Genelleştirilmiş Poincaré Uzaklığı Üzerine

Sezin Cirdi Şaan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Haziran 2023

On the Generalized Poincaré Distance

Sezin Cirdi Şaan

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics and Computer

June 2023

Genelleştirilmiş Poincaré Uzaklığı Üzerine

Sezin Cirdi Şaan

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği Uyarınca
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Ayşe Bayar

Haziran 2023

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı Geometri Bilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi **Sezin Cirdi Şaan**'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "**Genelleştirilmiş Poincaré Uzaklığı Üzerine**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Ayşe Bayar

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Ayşe Bayar

Üye : Prof. Dr. Süheyla Ekmekçi

Üye : Prof. Dr. Mine Turan

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Ayşe Bayar danışmanlığında hazırlamış olduğum "**Genelleştirilmiş Poincaré Uzaklığı Üzerine**" başlıklı Yüksek Lisans tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim.
22/06/2023

Sezin Cirdi Şaan

ÖZET

Bu çalışmada Öklidyen üst yarı düzlem üzerinde tanımlı Poincaré uzaklığı genelleştirilmiştir. Öklidyen üst yarı düzleminde Genelleştirilmiş Hiperbolik düzlem modelleri ve hiperbolik uzay incelenmiştir. Tez yedi bölümden oluşmaktadır. Tezin ilk üç bölümü tezin giriş ve amacı, tez ile ilgili literatür araştırması ve hiperbolik düzlemin temel kavramlarından oluşmaktadır. Tezin dördüncü bölümünde Poincare üst yarı düzlem modelinden ve bu düzlemin jeodeziklerinden bahsedilmektedir. Beşinci bölümde Genelleştirilmiş $\mathbb{H}_k$ üst yarı düzlem modelleri incelenmiştir. Altıncı bölümde Genelleştirilmiş Poincaré uzaklık kavramı tanımlanmış ve üst yarı düzlemde dikey, yatay doğrular ile merkezi x-ekseni üzerinde olan yataysal ve dikeysel elips yayları üzerindeki iki nokta arasındaki uzaklık incelenmiştir. Ayrıca, x-eksenine paralel ötelemeler ve dikey doğrulara göre yansımalarının genelleştirilmiş Poincaré uzaklığını koruduğu gösterilmiştir. Son bölümde üst yarı uzay üzerinde tanımlı hiperbolik uzay çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Hiperbolik Geometri, Hiperbolik Uzay, Üst Yarı-düzlem, Poincaré

SUMMARY

In this study, the Poincaré distance defined on the Euclidean upper half plane has been generalized. Generalized Hyperbolic plane models and hyperbolic space in the Euclidean upper half plane are studied.

The thesis consists of seven chapters. The first three chapters of the thesis consist of the introduction and purpose of the thesis, the literature research related to the thesis and the basic concepts of the hyperbolic plane. In the fourth part of the thesis, the Poincare upper half plane model and geodesics of this plane are mentioned. In the fifth chapter, Generalized $\mathbb{H}_k$ upper half-plane models have been examined. In the sixth chapter, the concept of Generalized Poincaré distance is introduced and the distance between two points on vertical and horizontal lines in the upper half-plane, as well as on horizontal and vertical ellipse arcs with the center on the x-axis, is investigated. Additionally, it is demonstrated that translations parallel to the x-axis and reflections with respect to vertical lines preserve the generalized Poincaré distance. In the final chapter, hyperbolic space defined on the upper half-space is studied.

Keywords : Hyperbolic Geometry, Hyperbolic Space, Upper Half-plane, Poincaré

TEŞEKKÜR

Beni bu çalışmaya sevk eden, çalışmam boyunca değerli yardımlarını esirgemeyen hocam **Prof. Dr. Ayşe Bayar**'a, kıymetli eşim **Tahsin Gökalp Şaan**'a, kızım **Doğa İrem Şaan**'a ve aileme sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET . . . . . **vi**

SUMMARY . . . . . **vii**

TEŞEKKÜR . . . . . **viii**

İÇİNDEKİLER . . . . . **ix**

ŞEKİLLER DİZİNİ . . . . . **xi**

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ . . . . . **xii**

1. GİRİŞ VE AMAÇ **1**

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI **2**

3. TEMEL KAVRAMLAR **6**

4. POİNCARÉ ÜST YARI DÜZLEM MODELİ **9**
4.1. Öklidyen Uzaklık Fonksiyonu 9
4.2. Poincaré Uzaklık Fonksiyonu 9
4.3. Doğru Parçalarının Hiperbolik Uzunluğu 11
4.4. Çember Yaylarının Hiperbolik Uzunluğu 14
4.5. H-düzleminde Öklidyen ve Hiperbolik Uzaklıklar Arasındaki İlişki . 19
4.6. Üst Yarı Düzlem Modelinin Jeodezikleri 22
4.7. Hiperbolik Orta Nokta 26

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ POİNCARÉ ÜST YARI DÜZLEM MODELLERİ . **27**
5.1. $\mathbb{H}_k$ Poincaré Düzlemleri 27
5.2. $\mathbb{H}_k$ nın Diğer Özellikleri 32

6. GENELLEŞTİRİLMİŞ POİNCARÉ UZAKLIĞI **39**
6.1. Genelleştirilmiş Poincaré Metrik 40
6.2. Yatay, Dikey Doğru Parçalarının ve Eliptik Yayların Genelleştirilmiş Poincaré Uzunlukları 41
6.3. Genelleştirilmiş Poincaré Uzaklığını Koruyan Dönüşümler 46

7. HİPERBOLİK UZAY **48**

7.1. H^3 de Herhangi Bir γ Eğrisinin Hiperbolik Uzunluğuyla İlgili Bazı Genellemeler 51
7.2. H^3 ün Katı Hareketleri 56
7.3. Poincaré Üst Yarı Uzayının Jeodezikleri 60

8. SONUÇ VE ÖNERİLER 64

KAYNAKLAR DİZİNİ 65

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil		Sayfa
4.1	Hiperbolik uzaklık	10
4.2	İki nokta arasındaki d_H uzaklığı	14
4.3	Aynı merkezi paylaşan Öklid çember yaylarının uzunlukları	15
4.4	P ve Q noktaları arasındaki d_H uzaklığı	16
4.5	Aynı merkezli Öklidyen çember yayların uzunluklarının eşitliği	17
4.6	Dikey doğru üzerindeki noktaların Öklidyen ve hiperbolik uzaklıkları arasındaki ilişki	20
4.7	Apsisleri farklı noktaların Öklidyen ve Poincaré uzaklıkları arasındaki ilişki	21
4.8	Yay jeodezik parçasının hiperbolik uzunluğu	25
5.1	$\mathbb{H}_2$ düzleminde L_{24c} doğrusu	28
5.2	$\mathbb{H}_{\frac{1}{2}}$ düzleminde $L_{\frac{1}{2}4c}$ doğrusu	29
5.3	$\mathbb{H}_1$ düzleminde L_{123} doğrusu	30
5.4	H_2 düzleminde L_{223} doğrusu	31
5.5	L_{123} doğrusu üzerindeki noktanın L_{223} doğrusu üzerindeki noktaya ötelenmesi	31
5.6	Yarı çemberler ve yarı elipsler arasındaki ilişki	33
5.7	Düzlem ayırma	38
7.1	H^3 te PQ yayının hiperbolik uzunluğu	59
7.2	Poincaré üst yarı uzayda jeodezik	60

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
d_E	Öklidyen uzaklık
d_H	Poincaré uzaklık
L_p	Öklidyen yarı doğru
$H - düzlemi$	Poincare üst yarı düzlem
H^3	Hiperbolik uzay
L_{kac}	Öklidyen yarı elips
$\mathbf{L}$	Üst yarı düzlemin doğrular kümesi
$\mathbb{H}_k$	Genelleştirilmiş Poincaré yarı düzlemi
$\mathbb{H}_1$	Klasik Poincaré yarı düzlemi
$(\mathcal{P}, \mathbf{L})$	Soyut Geometri

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Öklid'in paralellik postulatının değiştirilmesi, Öklidyen olmayan geometrilerin, özellikle hiperbolik geometrinin ortaya çıkmasını sağlamıştır. Bu durum, farklı hiperbolik düzlem modellerinin geliştirilmesine yol açmıştır. Bu modellerden biri, Henri Poincaré tarafından ortaya atılan üst yarı-düzlem modelidir.

Öklid geometrisinin paralellik postulatına benzer şekilde, düzlemde bir doğru ve üzerinde olmayan bir nokta verildiğinde, bu noktadan geçen ve verilen doğruya paralel birden çok doğru mevcuttur. Bu postulat, hiperbolik geometri veya Öklid dışı geometrilerin temelini oluşturur. Hiperbolik geometride, üst yarı düzlem modeli, disk modeli, yarı küre modeli, Klein modeli ve hiperboloidal model gibi beş temel model ve bu modeller arasında izometrik geçişler bulunur.

Ayrıca her genelleştirilmiş Poincaré üst yarı düzlem geometrisi, hiperbolik geometri aksiyomlarını karşılayan bir doğal geometridir. Yani Öklid düzlem geometrisinin paralellik aksiyomu hariç tüm aksiyomlarını karşılar.

Bu çalışmada üst yarı düzlemde Poincaré uzaklık fonksiyonunu içeren genel bir uzaklık fonksiyonunun verilmesi ve sahip olduğu özelliklerin incelenmesi amaçlanmıştır.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Geometri eski çağlardan beri bir çok farklı alanada sorunları çözmek için araç olarak kullanılmaktadır. M.Ö yaklaşık 300'lü yıllarda Yunanistan'da Euclid tarafından yazılan "Elements" eserinde Öklid geometrinin temelini oluşturan tanımlar, aksiyomlar ve postulatlar bulunmaktadır. Bu postulardan ilk beşi geometrinin oluşmasında önemli rol oynamaktadır.

Postulat I. Her nokta çiftini birleştiren yalnız ve ancak bir tek doğru parçası vardır.

Postulat II. Herhangi bir doğru parçası her iki doğrultuda sonsuza kadar uzatılabilir.

Postulat III. Belirli bir merkez ve yarıçapa sahip olan bir tek çember çizilebilir.

Postulat IV. Tüm dik açılar birbirine eşittir.

Postulat V. İki farklı doğruyu kesen bir doğru, aynı taraftaki iç açıları iki dik açıdan daha küçük yapıyorsa, bu iki doğru sonsuza kadar uzatıldığında, açıların daha küçük olduğu tarafta kesişirler.

John Playfair tarafından ifade edilen Playfair Postulatı yaklaşık olarak 19. yüzyıla kadar **Postulat V**'in eşdeğeri olarak kabul edilmektedir.

Playfair Postulatı: Bir doğru ve üzerinde olmayan bir nokta verildiğinde, bu noktadan geçen ve verilen doğruya paralel olan tek bir doğru bulunur. Bu postulat, Öklid geometrisindeki paralellik postulatından farklı olarak, sadece tek bir paralel doğrunun var olduğunu belirtir.

19. yüzyıla kadar Gerolamo Saccheri, Johann Lambert, Adrien-Marie Legendre vb. matematikçiler bu postulatla ilişkili çalışmalar yapmışlardır. 19. yüzyıldan itibaren matematikçiler bu çalışmaları bırakmışlardır. Ardından Öklidin ilk 4 postulatını içeren ve 5. postulatın yerine yeni bir aksiyomu öneren bir sistem düşünülmüştür.

Düzlemde bir doğru ve üzerinde olmayan bir nokta verildiğinde, bu noktadan geçen ve verilen doğruya paralel olan birden çok doğru vardır(**Hiperbolik aksiyom**).

Poincaré modeli, hiperbolik geometrinin en popüler modellerinden biridir ve hiperbolik uzayı tanımlayan bir düzlem modelidir. Hiperbolik uzayda doğrular, Poincaré modelinde çember yayları ve dikey yarı doğrular olarak temsil edilir. Bu özellik, birçok geometrik özelliği ve formülü düzlemdeki hallerine benzer şekilde ifade etmemizi sağlar.

Nikolai Lobachevsky ve János Bolyai'nin yaptığı çalışmalarla birlikte hiperbolik geometrinin temelleri oluşturmuştur.

Richard S. Millman, 1980 çalışmasında derslerinde anlattığı hiperbolik insidans geometri, hiperbolik uzaklık, cetvel postulatı, hiperbolik açısal uzaklık konuları hakkında bilgiler vermektedir.

Richard S Millman ve G. D. Parker, 1993 eserinde çeşitli aksiyomlar, tanımlar ve teoremler bilindik kartezyen düzlemden Poincaré üst yarı düzleme, taksi düzlemine ve Moulton düzlemine kadar değişen modellerle gösterilmiştir. Ayrıca Nötr (mutlak) geometrinin temelleri ele alınmış ve izometrileri sınıflandırılmıştır.

Sönmez ve Barbu, 2000 çalışmasında "Smarandache" teoreminin hiperbolik formunu ispatlanmıştır.

Dobbs, 2001 çalışmasında Poincaré üst yarı düzlem modelinde, $x_1 \neq x_2$ olmak üzere iki nokta $P_1(x_1, y_1)$ ve $P_2(x_2, y_2)$ ile verildiğinde P_1 ve P_2'den geçen jeodeziğin bir kartezyen denklemini ve P_1 ile P_2 arasındaki hiperbolik uzaklık için bir integral ifadesini kullanmıştır. Bu formüllerin yalnızca P_1 ve P_2 noktalarının koordinatlarına bağlı olduğunu göstermiştir. Ayrıca jeodezik üzerindeki noktalarının koordinatlarını bulmak için kullanılan uzaklık formülünü Ceva Teoremi gibi sonuçların hiperbolik geometride geçerli olduğunu göstermek için kullanmıştır.

J. R. Parker, 2003 çalışmada kompleks hiperbolik geometrinin ve modellerinin çeşitli yönlerini açıklamaktadır. Kompleks hiperbolik izometriler ve Cygan metriklerinden bahsetmektedir.

Anderson, 2006 eserinde hiperbolik düzlemin üst yarı düzlem modeli olan H'yi tanımlamıştır. Hiperbolik doğrulardan, paralellikten ve H'nin dönüşümlerinden bahsetmektedir. H'nin, Riemann küresi $\overline{\mathbb{C}}$'nin bir altkümesi olduğunu tanımlamaktadır. Ayrıca kitapta ele alınan hiperbolik geometri modelleri daha yüksek boyutlara genelleştirilmiştir.

Dunham, 2012 çalışmada ressam M.C. Escher'ın eserlerini incelemiştir. Ressammın eserlerinde Poincaré disk modelini ve Poincaré yarı düzlem modelini kullandığını belirtmiştir. Ardından Escher tarzı desen örnekleri vermiştir.

Terras, 2013 eserinde "Poincaré " veya "Lobatchevsky'nin" üst yarı düzleminde Öklidyen olmayan Fourier analizini incelemiştir. Bu analizde, SL(2, R) grubunun spektral ölçümü belirlemek için nasıl kullanıldığı ve Öklidyen olmayan Laplacian üzerindeki Dirichlet probleminin çözümü gibi uygulamalar yapmıştır.

Horváth, 2015 çalışmada 19. yüzyılda ünlü Macar matematikçi Cyrill Vörös tarafından tanıtılan uzaklık kavramıyla, bilinmeyen hiperbolik düzlem geometrisi sonuçları elde edilmektedir.

Rostamzadeh ve Taherian, 2016 çalışmasında Jirovektör uzaylarının izomorfizma özelliklerini kullanarak, Poincaré modelini hiperbolik geometrinin tüm düzlemine, Chen hiperbolik geometri modeli olarak adlandırılan şekilde genişletmiştir.

Hopper, 2019 çalışmada Hyperbolik geometrinin üç düzlem modeli olan: Poincaré disk modeli, üst yarı düzlem modeli ve Klein disk modelini açıklamıştır. Ayrıca, Riemann Haritalama Teoremi'nin bir kanıtını sunarak bu modellerle olan ilişkisini ve hiperbolik geometrinin diğer düzlem modellerini oluşturma açısından ne anlama geldiğini tartışmıştır.

Kaya, 2019 çalışmasında her genelleştirilmiş Poincaré üst yarı düzlem geometrisinin hiperbolik aksiyomu sağlayan nötr bir geometri olduğunu göstermiştir.

Garra vd. 2020 çalışmasında hiperbolik Poincaré yarı düzlemindeki genelleştirilmiş zamana bağlı fraksiyonel difüzyon denklemlerini incelemiştir.

Bercu ve Crasmareanu, 2021 çalışmasında iki boyutlu genelleştirilmiş Poincaré metriğindeki harmonik fonksiyon sınıflarını araştırmaktadır. Toplama ve

çarpma yöntemleriyle ayrılma değişkenlerini incelemekte, tam jeodezik fonksiyonların özelliklerini keşfetmekte ve metrik için Bochner formülünü ve özel durumlarını tartışmaktadır.

Gorni ve Zampieri, 2023 çalışmasında Poincaré yarı düzlemi için jeodeziklerin standart olmayan bir türevini sunmaktadır. Ayrıca sistemin faydalı özelliklerinin herhangi bir simetriden esinlenmeyen Noether benzeri dönüşümler ailesinden çıkarılabileceğini göstermektedir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Hiperbolik düzlem, Öklidyen geometrinin tüm aksiyomlarını sağlamayan Öklid dışı bir geometridir. Hiperbolik geometride, paralellik postulatı geçerli değildir, bu da bir noktadan geçen birden fazla paralel doğru olabileceği anlamına gelir. Hiperbolik düzlemi görselleştirmenin bir yolu, üst yarı düzlem modelidir, bu da hiperbolik düzlemi kompleks düzlemde temsil eder. Bu modelde, iki nokta arasındaki hiperbolik mesafe, noktaları temsil eden iki kompleks sayının oranının logaritması olarak tanımlanır. Üst yarı düzlem modeli, kompleks düzlemin üst yarısında Möbius dönüşümlerine göre değişmez kalan bir metrik tanımlanarak elde edilir. Daha spesifik olmak gerekirse, hiperbolik düzlem, üst yarım düzlem modelindeki hiperbolik metriği sağlayan noktaların kümesidir.

Hiperbolik metrik şu şekilde tanımlanır: Üst yarı düzlem modelinde z_1 ve z_2 gibi iki nokta verildiğinde, bu iki nokta arasındaki hiperbolik uzaklık aşağıdaki formülle hesaplanır:

$$d(z_1, z_2) = \operatorname{arccos} h(1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2\,\mathrm{Im}(z_1)\,\mathrm{Im}(z_2)}).$$

Burada z_1 ve z_2 iki noktayı temsil eden kompleks sayılardır, $|z_1 - z_2|$ bu iki nokta arasındaki Öklidyen uzaklığı ve Im(z) de z kompleks sayısının imajiner kısmını belirtir.

Kısaca üst yarı düzlem modelindeki hiperbolik düzlem, Möbius dönüşümlerine göre değişmez bir metrikle tanımlanan Öklid dışı geometriye sahip olup bu düzlemde iki nokta arası hiperbolik uzaklık, noktaları temsil eden iki kompleks sayının oranının logaritmasıyla hesaplanır.

Ayrıca hiperbolik düzlem, sabit negatif bir eğrilikle karakterize edilen bir Öklid dışı geometridir. Genellikle üst yarı düzlem modeli olarak temsil edilir, bu da kompleks düzlemin bir alt kümesidir. Öklidyen uzaklık fonksiyonu, iki nokta arasındaki mesafeyi ölçen bir fonksiyondur ve karşılık gelen koordinatların farklarının karelerinin toplamının karekökü olarak tanımlanır. Öklidyen uzaklık fonksiyonu hiperbolik düzlemde üçgen eşitsizliğini sağlamadığından hiperbolik düzlemde iki nokta arasındaki mesafeyi ölçmek için hiperbolik uzaklık fonksiyonu

kullanılır. P_1 ve P_2 hiperbolik düzlemdeki iki nokta ve bu noktalar arasındaki hiperbolik uzaklık ρ

$$\cosh(\rho) = \frac{\cos(d(P_1, P_2)) + \cosh(d(P_1, P_2))}{2}$$

formülü ile hesaplanır ve burada $d(P_1, P_2)$ üst yarı düzlemdeki Öklidyen uzaklıktır. Bu ifade, hiperbolik düzlemdeki iki nokta arasındaki uzaklığı Öklid uzaklığına dayalı olarak hesaplar, ancak bu hesaplama, hiperbolik düzlemin eğriliği tarafından belirlenen bir ölçek faktörü ile düzeltilir.

Hiperbolik geometri, paralel doğruların kesişmediği, paralel olmayan bir geometri türüdür. Hiperbolik düzlem modelleri, sabit negatif bir eğriliğe sahip iki boyutlu bir yüzeyi temsil etmenin yollarıdır. Farklı özelliklere ve avantajlara sahip birkaç hiperbolik düzlem modeli bulunmaktadır.

En iyi bilinen hiperbolik düzlem modellerinden biri, hiperbolik düzlemi Öklidyen düzlemde bir disk olarak temsil eden **Poincaré disk modelidir**. Bu modelde, hiperbolik çizgiler, disk sınırlarıyla dik açıda kesişen daire yayları olarak temsil edilir. Poincaré disk modeli açıları koruyan (konformal) bir modele sahiptir ve genellikle bilgisayar grafikleri ve görselleştirmede kullanılır.

Başka bir hiperbolik düzlem modeli ise **Poincaré yarı düzlem modelidir**. Bu modelde, hiperbolik düzlem, karmaşık düzlemde üst yarı düzlem olarak temsil edilir. Bu modelde, hiperbolik çizgiler, gerçel ekseni dik açıda kesen dikey yarı doğrular olarak temsil edilir. Poincaré yarı düzlem modeli de açıları koruyan bir modele sahiptir ve genellikle kompleks analiz ve sayı teorisi alanlarında kullanılır.

Hiperboloid modeli, hiperbolik düzlemi temsil etmenin başka bir yoludur. Bu modelde, hiperbolik düzlem, üç boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey olarak temsil edilir. Hiperbolik doğrular, merkezinden geçen düzlemlerin Hiperboloid ile kesişimi olarak temsil edilir. Hiperboloid modeli açıları korumaz (konformal değildir), ancak hiperbolik geometriyi üç boyutta temsil etme avantajına sahiptir.

Diğer hiperbolik düzlem modelleri arasında **Klein disk modeli** bulunur. Poincaré disk modeline benzer, ancak farklı bir projeksiyon kullanır. Ayrıca, n-boyutlu Öklidyen uzaydaki Hiperboloid modeli, Hiperboloid modelini daha yüksek boyutlara genişletir.

Özetlemek gerekirse, hiperbolik düzlem modelleri, sabit negatif bir eğriliğe sahip iki boyutlu bir yüzey olan hiperbolik düzlemi temsil etme yöntemleridir. En iyi bilinen modeller arasında Poincaré disk modeli, Poincaré yarı düzlem modeli ve hiperboloid modeli bulunur. Her modelin kendine özgü özellikleri ve avantajları vardır ve matematik, fizik gibi alanlarda farklı şekillerde kullanılır.

Tanım 1. *$\mathcal{P}$ noktalar kümesi ve* **L** *doğrular kümesi olmak üzere*

A1) $\mathcal{P}$ de farklı iki noktayı birleştiren bir tek $l \in$ **L** *doğru vardır.*

A2) Her doğru üzerinde en az iki nokta vardır.

şartlarını sağlayan $(\mathcal{P}, \mathbf{L})$ sistemine soyut geometri denir.

Tanım 2. *I* ***insidens geometrisi****, elemanları noktalardan oluşan $\mathcal{P}$ kümesi ve $\mathcal{P}$ 'nin boştan farklı bütün alt kümelerinin birleşimiyle oluşan* **L** *doğrular kümesinden oluşan ve aşağıdaki aksiyomları sağlayan yapıdır:*

A1)$\mathcal{P}$ de farklı iki noktayı birleştiren bir tek doğru vardır.

A2) $\mathcal{P}$ de aynı doğru üzerinde olmayan üç nokta vardır.

Tanım 3. *$\mathcal{P}$ boştan farklı bir küme olsun. $\forall P, Q \in \mathcal{P}$ için*

aşağıdaki özellikleri sağlayan $d : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna ***uzaklık fonksiyonu*** *denir.*

i) $d(P, Q) \geq 0$,

ii) $d(P, Q) = 0$ *gerek ve yeter koşul* $P = Q$,

iii) $d(P, Q) = d(Q, P)$.

Tanım 4. *Insidens geometri üzerinde bir d uzaklık fonksiyonu ve l de insidens geometride bir doğru olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $f : l \to \mathbb{R}$ fonsiyonuna* ***Cetvel*** *denir.*

i) $\forall l \in$ **L** *için f birebir ve örtendir.*

ii) l *doğrusu üzerinde her P ve Q nokta çifti için $|f(P) - f(Q)| = d(P, Q)$ dır.*

4. POİNCARÉ ÜST YARI DÜZLEM MODELİ

Bu bölümde Stahl, 1993'ın eserinden ve Sönmez, 2006'in çalışmasından faydalanılmıştır. Üst yarı düzlem modelinde bir nesnenin uzunluğunun x-eksenine olan uzaklığıyla ters orantılı olarak değiştiğini söylenebilir. x-eksenine paralel doğrularda başlangıç ve bitiş değerleri aynı gibi görünse de x-eksenine yaklaştıkça bu noktalar arasındaki mesafenin kısaldığı düşüncesinden hareketle uzaklık tanımı yapılmaktadır. Hiperbolik düzlemin üst yarı düzlem modelinde uzaklık, Öklidyen uzunluğun dikey uzaklık (y koordinatı) ile orantılı bir oranı olarak tanımlanır ve bu orantı için seçilen sabit 1'dir. Ancak bu tanımı hiperbolik uzunluğun resmi bir tanımı olarak algılamamak önemlidir. Bu tanım, Şekil 4.1 deki örnekte olduğu gibi A dan B ye uzanan doğru parçasının hiperbolik uzunluğunun 2/1.5=4/3 olduğunu ve E den F ye uzanan doğru parçasının hiperbolik uzunluğunun 2/0.5 = 4 olduğunu kolaylıkla gösterse de, E den A ya veya B ye uzanan doğru parçalarının hiperbolik uzunluklarını hesaplamanın kısa bir yolunu sağlamaz. Bu noktaların uzaklığını hesaplamak için, sonsuz küçük alan hesabından yararlanılmaktadır.

4.1 Öklidyen Uzaklık Fonksiyonu

Kartezyen düzlemde $P(x, y), Q(x + dx, y)$ ve $R(x + dx, y + dy)$ noktalarından oluşan sonsuz küçük bir üçgen düşünülerek,

P ile R noktaları arasındaki Öklidyen uzaklık,

$$d_E(P, R) = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

şeklinde tanımlanır.

4.2 Poincaré Uzaklık Fonksiyonu

Kartezyen düzlemin x-ekseni üstünde kalan üst yarı düzleminde $P(x, y), Q(x + dx, y)$ ve $R(x + dx, y + dy)$ noktalarından oluşan sonsuz küçük bir üçgen düşünülerek alınan, P ile R noktaları arasındaki Poincaré uzaklığı,

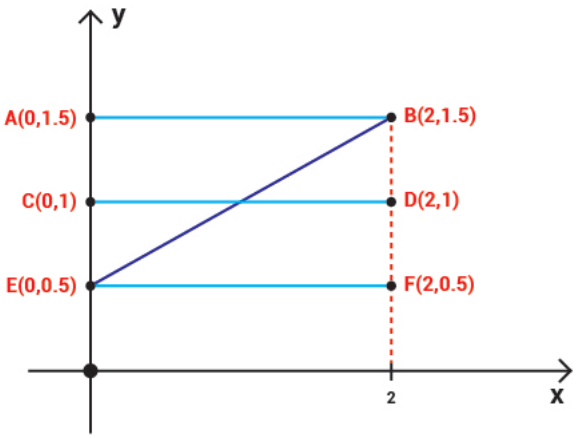
$$d_H(P,R) = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx$$

ile tanımlanır. Burada x-eksenine dik olan yarı doğrular ve merkezi x-ekseni üzerinde olan yarı çemberler üst yarı düzlemdeki doğrular olarak tanımlandığında, hiperbolik düzlemin bir üst yarı düzlem modeli elde edilir. Bu modelde, keyfi bir γ eğrisinin hiperbolik uzunluğu

$$\int_\gamma \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}$$

olarak tanımlanır. Bu aynı zamanda Poincaré metriği olarak tanımlanan uzaklık fonksiyonudur. Öklid yarı düzlemi ile birlikte Poincaré metriği, genellikle Poincaré yarı düzlemi olarak bilinir.

Örnek 1. *Öklid üst yarı düzleminde* $A(0,1.5)$, $B(2,1.5)$, $C(0,1)$, $D(2,1)$, $E(0,0.5)$ *ve* $F(2,0.5)$ *noktalarını göz önüne alalım.*



Şekil 4.1 Hiperbolik uzaklık

AB, CD ve EF paralel doğru parçalarının Öklidyen uzunlukları eşit olmasına rağmen Poincaré uzunlukları x-eksenine yaklaştıkça artmaktadır.

AE doğru parçasının Öklidyen uzunluğu 1 iken Poincaré uzaklığı

$$d_H(A,E) = \int_{0.5}^{1.5} \frac{dy}{y} = \ln 1.5 - \ln 0.5 = \ln 3$$

olarak bulunur.

E ve B noktalarını birleştiren doğru denklemi:

$$(y - 0.5) = \frac{1}{2}(x - 0)$$

den

$$y = \frac{x+1}{2}$$

dir.

$$dy = \frac{dx}{2}$$

değeri bu Poincaré uzaklık fonksiyonunda yerine yazılarak EB dik doğru parçasının Poincaré uzunluğu

$$d_H(E,B) = \int_0^2 \frac{\sqrt{dx^2 + \frac{dx^2}{4}}}{\frac{x+1}{2}} = 2\frac{\sqrt{5}}{2}\int_0^2 \frac{dx}{x+1}$$

$$= \sqrt{5}\ln|x+1|\Big|_0^2$$

$$= \sqrt{5}\ln 3$$

olarak bulunur.

4.3 Doğru Parçalarının Hiperbolik Uzunluğu

Bu bölümde dikey, yatay ve eğimli doğrular üzerinde Poincaré uzaklığı incelenmiştir.

Önerme 1. *Öklidyen üst yarı düzlemde $P(a, y_1)$ ve $Q(a, y_2)$ noktalarını birleştiren Öklidyen doğru parçasının Poincaré uzunluğu*

$$d_H = \left| \ln \frac{y_2}{y_1} \right|$$

dir.

İspat. *Öklidyen üst yarı düzlemde* $P(a, y_1)$ *ve* $Q(a, y_2)$ *noktalarını birleştiren* γ *doğru parçasının denklemi* $x = a$ *olduğundan* $dx = 0$ *olup* γ *üzerinde Poincaré uzaklığı*

$$\int_\gamma \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$$

de yerine yazıldığında

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y} = \left| \ln \frac{y_2}{y_1} \right|$$

elde edilir. Sonuç olarak üst yarı düzlemde dikey doğru parçalarının Poincaré uzunluğu dikey doğru parçasının bulunduğu konumdan bağımsızdır.

Önerme 2. *Öklidyen üst yarı düzlemde* $P(x_1, b)$ *ve* $Q(x_2, b)$ *noktalarını birleştiren Öklidyen doğru parçasının Poincaré uzunluğu*

$$d_H = \frac{1}{b} \int_{x_1}^{x_2} dx = \frac{1}{b} |x_1 - x_2|$$

dir.

İspat. *Öklidyen üst yarı düzlemde* $P(x_1, b)$ *ve* $Q(x_2, b)$ *noktalarını birleştiren* γ *doğru parçasının denklemi* $y = b$ *olduğundan* $dy = 0$ *olup* γ *üzerinde tanımlı Poincaré uzaklık formülü*

$$\int_\gamma \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$$

de yerine yazıldığında

$$\frac{1}{b} \int_{x_1}^{x_2} dx = \frac{1}{b} |x_1 - x_2|$$

olarak elde edilir.

Sonuç olarak üst yarı düzlemde x-eksenine paralel doğru parçalarının Poincaré uzunlukları x-eksenine yaklaştıkça artmaktadır.

Önerme 3. *Öklidyen üst yarı düzlemde $y = mx + n$ doğrusu üzerinde, $y_2 \geq y_1$ olacak şekilde alınan $P(x_1, y_1)$ ve $Q(x_2, y_2)$ noktaları arasında kalan doğru parçasının Poincaré uzunluğu*

$$d_H = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} \ln \frac{y_2}{y_1}$$

dir.

İspat. *Öklidyen üst yarı düzlemde $y = mx + n$ doğrusu üzerinde $P(x_1, y_1)$ ve $Q(x_2, y_2)$ noktalarını göz önüne alalım. $dy = mdx$ olduğundan Poincaré uzaklık formülünde yerine yazıldığında PQ doğru parçasının Poincaré uzunluğu doğrunun eğimine bağlı olarak,*

$$\begin{aligned}
\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{dx^2 + m^2 dx^2}}{mx+n} &= \sqrt{1+m^2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{mx+n} \\
&= \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} \ln |mx+n| \Big|_{x_1}^{x_2} \\
&= \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} \ln \frac{|mx_2+n|}{|mx_1+n|} \\
&= \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} \ln \frac{y_2}{y_1}
\end{aligned}$$

dir.

Örnek 2. $(0, 2)$ *ve* $(2, 4)$ *noktalarını birleştiren* $y = x + 2$ *eğrisinin Poincaré uzunluğu*

$$\int_\gamma \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$$

Poincaré metriği kullanılarak

$$\int_0^2 \frac{\sqrt{(dx)^2+(dx)^2}}{x+2} = \sqrt{2}\ln 2$$

şeklinde bulunur.

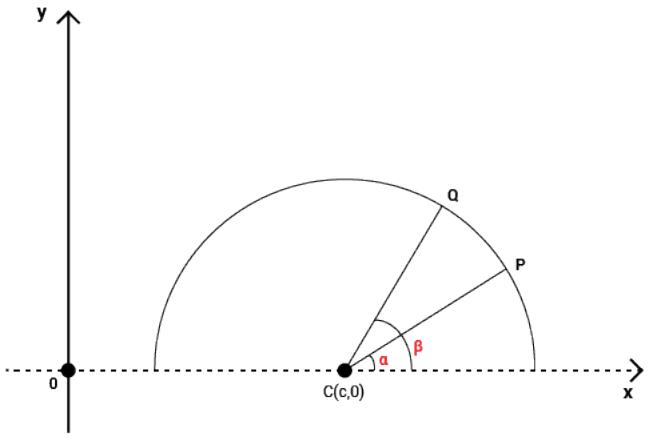
4.4 Çember Yaylarının Hiperbolik Uzunluğu

Bu bölümde Poincaré üst yarı düzlemde çember yaylarının hiperbolik uzunlukları incelenmekte ve aynı merkeze sahip yarı çemberlerin merkezinden çıkan ışınlar arasında kalan yay uzunluklarının eşit olduğu gösterilmektedir.

Önerme 4. *q, merkezi $C=(c,0)$ ve yarıçapı r olan bir yarı çember olsun. P ve Q, q çemberi üzerinde iki nokta olsun. CP ve CQ yarıçapları x-ekseninin pozitif yönüyle sırasıyla α ve β açıları yapsın. Bu durumda verilen P ve Q noktaları arasındaki d_H uzaklığı*

$$d_H(P,Q) = \left|\ln \frac{\csc\beta - \cot\beta}{\csc\alpha - \cot\alpha}\right|$$

formülüyle bellidir.



Şekil 4.2 İki nokta arasındaki d_H uzaklığı

İspat. *$C=(c,0)$ merkezli r yarıçaplı q üst yarı çemberi üzerinde keyfi bir (x,y) noktasından geçen yarıçapın x-ekseniyle yaptığı açı t olsun. O zaman C kutup noktasında tanımlı kutupsal koordinatlara göre q nun denklemi*

$$x = c + r\cos t, \quad y = r\sin t$$

olup

$$dx = -r\sin t dt, dy = r\cos t dt$$

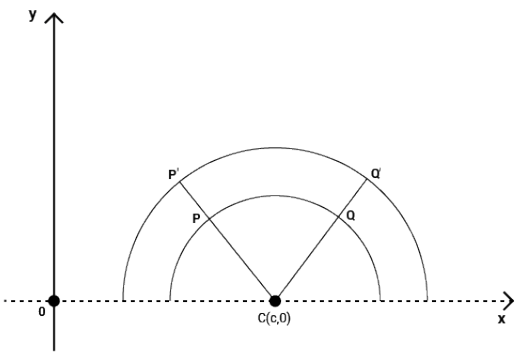
değerleri hiperbolik uzaklık fonksiyonunda yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} d_H(P,Q) &= \int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{(-r\sin t dt)^2 + (r\cos t dt)^2}}{r\sin t} \\ &= \int_\alpha^\beta \frac{r dt}{r\sin t} \\ &= \int_\alpha^\beta \csc t dt \\ &= \left|\ln \frac{\csc\beta - \cot\beta}{\csc\alpha - \cot\alpha}\right| \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 1. *PQ ve $P'Q'$ aynı merkezi paylaşan Öklidyen çemberlerinin yayları ; C, P, P' ve C, Q, Q' üçlülerinin her biri doğrudaş olsunlar. Bu durumda PQ ve $P'Q'$ çember yayları aynı hiperbolik uzunluğa sahiptir.*

İspat. *Üst yarı düzlemde kartezyen koordinatlarda merkezi x-ekseni üzerinde olan iki yay ve bu yaylar üzerindeki iki nokta arasındaki uzunlukların eşit olduğu Önerme 4 ten aşikardır.*



Şekil 4.3 Aynı merkezi paylaşan Öklid çember yaylarının uzunlukları

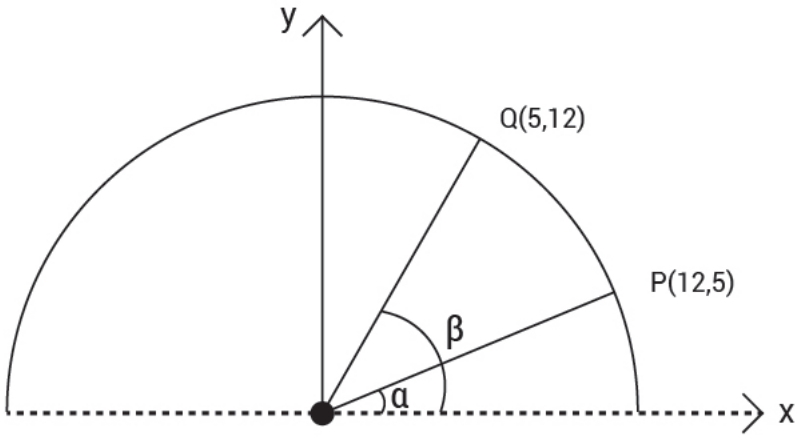
Örnek 3. *Üst yarı düzlem modelinde* $x^2+y^2 = 169$ $(y \geq 0)$*çemberi üzerindeki* $P = (12, 5)$ *ve* $Q = (5, 12)$ *noktaları arasında kalan çember yayının hiperbolik uzunluğu*

$$d_H(P, Q) = \ln \frac{\csc \beta - \cot \beta}{\csc \alpha - \cot \alpha}$$

formülü kullanılarak

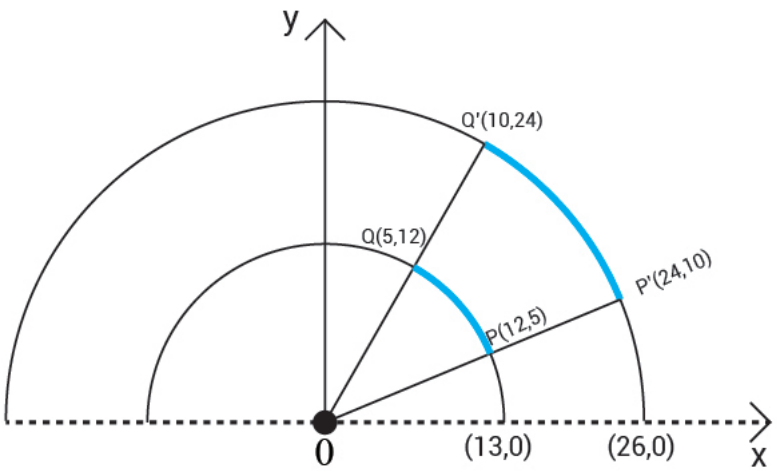
$$d_H(P, Q) = \ln \frac{\frac{13}{12} - \frac{5}{12}}{\frac{13}{5} - \frac{12}{5}} = \ln \frac{10}{3}$$

olarak bulunur.



Şekil 4.4 P ve Q noktaları arasındaki d_H uzaklığı

Benzer biçimde merkezi $(0, 0)$ olan $x^2 + y^2 = 676$ çemberi üzerinde $P' = (10, 24)$ ve $Q' = (24, 10)$ noktaların arasında kalan yay parçasının Poincaré uzunluğu da $\ln \frac{10}{3}$ tür.



Şekil 4.5 Aynı merkezli Öklidyen çember yayların uzunluklarının eşitliği

Önerme 5. *$P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ noktaları $C(c, 0)$ merkezli ve r yarıçaplı yarı çemberler üzerindeki noktalar olsun. P_1 ve P_2 noktaları arasındaki hiperbolik uzaklık,*

$$c = \frac{x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2}{2(x_1 - x_2)}$$

ve

$$r = \sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2} = \sqrt{(x_2 - c)^2 + y_2^2}$$

olmak üzere,

$$d_H = (P_1, P_2) = \left| \ln \frac{\frac{x_1 - c + r}{y_1}}{\frac{x_2 - c + r}{y_2}} \right|$$

dir.

İspat.

$$
\begin{aligned}
d_H(P_1,P_2) &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(-\frac{x-c}{y})^2}}{y}dx \\
&&= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(-\frac{x-c}{y})^2}}{y}dx \\
&&= \int_{x_1}^{x_2} \frac{r}{y^2}dx \\
&&= r\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{r^2-(x-c)^2} \\
&&= r.\frac{1}{2r}\ln\left|\frac{r+x-c}{r-(x-c)}\right|\Bigg|_{x_1}^{x_2} \\
&&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x-c+r)(x-c+r)}{(-(x-c)+r)(x-c+r)}\right|\Bigg|_{x_1}^{x_2} \\
&&= \ln\left|\frac{(x-c+r)}{y}\right|\Bigg|_{x_1}^{x_2} \\
&&= \ln\left|\frac{\frac{x_2-c+r}{y_2}}{\frac{x_1-c+r}{y_1}}\right|
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

Sonuç olarak merkezi x-ekseni üzerinde olan dairesel bir yay parçasının hiperbolik uzunluğu yayın uç noktalarından geçen yarıçapların pozitif x-eksenine göre eğimine bağlı olduğu görülmektedir.

Örnek 4. *$P_1=(8,2)$ ve $P_2=(0,6)$ noktaları $C(c,0)$ merkezli ve r yarıçaplı yarı çemberler üzerindeki noktalar olsun.*

$$c=\frac{0-8^2+6^2-2^2}{2(0-8)}=\frac{-32}{-16}=2$$

ve

$$r = \sqrt{(0-2)^2 + 6^2} = \sqrt{(8-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$$

olup bu değerler Önerme 5′ te yerlerine yazılarak

$$d_H = (P_1, P_2) = \left| \ln \frac{\frac{8-2+2\sqrt{10}}{2}}{\frac{0-2+2\sqrt{10}}{6}} \right| = \left| \ln \frac{3\sqrt{10}+9}{\sqrt{10}-1} \right| = 2.145$$

olarak bulunur.

4.5 H-düzleminde Öklidyen ve Hiperbolik Uzaklıklar Arasındaki İlişki

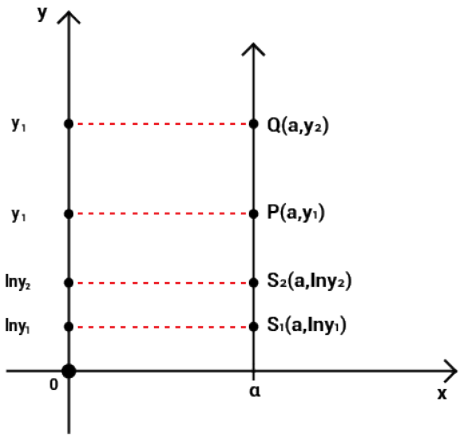
Bu bölümde apsisleri eşit ve apsisleri farklı noktalar arasındaki hiperbolik ve Öklidiyen uzaklıklar kıyaslanmaktadır.

i) $P(a, y_1)$ ve $Q(a, y_2)$ noktaları arasındaki d_H uzaklığı

$d_H(P,Q) = \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y} = \ln \frac{y_2}{y_1} = |\ln y_2 - \ln y_1|$ olduğundan $y_1 < y_2$ almak genelliği bozmaz.

$s_1 = \ln y_1 \; s_2 = \ln y_2$

ve $S_i = (a, s_i), P_i$ nin $(i = 1, 2)$ ordinatının doğal logaritmasını ordinat kabul eden noktalar olsunlar. Bu takdirde $\ln y_2 - \ln y_1, S_2$ ve S_1 noktaları arasındaki Öklidyen uzaklıktır yani, $d_H(P,Q) = |d_E(S_1, S_2)|$ dir.



Şekil 4.6 Dikey doğru üzerindeki noktaların Öklidyen ve hiperbolik uzaklıkları arasındaki ilişki

ii) $C(c,0)$ merkezli ve r yarıçaplı yarı çemberler üzerindeki $P(x_1,y_1)$ ve $Q(x_2,y_2)$ noktaları arasındaki d_H uzaklığı, $r<c$ için

$$d_H(P,Q)=\left|\ln\frac{\frac{x_1-c+r}{y_1}}{\frac{x_2-c+r}{y_2}}\right|=|\ln(x_1-c+r)+\ln y_2-\ln y_1-\ln(x_2-c+r)|$$

dir. $P^{'}$ve $Q^{'}$ sırasıyla P ve Q nun $x-$ekseni üzerindeki dik izdüşüm noktası ve D doğrunun $x-$eksenini kestiği bir nokta olmak üzere,

$$d_E(P^{'},D)=x_1-c+r \quad d_E(Q^{'},D)=x_2-c+r$$

dir.

$$p_1=\ln(x_1-c+r) \quad q_1=\ln(x_2-c+r)$$

olacak şekilde

$$P_1=(p_1,0) \qquad Q_1=(q_1,0)$$

noktaları tanımlansın. Buradan P_1 ve Q_1 noktaları arasındaki uzaklık

$$d_E(P_1, Q_1) = \ln(x_1 - c + r) - \ln(x_2 - c + r)$$

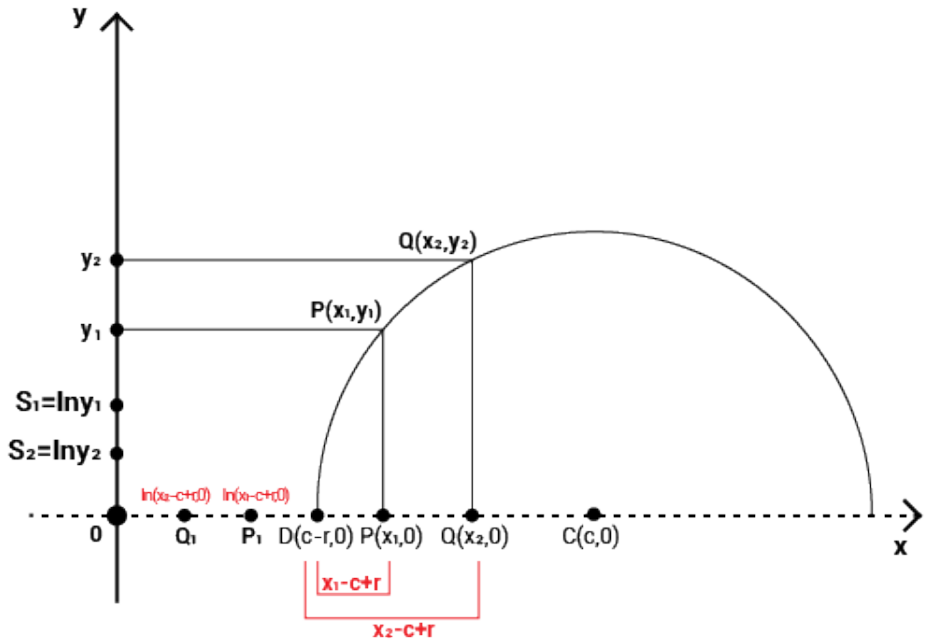
olur. Ayrıca i) den S_1, S_2 arasındaki Öklidyen uzaklık

$$d_E(S_1, S_2) = \ln y_2 - \ln y_1$$

olduğundan

$$d_H(P, Q) = |d_E(P_1, Q_1) + d_E(S_1, S_2)|$$

dir.



Şekil 4.7 Apsisleri farklı noktaların Öklidyen ve Poincaré uzaklıkları arasındaki ilişki

4.6 Üst Yarı Düzlem Modelinin Jeodezikleri

Bir üst yarı düzlemde x-eksenine merkezlenmiş ve Öklidyen yarı çemberden oluşan bir eğri, ya jeodezik ya da hiperbolik düz doğru olarak adlandırılır. Aynı ad ayrıca x-ekseninde başlayan, ona dik olan ve üst yarı düzlemde bulunan Öklidyen yarı doğrulara da uygulanır. Aralarındaki farkı belirtmek gerektiğinde, ilki yay jeodezikler olarak adlandırılırken, ikincisi düz jeodezik olarak adlandırılır. Her iki jeodezik tipi de, mesafenin ölçümünde en kısa eğri olması nedeniyle hiperbolik en kısa yoldur. Hiperbolik düzlemde herhangi iki noktayı birleştiren bir jeodezik vardır. Aynı apsise sahip noktalar düz bir jeodezikle birleştirilirken farklı apsise sahip noktalar yay jeodezikle birleştirilir. P ve Q noktaları arasındaki hiperbolik uzaklık, onları birleştiren jeodeziğin hiperbolik uzunluğu ile belirtilir ve $H(P,Q)$ ile gösterilir.

Teorem 1. *Hiperbolik düzlemin jeodezikleri*

a. *merkezi x-ekseni üzerinde olan üst yarı düzlemdeki Öklidyen yarı daire yayları*

b. *x-eksenine dik olan üst yarı düzlemdeki Öklidyen dik yarı doğrulardır.*

İspat. *$P(x_1, y_1)$ ve $Q(x_2, y_2)$ hiperbolik düzlemin herhangi iki noktası olsun ve γ da bu noktaları birleştiren bir eğri olsun.*

Durum 1: *$x_1 \neq x_2$ olsun.*

PQ Öklid doğru parçası $x-$ eksenine dik değildir. $C(c,0)$, PQ Öklidyen doğru parçasının orta dikmesinin $x-$eksenini kestiği nokta olsun. Merkezi C olan ve başlangıç ışını $x-$ekseninin pozitif yönü ile aynı yönü gösteren kutupsal koordinat sistemine göre P ile Q noktalarını birleştiren γ eğrisinin denklemi $r = f(\theta)$ ve P ile Q nun kutupsal koordinatları sırasıyla (r_P, α) ve (r_Q, β) olsun.

γ nın hiperbolik uzunluğu

$$x = c + r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

kutupsal koordinatlar ve tanımlayıcı kartezyen koordinatlar arasındaki bağlantılar kullanılarak hesaplanabilir.

$$\frac{dx}{d\theta} = r^{'}\cos\theta - r\sin\theta \; ve \; \frac{dy}{d\theta} = r^{'}\sin\theta + r\cos\theta$$

den

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 &= (r^{'}\cos\theta - r\sin\theta)^2 d\theta^2 + (r^{'}\sin\theta + r\cos\theta)^2 d\theta^2 \\ &= \left[r^{'2}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - 2rr^{'}(\cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta) + r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\right] d\theta^2 \\ &= (r^{'2} + r^2)d\theta^2 \end{aligned}$$

olup γ nın hiperbolik uzunluk formülü olan

$$\int_{\gamma} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$$

de yerine yazılarak

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{(r^{'2} + r^2)}}{r\sin\theta} d\theta$$

elde edilir. Bu ifadenin en kısa eğri uzunluğu vermesi için $r^{'} = 0$ olmalıdır. Buradan

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{(r^{'2} + r^2)}}{r\sin\theta} d\theta &\geq \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{r^2}}{r\sin\theta} d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \csc\theta d\theta \\ &= \ln\frac{\csc\beta - \cot\beta}{\csc\alpha - \cot\alpha} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\ln\frac{\csc\beta - \cot\beta}{\csc\alpha - \cot\alpha}$$

en kısa uzaklıktır.

Önerme 2'den bu son ifadenin $CP = CQ$ yarıçaplı Öklidyen çember yayının hiperbolik uzunluğuna eşit olduğu görülür. Bu nedenle bu yay, P ve Q'yu birleştiren jeodezik parçadır.

Durum 2: $x_1 = x_2$ *olsun.*

$x = f(y)$, γ *eğrisinin denklemi olsun.* $\frac{dx}{dy}$, f' *ile gösterilirse,* γ *nın hiperbolik uzunluğu*

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\sqrt{f'^2 dy^2 + dy^2}}{y}$$

olur. Bu ifadenin en kısa eğri uzunluğu olması için f'*=0 olmalıdır.*

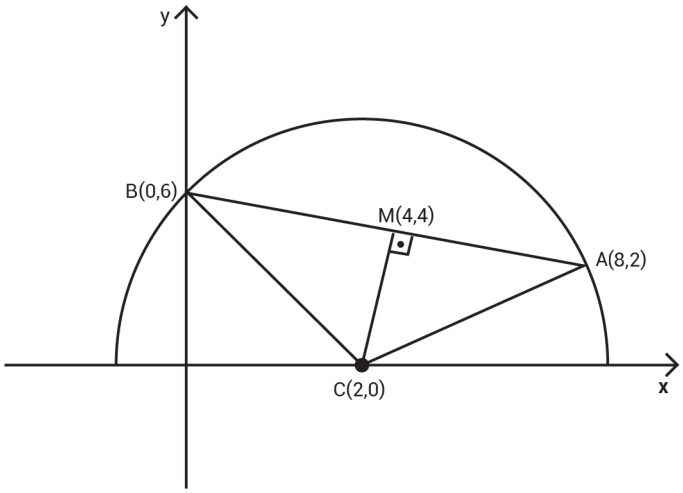
$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\sqrt{f'^2 + 1}}{y} dy \geq \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y}$$

olduğundan en kısa uzaklık

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y} = \ln \frac{y_2}{y_1}$$

dir. Böylece Önerme 1 den apsisleri eşit iki noktayı birleştiren en kısa yol dikey doğru parçasıdır.

Örnek 5. *Şekil 4.8'deki* $A(8, 2)$ *ve* $B(0, 6)$ *noktalarını birleştiren jeodezik parçasının hiperbolik uzunluğunu bulalım.*



Şekil 4.8 Yay jeodezik parçasının hiperbolik uzunluğu

A ve B noktalarını birleştiren doğrunun eğimi

$$m_{AB} = \frac{6-2}{0-8} = -\frac{1}{2} \; olup \; m_{AB} \perp m_{CM}$$

olduğundan $m_{CM} = 2$ dir. Buradan A ile B nin orta noktası $M = (4,4)$ ve M ile C noktasını birleştiren doğrunun denklemi

$$2(x-4) = y - 4 \Rightarrow 2x - 4 = y$$

olarak bulunur. Bu doğru denkleminin x-eksenini kestiği nokta $C(2,0)$ çemberin merkezi olup buradan A ve B nin C merkezine uzaklıkları

$$CA = CB = \sqrt{(8-2)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{10}$$

dir. A ve B'yi birleştiren jeodezik parçanın hiperbolik uzunluğu

$$H(A,B) = \ln \frac{\csc\beta - \cot\beta}{\csc\alpha - \cot\alpha}$$

de yerine yazılarak

$$\begin{aligned} H(A,B) &= \ln \frac{\frac{2\sqrt{10}}{6}+\frac{2}{6}}{\frac{2\sqrt{10}}{2}-\frac{6}{2}} \\ &= \ln \frac{\sqrt{10}+1}{3\sqrt{10}-9} \\ &= 2.145 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

4.7 Hiperbolik Orta Nokta

Önerme 6. *Öklidyen üst yarı düzlemde $A(a,p)$ ve $B(a,q)$ noktalarını birleştiren düz jeodeziğin hiperbolik orta noktası*

$$M = (a, \sqrt{pq})$$

dır.

İspat. *Öklidyen üst yarı düzlemde $A(a,p)$ ve $B(a,q)$ noktalarını birleştiren düz jeodeziğin orta noktası $M(a,b)$ olsun. Orta nokta A ve B noktalarına eşit hiperbolik uzaklıkta olduğundan*

$$H(A,M) = H(M,B)$$

dir. Önerme 1 den bu uzaklıklar için

$$\ln \frac{b}{p} = \ln \frac{q}{b}$$

eşitliği sağlanır. Buradan $b = \sqrt{pq}$ olur. Böylece A ile B noktalarının hiperbolik orta noktasının

$$M = (a, \sqrt{pq})$$

olduğu görülür.

Örnek 6. *$A(3,4)$ ve $B(3,9)$ noktalarını birleştiren düz jeodeziğin hiperbolik orta noktası Önerme 6 da verilen orta nokta formülü kullanılarak*

$$M = (3, \sqrt{36}) = M = (3,6)$$

olarak elde edilir.

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ POİNCARÉ ÜST YARI DÜZLEM MODELLERİ

Bu bölümde R. Kaya'nın "Generalized Poincaré Half-Planes" adlı makalesinde sunulan $\mathbb{H}_k$ düzlem modelleri incelenmektedir (Kaya, 2019). Klasik Poincaré üst yarı düzlemi, hiperbolik düzlem geometrisinin en popüler modellerinden biridir. Bu modelde en kısa yollar merkezi x-ekseni üzerinde olan üst yarı düzlemdeki daire yayları ile x-eksenine dik olan yarı doğru parçalarıdır. Üst yarı düzlemdeki daire yaylarını, x-ekseni üzerinde merkezi bulunan eliptik yaylarla değiştirerek genelleştirilmiş üst yarı düzlem modellerini tanımlamıştır. Ayrıca, k nın her değeri için elde edilen üst yarı düzlem geometrisinin, hiperbolik geometri aksiyomlarını karşılayan bir doğal geometri olduğu gösterilmiştir.

5.1 $\mathbb{H}_k$ Poincaré Düzlemleri

Tanım 5.

$$\mathcal{P} = \{\,(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$$

ile tanımlanan kartezyen noktalar kümesi $\mathcal{P}$ üst yarı düzlemin noktalar kümesidir.

$x = p,\ y > 0$ *eşitliğini sağlayan* L_p *ile tanımlanan Öklidyen yarı doğrularından oluşan küme*

$$\mathcal{L}_p = \{L_p \mid p \in \mathbb{R}\} | \, L_p = \{\,(p, y) \in \mathcal{P}\}$$

ve

$$\mathbf{L}_{kac} = \{\,(x, y) \in \mathcal{P} \mid (x - c)^2 + k^2 y^2 = a^2\}$$

ile tanımlanan Öklidyen yarı elipslerinden oluşan küme

$$\mathcal{L}_{kac} = \{\mathbf{L}_{kac} \mid a, c, k \in \mathbb{R}, a > 0, k > 0, k \textit{ sabit}\}$$

üst yarı düzleminin

$$\mathbf{L} = \mathcal{L}_p \cup \mathcal{L}_{kac}$$

ile gösterilen doğrular kümesini oluşturur. Burada $\mathbf{L}_{kac}$ *Öklidyen yarı elipsidir ve merkezi* $(c, 0)$ *noktası* x*-ekseni üzerindedir. Verilen* k *sabiti pozitif reel sayıdır. Burada* $a,\ k > 1$

için elipsin yarı ana(asal) eksen uzunluğunu; $0 < k < 1$ *için yarı küçük(yedek) eksen uzunluğunu temsil eder. Ayrıca* a *her zaman* x*-eksenindeki uzunluğu temsil eder* $a = bk$ *ise* b *diğer eksenin uzunluğudur.*

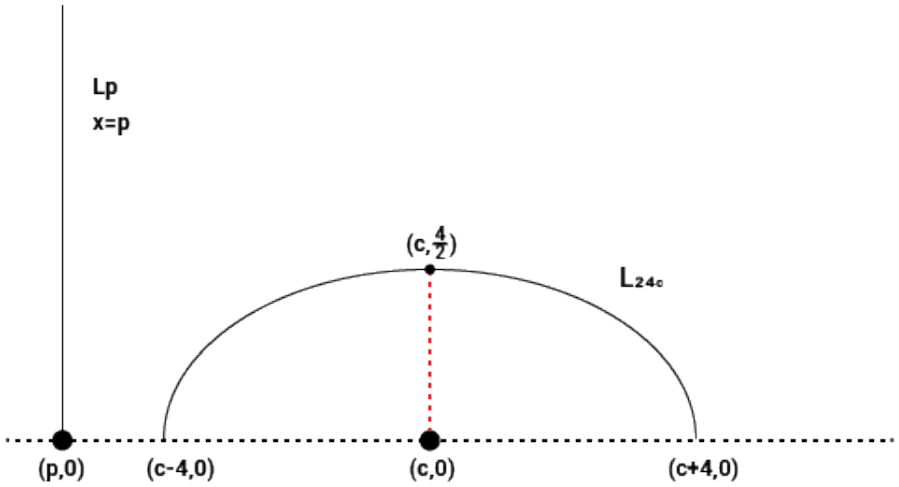
L *′nin elemanları hiperbolik doğrular, kısaca* $h-$*doğruları olarak adlandırılır.*

$$\mathbb{H}_k = \{\mathcal{P}, \mathbf{L}\}$$

kümesi ***Genelleştirilmiş Poincaré yarı düzlemi*** *olarak adlandırılır. Her pozitif* k *gerçel sayısı Genelleştirilmiş bir Poincaré yarıdüzlemi belirler. Böylece, sonsuz sayıda elemana sahip bir Genelleştirilmiş Poincaré yarı düzlem ailesi oluşmaktadır.*

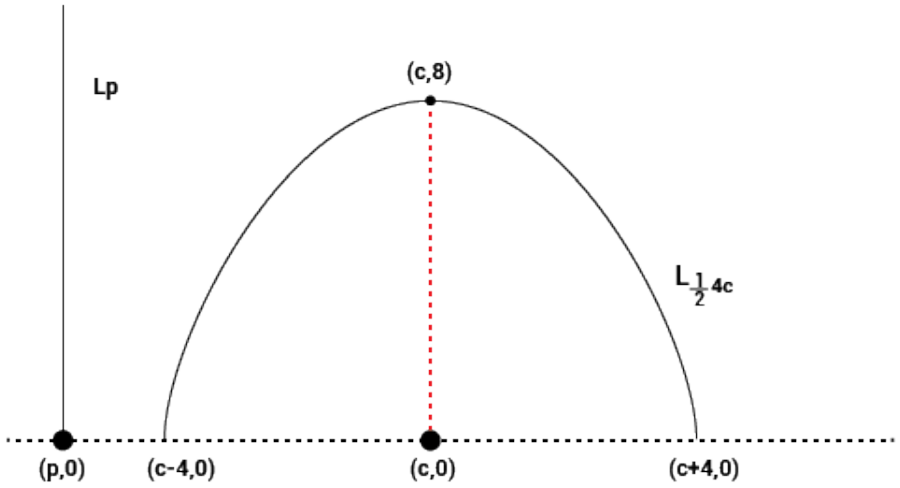
$k = 1$ *için* $\mathbb{H}_1$ *klasik Poincaré yarı düzlemi elde edilir.*

$k > 1$ *iken,* k *elipsin yarı büyük eksen uzunluğunun yarı küçük eksen uzunluğuna oranıdır. Bu durumda elipsin asal (büyük) ekseni* x *ekseni üzerindedir.*



Şekil 5.1 $\mathbb{H}_2$ düzleminde L_{24c} doğrusu

$0 < k < 1$ *iken,* k *elipsin yarı küçük eksen uzunluğunun yarı büyük eksen uzunluğuna oranıdır. Bu durumda* $(c, 0)$ *merkezinden geçen asal(büyük) eksen* x *eksenine diktir.*



Şekil 5.2 $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}}$ düzleminde $L_{\frac{1}{2}4c}$ doğrusu

Önerme 7. $\mathbb{H}_k$ *genelleştirilmiş üst yarı düzleminde farklı iki noktadan geçen bir tek h-doğru vardır.*

İspat. P_1, $P_2 \in \mathcal{P}$ *ve* $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ *olsun.*

$x_1 = x_2$ *ise* L_p *tanımına göre* P_1 *ve* P_2 *yi birleştiren* h*-doğru üst yarı düzlemdeki dikey doğruyu temsil eder. Açıkça görüldüğü gibi* P_1 *ve* P_2*'den geçen* $\mathbf{L}_{kac}$ *tipinde* h *doğrusu yoktur.*

$x_1 \neq x_2$ *iken* L_p *tanımına göre üst yarı düzlemde* P_1 *ve* P_2 *yi birleştiren dikey doğru yoktur.* P_1, $P_2 \in \mathbf{L}_{kac}$ *olmak zorundadır.*

$$\begin{cases} (x_1 - c)^2 + k^2 y_1^2 = a^2 \\ \\ (x_2 - c)^2 + k^2 y_2^2 = a^2 \end{cases}$$

denklem sistemini a *ve* c *ye göre çözülürse*

$$c = \frac{x_1^2 - x_2^2 + k^2(y_1^2 - y_2^2)}{2(x_1 - x_2)}$$

ve

$$a = \sqrt{(x_1 - c)^2 + k^2 y_1^2}$$

olarak bulunur. k sabit olduğundan, bir tek a ve c çifti vardır ve sonuç olarak bu çift bir $\mathbf{L}_{kac}$ h-doğrusunu oluşturur.

Sonuç 2. *$\mathbb{H}_k$ da farklı iki hiperbolik doğru en fazla bir noktada kesişir.*

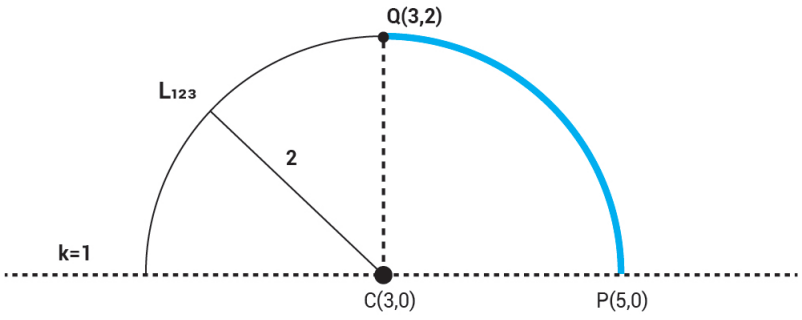
$x-$ekseni $\mathbb{H}_k$ içinde temsil edilmese de $\mathbb{H}_k$ daki hiperbolik doğruların tanımları ve hesaplamaları için $x-$eksenindeki noktaları kullanabiliriz. Bu şekilde, Sonuç 2'ye göre, farklı iki hiperbolik doğru $\mathbb{H}_k$ da en fazla bir noktada kesişir.

Örnek 7. *$k = 1$ için $\mathbb{H}_1$ de $P(5,0)$ ve $Q(3,2)$ noktalarından geçen hiperbolik doğru L_{123} tür. c ve a değerleri*

$$c = \frac{x_1^2 - x_2^2 + k^2(y_1^2 - y_2^2)}{2(x_1 - x_2)} = \frac{16-4}{2.2} = 3,$$

$$a = \sqrt{(x_1 - c)^2 + k^2 y_1^2} = \sqrt{(5-3)^2 + 0.1} = 2$$

olarak bulunur. Bu doğru Şekil 5.3'te gösterilmektedir.



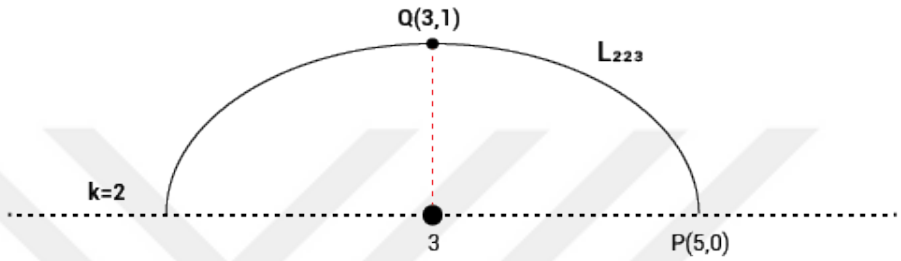
Şekil 5.3 $\mathbb{H}_1$ düzleminde L_{123} doğrusu

Örnek 8. *$k = 2$ için $\mathbb{H}_2$ de $P(5,0)$ ve $Q(3,1)$ noktalarından geçen hiperbolik doğru L_{223} tür. c ve a değerleri*

$$c = \frac{16-4}{2.2} = 3,$$

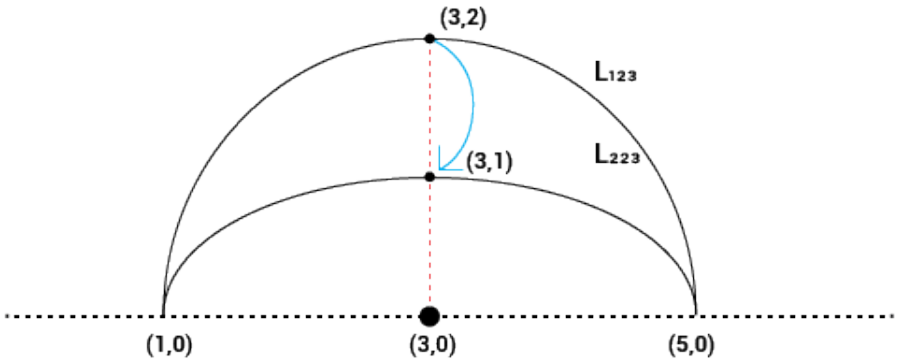
$$a = \sqrt{(5-3)^2 + 0.1} = 2$$

olarak bulunur. Bu doğru Şekil 5.4'te gösterilmektedir.



Şekil 5.4 H_2 düzleminde L_{223} doğrusu

Örnek 7 daki L_{123} *doğrusu üzerindeki* $Q(3,2)$ *noktası Örnek 8'deki* L_{223} *doğrusu üzerindeki* $Q(3,1)$ *noktasına Şekil 5.5 te görüldüğü gibi* k *değerine bağlı olarak ötelenmiştir.*



Şekil 5.5 L_{123} doğrusu üzerindeki noktanın L_{223} doğrusu üzerindeki noktaya ötelenmesi

Tanım 6. *Öklidyen yarı-doğru olan her iki* h*-doğru çifti paralel* h*-doğrular olarak tanımlanır. Benzer olarak farklı iki* h*-doğrunun paralel olması için gerek ve yeter koşul kesişim noktalarının* x*-ekseni üzerinde olmasıdır.*

Bu yüzden her $p \neq q$ için

$L_p // L_q$,

$L_p // L_{kac} \iff L_p \cap L_{kac} \in \{(c-a,0),(c+a,0)\}$,

$L_{kac} // L_{ka'c'} \iff L_{kac} \cap L_{ka'c'} \in \{(c-a,0),(c+a,0)\}$ *dir.*

Önerme 8. *$\mathbb{H}_k$ hiperbolik özelliği sağlar. Yani her L, h-doğrusu ve her $P \notin L$ noktası için P den geçen ve L ye paralel olan iki hiperbolik doğru vardır.*

İspat. *Tanımlar ve önerme 7 kullanılarak ispat kolayca yapılabilir.*

Eğer paralellik kavramı iki hiperbolik doğrunun keşişmemesi olarak tanımlanırsa, o zaman P den geçen L ye paralel olan sonsuz sayıda farklı hiperbolik doğru vardır.

5.2 $\mathbb{H}_k$ nın Diğer Özellikleri

Açıkça her $\mathbb{H}_k$ nın incidence geometri aksiyomlarını sağlayan sonsuz sayıda noktası ve doğrusu vardır. Burada her $\mathbb{H}_k$ nın metrik geometri olup olmadığı incelenecektir.

Önerme 9. *d_H, $\mathbb{H}_k$ için uzaklık fonksiyonudur.*

İspat. *$P = (x_1, y_1)$ ve $Q = (x_2, y_2)$ Poincaré düzlemindeki iki nokta olsun. Bu noktalar arasındaki uzaklık fonksiyonu*

$$d_H(P,Q) = \begin{cases} \left|\ln(\frac{x_1 - c + r}{y_1} / \frac{x_2 - c + r}{y_2})\right| & , \quad x_1 \neq x_2 \\ \left|\ln(\frac{y_2}{y_1})\right| & , \quad x_1 = x_2 \end{cases}$$

ve f cetvelinin

$$f(x,y) = \begin{cases} \left|\ln(\frac{x - c + r}{y})\right| & , \quad (x,y) \in C \\ |\ln y| & , \quad (x,y) \in L_p \end{cases}$$

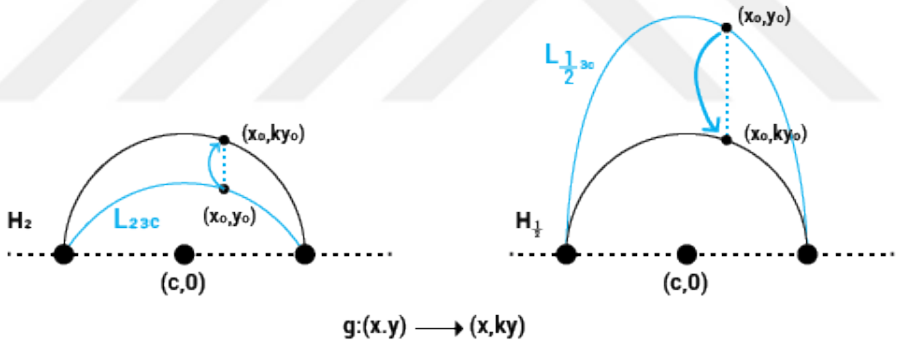
olduğu iyi biliniyor. Buradan C yarı çemberi

$$(x-c)^2 + y^2 = r^2, y > 0$$

dir. Yukarıda verilenler $\mathbb{H}_k$ ye uygun bir d uzaklık fonksiyonu ve f cetveli bulmak için kullanılacaktır.

$$g : \mathcal{P} \to \mathcal{P} \ni g(x,y) = (x,ky)$$

bir öteleme olsun. Bu öteleme L_{kac} tipindeki C merkezli yarı çemberleri ve L_p tipindeki yarı doğruları kendine eşler.



Şekil 5.6 Yarı çemberler ve yarı elipsler arasındaki ilişki

$\mathbb{H}_k$ de $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$ için uzaklık fonksiyonu

$$
\begin{aligned}
d_k(P,Q) &= d(g(P),g(Q)) = d((x_1,ky_1),(x_2,ky_2)) \\
&= \begin{cases} \left|\ln(\dfrac{x_1-c+a}{ky_1}/\dfrac{x_2-c+a}{ky_2})\right| & , \quad x_1 \neq x_2 \\ \left|\ln(\dfrac{ky_2}{ky_1})\right| & , \quad x_1 = x_2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left|\ln\left(\dfrac{(x_1-c+a)y_2}{(x_2-c+a)y_1}\right)\right| & , \quad x_1 \neq x_2 \\ \left|\ln(\dfrac{y_2}{y_1})\right| & , \quad x_1 = x_2 \end{cases} \\
&= d(P,Q)
\end{aligned}
$$

ve f_k cetveli $f_k = f \circ g$ olarak tanımlansın. Buradan

$$
\begin{aligned}
f_k(x,y) &= (f \circ g)(x,y) = f(g(x,y)) = f(x,ky) \\
&= \begin{cases} \left|\ln(\dfrac{x-c+a}{ky})\right| & , \quad (x,y) \in L_{kac} \\ |\ln ky| & , \quad (x,y) \in L_p \end{cases}
\end{aligned}
$$

dir.

Önerme 10. *Her $(\mathbb{H}_k, d, f_k)$ bir metriktir.*

İspat. *$d_k = d$ olduğundan metrik aksiyomları sağlanır. Bunun için*

$$f_k : L_{kac} \to \mathbb{R} \ni f_k(x,y) = \ln(\frac{x-c+a}{ky})$$

nın birebir ve her $t \in \mathbb{R}$ için

$$(x-c)^2 + k^2y^2 = a^2, y > 0 \text{ ve } f(x,y) = t$$

eşitsizliğini sağlayan bir tek (x,y) çifti olduğu gösterilmelidir. Eğer $f(x,y) = t$ ise

$$f(x,y) \quad = \ln(\frac{x-c+a}{ky}) = t$$

den

$$(\frac{x-c+a}{ky}) = e^t$$

dir. Böylece

$$e^{-t} \quad = \frac{ky}{x-c+a} \qquad = \frac{ky}{x-c+a}.\frac{x-c+a}{x-c+a} \quad = \frac{ky(x-c-a)}{(x-c)^2-a^2}$$

$$= \frac{ky(x-c-a)}{-k^2y^2} \quad = \frac{(x-c-a)}{-ky},$$

$$e^t + e^{-t} \quad = \frac{(x-c+a)}{ky} - \frac{x-c-a}{ky} \quad = \frac{2a}{ky} \implies y = \frac{a}{k\cosh t}$$

ve

$$e^t - e^{-t} \quad = \frac{(x-c+a)}{ky} + \frac{x-c-a}{ky} \quad = \frac{2(x-c)}{ky}$$

olur. Buradan

$$\tanh t = \frac{2(x-c)}{ky}.\frac{ky}{2a} = \frac{x-c}{a} \implies x = c + a\tanh t$$

olup $x = c + a\tanh t$ *ve* $y = \dfrac{a}{k\cosh t}$ *değerleri* $f_k(x,y) = t$ *için tek çözümüdür. Benzer olarak*

$$f_k : L_p \to \mathbb{R} \ni f_k(x,y) = \ln ky$$

fonksiyonu birebir. Örten olduğunu göstermek için

$$t \in \mathbb{R} \ni f_k(x,y) = t$$

olarak tanımlansın. O zaman

$$\ln ky = t \Longrightarrow ky = e^t \Longrightarrow y = \frac{e^t}{k}$$

ve

$$x \in L_p \Longrightarrow x = p$$

dir.

Sonuç olarak tek çözüm $(p, \frac{e^t}{k})$ *olduğundan* f_k *birebir ve örtendir.*

Son olarak $x_1 \neq x_2$ *ve* $P, Q \in L_{kac}$ *ise*

$$\begin{aligned} |f_k(P) - f_k(Q)| &= \left| \ln \frac{x_1 - c + a}{ky_1} - \ln \frac{x_2 - c + a}{ky_2} \right| \\ &= \left| \ln (\frac{x_1 - c + a}{y_1} / \frac{x_2 - c + a}{y_2}) \right| \\ &= d(P, Q) \end{aligned}$$

olduğundan f_k*,* L_{kac} *için bir cetveldir.*

Eğer $x_1 = x_2$ *ve* $P, Q \in L_p$ *ise*

$$\begin{aligned} |f_k(P) - f_k(Q)| &= |\ln ky_2 - \ln ky_1| \\ &= \left| \ln (\frac{ky_1}{ky_2}) \right| \\ &= \left| \ln (\frac{y_1}{y_2}) \right| \\ &= d(P, Q) \end{aligned}$$

ve f_k *,* L_p *için de bir cetveldir. İnsidens geometride her uzaklık metrik geometri olmayabilir. Bu yüzden Cetvel aksiyomu insidens geometrinin özelliklerinin araştırılmasına fayda sağlamaktadır.*

Tanım 7. *(Düzlem Ayırma Aksiyomu)*

L doğrular kümesinin her l doğrusu için l ile belirlenen $\mathcal{P}$ noktalar kümesinin aşağıdaki özellikleri sağlayan H_1 ve H_2 gibi iki alt kümesi vardır:

i) H_1 *ve* H_2 *konvekstir.*

ii) $H_1 \cup H_2 = \mathcal{P} \setminus \{l'$*nin noktaları*$\}$

iii) $\forall A \in H_1$ *ve* $\forall B \in H_2$ *ise* $AB \cap l \neq \emptyset$ *dir.*

Metrik geometri düzlem ayırma aksiyomunu sağlarsa bu durumda Pasch geometri olarak adlandırılır.

Önerme 11. *Her* $(\mathbb{H}_k, d, f_k)$ *düzlemi düzlem ayırma aksiyomunu sağlar.*

İspat. $\mathbb{H}_k$ *üzerinde bir* l *doğrsu alınsın.*

$l = L_p$ *tipinde bir doğru ise*

$$H_1 = \{(x, y) \in \mathcal{P} \mid x > p\},$$

$$H_2 = \{(x, y) \in \mathcal{P} \mid x < p\}$$

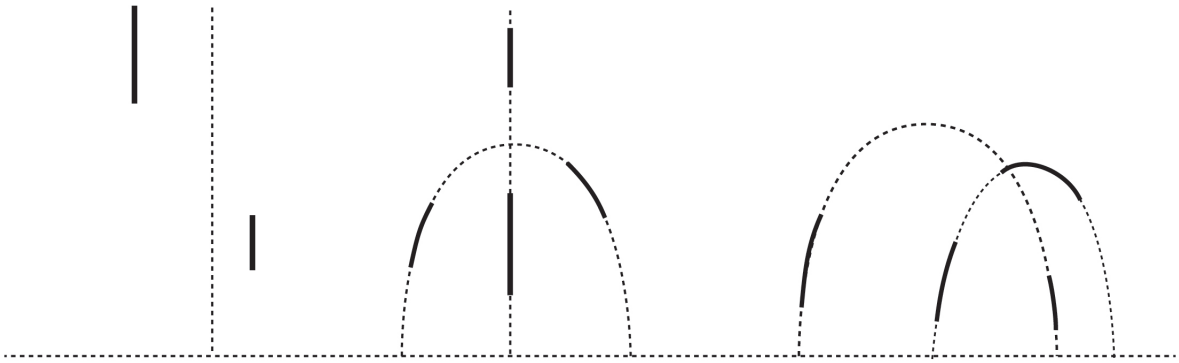
ve

$l = L_{kac}$ *ise*

$$H_1 = \{\, (x, y) \in \mathcal{P} \mid (x - c)^2 + k^2 y^2 > a^2\},$$

$$H_2 = \{\, (x, y) \in \mathcal{P} \mid (x - c)^2 + k^2 y^2 < a^2\}$$

şeklinde tanımlanır. H_1 *ve* H_2 *ayrık olduğundan düzlem ayırma aksiyomlarından i) ve iii) sağlanır.* $\mathbb{H}_k$ *üzerinde farklı iki* h*-doğrunun en çok bir noktada kesişmesinden konvekslik sağlanır.*



Şekil 5.7 Düzlem ayırma

Metrik geometrinin düzlem ayırma aksiyomunu sağlaması için gerek ve yeter koşul Pasch aksiyomunu sağlamasıdır. Yani bir üçgenin bir kenarını kesen bir doğru üçgenin diğer kenarlarından birini de kesmek zorundadır.

Sonuç 3. *Açıkça, genelleştirilmiş bir Poincaré düzleminde Öklidyen açı ölçüsünü kullanabiliriz, çünkü bu düzlem Öklidyen düzlemin alt kümesidir ve doğruları Öklidyen doğrular ve Öklidyen yarı elipslerle tanımlanır. Burada temel fikir, açıyı oluşturan eliptik ışınları, verilen eliptik ışınlara teğet olan Öklidyen ışınlarla değiştirmektir. Bu nedenle, aşağıdaki açıklama verilebilir.*

Önerme 12. *Her (H_k, d, f_k) Öklidyen açı ölçüsü ile birlikte iletki geometridir.*

Mutlak geometri kenar açı kenar aksiyomunu sağlayan bir iletki geometridir. Eğer H_k nın açı ölçüsü orijinal Poincaré düzlemine benzer şekilde tanımlanırsa H_k mutlak geometridir.

6. GENELLEŞTİRİLMİŞ POİNCARÉ UZAKLIĞI

Bu bölümde, geleneksel Poincaré uzaklık fonksiyonundan farklı olan alternatif bir uzaklık fonksiyonu tanımlanmakta ve üst yarı düzlemde dikey doğrular, yatay doğrular ve yarı elipsler üzerindeki farklı iki nokta arasında bu uzaklık fonksiyonu incelenmektedir. Ayrıca üst yarı düzlemde, x-eksenine paralel ötelemelere ve x-eksenine dik doğrulara göre yansımaların tanımlanan genelleştirilmiş Poincaré uzaklığı korunduğu gösterilmektedir. Tanımlanan bu genelleştirilmiş Poincaré uzaklık fonksiyonu ile, üst yarı düzlemin geometrik özelliklerinin ve karakteristiklerinin keşfedilmesi amaçlanmaktadır. Bu bölümde sunulan bulgular, geleneksel olmayan uzaklık metriklerin anlaşılmasına ve farklı geometrik bağlamlarda optimal yolların belirlenmesindeki etkilerine katkıda bulunacaktır.

Hiperbolik geometri, Lobachevskian geometri olarak da bilinen, yoğun bir şekilde incelenen ve bir asırdan fazla süredir büyük ilgi uyandıran bir Öklid dışı geometridir. Hiperbolik geometrinin en popüler modellerinden biri klasik Poincaré üst yarı düzlemidir. Bu model, matematik, fizik ve diğer alanlarda çeşitli hiperbolik yapıları temsil etmek için geniş bir uygulama alanına sahiptir.

1854 yılında Riemann, düzlemsel uzaklıkların genel bir modifikasyonunu önermiştir. Bu önermeyi göz önüne alan geometriciler tarafından düzlemdeki keyfi bir γ eğrisinin uzunluğu

$$L = \int \sqrt{(Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2}$$

E, F, ve G fonksiyonları $E > 0$, $G > 0$ ve $EG - F^2 > 0$ şeklinde tanımlanmıştır.

$$Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2$$

ifadesi Riemann (veya Riemannian) metriği olarak bilinir. Bu genel metriğin özel durumları; Öklid metriği

$$dx^2 + dy^2$$

ve Poincare metriği

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

dir. Bir çok metriğin düzlemin yalnızca belirli bölgelerinde tanımlandığını belirtmek önemlidir. Örneğin, Poincaré metriği x-ekseninde tanımsızdır ve tipik olarak üst yarı düzlemle sınırlıdır. Riemannian geometri, metrik kavramını kullanarak eğri uzayların

özelliklerini inceleyen bir matematik dalıdır. Her metrik, bir uzaydaki uzaklıkları ve açıları tanımlayan jeodeziklerle ilişkilidir. Jeodezikler yerel olarak noktalar arasındaki en kısa yollardır. Riemann geometrisi, eğri uzaylarının geometrisini anlamak için güçlü bir çerçeve sağlar ve fizik, bilgisayar bilimi ve diğer alanlarda uygulamalar bulmaktadır.

Üst yarı düzlem, kartezyen koordinat sisteminin pozitif ordinat bölgesini ifade eder. x*-eksenine dik yarı doğruları ve merkezi* x*-ekseni üzerinde olan yarı çember yaylarını doğrular olarak kabul eden bir model hiperbolik düzlemin modelidir. Bu özel modelde, bir* γ *eğrisinin hiperbolik uzunluğu* dx, dy *içeren ve Poincaré metriği olarak bilinen bir integral ile tanımlanır.*

Poincaré yarı düzlem modelinde, jeodezikler ya x*-eksenine dik yarı doğrular ya da merkezi* x*-ekseni üzerinde olan dairesel yaylar ile temsil edilir. Poincaré yarı düzlem modelindeki jeodeziklerin Öklid düz doğrulardan farklı olduğuna dikkat etmek önemlidir. Kaya, 2019 çalışmasında, klasik Poincare üst yarı düzlem modelinin bazı genellemelerini dairesel yaylar yerine merkezi ve odakları* x*-ekseninde veya* x*-eksenine dik doğrular üzerinde olan eliptik yaylara sahip üst yarı düzlem modelleri oluşturulmuştur. Bu yaklaşım, sonsuz sayıda üyesi olan ve her biri kendine özgü olan bir üst yarı düzlem sınıfına yol açmaktadır.*

6.1 Genelleştirilmiş Poincaré Metrik

Üst yarı Poincaré modelinde, bir γ *eğrisinin hiperbolik uzunluğu Poincaré uzaklık fonksiyonu*

$$\int_{\gamma} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$$

Bu metrik, üst yarı düzlemdeki Poincaré metriğinin bir genelleştirmesidir. Poincaré metriği, katsayıları $E = G = \frac{1}{y^2}$ *ve* $F = 0$ *olan Riemann metriği ile ifade edilir. Ekstra parametreler* a *ve* b *yi tanıtarak verilen metrik Poincaré metriğini genişletmek üst yarı düzlemdeki uzaklıkların daha genelleştirilmiş bir temsilini sağlar. Her iki metrik de bu bölgedeki eğrilerin uzunluklarını hesaplamak için kullanılır, ancak sabit katsayılarında farklılık gösterirler.*

$E = \frac{1}{a^2y^2}$, $G = \frac{1}{b^2y^2}$, $F = 0$ *olacak şekilde,* $a > 0$, $b > 0$ *ve* $a, b \in R$ *koşullarıyla*

ifade edilen Riemann metriği şu şekilde yazılabilir:

$$Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2 = \frac{dx^2}{a^2y^2} + \frac{dy^2}{b^2y^2}.$$

Bu metrik pozitif reel a ile b değerlerinin her biri için yeni bir metrik tanımlar. Böylece Poinceré uzaklık fonksiyonunun bir genelleştirilmesi verilebilir:

Tanım 8. *Üst yarı düzlemde, γ eğrisi üzerindeki P ve Q gibi iki nokta arasındaki genelleştirilmiş Poinceré uzaklığı*

$$\int_\gamma \frac{\sqrt{\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2}}}{y}, a, b \in \mathbb{R}^+$$

ile tanımlanır. Burada dx ile dy ifadeleri sonsuz küçük değişimleri temsil eder.

6.2 Yatay, Dikey Doğru Parçalarının ve Eliptik Yayların Genelleştirilmiş Poincaré Uzunlukları

Bu bölümde yatay ve dikey doğru parçaları ile merkezi x-ekseni üzerinde olup odakları x-ekseninde veya merkeze dik doğru üzerinde olan eliptik yayların genelleştirilmiş Poinceré uzunlukları incelenmektedir.

Teorem 2. *P ve Q, üst yarı düzlemde eşit x-koordinatlara sahip iki nokta olsun. y_1 ve y_2 sırasıyla P ve Q nun y-koordinatları olmak üzere P ve Q yu birleştiren $x = h$ denklemine sahip Öklidyen doğru parçasının genelleştirilmiş Poincaré uzunluğu,*

$$\frac{1}{b} \ln \frac{y_2}{y_1}$$

dir.

İspat. *$x = h$ yarı doğrusu üzerindeki iki nokta $P(x_1, y_1)$ ve $Q(x_2, y_2)$ olsun. P ve Q noktalarını birleştiren $x = h$ dikey doğru parçası üzerindeki hiperbolik uzunluk*

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\sqrt{\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2}}}{y}$$

dır. Bu durumda, $dx = 0$ ve $y_1 \leq y_2$ olmak üzere, $dy = y_2 - y_1$ dir. O zaman $P(x_1, y_1)$ ve $Q(x_2, y_2)$ noktalarının genelleştirilmiş Poincaré uzunluğu

$$\frac{1}{b}\int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y} = \frac{1}{b}\ln\frac{y_2}{y_1}$$

olarak elde edilir. Buradan üst yarı düzlem modelinde, $x = h$ doğrusu üzerindeki iki nokta P ve Q arasındaki genelleştirilmiş Poincaré uzaklığının $\frac{1}{b}\ln\frac{y_2}{y_1}$ olduğu kanıtlanır.

Örnek 9. *Üst yarı düzlemde $a = 1$, $b = 2$ parametresine sahip genelleştirilmiş Poincaré metriğine göre $P = (1, 3)$ ve $Q = (1, 9)$ noktaları arasındaki uzaklık*

$$\frac{1}{b}\ln\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2}\ln\frac{9}{3} = \frac{1}{2}\ln 3$$

olarak bulunur.

Teorem 3. *P ve Q, üst yarı düzlemde eşit y-koordinatlara sahip iki nokta olsun. x_1 ve x_2 sırasıyla P ve Q nun x-koordinatları olmak üzere P ve Q yu birleştiren $y = k$ denklemine sahip Öklid doğru parçasının genelleştirilmiş Poincaré uzunluğu,*

$$\frac{1}{ak}(x_2 - x_1)$$

dir.

İspat. *$y = k$ üzerindeki iki nokta $P(x_1, y_1)$ ve $Q(x_2, y_2)$ olsun. P ve Q noktalarını birleştiren $y = k$ yatay doğru parçası üzerindeki hiperbolik uzunluk*

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2}}}{y}$$

dır. Bu durumda, $dy = 0$ ve $x_1 \leq x_2$ olmak üzere, $dx = x_2 - x_1$ dir. O zaman $P(x_1, y_1)$ ve $Q(x_2, y_2)$ noktalarının genelleştirilmiş Poincaré uzunluğu

$$\frac{1}{a}\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{k} = \frac{1}{ak}(x_2 - x_1).$$

olarak elde edilir. Buradan üst yarı düzlem modelinde, $y = k$ doğrusu üzerindeki iki nokta P ve Q arasındaki genelleştirilmiş Poincaré uzaklığının $\frac{1}{ak}(x_2 - x_1)$ olduğu kanıtlanır.

Örnek 10. *Üst yarı düzlemde $a = 2$ için $y = 3$ doğrusu üzerinde $P = (1, 3)$ ve $Q = (2, 3)$ noktaları arasındaki genelleştirilmiş Poincaré uzaklığı*

$$\frac{1}{2.3}(2-1) = \frac{1}{6}$$

olur.

Önerme 13. *Üst yarı düzlemde γ eğrisi,*

$$\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

denklemine sahip merkezi $C = (c, 0)$ olan yarı elipsi ve P ile Q noktalarının merkezle oluşturduğu CP ve CQ ışınlarının x-ekseniyle yaptığı açılar sırasıyla , α ve β $(\alpha < \beta)$ olsun. Bu durumda, P ve Q noktaları arasındaki genelleştirilmiş Poincaré uzunluğu

$$\frac{1}{b} \ln \frac{\csc\beta - \cot\beta}{\csc\alpha - \cot\alpha}$$

dir.

İspat. $\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *denklemini sağlayan $C = (c, 0)$ merkezli γ yarı elipsi ve γ eğrisi üzerindeki P ile Q noktalarını göz önüne alalım. P ile Q noktalarının elips merkezi ile oluşturdukları CP ve CQ ışınlarının pozitif x-ekseniyle yaptığı açılar sırasıyla , α ve β $(\alpha < \beta)$ olsun. γ yarı elipsi t ile parametresiyle*

$$x(t) = c + acost,\ y(t) = b\sin t$$

şeklinde ifade edilir. Buradan P ve Q noktalarına karşılık gelen t değerlerini sırasıyla t_P ve t_Q olarak gösterilirse

$$\frac{dx}{dt} = -a\sin t,\ \frac{dy}{dt} = b\cos t$$

olup PQ elips yayının genelleştirilmiş Poincaré uzunluğu

$$\int_\gamma \frac{\sqrt{\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2}}}{y} = \frac{1}{b}\int_{t_P}^{t_Q} \frac{dt}{\sin t}$$

olarak bulunur. $\alpha = t_P$ ve $\beta = t_Q$ olduğundan P ve Q noktaları arasındaki genelleştirilmiş Poincaré uzunluğu

$$\frac{1}{b}\ln\frac{\csc\beta-\cot\beta}{\csc\alpha-\cot\alpha}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 11. *Üst yarı düzlemde γ eğrisi,*

$$\frac{(x-1)^2}{65.2^2}+\frac{y^2}{65.3^2}=1$$

denklemine sahip merkezi $C=(1,0)$ olan yarı elipsi ve $P=(8,4)$ ile $Q=(0,8)$ noktalarının merkezle oluşturduğu CP ve CQ ışınlarının x-ekseniyle yaptığı açılar sırasıyla , α ve β $(\alpha<\beta)$ olsun. γ yarı elipsi t parametresiyle

$$x(t)=1+2cost,\ y(t)=3\sin t$$

şeklinde olup buradan

$$\frac{dx}{dt}=-2\sin t,\ \frac{dy}{dt}=3\cos t$$

olur. Bu değerler Tanım 8 de yerine yazıldığında

$$\int_{\gamma}\frac{\sqrt{\frac{(-2\sin t)^2}{2^2}+\frac{(3\cos t)^2}{3^2}}}{3\sin t}dt=\frac{1}{3}\int_{t_P}^{t_Q}\frac{dt}{\sin t}$$

olarak bulunur. $\alpha=t_P$ ve $\beta=t_Q$ olduğundan P ve Q noktaları arasındaki genelleştirilmiş Poincaré uzunluğu

$$\frac{1}{3}\ln\frac{\frac{\sqrt{65}}{8}-(\frac{-1}{8})}{\frac{\sqrt{65}}{4}-\frac{7}{4}}=0.48$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4. *Üst yarı düzlemde x-ekseni üzerinde $C(c,0)$ merkezli ve*

$$\alpha...\frac{(x-c)^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$$

denklemli yarı elips üzerinde PQ yayını ve aynı merkezli

$$\alpha' ... \frac{(x-c)^2}{A'^2} + \frac{y^2}{B'^2} = 1$$

denklemli yarı elips üzerinde $P'Q'$ yayını alalım. C,P,Q ve C,P',Q' noktaları doğrudaş olsun. Eğer α ile α' elipsleri benzer ise PQ ve $P'Q'$ yayları aynı Genelleştirilmiş Poincaré uzunluğa sahip olur.

İspat. *Üst yarı düzlemde C, P, Q ve C, P', Q' noktaları doğrudaş nokta üçlüleri olsun. $C(c,0)$ merkezli*

$$\frac{(x-c)^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1, \quad A, B \in \mathbb{R}^+$$

denklemli α yarı elipsi üzerinde PQ yayı ve aynı merkezli

$$\frac{(x-c)^2}{A'^2} + \frac{y^2}{B'^2} = 1, \quad A', B' \in \mathbb{R}^+$$

denklemli benzer α' elipsi üzerinde $P'Q'$ yayını alalım. Ayrıca t_P ve t_Q açıları, $t_P < t_Q$ olmak üzere sırasıyla CP , CQ ışınları ile pozitif x-ekseni arasındaki açılar olsunlar. Burada α ve α' benzer elipsler olduğundan

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = k$$

dir. Eğer α yarı elipsi t ile parametrize edilmişse, o zaman

$$x = c + A\cos t, \quad y = B\sin t$$

P and Q noktaları ile eşleşen t değerleri sırasıyla t_P ve t_Q olsun. Bu parametreler kullanılarak

$$\frac{dx}{dt} = -A\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = B\cos t$$

dir. Böylece PQ yayının genelleştirilmiş Poincaré uzunluk formülü olan

$$\int_{t_P}^{t_Q} \frac{\sqrt{\frac{A^2}{a^2}\sin^2 t + \frac{B^2}{b^2}\cos^2 t}}{B\sin t} dt$$

de $A = kA'$ ve $B = kB'$ yazılarak,

$$\int_{t_P}^{t_Q} \sqrt{\frac{A'^2\sin^2 t}{a^2} + \frac{B'^2\cos^2 t}{b^2}} dt$$

elde edilir. Elde edilen son integral P' ve Q' noktalarını birleştiren yayın genelleştirilmiş Poincaré uzunluğudur. Bu durumda PQ ve $P'Q'$ yayları aynı genelleştirilmiş Poincaré yay uzunluklarına sahiptir.

6.3 Genelleştirilmiş Poincaré Uzaklığını Koruyan Dönüşümler

Bu bölümde genelleştirilmiş Poincaré uzaklığının; x-eksenine paralel öteleme ve x-eksenine dik doğrulara göre yansıma dönüşümleri tarafından korunduğu gösterilmektedir.

Teorem 5. *Üst yarı düzlemde, x-eksenine paralel öteleme dönüşümleri genelleştirilmiş Poincaré uzaklığını korur.*

İspat. *Üst yarı düzlemde h sabit bir sayı olmak üzere τ ötelemesi $\tau(x, y) = (x + h, y)$ şeklinde tanımlansın. $t_1 < t < t_2$ aralığı için parametrize edilmiş bir γ eğrisini $[u(t), v(t)]$ olarak düşünelim. Aynı aralıkta $\tau(\gamma)$ eğrisi $[u(t)+h, v(t)]$ parametrizasyonuna sahip olsun. γ ve $\tau(\gamma)$ boyunca dx ve dy ; $dx = u'(t)dt, dy = v'(t)dt$ dir ve genelleştirilmiş Poincaré uzaklık formülünde bu değerler yerine konulduğunda*

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{\frac{u'(t)^2}{a^2} + \frac{v'(t)^2}{b^2}}}{v(t)} dt$$

elde edilir.

Sonuç olarak, bu γ ve $\tau(\gamma)$ nın aynı genelleştirilmiş Poincaré uzaklığa sahip olduklarını gösterir. Böylece x-eksenine paralel öteleme dönüşümlerinin genelleştirilmiş Poincaré uzaklığı koruduğu ispatlanmış olur.

Teorem 6. *Üst yarı düzlemde x-eksenine dik olan doğrulara göre yapılan yansımalar, genelleştirilmiş Poincaré uzaklığını korur.*

İspat. *l, üst yarı düzlemde $x = h$ denklemine sahip x-eksenine dik bir yarı doğru olsun. γ nın $t_1 < t < t_2$ aralığında $[u(t), v(t)]$ olarak parametrize edilen herhangi bir eğri olduğunu varsayalım. O zaman $\rho_l(\gamma)$, $[2h - u(t), v(t)]$ parametrizasyonuna sahip olur. γ ve $\rho_l(\gamma)$ da dx ve dy sırasıyla*

$$dx = u'(t)dt, \;\; dy = v'(t)dt \quad ve \quad dx = -u'(t)dt, \;\; dy = v'(t)dt$$

dir. Bu ifadeler genelleştirilmiş Poincaré uzaklık formülünde yerine konulursa

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{\frac{u'(t)^2}{a^2} + \frac{v'(t)^2}{b^2}}}{v(t)} dt$$

elde elilir.

Sonuç olarak, γ ve $\rho_l(\gamma)$ aynı genelleştirilmiş Poincaré uzaklığa sahiptir.

Örnek 12. *l, üst yarı düzlemde $x = 2$ denklemine sahip x-eksenine dik bir yarı doğru ve γ da $1 < t < 2$ aralığında $[2t, t]$ olarak parametrize edilen herhangi bir eğri olsun. Buradan $\rho_l(\gamma)$, $[4 - 2t, t]$ parametrizasyonuna sahip olur.*

γ eğrisi için; $dx = 2dt$ ve $dy = dt$ dir.

$\rho_l(\gamma)$ eğrisi için; $dx = -2dt$ ve $dy = dt$ dir. Bu ifadeler $a = 2$ ve $b = 1$ değerleri ile birlikte genelleştirilmiş Poincaré uzaklık formülüne yerleştirilirse γ eğrisi üzerinde

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{\frac{(2)^2}{4} + 1}}{t} dt = \sqrt{2} \ln 2$$

ve $\rho_l(\gamma)$ eğrisi üzerinde

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{\frac{(-2)^2}{4} + 1}}{t} dt = \sqrt{2} \ln 2$$

bulunur. Böylece γ ve $\rho_l(\gamma)$ aynı genelleştirilmiş Poincaré uzaklığa sahiptir.

7. HİPERBOLİK UZAY

Bu bölümde Stahl, 1993'ın eserinden faydalanılmış olup burada H^3 deki doğru parçaların ve merkezi xy düzleminde olan dikey çember yaylarının uzunlukları ile ilgili özellikler verilmektedir.

H^3 hiperbolik uzay, Poincaré üst yarı-düzlem yapısına benzer bir şekilde tanımlanan

$$H^3 = \left\{(x, y, z) \in R^3 \mid \quad z > 0\right\}$$

kümesidir ve kısaca H^3 uzayı ile gösterilir.

H^3 de iki tip doğru vardır. Bunlar dikey çemberler ve dikey doğrulardır. Dikey çemberler, merkezleri $xy-$düzleminde olan Öklidyen dik yarı çember yayları; dikey doğrular $xy-$düzlemine dik olan Öklidyen doğru parçalarıdır.

Tanım 9. *H^3 de $a \leq t \leq b$ olmak üzere herhangi bir $\gamma(t)$ eğrisinin Poincaré uzunluğu*

$$\int_a^b \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{z}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 13. *H^3 de $2 \leq t \leq 4$ olmak üzere $\gamma(t) = (t + 2, 2t - 1, 3t + 1)$ olarak verilen Öklidyen doğru parçasının hiperbolik uzunluğu, $(4, 3, 7)$ ve $(6, 7, 13)$ noktalarından geçen doğru parçasının parametrik denklemleri*

$$x = t + 2, y = 2t - 1, z = 3t + 1$$

ve

$$dx = dt, dy = 2dt, dz = 3dt$$

ifadeleri Tanım 9 da yerine yazıldığında

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{dt^2+4dt^2+9dt^2}}{3t+1} = \int_2^4 \frac{\sqrt{14}}{3t+1}dt = \frac{\sqrt{14}}{3}\ln|3t+1|\Big|_2^4 = \frac{\sqrt{14}}{3}\ln\frac{13}{7}$$

olarak elde edilir.

Önerme 14. *H^3 de $z=1$ düzleminde verilen herhangi bir herhangi γ eğrisinin Poincaré uzunluğu Öklidyen uzunluğuna eşittir.*

İspat. *H^3 de $z=1$ düzlemindeki her eğri için $dz=0$ dır. Böylece $z=1$ deki γ eğrisinin hiperbolik uzunluğu*

$$\int_\gamma \sqrt{dx^2+dy^2}$$

şeklindeki Öklidyen uzunluğa eşittir. Dolayısıyla $z=1$ düzleminin hiperbolik geometrisi ile Öklid geometrisi aynıdır.

Benzer olarak, $x=0$ dikey düzlemindeki her eğri için $dx=0$ olduğundan bu düzlemdeki herhangi γ eğrisinin hiperbolik uzunluğu uygun harf değişiklikleri yapıldıktan sonra üst yarı düzlemin iki boyutlu Poincaré metriği ile aynı olup

$$\int_\gamma \frac{\sqrt{dy^2+dz^2}}{z}$$

dir. Başka bir deyişle, H^3 uzayının üst yarı düzleme $x=0$, $y>0$ olacak şekilde kısıtlandığında üç boyutlu Poincaré metriği aynı yarı düzlem üzerinde iki boyutlu Poincaré metriği olarak ortaya çıkar. Benzer uygulamalar xy-düzlemine dik olan herhangi bir düzlem için de geçerlidir.

Örnek 14. *$A=(0,1,1)$ ve $B=(0,2,1)$ noktalarını birleştiren doğru parçasının hiperbolik uzunluğunu bulalım.*

$$d_H(A,B) = \frac{\text{Öklidyen Uzunluk}}{z} = 0^2+(2-1)^2+(1-1)^2 = 1$$

veya AB doğru parçasının parametrik denklemleri

$$x = 0\ , y = t\ , z = 1 \quad 1 \leq t \leq 2$$

kullanılırsa

$$dx = 0, dy = dt, dz = 0$$

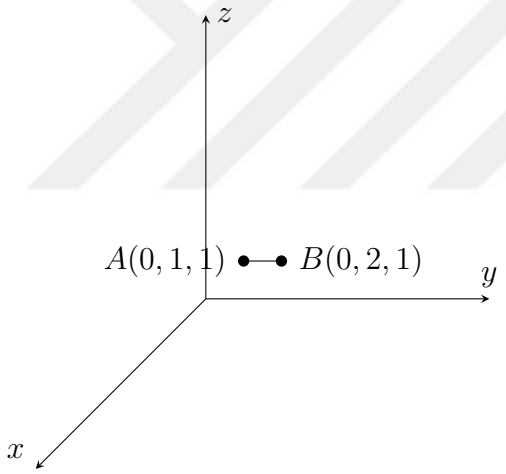
olduğundan

$$d_H(A,B) = \int_1^2 \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{z} = \int_1^2 dt = 1$$

olarak bulunur. Bu iki nokta arasındaki Öklidyen uzunluk da

$$d_E(A,B) = 1$$

dir.



Örnek 15. *H^3 üst yarı uzayda $A = (0,1,1)$ ve $C = (0,0,5)$ noktalarını birleştiren doğru parçasının hiperbolik uzunluğunu bulalım. CA doğru parçasının parametrik denklemleri*

$$x = 0\ , y = t \quad , z = 5 - 4t \quad 0 \leq t \leq 1$$

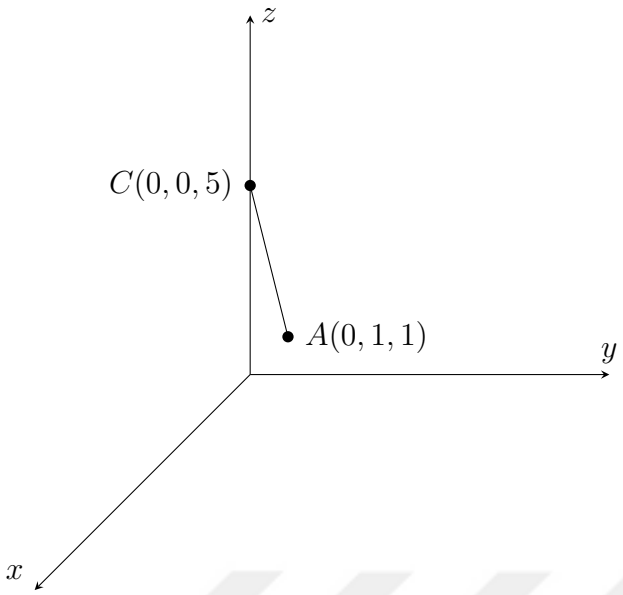
den

$$dx = 0, dy = dt, dz = -4dt$$

olup doğru parçasının Poincaré uzunluğu

$$d_H(A,C) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+16}}{5-4t} dt = \sqrt{17} \int_0^1 \frac{dt}{5-4t} = \frac{\sqrt{17}}{4} \ln 5$$

olur.



7.1 H^3 de Herhangi Bir γ Eğrisinin Hiperbolik Uzunluğuyla İlgili Bazı Genellemeler

H^3 de verilen herhangi iki nokta $A = (x_0, y_0, z_0)$ ve $B = (x_1, y_1, z_1)$ olsun. $[AB]$ doğru parçasının parametrik denklemi

$z_1 \neq z_0$ için doğrultu

$$\overrightarrow{d} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$

ve doğrunun parametrik denklemleri

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} , \quad 0 \leq t \leq 1$$

şeklindedir. Buradan

$$dx = adt \ , \ dy = bdt \ , \ dz = cdt$$

eşitlikleri hiperbolik uzaklık formülünde yerine konulursa

$$
\begin{aligned}
d_H(A,B) &= \int_a^b \frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{z} \\
&= \int_0^1 \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{z_0+ct}dt \\
&= \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{c}(\ln|z_0+ct|)\Big|_0^1 \\
&= \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{c}(\ln|z_0+c| - \ln|z_0|) \\
&= \frac{d_E(A,B)}{z_1-z_0}\ln\left|\frac{z_1}{z_0}\right|
\end{aligned}
$$

elde edilir.

a) ***Doğru parçası*** xy***-düzlemine dik ise***

$A=(x_0,y_0,z_1)$ *ve* $B=(x_0,y_0,z_2)$ *olmak üzere doğrultu*

$$\overrightarrow{d}=(0,0,z_2-z_1)$$

şeklindedir. Buradan doğru parçasının denklemi

$$x=x_0, y=y_0, \frac{z-z_1}{z_2-z_1}=t \Rightarrow z=z_1+(z_2-z_1)t$$

olup

$$dx=0, dy=0, dz=(z_2-z_1)dt \qquad 0\le t\le 1$$

dir. AB doğru parçasının hiperbolik uzunluğu

$$d_H(A,B) = \int_0^1 \frac{\sqrt{(z_2-z_1)^2}}{z_1+(z_2-z_1)t}dt$$

$$= |z_2-z_1| \frac{\ln z_2 - \ln z_1}{|z_2-z_1|}$$

$$= \ln(\frac{z_2}{z_1})$$

şeklinde elde edilir. Sonuç olarak H^3 dexy-düzlemine dik doğru parçalarının hiperbolik uzunluğu bulunduğu konumdan bağımsızdır.

b) ***Doğru parçası z eksenine dik ise***

$A=(x_1,y_1,z_1)$ $B=(x_2,y_2,z_1)$ noktaları için AB doğru parçasının doğrultusu

$$\overrightarrow{d} = (x_2-x_1, y_2-y_1, 0)$$

şeklinde olup denklemi

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = t, z-z_1 = 0$$

den

$$\begin{cases} x = x_1+at \\ y = y_1+bt \quad , \quad 0 \le t \le 1 \\ z = z_1 \end{cases}$$

şeklindedir. Buradan

$$\begin{cases} dx = adt \\ dy = bdt \quad , \quad 0 \le t \le 1 \\ d_z = 0 \end{cases}$$

olup

$$d_H(A,B) = \int_0^1 \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{z_1}dt = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{z_1}$$

$$= \frac{d_E(A,B)}{z_1}$$

şeklinde elde edilir. Sonuç olarak $z=1$ ise hiperbolik uzunluk Öklidyen uzunluğa eşittir.

Örnek 16. *$A=(1,2,4)$ ve $B=(2,3,4)$ noktaları ile verilen AB doğru parçasının doğrultusu*

$$\overrightarrow{d} = (1, 1, 0)$$

olup standart denklemi

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = t, z - 4 = 0$$

dir. Parametrik denklemi standart denklemden

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2 + t \ , \ \ 0 \leq t \leq 1 \\ z = 4 \end{cases}$$

şeklinde elde edilir.

$$dx = 1, dy = 1, d_z = 0$$

olup

$$\begin{aligned} d_H(A, B) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{dt^2 + dt^2}}{4} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{4} dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{d_E(A, B)}{z_1} \end{aligned}$$

dır.

Önerme 15. *H^3 de (x_1, y_1, z_1) , (x_1, y_1, z_2) noktalarından geçen Öklidyen doğru parçasının Poincaré uzunluğu*

$$\ln \frac{z_2}{z_1}$$

dir.

İspat. *H^3 de (x_1, y_1, z_1) , (x_1, y_1, z_2) noktalarını birleştiren doğru parçasının parametrik denklemleri*

$$x = x_1, y = y_1, z = t, z_1 \leq t \leq z_2$$

olduğundan buradan

$$dx = dy = 0 \quad , \quad dz = dt$$

olup bu doğru parçasının Poincaré uzunluğu,

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{\sqrt{0^2 + 0^2 + dt^2}}{t} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{dt}{t} = \ln \frac{z_2}{z_1}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 17. *$2 \leq t \leq 3$ olmak üzere $y(t) = (t^2, t^3, t + 1)$ eğrisinin hiperbolik uzunluğu, eğrinin parametrik denklemleri*

$$x = t^2, y = t^3, z = t + 1$$

den

$$dx = 2tdt, \quad dy = 3t^2 dt \quad , \quad dz = dt$$

olup bu değerler Poincaré uzaklık fonksiyonunda yerlerine yazılarak

$$\int_2^3 \frac{\sqrt{4t^2 + 9t^4 + 1}}{t + 1} dt \approx 5.56$$

olarak bulunur.

7.2 H^3 ün Katı Hareketleri

Bu bölümde hiperbolik uzayda xy düzlemine dik eksenli her Öklidyen dönmelerin ve xy düzlemine paralel ötelemelerin hiperbolik uzunlukları koruduğu gösterilmektedir.

Önerme 16. *a, b ve α sabit reel sayılar olsun.*

$$\rho(x, y, z) = (x\cos\alpha + y\sin\alpha, -x\sin\alpha + y\cos\alpha, z),$$

şeklinde tanımlanan ρ; dönme ekseni $z-$ekseni olan ve bu eksen ile saat yönünün tersinde α açısı yaparak oluşturulan Öklidyen dönme ve

$$\tau(x, y, z) = (x + a, y + b, z)$$

şeklinde tanımlanan τ herhangi bir z değeri için $(0, 0, z)$ noktasını (a, b, z) noktasına dönüştüren yatay öteleme dönüşümleri H^3 ün katı hareketleridir.

İspat. *İlk olarak $\rho(x, y, z)$ Dönme dönüşümünü ele alalım. H^3 de*

$$\gamma(t) = [x(t), y(t), w(t)],\ a \leq t \leq b$$

eğrisi ve

$$u(t) = x(t)\cos\alpha + y(t)\sin\alpha$$

$$v(t) = -x(t)\sin\alpha + y(t)\cos\alpha$$

$$w(t) = z(t).$$

olmak üzere γ eğrisinin ρ dönüşümü altındaki görüntüsü

$$\gamma^*(t) = [u(t), v(t), z(t)],\ a \leq t \leq b$$

olsun. Buradan ρ 'nin katı bir hareket olduğunu söyleyebilmemiz için

$$\int_{\gamma^*} \frac{\sqrt{du^2+dv^2+dw^2}}{w} = \int_{\gamma} \frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{z}$$

eşitliğin sağlandığı gösterilmelidir.

$$\begin{aligned} d_u &= \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \\ &= \cos\alpha dx + \sin\alpha dy \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy \\ &= -\sin\alpha dx + \cos\alpha dy \end{aligned}$$

ve

$$dw = dz$$

olup

$$\begin{aligned} d_H(\gamma^*) &= \int_{\gamma^*} \frac{\sqrt{du^2+dv^2+dw^2}}{w} \\ &= \int_{\gamma} \frac{\sqrt{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)dx^2+(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)dy^2+dz^2}}{z} \\ &= \int_{\gamma} \frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{z} \\ &= d_H(\gamma) \end{aligned}$$

dir. Buradan ρ dönme dönüşümü katı harekettir.

Şimdi de $\tau(x,y,z)$ öteleme dönüşümünü alalım. H^3 de

$$\gamma(t) = [x(t), y(t), z(t)],\ a \leq t \leq b$$

eğrisinin τ öteleme dönüşümü altında görüntüsü

$$\begin{cases} u(t) & = x(t) + a \\ v(t) & = y(t) + b \quad a, b \in \mathbb{R} \\ w(t) & = z(t) \end{cases}$$

olmak üzere

$$\gamma^*(t) = [u(t), v(t), w(t)],\ a \leq t \leq b$$

olsun ve

$$\begin{aligned} du &= dx \\ dv &= dy \\ dw &= dz \end{aligned}$$

olduğundan

$$\int_{\gamma^*} \frac{\sqrt{du^2 + dv^2 + dw^2}}{w} = \int_{\gamma} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{z}$$

dir. Buradan τ yatay ötelemesi katı harekettir.

Sonuç 4.

(a) *xy-düzlemine dik eksenli her Öklidyen dönme ve*

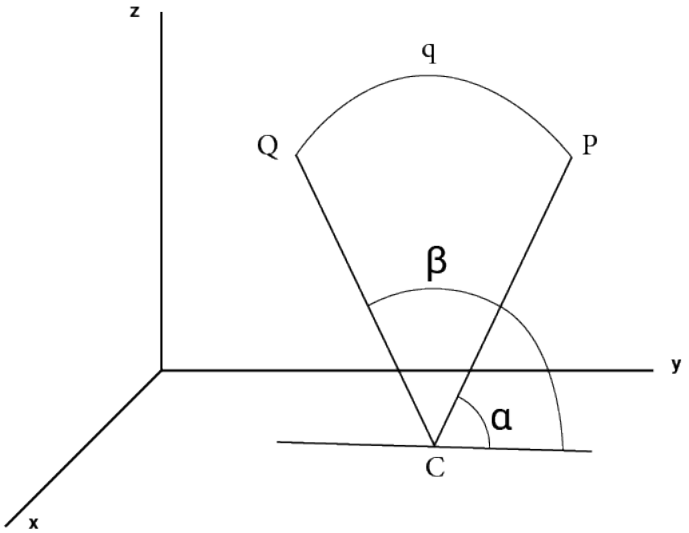
(b) *xy-düzlemine paralel olarak hareket ettirilen her Öklidyen öteleme H^3 ün hiperbolik bir katı harekettir.*

H^3 hiperbolik uzayında, düşey çemberler üzerinde gerçekleştirilen yansımalar, inversiyonlardır. H-düzlemindeki eğri jeodeziklerdeki dönüşlere benzer şekilde, kesişen iki düşey çemberin inversiyonlarının bileşimi bir dönmeyi ifade eder. Yine H-düzlemindeki eğri jeodeziklerdeki ötlemelere benzer olarak, paralel iki düşey çemberin inversiyonlarının bileşimi bir ötlemeyi temsil eder.

Önerme 17. *H^3 de q, $C(a,b,0)$ merkezli ve r yarıçaplı dikey bir çember olsun. P ve Q, q üzerindeki noktalar ve CP ile CQ yarıçapları, xy düzlemindeki izdüşümleri ile $\alpha \leq \beta$ olacak şekilde sırasıyla α ve β açıları yapsınlar. O zaman, PQ yayının Poincaré uzunluğu*

$$d_H(P,Q) = \ln \frac{\csc\beta - \cot\beta}{\csc\alpha - \cot\alpha}$$

dır.



Şekil 7.1 H^3 te PQ yayının hiperbolik uzunluğu

İspat. *H^3 uzayında q, $C(a,b,0)$ merkezli ve r yarıçaplı dikey bir çember olsun. P ve Q, q çemberi üzerindeki noktalar ve CP ile CQ yarıçapları, xy düzlemi üzerindeki izdüşümleri ile sırasıyla α ve β açıları yapsınlar. xy-düzlemine dik olan her çember xy-düzlemine dik olan bir düzlemde bulunur. Merkezi x-ekseni üzerinde yz-düzleminde bulunan bir çember yayı*

için merkezi x-ekseni üzerinde olan xy-düzlemindeki çember yayının hiperbolik uzunluk formülü geçerli olur. H^3 de xy-düzlemine paralel ötelemeler ve z-eksenli dönmeler Poincaré uzaklığını koruduğundan Teorem 1 ve Sonuç 4 ten xy-düzleminde olan ve xy-düzlemine dik olan bütün çember yayları için geçerlidir.

7.3 Poincaré Üst Yarı Uzayının Jeodezikleri

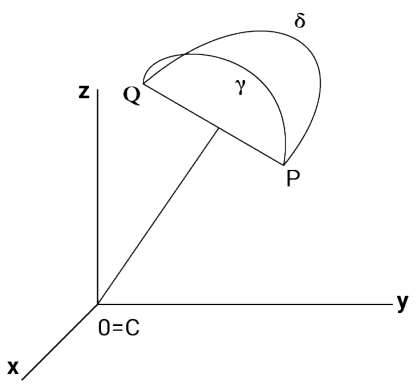
Önerme 18. *Poincaré üst yarı uzayının jeodezik parçaları ya*

(a) Merkezi $xy-$düzleminde olan Öklidyen yarı çember yayları ya da

(b) $xy-$düzlemine dik olan Öklidyen düz doğru parçalarıdır.

İspat. *$P(x, y, z)$ ve $Q(x, y, z)$ H^3 ün herhangi iki noktası olsun ve bu noktaları birleştirilen eğri γ olsun. İki durumu ele almak gerekmektedir.*

Durum 1. PQ doğru parçası, xy düzlemine dik olmasın. P ve Q noktalarını içeren ve xy düzlemine dik olan Π düzlemi olsun. xy düzlemi ile PQ doğru parçasının orta dikmesinin kesişim noktası Π düzlemi üzerindeki C olsun. Bir öteleme ve bir dönmenin bileşkesi Π düzlemi $yz-$düzlemine ve C noktasını da orijine dönüştürsün(Şekil 7.2). Bu dönüşümler hem hiperbolik hem de Öklidyen katı hareketlerdir, bu nedenle hiperbolik jeodezikleri hiperbolik jeodeziklere, dikey Öklidyen yarı çemberleri ise dikey Öklidyen yarı çemberlere dönüştürürler.



Şekil 7.2 Poincaré üst yarı uzayda jeodezik

Genelliği bozmadan Π *düzlemini* yz*-düzlemi ve* C *noktasını başlangıç noktası kabul edelim.* P *ve* Q *noktalarından geçen eğri*

$$\gamma(t) = [x(t), y(t), z(t)]$$

olsun. Küresel koordinat sistemine göre

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t)\sin u(t)\cos v(t) \\ y(t) &= r(t)\sin u(t)\sin v(t) \\ z(t) &= r(t)\cos u(t) \end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned} dx &= (r'\sin u\cos v + ru'\cos u\cos v - r\sin uv'\sin v)dt \\ dy &= (r'\sin u\sin v + ru'\cos u\sin v + r\sin uv'\cos v)dt \\ dz &= (r'\cos u - ru'\sin u)dt \end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned} dx^2+dy^2+dz^2 &= [(r'\sin u\cos v + ru'\cos u\cos v - r\sin uv'\sin v)^2 \\ &\quad +(r'\sin u\sin v + ru'\cos u\sin v + r\sin uv'\cos v)^2 \\ &\quad +(r'\cos u - ru'\sin u)^2]dt^2 \\ &= [(r')^2\sin^2 u(\cos^2 v+\sin^2 v) + r^2(u')^2\cos^2 u(\cos^2 v+\sin^2 v) \\ &\quad +r^2(v')^2\sin^2 u(\sin^2 v+\cos^2 v) + 2rr'u'\sin u\cos u(\cos^2 v+\sin^2 v) \\ &\quad +(r')^2\cos^2 u - 2rr'u'\sin u\cos u + r^2(u')^2\sin^2 u]dt^2 \\ &= [(r')^2 + r^2(u')^2 + r^2(v')^2\sin^2 u]dt^2 \end{aligned}$$

dir. Böylece γ eğrisinin hiperbolik uzunluğu,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{(r')^2 + r^2(u')^2 + r^2(v')^2 \sin^2 u}}{r \cos u} dt$$

olur. Buradaki t_1 ve t_2 sırasıyla P ve Q noktalarına karşılık gelen t parametresinin değerleridir. Şimdi de γ jeodeziğinin merkezi orjinde olan dikey yarı çember yayı olduğununu ve $yz-$düzleminde yer alması gerektiğini gösterelim. δ, γ eğrisinin denkleminde $v = \frac{\pi}{2}$ yazarak elde edilen ve P ile Q noktalarından geçen eğri olsun. Bu eğri tamamen yz-düzleminde yer alır. δ eğrisi,

$$\begin{aligned} x(t) &= 0 \\ y(t) &= r(t) \sin u(t) \\ z(t) &= r(t) \cos u(t) \end{aligned}$$

parametreleri ile

$$\delta(t) = [x(t), y(t), z(t)]$$

şeklinde verilebilir. Burada $r(t)$ ve $u(t)$ yukarıda γ yi tanımlamak için kullanılan fonksiyonlarla aynıdır.

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{(r')^2 + r^2(u')^2 + r^2(v')^2 \sin^2 u}}{r \cos u} dt$$

ifadesinde $v' = 0$ yazıldığında

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{(r')^2 + r^2(u')^2}}{r \cos u} dt$$

elde edilir. Belirli integralin temel özelliklerinden

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{(r')^2 + r^2(u')^2 + r^2(v')^2 \sin^2 u}}{r \cos u} dt \geq \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{(r')^2 + r^2(u')^2}}{r \cos u} dt$$

dir. Eşitliğin geçerli olması için gerek ve yeter koşul $v' = 0$ *dır, bu durumda* v *sabit bir sayıdır. Ancak* P *ve* Q *noktalarının her ikisi de* $yz-$*düzleminde olduğu için* v *sayısının tek değeri* $\frac{\pi}{2}$ *dir.* $v = \frac{\pi}{2}$ *olduğundan* γ *bir jeodezik olmak üzere bu jeodezik tamamen* $yz-$*düzleminde bulunmak zorundadır.* $\gamma = \delta$ *olup* γ *düşey yarı çember yayıdır.*

Durum 2. PQ *jeodeziği* $xy-$*düzlemine dik olsun.* $x_1 = x_2$ *ve* $y_1 = y_2$ *olmak üzere* PQ *jeodeziğinin* (x_1, y_1, z_1) *ve* (x_2, y_2, z_2) *noktalarındann geçtiğini kabul edelim.* PQ *jeodeziğinin hiperbolik uzunluğu*

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{z} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z} = \ln \frac{z_2}{z_1}$$

olur. Böylece Önerme 15 e göre PQ *jeodeziğinin Öklidyen düz doğru parçası olduğunu söylenebilir (Stahl, 1993).*

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada üst yarı düzlemde Poincaré uzaklık fonksiyona alternatif olan uzaklık fonksiyonlarının bir ailesi tanımlanmıştır. a ve b sabitlerinin her değeri için tanımlanan uzaklık bir Riemann metriğidir. Bu uzaklık fonksiyonuna göre dikey doğrular üzerindeki farklı iki nokta arasındaki uzaklık Poincaré uzaklık fonksiyonunun $\frac{1}{b}$ katına eşit olup dikey doğruların denkleminden bağımsız olduğu görülmüştür. Yatay doğrular üzerinde farklı iki nokta arasındaki uzaklık Poincaré uzaklık fonksiyonunun $\frac{1}{ak}$ katına eşit olduğu görülmüştür. Ayrıca bu uzaklık fonksiyona göre x-ekseni üzerinde aynı merkeze sahip yataysal ve dikeysel benzer elipsler üzerinde bulunan ve uç noktaları merkez ile doğrudaş olan elips yaylarının Genelleştirilmiş Poincaré uzunluklarının eşit olduğu sonucuna varılmıştır.

Tanımlanan genelleştirilmiş uzaklıkların x-eksenine parallel ötelemeler ve x-eksenine dik doğrulara göre yansımalar altında korunduğu gösterilmiştir. Sonuç olarak tanımlanan a ve b nin birbirinden farklı her değeri için Poincaré üst yarı düzlem modelinden farklı bir düzlem modeli elde edilmektedir.

Bu çalışma yardımıyla H^3 Poincaré üst yarı uzayındaki metrik de benzer şekilde genelleştirilerek farklı üst yarı uzay modelleri elde edilebilir ve bu modeller arasındaki ilişkiler sunulabilir.

Bu çalışmada sunulan Genelleştirilmiş Poincaré uzaklık fonksiyonu ile donatılmış üst yarı düzlem modelleri hiperbolik geometrinin gelişimine katkı sağlayacaktır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Anderson, J. W. (2006). *Hyperbolic geometry*. Springer Science & Business Media.

Bercu, G., & Crasmareanu, M. (2021). Classes of harmonic functions in 2D generalized Poincaré geometry. *Filomat*, *35*(1), 287–297. Retrieved May 25, 2023, from https://doiserbia.nb.rs/Article.aspx?ID=0354-51802101287B

Dobbs, D. E. (2001). Applications of a distance formula in hyperbolic plane geometry [Publisher: Taylor & Francis _eprint: https://doi.org/10.1080/00207390120002]. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *32*(1), 148–156. https://doi.org/10.1080/00207390120002

Dunham, D. (2012). M.C. Escher's Use of the Poincaré Models of Hyperbolic Geometry. In C. Bruter (Ed.), *Mathematics and Modern Art* (pp. 69–77). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-24497-1_7

Garra, R., Maltese, F., & Orsingher, E. (2020). A note on generalized fractional diffusion equations on Poincaré half plane. *arXiv preprint arXiv:2007.11822*.

Gorni, G., & Zampieri, G. (2023). The Geodesics for Poincaré's Half-Plane: A Nonstandard Derivation [Publisher: Taylor & Francis _eprint: https://doi.org/10.1080/00029890.2023.2181574]. *The American Mathematical Monthly*, *130*(5), 478–481. https://doi.org/10.1080/00029890.2023.2181574

Hopper, J. (2019). Riemann Mapping Theorem And Planar Models of Hyperbolic Geometry.

Horváth, Á. G. (2015). Hyperbolic plane geometry revisited. *Journal of Geometry*, *106*(2), 341–362. https://doi.org/10.1007/s00022-014-0252-0

Kaya, R. (2019). Generalized Poincaré Half-Planes. *arXiv preprint arXiv:1904.01899*.

Millman, R. S. [Richard S.]. (1980). The Upper Half Plane Model for Hyperbolic Geometry [Publisher: Taylor & Francis _eprint:

https://doi.org/10.1080/00029890.1980.11994954]. *The American Mathematical Monthly*, *87*(1), 48–53. https://doi.org/10.1080/00029890.1980.11994954

Millman, R. S. [Richard S], & Parker, G. D. (1993). *Geometry: a metric approach with models*. Springer Science & Business Media.

Parker, J. R. (2003). Notes on complex hyperbolic geometry. *preprint*.

Rostamzadeh, M., & Taherian, S.-G. (2016). An Extension of Poincare Model of Hyperbolic Geometry with Gyrovector Space Approach [Publisher: University of Kashan]. *Mathematics Interdisciplinary Research*, *1*(1), 187–198. https://doi.org/10.22052/mir.2016.13923

Sönmez, N. (2006). *Poincare Yarı Düzlem Geometrisi Üzerine* (Doctoral dissertation). Eskişehir Osmangazi Üniversitesi. Matematik Bölümü. https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/tezDetay.jsp?id=Z0uzt9OkAnIjwqdFqwuYKA&no=SIOvJdsuAr9iwQD2c1k3QQ

Sönmez, N., & Barbu, C. (2000). The Hyperbolic Smarandache Theorem in the Poincare Upper Half-Plane Model of Hyperbolic Geometry.

Stahl, S. (1993). *The Poincaré half-plane: A gateway to modern geometry*. Jones & Bartlett Learning.

Terras, A. (2013). The Poincaré Upper Half-Plane. In A. Terras (Ed.), *Harmonic Analysis on Symmetric Spaces—Euclidean Space, the Sphere, and the Poincaré Upper Half-Plane* (pp. 149–376). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7972-7_3