3-BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYINDA MİNİMAL REGLE YÜZEYLER

Mustafa DEDE

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

2006

THE MINIMAL RULED SURFACES IN 3-DIMENSIONAL MINKOWSKI SPACE

Mustafa DEDE

Department of Mathematics

Thesis for Master Degree

2006

3-BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYINDA MİNİMAL REGLE YÜZEYLER

Mustafa DEDE

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Cumali EKİCİ

Temmuz 2006

Mustafa DEDE 'nin Yüksek Lisans tezi olarak hazırladığı

"**3-BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYINDA MİNİMAL REGLE YÜZEYLER**"

başlıklı bu çalışma jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye: Prof. Dr. İsmail KOCAYUSUFOĞLU

Üye: Yrd. Doç. Dr. Kürşat YENİLMEZ

Üye: Yrd. Doç. Dr. Cumali EKİCİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu' nun ..... gün ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr.Abdurrahman KARAMANCIOĞLU
Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu yüksek lisans tezi üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde sanal elemanlar, izotrop doğru, minimal eğri, yarı-Reimann manifoldları, Minkowski uzayı, Minkowski uzayında yüzeyin ortalama ve Gauss eğriliği, Minkowski uzayında spacelike, timelike ve regle yüzeyler ile ilgi bazı temel kavram ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde minimal yüzeyler, minimal yüzeylerde E. Study formülleri, Weierstrass-Enneper gösterimi, minimal yüzeyin paraleli, minimal regle yüzeyler, dönel minimal yüzeyler ve izometriler ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Üçüncü bölümde ise Minkowski uzayında spacelike minimal yüzeyler, timelike minimal yüzeyler, spacelike minimal regle yüzeyler ve timelike minimal regle yüzeyler konularına giriş yapılmıştır.

SUMMARY

This thesis consists of three chapters.

In the first chapter, we give some basic concepts such as imaginary elemants, izotrop line, minimal curves, semi-Reimann manifolds, Minkowski space, mean and Gauss curvatures of a surface in Minkowski space, spacelike timelike and ruled surfaces in Minkowski space.

In the second chapter, first we give the some properties of minimal surfaces, E. Study formulas in minimal surfaces, parallel of minimal surfaces, minimal ruled surfaces, rotational minimal surfaces, isometries.

In the last chapter, we have just started to study spacelike minimal surfaces in the Minkowski space, timelike minimal surfaces in the Minkowski space, spacelike minimal ruled surfaces in the Minkowski space, timelike minimal ruled surfaces in the Minkowski space

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında maddi ve manevi her türlü yardım ve desteklerini benden esirgemeyen değerli hocalarım Sayın;

Yrd. Doç. Dr. Cumali EKİCİ

ye teşekkürlerimi sunarım.

Eskişehir, 2006 Mustafa DEDE

İçindekiler

1 TEMEL KAVRAMLAR **1**

1.1 Sanal Elemanlar 1

1.2 Minimal Eğriler 6

1.3 Uzayda Minimal Eğrilerin Belirlenmesi 8

1.4 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayı 9

1.5 Yarı-Riemann Manifoldları 13

1.6 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında Yüzeyin Esas Formları 18

1.7 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowki Uzayında Yüzeyin H ve K Eğrilikleri 21

1.8 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında Regle Yüzeyler 22

1.9 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında Spacelike Yüzeyler 25

1.10 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında Timelike Yüzeyler 26

2 MİNİMAL YÜZEYLER VE MİNİMAL REGLE YÜZEYLER 29

2.1 Minimal Yüzeyler 30

2.2 Minimal Yüzeylerde E.Study Formülleri 42

2.3 Weierstrass-Enneper Gösterimi 47

2.4 Minimal Yüzey Örnekleri 53

2.5 Minimal Yüzeyin Paraleli 55

2.6 Minimal Regle Yüzeyler 57

2.7 Dönel Minimal Yüzeyler 62

2.8 İzometriler 65

3 $\mathbb{R}^3_1$ MİNKOWSKİ UZAYINDA MİNİMAL REGLE YÜZEYLER 73

3.1 $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski Uzayında Spacelike Minimal Yüzeyler 73

3.2 Maximal Yüzeyin Weierstrass-Enneper Gösterimi 80

3.3 $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski Uzayında Timelike Minimal Yüzeyler 82

3.4 $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski Uzayında Timelike Minimal Regle Yüzeyler . . 87

3.5 $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski Uzayında Spacelike Minimal Regle Yüzeyler . . 91

Bölüm 1

TEMEL KAVRAMLAR

1.1 Sanal Elemanlar

Bu bölümde çalışmaya esas olan tanım ve teoremler referans gösterilmemiş olanlar hariç, (Şemin, 1983) kaynağından alınmıştır.

Tanım 1.1.1: k_p, $(p = 1, 2, 3)$ birim vektörlü bir eksen sistemi Ox_p olsun. Bu üç eksenin aynı bir düzleme paralel olmadıklarını yani

$$(k_1, k_2, k_3) \neq 0$$

olduğunu varsayıyoruz.

Buna göre, x_p koordinatlarından hiç olmazsa birisi kompleks olan bir $N(x_p)$ noktasına **sanal nokta** denir.

Tanım 1.1.2:

$$D = \sum_{p=1}^{3} A_p X_p = 0 \tag{1.1}$$

Homojen denklemindeki katsayılardan hiç olmazsa biri kompleks ise ve a_p gerçel sayıları göstermek üzere, bu katsayılar arasında

$$A_p = \lambda a_p, \quad (p = 1, 2, 3)$$

biçiminde eşitlik yoksa, tanım olarak (1.1) homojen denklemine gerçel düzlemde bir **sanal doğru** denir. Bu denklemdeki X_p koordinatları kompleks ve gerçel değerler alabilir.

Teorem 1.1.1: Bir sanal doğru üzerinde bir tek gerçel nokta vardır.

İspat: a_p^* gerçel sayılarının üçü birden sıfır olmamak üzere

$$A_p = a_p + ia_p^*, \quad (p = 1, 2, 3,),\ a_p \text{ gerçel katsayı} \tag{1.2}$$

şeklinde yazalım. (1.2) denklemindeki gerçel X_p homojen koordinatları için

$$D = D_1 + iD_2 \tag{1.3}$$

dır. Buradan da

$$D_1 = \sum_{p=1}^{3} a_p X_p \tag{1.4}$$

$$D_2 = \sum_{p=1}^{3} a_p^* X_p \tag{1.5}$$

biçiminde yazılabilir. D nin gerçel olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{a_p}{a_p^*} = k$$

olmasıdır. Burada k, sıfır yada sonsuz olabilen sayıdır. (1.4) ve (1.5) gerçel doğruları D sanal doğrusu üzerinde bir tek gerçel nokta olduğunu gösterir. Bu nokta,

$$D_1 = 0\ ,\ D_2 = 0$$

gerçel doğrularının arakesiti olan noktadır. Bu nokta sonlu uzaklıkta veya $D_1 = 0$, $D_2 = 0$ doğrularının paralelliği durumunda, sonsuz da olabilir. D sanal doğrusunun bu gerçel noktadan farklı bütün noktaları sanaldır.

Görüldüğü gibi; gerçel doğrular için söylenenin aksine, iki gerçel noktadan bir sanal doğru geçmez, böyle iki noktayı birleştiren doğru da gerçeldir.

Tanım 1.1.3: A_p, $(p = 1, 2, 3, 4)$ katsayılarından hiç olmazsa birisi kompleks ise ve a_p gerçel sayılar olmak üzere bu sayılar arasında

$$A_p = \lambda a_p, \quad (p = 1, 2, 3, 4)$$

eşitlikleri yoksa,

$$\Delta = \sum_{p=1}^{4} A_p X_p = 0$$

homojen denklemine, gerçel uzayda bir **sanal düzlem** denir.

Bu denklemdeki X_p koordinatları gerçel ve sanal değerler alabilir.

Tanım 1.1.4: Gerçel düzlemde herhangi iki kartezyen eksen arasındaki açı θ olsun. Gerçel yada sanal bir $A(a_1, a_2)$ noktasından geçen bir sanal doğrunun denklemi

$$x_2 - a_2 = m(x_1 - a_1)$$

şeklindedir.

Eğer m açı katsayısı,

$$m^2 + 2m\cos\theta + 1 = 0$$

denkleminin köklerinden birisi ise, yani;

$$m_1, m_2 = -\cos\theta \pm i\sin\theta = -e^{\varepsilon i\theta}, \quad \varepsilon = \pm 1$$

ise, bu köklerle belirli olan doğrulardan herhangi birine, (a_1, a_2) noktasından geçen **izotrop doğru** denir.

Başlangıcın izotrop doğruları

$$x_2 = -e^{\varepsilon i\theta}, \quad e = \pm 1$$

dır. Dik eksen sisteminde, A ve O noktalarından geçen izotrop doğruları, sırasıyla,

$$\begin{aligned} x_2 - a_2 &= \varepsilon i(x_1 - a_1) \\ x_2 &= \varepsilon i x_1 \end{aligned}$$

denklemleriyle belirtilir.

Teorem 1.1.2: Bir izotrop doğru, herhangi bir doğru ile aynı açı katsayısını oluşturur.

İspat:

Bu özelliğin eksenlerle bir ilişkisi bulunmadığından, ispatını dik eksenleri kullanarak yapacağız. Dik eksen sisteminde, açı katsayısı m olan bir doğru ile bir izotrop doğru arasındaki açının trigonometrik tanjantı;

$$\begin{aligned} \frac{m-\varepsilon i}{1+m\varepsilon i} &= -\left[\frac{(1+m\varepsilon i)}{(1+m\varepsilon i)}\right]\varepsilon i \\ &= \varepsilon i \end{aligned}$$

dir. Bu sonuç, izotrop doğrunun bir doğru ile yaptığı açının sabit ve değişmez olduğunu gösterir.

Teorem 1.1.3: Bir izotrop doğrunun kendisiyle oluşturduğu açının açı katsayısı belirsizdir.

İspat:

İki doğru arasındaki açı

$$\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$

dır. O zaman izotrop doğrunun kendisiyle yaptıgı açı

$$\frac{\varepsilon i-\varepsilon i}{1+(i\varepsilon)^2}=\frac{0}{0}$$

biçimindedir.

Teorem 1.1.4: Bir izotrop doğru kendi kendine diktir.

İspat:

İzotrop doğrunun açı katsayısı εi olmak üzere,

$$\varepsilon i\varepsilon i=-1$$

dır.

Teorem 1.1.5: Bir izotrop doğrunun sonlu uzaklıkta bulunan iki noktası arasındaki uzaklığın karesi sıfıra eşittir, tersi de doğrudur.

İspat

İzotrop doğru üzerinde alınan herhangi iki nokta $A(a_p)$, $B(b_p)$, $(p = 1, 2)$ olsun. Bu noktalar arasındaki uzaklık

$$\overline{AB}^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 \tag{1.6}$$

dır.

$$\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = \varepsilon i, \quad \varepsilon = \pm 1 \tag{1.7}$$

izotrop doğrunun eğimidir. (1.7) denkleminin her iki tarafının karesini alırsak.

$$\frac{(b_2 - a_2)^2}{(b_1 - a_1)^2} = -1$$

yazılır. Bu ifadeyi (1.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$\overline{AB}^2 = 0$$

bulunur. Tersine olarak,

$$\overline{AB}^2 = 0$$

olduğunu kabul edelim. O halde

$$\frac{(b_2 - a_2)^2}{(b_1 - a_1)^2} = -1$$

dir. Dolayısıyla

$$\frac{(b_2 - a_2)}{(b_1 - a_1)} = \varepsilon i$$

elde edilir.

Gerçel düzlemde izotrop doğruların tanımı bu özellik yardımıyla da yapılabilir. Gerçel düzlemde, herhangi bir eksen sisteminde $A(a_p)$, $B(b_p)$ noktaları arasındaki uzaklığın karesini

$$\overline{AB}^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + 2(b_2 - a_2)(b_1 - a_1)\cos\theta$$

şeklinde yazarız. Bu denklemde

$$\frac{(b_2 - a_2)}{(b_1 - a_1)} = m$$

olarak alırsak m değeri için

$$m^2 + 2m\cos\theta + 1 = 0$$

denklemi elde edilir.

1.2 Minimal Eğriler

Tanım 1.2.1: Herhangi iki noktası arasındaki uzaklığın karesi sıfıra eşit olan bir eğriye izotrop yada **minimal eğri** denir. Bir eğri

$$ds^2 = 0 \tag{1.8}$$

şartını sağlar ise minimal eğridir. Bu denklemin gerçel bir çözümü yoktur. Ancak eşlenik sanal çözümleri vardır.

Teorem 1.2.1: Düzlem üzerindeki minimal eğriler izotrop doğrulardır.

İspat:.

Dik koordinat sisteminde $x_3 = 0$ düzlemini alalım. Yani; gerçel x_1Ox_2 düzlemini göz önüne alalım. O halde bu düzlem üzerindeki minimal eğriler (1.8) denkleminden dolayı

$$dx_1^2 + dx_2^2 = 0$$

diferensiyel denklemini sağlar. Buradan da,

$$dx_1^2 = -dx_2^2$$

elde edilir. O halde

$$x_3 = 0 \ , \ dx_2 = \varepsilon i dx_1, \quad \varepsilon = \pm 1$$

yada integrasyon ile belirlenen

$$x_3 = 0 \ , \ x_2 = \varepsilon i x_1 + c, \quad c : \text{gerçel veya sanal bir sabit}$$

bu doğrular sözü edilen gerçel düzlemin izotrop doğrularıdır.

Teorem 1.2.2: Sanal düzlem üzerinde minimal eğrilerin izotrop doğrultularının olması için gerek ve yeter şartın düzlemin izotrop olması ve her bir noktasından bir tek izotrop doğrultu geçmesidir.

İspat:

Dik koordinat sistemini sanal düzlem üzerinde bulunan tek gerçel doğru Ox_3 olacak şekilde seçelim. O zaman sanal düzlemin denklemi

$$x_2 = mx_1 \ , \ m = m_1 + im_2, \quad m_2 \neq 0 \tag{1.9}$$

şeklindedir.

Böyle bir düzlem üzerinde minimal eğriler bulunması koşulunu yazarsak, (1.8) yardımıyla

$$\begin{aligned} dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 &= 0 \\ (1+m^2)dx_1^2 + dx_3^2 &= 0 \end{aligned}$$

ya da

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1 + m_1^2 - m_2^2)dx_1^2 + 2m_1 m_2 i dx_2^2 + dx_3^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

bağıntıları elde edilir. $m_1 = 0$ için

$$ds^2 = (1 - m_2^2)dx_1^2 + dx_3^2 = 0$$

veya $m_2 = \pm 1$ için $dx_3 = 0$ yani

$$x_3 = c = sabit$$

olur.

Demek ki (1.9) düzlemi,

$$x_2 = \varepsilon i x_1$$

şeklinde tanımlı izotrop bir düzlemdir. Özet olarak; bir sanal düzlem üzerinde minimal eğrilerin izotrop doğrultularının olması için gerek ve yeter şartın düzlemin izotrop olması ve her bir noktasından bir tek izotrop doğrultu geçmesi olduğunu söyleyebiliriz.

Teorem 1.2.3: t kompleks olmak üzere E minimal eğrimizin vektörel denklemi

$$x = x(t)$$

olsun. O halde bir E minimal eğrisinin $N(t)$ düzgün noktadaki tüm teğetleri izotrop doğrulardır.

İspat: Minimal eğrilerin tanımından

$$ds^2 = dx^2 = 0$$

veya $x' \neq 0$ için

$$[x'(t)]^2 = 0$$

olduğundan $x'(t)$ izotrop doğrultudur. O halde uzayda bir minimal eğriyi şu şekilde tanımlayabiliriz:

Tanım 1.2.2: Uzayda tüm düzgün noktasındaki teğetleri izotrop doğrulardan oluşan eğrilere **minimal eğri** denir.

1.3 Uzayda Minimal Eğrilerin Belirlenmesi

Minimal eğrileri, dik koordinat sisteminde

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = 0$$

biçiminde tanımlamıştık. Şimdi, aşağıdaki diferensiyel denklemin çözümünü gözönüne alalım.

$$\frac{dx_2 + idx_3}{dx_1} = -\frac{dx_1}{dx_2 - idx_3} = t, \quad t : \text{kompleks değişken}$$

Ayrıca

$$x_2' = \frac{dx_2}{dx_1} \ , \ x_3' = \frac{dx_3}{dx_1}$$

olarak alırsak,

$$x_2' + ix_3' = t \ , \ x_2' - ix_3' = -\frac{1}{t}$$

yazılır. Buradan da

$$x_2' = \frac{(t^2-1)}{2t} \ , \ x_3' = \frac{(t^2+1)}{2it}$$

veya

$$\frac{dx_1}{2t} = \frac{dx_2}{(t^2-1)} = i\frac{dx_3}{(t^2+1)} = f(t)dt$$

bulunur. O halde

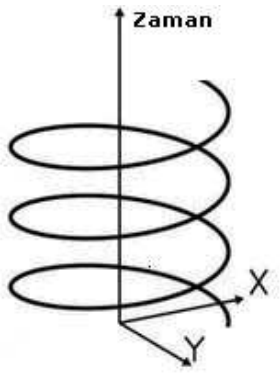
$$\begin{aligned} x_1 &= 2\int tf(t)dt \\ x_2 &= \int (t^2-1)f(t)dt \\ x_3 &= -i\int (t^2+1)f(t)dt \end{aligned}$$

elde edilir.

1.4 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayı

Minkowski Uzayı Alman matematikçi Hermann Minkowski tarafından 1907 yılında ifade edilmiştir. Matematik ve fizikte Minkowski uzayı Einstein'ın izafiyet teorisini formüle etmek için en uygun yoldur. Minkowski uzayı space-time'ı göstermek için uzayın genel 3 boyutu ile zamanın bir boyutunun birleştirilmesiyle elde edilen 4 boyutlu bir manifolddur. Albert Einstein' ın izafiyet teorisini açıkladıktan sonra Hermann Minkowski uzay ve zamanı aynı

durumda ele almış ve iki tarafı tek çatı altında birleştirmiştir. Spacetime fiziksel olayların yer aldığı bir alandır. Örnek olarak, gezegenlerin güneş etrafındaki hareketi spacetime'ın özel bir çeşiti olarak tanımlanabilir.



Şekil 1.1

Çoğunlukla zaman boyutu dikey bir boyut olarak ele alınır, uzayda Dünya'nın uydusu olan Ay'ın hareketi nerdeyse çember şeklindeyken Minkowski uzayında bir helis şeklindedir.

Bu kısımdaki tanım ve teoremler (O Neill, 1983) kaynağından alınmıştır.

Tanım 1.4.1: V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde tanımlı

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü bilineer ve simetrik ise g ye V üzerinde **simetrik bilineer form** denir. Bu dönüşüm aynı zamanda nondejenere ise g ye V üzerinde bir **skalar çarpım**, bu durumda V vektör uzayına da bir **skalar çarpım uzayı** denir.

Ayrıca,

(i) $\forall\ \overrightarrow{v} \in V$ ve $\overrightarrow{v} \neq 0$ için $g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) > 0$ ise, g simetrik bilineer formuna **pozitif tanımlı**,

(ii) $\forall\ \overrightarrow{v} \in V$ ve $\overrightarrow{v} \neq 0$ için $g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) < 0$ ise, g simetrik bilineer formuna **negatif tanımlı**,

(iii) $\forall\ \overrightarrow{v} \in V$ ve $\overrightarrow{v} \neq 0$ için $g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) \geq 0$ ise bu durumda g simetrik bilineer formuna **yarı-pozitif tanımlı**,

(iv) $\forall\ \overrightarrow{v} \in V$ ve $\overrightarrow{v} \neq 0$ için $g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) \leq 0$ ise bu durumda g simetrik bilineer formuna **yarı-negatif tanımlı** dır denir.

Bundan başka,

(a) g nin **nondejenere** olması için gerek ve yeter koşul $g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0$ ve $\forall\ \overrightarrow{w} \in V$ için $v = 0$ olmasıdır.

(b) g nin **dejenere** olması için gerek ve yeter koşul $g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0$ ve $\forall\ \overrightarrow{w} \in V$ için $v \neq 0$ olmasıdır.

Tanım 1.4.2: V bir skalar çarpım uzayı, W da üzerindeki skalar çarpım negatif tanımlı olacak şekilde V nin en büyük boyutlu altuzayı olsun. Bu durumda W nin boyutuna g **skalar çarpımının indeksi** denir.

g skalar çarpımının indeksi ν ise $0 \leq \nu \leq boyV$ dir. Ayrıca V skalar çarpım uzayının indeksi, üzerinde tanımlı g skalar çarpımının indeksi olarak tanımlanır.

Tanım 1.4.3: V skalar çarpım uzayı olsun. V nin indeksi ν olmak üzere $\nu = 1$ ve $boyV \geq 2$ ise V skalar çarpım uzayına bir **Lorentz uzayı** denir.

Tanım 1.4.4: V bir Lorentz uzayı olsun. $v \in V$ için

$i)$ $g(v, v) > 0$ veya $v = 0$ ise v ye **spacelike vektör**,

$ii)$ $g(v, v) < 0$ ise v ye **timelike vektör**,

$iii)$ $g(v, v) = 0$ ve $v \neq 0$ ise v ye **null (lightlike) vektör**

ve $\|v\| = |g(v, v)|^{1/2}$ reel sayısına v vektörünün **normu** denir.

V Lorentz uzayında tüm timelike vektörlerin cümlesi Γ olsun. $u \in \Gamma$ için

$$C(u) = \{v \in \Gamma \mid g(v, u) < 0\}$$

kümesine u vektörünü kapsayan V Lorentz uzayının **time-konisi** denir.

Teorem 1.4.1: V Lorentz uzayı ve iki timelike vektör v ve w olsun. Bu durumda

i) $|g(v,w)| \geq \|v\| \,.\, \|w\|$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlikte eşitlik olması için gerek ve yeter şart v ve w vektörlerinin lineer bağımlı olmasıdır.

ii) $v,\ w$ timelike vektörleri aynı time-konide ise

$$g(v,w) = -\|v\| \,.\, \|w\| \, ch\varphi$$

olacak şekilde bir tek $\varphi \geq 0$ sayısı vardır. Bu φ sayısına v ve w timelike vektörleri arasındaki **hiperbolik açı** denir.

Burada v ve w vektörleri aynı time-konide değilseler o zaman

$$|g(v,w)| = \|v\| \,.\, \|w\| \, ch\varphi$$

dir.

V Lorentz uzayında spacelike vektörler v ve w olmak üzere

$$\cos\theta = \frac{g(v,w)}{\|v\| \,.\, \|w\|}$$

olacak şekilde bir tek $0 \leq \theta \leq \pi$ sayısı vardır. Bu sayıya v ve w spacelike vektörler arasındaki **açı** denir. v ve w spacelike vektörler için

$$g(v,w) \leq \|v\| \,.\, \|w\|$$

eşitsizliği vardır.

Tanım 1.4.5: V bir Lorentz uzayı ve $W,\ V$ nin bir altuzayı olsun. Bu durumda

i) $g\,|_W$ pozitif tanımlı ise W ya **spacelike altuzay**,

ii) $g\,|_W$ nondejenere ve indeksi 1 ise W ya **timelike altuzay**,

iii) $g\,|_W$ dejenere ise W ya **lightlike altuzay** denir.

Teorem 1.4.2: V bir Lorentz uzayı, V nin bir altuzayı W ve $boy W \geq 2$ olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler birbirine denktirler.

i) W timelike uzay ise W bir Lorentz vektör uzayıdır.

ii) W uzayı iki tane lineer bağımsız null vektör içerir.

iii) W uzayı bir tane timelike vektör içerir.

1.5 Yarı-Riemann Manifoldları

Bu kısımdaki tanım ve teoremler (O Neill, 1983) kaynağından alınmıştır.

Tanım 1.5.1: M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerinde simetrik, nondejenere ve sabit indeksli (0,2)-tipinden g tensör alanına bir **metrik tensör** denir.

Başka bir deyişle g, M manifoldunun her p noktasına T_pM tanjant uzayı üzerinde bir g_p skalar çarpımı karşılık getirir ve g skalar çarpımının indeksi her $p \in M$ için aynıdır.

Tanım 1.5.2: $\mathbb{R}^n$, n-boyutlu standart reel vektör uzayı üzerinde her $p \in \mathbb{R}^n$ ve v_p, $w_p \in T_p\mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$< v_p, w_p >= \sum_{i=1}^{n-\nu} v_i w_i - \sum_{i=n-\nu+1}^{n} v_i w_i$$

eşitliğiyle verilen ν-indeksli metrik tensörle birlikte elde edilen uzaya **yarı-Öklidyen uzay** denir ve $\mathbb{R}^n_\nu$ ile gösterilir. Burada $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, sırasıyla, v_i ve w_i ler ν_p ve w_p tanjant vektörlerin bileşenidir.

Tanım 1.5.3: $\mathbb{R}^n_\nu$ yarı-Öklidyen uzayında $\nu = 1$ ve $n \geq 2$ ise $\mathbb{R}^n_\nu$ yarı-Öklidyen uzayına **Minkowski n-uzay** denir.

Tanım 1.5.4: M diferensiyellenebilir bir manifold ve g de M üzerinde sabit indeksli bir metrik tensör olmak üzere (M, g) ikilisine bir **yarı-Riemann manifoldu** denir.

Bundan sonraki kullanımlarda (M, g) yarı-Riemann manifoldunu, kısaca M ile göstereceğiz.

Tanım 1.5.5: M bir yarı-Riemann manifoldu olsun. g nin sabit indeksine M yarı-Riemann manifoldunun indeksi denir.

Tanım 1.5.6: M bir yarı-Riemann manifoldu olsun. $boyM \geq 2$ ve M nin indeksi 1 ise M ye bir **Lorentz manifoldu** denir.

Bu tanıma göre bir M Lorentz manifoldu için

$$g_p(v_p, w_p) = \sum_{i=1}^{n-1} v_i \mid_p w_i \mid_p - v_n \mid_p w_n \mid_p , \quad p \in M, \quad v_{p,} w_p \in T_pM$$

dir.

Tanım 1.5.7: M bir Lorentz manifoldu ve $\alpha : \ I \subset \mathbb{R} \to M$ bir eğri olsun. α eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere,

i) $g(T,\ T) > 0$ ise α eğrisine **spacelike eğri**,

ii) $g(T,\ T) < 0$ ise α eğrisine **timelike eğri**,

iii) $g(T,\ T) = 0$ ve $T \neq 0$ ise α eğrisine **null eğri** denir.

Eğrinin bir özel hali olan doğruyu gözönüne alalım. Doğrunun doğrultman vektörü spacelike ise doğru spacelike doğru, doğrultman vektörü timelike ise doğru timelike doğru, doğrultman vektörü null ise doğru null doğrudur.

Tanım 1.5.8: M bir yarı-Riemann manifoldu ve $\overline{M}$, M nin bir altmanifoldu olsun. $j : \overline{M} \to M$ inclusion (içine) dönüşümü olmak üzere her $p \in \overline{M}$ için

$$(j\,(g))\,(p) = g\,(j\,(p))$$

şeklinde tanımlı $j\,(g)$ dönüşümü $\overline{M}$ üzerinde bir metrik tensör ise $\overline{M}$ ye M nin bir **yarı-Riemann altmanifoldu** denir.

Bundan sonraki gösterimlerde $\overline{M}$ üzerindeki metrik tensör ile M üzerindeki metrik tensörü g ile göstereceğiz.

Tanım 1.5.9: $\overline{M}$, M nin bir yarı-Riemann altmanifoldu ve M üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu D olsun.

$$D : \chi\left(\overline{M}\right) \times \chi\left(\overline{M}\right) \to \chi\left(\overline{M}\right)$$

indirgenmiş fonksiyonuna $\overline{M}$ yarı-Riemann altmanifoldu üzerine **indirgenmiş konneksiyon** denir. Burada $\chi\left(\overline{M}\right)$ ile, $\overline{M}$ nin her bir p noktasına T_pM de bir tanjant vektörüne karşılık getiren vektör alanlarının $\Im\left(\overline{M}\right)$ modülü gösterilmektedir.

Teorem 1.5.1: $\overline{M}$, M nin bir yarı-Riemann altmanifoldu ve M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu D olsun. Her $V,\ W \in \chi\left(\overline{M}\right)$ için

$$\overline{D}_V W = \tan D_V W$$

şeklinde tanımlı $\overline{D}$ fonksiyonu $\overline{M}$ üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonudur.

Tanım 1.5.10: M nin bir yarı-Riemann altmanifoldu olsun.

$$\begin{aligned} II: \ \chi\left(\overline{M}\right) \times \chi\left(\overline{M}\right) &\rightarrow \chi\left(\overline{M}\right)^{\perp} \\ (V,W) &\rightarrow II\left(V,W\right) = nor D_V W \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\Im\left(\overline{M}\right)$-bilineer ve simetrik fonksiyonuna $\overline{M}$ nin **şekil tensörü** (veya ikinci temel form tensörü) denir.

Tanım 1.5.11: n-boyutlu bir M yarı-Riemann manifoldunun $(n-1)$-boyutlu bir $\overline{M}$ yarı-Riemann altmanifolduna M nin **yarı-Riemann hiperyüzeyi** denir.

Tanım 1.5.12: M nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyi $\overline{M}$ ve $\overline{M}$ nin birim normal vektör alanı N olsun. Her $V,\ W \in \chi\left(\overline{M}\right)$ için

$$g\left(S\left(V\right),W\right) = g\left(II\left(V,W\right),N\right)$$

şeklindeki $(1,1)$-tipinden tensör alanı S ye $\overline{M}$ nin N normalinden elde edilen **şekil operatörü** denir.

Diğer bir ifadeyle, S şekil operatörü $\overline{M}$ nin her p noktasında

$$S : T_p\left(\overline{M}\right) \rightarrow T_p\left(\overline{M}\right)$$

bir lineer operatördür.

Teorem 1.5.2: M nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyi $\overline{M}$ ve S de $\overline{M}$ nin normali olan N den elde edilen şekil operatörü olsun. Bu durumda $V \in \chi\left(\overline{M}\right)$ için

$$S\left(V\right) = -D_V N$$

dir. Ayrıca S şekil operatörü self-adjoint tir.

M nin bir yarı - Riemann hiperyüzeyi $\overline{M}$ olsun. $\overline{M}$ nin N normalinden elde edilen şekil operatörü S olmak üzere, her V, $W \in \chi\left(\overline{M}\right)$ için

$$II\left(V,W\right) = \varepsilon g\left(S\left(V\right),W\right)N$$

dır. Burada $\varepsilon = g\left(N,N\right)$ dir. Yarı-Riemann hiperyüzeyleri için Gauss denklemi, her V, $W \in \chi\left(\overline{M}\right)$ olmak üzere

$$D_V W = \overline{D}_V W + \varepsilon g\left(S\left(V\right),W\right)N$$

şeklinde verilir.

Tanım 1.5.13: M nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyi $\overline{M}$ olsun. $\overline{M}$ nin normali olan N den elde edilen şekil operatörü S ve $\alpha : I \longrightarrow \overline{M}$ eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere

$$g\left(S\left(T\right),T\right) = 0$$

ise α eğrisine **asimptotik çizgi** (eğri) denir.

Tanım 1.5.14: M nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyi $\overline{M}$ olsun. $\overline{M}$ üzerindeki konneksiyon $\overline{D}$ ve $\alpha : I \longrightarrow \overline{M}$ eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere

$$\overline{D}_T T = 0$$

ise α eğrisine $\overline{M}$ üzerindeki bir **geodezik eğri** denir.

Tanım 1.5.15: n-boyutlu, v-indeksli $\mathbb{R}_v^n$ yarı-Öklidyen uzayının, boyutunu 3 ve indeksini 1 olarak alalım. Böylece $\mathbb{R}^3$ üzerinde her $p \in \mathbb{R}^3$ ve $v_p,\ w_p \in T_p\mathbb{R}^3$ için

$$\langle v_p, w_p \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 - v_3 w_3$$

eşitliğiyle verilen 1- indeksli metrik tensörle birlikte elde edilen uzaya 3 - boyutlu **Minkowski uzayı** denir ve $\mathbb{R}_1^3$ ile gösterilir.

Tanım 1.5.16: $\mathbb{R}_1^3$, Minkowski uzayında iki vektör v ve w olsun, $v = (v_1, v_2, v_3)$ ve $w = (w_1, w_2, w_3)$ olmak üzere

$$(v_3w_2 - v_2w_3,\ v_1w_3 - v_3w_1,\ v_1w_2 - v_2w_1)$$

vektörüne v ve w nin **vektörel çarpımı** (veya dış çarpımı) denir. $v \times w$ veya $v \wedge w$ şeklinde gösterilir

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad i = j \ \text{ ise} \\ 0 & , \quad i \neq j \ \text{ ise} \end{cases} \quad \text{ve} \quad e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$$

olmak üzere

$$v \wedge w = -\det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

veya

$$v \wedge w = \det \begin{bmatrix} -e_1 & -e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanabilir. Burada $e_1 \wedge e_2 = e_3$, $e_2 \wedge e_3 = -e_1$, $e_3 \wedge e_1 = -e_2$ dir. Saat yönünün tersi pozitif yönü olarak alınmıştır.

Saat yönünün tersi negatif yön olarak kabul edilecek olursa o zaman $e_1 \wedge e_2 = -e_3$, $e_2 \wedge e_3 = e_1$, $e_3 \wedge e_1 = e_2$ olur. Bu durumda

$$v \wedge w = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Teorem 1.5.1: $\mathbb{R}_1^3$, 3 - boyutlu Minkowski uzayında üç vektör

$$\begin{aligned} u &= (u_1, u_2, u_3) \\ v &= (v_1, v_{2,} v_3) \\ w &= (w_1, w_2, w_3) \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda

$i)$ $\langle u \wedge v, w\rangle = -\det(u, v, w)$

$ii)$ $(u \wedge v) \wedge w = -\langle u, w\rangle v + \langle \nu, w\rangle u$

$iii)$ $\langle u \wedge v, u\rangle = 0$ ve $\langle u \wedge v, v\rangle = 0$

$i\nu)$.$\langle u \wedge v, u \wedge v\rangle = -\langle u, u\rangle \langle v, v\rangle + (\langle u, v\rangle)^2$

dir.

Teorem 1.5.2: $\mathbb{R}_1^3$, 3- boyutlu Minkowski uzayında iki vektör u ve v olsun.

$i)$ u ve v spacelike vektör ise $u \wedge v$ bir timelike vektördür.

$ii)$ u spacelike ve v timelike vektör ise $u \wedge v$ spacelike vektördür.

$iii)$ u spacelike ve v null vektör olmak üzere $\langle u, v\rangle = 0$ ise $u \wedge v$ null vektör, eğer $\langle u, v\rangle \neq 0$ ise $u \wedge v$ spacelike vektördür.

$i\nu)$ u ve v null vektör ise $u \wedge v$ spacelike vektördür.

$\nu)$ u timelike ve v null vektör ise $u \wedge v$ spacelike vektördür.

$\nu i)$ u ve v timelike vektör ise $u \wedge v$ spacelike vektördür.

1.6 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında Yüzeyin Esas Formları

M yarı-Riemann manifoldu olarak 3-boyutlu $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayını ve $\overline{M}$ yarı-Riemann hiperyüzeyi olarak da (U, φ) parametrizasyonu ile verilen

$$\begin{aligned} \varphi : \quad & U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_1^3 \\ & (u, v) \to \theta(u, v) = (\theta_1(u, v), \theta_2(u, v), \theta_3(u, v)) \end{aligned}$$

$\varphi(U)$ yüzeyini gözönüne alalım. $\left[\varphi_*\left(\frac{d}{d_u}\right), \varphi_*\left(\frac{d}{d_v}\right)\right]$ lineer bağımsız olmak üzere yüzeyin vektör alanlarının bir bazı $\left[\varphi_*\left(\frac{d}{d_u}\right), \varphi_*\left(\frac{d}{d_v}\right)\right]$ dır. Kısalık

için $\varphi_*\left(\frac{d}{d_u}\right)$ ve $\varphi_*\left(\frac{d}{d_v}\right)$ yerine sırasıyla φ_u ve φ_v ile göstereceğiz. O zaman yüzeyin normali $N = \varphi_u \wedge \varphi_v$ dir. Ayrıca

$$\langle N, N\rangle = \langle \varphi_u \wedge \varphi_v, \varphi_u \wedge \varphi_v\rangle$$

dir. Lagrange özdeşliğinden dolayı,

$$\langle N, N\rangle = \langle \varphi_u, \varphi_v\rangle^2 - \langle \varphi_u, \varphi_u\rangle \langle \varphi_v, \varphi_v\rangle$$

yazılır. Buradan da

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u\rangle \ , \ F = \langle \varphi_u, \varphi_v\rangle \ , \ G = \langle \varphi_v, \varphi_v\rangle$$

katsayıları kullanılarak

$$< N, N >= F^2 - EG$$

elde edilir. Şimdi yüzeyin birinci temel formunu hesaplayalım. φ nin tam diferensiyeli

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv$$

dir.

$$\begin{aligned} I &= (ds)^2 \\ &= \langle d\varphi, d\varphi\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right\rangle du^2 + 2\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right\rangle dudv + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right\rangle dv^2 \\ &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$\frac{(ds)^2}{(dv)^2} = E\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2F\frac{du}{dv} + G$$

ve

$$\lambda = \frac{du}{dv} \ , \ I' = \frac{(ds)^2}{(dv)^2}$$

olmak üzere

$$I' = E\lambda^2 + 2F\lambda + G \tag{1.10}$$

elde edilir. $\overline{M}$ yüzeyi üzerindeki $I = (ds)^2$ indirgenmiş metriğinin pozitif tanımlı veya indefinit olup olmadığını incelemek ile, $I = (dv)^2 I'$ olduğundan, I' yü incelemek aynı olacaktır.

$X, Y \in \chi(M)$ için yüzeyin ikinci esas formu

$$II\,[X,Y] = \langle S(X), Y\rangle$$

şeklindedir ve

$$S(X) = -dN$$

dir. Ayrıca

$$\langle N, Y\rangle = 0$$

denkleminde türev alırsak,

$$\langle N', Y\rangle + \langle N, Y'\rangle = 0$$

elde edilir. Buradan da

$$\langle N', Y\rangle = -\langle N, Y'\rangle$$

bulunur. Öyleyse,

$$II\,[X,Y] = -\langle N', Y\rangle = \langle N, Y'\rangle$$

yazılır. Burada Y' ifadesini aşagıdaki gibi hesaplarsak,

$$\begin{aligned} Y' &= d\varphi' \\ &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right)' \\ &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}dudv + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}dv^2 \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade ikinci temel formun tanımında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} < N, Y' > &= \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}, N \right\rangle du^2 + 2 \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v}, N \right\rangle dudv + \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}, N \right\rangle dv^2 \\ II\,[X, Y] &= Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

1.7 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowki Uzayında Yüzeyin H ve K Eğrilikleri

$$k_n = \frac{II}{I} = \frac{L\lambda^2 + 2M\lambda + N}{E\lambda^2 + 2F\lambda + G}$$

eşitliği yüzeyin **normal eğriliği** olarak tanımlanır. Bu oran yardımıyla

$$F(k_n, \lambda) = (L - k_n E)\lambda^2 + 2(M - k_n F)\lambda + (N - k_n G) = 0 \tag{1.11}$$

diferansiyel denklemi yazılır. Bu denklemin λ ya göre türevi alınırsa,

$$F_\lambda(k_n, \lambda) = (L - k_n E)\lambda + (M - k_n F) = 0 \tag{1.12}$$

elde edilir. (1.11) denkleminde λ ortak parantezine alarak,

$$\lambda\,[(L - k_n E)\lambda + (M - k_n F)] + (M - k_n F)\lambda + (N - k_n G) = 0$$

elde edilir. Buradan da (1.12) ifadesinden yararlanılarak,

$$\lambda\,[(L - k_n E)\lambda + (M - k_n F)] = 0$$

ve

$$[(M - k_n F)\lambda + (N - k_n G)] = 0$$

eşitlikleri elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} (L - k_n E)\lambda + (M - k_n F) &= 0 \\ (M - k_n F)\lambda + (N - k_n G) &= 0 \end{aligned}$$

dir. Bu denklemler için,

$$\det \begin{bmatrix} (L - k_n E) & (M - k_n F) \\ (M - k_n F) & (N - k_n G) \end{bmatrix} = 0$$

bulunur. Buradan

$$(L - k_n E)(N - k_n G) - (M - k_n F)^2 = 0$$

yazılır. Bu denklemi düzenlersek,

$$(EG - F^2)k_n^2 - (EN - 2FM + GL)kn + LN - M^2 = 0$$

elde edilir. Bu ikinci dereceden denklemin kökleri k_1 ve k_2 olmak üzere yüzeyin H ve K eğrilikleri sırasıyla

$$2H = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} \tag{1.13}$$

ve

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \tag{1.14}$$

şeklinde yazılır.

1.8 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında Regle Yüzeyler

Öklid uzayında tanımlandığı şekilde regle yüzeyi Minkowski uzayında da tanımlayabiliriz.

Tanım 1.8.1: $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında, verilen l doğrusunun, verilen α eğrisi boyunca hareket ettirilmesi ile bir yüzey elde edilebiliyorsa, bu yüzeye 3-boyutlu Minkowski uzayında bir **regle yüzey** denir. Bu durumda verilen l doğrusu regle yüzeyin **anadoğrusu** ve α eğrisi de regle yüzeyin **dayanak eğrisi** olarak adlandırılır.

$\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında $\{0\} \subset I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere diferensiyellenebilir birim hızlı bir eğri

$$\begin{aligned} \alpha: \quad & I \to \mathbb{R}_1^3 \\ & t \to \alpha(u) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u), \alpha_3(u)) \end{aligned}$$

olsun. Her $u \in I$ için $\alpha(u)$ noktasındaki $T_{r(t)}$ teğet vektörü ile anadoğrunun doğrultman vektörü lineer bağımsız olacak şekilde

$$\begin{aligned} l: \quad & \mathbb{R} \to \mathbb{R}_1^3 \\ & v \to l(v) = (\alpha_1(u) + vX_1(u), \alpha_2(u) + vX_2(u), \alpha_3(u) + vX_3(u)) \end{aligned}$$

doğrusunu seçelim. Burada $1 \leq u \leq 3$ olmak üzere $X_i(u) \in \mathbb{R}$ skalarları $\alpha(u)$ noktasındaki doğrultman vektörün bileşenleridir.

l doğrusunun α eğrisi boyunca hareket etmesiyle, $(I \times \mathbb{R}, \varphi)$ parametrizasyonu ile verilen bir

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & I \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_1^3 \\ & (u, v) & \to & \varphi(u, v) = (\alpha_1(u) + vX_1(u), \alpha_2(u) + vX_2(u), \alpha_3(u) + vX_3(u)) \end{array} \tag{1.15}$$

regle yüzeyi elde edilir.

Tanım 1.8.2: Bir $\varphi(u, v)$ regle yüzeyinin anadoğrularının her birini dik olarak kesen eğriye regle yüzeyin **ortogonal yörüngesi** denir.

Tanım 1.8.3: Bir $\varphi(u, v)$ regle yüzeyinde komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin esas doğrultman üzerindeki ayağına **boğaz (merkez veya striksiyon) noktası** denir.

Tanım 1.8.4: Bir $\varphi(u, v)$ regle yüzeyinin anadoğrusu dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin **boğaz çizgisi(striksiyon eğrisi)** adı verilir.

Tanım 1.8.5: Bir $\varphi(u, v)$ regle yüzeyinin merkez noktasının $\bar{\alpha}$ yer vektörü, dayanak eğrisinin $\vec{\alpha}(s)$ yervektörü, $X(s)$ doğrultman vektörü ve dayanak

eğrisine olan $\bar{u}$ uzaklığı cinsinden

$$\bar{\alpha}(s,\bar{u}) = \alpha(s) + \bar{u}X(s)$$

şeklinde ifade edilir. $\bar{u}$ parametresi regle yüzeyin dayanak eğrisinin yer vektörü ve doğrultmanı cinsinden bulunabilir. Regle yüzeyin ilk ikisi $X(s)$ ve $X(s)+dx(s)$ olan komşu üç anadoğrusunu seçelim. Burada P ve Q farklı iki boğaz noktasıdır.

Böylece,

$$\bar{\alpha}(s,\bar{u}) = \alpha(s) - \frac{\left\langle \frac{dX}{ds}, T \right\rangle}{\left\| \frac{dX}{ds} \right\|^2} X(s) \ , \ \alpha'(s) = T \tag{1.16}$$

bulunur.

Tanım 1.8.6:

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & I \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^3_1 \\ & (u,v) & \rightarrow & \varphi(u,v) = \alpha(u) + vX(u) \end{array}$$

regle yüzeyi her $u \in I$ için

$$\varphi(u+2\pi, v) = \varphi(u,v)$$

olacak şekilde periyodik ise regle yüzeye **kapalıdır** denir.

Kapalı regle yüzeylerin dayanak eğrileri ve anadoğrularının küresel göstergeleri kapalı eğrilerdir. Yani, bir periyot sonra her anadoğru kendi üzerine gelir.

Tanım 1.8.7: Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu anadoğru arasındaki açıya, oranına regle yüzeyin **dağılma parametresi (drali)** denir. Ayrıca yüzeyin dralinin diferensiyel denklemi

$$\lambda = -\frac{\det(T, X, X')}{\langle X', X' \rangle} \tag{1.17}$$

şeklindedir.

Tanım 1.8.8: Bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye **açılabilirdir** denir.

Teorem 1.8.1: Bir $\varphi(s,v)$ regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır.

1.9 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında Spacelike Yüzeyler

Tanım 1.9.1: (Spacelike Yüzey): $\mathbb{R}_1^3$, 3- boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey $\overline{M}$ olsun. $\overline{M}$ yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik pozitif tanımlı ise $\overline{M}$ yüzeyine $\mathbb{R}_1^3$ de bir **spacelike yüzey** denir (Beem ve Ehrlich, 1981).

Teorem 1.9.1: $\mathbb{R}_1^3$, 3- boyutlu Minkowski uzayında bir $\overline{M}$ yüzeyinin spacelike bir yüzey olması için gerek ve yeter şart yüzeyin normalinin timelike bir vektör alanı, yani;

$$\langle N, N\rangle < 0$$

olmasıdır.

İspat: $\overline{M}$ yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik $I = (dv)^2 I'$ ve $I' = E\lambda^2 + 2F\lambda + G$ dir. λ ya göre ikinci dereceden olan bu denklemin diskriminantı

$$\begin{aligned} \Delta &= 4(F^2 - EG) \\ &= 4\langle N, N\rangle \end{aligned}$$

dir. $I' > 0$ olması için gerek ve yeter şart $\Delta < 0$ dır. Çünkü eğer $\Delta > 0$ ise denklemin iki kökü vardır ve bu kökler arasında denklem negatif tanımlıdır. Bu yüzden $\Delta < 0$ olmak zorundadır. Buradan da

$$\langle N, N\rangle < 0$$

dir.

Tanım 1.9.2: $\mathbb{R}_1^3$, 3- boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey $\overline{M}$ olsun. $\overline{M}$ yüzeyinin teğet vektörleri spacelike ise bu yüzeye **spacelike yüzey** denir.

Tanım 1.9.3: $\mathbb{R}_1^3$, 3- boyutlu Minkowski uzayında bir spacelike yüzey $\overline{M}$ olsun. $\overline{M}$ nin şekil operatörüne karşılık gelen matris S olsun. $p \in \overline{M}$ için

$$K = \varepsilon \det S_p \ , \ \varepsilon = \langle N, N \rangle = -1 \tag{1.18}$$

$\overline{M}$ yüzeyinin p noktasındaki **Gauss eğriliği** ve $K{:}\overline{M} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $\overline{M}$ yüzeyinin **Gauss eğrilik fonksiyonu** denir.

Tanım 1.9.4: $\mathbb{R}_1^3$, 3- boyutlu Minkowski uzayında bir spacelike yüzey $\overline{M}$ olsun. $\overline{M}$ nin şekil operatörüne karşılık gelen matris S olsun. $p \in \overline{M}$ için

$$H = \varepsilon \dot{I} z S_p \ , \ \varepsilon = \langle N, N \rangle = -1 \tag{1.19}$$

$\overline{M}$ yüzeyinin p noktasındaki **ortalama eğriliği** ve $H : \overline{M} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $\overline{M}$ yüzeyinin **ortalama eğrilik fonksiyonu** denir.

Eğer $\overline{M}$ yüzeyi spacelike yüzey ise skaler çarpim $\overline{M}$ üzerinde bir Riemann metriği indirger. $\mathbb{R}_1^{n+1}$ üzerindeki standart $\bar{\nabla}$ konneksiyonu da $\overline{M}$ üzerinde Riemann konneksiyonu olarak tanımlanır.

1.10 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında Timelike Yüzeyler

Tanım 1.10.1: (Timelike Yüzey): $\mathbb{R}_1^3$, 3- boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey $\overline{M}$ olsun. $\overline{M}$ yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik Lorentz metriği ise $\overline{M}$ ye **timelike yüzey** denir (Beem ve Ehrlich, 1981).

Teorem 1.10.1: $\mathbb{R}_1^3$, 3- boyutlu Minkowski uzayında bir $\overline{M}$ yüzeyinin timelike yüzey olması için gerek ve yeter şart yüzeyin normalinin spacelike bir vektör alanı, yani;

$$\langle N, N \rangle > 0$$

olmasıdır.

İspat: $\overline{M}$ yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik $I = (dv)^2 I'$ ve $I' = E\lambda^2 + 2F\lambda + G$ dir. λ ya göre ikinci dereceden olan bu denklemin diskriminantı.

$$\begin{aligned} \Delta &= 4(F^2 - EG) \\ &= 4\langle N, N\rangle \end{aligned}$$

dir. I' nun Lorentz metriği olması için gerek ve yeter şart $\Delta > 0$ olmasıdır. Eğer $\Delta > 0$ ise bu denklemin iki kökü vardır ve kökler arasında denklem negatif tanımlıdır. Buda Lorentz metriği olması için gerek ve yeter şarttır. Bundan dolayı bir $\overline{M}$ yüzeyinin timelike olması için gerek ve yeter şart yüzeyin normalinin spacelike vektör alanı olmasıdır.

Tanım 1.10.2: (Timelike Yüzey): $\mathbb{R}^3_1$, 3- boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey $\overline{M}$ olsun. $\overline{M}$ yüzeyinin teğet vektörleri hem spacelike hem timelike ise bu yüzeye **timelike yüzey** denir.

Tanım 1.10.3: M yüzeyi $\varphi(u, v)$ immersiyonuyla verilen timelike bir yüzey olsun. O zaman (u, v) null koordinat sistemi vardır yani,

$$\langle \varphi_u, \varphi_u\rangle = 0 \ , \ \langle \varphi_v, \varphi_v\rangle = 0 \ , \ \langle \varphi_u, \varphi_v\rangle \neq 0$$

dır. Buradan da yüzeyin birinci temel formu

$$I = e^w du dv$$

şekildedir. (x, y) lokal koordinat sistemini

$$x = \frac{u - v}{2} \ , \ y = \frac{u + v}{2}$$

şeklinde tanımlayalım, o zaman birinci esas form

$$I = e^w(-dx^2 + dy^2)$$

dır. Burada (x, y) lokal koordinat sistemine **lorentz izotermal koordinat sistemi** denir.

Tanım. 1.10.4: Tanım 1.9.3 ve 1.9.4 deki gibi timelike yüzeyin Gauss ve ortalama eğriliği tanımlanır. Ancak yüzey timelike olduğundan

$$\varepsilon = \langle N, N \rangle = 1$$

olarak alınır.

Bölüm 2

MİNİMAL YÜZEYLER VE MİNİMAL REGLE YÜZEYLER

Minimal yüzeyler teorisi hakkında ilk çalışma Langrange tarafından 1762 yılında yapılmıştır. Lagrange ilk olarak $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ açık aralığındaki yüzeyler arasında bulunabilecek en küçük alanlı yüzeyi araştırmakla işe başlamıştır.

Meusnier 1776 yılında minimal grafik denklemine geometrik bir yorum yaparak, yüzeyin $H = 0$ olduğu zaman yüzeyin en küçük alana sahip olduğunu açıklamıştır. Bu tanımlamadan sonra geleneksel olarak $H = 0$ eşitliğini sağlayan yüzeylere minimal yüzeyler denilmiştir. Bununla birlikte $H = 0$ şartını sağlayan bazı minimal yüzeyler minimum alana sahip olmayabilir.

Ondokuzuncu yüzyıl boyunca bu konuyla ilgili daha fazla çalışma yapılmıştır, Catalan, Bonnet, Serret, Riemann, Weierstrass, Enneper ve daha bir çok matematikçi bu konuda çalışmalarda bulunmuştur. Modern teori bakımından incelendiğinde Weierstrass ve Enneper'in incelemeleri çok önemlidir. Minimal yüzeyin Weierstrass Enneper gösterimi minimal yüzeyler için önemlidir.

Çünkü minimal yüzeyler ve kompleks analiz arasında bağlantı kurmuştur.

Ondokuzuncu yüzyılın ortalarına doğru Plateau minimal yüzeylerin fiziksel olarak sabun film olarak incelenebileceğini farketmiştir. Bu yüzden sabit topoloji ve jordan eğrileri ile sınırlanmış minimal yüzey tanımlama problemine **Plateau Problemi** denir.

Bu bölümde çalışmaya esas olan tanım ve teoremler referans gösterilmemiş olanlar hariç, (Sınpo, 2004) kaynağından alınmıştır.

2.1 Minimal Yüzeyler

Tanım 2.1.1: Bir $S(u,v)$ parametrizasyonu ile verilen bir **yüzeyin alanı**

$$A(S) = \int \|S_u \Lambda S_v\| \, dudv = \int \sqrt{EG - F^2} dudv$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.2: Eğriliği özdeş olarak sıfır olan yüzeylere, Plateau minimum probleminin çözümleri olarak göz önüne alınmaları itibariyle **minimal yüzeyler** denir (Blaschke, 1949).

Yüzeyin teğet varyasyonu yüzeyin parametrizasyonunu değiştirir fakat yüzey alanı kalır. Genel olarak parametrizasyon değişimi yüzey alanını değiştirmez. Bu yüzden yüzeyin normal varyasyonunu kullanalım. $x(u,v)$ başlangıç yüzeyi ve normali $n(u,v)$ olsun. Bu yüzeyin normali üzerinde

$$n(u,v) = \varepsilon \bar{n}(u,v)$$

uzunluklarını alalım. $\bar{n}(u,v)$ komşu yüzeyin normali olmak üzere

$$\bar{x} = x(u,v) + n\varepsilon$$

denklemi yüzeyin bir komşu yüzeyidir. O halde

$$\begin{aligned} \overline{E} &= \overline{x}_u^2 \\ \overline{F} &= \overline{x}_u \wedge \overline{x}_v \\ \overline{G} &= \overline{x}_v^2 \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikler kullanılarak,

$$\begin{aligned} \overline{E} &= E - 2nL \\ \overline{F} &= F - 2nM \\ \overline{G} &= G - 2nN \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} \overline{W}^2 &= \overline{EG} - \overline{F}^2 \\ &= EG - F^2 - 2n(EN - 2FM + GL) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\overline{W} = W + (1 - 2nH)$$

dir. Burada H ortalama eğriliği göstermektedir.

$\bar{x}$ yüzeyinin alanı için,

$$\int\int \overline{W} dudv = \int\int W \ dudv - 2\int\int nH \ dudv$$

elde edilir.

n yerine δn yazılırsa yüzey alanının birinci varyasyonu

$$\delta O = -\int \delta n \ 2H \ do$$

şeklindedir. Bu ifadede do, $\overrightarrow{\bar{x}}$ 'in yüzey elemanıdır (Blaschke, 1949).

Plateau problemi, kapalı bir eğri verilmiş olsun. Bu eğriyi alanı mümkün olduğu kadar küçük bir yüzeyle germek istiyoruz. Eğer böyle bir yüzey varsa, bu takdirde sınır çizgisi üzerinde sıfır olan her δn için , daima δO olmalıdır.

Buradan aranılan yüzey üzerinde $H = 0$ bağıntısının bulunması gerektiği anlaşılır.

Tanım 2.1.3: $x(u, v)$ parametrizasyonuyla verilen bir M yüzeyi için,

$$U = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|}$$

birim vektör alanıdır. $p \in M$ için

$$S : T_pM \to T_pM$$

$$x_p \to S(x_p)$$

şeklinde tanımlı fonksiyona yüzeyin **şekil operatörü** denir.

$$II(x_p, y_p) = \langle S(x_p), y_p \rangle$$

eşitliğine ise yüzeyin **ikinci esas formu** denir.

$$S(x) = -\frac{dU}{\|x_p\|}$$

ve

$$y = dx$$

alalım. O zaman yüzeyin ikinci esas formu

$$II(x_p, y_p) = -\langle dU, dx \rangle$$

şeklindedir. Ayrıca $dx \perp U$ olduğundan

$$\langle U, dx \rangle = 0$$

dır. Bu denklemin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$\langle dU, dx \rangle + \left\langle U, d^2x \right\rangle = 0$$

elde edilir. Buradan da

$$\left\langle U, d^2x \right\rangle = -\langle dU, dx \rangle \tag{2.1}$$

bulunur. x'in tam diferensiyeli

$$dx = x_u du + x_v dv$$

olmak üzere

$$d^2x = x_{uu} d^2u + 2x_u x_v du dv + x_{vv} d^2v$$

dır. O halde

$$\left\langle U, d^2x \right\rangle = \langle U, x_{uu} \rangle d^2u + 2 \langle U, x_u x_v \rangle du dv + \langle U, x_{vv} \rangle d^2v \tag{2.2}$$

elde edilir. Bu denklemde

$$\begin{aligned} L &= \langle U, x_{uu} \rangle \\ M &= \langle U, x_{uv} \rangle \\ N &= \langle U, x_{vv} \rangle \end{aligned}$$

dır. O halde (2.2) denklemi

$$\left\langle U, d^2x \right\rangle = Ld^2u + 2M du dv + Nd^2v$$

şeklinde yazılabilir. U yüzeyin normalinin tam diferensiyeli

$$dU = U_u du + U_v dv$$

dır. O halde

$$\langle dU, dx \rangle = \langle U_u du + U_v dv, x_u du + x_v dv \rangle$$

dir. Buradan da

$$\langle dU, dx \rangle = \langle U_u, x_u \rangle d^2u + \langle U_v, x_u \rangle du dv + \langle U_u, x_v \rangle du dv + \langle U_v, x_v \rangle d^2v \tag{2.3}$$

elde edilir. (2.1) denkleminde (2.2) ve (2.3) eşitliklerini yerine yazalım,

$$\begin{aligned} L &= \langle U, x_{uu} \rangle &&= -\langle U_u, x_u \rangle \\ M &= \langle U, x_{uv} \rangle &&= -\langle U_v, x_u \rangle du dv + \langle U_u, x_v \rangle du dv \\ N &= \langle U, x_{vv} \rangle &&= -\langle U_v, x_v \rangle \end{aligned} \tag{2.4}$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} E &= \langle x_u, x_u \rangle \\ F &= \langle x_u, x_v \rangle \\ G &= \langle x_v, x_v \rangle \end{aligned}$$

olmak üzere $\{v, w\}$ T_pM nin bir bazı olsun. O zaman

$$S(v) = av + bw \ , \ S(w) = cv + dw$$

şeklinde yazabiliriz.

$$\begin{aligned} S(v) \wedge S(w) &= (av + bw) \wedge (cv + dw) \\ &= (ad - bc)(v \wedge w) \\ &= \det(S)(v \wedge w) \end{aligned}$$

dir.

$$S(v) \wedge S(w) = K(v \wedge w)$$

eşitliğinin her iki tarafını $u \wedge w$ ile çarparsak,

$$\langle S(v) \wedge S(w), v \wedge w \rangle = K \langle v \wedge w, v \wedge w \rangle$$

elde edilir. Lagrange özdeşliğinden dolayı

$$\langle S(v), v \rangle \langle S(w), w \rangle - \langle S(v), w \rangle \langle S(w), v \rangle = K \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle w, v \rangle \langle v, w \rangle \tag{2.5}$$

dir. Şekil operatörü self-adjoint olduğundan

$$\langle S(v), w \rangle = \langle S(w), v \rangle$$

yazılır ve

$$v = x_u \ , \ w = x_v$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} L &= \langle S(v), v\rangle \quad E = \langle v, v\rangle \\ N &= \langle S(w), w\rangle \quad G = \langle w.w\rangle \\ M &= \langle S(w), v\rangle \quad F = \langle w, v\rangle \end{aligned}$$

eşitliklerini (2.5) denkleminde yerine yazarsak,

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \tag{2.6}$$

bulunur ve bu ifadeye yüzeyin **Gauss eğriliği** denir. Ayrıca k_1 ve k_2 yüzeyin esas eğrilikleri olmak üzere

$$K = k_1 k_2 \tag{2.7}$$

dir. Benzer yolla

$$\begin{aligned} S(v) \wedge w + v \wedge S(w) &= (av + bw) \wedge w + v \wedge (cv + dw) \\ &= (a + d)v \wedge w \\ &= iz(S)v \wedge w \end{aligned}$$

dir. Buradan da

$$S(v) \wedge w + v \wedge S(w) = 2Hv \wedge w$$

eşitliğinin her iki tarafını $u \wedge w$ ile çarparsak,

$$\langle S(v) \wedge w + v \wedge S(w), v \wedge w\rangle = 2H \langle v \wedge w, v \wedge w\rangle \tag{2.8}$$

dır. Lagrange özdeşliğinden dolayı

$$\begin{aligned} [S(v) \wedge w + v \wedge S(w)] (v \wedge w) &= \langle S(v), v\rangle \langle w, w\rangle - \langle S(v), w\rangle \langle w, v\rangle + \\ &\quad \langle v, v\rangle \langle S(w), w\rangle - \langle v, w\rangle \langle S(w), v\rangle \\ &= GL - FM + EN - FM \end{aligned}$$

elde edilir. (2.8) eşitliğini kullanarak,

$$2H(v \wedge w)(v \wedge w) = EN - 2FM + GL$$

elde edilir. Buradan da

$$2H = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} \tag{2.9}$$

olur. Bu ifadeye de yüzeyin **ortalama eğriliği** denir. Ayrıca k_1 ve k_2 yüzeyin esas eğrilikleri olmak üzere

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} \tag{2.10}$$

dır.

Tanım 2.1.4: Minimal yüzeyler, doğuranları izotrop eğriler olan kayma yüzeylerdir (Blaschke, 1949).

Bir yüzey üzerinde $ds^2 = 0$ bağıntısını sağlayan iki izotrop eğri ailesini, parametre çizgileri olarak alalım. O halde

$$E = 0 \ , \ F \neq 0 \ , \ G = 0$$

dır. Bu değerleri (2.9) eşitliğinde yerine yazarsak,

$$H = \frac{M}{F}$$

elde edilir. Buradan da

$H = 0$ için $M = 0$ elde edilir. Yani

$$M = \frac{\langle \varepsilon, x_{uv} \rangle}{\| \langle \varepsilon, \varepsilon \rangle \|} = 0$$

dir. Burada ε yüzeyin normal vektörüdür.Ayrıca

$$E = \langle x_u, x_u \rangle = 0$$

eşitliğinde v ye göre türev alırsak,

$$\langle x_{uv}, x_u \rangle = 0$$

dır. Aynı şekilde

$$G = \langle x_v, x_v \rangle = 0$$

eşitliğinde u ya göre türev alırsak,

$$\langle x_{uv}, x_v \rangle = 0$$

eşitliği elde edilir. O halde x_{uv} vektörü aynı zamanda

$$\begin{aligned} \langle x_{\,uv}, x_u \rangle &= 0 \\ \langle x_{uv}, x_v \rangle &= 0 \\ \langle \varepsilon, x_{uv} \rangle &= 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

eşitliklerinide sağlar.

x_u, x_v, ε vektörleri kendi aralarında lineer bağımlı olmadığından dolayı, (2.11) eşitliklerinden yararlanılarak x_{uv} nin özdeş olarak sıfır olması gerektiği görülür. Böylece

$$2x = y(u) + z(v) \tag{2.12}$$

denklemi elde edilir.

$E = G = 0$ olması durumunda

$$(y')^2 = 0 \ , \ (z')^2 = 0 \tag{2.13}$$

bulunur.

Teorem 2.1.1: Minimal yüzeyin Gauss eğriliği her zaman negatiftir.

İspat M minimal yüzeyimizin esas eğrilikleri k_1 ve k_2 olsun. O zaman (2.10) eşitliğinden dolayı

$$\frac{k_1 + k_2}{2} = 0$$

dır. Buradan da

$$k_1 = -k_2$$

bulunur. Bu eşitliği (2.7) denkleminde yerine yazarsak,

$$K = -k_1^2$$

bulunur. k_1^2 ifadesi tam kare olduğundan her zaman pozitiftir. O halde K yüzeyin gauss eğriliği her zaman negatiftir.

Teorem 2.1.2: M bir minimal yüzey olsun, $x(u,v) = (u, v, f(u,v))$ parametrizasyonu ile verilen M yüzeyinin minimal yüzey olması için gerek ve yeter şart

$$(1 + f_u^2) f_{vv} - 2 f_u f_v f_{uv} + (1 + f_v^2) f_{\mathrm{u}u} = 0$$

olmasıdır.

İspat: $x(u,v) = (u, v, f(u,v))$ parametrizasyonu ile verilen minimal yüzeyin kismi türevleri,

$$\begin{aligned} x_u &= (1, 0, f_u) \\ x_v &= (0, 1, f_v) \\ x_{\mathrm{u}u} &= (0, 0, f_{\mathrm{u}u}) \\ x_{uv} &= (0, 0, f_{uv}) \\ x_{vv} &= (0, 0, f_{vv}) \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu eşitlikler kullanılarak,

$$\begin{aligned} E &= 1 + f_u^2 \\ F &= f_u f_v \\ G &= 1 + f_v^2 \end{aligned}$$

bulunur. Minimal yüzeyin birim normali

$$U = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} x_u \wedge x_v &= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{bmatrix} \\ &= (-f_u, -f_v, 1) \end{aligned}$$

dir. Bu vektörün normu

$$\|x_u \wedge x_v\| = \sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}$$

olduğundan

$$U = \left(-\frac{f_u}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}, -\frac{f_v}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}} \right)$$

şeklinde yüzeyin birim normali bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} L &= \langle U, x_{\,uu} \rangle \\ &= \frac{f_{\,uu}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= \langle U, x_{uv} \rangle \\ &= \frac{f_{uv}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} N &= \langle U, x_{vv} \rangle \\ &= \frac{f_{vv}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}} \end{aligned}$$

elde edilir. M minimal yüzey olduğundan (2.9) eşitliğinden dolayı

$$EL - 2FM + GN = 0$$

dır. Bulduğumuz E, F, M, G, N, L değerlerini yerlerine yazarsak,

$$(1 + f_u^2) f_{vv} - 2 f_u f_v f_{uv} + (1 + f_v^2) f_{\,uu} = 0$$

bulunur.

Tanım 2.1.5: $\phi(x, y)$ reel değerli fonksiyonu eğer ikinci türevi sürekli ve tanım kümesindeki her nokta Laplace denklemini sağlıyorsa ϕ'ye **harmonik fonksiyon** denir.

Tanım 2.1.6: $\psi(u,v)$ nin gradienti

$$grad\psi = \bigtriangledown\psi = \frac{d\psi}{du} + \frac{d\psi}{dv}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.1.7: Bir $\psi(u,v)$ fonksiyonu için $\bigtriangledown^2\psi'$ye, $\psi(u,v)'$nin **laplasyanı** denir.

$$\bigtriangledown^2\psi = \bigtriangledown(\bigtriangledown\psi) = \frac{d^2\psi}{du^2} + \frac{d^2\psi}{dv^2}$$

denklemiyle verilir.

Tanım 2.1.8: Eğer $\psi(u,v)$ fonksiyonunun laplasyani sıfır yani $\bigtriangledown^2\psi = 0$ ise bu fonksiyona **harmonik fonksiyon** denir. Kısalık için $\bigtriangledown^2\psi$ yerine $\Delta\psi$ notasyonu kullanılır.

Teorem 2.1.3: $F(z) = u(x,y)+iv(x,y)$, $z = x+iy$ eğer kompleks analitik ise o zaman her bir $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ harmonik fonksiyondur.

Tanım 2.1.9: Bir $x(u,v)$ parametrizasyonu için eğer $E = G$ ve $F = 0$ ise x'e **izotermal** denir.

Teorem 2.1.4: x izotermal ise

$$\Delta x = x_{uu} + x_{vv} = 2EHU \tag{2.14}$$

dır.

İspat:

Yüzeyin ortalama eğrilik denklemi olan (2.9) denkleminde x izotermal olduğundan $E = G$ ve $F = 0$ olarak alırsak,

$$\begin{aligned} 2H &= \frac{EN + EL}{E^2} \\ &= \frac{N + L}{E} \end{aligned}$$

bulunur. Burada N ve L katsayıları yerine yazılırsa,

$$2H = \frac{\langle U, x_{uu}\rangle + \langle U, x_{vv}\rangle}{E}$$

dir. Buradan da

$$2HE = \langle U, x_{uu} + x_{vv} \rangle$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\Delta x = x_{uu} + x_{vv} = 2EHU$$

denklemi elde edilir. Böylece ispatı tamamlamış oluruz.

Teorem 2.1.5: $x(u, v)$ izotermal koordinatlarla verilen bir M yüzeyinin minimal yüzey olması için gerek ve yeter şart

$$\Delta x = x_{uu} + x_{vv} = 0 \tag{2.15}$$

eşitliğini sağlamasıdır.

İspat:

M yüzeyi minimal yüzey olduğundan $H = 0$ dır. Bu değeri (2.14) eşitliğinde yerine yazalım

$$\Delta x = x_{uu} + x_{vv} = 0$$

ifadesi elde edilir.

Tersine olarak da, izotermal koordinatlarla verilen yüzey

$$\Delta x = x_{uu} + x_{vv} = 0$$

eşitliğini sağlar ise minimal yüzey olduğunu göstereceğiz. (2.14) ve (2.15) eşitliklerinden dolayı

$$\Delta x = x_{uu} + x_{vv} = 2EHU = 0$$

dır. O halde

$$2EHU = 0$$

dır. Bu eşitlikte $U \neq 0$ dir. Çünkü U yüzeyin birim normalidir, $U = 0$ olursa yüzey tanımsız olur. Ve $E = 0$ olamaz çünkü izotermal koordinatlar

kullanıldığından $E = G$ dir, $E = 0$ olursa $G = 0$ olur. O zaman yüzeyin birinci esas formunun katsayıları olan E, F, G hepsi aynı anda sıfır olur. Bu durumda ise yüzey tanımsız olacaktır. Bundan dolayı bu eşitlikte sadece $H = 0$ olmak zorundadır.

2.2 Minimal Yüzeylerde E.Study Formülleri

$x(u, v)$ minimal yüzeyini Tanım 2.1.4 den dolayı

$$2x(u, v) = y(u) + z(v)$$

$$(y')^2 = (z')^2 = 0 \tag{2.16}$$

$y(u)$ ve $z(v)$ minimal eğrilerinin toplamı şeklinde yazabiliriz. u, v parametreleri yerine p, q doğal (standart) parametrelerini kullanalım. $y(u)$ ve $z(v)$ yer vektörleri

$$\begin{aligned} y' \wedge y'' &= -y' \\ z' \wedge z'' &= -z' \end{aligned} \tag{2.17}$$

ve

$$(y'')^2 = (z'')^2 = -1 \tag{2.18}$$

eşitliklerini sağlar (Blaschke, 1949).

$x(u, v)$ yüzeyinin birim normalini

$$\varepsilon = \frac{x_p \wedge x_q}{\|x_p \wedge x_q\|}$$

şeklinde tanımlayalım. O halde

$$\begin{aligned} \|x_p \wedge x_q\| &= \sqrt{\langle x_p \wedge x_q, x_p \wedge x_q \rangle} \\ &= \sqrt{x_p^2 x_q^2 - \langle x_p, x_q \rangle^2} \end{aligned}$$

(2.16) eşitliğinden dolayı

$$\begin{aligned} \|x_p \wedge x_q\| &= \sqrt{-\langle x_p, x_q \rangle^2} \\ &= ix_p x_q \end{aligned}$$

dır.

$$x_p = y' \ , \ x_q = z'$$

olarak alınırsa yüzeyin birim normali,

$$\varepsilon = \frac{y' \wedge z'}{iy'z'}$$

şeklindedir.

$$\varepsilon_p = ay' + bz', \quad a, b \in \mathbb{R} \tag{2.19}$$

olmak üzere yazılabilir. Ayrıca

$$\varepsilon z' = 0$$

denklemin her iki tarafının p'ye göre türevini alırsak,

$$(\varepsilon z')' = \varepsilon_p z' = 0 \tag{2.20}$$

bulunur. z' nün p'ye göre türevi sıfırdır.

(2.19) denkleminin her iki tarafını z' ile carpılırsa

$$\varepsilon_p z' = ay'z' + bz'^2$$

bulunur. Buradan da (2.16) denkleminden dolayı

$$\varepsilon_p z' = ay'z'$$

olur. O halde (2.20) yardımıyla

$$\varepsilon_p z' = ay'z' = 0$$

eşitliği elde edilir. Buradan da

$$a = 0$$

dır. Şimdi de

$$\varepsilon y' = 0$$

denkleminin her iki tarafında p'ye göre türev alırsak,

$$\varepsilon_p y' + \varepsilon y'' = 0$$

elde edilir. Buradan da

$$\varepsilon_p y' = -\varepsilon y''$$

olacağından

$$\varepsilon_p = -\frac{\langle \varepsilon, y'' \rangle}{y'} \tag{2.21}$$

dır. (2.19) denklemini y' ile çarparsak,

$$\varepsilon_p y' = a y' y' + b z' y'$$

bulunur. Buradan da (2.16) denkleminden dolayı

$$\varepsilon_p y' = b z' y'$$

dır. O halde

$$b = \frac{\varepsilon_p y'}{z' y'}$$

bulunur. (2.21) ifadesinde ε değerini yerine yazalım

$$\begin{aligned} \varepsilon_p &= -i\frac{(y' \wedge z')y''}{(y'z')y'} \\ &= i\frac{[y'y''z']}{(y'z')y'} \end{aligned}$$

elde edilir. (2.17) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned} \varepsilon_p &= -i\frac{y'z'}{(y'z')y'} \\ &= -i\frac{z'}{\langle y', z' \rangle} \end{aligned}$$

bulunur. Benzer olarak ε_q da

$$\varepsilon_q = i\frac{y'}{\langle y', z'\rangle}$$

şeklinde elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} d\varepsilon &= \varepsilon_p dp + \varepsilon_q dq \\ &= (-i\frac{z'}{\langle y', z'\rangle}dp - \frac{y'}{\langle y', z'\rangle}dq) \end{aligned} \tag{2.22}$$

ve

$$\begin{aligned} \varepsilon_p\varepsilon_q &= -i^2\frac{y'z'}{(y'z')^2} \\ &= \frac{1}{\langle y', z'\rangle} \end{aligned}$$

elde edilir.

Minimal yüzeyler üzerinde p, q parametreleri yanında, iki parametre çifti daha kullanılacaktır.

$$\begin{aligned} p &= u + iv &= \frac{\alpha + i\beta}{1+i} \\ q &= u - iv &= \frac{\alpha - i\beta}{1-i} \\ u &= \frac{p+q}{2} &= \frac{\alpha+\beta}{2} \\ v &= \frac{p-q}{2} &= \frac{\alpha-\beta}{2} \\ \alpha &= u - v &= \frac{p - iq}{1-i} \\ \beta &= u + v &= \frac{p + iq}{1+i} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\frac{2}{y'z'} = 2\varepsilon_p\varepsilon_q = \lambda \tag{2.23}$$

olsun. O halde

$$\frac{dpdq}{\lambda} = \frac{du^2 + dv^2}{\lambda} = \frac{d\alpha^2 + d\beta^2}{2\lambda}$$

kısmi diferensiyel denklemi ve (2.22) eşitliğinden dolayı da

$$d\varepsilon = -i\frac{\lambda}{2}(z'dp - y'dq)$$

elde edilir.

$$2x(p,q) = y(p) + z(q)$$

x'nin tam diferensiyeli alınırsa,

$$dx = \frac{1}{2}(y'dp + z'dq)$$

bulunur. Yüzeyin birinci esas formu

$$\begin{aligned} I &= \langle dx, dx\rangle \\ &= \frac{1}{4}\langle y'dp + z'dq, y'dp + z'dq\rangle \\ &= \frac{1}{4}\left[\langle y'y'\rangle dp^2 + 2\langle z', y'\rangle dqdp + \langle z, z'\rangle dq^2\right] \end{aligned}$$

dır. Buradan da (2.16) ve (2.23) eşitlikleri yardımıyla

$$I = \frac{1}{2}\langle z', y'\rangle dpdq = \frac{dpdq}{\lambda}$$

elde edilir. Yüzeyin ikinci esas formu

$$\begin{aligned} II &= -\langle d\varepsilon, dx\rangle \\ &= \frac{i}{2}(dp^2 - dq^2) = -2dudv = \frac{1}{2}(d\alpha^2 - d\beta^2) \end{aligned}$$

dır. Yüzeyin üçüncü esas formu ise

$$III = \langle d\varepsilon, d\varepsilon\rangle = \lambda dpdq = \lambda(du^2 + dv^2) = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2)$$

dır. M minimal yüzey olduğundan

$$III - 2HII + KI = 0$$

eşitliğinde $H = 0$ yazarsak,

$$K = -\frac{III}{I}$$

elde edilir.

$$\frac{III}{I} = \frac{\lambda dpdq}{\frac{dpdq}{\lambda}} = \lambda^2 = (\frac{2}{y'z'})^2$$

dır. Buradan da minimal yüzeyin Gauss eğriliği

$$K = -(\frac{2}{y'z'})^2$$

şeklinde bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} K &= -k_1^2 \\ &= -(\frac{2}{y'z'})^2 \end{aligned}$$

olduğundan dolayı yüzeyin esas eğrilikleri

$$k_1 = -(\frac{2}{y'z'}) \ , \ k_2 = (\frac{2}{y'z'})$$

elde edilir. İkinci esas formun sıfır olduğu yerler asimptotik çizgilerin diferensiyel denklemini verdiği için

$$II = -2dudv = 0$$

dır. Buradan da

$$dudv = 0$$

bulunur. Burada $du = 0$ veya $dv = 0$ dır. Eğer $du = 0$ ise u sabit veya $dv = 0$ ise de v sabit bulunur.

2.3 Weierstrass-Enneper Gösterimi

M yüzeyi $x(u, v)$ parametrizasyonuyla tanımlı bir minimal yüzey olsun.

$$z = u + iv$$

için,

$$u = \frac{z+\overline{z}}{2} \ , \ v = -i\frac{z-\overline{z}}{2}$$

bulunur. Ayrıca

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v})$$

olarak tanımlayalım. O zaman M yüzey denklemi

$$x(z,\overline{z}) = \left[x^1(z,\overline{z}), x^2(z,\overline{z}), x^3(z,\overline{z})\right]$$

şeklinde yazabiliriz. ϕ kompleks fonksiyonunu

$$\begin{aligned} x_z^1 &= \frac{1}{2}(x_u^1 - ix_v^1) \\ x_z^2 &= \frac{1}{2}(x_u^2 - ix_v^2) \\ x_z^3 &= \frac{1}{2}(x_u^3 - ix_v^3) \end{aligned}$$

eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\partial x}{\partial z} \\ &= (x_z^1, x_z^2, x_z^3) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlayalım. O halde

$$\begin{aligned} (x_z^1)^2 &= \frac{1}{4}\left[(x_u^1)^2 - (x_v^1)^2 - 2ix_u^1 x_v^1\right] \\ (x_z^2)^2 &= \frac{1}{4}\left[(x_u^2)^2 - (x_v^2)^2 - 2ix_u^2 x_v^2\right] \\ (x_z^3)^2 &= \frac{1}{4}\left[(x_u^3)^2 - (x_v^3)^2 - 2ix_u^3 x_v^3\right] \end{aligned}$$

olur. Buradan da

$$\begin{aligned}\phi^2 &= (x_z^1)^2 + (x_z^2)^2 + (x_z^3)^2 \\ &= \frac{1}{4}(|x_u|^2 - |x_v|^2 - 2ix_u x_v) \\ &= \frac{1}{4}(E - G - 2iF)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte $\phi^2 = 0$ olması için $x(z, \overline{z})$ parametrik denkleminin izotermal olması gerektiği görülür.

Tanım 2.3.1: $\mathbb{C}$ kompleks sayılar düzlemi olmak üzere $U \subset \mathbb{C}$ de açık olsun. Eğer $z_0 \in U$ için f kompleks fonksiyonunun

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti tanımlı ise z_0 noktasında **kompleks diferansiyellenebilir** denir.

Tanım 2.3.2: Eğer f fonksiyonu her $U \subset \mathbb{C}$ için kompleks diferansiyellenebilir ise f fonksiyonuna U açık kümesi üzerinde **holomorfik** fonksiyon denir.

Tanım 2.3.3: Eğer g fonksiyonu iki holomorfik fonksiyonun bölümü şeklinde yazılabiliyorsa g ye **meromorfik** fonksiyon denir.

Teorem 2.3.1: M yüzeyi x izotermal parametrizasyonuyla verilen bir yüzey olsun. M minimal yüzey olması için gerek ve yeter şart ϕ^i nin holomorfik olmasıdır.

İspat:

M minimal yüzey olsun. Ayrıca

$$\frac{\partial \phi}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(\frac{\partial x}{\partial z})$$

dır. O halde

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v})$$

türev operatörüne göre türev alırsak,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial\overline{z}} &= \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial u}+i\frac{\partial}{\partial v})\frac{1}{2}(x_u - ix_v)\\ &= \frac{1}{4}(x_{\,uu} - ix_{vu} + ix_{vu} + x_{vv})\\ &= \frac{1}{4}(x_{\,uu} + x_{vv})\\ &= \frac{1}{4}\triangle x\\ &= 0\end{aligned}$$

dır. O halde

$$\phi^i = \frac{\partial x}{\partial z}$$

holomorfik tir. Tersine ise ϕ^i holomorfik oldugundan x^i harmoniktir. Teorem 2.1.14 den dolayı M yüzeyi minimaldir.

Teorem 2.3.2:

$$x^i(z,\overline{z}) = c_i + 2\,\mathrm{Re}\int \phi^i dz$$

dır.

İspat:

$$\begin{aligned}z &= u+iv\\ \overline{z} &= u-iv\end{aligned}$$

olduğundan dolayı

$$\begin{aligned}dz &= du+idv\\ d\overline{z} &= du-idv\end{aligned}$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned}\phi^i dz &= \frac{1}{2}(x^i_u - x^i_v)(du+idv)\\ &= \frac{1}{2}(x^i_u du + x^i_v dv) + i(x^i_u dv - x^i_v du)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\overline{\phi}^i d\overline{z} &= \frac{1}{2}(x^i_u + x^i_v)(du-idv)\\ &= \frac{1}{2}(x^i_u du + x^i_v dv) - i(x^i_u dv - x^i_v du)\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. O halde

$$\phi^i dz + \overline{\phi}^i d\overline{z} = x^i_u du + x^i_v dv = dx^i$$

elde edilir. Buradan da

$$dx^i = 2\,\mathrm{Re}\,\phi^i dz$$

dır.

$$dx^i = 2\,\mathrm{Re}\int \phi^i dz + c_i, \quad c_i = sabit$$

bulunur.

f holomorfik ve g meromorfik fonksiyonlarını söyle tanımlayalım.

$$f = \phi^1 - i\phi^2 \ , \ g = \frac{\phi^3}{\phi^1 - i\phi^2}$$

Buradan da

$$\phi^3 = fg$$

dır. M minimal olduğundan

$$(\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 + (\phi^3)^2 = 0$$

dır. O halde

$$(\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 = -(\phi^3)^2$$

elde edilir. f ve h fonksiyonlarını

$$\begin{aligned} h &= \phi^1 + i\phi^2 \\ f &= \phi^1 - i\phi^2 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman

$$\phi^1 = \frac{f+h}{2} \tag{2.24}$$

ve

$$\begin{aligned} \phi^2 &= \frac{h-f}{2i} \\ &= i\frac{f-h}{2} \end{aligned} \tag{2.25}$$

eşitlikleri elde edilir.

$$fh = (\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 = -(\phi^3)^2$$

dır. Buradan da

$$fh = -(fg)^2$$

$$h = -fg^2$$

bulunur. Bulduğumuz h değerini (2.24) eşitliğinde yazarsak

$$\begin{aligned} \phi^1 &= \frac{f+h}{2} \\ &= \frac{f-fg^2}{2} \\ &= \frac{f(1-g^2)}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer yolla

$$\begin{aligned} \phi^2 &= i\frac{f-h}{2} \\ &= i\frac{f+fg^2}{2} \\ &= i\frac{f(1+g^2)}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Bunu şu sonuç ile ifade edebiliriz.

Sonuç 2.3.1: f fonksiyonu D tanım kümesinde holomorfik, g fonksiyonu da D tanım kümesinde meromorfik olsun. O zaman bir minimal yüzey

$$\begin{aligned} x^1(z,\overline{z}) &= \operatorname{Re}\int f(1-g^2)dz \\ x^2(z,\overline{z}) &= i\operatorname{Re}\int f(1+g^2)dz \\ x^3(z,\overline{z}) &= \operatorname{Re} 2\int fgdz \end{aligned}$$

eşitlikleri yardımıyla,

$$x(z,\overline{z}) = \left[x^1(z,\overline{z}), x^2(z,\overline{z}), x^3(z,\overline{z})\right]$$

şekilde tanımlanabilir.

Örnek 2.3.1: $(f,g) = (\frac{e^{-z}}{2}, -e^{z})$ Weierstrass-Enneper gösterimi catenoid yüzeyinin parametrik denklemini verir.

Örnek 2.3.2: $(f,g) = (-i\frac{e^{-z}}{2}, -e^{z})$ Weierstrass-Enneper gösterimi helicoid yüzeyinin parametrik denklemini verir.

Örnek 2.3.3: $(f,g) = (z^2, \frac{1}{z^2})$ Weierstrass-Enneper gösterimi richmond yüzeyinin parametrik denklemini verir.

2.4 Minimal Yüzey Örnekleri

Örnek 2.4.1: $x(u,v) = (u, \cosh u \cos v, \cosh u \sin v)$ parametrik denklemi ile verilen yüzeye catenoid denir.

Örnek 2.4.2: $x(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$ parametrik denklemi ile verilen yüzeye helicoid denir. Helicoid minimal yüzey olduğundan $H = 0$ dır. $x(u,v)$ yüzeyinin kısmi türevleri

$$\begin{aligned} x_u &= (\cos v, \sin v, 0) \\ x_v &= (-u\sin v, u\cos v, 1) \\ x_{uu} &= (0,0,0) \\ x_{uv} &= (-\sin v, \cos v, 0) \\ x_{vv} &= (-u\cos v, -u\sin v, 0) \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan da

$$\begin{aligned} E &= \langle x_u, x_u \rangle \\ &= \cos^2 v + \sin^2 v \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \langle x_u, x_v \rangle \\ &= -u \sin v \cos v + u \sin v \cos v \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} G &= \langle x_v, x_v \rangle \\ &= u^2 \cos^2 v + u^2 \sin^2 v + 1 \\ &= u^2 + 1 \end{aligned}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} x_u \wedge x_v &= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & 1 \end{bmatrix} \\ &= (\sin v, -\cos v, u) \end{aligned}$$

olur. Bu vektörün normu

$$\begin{aligned} \|x_u \wedge x_v\| &= \sqrt{\sin^2 v + \cos^2 v + u^2} \\ &= \sqrt{1 + u^2} \end{aligned}$$

yardımıyla yüzeyin birim normal alanı

$$U = (\frac{\sin v}{\sqrt{1+u^2}}, -\frac{\cos v}{\sqrt{1+u^2}}, \frac{u}{\sqrt{1+u^2}})$$

elde edilir. Buradan da

$$L = \langle U, x_{uu} \rangle = 0$$

$$\begin{aligned} M &= \langle U, x_{uv} \rangle \\ &= (-\frac{\sin^2 v}{\sqrt{1+u^2}} - \frac{\cos^2 v}{\sqrt{1+u^2}}) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} N &= \langle U, x_{vv} \rangle \\ &= (-\frac{u \sin v \cos v}{1+u^2} + \frac{u \cos v \sin v}{1+u^2}) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bulduğumuz bu değerleri (2.9) denkleminde yerine yazarsak helicoid için

$$H = 0$$

eşitliği sağlanır.

Helicoid' i incelemeye ileride devam edeceğiz.

Örnek 2.3.3: $x(u,v) = (u - \sin u \cosh v, 1 - \cos u \cosh v, 4 \sin \mathrm{u}/2 \sinh v/2)$ parametrik denklemi ile verilen yüzeye catalan yüzeyi denir.

2.5 Minimal Yüzeyin Paraleli

Tanım 2.4.1: $\mathbb{E}^n$ üzerinde M_1 ve M_2 iki hiperyüzey olsun.

$$N_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

M_1'in birim normali ve $r \in \mathbb{R}$, $\forall p \in M_1$ olmak üzere

$$f(p) = [p_1 + r a_1(p), p_2 + r a_2(p), p_3 + r a_3(p)]$$

şeklinde

$$f : M_1 \longrightarrow M_2$$

fonksiyonu varsa M_2'ye M_1'in **paralel yüzeyi** denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Sonuç 2.4.1: M minimal yüzeyimize paralel olan M_r yüzeyinin asli eğrilikleri k_1' ve k_2' olsun. O zaman

$$\frac{1}{k_1'} + \frac{1}{k_2'} = 2r, \quad r = sabit$$

dır (Hacısalihoğlu, 2000).

İspat:

M' nin şekil operatörü S ve M_r' nin şekil operatörü S_r olsun. O halde

$$S_r(f_*(x_1)) = \frac{k_1}{1+rk_1} f_*(x_1)$$

ve

$$S_r(f_*(x_2)) = \frac{k_2}{1+rk_2} f_*(x_2)$$

dır. Buradan da

$$k_1' = \frac{k_1}{1+rk_1}$$

ve

$$k_2' = \frac{k_2}{1+rk_2}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_1'} + \frac{1}{k_2'} &= \frac{1+rk_1}{k_1} + \frac{1+rk_2}{k_2} \\ &= \frac{k_1 + 2rk_1k_2 + k_2}{k_1k_2} \end{aligned} \tag{2.26}$$

dır. M minimal yüzey olduğundan $H = 0$ dır. O zaman

$$k_1 + k_2 = 0$$

elde edilir. Bu eşitliği (2.26) denkleminde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_1'} + \frac{1}{k_2'} &= \frac{2rk_1k_2}{k_1k_2} \\ &= 2r \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 2.4.2: M minimal yüzeyine paralel olan M_r yüzeyinin ortalama eğriliği H_r, Gauss eğriliği K_r olmak üzere

$$\frac{H_r}{K_r} = r, \quad r = sabit$$

dir.

İspat:

Sonuç 2.4.1 den dolayı

$$\frac{1}{k_1'} + \frac{1}{k_2'} = \frac{k_1' + k_2'}{k_1' k_2'} = 2r \tag{2.27}$$

dir. Paralel olan yüzeyin

$$2H_r = k_1' + k_2' \ , \ K_r = k_1' k_2'$$

gauss ve ortalama eğriliğini (2.27) denkleminde yerine yazarsak,

$$\frac{2H_r}{K_r} = 2r$$

bulunur. Buradan da

$$\frac{H_r}{K_r} = r$$

elde edilir.

2.6 Minimal Regle Yüzeyler

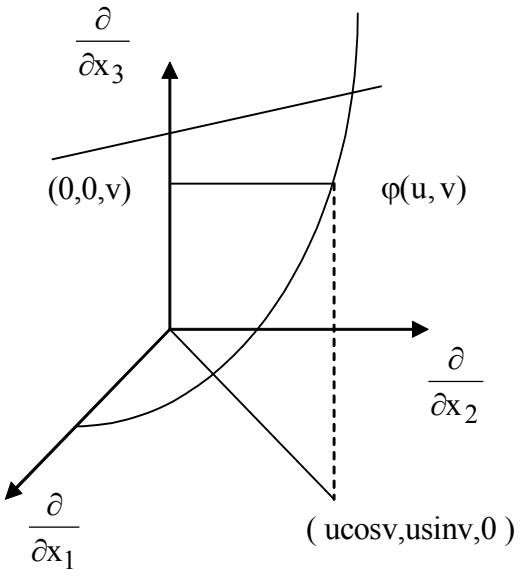
Helicoid 1776 yılında Meusnier tarafından bulunmuştur. Adını helis eğrisine olan benzerliğinden alır. Helicoid yüzeyinin her bir noktasından geçen bir helis vardır. Catalan'a göre helicoid ve düzlem yegane iki minimal regle yüzeydir (1842). Yani helicoid'in her noktasından bir doğru geçer. Ekseni ve kendisi arasındaki alanı minimize eder. Bu yüzden minimal yüzeydir. Şimdi helicoid yüzeyini incelemeye devam edelim.

Tanım 2.5.1: Bir L doğrusu bir A eksenine dik verilsin. $A \cap L$ sabit hızla hareket ederken L doğrusu da sabit hızla döndürülerek hareket etsin. O zaman, L üzerindeki noktaların taradığı yüzeye **helicoid yüzeyi** denir (Hacısalihoğlu, 2000).

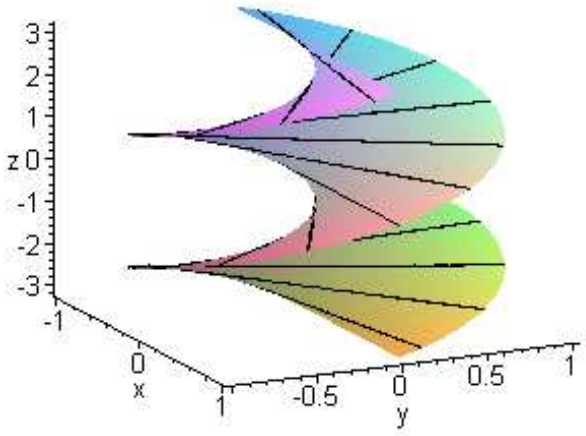
$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{E}^3$$

$$\varphi(u,v) = (ucosv, usinv, v)$$

olmak üzere $(\varphi, \mathbb{R}\times\mathbb{R})$' in bir atlasıdır.



Şekil 2.1



Şekil 2.2

Tanım 2.5.2: Eğer bir yüzey

$$\varphi(u,v) = \alpha(u) + vx(u)$$

$\alpha(u)$ dayanak eğrisi, $x(u)$ doğrultman olacak şekilde yazılabiliyorsa regle yüzeydir.

Sonuç 2.5.1: $x(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$ parametrik denklemiyle verilen helicoid bir regle yüzeydir.

İspat:

$$\begin{aligned} x(u,v) &= (u\cos v, u\sin v, v) \\ &= (0,0,v) + u(\cos v, \sin v, 0) \\ &= \alpha(v) + ux(v) \end{aligned}$$

olduğundan helicoid bir regle yüzeydir.

Şimdi de helicoid yüzeyinin dralini ve boğaz noktasını bulalım.

$$p_x = \frac{\det\left[\dfrac{\partial\alpha}{dv}, x, x'\right]}{\|x'\|^2} \tag{2.28}$$

şeklinde tanımlı denkleme regle yüzeyin **drali** denir.

$$\alpha(v) = (0,0,v)$$

olduğundan

$$\alpha'(v) = (0,0,1)$$

dır. O halde

$$\|\alpha'(v)\| = 1$$

olduğundan birim hızlıdır. Ayrıca

$$x(v) = (\cos v, \sin v, 0)$$

olduğundan

$$x'(v) = (-\sin v, \cos v, 0)$$

dır. Buradan da

$$\begin{aligned} \|x'\|^2 &= \langle x', x' \rangle \\ &= \sin^2 v + \cos^2 v \\ &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \det\left[\frac{\partial \alpha}{dv}, x, x'\right] &= \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -\sin v & \cos v & 0 \end{bmatrix} \\ &= 1 \end{aligned}$$

dır. Bulduğumuz bu değerleri (2.28) denkleminde yerine yazarsak

$$p_x = 1$$

elde ederiz.

$$\overline{\alpha}(v) = \alpha(v) - \frac{\langle D_T X, T \rangle}{\|D_T X\|} x(v) \tag{2.29}$$

denklemi regle yüzeyin **boğaz çizgisinin** diferensiyel denklemidir.

$$\begin{aligned} T &= \frac{d\alpha}{dv} \\ &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \langle D_T X, T \rangle &= \langle X', T \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$\|D_T X\| = 1$$

dır. Bulduğumuz bu değerleri (2.29) denkleminde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}(v) &= \alpha(v) \\ &= (0, 0, v) \end{aligned}$$

helicoid yüzeyinin boğaz çizgisinin yerini buluruz.

Teorem 2.5.1: Helicoid'in K gauss eğriliği için

$$-1 \leq K < 0$$

dır.

İspat: Helicoid için önceden bulduğumuz

$$\begin{aligned} L &= 0 \quad , \quad E = 1 \\ N &= 0 \quad , \quad F = 0 \\ M &= -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \quad , \quad G = u^2 + 1 \end{aligned}$$

değerlerini (2.6) denkleminde yerine yazalım.

$$\begin{aligned} K &= \frac{-\frac{1}{1+u^2}}{1+u^2} \\ &= -\frac{1}{(1+u^2)^2} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$u = 0 \text{ için } K = -1$$

ve

$$u \longmapsto \infty \ , \ K \longmapsto 0$$

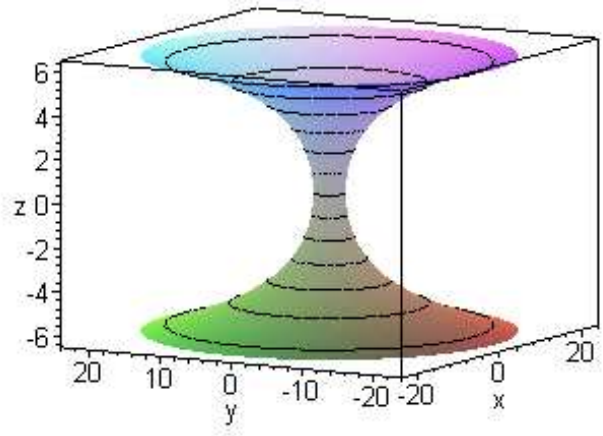
dır. O halde

$$-1 \leq K < 0$$

bulunur.

2.7 Dönel Minimal Yüzeyler

Catenoid Euler tarafından 1740 yılında bulunmuştur ve Plateau tarafından adlandırılmıştır. Catenoid helicoid'le olan benzer özellikleri dolayısıyla ve hatta düzlemle beraber tek minimal dönel yüzey olması bakımından önemlidir. O zaman catenoid yüzeyini daha ayrıntılı olarak incelemeye başlayalım.



Şekil 2.3

Tanım 2.6.1: Eğer bir düzlem eğrisi (3 boyutta) bir doğru boyunca kendi düzleminde döndürülürse bir dönel yüzey çizer. En bilinen örnek ise küredir. Dönel **yüzeyin alanı**

$$dS = 2\pi y ds$$

burada dS yüzeyin alan elementi, ds de eğrinin yay uzunluğudur.

$$S = 2\pi \int y\sqrt{1 + y'^2}$$

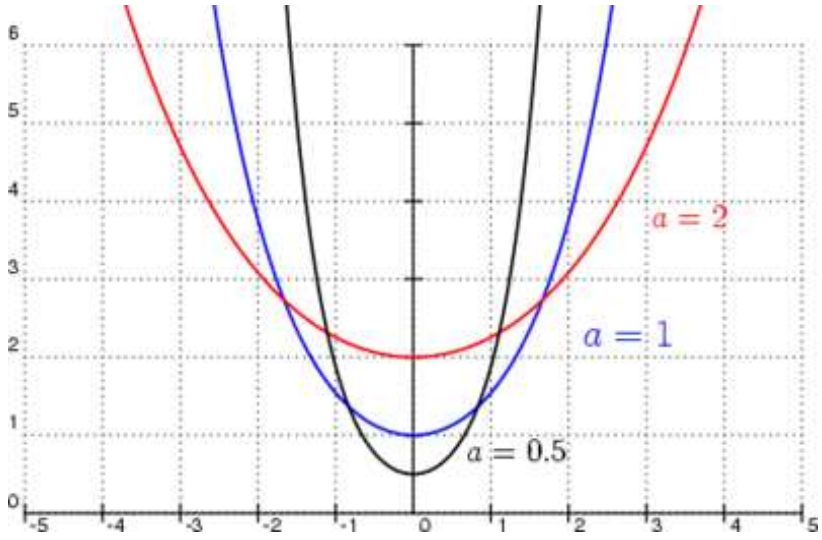
denklemiyle tanımlanır.

Tanım 2.6.2: Catenoid catenary eğrisinin z ekseni boyunca döndürülme-

siyle oluşan dönel bir yüzeyidir. Bir catenary eğrisi

$$y = a \cosh \frac{x}{a}$$

parametrik denklemiyle verilir. Aşağıda a katsayısının değişik değerlerine göre catenary eğrileri gösterilmiştir.



Şekil 2.4

Sonuç 2.6.1: Catenoid bir minimal yüzeydir.

İspat:

Catenoid yüzeyinin minimal yüzey olduğunu göstermek için, $H = 0$ olduğunu göstermemiz gerekmektedir. Catenoid yüzeyinin parametrik denklemi

$$\varphi(u, v) = (u, \cosh u \cos v, \cosh u \sin v) \tag{2.30}$$

şeklindedir. (2.30) denkleminin kısmi türevlerini hesaplarsak,

$$\begin{aligned}
\varphi_u &= (1, \sinh u \cos v, \sinh u \sin v) \\
\varphi_v &= (0, -\cosh u \sin v, \cosh u \cos v) \\
\varphi_{uu} &= (0, \cosh u \cos v, \cosh u \sin v) \\
\varphi_{vv} &= (0, -\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v) \\
\varphi_{uv} &= (0, -\sinh u \sin v, \sinh u \cos v)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan da

$$E = 1 + \sinh^2 u = \cosh^2 u$$

$$F = 0 \tag{2.31}$$

$$G = \cosh^2 u(\sin^2 v + \cos^2 v) = \cosh^2 u$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \varphi_u \wedge \varphi_v &= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & \sinh u \cos v & \sinh u \sin v \\ 0 & -\cosh u \sin v & \cosh u \cos v \end{bmatrix} \\ &= (\sinh u \cosh u, -\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v) \end{aligned}$$

dir. Bu vektörün normu ise

$$\begin{aligned} \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| &= \sqrt{\cosh^2 u \sinh^2 u + \cosh^2 u \cos^2 v + \cosh^2 u \sin^2 v} \\ &= \sqrt{\cosh^2 u \sinh^2 u + \cosh^2 u} \\ &= \cosh^2 v \end{aligned}$$

şeklindedir. O zaman yüzeyin birim normali

$$\begin{aligned} U &= (\frac{\cosh u \sinh u}{\cosh^2 u}, -\frac{\cosh u \cos v}{\cosh^2 u}, -\frac{\cosh u \sin v}{\cosh^2 u}) \\ &= (\frac{\sinh u}{\cosh u}, -\frac{\cos v}{\cosh u}, -\frac{\sin v}{\cosh u}) \end{aligned}$$

dir. Buradan da

$$L = 0 - \cos^2 v - \sin^2 v = -1$$

$$M = \sinh u \sin v \frac{\cos v}{\cosh u} - \sinh u \cos v \frac{\sin v}{\cosh u} = 0$$

ve

$$N = \cos^2 v + \sin^2 v = 1$$

bulunur. Bu değerleri (2.9) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} H &= \frac{-\cosh u + \cosh u}{\cosh^2 u} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. O zaman catenoid bir minimal yüzeydir. Ayrıca catenoid yüzeyi için

$$E = G \ , \ F = 0$$

olduğundan yüzey izotermal koordinatlarla verilmiştir ve ayrıca

$$\begin{aligned} x_{\,uu} + x_{vv} &= (0, \cosh u \cos v, \cosh u \sin v) + (0, -\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v) \\ &= \cosh u \cos v - \cosh u \cos v + \cosh u \sin v - \cosh u \sin v \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan Teorem 2.1.6 gereğince catenoid yüzeyinin minimal yüzey olduğu gösterilmiş olur.

2.8 İzometriler

Tanım 2.7.1: $\mathbb{E}^3$ de iki yüzey M_1 ve M_2 olsun. Bir diferensiyellenebilir.

$$F : M_1 \overset{1:1}{\longmapsto} M_2$$

dönüşümü için

$$\langle F_*(v_p), F_*(u_p) \rangle = \langle v_p, u_p \rangle \tag{2.32}$$

$\forall v_p, u_p \in T_pM_1$ ve $\forall p \in M_1$ ise F ye M_1 yüzeyinden M_2 yüzeyine bir **izometri** denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.7.2: Eğer

$$F : M_1 \overset{1:1}{\longmapsto} M_2$$

bir izometri ise M_1 ve M_2 yüzeylerine izometriktirler denir.

Tanım 2.7.3: $\mathbb{E}^3$ de iki yüzey M_1 ve M_2 olsun. Eğer bir

$$F : M_1 \overset{1:1}{\longmapsto} M_2$$

dönüşümü için iç çarpımları koruyor ise F_* ye **lokal izometri** dir denir.

Teorem 2.7.1: $\mathbb{E}^3$ de iki yüzey M_1 ve M_2 olsun.

$$F : M_1 \overset{1:1}{\longmapsto} M_2$$

bir C^1 dönüşüm

$$X : U \subset E^2 \longrightarrow M_1$$

ve

$$\overline{X} = FoX : U \subset E^2 \longrightarrow M_2$$

birer harita olsun.

F in lokal izometri olması için gerek ve yeter şart

$$E_1 = E_2 \ , \ F_1 = F_2 \ , \ G_1 = G_2 \tag{2.33}$$

dir.

İspat :

F lokal izometri olsun. O zaman

$$\overline{x}_u = F_*(x_u)$$

ve

$$\overline{x}_v = F_*(x_v)$$

şeklinde yazabiliriz. Buna göre iç çarpımı koruyacağından

$$E_2 = \langle F_*(x_u), F_*(x_u) \rangle = \langle x_u, x_u \rangle = E_1$$

$$F_2 = \langle F_*(x_u), F_*(x_v) \rangle = \langle x_u, x_v \rangle = F_1$$

ve

$$G_2 = \langle F_*(x_v), F_*(x_v)\rangle = \langle x_v, x_v\rangle = G_1$$

olur. Tersine,

$$X : U \longrightarrow M$$

haritası için $p \in M_1$ dahil olduğu komşuluk $V = X(U)$ olsun. $\forall x_p, y_p \in T_pM_1$ için,

$$T_pM_1 = S_p\{x_u, x_v\}$$

olduğundan $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned} x_p &= ax_u + bx_v \\ y_p &= cx_u + dx_v \end{aligned}$$

yazılabilir. F in lokal izometri olduğunu göstermek için

$$E_1 = E_2.,.F_1 = F_2.,.G_1 = G_2$$

olduğunda

$$\langle F_*(x_p), F_*(y_p)\rangle = \langle x_p, y_p\rangle$$

olduğunu göstereceğiz.

$$\langle F_*(x_p), F_*(y_p)\rangle = \langle F_*(ax_u + bx_v), F_*(cx_u + dx_v)\rangle$$

dönüşümü lineer olduğundan

$$\begin{aligned} \langle F_*(ax_u + bx_v), F_*(cx_u + dx_v)\rangle &= \langle a\overline{x}_u + b\overline{x}_v, c\overline{x}_u + d\overline{x}_v\rangle \\ &= ac\langle \overline{x}_u, \overline{x}_u\rangle + (ad + ac)\langle \overline{x}_u, \overline{x}_v\rangle + bd\langle \overline{x}_v, \overline{x}_v\rangle \\ &= acE_2 + (ad + ac)F_2 + bdG_2 \end{aligned}$$

dır. Buradan da (2.33) eşitliğinden dolayı

$$\langle F_*(ax_u + bx_v), F_*(cx_u + dx_v)\rangle = acE_1 + (ad + ac)F_1 + bdG_1$$

şeklinde yazabiliriz. O halde

$$\langle x_p, y_p \rangle = ac \langle x_u, x_u \rangle + (ad + ac) \langle x_u, x_v \rangle + bd \langle x_v, x_v \rangle$$

olur. Bu da F nin iç çarpımları koruması dolayısıyla lokal izometri olması demektir.

Teorem 2.7.2: Helicoid ile catenoid yüzeyleri arasında lokal izometri vardır (Kurennoy, 2004).

İspat:

Göstermemiz gereken Teorem 2.7.1 den dolayı her iki yüzeyinde aynı E, F, G değerlerine sahip olduğudur. Ama öncelikle helicoid üzerinde şu parametre değişimini yapalım

$$u = \sinh u \ , \ v = v$$

o zaman helicoid yüzeyi için,

$$\varphi(u, v) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, v) \tag{2.34}$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned} \varphi_u &= (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, 0) \\ \varphi_v &= (-\sinh u \sin v, \sinh u \cos v, 1) \end{aligned}$$

yardımıyla

$$\begin{aligned} E &= \cosh^2 u(\cos^2 v + \sin^2 v) = \cosh^2 u \\ F &= 0 \\ G &= \sinh^2 u(\cos^2 v + \sin^2 v) + 1 = \cosh^2 u \end{aligned} \tag{2.35}$$

eşitlikleri elde edilir. (2.31) ve (2.35) değerlerinin eşit olduğu görülür.

Sonuç 2.7.1: Helicoid yüzeyi catenoid yüzeyi üzerine sürekli olarak deforme edilebilir.

İspat:

$$\begin{aligned} x(u,v,\alpha) &= (\cos\alpha \sinh u \sin v + \sin\alpha \cosh u \cos v) \\ y(u,v,\alpha) &= (\cos\alpha \sinh u \cos v + \sin\alpha \cosh u \sin v) \\ z(u,v,\alpha) &= (v\cos\alpha + u\sin\alpha) \end{aligned} \tag{2.36}$$

parametrik denklemini alalım. Bu denklemlerde $\alpha = 0$ olarak alırsak

$$\begin{aligned} x(u,v) &= (\cos 0 \sinh u \sin v + \sin 0 \cosh u \cos v) \\ y(u,v) &= (\cos 0 \sinh u \cos v + \sin 0 \cosh u \sin v) \\ z(u,v) &= (v\cos 0 + u \sin 0) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned} x(u,v) &= \sinh u \sin v \\ y(u,v) &= \sinh u \cos v \\ z(u,v) &= v \end{aligned}$$

elde edilir ki buda helicoid yüzeyinin (2.34) daki parametrik denklemiyle aynıdır.

Aynı şekilde (2.36) denkleminde

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

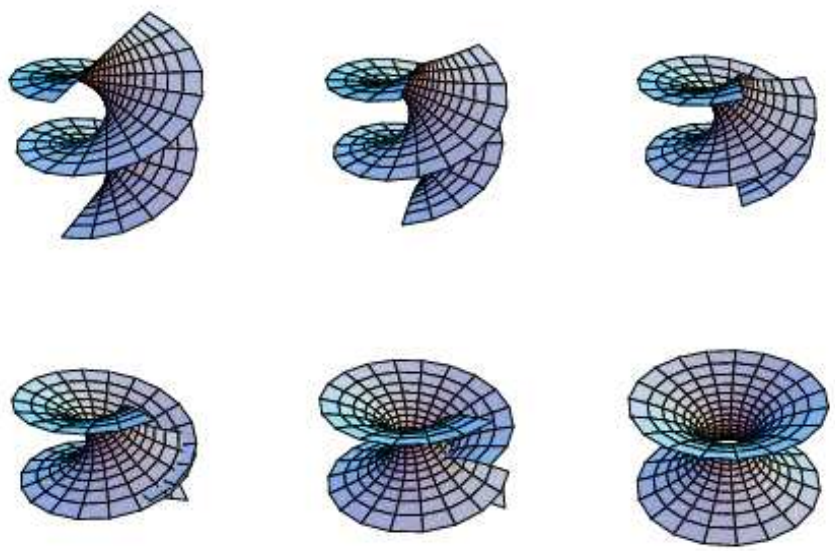
yazalım

$$\begin{aligned} x(u,v) &= (\cos\frac{\pi}{2} \sinh u \sin v + \sin\frac{\pi}{2} \cosh u \cos v) \\ y(u,v) &= (\cos\frac{\pi}{2} \sinh u \cos v + \sin\frac{\pi}{2} \cosh u \sin v) \\ z(u,v) &= (v\cos\frac{\pi}{2} + u\sin\frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

olur. Buradan da

$$\begin{aligned} x(u,v) &= \cosh u \cos v \\ y(u,v) &= \cosh u \sin v \\ z(u,v) &= u \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da (2.30) ifadesindeki catenoid yüzeyinin parametrik denklemidir.



Şekil 2.5

Teorem.2.7.3: Catenoid yüzeyi helicoid'in eşlenik yüzeyi olarak adlandırılır yani her ikisi de aynı Gauss eğriliğine sahiptir (Kurennoy, 2004).

İspat:

Catenoid yüzeyinin Gauss eğriliği bulmak için Teorem 2.1.6 da bulduğumuz L, N, M, E, G, F değerlerini (2.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$K = -\frac{1}{\cosh^4 u} \tag{2.37}$$

bulunur. Şimdi de (2.34) parametrik denklemiyle verilen helicoid yüzeyinin Gauss eğriliğini bulalım. Yüzeyinin kısmı türevleri,

$$\begin{aligned}
\varphi_u &= (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, 0) \\
\varphi_v &= (-\sinh u \sin v, \sinh u \cos v, 1) \\
\varphi_{uu} &= (-\sinh u \cos v, -\sinh u \sin v, 0) \\
\varphi_{uv} &= (-\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, 0) \\
\varphi_{vv} &= (-\sinh u \cos v, -\sinh u \sin v, 0)
\end{aligned}$$

dır. Buradan da

$$\begin{aligned} E &= \cosh^2 u \\ F &= 0 \\ G &= \cosh^2 u \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} x_u \wedge x_v &= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cosh u \cos v & \cosh u \sin v & 0 \\ -\sinh u \sin v & \sinh u \cos v & 1 \end{bmatrix} \\ &= (\cosh u \sin v, -\cosh u \cos v, \sinh u \cosh u(\cos^2 v + \sin^2 v)) \\ &= (\cosh u \sin v, -\cosh u \cos v, \sinh u \cosh u) \end{aligned}$$

dır. Bu vektörün normu

$$\begin{aligned} \|x_u \wedge x_v\| &= \sqrt{\cosh^2 u \sin^2 v + \cosh^2 u \cos^2 v + \sinh^2 u \cosh^2 u} \\ &= \sqrt{\cosh^2 u + \sinh^2 u \cosh^2 u} \\ &= \sqrt{\cosh^2 u(1 + \sinh^2 u)} \\ &= \cosh^2 u \end{aligned}$$

şeklindedir. O halde yüzeyin birim normali

$$U = (\frac{\sin v}{\cosh u}, -\frac{\cos v}{\cosh u}, \frac{\sinh u}{\cosh u})$$

dir. Buradan da

$$\begin{aligned} L &= \frac{-\sinh u \cos v \sin v}{\cosh u} + \frac{\sinh u \sin v \cos v}{\cosh u} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= -\sin^2 v - \cos^2 v \\ &= -1 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} N &= -\frac{\sinh u \cos v \sin v}{\cosh u} + \frac{\sinh u \sin v \cos v}{\cosh u} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bulduğumuz bu E, F, G, L, M, N değerlerini (2.6) denkleminde yerine yazarsak,

$$K = -\frac{1}{\cosh^4 u} \tag{2.38}$$

elde edilir. Buradan da (2.37) ve (2.38) ifadelerinin eşit olduğu görülür, yani helicoid ve catenoid yüzeyleri aynı Gauss eğriliklerine sahiptir.

Ayrıca her iki yüzeyin Weierstrass-Enneper gösterimleri arasında

$$f \longrightarrow \pm i f$$

eşitliği vardır (Kurennoy, 2004).

Bölüm 3

$\mathbb{R}_1^3$ MİNKOWSKİ UZAYINDA MİNİMAL REGLE YÜZEYLER

3.1 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında Spacelike Minimal Yüzeyler

3-boyutlu fiziksel uzayda geleneksel fiziksel dogma Öklid metriğinin parçaların formlarını göstermede bazı sorunlar içerdiğini belirtir. Bununla birlikte deneysel kanıtlar gösterir ki akışkanların dinamiği 3 boyutlu uzayda Minkowski metriği ile tanımlanabilir.

Maximal yüzeyler bir çok farklı alanda karşımıza çıkar. Fizikte kosmoloji, genel izafiyet, elektromagnetizm alanlarında ayrıca akişkanların dinamiğinde ilginç roller üstlenir. Prof. R.Kiehn (Huston, Teksas) yüzme havuzunda bir çok topolojik hata keşfetmiştir. Bunlara Falaco çözümleri denir. Bunlar ancak koniksel singülariteli maximal yüzeyler kullanılarak modellenebilir.

Tanım 3.1.1: $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında Ortalama eğriliği sıfır olan space-

like yüzeye **spacelike minimal yüzey** denir. Burada spacelike minimal yüzey yerine maximal yüzey kullanacağiz. Minkowski uzayında bir **maximal yüzey** positif Gauss eğrilikli ve sıfır ortalama eğrilikli yüzey olarak tanımlanır. Bu yüzeyler Öklid uzayındaki minimal yüzeyler ile karşılaştırılır. Minimal yüzeyler ile maximal yüzeylerin birçok benzerlikleri ve farklılıkları vardır. Örnek olarak maximal yüzeyler lokal olarak alanı maksimize ederken minimal yüzeyler minimize eder (Kiehn, 2005).

Sonuç 3.1.1: Maximal yüzeyler pozitif Gauss eğriliklidir ama minimal yüzeyler negatif Gauss eğriliğine sahiptir.

İspat: M bir maximal yüzey olsun. O halde Tanım 3.1.1 den dolayı

$$H = k_1 + k_2 = 0$$

dır. Buradan da

$$k_1 = -k_2 = 0$$

bulunur. (1.18) denkleminden dolayı

$$K = -\varepsilon k_1^2$$

elde edilir. M bir spacelike yüzey olduğundan

$$\varepsilon = -1$$

dir. O halde

$$K = k_1^2$$

elde edilir. Bu ifade tam kare olduğundan her zaman pozitif tanımlıdır.

Teorem 3.1.1: Maximal yüzeyler de minimal yüzeyler gibi varyasyon problemlerinden doğar.

$$\varphi(u, v) = (x, y, f(x, y))$$

parametrik denklemiyle verilen maximal yüzey

$$(1-f_x^2)f_{yy}+2f_{xy}f_xf_y+(1-f_y^2)f_{xx}=0\ ,\ 1-f_y^2-f_x^2>0$$

kismi diferensiyel denklemini sağlar (Lopez, 2005).

İspat:

Yüzeyin kısmi türevleri

$$\begin{aligned}\varphi_x &= (1,0,f_x)\\ \varphi_y &= (0,1,f_y)\\ \varphi_{xx} &= (0,0,f_{xx})\\ \varphi_{xy} &= (0,0,f_{xy})\\ \varphi_{yy} &= (0,0,f_{yy})\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan da

$$\begin{aligned}E &= \langle\varphi_x,\varphi_x\rangle &&= 1-f_x^2\\ G &= \langle\varphi_y,\varphi_y\rangle &&= 1-f_y^2\\ F &= \langle\varphi_x,\varphi_y\rangle &&= -f_xf_y\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}EG-F^2 &= (1-f_x^2)(1-f_y^2)-(f_xf_y)^2\\ &= 1-f_y^2-f_x^2+(f_xf_y)^2-(f_xf_y)^2\\ &= 1-f_y^2-f_x^2\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer

$$1-f_y^2-f_x^2>0$$

olursa yüzey spacelike yüzeydir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\left[\varphi_x,\varphi_y,\varphi_{xx}\right] &= \begin{bmatrix}1 & 0 & f_x\\ 0 & 1 & f_y\\ 0 & 0 & f_{xx}\end{bmatrix}\\ &= -f_{xx}\end{aligned}$$

olduğundan

$$L = -\frac{f_{xx}}{\sqrt{1 - f_y^2 - f_x^2}}$$

dır. Ayrıca

$$\begin{aligned} \left[\varphi_x, \varphi_y, \varphi_{xy}\right] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \\ 0 & 0 & f_{xy} \end{bmatrix} \\ &= -f_{xy} \end{aligned}$$

olduğundan

$$M = -\frac{f_{xy}}{\sqrt{1 - f_y^2 - f_x^2}}$$

dır. Ayrıca

$$\begin{aligned} \left[\varphi_x, \varphi_y, \varphi_{yy}\right] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \\ 0 & 0 & f_{yy} \end{bmatrix} \\ &= -f_{yy} \end{aligned}$$

olduğundan

$$N = -\frac{f_{yy}}{\sqrt{1 - f_y^2 - f_x^2}}$$

bulunur. Yüzeyimiz maximal yüzey olduğundan $H = 0$ dır. (1.13) eşitliğinden dolayı

$$EN - 2FM + LG = 0$$

dır. Bulduğumuz bu E, F, G, L, M, N değerlerini yukaridaki denklemde yerine yazarsak,

$$(1 - f_x^2)f_{yy} + 2f_{xy}f_x f_y + (1 - f_y^2)f_{xx} = 0$$

elde edilir.

Sonuç.3.1.2: Maximal yüzeyler izole edilmiş koniksel singülaritelere sahip olabilir ama minimal yüzeyler asla böyle noktalara sahip değildir. (Kiehn, 2005)

İspat:

$$\varphi(u,v)=\left[\frac{1}{a}\sinh(av+b)\cos u,-\frac{1}{a}\sinh(av+b)\sin u,\frac{av+b}{a}\right] \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlı yüzey, Minkowski uzayında pozitif Gauss eğrilikli ve sıfır ortalama eğriliği olan bir maximal yüzeydir. $\varphi(u,v)$ yüzeyinin kısmi türevleri,

$$\begin{aligned}
\varphi_u &= (-\frac{1}{a}\sinh(av+b)\sin u,-\frac{1}{a}\sinh(av+b)\cos u,0)\\
\varphi_v &= (\cosh(av+b)\cos u,-\cosh(av+b)\sin u,1)\\
\varphi_{uu} &= (-\frac{1}{a}\sinh(av+b)\cos u,\frac{1}{a}\sinh(av+b)\sin u,0)\\
\varphi_{vv} &= (a\sinh(av+b)\cos u,-a\sinh(av+b)\sin u,0)\\
\varphi_{uv} &= (-\cosh(av+b)\sin u,-\cosh(av+b)\cos u,0)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan da

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{a^2}\left(\sinh^2(av+b)\sin^2 u+\sinh^2(av+b)\cos^2 v\right)\\
&= \frac{\sinh^2(av+b)}{a^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &= \cosh^2(av+b)\cos^2 u+\cosh^2(av+b)\sin^2 u-1\\
&= \cosh^2(av+b)-1\\
&= \sinh^2(av+b)
\end{aligned}$$

ve

$$F=0$$

bulunur. O halde

$$EG-F^2=\frac{\sinh^4(av+b)}{a^2}>0$$

olduğundan yüzeyimiz spacelike yüzeydir. Ayrıca

$$\begin{aligned} x_u \wedge x_v &= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\frac{1}{a}\cosh(av+b)\cos u & -\frac{1}{a}\cosh(av+b)\sin u & 1 \\ \cosh(av+b)\cos u & -\cosh(av+b)\sin u & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a}(-\sinh(av+b)\cos u, \sin h(av+b)\sin u, \sinh(av+b)\cosh(av+b)) \end{aligned}$$

dir. Bu vektörün normu

$$\|x_u \wedge x_v\| = \sqrt{\frac{\left(\cosh^2(av+b)-1\right)\left(\cosh^2(av+b)+1\right)}{a^2}}$$

şeklindedir. O halde yüzeyin birim normali

$$U = \frac{1}{a}\left(\frac{\sinh(av+b)\cos u}{\sqrt{\frac{\left(\cosh^2(av+b)-1\right)^2}{a^2}}}, \frac{\sinh(av+b)\sin u}{\sqrt{\frac{\left(\cosh^2(av+b)-1\right)^2}{a^2}}}, \frac{\sinh(av+b)\cosh(av+b)}{\sqrt{\frac{\left(\cosh^2(av+b)-1\right)^2}{a^2}}}\right)$$

dir. Buradan da

$$\begin{aligned} L &= \langle U, x_{uu}\rangle \\ &= -\frac{1}{a^2}\frac{\cosh^2(av+b)-1}{\sqrt{\frac{\left(\cosh^2(av+b)-1\right)^2}{a^2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= \langle U, x_{uv}\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} N &= \langle U, x_{vv}\rangle \\ &= \frac{\cosh^2(av+b)-1}{\sqrt{\frac{\left(\cosh^2(av+b)-1\right)^2}{a^2}}} \end{aligned}$$

elde edilir. Bulduğumuz bu E, F, G, L, M, N değerlerini (1.13) denkleminde yerine yazarsak

$$H = 0$$

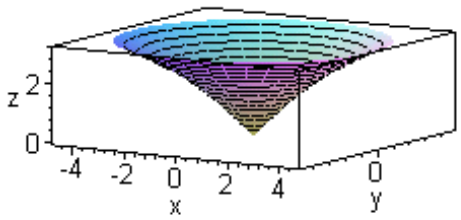
bulunur. Şimdide Gauss eğriliğinin pozitif değerli olduğunu gösterelim. Benzer şekilde bulduğumuz E, F, G, L, M, N değerlerini (1.14) denkleminde yerine yazalım

$$K = \frac{a^2}{\left(\cosh^2(av+b)-1\right)^2} > 0$$

elde edilir. Böylece yüzeyimizin pozitif Gauss eğriliği olan ve sıfır ortalama eğrilikli bir spacelike bir yüzey olduğunu göstermiş olduk. Ayrıca (3.1) yüzey denkleminde

$$a = \frac{1}{2}\ ,\ b = 0$$

alırsak,



Şekil 3.1

Şekli elde edilir. Şekildeki spacelike catenoid yüzeyinin bir tane izolated singülaritesi vardır. Bu noktada Gauss eğriliği sonsuzdur ve teğet düzlemin

limiti lightlike olur. Yüzeyimiz bu noktada lightcone'a asimptotiktir. Bu yüzden böyle noktalara conelike singülarite denir.

3.2 Maximal Yüzeyin Weierstrass-Enneper Gösterimi

Maximal yüzeylerin de minimal yüzeyler gibi Weierstrass-Enneper gösterimi vardır. M bir maximal yüzey olsun. f holomorfik g ise meromorfik fonksiyon olmak üzere

$$f = \varphi_1 - i\varphi_2 \, , \, g = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2} \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlansın. (3.2) eşitliklerinden

$$\varphi_3 = fg$$

olduğu hemen görülür. Ayrıca M yüzeyi maximal olduğundan

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - \varphi_3^2 = 0$$

elde edilir. Buradan da

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = \varphi_3^2$$

dır. h fonsiyonunu

$$h = \varphi_1 + i\varphi_2$$

şeklinde tanımlayalım. O halde

$$\begin{aligned} fh &= \varphi_1^2 + \varphi_2^2 \\ &= \varphi_3^2 \\ &= (fg)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$h = fg^2 \tag{3.3}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} f+h &= 2\varphi_1 \\ f-h &= -2i\varphi_2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

dır. O halde (3.3) ve (3.4) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{f+h}{2} \\ &= \frac{f+fg^2}{2} \\ &= \frac{f(1+g^2)}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer yolla

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{h-f}{2i} \\ &= i\frac{f-h}{2} \\ &= i\frac{f-fg^2}{2} \\ &= i\frac{f(1-g^2)}{2} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\varphi_3 = fg$$

dır. Bunu şu sonuç ile ifade edebiliriz.

Sonuç 3.2.1: f fonksiyonu D tanım kümesinde holomorfik, g fonksiyonu da D tanım kümesinde meromorfik olsun. O zaman bir maximal yüzey

$$\begin{aligned} X_1 &= \mathrm{Re}\int f(1+g^2)dz \\ X_2 &= \mathrm{Re}\, i\int f(1-g^2)dz \\ X_3 &= \mathrm{Re}\int fgdz \end{aligned}$$

eşitlikleri yardımıyla,

$$x(z,\overline{z}) = \left[x^1(z,\overline{z}), x^2(z,\overline{z}), x^3(z,\overline{z})\right]$$

şekilde tanımlanabilir.

3.3 $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski Uzayında Timelike Minimal Yüzeyler

Timelike minimal yüzeylerin en belirgin farkı, minimal yüzeyler yüzey alanını minimize, maximal yüzeyler ise maksimize ederken, timelike minimal yüzeyler yüzey alanını ne maksimize ne de minimize eder. Ayrıca 3- boyutlu Öklid uzayında minimal yüzeyin eşleniği olan minimal yüzey original minimal yüzeyin birleşim ailesine aittir. Benzer şekilde 3- boyutlu Minkowski uzayında da maximal yüzeyin eşleniği olan maximal yüzey original olanın birleşim ailesine aittir, bununla birlikte eşlenik timelike minimal yüzey orginal timelike minimal yüzeyin birleşim ailesine ait değildir (Inoguchı ve Toda, 2005).

Tanım 3.3.1: $\varphi : M \longmapsto \mathbb{E}^3_1$ bir timelike immersion olsun eğer ortalama eğriliği sıfır yani $H = 0$ ise bu yüzeye timelike minimal yüzey denir.

Tanım 3.3.2: $\varphi : M \longmapsto \mathbb{E}^3_1$ bir timelike minimal yüzey olsun.O zaman φ null eğrilerin toplamı şeklinde yazılabilir (Inoguchı ve Toda, 2005).

$$\varphi(u, v) = X(u) + Y(v)$$

bu ifade de $X(u)$, $Y(v)$ null eğri olduklarından

$$\langle X_u, X_u \rangle = \langle Y_v, Y_v \rangle = 0$$

dır. Bu durumda yüzeyin indirgenmiş metriği,

$$I = 2 \langle X_u, Y_v \rangle \, dudv$$

şeklindedir.

Teorem 3.3.1: $\varphi : M \longmapsto \mathbb{E}^3_1$ bir timelike minimal yüzey olsun. O zaman φ yüzeyinin birleşim ailesi

$$\varphi_\lambda(u, v) = \lambda X(u) + \lambda^{-1} Y(u), \;\; \lambda \in \mathbb{R}$$

şeklinde yazılabilir (Inoguchı ve Toda, 2005).

Tanım 3.3.3: $\varphi : M \longmapsto \mathbb{E}_1^3$ bir timelike minimal yüzey olsun. O zaman φ yüzeyinin eşleniği olan $\widetilde{\varphi}$ yüzeyi,

$$\widetilde{\varphi}(u,v) = X(u) - Y(v)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.3.2: φ yüzeyine eşlenik olan timelike minimal $\widetilde{\varphi}$ yüzeyi, φ yüzeyine antiizometriktir (Inoguchı ve Toda, 2005).

İspat:

$\varphi(u,v)$ timelike minimal yüzeyini

$$\varphi(u,v) = X(u) + Y(v)$$

şeklinde yazalım. Bu yüzeyin kısmı türevleri

$$\varphi_u = X_u \ , \ \varphi_v = Y_v$$

dir. Buradan da φ yüzeyi için

$$\begin{aligned} E &= 0 \\ F &= \langle X_u, Y_v \rangle \\ G &= 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

elde edilir. φ yüzeyine eşlenik olan timelike minimal $\widetilde{\varphi}$ yüzeyinin

$$\widetilde{\varphi}(u,v) = X(u) - Y(v)$$

kısmi türevleri

$$\widetilde{\varphi}_u = X_u \ , \ \widetilde{\varphi}_v = -Y_v$$

dır. Buradan da $\widetilde{\varphi}$ yüzeyi için

$$\begin{aligned} E_1 &= 0 \\ F_1 &= -\langle X_u, Y_v \rangle \\ G_1 &= 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

elde edilir. (3.5) eşitliklerindeki yüzeyin E, F, G katsayıları (3.6) eşitliklerindeki E_1 ,F_1, G_1, katsayılarının -1 katıdır. Yani (M, φ) yüzeyi $(M, \widetilde{\varphi})$ yüzeyine antiizometriktir.

Teorem. 3.3.3: $\varphi : M \longmapsto \mathbb{E}_1^3$ timelike minimal yüzey olsun. O zaman φ yüzeyinin birleşim ailesi

$$\varphi_\lambda(u, v) = \cosh\theta\varphi(u, v) + \sinh\theta\widetilde{\varphi}(u, v), \quad \lambda = e^\theta \in \mathbb{R}^+$$

biçiminde yazılabilir. Yüzeylerin teğet düzlemleri $T_{\varphi_\lambda(x,y)}M$ karşılıklı olarak paraleldir.

Örnek 3.3.1:

$$\varphi(u, v) = \frac{1}{a}(\cos(av + b)\cos u, \frac{1}{a}\cos(av + b)\sin u, v) \tag{3.7}$$

Parametrik denklemiyle verilen timelike yüzeyi bir minimal yüzeydir. Timelike catenoid olarak adlandırılır (Kiehn, 1999).

Bu yüzeyin kısmi türevleri

$$\begin{aligned}
\varphi_u &= (-\frac{1}{a}\cos(av + b)\sin u, \frac{1}{a}\cos(av + b)\cos u, 0) \\
\varphi_v &= (-\sin(av + b)\cos u, -\sin(av + b)\sin u, 1) \\
\varphi_{uu} &= (-\frac{1}{a}\cos(av + b)\cos u, -\frac{1}{a}\cos(av + b)\sin u, 0) \\
\varphi_{vv} &= (-a\cos(av + b)\cos u, -a\cos(av + b)\sin u, 0) \\
\varphi_{uv} &= (\sin(av + b)\sin u, -\sin(av + b)\cos u, 0)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan da

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{a^2}\left(\cos^2(av + b)\sin^2 u + \cos^2(av + b)\cos^2 v\right) \\
&= \frac{\cos^2(av + b)}{a^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &= \sin^2(av + b)\cos^2 u + \sin^2(av + b)\sin^2 u - 1 \\
&= \sin^2(av + b) - 1 \\
&= -\cos^2(av + b)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{a}\sin(av+b)\cosh(av+b)\sin u\cos u - \frac{1}{a}\cos(av+b)\sin(av+b)\sin u\cos u \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$EG - F^2 = -\frac{\cos^4(av+b)}{a^2} < 0$$

olduğundan yüzeyimiz timelike yüzeydir. Ayrıca

$$\begin{aligned} x_u \wedge x_v &= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\frac{1}{a}\cos(av+b)\sin u & \frac{1}{a}\cos(av+b)\cos u & 0 \\ -\sin(av+b)\cos u & -\sin(av+b)\sin u & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a}\left(-\cos(av+b)\cos u, -\cos(av+b)\sin u, \cos(av+b)\sin(av+b)\right) \end{aligned}$$

dir. Bu vektörün normu

$$\|x_u \wedge x_v\| = \sqrt{\frac{\cos^4(av+b)}{a^2}}$$

bulunur. O zaman yüzeyin birim normali

$$U = \frac{1}{a}\left(-\frac{\cos(av+b)\cos u}{\sqrt{\frac{\cos^4(av+b)}{a^2}}}, -\frac{\cos(av+b)\sin u}{\sqrt{\frac{\cos^4(av+b)}{a^2}}}, \frac{\cos(av+b)\sin(av+b)}{\sqrt{\frac{\cos^4(av+b)}{a^2}}}\right)$$

şeklindedir. Buradan da

$$\begin{aligned} L &= \langle U, x_{uu}\rangle \\ &= -\frac{1}{a^2}\frac{\cos(av+b)^2}{\sqrt{\frac{\cos^4(av+b)}{a^2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= \langle U, x_{uv}\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} N &= \langle U, x_{vv} \rangle \\ &= -\frac{\cos(av+b)^2}{\sqrt{\frac{\cos^4(av+b)}{a^2}}} \end{aligned}$$

elde edilir. Bulduğumuz bu E, F, G, L, M, N değerlerini (1.13) denkleminde yerine yazalım

$$H = 0$$

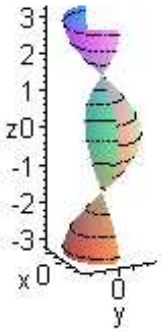
bulunur. Benzer yolla bulduğumuz bu E, F, G, L, M, N değerlerini (1.14) denkleminde yerine yazalım

$$K = -\frac{a^2}{\cos^4(av+b)} < 0$$

bulunur. (3.7) denkleminde

$$a = 1 \ , \ b = 0$$

olarak alırsak,



Şekil 3.2

şekli elde edilir.

3.4 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında Timelike Minimal Regle Yüzeyler

$\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında $\varphi(u,v)$ bir timelike regle yüzey olsun. Eğer bu yüzeyin ortalama eğriliği $H=0$ eşitliğini sağlıyorsa bu yüzeye timelike minimal regle yüzey diyeceğiz.

Örnek 3.4.1:

$\varphi(u,v)$ timelike minimal yüzey ve $X(u)$, $Y(v)$ null eğrileri

$$\begin{aligned} X(u) &= \left(\frac{\sinh\sqrt{2}u}{2}, \frac{\cosh\sqrt{2}u}{2}, \frac{u}{\sqrt{2}}\right) \\ Y(v) &= \left(-\frac{\sinh\sqrt{2}v}{2}, -\frac{\cosh\sqrt{2}v}{2}, -\frac{v}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman Tanım 3.3.2 den dolayı $\varphi(u,v)$ timelike minimal yüzeyi

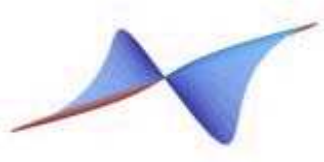
$$\begin{aligned} \varphi(u,v) &= Y(v)+X(u) \\ &= \left(\frac{\sinh\sqrt{2}u}{2} - \frac{\sinh\sqrt{2}v}{2}, \frac{\cosh\sqrt{2}u}{2} - \frac{\cosh\sqrt{2}v}{2}, \frac{u-v}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \left(\sinh\frac{u-v}{\sqrt{2}}\cosh\frac{u+v}{\sqrt{2}}, \sinh\frac{u-v}{2}\sinh\frac{u+v}{\sqrt{2}}, \frac{u-v}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan da Tanım 3.3.3 den dolayı da $\widetilde{\varphi}(u,v)$ eşlenik timelike minimal regle yüzeyi

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(u,v) &= X(u)-Y(v) \\ &= \left(\frac{\sinh\sqrt{2}u}{2} + \frac{\sinh\sqrt{2}v}{2}, \frac{\cosh\sqrt{2}u}{2} + \frac{\cosh\sqrt{2}v}{2}, \frac{u+v}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \left(\cosh\frac{u-v}{\sqrt{2}}\sinh\frac{u+v}{\sqrt{2}}, \cosh\frac{u-v}{\sqrt{2}}\cosh\frac{u+v}{\sqrt{2}}, \frac{u+v}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

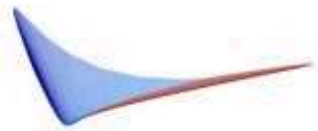
şeklinde yazılabilir (Inoguchı ve Toda, 2005).

$\varphi(u,v)$ yüzeyi timelike dayanak eğrisi ve spacelike doğrultmanlı dönel bir timelike minimal yüzeydir ve spacelike doğrultmanlı timelike catenoid veya Lorentz catenoid olarak adlandırılır.



Şekil 3.3. Lorentz Catenoid

$\varphi(u,v)$ yüzeyine eşlenik yüzey olan $\widetilde{\varphi}(u.v)$ yüzeyide timelike minimal regle yüzeydir ve spacelike doğrultmanlı timelike helicoid olarak adlandırılır.



Şekil.3.4. Timelike Helicoid (catenoid'in eşleniği olan yüzey)

Örnek 3.4.2:

$$\varphi(u,v) = (uv, 0, u) \tag{3.8}$$

Parametrik denklemiyle tanımlı yüzey, timelike minimal regle yüzeydir (Woestijne, 1990).

$$\begin{aligned} \varphi_u &= (v,0,1) \\ \varphi_v &= (u,0,0) \\ \varphi_{uu} &= (0,0,0) \\ \varphi_{vv} &= (0,0,0) \\ \varphi_{uv} &= (1,0,0) \end{aligned}$$

dir. Buradan da

$$\begin{aligned} E &= v^2 - 1 \\ F &= uv \\ G &= u^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikler yardımı ile

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= (uv)^2 - u^2 - (uv)^2 \\ &= -u^2 < 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Yani timelike yüzeydir. Ayrıca

$$[\varphi_{uu}, \varphi_u, \varphi_v] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ v & 0 & 1 \\ u & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

olduğundan

$$L = 0$$

dır.

$$[\varphi_{uv}, \varphi_u, \varphi_v] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v & 0 & 1 \\ u & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

olduğundan

$$M = 0$$

dır.

$$[\varphi_{vv}, \varphi_u, \varphi_v] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ v & 0 & 1 \\ u & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

olduğundan

$$N = 0$$

bulunur. Bulduğumuz değerleri (1.13) denkleminde yerine yazarsak

$$H = 0$$

bulunur. Yani yüzey minimal yüzeydir. (3.8) yüzey denklemi

$$\begin{aligned} \varphi(u,v) &= (uv, 0, u) \\ &= (0,0,u) + v(u,0,0) \\ &= \alpha(u) + vX(u) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. O zaman Tanım 1.8.1 den dolayı regle yüzeydir. Bu eşitlikte

$$\alpha(u) = (0,0,u)$$

yüzeyin dayanak eğrisidir. O halde

$$\alpha'(u) = T = (0,0,1)$$

ve

$$\langle \alpha'(u), \alpha'(u) \rangle = -1$$

elde edilir. Dayanak eğrisi timelike eğridir. Ayrıca

$$X(u) = (u,0,0)$$

olduğundan

$$X'(u) = (1,0,0)$$

dir. Buradan da

$$[T, X, X'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ u & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

elde edilir. O halde yüzeyin drali (1.17) den dolayı

$$\lambda = 0$$

dır. Yani yüzeyimiz açılabilir bir yüzeydir.

3.5 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında Spacelike Minimal Regle Yüzeyler

$\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında φ bir spacelike regle yüzey olsun. Eğer bu yüzeyin ortalama eğriliği $H = 0$ eşitliğini sağlıyorsa bu yüzeye spacelike minimal regle yüzey diyeceğiz.

Teorem 3.5.1: $\alpha(u)$ regle yüzeyin dayanak eğrisi, $\alpha(u)$ spacelike eğrisi boyunca yüzeyin birim normal vektör alanı $n(u)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \langle \alpha'(u), \alpha'(u) \rangle &= 1 \\ \langle n(u), n(u) \rangle &= 1 \\ \langle \alpha'(u), n(u) \rangle &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı

$$\varphi(u, v) = \alpha(u) + vn(u)$$

yüzeyi bir spacelike regle yüzeydir (Woestijne, 1990).

Örnek 3.5.1:

$$\varphi(u, v) = (\frac{ku^2}{2} + v, -\frac{\pi^2 u^3}{6} + u - kuv, \frac{k\pi u^3}{6} + \pi uv) \tag{3.9}$$

II. çeşit Enneper'in eşlenik yüzeyi spacelike minimal regle yüzeydir. Burada k, π dayanak eğrisi α nın, sırasıyla, birinci ve ikinci eğriliği ve $|k| = |\pi| \neq 0$ olup

$$\begin{aligned} k > 0 \quad \text{ise} \quad v < \frac{1}{2k} \\ k < 0 \quad \text{ise} \quad v > \frac{1}{2k} \end{aligned}$$

dir (Woestijne, 1990**).**

$$\begin{aligned}
\varphi_u &= (uk, -\frac{u^2}{2} + 1 - kv, \frac{k\pi u^2}{2} + \pi v) \\
\varphi_v &= (1, -ku, \pi u) \\
\varphi_{uu} &= (k, -\pi^2 u, k\pi u) \\
\varphi_{vv} &= (0, 0, 0) \\
\varphi_{uv} &= (0, -k, \pi)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned}
E &= 1 - 2kv \\
G &= 1 \\
F &= 0
\end{aligned}$$

dır. O halde

$$EG - F^2 = 1 - 2kv > 0$$

olduğundan dolayı spacelike yüzeydir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
x_u \wedge x_v &= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ uk & -\frac{u^2}{2} + 1 - kv & \frac{k\pi u^2}{2} + \pi v \\ 1 & -ku & \pi u \end{bmatrix} \\
&= (-\pi u, \frac{k\pi u^2}{2} - \pi v, -\frac{u^2}{2} - 1 + kv)
\end{aligned}$$

dir. Bu vektörün normu

$$\|x_u \wedge x_v\| = \sqrt{-1 + 2kv}$$

şeklindedir. O halde yüzeyin birim normali

$$U = \left(-\frac{\pi u}{\sqrt{-1+2kv}}, \frac{1}{2}\frac{k\pi u^2 - 2\pi v}{\sqrt{-1+2kv}}, \frac{1}{2}\frac{-u^2 - 2 + 2kv}{\sqrt{-1+2kv}} \right)$$

dir. Buradan da

$$L = \langle U, x_{uu} \rangle = 0$$

$$\begin{aligned} M &= \langle U, x_{uv} \rangle \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{-1+2kv}} \end{aligned}$$

ve

$$N = \langle U, x_{vv} \rangle = 0$$

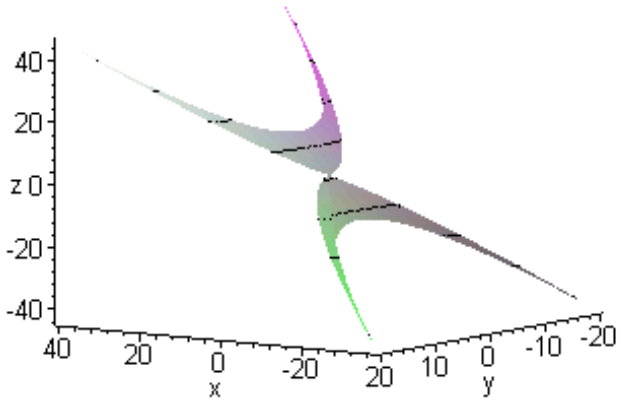
elde edilir. Bulduğumuz bu E, F, G, L, M, N değerlerini (1.13) denkleminde yerine yazalım

$$H = 0$$

bulunur. Benzer yolla bulduğumuz bu E, F, G, L, M, N değerlerini (1.14) denkleminde yerine yazalım

$$K = \frac{1}{(-1+2kv)(1-2kv)}$$

bulunur.



Şekil 3.5

Ayrıca (3.7) parametrik denklemiyle verilen II. çeşit Enneper'in eşlenik

yüzeyi

$$\begin{aligned}\varphi(u,v) &= \alpha(u)+vX(u)\\ &= (\frac{ku^2}{2},-\frac{\pi^2u^3}{6}+u,\frac{k\pi u^3}{6})+v(1,-ku,\pi u)\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. O zaman Tanım 1.8.1 den dolayı bu bir regle yüzeydir. Burada

$$\alpha(u)=(\frac{ku^2}{2},-\frac{\pi^2u^3}{6}+u,\frac{k\pi u^3}{6})$$

yüzeyin dayanak eğrisidir. O halde

$$\begin{aligned}\alpha'(u) &= T\\ &= (ku,-\frac{\pi^2u^2}{2}+1,\frac{k\pi u^2}{2})\end{aligned}$$

ve

$$\langle\alpha'(u),\alpha'(u)\rangle=1>0$$

elde edilir. O zaman dayanak eğrisi bir spacelike eğridir. Ayrıca

$$X'(u)=(0,-k,\pi)$$

dir. Buradan da

$$\begin{aligned}[T,X,X'] &= \begin{bmatrix} ku & -\frac{\pi^2u^2}{2}+1 & \frac{k\pi u^2}{2}\\ 1 & -ku & \pi u\\ 0 & -k & \pi \end{bmatrix}\\ &= -\pi\end{aligned}$$

elde edilir. O halde yüzeyin drali (1.17) den dolayı

$$\lambda=-\frac{\pi}{k^2-\pi^2}$$

dir. Şimdi de yüzeyin boğaz çizgisini bulalım.

$$\begin{aligned}\langle X',T\rangle &= 0+\frac{ku^2}{2}-k-\frac{ku^2}{2}\\ &= -k\end{aligned}$$

dır. Ayrıca

$$\|X'\|^2 = k^2 - \pi^2$$

dır. (1.16) denkleminde bu ifadeleri yerine yazarsak,

$$\overline{\alpha}(u) = (\frac{ku^2}{2}, -\frac{\pi^2 u^3}{6} + u, \frac{k\pi u^3}{6}) + \frac{k}{k^2 - \pi^2}(1, -ku, \pi u)$$

şeklinde yüzeyin boğaz çizgisi elde edilir.

Örnek.3.5.2:

$$\varphi(u,v) = (\frac{1}{a}\cos(av+b)\sin u, \frac{1}{a}\sin(av+b)\sin u, ev) \tag{3.10}$$

şeklinde tanımlı yüzey bir maximal regle yüzeydir. (3.10) yüzey denkleminde e sabit bir katsayıdır ve sadece (± 1) değerlerini alır, bu yüzden $e^2 = 1$ olarak alacağız (Kiehn, 1999).

$\varphi(u,v)$ yüzeyinin kısmi türevleri

$$\begin{aligned}
\varphi_u &= (\frac{1}{a}\cos(av+b)\cos u, \frac{1}{a}\sin(av+b)\cos u, 0)\\
\varphi_v &= (-\sin(av+b)\sin u, \cos(av+b)\sin u, e)\\
\varphi_{uu} &= (-\frac{1}{a}\cos(av+b)\sin u, -\frac{1}{a}\sin(av+b)\sin u, 0)\\
\varphi_{vv} &= (-a\cos(av+b)\sin u, -a\sin(av+b)\sin u, 0)\\
\varphi_{uv} &= (-\sin(av+b)\cos u, \cos(av+b)\cos u, 0)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan da

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{a^2}\left(\cos^2(av+b)\cos^2 u + \sin^2(av+b)\cos^2 u\right)\\
&= \frac{\cos^2 u}{a^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &= \sin^2(av+b)\sin^2 u + \cos^2(av+b)\sin^2 u - e^2\\
&= \sin^2 u - 1
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
F &= \frac{1}{a}\sin(av+b)\cos(av+b)\sin u\cos u - \frac{1}{a}\cos(av+b)\sin(av+b)\sin u\cos u\\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} x_u \wedge x_v &= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{1}{a}\cos(av+b)\cos u & \frac{1}{a}\sin(av+b)\cos u & 0 \\ -\sin(av+b)\sin u & \cos(av+b)\sin u & e \end{bmatrix} \\ &= \left(-\frac{e}{a}\sin(av+b)\cos u, \frac{e}{a}\cos(av+b)\cos u, \cos u \sin u\right) \end{aligned}$$

dir. Bu vektörün normu

$$\|x_u \wedge x_v\| = \sqrt{\frac{\cos^2 u(1-\sin^2 u)}{a^2}}$$

şeklindedir. O zaman yüzeyin birim normali,

$$U = \left(-\frac{e}{a}\frac{\sin(av+b)\cos u}{\sqrt{\frac{\cos^2 u(1-\sin^2 u)}{a^2}}}, \frac{e}{a}\frac{\cos(av+b)\cos u}{\sqrt{\frac{\cos^2 u(1-\sin^2 u)}{a^2}}}, \frac{\cos u \sin u}{\sqrt{\frac{\cos^2 u(1-\sin^2 u)}{a^2}}} \right)$$

dir. Buradan da

$$L = \langle U, x_{\,uu} \rangle = 0$$

$$\begin{aligned} M &= \langle U, x_{uv} \rangle \\ &= \frac{e\cos^2 u}{\sqrt{\frac{\cos^2 u(1-\sin^2 u)}{a^2}}} \end{aligned}$$

ve

$$N = \langle U, x_{vv} \rangle = 0$$

elde edilir. E, F, G, L, M ve N değerlerini (1.13) denkleminde yerine yazarsak

$$H = 0$$

bulunur. Benzer olarak E, F, G, L, M, N değerlerini (1.14) denkleminde yerine yazarsak

$$K = -\frac{a^2}{(1-\sin^2 u)(\sin^2 u - 1)}$$

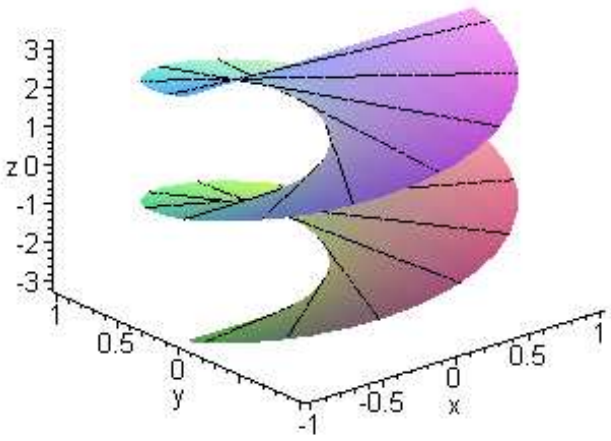
bulunur. (3.10) denkleminde

$$a = 1 \ , \ e = 1 \ , \ b = 0$$

olarak alalım

$$K = \frac{1}{\cos^4 u} > 0$$

elde edilir ve yüzeyimiz



Şekil 3.6

şeklindedir. Bu yüzey helis görünümündedir ve $u = 0$ noktasında metrik singülaritesi vardır.

Örnek 3.5.3:

$$\varphi(u, v) = (\frac{1}{a}\cosh(av + b)\cos u, \frac{1}{a}\cosh(av + b)\sin u, eu) \qquad (3.11)$$

şeklinde tanımlı immersiyon, bir maximal regle yüzeydir. Ayrıca bu yüzeyin

silindiriksel singülaritesi vardır. $\varphi(u,v)$ yüzeyinin kısmi türevleri

$$\begin{aligned}
\varphi_u &= (-\frac{1}{a}\cosh(av+b)\sin u, \frac{1}{a}\cosh(av+b)\cos u, e)\\
\varphi_v &= (\sinh(av+b)\cos u, \sinh(av+b)\sin u, 0)\\
\varphi_{uu} &= -\frac{1}{a}(\cosh(av+b)\cos u, -\frac{1}{a}(\cosh(av+b)\sin u, 0)\\
\varphi_{vv} &= a(\cosh(av+b)\cos u, \cosh(av+b)\sin u, 0)\\
\varphi_{uv} &= (-\sinh(av+b)\sin u, \sinh(av+b)\cos u, 0)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan da

$$\begin{aligned}
E &= \frac{\cosh^2(av+b)+1}{a^2}\\
F &= 0\\
G &= \sinh^2(av+b)
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$EG - F^2 = \frac{\left[\cosh^2(av+b)+1\right]\sinh^2(av+b)}{a^2} > 0$$

olduğundan yüzey spacelike bir yüzeydir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\varphi_u \wedge \varphi_v &= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\frac{1}{a}\cosh(av+b)\sin u & \frac{1}{a}\cosh(av+b)\cos u & e \\ \sinh(av+b)\cos u & \sinh(av+b)\sin u & 0 \end{bmatrix}\\
&= (e\sinh(av+b)\sin u, -e\sinh(av+b)\cos u, -\frac{1}{a}\cosh(av+b)\sinh(av+b))
\end{aligned}$$

dir. Bu vektörün normu

$$\begin{aligned}
\|\varphi_u \wedge \varphi_v\| &= \sqrt{\sinh^2(av+b)(\sin^2 u + \cos^2 u) + \frac{1}{a^2}\cosh^2(av+b)\sinh^2(av+b)}\\
&= \sqrt{\sinh^2(av+b) + \frac{1}{a^2}\cosh^2(av+b)\sinh^2(av+b)}\\
&= \sqrt{\sinh^2(av+b)(1+\frac{1}{a^2}\cosh^2(av+b))}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da yüzeyin birim normali

$$\begin{aligned} U &= \Big(\frac{e\sinh(av+b)\sin u}{\sqrt{\sinh^2(av+b)(1+\frac{1}{a^2}\cosh^2 v)}}, -\frac{e\sinh(av+b)\cos u}{\sqrt{\sinh^2(av+b)(1+\frac{1}{a^2}\cosh^2(av+b))}}, \\ &\quad -\frac{1}{a}\frac{\cosh(av+b)\sinh(av+b)}{\sqrt{\sinh^2(av+b)(1+\frac{1}{a^2}\cosh^2(av+b))}}\Big) \end{aligned}$$

olur. O halde

$$L = \langle U, \varphi_{uu} \rangle = 0$$

$$\begin{aligned} M &= \langle U, \varphi_{uv} \rangle \\ &= \frac{e(\cosh^2(av+b)-1)}{\sqrt{\frac{1}{a^2}(\cosh^2(av+b)-1)(e^2a^2-\cosh(av+b)^2)}} \end{aligned}$$

ve

$$N = \langle U, \varphi_{vv} \rangle = 0$$

elde edilir. Bulduğumuz bu E, F, G, L, M, N değerlerini (2.13) denkleminde yerine yazarsak

$$H = 0$$

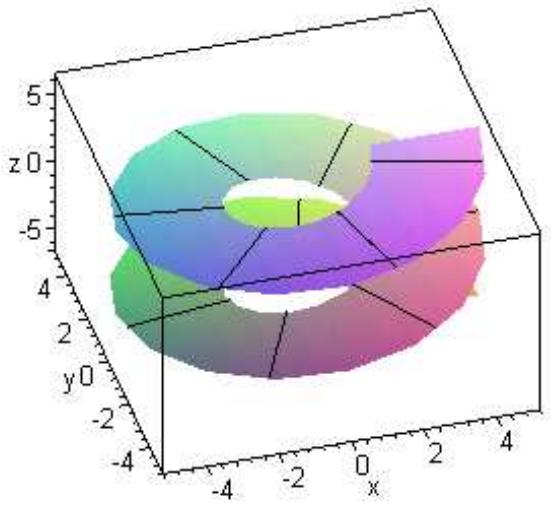
olur. Benzer yolla E, F, G, L, M, N değerlerini (2.14) denkleminde yerine yazarsak

$$K = \frac{e^2a^4}{(e^2a^2-\cosh(av+b)^2)^2}$$

bulunur. (3.11) denkleminde

$$a = \frac{1}{2}\ ,\ e = 1\ ,\ b = 0$$

olarak alırsak



Şekil 3.7

şekli elde edilir. Bu yüzey $\frac{1}{a}$ yarıçaplı silindirin etrafındaki helislerden oluşan bir regle yüzeydir. Bu yüzeyin koniksel singülaritesi yoktur.

Teorem 3.5.2: Maximal regle yüzey olduğunu Örnek 3.5.3 de gösterdiğimiz yüzey aynı zamanda Öklid uzayında da bir minimal yüzeydir. Bundan dolayı yüzeyimizin minimal olması metrik seçiminden bağimsizdir yani yüzeyimizin bu özelliği yüzeyimizin topolojik bir özelliğidir (Kiehn, 2005).

İspat: Öklid uzayında (3.11) maximal yüzeyin parametrik denkleminin kısmı türevleri yardımı ile

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\cos^2(av+b)+a^2}{a^2} \\ F &= 0 \\ G &= \cos^2(av+b)-1 \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\varphi_u \wedge \varphi_v &= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\frac{1}{a}\cosh(av+b)\sin u & \frac{1}{a}\cosh(av+b)\cos u & e \\ \sinh(av+b)\cos u & \sinh(av+b)\sin u & 0 \end{bmatrix} \\ &= (-e\sinh(av+b)\sin u, e\sinh(av+b)\cos u, -\frac{1}{a}\cosh(av+b)\sinh(av+b))\end{aligned}$$

dır. Bu vektörün normu

$$\begin{aligned}\|\varphi_u \wedge \varphi_v\| &= \sqrt{\sinh^2(av+b) + \frac{1}{a^2}\cosh^2(av+b)\sinh^2(av+b)} \\ &= \sqrt{\sinh^2(av+b)(1+\frac{1}{a^2}\cosh^2(av+b))}\end{aligned}$$

dır. Buradan da yüzeyin birim normali

$$\begin{aligned}U &= (\frac{e\sinh(av+b)\sin u}{\sqrt{\sinh^2(av+b)(1+\frac{1}{a^2}\cosh^2 v)}}, -\frac{e\sinh(av+b)\cos u}{\sqrt{\sinh^2(av+b)(1+\frac{1}{a^2}\cosh^2(av+b))}}, \\ &\quad -\frac{1}{a}\frac{\cosh(av+b)\sinh(av+b)}{\sqrt{\sinh^2(av+b)(1+\frac{1}{a^2}\cosh^2(av+b))}})\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}L &= \langle U, \varphi_{uu}\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M &= \langle U, \varphi_{uv}\rangle \\ &= \frac{e(\cosh^2(av+b)-1)}{\sqrt{\frac{1}{a^2}(\cosh^2(av+b)-1)(e^2a^2-\cosh(av+b)^2)}}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}N &= \langle U, \varphi_{vv}\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Bulduğumuz bu E, F, G, L, M, N değerlerini (2.9) denkleminde yerine yazalım

$$H = 0$$

bulunur.

KAYNAKLAR

1. BLASCHKE W., Diferensiyel Geometri Dersleri, İstanbul Üniversitesi Yay. No. 433, 1949.

2. HACISALİHOĞLU H. H., Diferensiyel Geometri, Cilt I, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları, 1993.

3. HACISALİHOĞLU H. H., Diferensiyel Geometri, Cilt II, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları, 2000.

4. HACISALİHOĞLU H. H., Diferensiyel Geometri, Cilt III, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları, 2004.

5. HACISALİHOĞLU H. H. ve TURGUT A., Timelike Ruled Surfaces in the Minkowski 3-space, Far East J. Math. Sci. 5, no. 1, 83–90, 1997.

6. SINPO T., The Equations Of Motion on Surfaces, and Minimal Surfaces, 2004.

7. INOGUCHI J. ve TODA M, Timelike Minimal Surfaces via Loop Groups, Acta Applicandae Mathematicae, Vol. 83, no. 3, 313-355, 2004.

8. OSSERNAN R., A Survey of Minimal Surfaces, Van Nostrand Reinhold, New York 1969.

9. J. LOPEZ F., LOPEZ R., SOUAM R., Maximal Surfaces of Riemann type in Lorentz-Minkowski space, Michigan J. of Math, Vol. 47 469-497, 2000.

10. KURENNOY S., Example and History of Minimal Surfaces, 2004.

11. KİEHN R.M, Propagating Topological Singularities in the Lightcone: the Photon, 2005.

12. FERNANDEZ I. ve J. LOPEZ F., Periodic Maximal Surfaces in the Lorentz-Minkowski space, arXiv e-print archive math. D6/0412461 V1, 2005.

13. J. LOPEZ F., Global Geometry of Maximal Surfaces in the Lorentz-Minkowski space, Lecture notes, 2005.

14. WOESTİJNE V. I., Minimal surfaces of the 3-dimentional Minkowski space, World Scientific Publishing, Singapore 344-369, 1990.

15. ŞEMİN F., Diferansiyel Geometri, Cilt I, İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları, 1983.

16. ŞEMİN F., Diferansiyel Geometri, Cilt II, İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları, 1983.

17. KİEHN R.M., Spacelike Zero Mean Curvature Surfaces in Lorentz Spaces, 1999.

18. BEEM, J. K. ve EHRLICH P. E., Global Lorentzian Geometry, Marcel Dekker. Inc., New York, 1981.

19. O NEİLL B.,Semi Riemannian Geometry, A. Press, London, 1983.

20. J. LOPEZ F., LOPEZ R., SOUAM R., The Space of Complete Embedded Maximal Surfaces with izolated singularities in the 3-Dimensional Lorentz-Minkowski Space, arXiv Math D6/0311330 Rev V2, 2005.