çemberinin var olma koşulları araştırılacaktır. Bunun için ilk olarak iç teğet ve çevrel çemberin tanımı verilecektir.

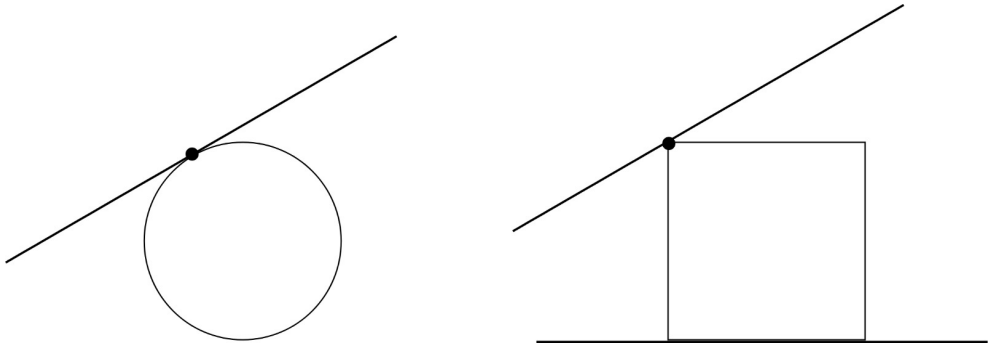
Tanım 4.1 *Maksimum düzlemde ele alınan bir üçgenin üç kenarınada teğet olan ve tamamıyla üçgenin içinde yer alan masimum çemberine üçgenin iç teğet çemberi denir.*

Tanım 4.2 *Maksimum düzlemde ele alınan bir üçgenin üç köşe noktasından geçen ve üçgeni içinde bulunduran maksimum çemberine üçgenin çevrel çemberi denir.*

Bu tanımlar diğer bir bakış açısı ile ele alındığında şöyle ifade edilebilir:
-İç teğet çember üçgenin içine çizilebilen en büyük çemberdir.
-Çevrel çember üçgeni kapsayan en küçük çemberdir.

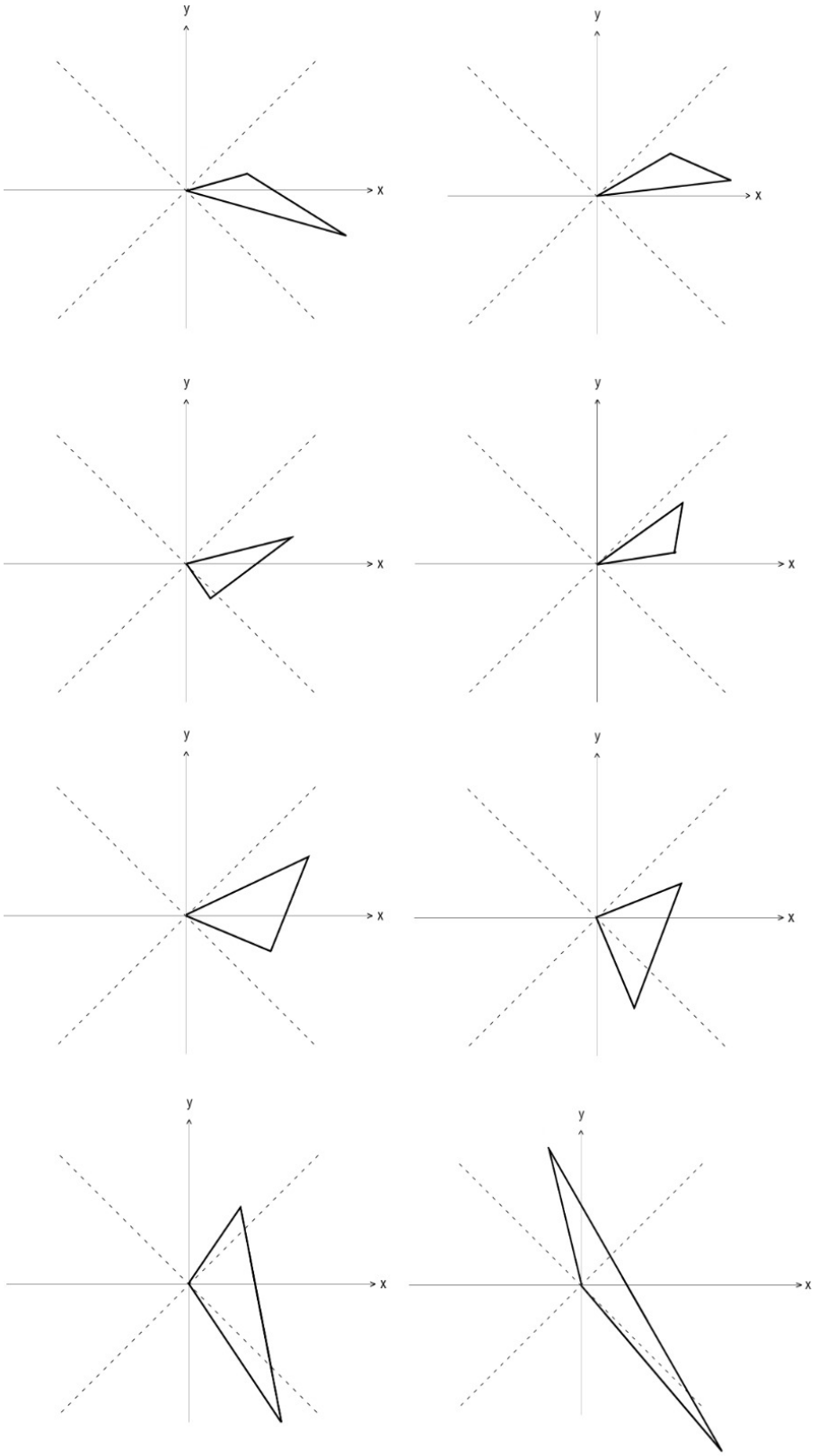
Buna göre hem iç teğet çember hem çevrel çember kavramlarında dikkat çeken ve maksimum düzlemde dikkatle ele alınması gereken bir kavram söz konusudur. Bu kavram ise teğet olmadır.

Öklidyen geometride bir doğru ile bir çemberin teğet olması kavramı Öklidyen doğru ve çemberin bir ortak noktasının olmasıdır. Ancak bu durum maksimum geometride değişime uğramaktadır. Maksimum düzlemin çemberi kenarları eksenlere paralel kare olduğundan bir doğru ile bir maksimum çemberin bir ortak noktasının olması durumu teğet olacak iken doğru ile çemberinin bir kenarın çakışması halide teğet olarak kabul edilecektir. Aşağıdaki şekil bu durumu karakterize etmektedir.



Şekil 4.1 Öklidyen ve Maksimum düzlemde çembere teğet olma

Bu bölümde ele alınacak üçgenlerin köşelerinin isimlendirilmesi saat yönünde yapılacak olup tüm ötelemeler izometri olduğundan dolayı C köşesi orijin olarak ele alınacaktır. C köşesi orijin alındığında diğer iki köşe olan A ve B nin birbirine üstünlüğü yoktur. Yani burada bir yönlendirme kabul edilmiş olsada A ve B nin yer değiştirmesi sadece rollerin değişmesini gerektirir. Bu bağlamada $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$, $C = (x_c, y_c) = (0, 0)$ olup genelliği bozmaksızın $y_a > y_b$ alınacaktır. Ayrıca maksimum düzlem geometride $m \in \{-1, 0, 1\}$ ve $m \to \infty$ eğimli doğrulara göre yansımalar ve $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ olmak üzere $\theta = k\frac{\pi}{2}$ radyanlık dönmeler izometri olduğundan aşağıdaki şekilde görülen durumları göz önünde bulundurmak yeterli olacaktır. Bu üçgenlere temel pozisyonda üçgenler denilecektir.



Şekil 4.2 Maksimum düzlemde temel pozisyondaki üçgenler

Teorem 4.1 *Maksimum düzlemde her üçgenin bir tek iç teğet çemberi vardır. Üstelik iç teğet çemberin merkezi üçgenin maksimum iç açıortaylarının kesim noktasıdır.*

İspat $\overset{\triangle}{ABC}$, *maksimum düzlemde temel pozisyonda bir üçgen olsun bu taktirde* $A=(x_a,y_a)$, $B=(x_b,y_b)$ *ve* $C=(0,0)$ *olmak üzere üçgenin kenarlarının üzerinde olduğu doğruların denklemleri*

$$\begin{aligned} a\circ\overleftrightarrow{BC}...x_by-y_bx &= 0\\ b\circ\overleftrightarrow{AC}...x_ay-y_ax &= 0\\ c\circ\overleftrightarrow{AB}...(x_b-x_a)y-(y_b-y_a)x+x_a(y_b-y_a)-y_a(x_b-x_a) &= 0 \end{aligned}$$

olur. Buna göre maksimum düzlemde bir noktanın bir doğruya uzaklığını kullanarak ve üçgenin içinde kalacak şekilde yönlere dikkat edilerek $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgeninin iç açıortaylarının doğru denklemleri* $m_a=\dfrac{y_b}{x_b}$, $m_b=\dfrac{y_a}{x_a}$ *ve* $m_c=\dfrac{y_b-y_a}{x_b-x_a}$ *olmak üzere aşağıdaki gibi bulunur. O halde üçgenin* C *köşesindeki iç açıortay*

$$\frac{|x_by-y_bx|}{|x_b|+|y_b|}=\frac{|x_ay-y_ax|}{|x_a|+|y_a|}\Longrightarrow\frac{x_by-y_bx}{|x_b|+|y_b|}=\frac{-x_ay+y_ax}{|x_a|+|y_a|}$$

olup gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$y=\frac{(1+|m_b|)m_a+(1+|m_a|)m_b}{(1+|m_b|)+(1+|m_a|)}x$$

olarak bulunur. Benzer şekilde A *köşesindeki iç açıortaylar*

$$\frac{|x_ay-y_ax|}{|x_a|+|y_a|}=\frac{|(x_b-x_a)y-(y_b-y_a)x+x_a(y_b-y_a)-y_a(x_b-x_a)|}{|x_b-x_a|+|y_b-y_a|}$$

olup gerekli hesaplamar ile

$$y=\frac{(1+|m_b|)m_c+(1+|m_c|)m_b}{|m_b|-|m_c|}x+\frac{x_a(1+|m_b|)(m_c-m_b)}{|m_b|-|m_c|}$$

olarak elde edilirken, B *köşesindeki açıortay*

$$\frac{|x_by-y_bx|}{|x_b|+|y_b|}=\frac{|(x_b-x_a)y-(y_b-y_a)x+x_a(y_b-y_a)-y_a(x_b-x_a)|}{|x_b-x_a|+|y_b-y_a|}$$

olup gerekli hesaplamalar gerçekleştirilerek

$$y=\frac{(1+|m_c|)m_a+(1+|m_a|)m_c}{1+|m_a|+|m_c|}x+\frac{x_a\left[(1+|m_a|)m_c+(1+|m_a|)m_b\right]}{1+|m_a|+|m_c|}$$

sonucuna ulaşılır. Şimdi bu noktada

$$\begin{cases} y=\dfrac{(1+|m_b|)m_a+(1+|m_a|)m_b}{(1+|m_b|)(1+|m_a|)}x\\ y=\dfrac{(1+|m_b|)m_c+(1+|m_c|)m_b}{|m_b|-|m_c|}x+\dfrac{x_a(1+|m_b|)(m_c-m_b)}{|m_b|-|m_c|}\\ y=\dfrac{(1+|m_c|)m_a+(1+|m_a|)m_c}{1+|m_a|+|m_c|}x+\dfrac{x_a\left[(1+|m_a|)m_c+(1+|m_a|)m_b\right]}{1+|m_a|+|m_c|} \end{cases}$$

lineer denklem sistemi çözülürse $m_a = \frac{y_b}{x_b}$, $m_b = \frac{y_a}{x_a}$ *ve* $m_c = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$ *olduğunu hatırlayarak*

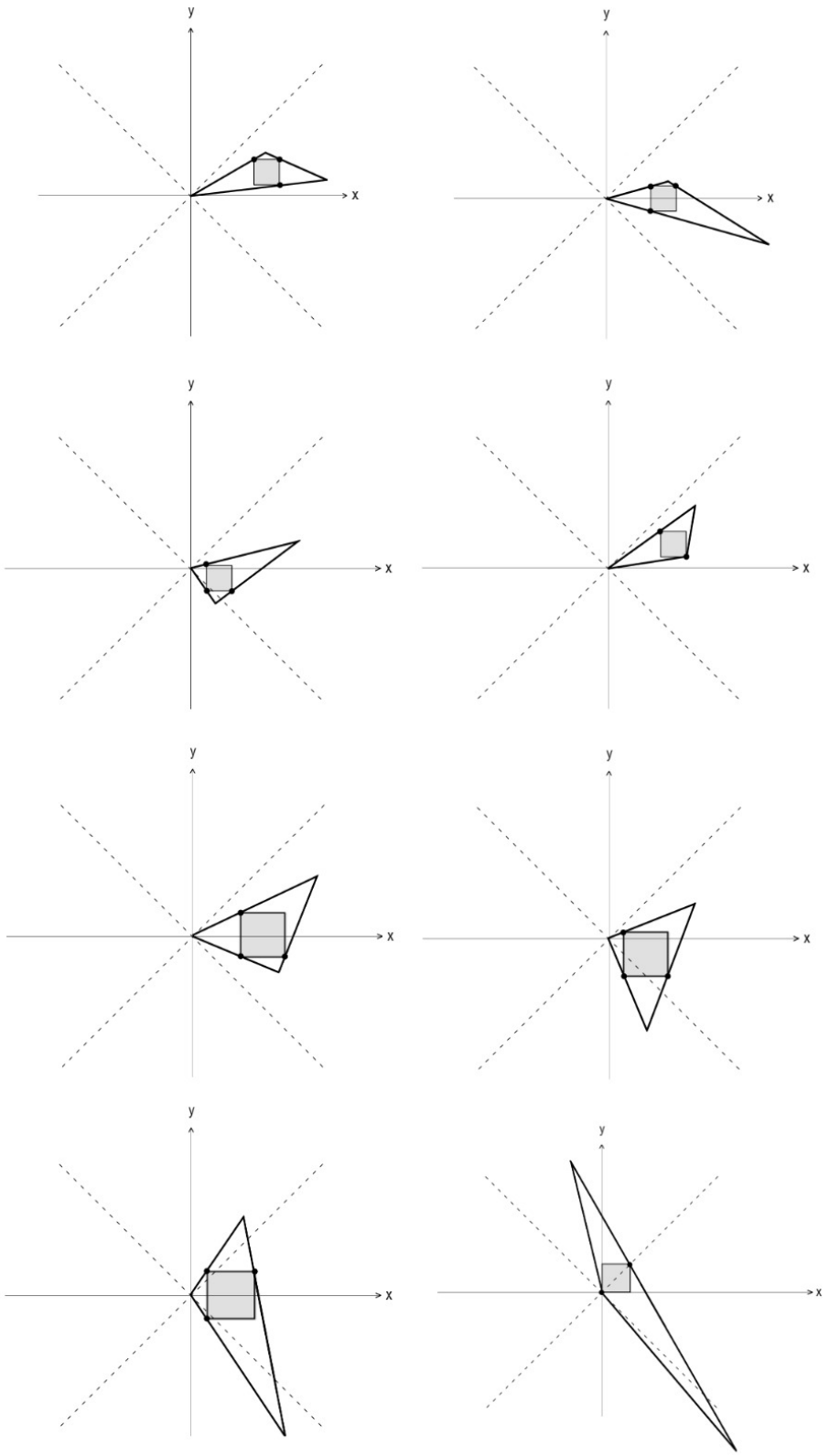
$$\begin{aligned} x &= \frac{x_a(|x_b| + |y_b|) + x_b\,(|x_a| + |y_a|)}{|x_a| + |y_a| + |x_b| + |y_b| + |x_b - x_a| + |y_b - y_a|} \\ y &= \frac{y_a(|x_b| + |y_b|) + y_b\,(|x_a| + |y_a|)}{|x_a| + |y_a| + |x_b| + |y_b| + |x_b - x_a| + |y_b - y_a|} \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bulunan bu sonuç üçgenin üç kernarına da eşit uzaklıktaki üçgenin içinde yer alan noktadır. Dolayısıyla elde edilen bu (x, y) *ifadesi üçgenin iç teğet çemberinin merkezi olup maksimum iç açıortayların kesişim noktasıdır. O halde maksimum düzlemde her üçgenin bir tek iç teğet çemberi mevcuttur. Ayrıca bu iç teğet çemberin yarıçapı*

$$r = \frac{y_a x_b - x_a y_b}{|x_a| + |y_a| + |x_b| + |y_b| + |x_b - x_a| + |y_b - y_a|}$$

dir.

Aşağıdaki şekilde temel pozisyondaki üçgenlerin iç teğet çemberlerini göstermektedir.



Şekil 4.3 Temel pozisyondaki üçgenlerin iç teğet çemberleri

Maksimum düzlemde verilen herhangi noktaların x-eksenindeki iz düşümlerini veya noktaların apsislerine göre sıralamasına yatay sıralama ve benzer şekilde y-eksenindeki iz düşümlerine veya noktaların ordinatlarına göre sıralamasına dikey sıralama adı verilsin. Bu sıralama aşağıdaki teoremde ifade edilen maksimum düzlemde bir üçgenin çevrel çemberinin varlığında önemli rol oynayacaktır.

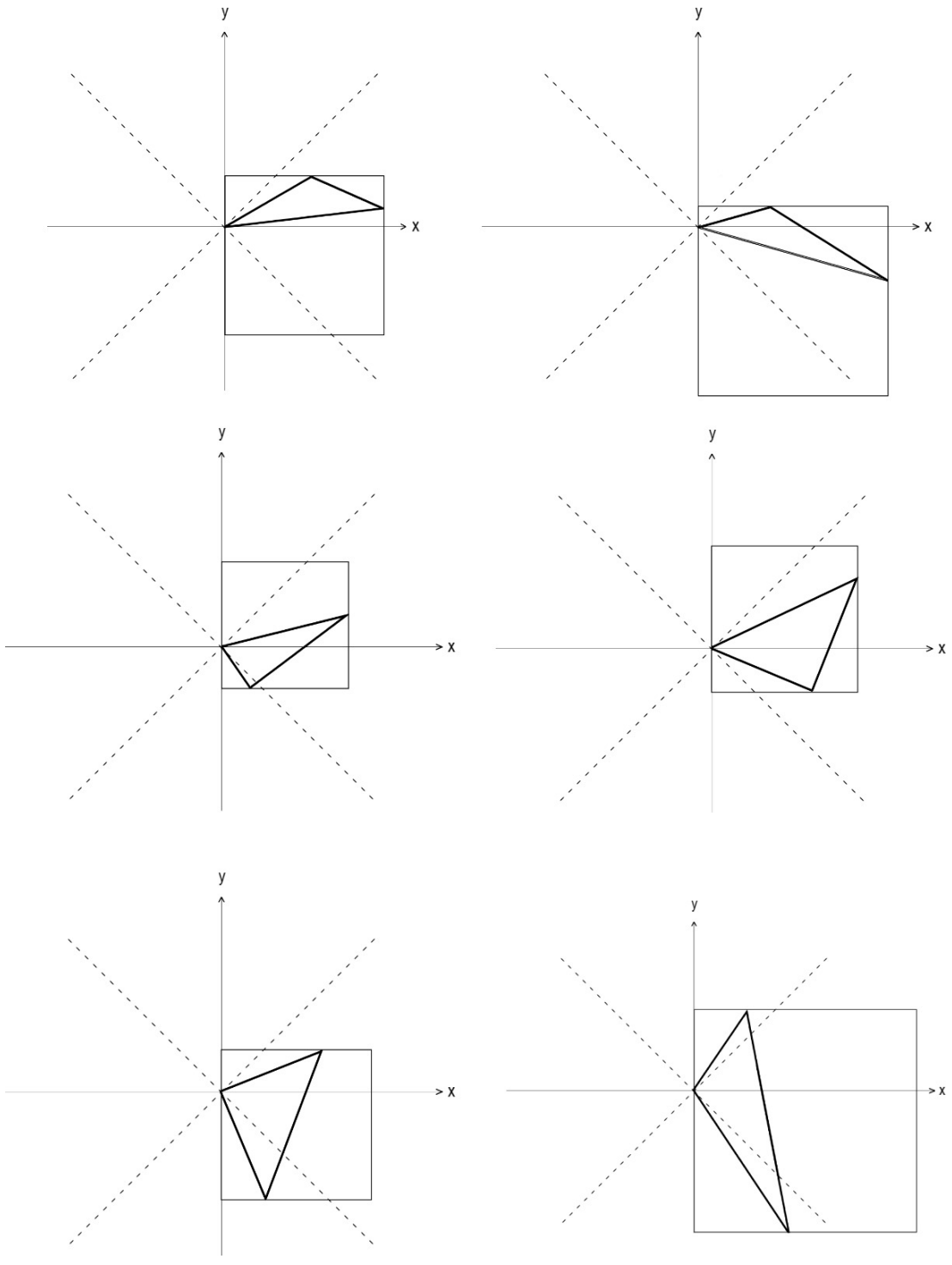
Teorem 4.2 *Maksimum düzlemde bir üçgenin üç köşesinden biri hem yatay hem de dikey sıralamada ortada ise üçgenin çevrel çemberi yoktur. Diğer durumların hepsinde üçgenin çevrel çemberi vardır.*

İspat *Maksimum düzlemde $\overset{\triangle}{ABC}$ temel pozisyonda bir üçgen olsun. Maksimum çember koordinat eksenlerine paralel kenara sabit bir Öklidyen karedir. Bu nedenle $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin çevrel çemberi üçgenin köşe noktalarından geçen kenarları eksenlere paralel olan bir Öklidyen karedir. Dolayısıyla üçgenin hiç bir kenarı yatay veya dikey değilse üçgenin her köşesi çemberin bir kenarı üzerinde olmalıdır. Bu nedenle üçgenin köşelerinden geçen kenarları ya ikisi yatay birisi dikey ya da ikisi dikey biri yatay olmalıdır. Ancak bu durumun dışında üçgenin en az bir kenarı yatay veya dikey ise üçgenin köşe noktaları çevrel çemberin iki kenarı üzerindedir. Bu nedenle çevrel çember için üçgenin köşe noktalarından geçen ve üçgenin iç bölgesinden nokta içermeyen yatay veya dikey doğrular çizilebilmelidir.*

Buna göre bir üçgenin herhangi bir köşesi hem yatay hem dikey sıralamada arada yer alırsa üçgenin o köşesinde üçgenin iç bölgesinden nokta içermeyen (basitçe üçgene teğet olan) yatay veya dikey doğru çizilemez. Dolaysıyla böylesi üçgenin çevrel çemberi mevcut değildir. O halde temel pozisyondaki üçgenler için $0 < y_b < y_a$, $0 < x_b < x_a$ veya $y_b < 0 < y_a$, $x_a < 0 < x_b$ iken çevrel çember çizilemez.

Şimdi üçgenin C köşesinden bir dikey (yatay) kenar çizilebilir olsun. O halde üçgenin A veya B köşesinden geçen doğruya yatay (dikey) olmalıdır. Kalan son köşeden geçen doğru dikey (yatay) olmalıdır. Buna göre üçgenin AC ve BC kenarlarının uzunlukları ölçülerek C köşesinden en uzak ve en yakın köşe belirlenir. Sonra C ye en yakın köşeden C den geçen doğruya zıt karakterli doğru çizilmelidir. Daha sonra geriye kalan son köşeden yatay veya dikey doğrulardan en az biri çizilebilir. Tip tek ise çember belirlenmiş olur. Ancak tip tek değilse önce çemberi oluşturacak şekilde tipi belirlenmelidir. Bu ise kolay olup üçgenin en uzun kenarının köşe noktalarından aynı tipten doğru geçmesi gerekeceğinden gerekli doğru tipi belirlenir. Dolayısıyla üçgenin üç köşesinden biri hem yatay hemde dikey sıralamada arada değilse üçgenin çevrel çemberinin olduğu gösterilmiş oldu.

Aşağıdaki şekil temel pozisyondaki üçgenlerin çevrel çemberlerini göstermektedir.



Şekil 4.4 Temel pozisyondaki üçgenlerin çevrel çemberleri

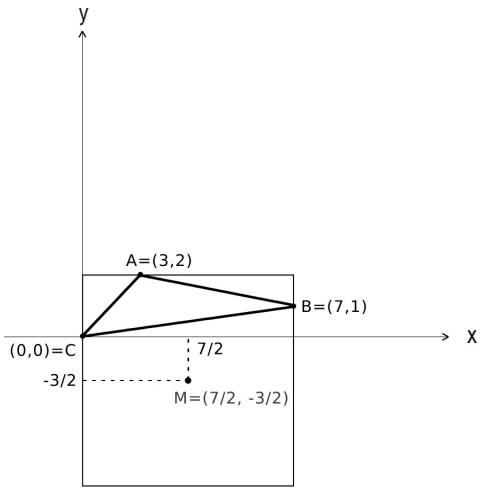
Çevrel çembere sahip bir üçgenin çevrel çemberinin merkezi ve yarıçapını belirlemek kolaydır. Buna göre üçgenin en uzun kenarı tespit edilir. Eğer en uzun kenar yataysal ise ilgili köşelerin apsisleri toplamının yarısı merkezin apsisini verir. Üçgenin kullanılmamış üçüncü köşesi yataysal kenarın üstünde (altında) ise ilgili köşenin ordinatından en uzun kenar uzunluğun yarısı çıkarıldığında (toplandığında) merkezin ordinatı bulunur.

Eğer en uzun kenar dikeysel ise ilgili köşelerin ordinatları toplamının yarısı merkezin ordinatını verir. Üçüncü köşe dikeysel kenarın sağında (solunda) ise ilgili köşenin apsisinden en uzun kenarın uzunluğunun yarısı çıkarıldığından (toplandığında) merkezin apsisi bulunur. Çevrel çemberin yarıçapı ise en uzun kenarın uzunluğunun yarısı kadardır.

Buna göre $A = (3, 2)$, $B = (7, 1)$, $C = (0, 0)$ olmak üzere $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeni ele alınsın. Bu üçgenin kenar uzunlukları

$$|a| = d_M(B, C) = \max\{|7 - 0|, |1 - 0|\} = 7$$
$$|b| = d_M(A, C) = \max\{|3 - 0|, |2 - 0|\} = 3$$
$$|c| = d_M(A, B) = \max\{|7 - 3|, |1 - 2|\} = 4$$

olup en uzun kenar BC kenarıdır. Ayrıca $m_{BC} = \dfrac{1-0}{7-0} = \dfrac{1}{7}$ olup kenar yataysaldır. O halde çevrel çemberin merkezinin apsisi $\dfrac{0+7}{2} = \dfrac{7}{2}$ dir. Üçgenin A köşesi BC kenarlarının üstünde olduğundan dolayı çevrel çemberin merkezinin ordinatı üçgenin en uzun kenarının uzunluğu 7 olduğundan $2 - \dfrac{7}{2} = \dfrac{-3}{2}$ olur. Buna göre çevrel çemberin merkezi $M = \left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{-3}{2}\right)$ ve yarıçapı $r = \dfrac{7}{2}$ dir.



Şekil 4.5 Bir üçgenin çevrel çemberi

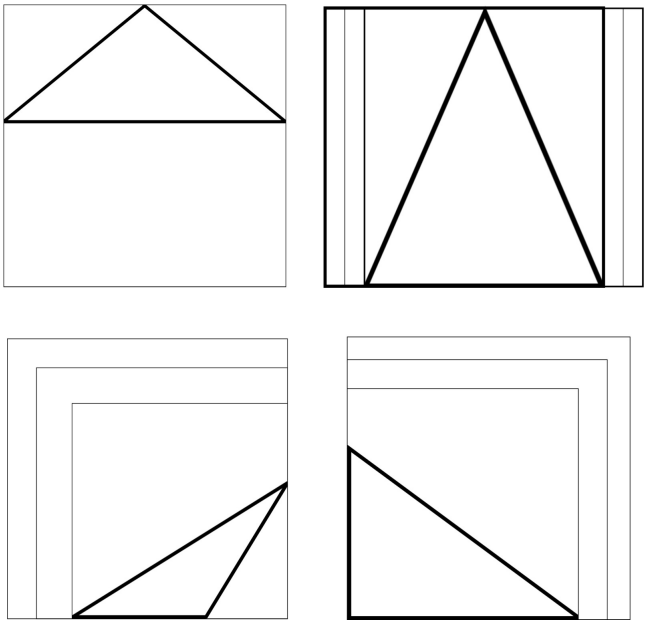
Maksimum düzlemde $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin en az bir kenarı yatay veya dikey ya da iki kenarı yatay ve dikey ise üçgenin sonsuz çoklukta çevrel çemberi olabilir. Aşağıdaki teorem bu durumu açıklamaktadır.

Teorem 4.3 *$\overset{\triangle}{ABC}$ maksimum düzlemde bir üçgen olsun. Bu taktirde,*
(i) $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin bir kenarı yatay (dikey) doğru üzerinde ve bu kenar üçgenin en uzun kenarı değilse üçgenin sonsuz çoklukta çevrel çemberi vardır.
(ii) $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin iki kenarı yatay ve dikey doğru üzerinde ise üçgenin sonsuz çoklukta çevrel çemberi vardır.

İspat *$\overset{\triangle}{ABC}$ maksimum düzlemde bir kenarı yatay veya dikey doğru üzerinde olsun. Bu noktada genelliği bozmaksızın BC kenarı yatay alınsın. Bu taktirde eğer BC üçgenin en uzun kenarı ise temel pozisyon gereğince $A = (x_a, y_a)$ köşesi için $0 \leq x_a \leq x_b$ ve $0 \leq y_a \leq x_b$ olmalıdır. Dolayısıyla A köşesinden çevrel çemberin yatay kenarı geçmek zorundadır. Bu nedenle B ve C köşelerinden dikey kenarlar geçmeyeceğinden dolayı çevrel çember tek olarak belirlenir.*

Eğer $A = (x_a, y_a)$ köşesi için $y_a > x_b$ ve $0 \leq x_a \leq x_b$ ise açıkca A köşesinden çevrel çemberin yatay kenarı geçmelidir. Buna göre AC ve AB üçgenin en uzun kenarı olup çevrel çemberin yarıçapı $\frac{y_a}{2}$ dir. O halde çevrel çemberin sol alt köşesinin apsisi $[x_b - y_a, 0]$ aralığındaki her değer olabilir. Bu nedenle sonsuz çoklukta çevrel çember vardır. Eğer $A = (x_a, y_a)$ köşesi için $x_a > x_b$ veya $x_a < 0$ ise aşikar olarak A köşesinden çevrel çemberin dikey kenarı geçmelidir. Buna göre çevrel çemberin yarıçapı minimum $max\left\{\frac{|x_a|}{2}, \frac{|y_a|}{2}\right\}$ olup bu değerden büyük her yarıçapta çevrel çember çizilebilir. Dolayısıyla sonsuz çoklukta çevrel çember vardır.

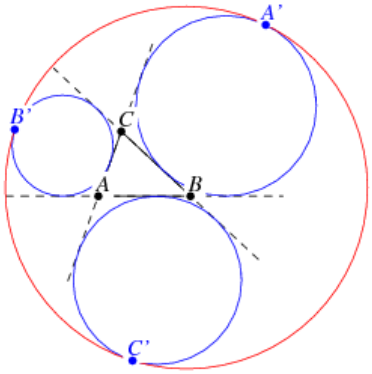
Eğer $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin iki kenarı yatay ve dikey ise apaçık bir şekilde çevrel çemberin iki kenarı bu kenarlar üzerinde olmalıdır. Bu noktada çemberin yarıçapı minimum $max\left\{\frac{|y_a|}{2}, \frac{|x_b|}{2}\right\}$ olup bu değerden büyük her yarıçap için çevrel çember vardır. Doğal olarak sonsuz çoklukta çevrel çember vardır.



Şekil 4.6 Sonsuz çokluktaki çevrel çember durumları

5. MAKSİMUM DÜZLEMDE BİR ÜÇGENİN APOLLONIUS ÇEMBERİ

Bu bölümde maksimum düzlemde ele alınan herhangi bir üçgenin üç dış teğet çemberini içerecek ve bu üç dış teğet çembere teğet olan çember kavramı incelenecektir. Burada bahsedilen kavram Öklidyen düzlemde iyi bilinen bir durum olup dış teğet çemberi kapsayıp onlara teğet olan çembere Apollonius çember adı verilir. Aşağıdaki şekil Öklidyen düzlemdeki bu durumu ifade etmektedir.



Şekil 5.1 Öklidyen düzlemde Apollonius çemberi

Öklidyen düzlemde her üçgenin burada bahsedilen anlamda bir Apollonius çemberinin var olduğu bilinmektedir. Ancak bu durum maksimum düzlemde incelenmeye değer problemdir. O halde ilk olarak dış teğet ve Apollonius çember kavramının tanımı verilecektir.

Tanım 5.1 *Maksimum düzlemde ele alınan bir üçgenin bir kenarına ve diğer iki kenarının uzantısına teğet olan maksimum çemberine üçgenin bir dış teğet çemberi denir.*

Tanım 5.2 *Maksimum düzlemde ele alınan bir üçgenin üç dış teğet çemberini kapsayan ve onlara teğet olan maksimum çemberine üçgenin Apollonius çemberi denir.*

Bu bölümde de tıpkı dördüncü bölümde olduğu gibi teğet olma kavramı sadece doğru ile çemberin veya iki çemberin bir ortak noktası olması olarak değil aynı zamanda doğru ile çemberin veya iki çemberin bir doğru parçası boyunca kesişmeside teğet olma durumu olarak alınacaktır. Ayrıca üçgenlerin temel pozisyonda olması aynen kullanılacaktır.

Teorem 5.1 *Maksimum düzlemde* $\overset{\triangle}{ABC}$, $A=(x_a,y_a)$, $B=(x_b,y_b)$, $C=(0,0)$ *köşe noktalı temel pozisyonda bir üçgen olsun. Bu taktirde*

(i) $|x_a|+|y_a|+|x_b|+|y_b|-|x_b-x_a|-|y_b-y_a|\neq 0$ *koşulu sağlanıyorsa* $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgenin* AB *kenarına teğet olan dış teğet çemberi vardır.*

(ii) $|x_a|+|y_a|+|x_b-x_a|+|y_b-y_a|-|x_b|-|y_b|\neq 0$ *koşulu sağlanıyorsa* $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgenin* BC *kenarına teğet olan dış teğet çemberi vardır.*

(iii) $|x_a|+|y_a|-|x_b|-|y_b|-|x_b-x_a|-|y_b-y_a|\neq 0$ *koşulu sağlanıyorsa* $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgenin* AC *kenarına teğet olan dış teğet çemberi vardır.*

İspat $\overset{\triangle}{ABC}$, $A=(x_a,y_a)$, $B=(x_b,y_b)$ *ve* $C=(0,0)$ *olmak üzere maksimum düzlemde temel pozisyonda bir üçgen olsun. Bu taktirde* $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgenine* AB *kenarında ve diğer kenarların uzantılarında teğet olan dış teğet çemberin olması için üç doğruya eşit uzaklıkta bir noktanın bulunması gereklidir. Bu noktada* A *ve* C *köşesindeki dış açıortaylar ile* B *köşesindeki iç açıortay incelenmelidir. Eğer bu üç doğrunun kesişim noktası mevcut ise aranan koşulda dış teğet çember çizilir. Buna göre üçgenin kenarının üzerinde bulunduğu doğruların denklemleri*

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{BC}...x_by-y_bx &= 0\\ \overleftrightarrow{AC}...x_ay-y_ax &= 0\\ \overleftrightarrow{AB}...(x_b-x_a)y-(y_b-y_a)x+x_a(y_b-y_a)-y_a(x_b-x_a) &= 0\end{aligned}$$

şeklindedir. O halde maksimum düzlemde bir noktanın bir doğruya olan uzaklığı bağıntısını ve doğrunun ilgili yönlendirilmesine dikkat edilerek bahsedilen açıortay denklemleri aşağıdaki gibi bulunur. Bu durumda üçgenin C *köşesindeki iç açıortay*

$$\frac{|x_by-y_bx|}{|x_b|+|y_b|}=\frac{|x_ay-y_ax|}{|x_a|+|y_a|}\Longrightarrow\frac{x_by-y_bx}{|x_b|+|y_b|}=\frac{-x_ay+y_ax}{|x_a|+|y_a|}$$

olup gerekli hesaplamalar ile

$$\left[x_b(|x_a|+|y_a|)+x_a\left(|x_b|+|y_b|\right)\right]y-\left[y_b\left(|x_a|+|y_a|\right)+y_a\left(|x_b|+|y_b|\right)\right]x=0$$

bulunur.

Benzer şekilde A köşesindeki dış açıortay

$$\frac{|x_a y - y_a x|}{|x_a| + |y_a|} = \frac{|(x_b - x_a)y - (y_b - y_a)x + x_a(y_b - y_a) - y_a(x_b - x_a)|}{|x_b - x_a| + |y_b - y_a|}$$

olup gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{gathered}[x_a\left(|x_b - x_a| + |y_b - y_a|\right) + (x_b - x_a)\left(|x_a| + |y_a|\right)]\, y - \\ [y_a\left(|x_b - x_a| + |y_b - y_a|\right) + (y_b - y_a)\left(|x_a| + |y_a|\right)]\, x + \\ \left(|x_a| + |y_a|\right)\left[x_a\left(y_b - y_a\right) - y_a\left(x_b - x_a\right)\right] = 0\end{gathered}$$

sonucuna ulaşılır ve B köşesindeki dış açıortay

$$\frac{|x_b y - y_b x|}{|x_b| + |y_b|} = \frac{|(x_b - x_a)y - (y_b - y_a)x + x_a(y_b - y_a) - y_a(x_b - x_a)|}{|x_b - x_a| + |y_b - y_a|}$$

olup gerekli hesaplamalar sonucu

$$\begin{gathered}[x_b\left(|x_b - x_a| + |y_b - y_a|\right) - (x_b - x_a)\left(|x_b| + |y_b|\right)]\, y - \\ [y_b\left(|x_b - x_a| + |y_b - y_a|\right) - (y_b - y_a)\left(|x_b| + |y_b|\right)]\, x + \\ \left(|x_b| + |y_b|\right)\left[x_a\left(y_b - y_a\right) - y_a\left(x_b - x_a\right)\right] = 0\end{gathered}$$

bulunur. Şimdi bu açıortay denklemlerinin oluşturduğu lineer denklem sistemi çözülürse

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_b(|x_a| + |y_a|) + x_a\left(|x_b| + |y_b|\right)}{|x_a| + |y_a| + |x_b| + |y_b| - |x_b - x_a| - |y_b - y_a|} \\ y &= \frac{y_b(|x_a| + |y_a|) + y_a\left(|x_b| + |y_b|\right)}{|x_a| + |y_a| + |x_b| + |y_b| - |x_b - x_a| - |y_b - y_a|} \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Bu noktada $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin AB kenarına ve AC ile BC kenarlarının uzantılarına eşit uzaklıkta olduğundan üçgenin AB kenarına teğet olan dış teğet çemberin merkezidir. Bu dış teğet çemberin yarıçapı ise

$$r = \frac{y_a x_b - x_a y_b}{|x_a| + |y_a| + |x_b| + |y_b| - |x_b - x_a| - |y_b - y_a|}$$

olur. Buna göre burada $|x_a| + |y_a| + |x_b| + |y_b| - |x_b - x_a| - |y_b - y_a| = 0$ olursa ilgili merkez ve yarıçap bulunamayacağından bu koşul altında bir dış teğet çember yoktur.

O halde benzer bir yol izlenerek $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgenine BC kenarında ve diğer kenarların uzantılarında teğet olan dış teğet çemberin tespit edilmesi için A köşesindeki iç açıortay ile B ve C köşelerindeki dış açıortayların denklemleri sırasıyla aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{gathered}[x_a\left(|x_b - x_a| + |y_b - y_a|\right) - (x_b - x_a)\left(|x_a| + |y_a|\right)]\, y - \\ [y_a\left(|x_b - x_a| + |y_b - y_a|\right) - (y_b - y_a)\left(|x_a| + |y_a|\right)]\, x + \\ \left(|x_a| + |y_a|\right)\left[-x_a\left(y_b - y_a\right) + y_a\left(x_b - x_a\right)\right] = 0, \\ [x_b\left(|x_b - x_a| + |y_b - y_a|\right) - (x_b - x_a)\left(|x_b| + |y_b|\right)]\, y - \\ [y_b\left(|x_b - x_a| + |y_b - y_a|\right) - (y_b - y_a)\left(|x_b| + |y_b|\right)]\, x + \\ \left(|x_b| + |y_b|\right)\left[-x_a\left(y_b - y_a\right) + y_a\left(x_b - x_a\right)\right] = 0, \\ [x_b(|x_a| + |y_a|) - x_a\left(|x_b| + |y_b|\right)]\, y - [y_b\left(|x_a| + |y_a|\right) - y_a\left(|x_b| + |y_b|\right)]\, x = 0.\end{gathered}$$

Üstteki lineer denklem sistemi çözülürse çözüm

$$x = \frac{x_b(|x_a| + |y_a|) - x_a\left(|x_b| + |y_b|\right)}{|x_a| + |y_a| + |x_b - x_a| + |y_b - y_a| - |x_b| - |y_b|}$$
$$y = \frac{y_b(|x_a| + |y_a|) - y_a\left(|x_b| + |y_b|\right)}{|x_a| + |y_a| + |x_b - x_a| + |y_b - y_a| - |x_b| - |y_b|}$$

olarak bulunur. Bu nokta $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin BC kenarına ve AB ile AC kenarlarının uzantılarına teğet olan dış teğet çemberin merkezidir. Ayrıca bu dış teğet çemberin yarıçapı ise

$$r = \frac{y_a x_b - x_a y_b}{|x_a| + |y_a| + |x_b - x_a| + |y_b - y_a| - |x_b| - |y_b|}$$

şeklindedir. Buradan da açıkca $|x_a| + |y_a| + |x_b - x_a| + |y_b - y_a| - |x_b| - |y_b| = 0$ ise ilgili merkez ve yarıçap oluşmayacağından bu koşul altında bir dış teğet çember yoktur.

Aynı şekilde $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgenine AC kenarında ve diğer kenarların uzantılarında teğet olan dış teğet çemberin bulunması için gerekli olan sırasıyla B köşesindeki iç açıortay ile A ve C köşelerindeki dış açıortayların denklemleri aşağıda ifade edildiği gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
\left[x_b\left(|x_b - x_a| + |y_b - y_a|\right) + (x_b - x_a)\left(|x_b| + |y_b|\right)\right] y - \\
\left[y_b\left(|x_b - x_a| + |y_b - y_a|\right) + (y_b - y_a)\left(|x_b| + |y_b|\right)\right] x + \\
\left(|x_b| + |y_b|\right)\left[-x_a\left(y_b - y_a\right) + y_a\left(x_b - x_a\right)\right] = 0, \\
\left[x_a\left(|x_b - x_a| + |y_b - y_a|\right) + (x_b - x_a)\left(|x_a| + |y_a|\right)\right] y - \\
\left[y_a\left(|x_b - x_a| + |y_b - y_a|\right) + (y_b - y_a)\left(|x_a| + |y_a|\right)\right] x + \\
\left(|x_a| + |y_a|\right)\left[x_a\left(y_b - y_a\right) - y_a\left(x_b - x_a\right)\right] = 0, \\
\left[x_b(|x_a| + |y_a|) - x_a\left(|x_b| + |y_b|\right)\right] y - \left[y_b\left(|x_a| + |y_a|\right) - y_a\left(|x_b| + |y_b|\right)\right] x = 0.
\end{aligned}$$

Bulunan bu lineer denklem sistemi çözümlenirse sonuç

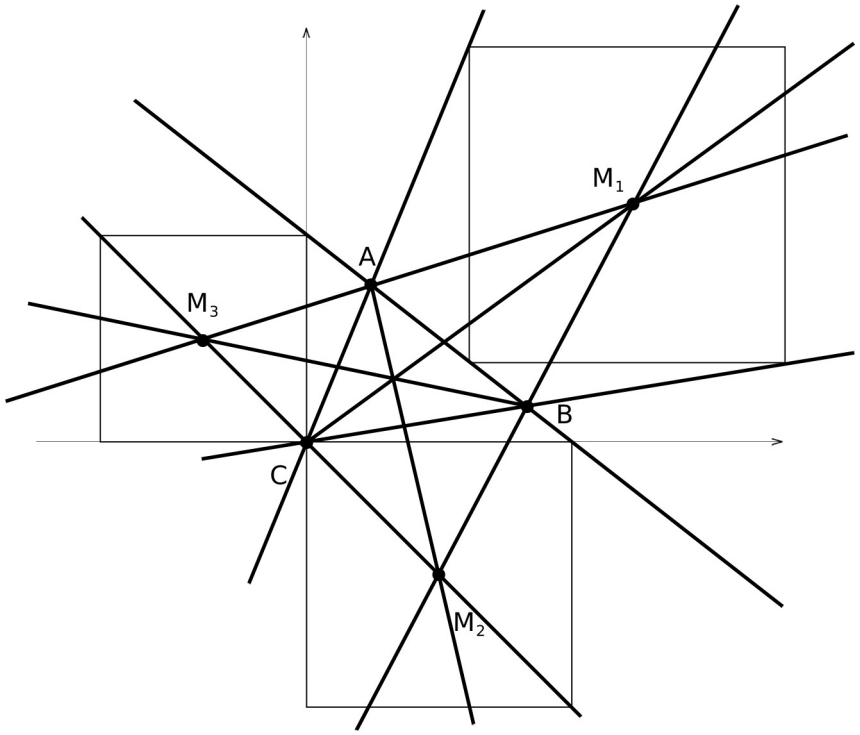
$$\begin{aligned}
x &= \frac{x_b(|x_a| + |y_a|) - x_a\left(|x_b| + |y_b|\right)}{|x_a| + |y_a| - |x_b| - |y_b| - |x_b - x_a| - |y_b - y_a|} \\
y &= \frac{y_b(|x_a| + |y_a|) - y_a\left(|x_b| + |y_b|\right)}{|x_a| + |y_a| - |x_b| - |y_b| - |x_b - x_a| - |y_b - y_a|}
\end{aligned}$$

şeklinde tespit edilir. Bu nedenle ilgili nokta $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin AC kenarına ve AB ile BC kenarlarının uzantılarına teğet olan dış teğet çemberin merkezi olup bu dış teğet çemberin yarıçapı ise

$$r = \frac{x_a y_b - y_a x_b}{|x_a| + |y_a| - |x_b| - |y_b| - |x_b - x_a| - |y_b - y_a|}$$

dir. Bu noktada açıkca $|x_a| + |y_a| - |x_b| - |y_b| - |x_b - x_a| - |y_b - y_a| = 0$ olursa ilgili merkez ve yarıçap bulunamaz. Dolayısıyla bu koşul altında bir dış teğet çember yoktur.

Örnek 5.1 *$\overset{\triangle}{ABC}$ maksimum düzleminde $A = (3, 9)$, $B = (5, 1), C = (0, 0)$ olmak üzere bir üçgen olsun. Buna göre $\overline{AB}$ kenarına teğet olan dış teğet çemberin merkezi $M_1 = \left(\frac{39}{4}, \frac{33}{4}\right)$ ve yarıçapı $r_1 = \frac{21}{4}$ iken $\overline{BC}$ kenarına teğet olan dış teğet çemberin merkezi $M_2 = \left(\frac{21}{8}, \frac{-21}{8}\right)$ ve yarıçapı $r_2 = \frac{21}{8}$ ve de $\overline{AC}$ kenarına teğet olan dış teğet çemberin merkezi $M_3 = \left(\frac{-21}{2}, \frac{21}{2}\right)$ ve yarıçapı $r_3 = \frac{21}{2}$ bulunur.*

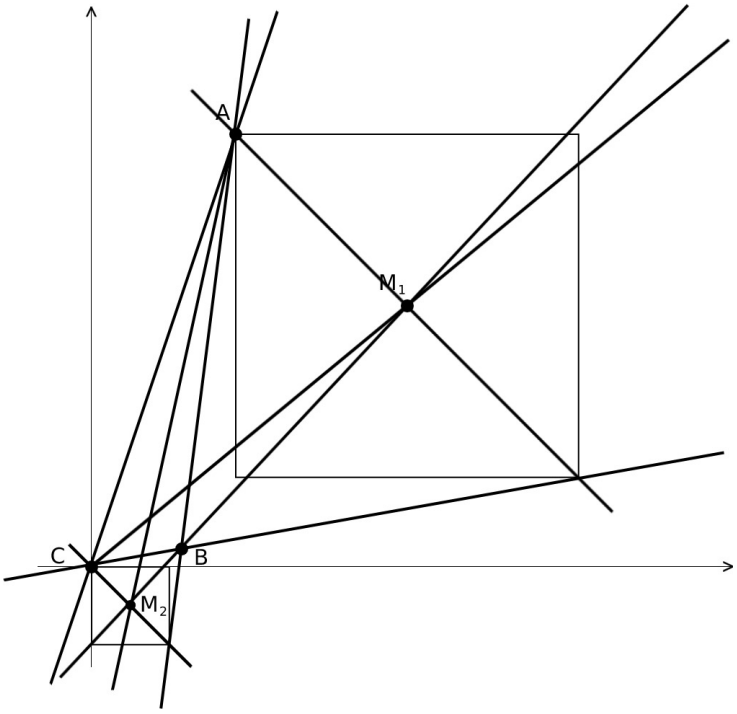


Şekil 5.2 Maksimum düzlemde üç dış teğet çembere sahip bir üçgen

Örnek 5.2 *$\overset{\triangle}{ABC}$ maksimum düzleminde $A = (8, 24)$, $B = (5, 1), C = (0, 0)$ olmak üzere bir üçgen olsun. Bu taktirde $\overline{AB}$ kenarına teğet olan dış teğet çemberin merkezi $M_1 = \left(\frac{52}{3}, \frac{44}{3}\right)$ ve yarıçapı $r_1 = \frac{28}{3}$ dür. Ayrıca $\overline{BC}$ kenarına teğet olan dış teğet çemberin merkezi $M_2 = \left(\frac{28}{13}, \frac{-28}{13}\right)$ ve yarıçapı $r_2 = \frac{28}{13}$ dür. Fakat $\overline{AC}$ kenarına teğet olan dış teğet çember için*

$$|x_a| + |y_a| - |x_b| - |y_b| - |x_b - x_a| - |y_b - x_b| = 8 + 24 - 5 - 1 - 3 - 23 = 0$$

olduğundan dolayı dış teğet çember yoktur.



Şekil 5.3 Maksimum düzlemde iki dış teğet çembere sahip bir üçgen

Teorem 5.2 *Maksimum düzlemde* $\overset{\triangle}{ABC}$, $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ *ve* $C = (0, 0)$ *köşe noktalı temel pozisyonda bir üçgen olsun. Bu taktirde*

$$|x_a| + |y_a| + |x_b| + |y_b| - |x_b - x_a| - |y_b - y_a| = 0$$

veya

$$|x_a| + |y_a| + |x_b - x_a| + |y_b - y_a| - |x_b| - |y_b| = 0$$

veya

$$|x_a| + |y_a| - |x_b| - |y_b| - |x_b - x_a| - |y_b - y_a| = 0$$

koşullarından en az biri sağlanıyorsa Apollonius çemberi yoktur.

İspat $\overset{\triangle}{ABC}$, $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ *ve* $C = (0, 0)$ *olmak üzere maksimum düzlemde temel pozisyonda bir üçgen olsun. Bu taktirde bir önceki Teorem 5.1 gereğince bu* $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgeninin en az bir dış teğet çemberi mevcut değildir. Bundan dolayı apaçık bir şekilde Apollonius çemberi mevcut değildir.*

Teorem 5.3 *Maksimum düzlemde* $\overset{\triangle}{ABC}$, $A = (x_a, y_a), B = (x_b, y_b)$ *ve* $C = (0, 0)$ *köşe noktalı temel pozisyonda bir üçgen olsun. Ayrıca üçgenin üç dış teğet çemberide mevcut*

olsun. Bu taktirde

$$(i)\ \frac{y_b(|x_a|+|y_a|)+y_a\left(|x_b|+|y_b|\right)+y_ax_b-x_ay_b}{|x_a|+|y_a|+|x_b|+|y_b|-|x_b-x_a|-|y_b-y_a|}<\frac{y_b(|x_a|+|y_a|)-y_a\left(|x_b|+|y_b|\right)+x_ay_b-y_ax_b}{|x_a|+|y_a|-|x_b|-|y_b|-|x_b-x_a|-|y_b-y_a|}$$

$$\frac{x_b(|x_a|+|y_a|)+x_a\left(|x_b|+|y_b|\right)+y_ax_b-x_ay_b}{|x_a|+|y_a|+|x_b|+|y_b|-|x_b-x_a|-|y_b-y_a|}<\frac{x_b(|x_a|+|y_a|)-x_a\left(|x_b|+|y_b|\right)+x_by_a-x_ay_b}{|x_a|+|y_a|+|x_b-x_a|+|y_b-y_a|-|x_b|-|y_b|}$$

$$(ii)\ \frac{y_b(|x_a|+|y_a|)-y_a\left(|x_b|+|y_b|\right)+x_ay_b-x_by_a}{|x_a|+|y_a|+|x_b-x_a|+|y_b-y_a|-|x_b|-|y_b|}>\frac{y_b(|x_a|+|y_a|)+y_a\left(|x_b|+|y_b|\right)+x_ay_b-x_by_a}{|x_a|+|y_a|+|x_b|+|y_b|-|x_b-x_a|-|y_b-y_a|}$$

$$\frac{x_b(|x_a|+|y_a|)-x_a\left(|x_b|+|y_b|\right)+x_ay_b-x_by_a}{|x_a|+|y_a|+|x_b-x_a|+|y_b-y_a|-|x_b|-|y_b|}>\frac{x_b(|x_a|+|y_a|)-x_a\left(|x_b|+|y_b|\right)+x_by_a-x_ay_b}{|x_a|+|y_a|-|x_b|-|y_b|-|x_b-x_a|-|y_b-y_a|}$$

$$(iii)\ \frac{y_b(|x_a|+|y_a|)-y_a\left(|x_b|+|y_b|\right)+x_ay_b-y_ax_b}{|x_a|+|y_a|-|x_b|-|y_b|-|x_b-x_a|-|y_b-y_a|}<\frac{y_b(|x_a|+|y_a|)+y_a\left(|x_b|+|y_b|\right)+y_ax_b-x_ay_b}{|x_a|+|y_a|+|x_b|+|y_b|-|x_b-x_a|-|y_b-y_a|}$$

$$\frac{x_b(|x_a|+|y_a|)-x_a\left(|x_b|+|y_b|\right)+x_by_a-x_ay_b}{|x_a|+|y_a|-|x_b|-|y_b|-|x_b-x_a|-|y_b-y_a|}>\frac{x_b(|x_a|+|y_a|)-x_a\left(|x_b|+|y_b|\right)+x_ay_b-x_by_a}{|x_a|+|y_a|+|x_b-x_a|+|y_b-y_a|-|x_b|-|y_b|}$$

eşitsizlik gruplarından en az biri sağlanıyor ise Apollonius çemberi yoktur. (i), (ii) *ve* (iii) *durumları dışında Apollonius çemberi mevcuttur.*

İspat $\overset{\triangle}{ABC}$, $A=(x_a,y_a)$, $B=(x_b,y_b)$ *ve* $C=(0,0)$ *olmak üzere maksimum düzlemde üç dış teğetide mevcut olan temel pozisyonda bir üçgen olsun. Bu taktirde açıkca*

$$|x_a|+|y_a|+|x_b|+|y_b|-|x_b-x_a|-|y_b-y_a|\neq 0$$
$$|x_a|+|y_a|+|x_b-x_a|+|y_b-y_a|-|x_b|-|y_b|\neq 0$$
$$|x_a|+|y_a|-|x_b|-|y_b|-|x_b-x_a|-|y_b-y_a|\neq 0$$

olmalıdır. Teorem 5.1 gereğince AB *kenarına teğet olan dış teğet çemberin merkezi ve yarıçapı*

$$x=\frac{x_b(|x_a|+|y_a|)+x_a\left(|x_b|+|y_b|\right)}{|x_a|+|y_a|+|x_b|+|y_b|-|x_b-x_a|-|y_b-y_a|},$$
$$y=\frac{y_b(|x_a|+|y_a|)+y_a\left(|x_b|+|y_b|\right)}{|x_a|+|y_a|+|x_b|+|y_b|-|x_b-x_a|-|y_b-y_a|},$$
$$r=\frac{y_ax_b-x_ay_b}{|x_a|+|y_a|+|x_b|+|y_b|-|x_b-x_a|-|y_b-y_a|},$$

BC kenarına teğet olan dış teğet çemberin merkezi ve yarıçapı

$$x=\frac{x_b(|x_a|+|y_a|)-x_a\left(|x_b|+|y_b|\right)}{|x_a|+|y_a|+|x_b-x_a|+|y_b-y_a|-|x_b|-|y_b|},$$
$$y=\frac{y_b(|x_a|+|y_a|)-y_a\left(|x_b|+|y_b|\right)}{|x_a|+|y_a|+|x_b-x_a|+|y_b-y_a|-|x_b|-|y_b|},$$
$$r=\frac{y_ax_b-x_ay_b}{|x_a|+|y_a|+|x_b-x_a|+|y_b-y_a|-|x_b|-|y_b|},$$

AC kenarına teğet olan dış teğet çemberin merkezi ve yarıçapı

$$x=\frac{x_b(|x_a|+|y_a|)-x_a\left(|x_b|+|y_b|\right)}{|x_a|+|y_a|-|x_b|-|y_b|-|x_b-x_a|-|y_b-y_a|}$$
$$y=\frac{y_b(|x_a|+|y_a|)-y_a\left(|x_b|+|y_b|\right)}{|x_a|+|y_a|-|x_b|-|y_b|-|x_b-x_a|-|y_b-y_a|}$$
$$r=\frac{x_ay_b-y_ax_b}{|x_a|+|y_a|-|x_b|-|y_b|-|x_b-x_a|-|y_b-y_a|}$$

dir. Bu çemberler kısalığın hatrına $Ç_{AB}$, $Ç_{BC}$, $Ç_{AC}$ ile gösterilsin. Açıkca $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin dış teğet çemberleri ve bu üç çemberi kapsayacak ve teğet olacak Apollonius çemberi birer maksimum çemberdir. Dolayısıyla dış teğet çember ile Apollonius çemberinin teğet olması kenar boyunca çakışma olmalıdır.

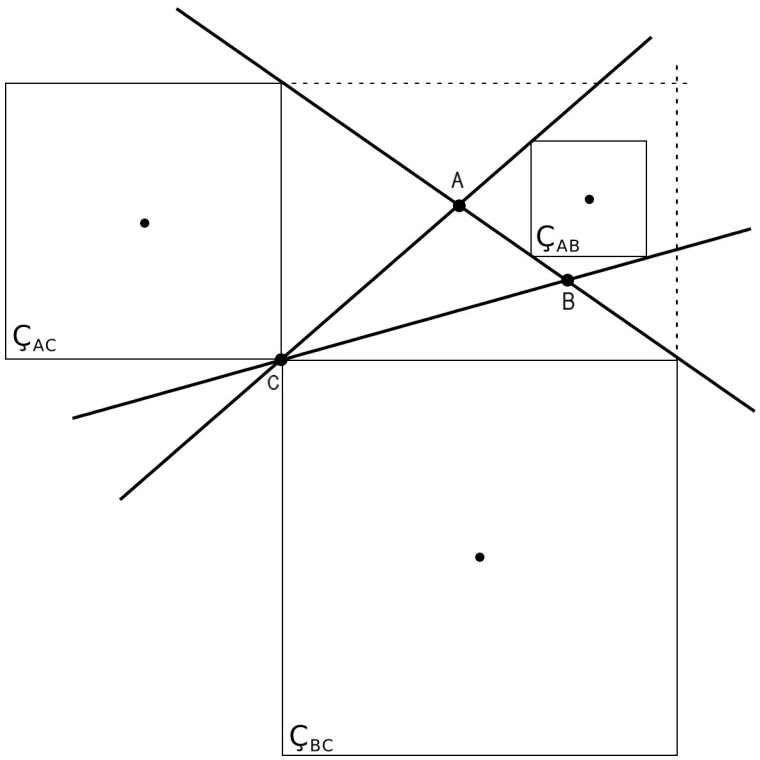
Buna göre biraz dikkatlice düşünüldüğünde $Ç_{AB}$ nin üst kenarı $Ç_{AC}$ nin üst kenarından aşağıda ve $Ç_{AB}$ nin sağ kenarı $Ç_{BC}$ nin sağ kenarının solunda ise $Ç_{AB}$ ile kapsayacak ve teğet olacak şekilde bir Apollonius çemberi çizilemez. O halde bu durumda

$$\frac{y_b(|x_a|+|y_a|)+y_a\left(|x_b|+|y_b|\right)+y_ax_b-x_ay_b}{|x_a|+|y_a|+|x_b|+|y_b|-|x_b-x_a|-|y_b-y_a|}<\frac{y_b(|x_a|+|y_a|)-y_a\left(|x_b|+|y_b|\right)+x_ay_b-y_ax_b}{|x_a|+|y_a|-|x_b|-|y_b|-|x_b-x_a|-|y_b-y_a|}$$

ve

$$\frac{x_b(|x_a|+|y_a|)+x_a\left(|x_b|+|y_b|\right)+y_ax_b-x_ay_b}{|x_a|+|y_a|+|x_b|+|y_b|-|x_b-x_a|-|y_b-y_a|}<\frac{x_b(|x_a|+|y_a|)-x_a\left(|x_b|+|y_b|\right)+x_by_a-y_bx_a}{|x_a|+|y_a|+|x_b-x_a|+|y_b-y_a|-|x_b|-|y_b|}$$

eşitsizlikleri yukarıda ifade edilen durumu göstermektedir. Dolayısıyla bu eşitsizlikler geçerli ise $Ç_{AB}$ ye teğet ve kapsayacak şekilde hiç bir maksimum çemberi mevcut olamaz. Aşağıdaki şekil bu duruma işaret etmektedir.



Şekil 5.4 Maksimum düzlemde Apollonius çemberinin bulunmama hali 1

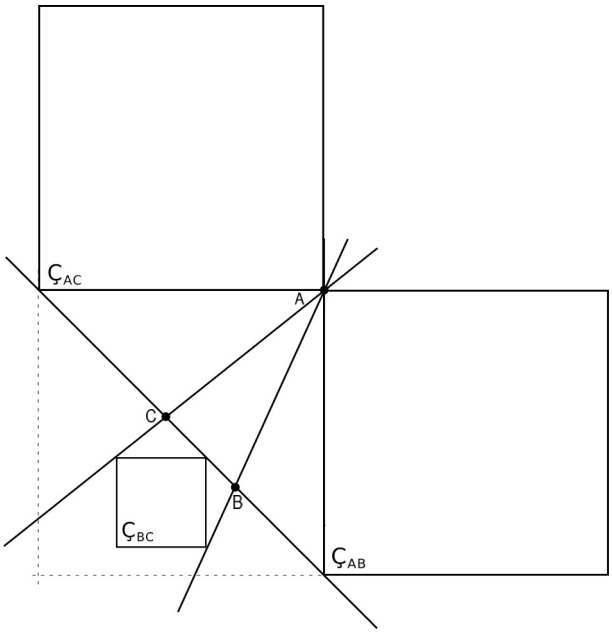
Benzer şekilde Ç$_{BC}$ nin alt kenarı Ç$_{AB}$ nin alt kenarının üstünde ve Ç$_{BC}$ nin sol kenarı Ç$_{AC}$ nin sol kenarının sağında ise Ç$_{BC}$ ile kapsayacak ve teğet olacak şekilde bir Apollonius çemberi çizilemez. Buna göre

$$\frac{y_b(|x_a|+|y_a|)-y_a\left(|x_b|+|y_b|\right)+x_ay_b-x_by_a}{|x_a|+|y_a|+|x_b-x_a|+|y_b-y_a|-|x_b|-|y_b|} > \frac{y_b(|x_a|+|y_a|)+y_a\left(|x_b|+|y_b|\right)+x_ay_b-y_ax_b}{|x_a|+|y_a|+|x_b|+|y_b|-|x_b-x_a|-|y_b-y_a|}$$

ve

$$\frac{x_b(|x_a|+|y_a|)-x_a\left(|x_b|+|y_b|\right)+x_ay_b-y_ax_b}{|x_a|+|y_a|+|x_b-x_a|+|y_b-y_a|-|x_b|-|y_b|} > \frac{x_b(|x_a|+|y_a|)-x_a\left(|x_b|+|y_b|\right)+x_by_a-y_bx_a}{|x_a|+|y_a|-|x_b|-|y_b|-|x_b-x_a|-|y_b-y_a|}$$

eşitsizlikleri bu durumu ifade etmektedir. Bu nedenle bu eşitsizlikler geçerli ise Ç$_{BC}$ ye teğet ve kapsayacak şekilde hiç bir maksimum çember çizilemez. Aşağıdaki şekil bu durumu göstermektedir.



Şekil 5.5 Maksimum düzlemde Apollonius çemberinin bulunmama hali 2

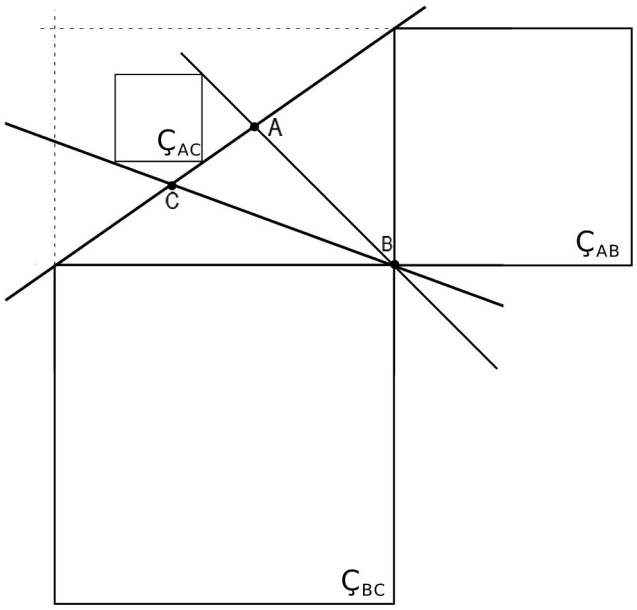
Aynı yolla Ç$_{AC}$ nin üst kenarı Ç$_{AB}$ nin üst kenarının altında ve Ç$_{AC}$ nin sol kenarı Ç$_{BC}$ nin sol kenarının sağında ise Ç$_{AC}$ ile kapsayacak ve teğet olacak şekilde bir Apollonius çemberi mevcut değildir. Bu nedenle

$$\frac{y_b(|x_a|+|y_a|)-y_a\left(|x_b|+|y_b|\right)+x_ay_b-y_ax_b}{|x_a|+|y_a|-|x_b|-|y_b|-|x_b-x_a|-|y_b-y_a|} < \frac{y_b(|x_a|+|y_a|)+y_a\left(|x_b|+|y_b|\right)+y_ax_b-y_bx_a}{|x_a|+|y_a|+|x_b|+|y_b|-|x_b-x_a|-|y_b-y_a|}$$

ve

$$\frac{x_b(|x_a|+|y_a|)-x_a\left(|x_b|+|y_b|\right)+x_by_a-y_bx_a}{|x_a|+|y_a|-|x_b|-|y_b|-|x_b-x_a|-|y_b-y_a|} > \frac{x_b(|x_a|+|y_a|)-x_a\left(|x_b|+|y_b|\right)+x_ay_b-y_ax_b}{|x_a|+|y_a|+|x_b-x_a|+|y_b-y_a|-|x_b|-|y_b|}$$

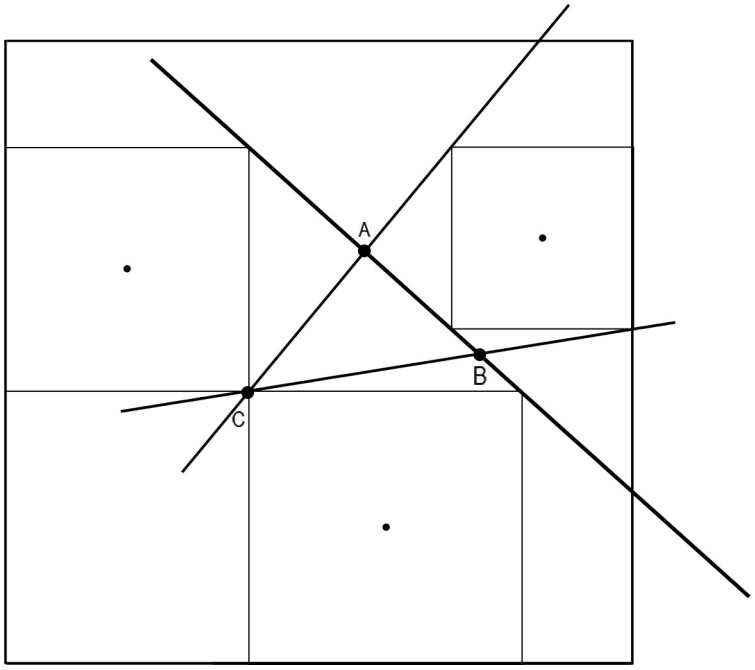
eşitsizlikleri bu durumu açıklamaktadır. Böylelikle bu eşitsizlikler geçerli ise $Ç_{AC}$ yi kapsayacak ve teğet olacak şekilde hiç bir maksimum çember bulunmaz. Aşağıdaki şekil bu durumu ifade etmektedir.



Şekil 5.6 Maksimum düzlemde Apollonius çemberinin bulunmama hali 3

Tüm bunlar ışığında maksimum düzlemde üç dış teğete sahip bir $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeni üç eşitsizlik grubunda hiçbirini sağlamıyor ise $\overset{\triangle}{ABC}$ nin Apollonius çemberi vardır.

Örnek 5.3 *Örnek 5.1 de ele alınan* $A = (3, 9)$, $B = (5, 1), C = (0, 0)$ *köşe noktalarına sahip* $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgeni yeniden göz önüne alınsın. Örnek 5.1 gereğince bu üçgenin üç dış teğet çembere sahip olduğu biliniyor. Dikkat edilirse bu üçgenin köşe noktalarının koordinat değerleri için yukarıdaki Teorem 5.3 deki eşitsizlik gruplarının hiç biri sağlanmaz. Bu durumda Apollonius çemberin merkezi* $\left(-3, \frac{51}{4}\right)$ *ve yarıçapı* $r = 18$ *dir.*



Şekil 5.7 Maksimum düzlemde Apollonius çemberine sahip bir üçgen

6. MAKSİMUM DÜZLEMDE APOLLONIUS KÜMELER

Bu bölümde MÖ 3. yüzyılda Apollonius tarafından verilen çember kavramının sabit bir noktadan sabit bir uzaklıktaki noktalar kümesi tanımına denk olan çember kavramının tanımı kullanılarak, bu tanımın maksimum düzlemdeki karşılığı incelenecek olup buradaki sonuçlar Gelişgen ve Ermiş, 2021 çalışmasından alınmıştır. Buna göre P ve Q analitik düzlemde iki farklı ve sabit nokta olmak üzere $k \in \mathbb{R}^+$ sabit değeri için

$$\left\{X \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{d_E(P,X)}{d_E(Q,X)} = k\right\}$$

kümesi ele alınsın. Öklidyen düzlemde bu küme $k \neq 1$ için bir çember ve $k = 1$ için bir doğru belirtir. O halde bu ifadedeki d_E Öklidyen metriği yerine d_M maksimum metriği kullanılarak aynı kavramın maksimum düzlemdeki durumu incelenecektir. Öncelikle bu problemi ele alırken gerekli olacak kavramlar hatırlatılacak ve isimlendirmeler verilecektir.

Maksimum düzlemde en temel objelerden biri çemberdir. Bilindiği üzere $P = (p_1, p_2)$ merkezli $r > 0$ yarıçaplı maksimum çember $(p_1 \pm r, p_2 \pm r)$ köşe noktalı kenarları eksenler paralel olan bir karedir. Ancak peşinen belirtmek gerekirse Öklidyen düzlemdeki durumun aksine sabit iki noktaya uzaklıkları oranı sabit olan noktların kümesi maksimum çember olmayacaktır. Yine de bu bölümde bu kümelerin özellikleri araştırılacaktır.

$P = (x_p, y_p)$ maksimum düzlemde bir nokta olmak üzere

$$cl^x(P) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = x_p\}$$
$$cl^y(P) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = y_p\}$$

ifadelerine P nin koordinat doğruları adı verilecektir. Açıkca dikkat edilirse $cl^x(P)$ ve $cl^y(P)$ sırasıyla P noktasından geçen dikey ve yatay doğrulardır. Hatta $P = (0,0)$ ise P nin koordinat doğruları eksenlerdir.

$P = (x_p, y_p)$ ve $Q = (x_q, y_q)$ analitik düzlemde herhangi iki nokta olmak üzere

$$c^1(P,Q) = cl^x(P) \cap cl^y(Q) = (x_p, y_q)$$
$$c^2(P,Q) = cl^y(P) \cap cl^x(Q) = (x_q, y_p)$$

noktalarına P ve Q nun koordinat tümleyeni denilecektir. Ayrıca $P = (x_p, y_p)$ noktası için

$$gl^+(P) = \{(x,y) \mid y - y_p = x - x_p\}$$
$$gl^-(P) = \{(x,y) \mid y - y_p = -(x - x_p)\}$$

doğrularına P noktasının rehber doğruları denilecektir. Dikkat edilirse $gl^{+}(p)$ ve $gl^{-}(p)$ doğruları sırasıyla P noktasından geçen $+1$ eğimli ve -1 eğimli doğrulardır. Koordinat tümleyeni kavramına benzer şekilde $P=(x_p,y_p)$ ve $Q=(x_q,y_q)$ olmak üzere

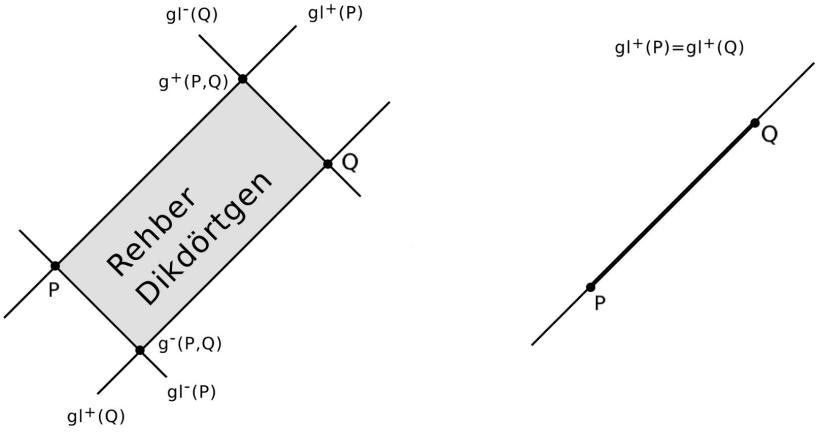
$$g^{+}(P,Q)=gl^{+}(P)\cap gl^{-}(Q)$$
$$g^{-}(P,Q)=gl^{-}(P)\cap gl^{+}(Q)$$

noktalarına P ve Q noktalarının rehber tümleyenleri adı verilecektir. Burada dikkat edilirse P, Q, $g^{+}(P,Q)$ ve $g^{-}(P,Q)$ noktaları kenarları P ve Q nun rehber doğruları üzerinde olan bir dikdörtgenin köşe noktalarını oluşturur. Bu içi dolu dikdörtgene rehber dikdörtgen denir. Ancak rehber dikdörtgen P ve Q noktaları $+1$ veya -1 eğimli doğru üzerinde iken bir doğru parçasına dönüşür. Üstelik rehber dikdörtgede alınan her R noktası için

$$d_M(P,Q)=d_M(P,R)+d_M(R,Q)$$

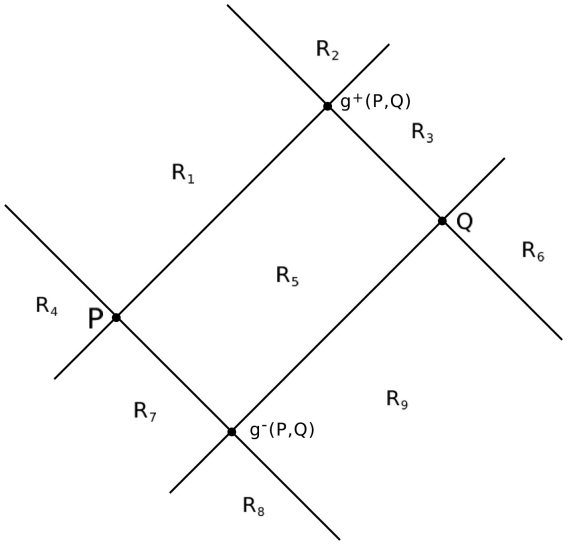
olacaktır.

Düzlemde bir Q noktası ele alındığında Q noktasının rehber doğruları analitik düzlemi adına Q-çeyrek denilen dört çeyreğe böler. Bu noktada aksi belirtilmedilçe bahsedilen çeyrekler sınırlarınıda içermektedir. Aşağıdaki şekil bu durumları göstermektedir.



Şekil 6.1 Maksimum düzlemde rehber dikdörtgenler

P ve Q noktalarının rehber doğruları analitik düzlemi $i=1,2,...,9$ olmak üzere R_i olarak adlandırılan aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi 9 bölgeye ayırır. Üstelik bölgelerin isimlendirmeleri standart olup P ve Q noktalarının konumlarından bağımsızdır. Dikkat edilirse burada R_5 bölgesi rehber dikdörtgendir. Ayrıca her bir bölge kendi sınırlarını da içermektedir.



Şekil 6.2 Maksimum düzlemdeki P ve Q noktalarına göre standart 9 bölge

Yardımcı Teorem 6.1 *P ve Q analitik düzlemde herhangi iki nokta olsun. Bu taktirde P ve Q bir yatay veya dikey doğru üzerinde değilse P ve Q nun koordinat tümleyenleri, P ve Q nun rehber dikdörtgeninin dışındadırlar. Ancak P ve Q bir yatay veya dikey doğru üzerinde ise P ve Q nun koordinat tümleyenleri yine P ve Q noktalarının kendileridir.*

İspat *P ve Q noktalarının bir yatay veya dikey doğru üzerinde olmadığı varsayılsın. Bu taktirde P noktasının koordinat doğrularından biri rehber dikdörtgeni sadece P noktasında keser. Bu doğru ile belirlenen koordinat tümleyeni rehber dikdörtgenin dışında olmak zorundadır. Benzer şekilde P nin rehber dikdörtgeni tek noktada kesen koordinat doğrusuna paralel olan Q noktasının koordinat doğrusuda rehber dikdörtgeni sadece Q noktasında keser. Dolayısıyla bu doğru ile belirlenen koordinat tümleyeni rehber dikdörtgenin dışındadır.*

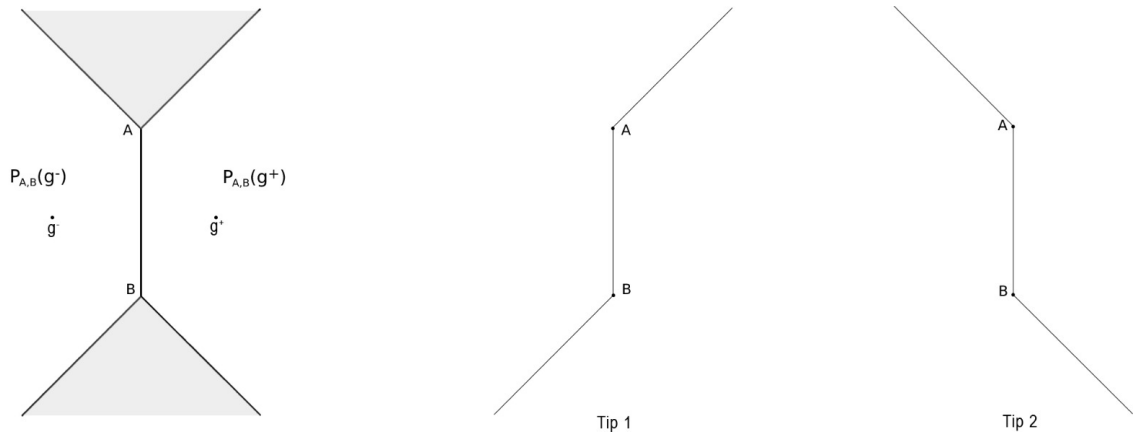
P ve Q noktalarının yatay veya dikey doğru üzerinde olma durumunda koordinat tümleyenlerinin P ve Q nun kendisinin olması durumu koordinat tümleyeni tanımı gereğince aşikardır.

Yardımcı Teorem 6.2 *g, analitik düzlemde ele alınan P ve Q noktalarının koordinat tümleyenlerinden herhangi birisi olsun. Bu taktirde P ve Q noktaları bir yatay veya dikey doğru üzerinde değilse P ve Q noktaları farklı g-çeyreklerde bulunur.*

İspat *g, P ve Q noktalarının koordinat tümleyenlerinden herhangi bir ve P ile Q noktaları bir yatay veya bir dikey doğru üzerinden olmasın. Ayrıca P ve Q nun farklı g-çeyreklerde olmadığını varsayılsın. Doğal olarak P ve Q noktaları aynı g-çeyrekte bulunur. Ancak bu durum P ile g den geçen doğrunun eğiminin, Q ile g den geçen doğrunun eğiminin aynı olmasını gerektirir. Fakat bu bir çelişki olup varsayım hatalıdır. Dolayısıyla P ve Q farklı g-çeyrekte olmalıdır.*

A ve B analitik düzlemde bir koordinat doğrusu üzerinde olan iki nokta olsun. Bu taktirde şeklinin andırmasından dolayı halter olarak adlandırılan ve $bb(A,B)$ ile gösterilen ifade koordinat doğrusunun B noktasını içermeyen kısmını içeren A-çeyreği ile koordinat doğrusunun A noktasını içermeyen B-çeyreğinin ve de koordinat doğrusunun birleşimidir. $bb(A,B)$ nin tümleyeni A ile B nin $g^+(A,B)$, $g^-(A,B)$ rehber tümleyenlerinden birini içiren iki parçadan oluşur. Bu bileşenler $P_{A,B}(g^+)$ ve $P_{A,B}(g^-)$ ile gösterilecektir. Üstelik bu iki küme açık olup P harfinin şeçilme sebebi bu kümelerin sınırlarının maksimum paraboller olmasıdır. Örneğin $P_{A,B}(g^+)$ nın sınırı, g^+ noktası odak ve g^- den geçen g^+ içermeyen koordinat doğrusu doğrultman olan maksimum paraboldür.

$lb^1(A,B)$ ile gösterilecek olan şimşek işaretinin 1. tip $bb(A,B)$ ile kapalı $R_2 \cup R_5 \cup R_8$ bölgesinin kesişimidir. Benzer şekilde $lb^2(A,B)$ ile gösterilen şimşek işaretinin 2. tipi $bb(A,B)$ ile kapalı $R_4 \cup R_5 \cup R_6$ bölgelerinin kesişimidir. Aşağıdaki şekil bu durumları ifade etmektedir.



Şekil 6.3 Maksimum düzlemde orta küme durumları

Gerçekte halterin sınırı ilgili olan şimşek işaretinin birleşimidir. Bunu dışında $P = (x_p, y_p)$ ve $Q = (x_q, y_q)$ noktaları verildiğinde

$$\left(\frac{x_p + x_q}{2}, \frac{y_p + y_q}{2}\right)$$

noktasına P ve Q noktalarının orta noktası adı verilecektir ve $m(A, B)$ ile gösterilecektir. Bu ifadede apaçık olarak Öklidyen geometrideki P ve Q ile belirlenen doğru parçasının orta noktası ile aynıdır.

Temel kavramlar kısmında hatırlanacağı üzere maksimum metriği ile döşenmiş analitik düzlemin yani maksimum düzlemin kendi üzerine olan dönüşümü tüm Öklidyen ötelemelerin grubu ile $D(4)$ dihedral grubun yarı direkt çarpımının bir elemanı ise izometridir. Yani maksimum düzlemde maksimum uzaklık ötelemeler, koordinat doğruları ve rehber doğrulara göre yansıma ve $\frac{\pi}{2}$ radyan ve onun tamsayı katlarındaki dönmeler altında invaryattır. Maksimum düzlemin izometrilerinden faydalanarak maksimum düzlemdeki iki nokta P ve Q olmak üzere bu noktalar birinci bölgede ve $0 \leq y_q \leq x_q$ olacak şekilde $P = (0, 0)$ ve $Q = (x_q, y_q)$ ise bu noktalara standart pozisyonda denilecektir.

Yardımcı Teorem 6.3 *P ve Q maksimum düzlemde herhangi iki nokta olsun. Bu taktirde $\varphi(P)$ ve $\varphi(Q)$ standart pozisyonda olacak şekilde bir φ izometrisi vardır.*

İspat *P ve Q maksimum düzlemde herhangi iki nokta olsun. Buna göre ilk olarak $-P$ kadar bir öteleme uygulanarak P noktası orijine dönüştürülür. Daha sonra Q nun uygulanan öteleme altında görüntüsünün konumuna bağlı olarak orijinden geçen koordinat doğrularına veya rehber doğrularına göre en çok iki yansıma uygulanır. Bu yansımaların seçimi öteleme ile birleşmesi sonucunda Q nun görüntüsünün birinci bölgede ve $g^+(0, 0)$ doğrusunun üzerinde olacak şekilde yapılır.*

P ve Q maksimum düzlemde iki farklı nokta ve k genelleştirilmiş negatif olmayan bir reel sayı yani $k \in [0, \infty)$ olmak üzere

$$\left\{X \in \mathbb{R}^2_M \mid \frac{d_M(X, P)}{d_M(X, Q)} = k\right\}$$

kümesine Apollonius küme denir ve $A(P, Q; k)$ ile gösterilir. Burada $A(P, Q; \infty) = \{Q\}$ olur. $P = Q$ durumu basitçe bazı dejenere hallere sahip olduğundan kaçınılır. Örneğin Apollonius küme her $k \neq 1$ için boş küme olabilir ve $k = 1$ iken Apollonius küme tüm düzlem olabilir. Burada $\frac{0}{0} = 1$ alındığı unutulmamalıdır.

Öklidyen halde, Apollonius küme $k \in (0,1) \cup (1,\infty)$ iken bir çember, $k = 1$ iken bir doğru ve $k = 0$ veya $k \to \infty$ iken bir nokta ifade eder. Öklidyen haldeki bu sonuçlar Pargalı Apollonius'a dayanmaktadır. Maksimum düzlemde, Apollonius kümenin k nın değerine ve P ile Q nun pozisyonlarına bağlı olarak birkaç farklı şekli vardır. Bu bölümün amacı maksimum düzlemde Apollonius kümelerin sınıflandırılmasını ve özelliklerini vermektir. Bu bağlamda,

$$B(P,Q;k) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2_M \mid \frac{d_M(X,P)}{d_M(X,Q)} \geqslant k \right\} = \bigcup_{\kappa \in [k,\infty]} A(P,Q;\kappa)$$

ve $k < 1$ olmak üzere

$$B(P,Q;k) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2_M \mid \frac{d_M(X,P)}{d_M(X,Q)} \leq k \right\} = \bigcup_{\kappa \in [0,k]} A(P,Q;\kappa)$$

kümelerine dolu Apollonius küme denir. Dikkat edilirse $k = 1$ için dolu Apollonius küme tanımlanmamıştır.

Tanım 6.1 *P, Q maksimum düzlemde iki nokta ve α, β, γ herhangi reel değerler olsun. P ve Q noktaları odak noktaları olmak üzere bu noktalardan uzaklıkların bazı lineer bileşkesi olarak tanımlanan yapıya afin küme denir, ve $S(p,q;\alpha,\beta,\gamma)$ ile gösterilir. Daha açıkca*

$$S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2_M \mid \alpha d_M(X,P) + \beta d_M(X,Q) = \gamma \right\}$$

ifadesi afin kümedir.

Dikkat edilirse $\alpha = 1$, $\beta = -k$, $\gamma = 0$ olduğunda afin küme bir Apollonius kümedir. Dolayısyla tanımlanan afin küme kavramı Apollonius küme kavramından bir daha geniş bir aileyi ifade eder. Örneğin Öklidyen halde afin küme çember, elips, heperbol ve Apollonius çember kavramlarını içerir. O halde maksimum geometride afin küme kavramını anlamak için küme açıkca yazılırsa:

$$\alpha \max\left\{ |x - x_p| , |y - y_p| \right\} + \beta \max\left\{ |x - x_q| , |y - y_q| \right\} = \gamma ...(*)$$

olup bu denklemi sağlayan noktaların kümesi afin kümedir. Bu durumda çözüm kümesi mutlak değerler uygun şekilde çözümlenerek 9 tane R_i bölgesinin her birine odaklanarak belirlenebilir.

Genel olarak, her bir bölgeye kısıtlanıldığında çözüm kümesi ya boş küme, ya bir doğru parçası, ya bir ışın ya da bazen bölgenin tamamı olur.

Yardımcı Teorem 6.4 *Maksimum düzlemde P ve Q iki nokta ve α, β, γ herhangi reel değer olsun. Ayrıca $S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma) \cap R_i = R_i$ olduğu varsayılsın. Bu taktirde $\alpha = \beta = \gamma = 0$ veya $i \in \{2,4,5,6,8\}$ dir. Üstelik $i \neq 5$ ise $\alpha = -\beta$ ve $i = 5$ ise $\alpha = \beta$ dır.*

İspat *Bir bölgedeki tüm noktaların bir özel afin kümede olabilmesinin tek yolu* $(*)$ *denklemindeki* x *ve* y *nin yok olup eşitliğin sağlanmasıdır. Dikkat edilirse açıkca* $i \in \{2,4,5,6,8\}$ *için apsisler ve ordinatlar farkının maksimumu aynı türden olur.* $i \in \{1,3,7,9\}$ *için apsisler ve ordinat farkının maksimumları farklı olacağından* x *ve* y *yi yok etmek için mecburen* $\alpha = \beta = \gamma = 0$ *olmalıdır. Buna göre* $i \in \{2,4,5,6,8\}$ *için incelendiğinde mutlak değerin pozitif veya negatif olma durumu* $i = 2,4,6,8$ *için aynı işaretle olurken* $i = 5$ *için ters işaretle oluşur. Bu nedenle açık bir şekilde* i *çift iken* $\alpha = -\beta$ *ve* $i = 5$ *iken* $\alpha = \beta$ *olmalıdır. Böylelikle* x *ve* y *ifadelerinden kurtulunabilir.*

Yardımcı Teorem 6.5 *Maksimum düzlemde* P *ve* Q *iki nokta ve* α, β, γ *herhangi reel değerler ve* i *çift sayı olsun. Bu taktirde* $S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma) \cap R_i$ *bir doğru parçası ise bu doğru parçası bir koordinat doğrusunun parçasıdır. Daha özel olarak* $i = 2,8$ *ise doğru parçası yatay ve* $i = 4,6$ *ise doğru parçası dikeydir. Ayrıca* $i = 5$ *ise doğru parçası yataydır.*

İspat $i \in \{2,4,5,6,8\}$ *ise* $(*)$ *denklemindeki maksimum ifadelerinin maksimum olduğu değerler apsisler farkı ve ordinat farkı olarak aynı türden olur. Dolayısyla* $i = 2,8$ *iken ordinatlar farkı maksimum olup yatay doğru denklemi ve* $i = 4,5,6$ *iken apsisler farkı maksimum olup bir dikey doğru denklemi elde edilir.*
Daha açıkca $i = 2,8$ *için sırasıyla*

$$y = \frac{\gamma + \alpha y_p + \beta y_q}{\alpha + \beta} \text{ ve } y = \frac{-\gamma + \alpha y_p + \beta y_q}{\alpha + \beta},$$

olue iken $i = 4,6,5$ *için sırasıyla*

$$x = \frac{-\gamma + \alpha x_p + \beta x_q}{\alpha + \beta},\ x = \frac{\gamma + \alpha x_p + \beta x_q}{\alpha + \beta},\ x = \frac{\gamma + \alpha x_p - \beta x_q}{\alpha - \beta}$$

bulunur. Ayrıca bu denklemlerde $\alpha = -\beta$ *veya* $\alpha = \beta$ *ise bölge ya boştur ya da tamamıyla doludur.*

Yardımcı Teorem 6.6 *Maksimum düzlemde* P *ve* Q *iki nokta ve* α, β, γ *herhangi değerler ve de* $i \neq 5$ *olmak üzere* i *tek sayı olsun. Bu taktirde* $S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma) \cap R_i$ *ifadesi* m *eğimli bir doğru parçası ise* $i + j = 4$ *veya* $i + j = 16$ *olmak üzere* $S \cap R_j$ *ifadesi* $-m$ *eğimli doğru parçasıdır. Ayrıca* $i + j = 10$ *olmak üzere* $S \cap R_j$ *ifadesi* $\frac{1}{m}$ *eğimli doğru parçası ve* $i + j = 8$ *veya* $i + j = 12$ *ise* $S \cap R_j$ *ifadesi* $-\frac{1}{m}$ *eğimli doğru parçasıdır. Hepsi birlite ele alınırsa* $i \neq 5$ *olmak üzere tek numaralı bölgelerde yer alan doğru parçaların eğimleri* $|m|$ *veya* $\left|\frac{1}{m}\right|$ *dir.*

İspat *$i \neq 5$ olmak üzere $i \in \{1,3,7,9\}$ için $(*)$ denklemi bölgeye uygun olarak hesaplanırsa*

$$\alpha\,|x - x_p| + \beta\,|y - y_q| = \gamma \text{ veya } \alpha\,|y - y_p| + \beta\,|x - x_q| = \gamma$$

denklemlerinden biri elde edilir. Mutlak değerin durumlarına göre elde edilecek doğrunun eğimi $\pm\dfrac{\alpha}{\beta}$ veya $\pm\dfrac{\beta}{\alpha}$ olup hipotezdeki durumları ortaya koyar.

O halde ifade edilen bu üç yardımcı teorem ile bölgeler boş olmadığında bölgelerde ne olduğunu açıklamaktadır. Bölgenin boş olduğunu göstermek için ise ya $(*)$ denklemi çözümü olmayan bir denkleme indirgenir ya da söz konusu bölgeyi kesmeyen bir doğruya indirgenir. Bu noktada son olarak bir afin kümenin bir bölge ile nasıl etkinleştiği afin kümenin komşu bölgeler ile nasıl etkinleştiği hakkında bilgi verebilir.

Yardımcı Teorem 6.7 *Maksimum düzlemde P ve Q herhangi iki nokta ve α, β, γ reel değerler olmak üzere $S = S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma)$ afin küme ve $R_i \cap R_j = E$ olacak şekilde R_i ve R_j komşu bölgeler olsun. Bu taktirde $S \cap R_i$, P, Q ve onların rehber tümleyenlerinden farklı olan bir tek B noktasında E ile kesişen bir doğru parçası ise $S \cap R_j$ de B noktasından E ile kesişen bir doğru parçasıdır.*

İspat *Açık bir şekilde $B \subset E \subset R_j$ olduğundan $S \cap R_j$ boş küme olamaz. Ancak $S \cap R_j$, R_j nin tamamı da olamaz. Aksi taktirde $S \cap E = E$ olup bu bir çelişkidir. O halde geriye kalan tek olasılık $S \cap R_j$ nin bir doğru parçası olmasıdır. Bu durumda doğru parçası E yi B den başka bir noktada kesemez. Aksi durumda $S \cap E$ yine birden fazla noktadan oluştuğu anlamına gelirdi ki bu ise çelişkidir.*

Yardımcı Teorem 6.8 *Maksimum düzlemde P ve Q noktaları verildiğinde her $X \in \mathbb{R}^2_M$ için $X \in A(P,Q;k)$ olacak şekilde bir tek $k \in [0,\infty]$ değeri vardır.*

İspat *$P, Q \in \mathbb{R}^2_M$ olmak üzere her $X \in \mathbb{R}^2_M$ için*

$$A(P,Q;k) = \frac{d_M(P,X)}{d_M(Q,X)} = k$$

şeklinde tanımlı idi.Buna göre her $X \in \mathbb{R}^2_M$ için $d_M(P,X)$ ve $d_M(Q,X)$ bir tek negatif olmayan değer karşılık getirirler. O halde iki tek değerin oranıda bir tek k değeri üretir.

Yardımcı Teorem 6.9 *Maksimum düzlemde P ve Q herhangi iki nokta olmak üzere $A(P,Q;k) \cap R_5$ her zaman bir doğru parçasıdır.*

İspat *P ve Q yu birleştiren doğru parçası her zaman $A(P,Q;k)$ ifadesini tanımlayan koşulu sağlayan bir tek noktaya sahip olacaktır.*

Yardımcı Teorem 6.10 *Maksimum düzlemde P ve Q herhangi iki nokta olmak üzere ve $\frac{1}{\infty}=0$ ile $\frac{1}{0}=\infty$ alınmak üzere $A\left(P,Q;\frac{1}{k}\right)=A(Q,P;k)$ olur.*

İspat *$P,Q\in\mathbb{R}^2_M$ olsun. Buna göre*

$$A\left(P,Q;\frac{1}{k}\right)=\frac{d_M(P,X)}{d_M(Q,X)}=\frac{1}{k}\Longrightarrow k=\frac{d_M(Q,X)}{d_M(P,X)}=A(Q,P;k)$$

olduğu açıkca görülür.

Yardımcı Teorem 6.11 *Maksimum düzlemde P ile Q herhangi iki nokta, $k\in[0,\infty]$ ve φ, maksimum düzlemin bir izometrisi olsun. Bu taktirde*

$$\varphi\left(A(P,Q;k)\right)=A\left(\varphi\left(P\right),\varphi\left(Q\right);k\right)$$

ve

$$\varphi\left(B(P,Q;k)\right)=B\left(\varphi\left(P\right),\varphi\left(Q\right);k\right)$$

olur.

İspat *$P,Q\in\mathbb{R}^2_M$, $k\in[0,\infty]$ ve $\varphi:\mathbb{R}^2_M\to\mathbb{R}^2_M$ bir izometri olsun. Ayrıca $Y\in A\left(\varphi\left(P\right),\varphi\left(Q\right);k\right)$ olsun. φ bir izometri olduğundan φ dönüşümü bire-bir ve örten olup $\varphi(X)=Y$ olacak şekilde bir $X\in\mathbb{R}^2_M$ vardır. Buna göre*

$$k=\frac{d_M\left(Y,\varphi\left(P\right)\right)}{d_M\left(Y,\varphi\left(Q\right)\right)}=\frac{d_M\left(\varphi\left(X\right),\varphi\left(P\right)\right)}{d_M\left(\varphi\left(X\right),\varphi\left(Q\right)\right)}=\frac{d(X,P)}{d(X,Q)}$$

elde edilir. Bu ise $X\in A(P,Q;k)$ olmasını gerektirir. Böylelikle

$$A\left(\varphi\left(P\right),\varphi\left(Q\right);k\right)\subset\varphi\left(A(P,Q;k)\right)$$

olur. Ters ifadede açıkca $X\in A(P,Q;k)$ için

$$k=\frac{d(X,P)}{d(X,Q)}=\frac{d_M\left(\varphi\left(X\right),\varphi\left(P\right)\right)}{d_M\left(\varphi\left(X\right),\varphi\left(Q\right)\right)}=\frac{d_M\left(Y,\varphi\left(P\right)\right)}{d_M\left(Y,\varphi\left(Q\right)\right)}$$

olup $\varphi(X)\in A\left(\varphi\left(P\right),\varphi\left(Q\right);k\right)$ anlamına gelir. Dolayısıyla

$$\varphi\left(A(P,Q;k)\right)\subset A\left(\varphi\left(P\right),\varphi\left(Q\right);k\right)$$

olur. Böylelikle $\varphi\left(A(P,Q;k)\right)=A\left(\varphi\left(P\right),\varphi\left(Q\right);k\right)$ bulunur. İçi dolu Apollonius kümeleri olan $B(P,Q;k)$ ifadeleri için benzer ispat hemen verilir.

Yardımcı Teorem 6.12 *Maksimum düzlemde P ile Q herhangi iki nokta ve φ de $m(P,Q)$ noktasında π radyanlık dönme olsun. Bu taktirde*

$$\varphi\left(A(P,Q;k)\right) = A\left(P,Q;\frac{1}{k}\right)$$

olur.

İspat *$P,Q \in \mathbb{R}^2_M$ ve $\varphi : \mathbb{R}^2_M \to \mathbb{R}^2_M$ dönüşümü $m(P,Q)$ noktası etrafında π radyanlık dönme olsun.Bir önceki Yardımcı Teorem 6.11 gereğince*

$$\varphi\left(A(P,Q;k)\right) = A\left(\varphi\left(P\right),\varphi\left(Q\right);k\right)$$

olur. Ayrıca φ dönüşümü P ile Q yu birbirine dönüştürdüğünden ve iki önceki Yardımcı Teorem 6.10 gereğince

$$\varphi\left(A(P,Q;k)\right) = A\left(\varphi\left(P\right),\varphi\left(Q\right);k\right) = A(Q,P;k) = A\left(P,Q;\frac{1}{k}\right)$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 6.13 *Maksimum düzlemde P ve Q bir koordinat doğrusu üzerinde iki nokta ve g^+ ve g^- de P ve Q nun rehber tümleyeni olsun. Bu taktirde $X \in P_{g^+,g^-}(Q)$ olması için gerek ve yeter koşul $\dfrac{d_M(X,P)}{d_M(X,Q)} > 1$ olmasıdır.*

İspat *İspatın tamamı için genelliği bozmaksızın P ve Q noktasının standart pozisyonda olduğu varsayılsın. Böylece P ile Q bir koordinat doğrusu üzerinde olduğundan $P=(0,0)$ ve $Q=(x_q,0)$ olur. O halde*

$$P_{g^+,g^-}(Q) = \left\{X \in \mathbb{R}^2_M \mid x > \frac{x_q}{2} > 0,\ |y| < x\right\}$$

olmalıdır.

İlk olarak $\dfrac{d_M((x,y),(0,0))}{d_M((x,y),(x_q,0))} > 1$ olsun. Bu taktirde $X \in P_{g^+,g^-}(Q)$ olduğu gösterilmelidir. O halde kabul gereğince maksimum metrik kullanılarak

$$\max\left\{|x|,|y|\right\} > \max\left\{|x-x_q|,|y|\right\}$$

olur. Buna göre her iki maksimum durumu gözönüne alarak dört durum tespit edilir:
1.Durum: $|x| \geq |y|$ ve $|x-x_q| > |y|$ ise $|x| > |x-x_q|$ dur. Bu halde $x_q > 0$ olduğu

bilindiğinden dolayı kolaylıkla $x > \frac{x_q}{2}$ sonucuna ulaşır.
2.Durum: $|x| \geq |y|$ ve $|y| \geq |x - x_q|$ ise $|x| > |y|$ dir. Bu hal için açıkca $|x| \geq |y| \geq |x - x_q|$ olup $|x| \geq |x - x_q|$ sonucunu içerdiğinden $x > \frac{x_q}{2} > 0$ olmalıdır. Dolayısıyla $x > |y|$ bulunur.
3.Durum: $|y| \geq |x|$ ve $|x - x_q| \geq |y|$ ise $|y| > |x - x_q|$ dur. Ancak açıkca $|x - x_q| \geq |y|$ olduğundan $|y| > |x - x_q|$ durumu bir çelişkidir.
4.Durum: $|y| \geq |x|$ ve $|y| \geq |x - x_q|$ ise $|y| > |y|$ dir. Ancak aşikar olarak durum çelişkidir. Tüm olası durumlar incelendikten sonra elde edilen sonuç $x > \frac{x_q}{2}$ ve $x > |y|$ olduğudur. Buna göre $X = (x, y) \in P_{g^+,g^-}(Q)$ olur.

Diğer yönün ispatı için $X \in P_{g^+,g^-}(Q)$ olsun. Bu taktirde $\frac{d_M(X,P)}{d_M(X,Q)} > 1$ olduğu gösterilmelidir. $X = (x, y) \in P_{g^+,g^-}(Q)$ olduğundan $x > \frac{x_q}{2} > 0$ ve $x > |y|$ dir. Ayrıca $X = (x, y)$ noktası R_3, R_5, R_6 veya R_9 bölgesindedir. Açıkca her bir bölge için $\frac{d_M(X,P)}{d_M(X,Q)} > 1$ olduğu gösterilir. Basitce

$$1 < \frac{|x|}{|x - x_q|} < \frac{\max\{|x|, |y|\}}{\max\{|x - x_q|, |y|\}} = \frac{d_M(X,P)}{d_M(X,Q)}$$

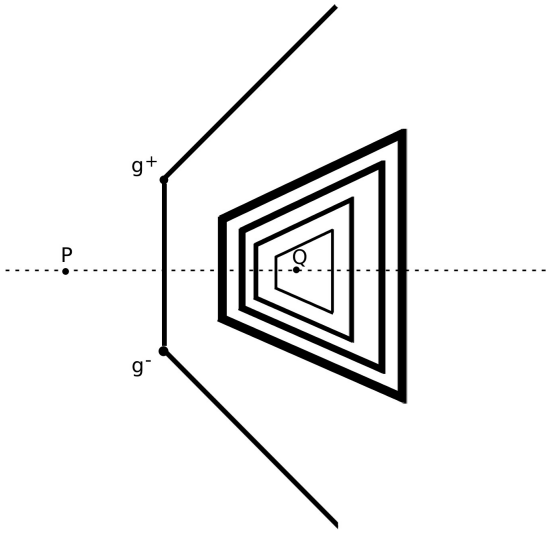
ve

$$1 < \frac{|x|}{|y|} < \frac{\max\{|x|, |y|\}}{\max\{|x - x_q|, |y|\}} = \frac{d_M(X,P)}{d_M(X,Q)}$$

bulunur.

Yukarıdaki yardımcı teoremin bir direkt sonucu olarak aşağıdaki ifade verilebilir.

Sonuç 6.1 *Maksimum düzlemde P ile Q bir koordinat doğrusu üzerinde iki nokta ve g^+ ve g^- de P ve Q nun rehber tümleyeni olsun. Bu taktirde $A(P, Q; k)$ kümesinin $B(P, Q; k)$ dolu Apollonius kümesinin, $P_{g^+,g^-}(Q)$ nun alt kümesi olması için gerek ve yeter koşul $k > 1$ olmasıdır.*



Şekil 6.4 Bir koordinat doğrusu üzerinde iki noktanın Apollonius kümesi

Aşağıda ifade edilen iki yardımcı teorem bir önceki yardımcı teorem ile sonuçdan kolaylıkla görülür.

Yardımcı Teorem 6.14 *Maksimum düzlemde P ile Q bir koordinat doğrusu üzerinde iki nokta ve g^+ ile g^- de P ve Q nun rehber tümleyeni olsun. Bu taktirde $\bigcup_{k\in[0,1]} A(P,Q;k)$ kümesi $P_{g^+,g^-}(Q)$ nun tümleyenidir ve bu nedenle ilgili küme Q noktasını içermeyen üç P-çeyreği içerir.*

Yardımcı Teorem 6.15 *Maksimum düzlemde P ile Q bir koordinat doğrusu üzerinde iki nokta ve g^+ ve g^- de P ve Q nun rehber tümleyenleri olsun. Bu taktirde $\bigcup_{k\in[1,\infty]} A(P,Q;k)$ kümesi $P_{g^+,g^-}(P)$ nin tümleyenidir ve bu nedenle ilgili küme P noktasını içermeyen üç Q-çeyreği içerir.*

Yardımcı Teorem 6.16 *Maksimum düzlemde P ile Q herhangi iki nokta ve c^1 ve c^2, P ile Q nun koordinat tümleyeni olsunlar. Bu taktirde*

$$\left[\bigcup_{k\in[0,1]} A(P,c^1;k)\right] = \left[\bigcup_{k\in[0,1]} A(P,c^2;k)\right] = \mathbb{R}^2$$

olur.

İspat *Yukarıdaki Yardımcı Teorem 6.14 den dolayı* $\bigcup_{k\in[0,1]} A(P,c^1;k)$ *kümesi* c^1 *içermeyen* P*-çeyreklerini içerir ve benzer şekilde* $\bigcup_{k\in[0,1]} A(P,c^2;k)$ *kümesi* c^2 *içermeyen* P*-çeyreklerini içerir. Ayrıca yardımcı teorem 6.2 den dolayı* c^1 *ve* c^2 *noktaları farklı* P*-çeyreklerdedirler. Bu taktirde bu kümelerin birleşimi* $\mathbb{R}^2$ *nin tamamıdır.*

Teorem 6.1 *Maksimum düzlemde* P *ile* Q *bir koordinat doğrusu üzerinde iki nokta olmak üzere* $A(P,Q;1)$ *Apollonius kümesi* $g^+(P,Q)$ *ile* $g^-(P,Q)$ *nun halteridir yani* $A(P,Q;1) = bb\left(g^+(P,Q), g^-(P,Q)\right)$ *dur.*

İspat $P,Q \in \mathbb{R}^2_M$ *ve* P *ile* Q *bir koordinat doğrusu üzerinde olsun. Dikkat edilirse*

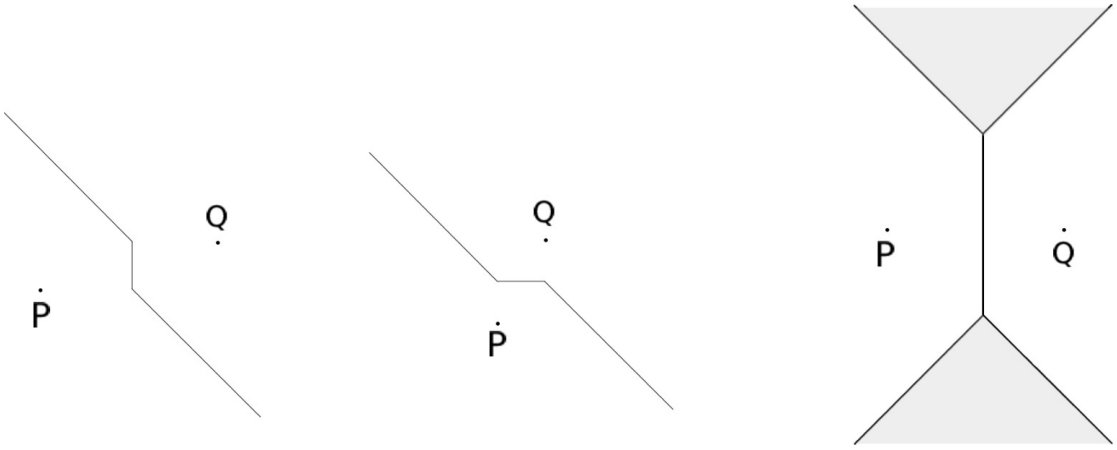
$$A(P,Q;1) = \bigcup_{k\in[0,1]} A(P,Q;k) \cap \bigcup_{k\in[1,\infty]} A(P,Q;k)$$

olur. Yardımcı teorem 6.14 ve yardımcı teorem 6.15 gereğince, ayrıca halter tanımını kullanarak

$$\begin{aligned} A(P,Q;1) &= [P_{g^+,g^-}(Q)]^c \cap [P_{g^+,g^-}(P)]^c \\ &= [P_{g^+,g^-}(Q) \cup P_{g^+,g^-}(P)]^c \\ &= bb\left(g^+(P,Q), g^-(P,Q)\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 6.2 *Maksimum düzlemde* P *ile* Q *bir koordinat doğrusu üzerinde olmayan iki nokta,* cl*,* $m(P,Q)$ *noktasından geçen* PQ *doğrusu yataysal ise dikey* PQ *doğrusu dikeysel ise yatay koordiinat doğrusu olsun. Ayrıca* cl *nin* R_5 *bölgesinin sınırları ile kesişim noktaları* A *ve* B *olsun. Bu taktirde* $A(P,Q;1)$ *Apollonius kümesi* cl *üzerinde sadece* R_5 *ile kesişen* A *ve* B *köşeli şimşek işaretidir.*



Şekil 6.5 Maksimum düzlemde iki noktanın orta kümeleri

Aslında yukarıdaki iki teorem $A(P,Q;1)$ Apollonius kümelerini karakterize ederken gerçekte maksimum düzlemde P ile Q nun orta kümeleridir. Yani her iki noktaya eşit uzaklıktaki nokta kümeleridir.

Aşağıdaki iki teorem maksimum düzlemdeki tüm Apollonius kümeleri karakterize etmede kullanılır. Buna göre ilk teoremde P ile Q noktaların bir koordinat doğrusu üzerinde olduğu durum ele alınırken ikinci teorem genel hali ifade etmektedir. Ayrıca ilk teoremde genelliği bozmaksızın $k > 1$ hali ele alınacaktır.

Teorem 6.3 *Maksimum düzlemde P ile Q bir cl koordinat doğrusu üzerinde iki nokta ve genelliği bozmaksızın $k > 1$ olsun. Bu taktirde $A(P,Q;k)$ Apollonius kümesi aşağıdaki özelliklere sahip bir ikizkenar yamuktur:*
(1) $A(P,Q;k)$ Apollonius kümesinin simetri doğrusu cl koordinat doğrusudur.
(2) $A(P,Q;k)$ Apollonius kümesinin köşelerinin tümü Q noktasının rehber doğruları üzerindedir.
(3) $A(P,Q;k)$ Apollonius kümesinin ayakları uzatılırsa bu doğrular P noktasında kesişirler.
(4) $A(P,Q;k)$ Apollonius kümesinin ayaklarının eğimi $\frac{1}{k}$ ve $-\frac{1}{k}$ dır.

İspat *$P,Q \in \mathbb{R}^2_M$ ve genelliği bozmaksızın P ile Q standart pozisyonda olsun. Bu taktirde $A(P,Q;k)$ Apollonius kümesi yardımcı teorem 6.13 gereğince Q noktasını içeren P-çeyrekte içerilmektedir. Böylelikle $A(P,Q;k)$ sadece R_3, R_5, R_6, R_9 bölgeleri ile kesişime sahiptir.*

Yardımcı teorem 6.5 ve 6.9 gereğince R_5 bölgesinde yer alan doğru parçası yardımcı teorem 3.13 gereğince R_3 ve R_9 ile paylaşılan sınırlar ile kesişen yardımcı teorem 6.7 gereğince $A(P,Q;k)$ nın R_3 ve R_9 ile boş olmayan kesişime sahip olan dikey doğru parçasıdır. Bu taktirde yardımcı teorem 6.6 gereğince R_3 ve R_9 bölgelerinde simetrik (karşılıklı) eğimlere sahip doğru parçaları içerilir. Direkt hesaplama ile R_3 bölgesindeki doğru parçasının denklemi

$$y = \frac{1}{k}x$$

olur. Çünkü $P = (0,0)$ ve $Q = (x_q, 0)$ olup R_3 bölgesi için $|x| \geq |y|$ ve $|x - x_q| \leq |y|$ dir. Bu doğru R_6 bölgesinin sınırı ile kesişir. Bu nedenle yardımcı teorem 6.5 ve 6.7 gereğince R_6 ve $A(P,Q;k)$ nın kesişimi dikey bir doğru parçasıdır. Böylelikle $A(P,Q;k)$ mutlaka iki paralel kenara sahip bir dörtgen yani bir yamuk olmalıdır. Ayrıca P ve Q noktaları cl koordinat doğrusuna göre yansıma altında ikiside sabit nokta olduklarından yardımcı teorem 6.11 gereğince $\varphi\left(A(P,Q;k)\right) = A\left(\varphi(P), \varphi(Q); k\right) = A(P,Q;k)$ olduğundan dolayı açıkca $A(P,Q;k)$ nın simetri doğrusu cl koordinat doğrusu olur. Bu sonuç ise ayakların eşit uzunlukta olmasını gerektirir. Dolayısıyla yamuk ikizkenar yamuk olmak zorundadır. Üstelik ayaklar doğrulara genişletilirse bu iki ayak P noktasından kesişirler. Çünkü R_3 ve R_9 bölgelerinde karşılıklı eğimli doğruların kesişim noktası açıkca P noktadır.

Dikkat edilirse k değeri bilinmiyor olsa bile $A(P,Q;k)$ da bir tek noktanın bilinmesi (verilmesi) Teorem 6.8 gereğince tüm kümenin inşaa edilmesi için yeterli bilgi elde edilir.

Aşağıdaki teorem maksimum düzlemde Apollonius kümelerini karakterize etmektedir.

Teorem 6.4 *Maksimum düzlemde P ile Q herhangi iki nokta olsun ve c^1 ve c^2, P ile Q nun koordinat tümleyenleri ve de $k \in [0,\infty] \setminus \{1\}$ olsun. Bu taktirde*

$$B(P,Q;k) = B(c^1,Q;k) \cup B(c^2,Q;k)$$

olur.

İspat *$P, Q \in \mathbb{R}^2_M$, c^1 ile c^2, P ile Q nun koordinat tümleyenleri ve $k \in [0,1) \cup (1,\infty]$ olsun. Ancak genelliği bozmaksızın $k > 1$ alınsın. Burada iki kümenin eşitliği gösterileceği için kümelerin birbirinin alt kümesi olduğu gösterilmelidir. Buna göre ilk olarak*

$$B(c^1,Q;k) \cup B(c^2,Q;k) \subset B(P,Q;k)$$

olduğu gösterilsin. Bunun için $X \in B(c^1,Q;k)$ olsun. Bu taktirde yardımcı teorem 6.13 gereğince X noktası Q yu içeren c^1-çeyreğindedir. Yardımcı teorem 6.5 gereğince X noktası

P nin içerilmediği üç c^1-çeyreğinin birisindedir. Böylelikle yardımcı teorem 6.15 gereğince $X \in \underset{k\in[1,\infty]}{\cup} A(P, c^1; \kappa)$ *olur.*
Bundan dolayı $\kappa \geq 1$ *için*

$$d_M(X, P) \geq \kappa d_M(X, c^1) \geq d_M(X, c^1)...(**)$$

elde edilir. Ayrıca $X \in B(c^1, Q; k)$ *olmasının anlamı*

$$\frac{d_M(X, c^1)}{d_M(X, Q)} \geq k$$

olmasıdır. Bu nedenle $d_M(X, c^1) \geq k d_M(X, Q)$ *bulunur. Bu sonuçla* $(**)$ *denklemi birleştirilirse*

$$d_M(X, P) \geq k d_M(X, Q)$$

elde edilir. Bu ise $X \in B(P, Q; k)$ *olmasını gerektirir.*

$X \in B(c^2, Q; k)$ olması halinin gösterilmesi $X \in B(c^1, Q; k)$ olması haliyle tam olarak aynıdır. Böylelikle

$$B(c^1, Q; k) \cup B(c^2, Q; k) \subset B(P, Q; k)$$

sonucuna ulaşır.

Şimdi ikinci olarak

$$B(P, Q; k) \subset B(c^1, Q; k) \cup B(c^2, Q; k)$$

olduğu gösterilsin. Bu ifade olmayana ergi yöntemi ile gösterilecektir. Bu durumda $X \notin B(c^1, Q; k)$ ve $X \notin B(c^2, Q; k)$ ise

$$d_M(X, c^1) < k d_M(X, Q)$$

ve

$$d_M(X, c^2) < k d_M(X, Q)$$

olur. O halde P ve Q ya uygulanan yardımcı teorem 6.16 gereğince

$X \in A(P, c^1; \kappa)$ veya $X \in A(P, c^2; \kappa)$

olacak şekilde $\kappa \in [0, 1]$ vardır. Buna göre $X \in A(P, c^1; \kappa)$ ise

$$d_M(X, P) \leq \kappa d_M(X, c^1) \leq d_M(X, c^1)$$

elde edilir. Buradan sonuç olarak

$$\frac{d_M(X, P)}{d_M(X, Q)} = \frac{d_M(X, P)}{d_M(X, c^1)} \frac{d_M(X, c^1)}{d_M(X, Q)} < k$$

bulunur. Böylelikle $X \notin B(P,Q;k)$ sonucuna ulaşılır.
$x \in A(P,c^2;\kappa)$ olması hali $x \in A(P,c^1;\kappa)$ hali ile aynıdır. Böylelikle

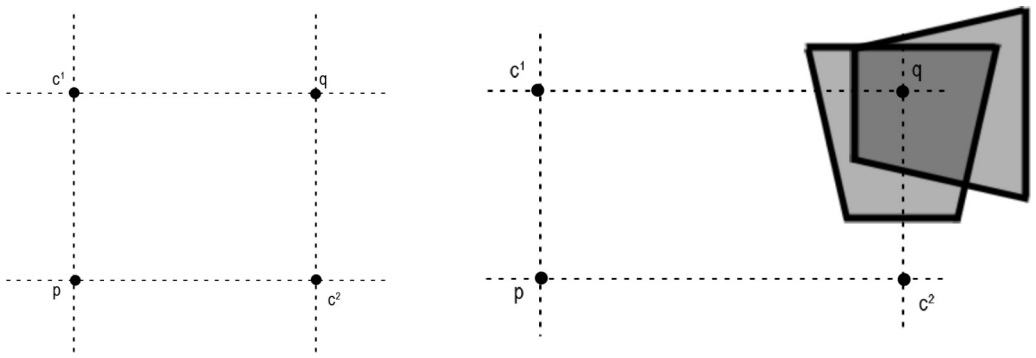
$$B(P,Q;k) \subset B(c^1,Q;k) \cup B(c^2,Q;k)$$

sonucuna ulaşılır. Bu taktirde iki durum birleştirilince açıkca

$$B(P,Q;k) = B(c^1,Q;k) \cup B(c^2,Q;k)$$

elde edilir.

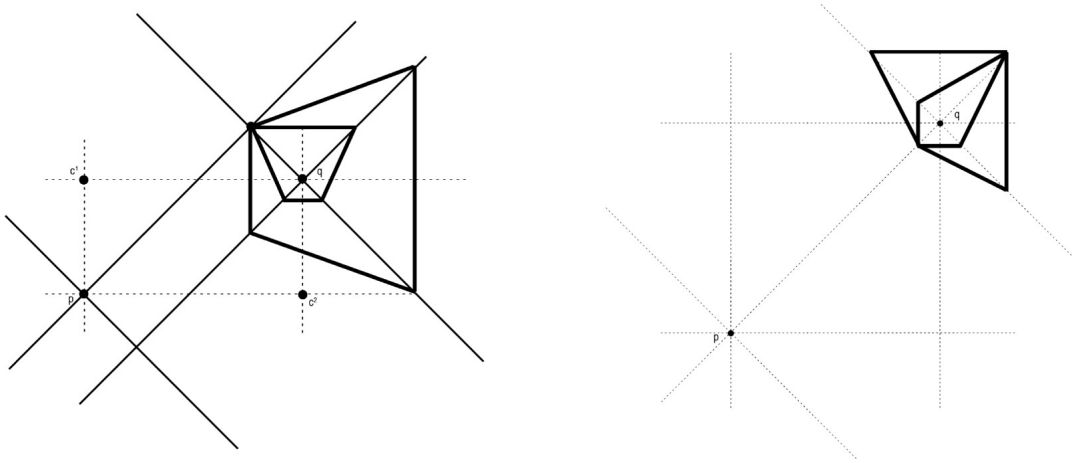
Dikkat edilirse birleşimdeki iki dolu Apollonius kümesi, dolu Apollonius yamuktur. Bu nedenle bu sonuç $k = 1$ olması hali hariç olmak üzere her dolu Apollonius kümesi, P ve Q nun koordinat tümleyenleri tarafından belirlenen iki dolu yamuğun birleşimidir. Ayrıca dolu olmayan Apollonius kümesi sadece dolu olanın sınırdır. O halde sonuç olarak yardımcı teorem 6.7 ve teorem 6.1-6.4 ile birlikte herhangi bir Apollonius kümesini oluşturmanın bir metodu verilmiş olur.



Şekil 6.6 P ve Q noktalarının Apollonius kümesi

Teorem 6.4 ifade edildiğinde daha önce değinilmemiş bir kaç durum vardır. İlk olarak P ile Q noktaları bir koordinat doğrusunun üzerinde olmasa bile Apollonius küme bir yamuk olabilir. Bu durum birleşimi oluşturan Apollonius kümelerden birinin tamamiyle diğerinin içerisinde yer aldığında oluşur. Yamuklar arasındaki geçiş ve çok daha karmaşık şekiller Apollonius kümenin köşelerinden biri P ve Q nun rehber tümleyenlerinden biri olduğunda meydana gelir.

İkinci olarak P ve Q nun bir gl rehber doğru üzerinde olduğu özel durumda birleşimi oluşturan yamuklar gl doğrusu boyunca birbirine yansırlar ve bunun sonucu olarak sonuç şekili bir deltoidtir. Aşağıdaki şekiller bu durumları işaret etmektedir.



Şekil 6.7 Bazı özel Apollonius kümeleri

7. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında Öklidyen olmayan geometrik yapılardan biri olan maksimum düzlem geometride çalışılmıştır. Öklidyen geometri iyi bilinmesine rağmen modernleşen dünyada karşılaşılan problemleri modellemede yetersiz veya anlamsız kalmaktadır. Bu bağlamda tutarlı ve anlamlı modellemeler oluşturmak için farklı metrikler kullanılarak farklı geometriler oluşturulmuştur. Bu anlamda Öklidyen geometri dışındaki en popüler geometriden biri maksimum geometridir.

Maksimum düzlem geometri analitik düzlemin nokta ve doğrularını aynen alıp açı ölçme Öklidyen geometrideki gibi yapılmaktadır. Fark uzaklık ölçme yöntemlerinin değişmesidir. Buna göre Öklidyen metrik yerine maksimum (chebyshev) metrik kullanılmıştır. Dolayısıyla uzaklık ile ilgili kavramlar değişime uğramaktadır. Bu ise ilginç problemlerin ortaya çıkmasına sebebiyet verir.

Bu anlamda bu çalışmada maksimum düzlemde bir üçgenin iç teğet çemberi, çevrel çemberi, dış teğet çemberi kavramları ele alınmış olup bu çemberin varlık koşulları ve çeşitli özellikleri incelenmiştir. Ayrıca bir üçgenin üç dış teğet çemberini içinde bulundurarak teğet olan anlamda Apollonius çemberi kavramı ve düzlemde sabit iki noktaya uzaklığı oranı sabit olan noktaların kümesi anlamında Apollonius çember kavramı ele alınmıştır. Apollonius çemberinin varlık koşulları ve özellikleri verilmiştir.

Burada Apollonius çemberin sabit iki noktaya uzaklıkları oranı sabit olması tanımı Öklidyen halde bir çembere karşılık gelirken maksimum düzlem geometride bir çember belirtmez. Ancak küme olarak düşünüldüğünde bu kümenin bir ikizkenar yamuk veya ikizkenar yamuğun birleşimi olduğu gösterildi.

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında Öklidyen olmayan geometriden biri olan maksimum düzlem geometride çalışılmıştır. Maksimum düzlem geometri gerçekte bir Minkowski geometridir. Çünkü noktalar, doğrular ve açı ölçümü Öklidyen halle aynı iken tek fark uzaklığın tüm yerlerde aynı ölçülmemesidir. Bu tarz geometrik yapılar modernleşen dünyadaki problemleri modellemede etkin olarak kullanılırlar. Bu çalışmada maksimum düzlemde bir üçgen ile ona dair bazı özel çember yapıları ele alınmış ve özellikleri incelenmiştir. Ayrıca Apollonius çember kavramının mevcut dört tanımdan ikisi incelenmiştir.

İlk olarak Öklidyen düzlemde bir üçgenin iç teğet çemberi ve çevrel çemberi kavramlarının maksimum düzlemdeki karşılıkları ele alınmıştır. Buna göre maksimum düzlemde bir üçgenin iç teğet çemberinin her zaman varolduğu ve bu çemberin merkezinin iç açıortayların kesim noktası olduğu gösterilmiştir. Çevrel çember kavramı ise Öklidyen halin aksine her üçgen için mevcut olmayıp çevrel çemberin varlık koşulları ifade edilmiştir.

Daha sonra maksimum düzlemde bir üçgenin dış teğet çemberin varlık koşulları verilmiş ve varolduğu durumda üçgenin iki dış açıortayı ile bir iç açıortayın kesim noktasının çemberin merkezi olduğu gösterilmiştir. Bu sonuçlardan hareketle bir üçgenin üç dış teğet çemberini içerip onlara teğet olan çemberin varlık koşulları verilmiştir. Bu çembere Apollonius çember adı verilmektedir.

Son olarak MÖ 3. yüzyılda Pergeli Apollonius'un verdiği çemberin alternatif tanımının maksimum düzlem geometrideki yansımaları incelenmiştir. Tanıma göre Öklidyen düzlemde sabit iki noktaya uzaklıkları oranı sabit olan noktaların kümesi bir çemberdir. Fakat aynı tanım maksimum düzlemde ilgili küme bir çember belirtmez.

Bu nedenle ilgili kümeye Apollonius küme denilecektir. Maksimum düzlemde Apollonius kümeler sınıflandırılmış ve özellikleri inclenmiştir. Bu bağlamda maksimum düzlemde Apollonius küme bir eşkenar yamuk veya eşkenar yamukların ikisinin birleşimi ve yahut da halter ve şimşek şeklidir.

Bu çalışmanın sonrasında Maksimum düzlemde bu tezde ele alınmamış bir üçgen ve çemberin çeşitli özellikleri incelenebilir. Öklidyen geometride Apollonius çemberi diye atıf edilen dört çember söz konusudur. Bu çalışmada bu tanımlardan sadece iki tanesi ele alınmış

olup ele alınmamış olan diğer iki tanım için bu tanımların maksimum düzlemdeki karşılıkları incelenebilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Eric B., Shana C., Aaron F., Dylan H., Anna M., Freddy N., Suki S., Julian T., Nico V., 2020, Apollonian sets in taxicab geometry. Rocky Mountain J. Math. 50 (1), 25-39.

Ermiş T., Gelişgen Ö. , Kaya R., 2012, On Taxicab Incircle and Circumcircle of a Triangle. Scientific and Professional Journal of the Croatian Society for Geometry and Graphics, 3-12.

Ermiş T., Kaya, R., 2015, On the Isometries of 3 Dimensional Maximum Spaces. Konuralp Journal of Mathematics 3, 1, 103–114.

Ermiş T., Gelişgen Ö., 2015, On The Area Of A Triangle In Maximum Plane. Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi, vol. 15, no. 1, pp. 7–14.

Ermiş T., Gelişgen Ö. , Ekici A., 2018, A taxicab version of a triangle's apollonius circle. Journal of mahani mathematical research center, DOI: 10.22103/JMMRC.2018.2073, 25-36.

Gelişgen Ö., Ermiş T., 2021, Classification of Apollonius Sets in Maximum Plane Geometry, ESOGU preprint.

Kaya, R., 2002, Analitik Geometri, Bilim ve Teknik Yayınevi, s.439

Krause, E.F., 1975, Taxicab Geometry, Addison - Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, p.88.

Südabe S., 2006, Maksimum Metriğinin Geometrisi Üzerine, Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

Thompson, A. C., 1996, Minkowski Geometry, Cambridge University Press, p.346.

Wikipedia, 2021, https://en.wikipedia.org/wiki/Circles-of-Apollonius, erişim tarihi: 10.10.2021.

Mathworld, 2021, https://mathworld.wolfram.com/ApolloniusCircle.html, erişim tarihi: 10.10.2021