Öklidyen 4-Uzayda Quasi Çatılı Eğriler

Buket Gezer

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Haziran 2023

The Curves with Quasi Frame in Euclidean 4-Space

Buket Gezer

MASTER OF SCIENCE THESIS

Deparment of Mathematics-Computer

June 2023

Öklidyen 4-Uzayda Quasi Çatılı Eğriler

Buket Gezer

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği Uyarınca
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Cumali Ekici

Haziran 2023

ONAY

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS öğrencisi Buket Gezer'in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Öklidyen 4-Uzayda Quasi Çatılı Eğriler" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Cumali Ekici

İkinci Danışman :

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Cumali Ekici

Üye : Prof. Dr. Özcan Gelişgen

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Koray Yılmaz

Üye :

Üye :

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Cumali Ekici danışmanlığında hazırlamış olduğum "Öklidyen 4-Uzayda Quasi Çatılı Eğriler" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 14/06/2023

Buket GEZER

ÖZET

3-boyutlu Öklid uzayında uzay eğrileri için Frenet çatısı, Bishop çatı ve paralel öteleme çatısı üzerine çalışmalar yapılmıştır. Bunlara ilave olarak 3-boyutlu Öklid uzayında quasi çatı tanımlanmıştır. 4-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısı, Bishop çatı ve paralel öteleme çatısı tanıtılmış ve 4-boyutlu Öklid uzayında kullanılacak olan quasi çatılı bir uzay eğrisi hakkında bilgi verilmiştir. Quasi çatıyı kullanmaktaki asıl amaç bu çatının Frenet çatısına ve bilinen diğer çatılara göre daha genel olması ve alınan bir uzay eğrisinin ikinci mertebeden türevinin olmadığı durumlarda dahi quasi çatı ile hesaplamaların yapılabilmesidir. Quasi çatı bilinen diğer çatılarla aynı doğruluğa sahiptir. Bu çatının diğer bir önemli özelliği ise bir uzay eğrisi boyunca hesaplanan çatı vektörlerinin teğet etrafındaki gereksiz bükülmelerini ve dönmelerini engellemesidir. Verilen uzay eğrisinin quasi çatısı için öncelikle quasi-normal vektörü bir Öklid açısı kadar dönerek teğet vektör ve **k** izdüşüm vektörüne dik bir birim vektör olarak verilir. Sonrasında bu vektörler yardımıyla birim hızlı teğet vektör, quasi-normal vektör ve quasi-binormal vektör ile quasi çatısı oluşturulur. 4-boyutlu Öklid uzayında bir uzay eğrisi, örneğin xy-düzlemindeki izdüşüm vektörleri $\mathbf{k}_x$ ve $\mathbf{k}_y$ için birim vektörler **t** teğet, $\mathbf{n}_q$ quasi-normal, $\mathbf{b}_{q1}$ birinci quasi-binormal ve $\mathbf{b}_{q2}$ ise ikinci quasi-binormal kullanılarak quasi çatısı ve quasi eğrilikleri bulunmuştur. Bulunan bu quasi eğrilikleri $\mathbf{k}_x$ ve $\mathbf{k}_y$ izdüşüm vektörlerine bağlı olarak elde edilmiştir. 4-boyutlu Öklid uzayında bir uzay eğrisinin quasi eğriliklerinin eşitleri eğrinin üçüncü mertebeye kadar olan türevleri ile $\mathbf{k}_x$ ve $\mathbf{k}_y$ izdüşüm vektörleri yardımıyla hesaplanmıştır. Ayrıca $\mathbb{E}^4$ uzayında quasi çatıya göre Bertrand ve Mannheim eğrileri incelenmiştir. Bulunan bu hesapların daha anlaşılabilir olması adına 4-boyutlu Öklid uzayında bir uzay eğrisi için quasi çatı ve quasi eğriliklerinin elde edildiği örnekler yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: 4-boyutlu uzay, Frenet çatı, Quasi çatı, Quasi eğrilikleri.

SUMMARY

Frenet frame, Bishop frame and parallel translational frame for space curves in $\mathbb{E}^3$ space have been studied. In addition to these, quasi frame is defined in 3-dimensional Euclidean space. In $\mathbb{E}^4$, the Frenet frame, Bishop frame and parallel translation frame are introduced and information is given about a space curve with a quasi frame in $\mathbb{E}^4$ space to be used in this paper. The mean using the quasi frame is that this frame is more general than the Frenet frame and other known frames and calculations can be made with the quasi frame in cases where there is no second-order derivative of a space curve. The quasi frame has the same accuracy as other known frames. Another important feature of this frame is that it prevents unnecessary twists and turns around the tangent of the frame vectors calculated along a space curve. The quasi frame of a given space curve is rotated by a Euclidean angle and firstly the quasi-normal vector is given as a unit vector perpendicular to the tangent vector and the projection vector **k**. Then, the quasi frame is formed by the tangent vector, the quasi-normal vector, and the unit quasi-binormal vector. For a space curve in $\mathbb{E}^4$ space, for example, $\mathbf{k}_x$ and $\mathbf{k}_y$ projection vectors in the xy -plane, **t** is the unit tangent, $\mathbf{n}_q$ is the unit quasi-normal, $\mathbf{b}_{q1}$ is the first unit quasi-binormal and $\mathbf{b}_{q2}$ is the second unit quasi-binormal to find the quasi frame and quasi curvatures. These quasi curvatures are obtained depending on the projection vectors $\mathbf{k}_x$ and $\mathbf{k}_y$. Equivalents of the quasi curvatures of a space curve in $\mathbb{E}^4$ space are calculated with the help of the derivatives of the curve up to the third order and the projection vectors $\mathbf{k}_x$ and $\mathbf{k}_y$. In $\mathbb{E}^4$ space, Bertrand and Mannheim curves according to the quasi frame were also analysed. In order to make these calculations more comprehensible, an example is made in which quasi frames and quasi curvatures are obtained for a space curve in 4-dimensional Euclidean space.

Key Words: 4-dimensional space, Frenet frame, Quasi frame, Quasi curvatures.

TEŞEKKÜR

"Öklidyen 4-Uzayda Quasi Çatılı Eğriler" adlı tez çalışmamda, tüm bilgilerini ve değerli vaktini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, tezimde büyük emeği olan ve bana inanan değerli danışmanım Sayın

Prof. Dr. Cumali Ekici

hocama teşekkür ederim.

Hayatın her alanında yanımda olan ve her koşulda desteğini esirgemeyen canım aileme de teşekkür ederim.

ESKİŞEHİR, 2023
Buket Gezer

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET . . . . . **vi**

SUMMARY . . . . . **vii**

TEŞEKKÜR . . . . . **viii**

İÇİNDEKİLER . . . . . **ix**

ŞEKİLLER DİZİNİ . . . . . **x**

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ . . . . . **xi**

1. GİRİŞ VE AMAÇ **1**

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI **3**

3. TEMEL KAVRAMLAR **6**

3.1. Öklidyen 3-Uzayda Yapılar 6

3.2. Öklidyen 3-Uzayda Uzay Eğrisi Boyunca Quasi Çatı 9

3.3. Öklidyen 3-Uzayda Frenet Çatısı ile Quasi Çatı Arasındaki Bağıntılar . . . 11

3.4. Öklidyen 3-Uzayda Yönlü Bertrand ve Mannheim Eğrileri 12

3.5. Öklidyen 4-Uzayda Yapılar 14

3.6. Öklidyen 4-Uzayda Bertrand ve Mannheim Eğrileri 19

4. ÖKLİDYEN 4-UZAYDA QUASİ ÇATILI EĞRİLER **20**

4.1. Öklidyen 4-Uzayda Quasi Çatı 20

4.2. Öklidyen 4-Uzayda Quasi Çatı ile Frenet Çatı Arasındaki Bağıntılar 41

5. ÖKLİDYEN 4-UZAYDA YÖNLÜ EĞRİ ÇİFTLERİ **55**

5.1. Öklidyen 4-Uzayda Yönlü Bertrand Eğrileri 55

5.2. Öklidyen 4-Uzayda Yönlü Mannheim Eğrileri 80

6. BULGULAR VE TARTIŞMA **90**

7. SONUÇ VE ÖNERİLER **91**

KAYNAKLAR DİZİNİ **92**

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil		Sayfa
3.1	İzdüşüm vektörü	9
3.2	Doğru boyunca quasi-çatı gösterimi	10
3.3	Frenet çatı ve quasi-çatı arasındaki yapı	11
4.1	Birinci dönme düzlemi, **Span**$\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ düzleminde ϕ açısı	42
4.2	İkinci dönme düzlemi, **Span**$\{\mathbf{n}, \mathbf{b}_2\}$ düzleminde θ açısı	43
4.3	Üçüncü dönme düzlemi, **Span**$\{\mathbf{t}, \mathbf{b}_1\}$ düzleminde ψ açısı	43
4.4	**n** ve **b** Frenet vektörleri (kırmızı), $\mathbf{n}_q$ ve $\mathbf{b}_q$ quasi vektörleri (yeşil)	52
4.5	**n** ve **b** Frenet vektörleri (kırmızı), $\mathbf{n}_q$ ve $\mathbf{b}_q$ quasi vektörleri (yeşil)	52
5.1	Bertrand eğri çifti	55
5.2	xyz ve xyt uzaylarındaki **n** ve **b** Frenet vektörleri (kırmızı), $\mathbf{n}_q$ ve $\mathbf{b}_q$ quasi vektörleri (yeşil) için Bertrand eğri çifti	66
5.3	xzt ve yzt uzaylarındaki **n** ve **b** Frenet vektörleri (kırmızı), $\mathbf{n}_q$ ve $\mathbf{b}_q$ quasi vektörleri (yeşil) için Bertrand eğri çifti	67
5.4	xyz ve xyt uzaylarındaki eğri (mavi) ve Bertrand eğri eşi (siyah)	79
5.5	xzt ve yzt uzaylarındaki eğri (mavi) ve Bertrand eğri eşi (siyah)	79
5.6	Mannheim eğri çifti	81
5.7	xyz, xzt ve yzt uzaylarındaki eğri (mavi) ve Mannheim eğri eşi (siyah)	86
5.8	xyz ve xyt uzaylarındaki eğri (mavi) ve Mannheim eğri eşi (siyah)	88
5.9	xzt ve yzt uzaylarındaki eğri (mavi) ve Mannheim eğri eşi (siyah)	89

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
$\mathbb{E}^n$	$n-$ boyutlu Öklid Uzayı
$\mathbf{k}_x$	$x-$ ekseni Yönündeki İzdüşüm Vektörü
$\mathbf{k}_y$	$y-$ ekseni Yönündeki İzdüşüm Vektörü
$\mathbf{k}_z$	$z-$ ekseni Yönündeki İzdüşüm Vektörü
$\mathbf{k}_t$	$t-$ ekseni Yönündeki İzdüşüm Vektörü
$\alpha,\ \beta$	Uzay Eğrisi
$\mathbf{t}$	Teğet Vektör
$\mathbf{n}$	Normal Vektör
$\mathbf{b}$	Binormal Vektör
$\mathbf{b}_1$	Birinci Binormal Vektör
$\mathbf{b}_2$	İkinci Binormal Vektör
$\mathbf{n}_q$	Quasi -Normal Vektör
$\mathbf{b}_{q1}$	Birinci Quasi-Binormal Vektör
$\mathbf{b}_{q2}$	İkinci Quasi-Binormal Vektör
k_{q1}	Birinci Quasi Eğriliği
k_{q2}	İkinci Quasi Eğriliği
k_{q3}	Üçüncü Quasi Eğriliği
k_{q4}	Dördüncü Quasi Eğriliği
$k_{qi}^{\lambda}\ \ (i=1,2,3,4)$	Bertrand için Quasi Eğrilikleri
$\|.\|$	Norm Fonksiyonu
$<,>$	Skaler Çarpım Fonksiyonu
$\wedge$	Vektörel Çarpım Fonksiyonu

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Eğri ve çatı kavramı diferensiyel geometride önemli bir yer tutmaktadır. 4-boyutlu Öklid uzayında da Frenet çatısı, Bishop çatı, paralel öteleme çatısı ile ilgili çalışmalar yapılmıştır. Bu çatılar arasındaki ilişkiler incelenerek yeni teoriler elde edilmiştir. Frenet çatısına alternatif olan ilk çalışma Bishop (1975) tarafından yapılmıştır. Bishop ve paralel öteleme çatısı gibi çatıların yanı sıra aynı doğrulukta sonuçlar veren hesaplanması bu çatılara göre daha kolay olan ve eğrinin ikinci türevinin olmadığı durumlarda bile çatının hesaplanmasını mümkün kılan bir diğer çatı da quasi çatıdır.

Eğriler teorisinin önemli konularından bir diğeri özel eğri çiftleridir. Özel eğri çiftleri pek çok çalışmada yer almıştır. Bir uzay eğrisi için asli normal vektör alanı oluşturma problemi Venant (1845) tarafından ortaya atılmıştır. Bertrand (1850) bir makalesinde bu şekilde bir eğrinin varlığının ancak sırasıyla eğrinin birinci eğriliği ve ikinci eğriliği için uygun bir bağıntı elde edilmesiyle mümkün olduğunu söylemiştir. Başka bir şekilde ifade edecek olursak eğrinin eğrilikleri arasında $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\lambda k_1 + \mu k_2 = 1$ şeklinde bir bağıntı vardır. Bertrand'ın bu çözümünün ardından koşullara uyan eğrilere Bertrand eğrisi, yukarıdaki bağıntıyla elde edilen diğer eğrilere de Bertrand eşlenik eğrisi denmiştir (Kuhnel, 2006).

1878 de değeri sabit olacak şekilde $k_1^2 + k_2^2 = w^2$ bağıntısı yardımıyla Mannheim eğrileri tanımlanmıştır (Azak, 2009). Blum (1966) Öklidyen 3-uzayda Mannheim eğrileri üzerine çalışmalar yapmıştır. Mannheim eğri tanımı 2007 yılında Wang ve Liu tarafından yeniden ifade edilerek yukarıdaki bağıntıyla elde edilen eğriler Mannheim eğri çifti olarak isimlendirilmiştir. Ardından Öklidyen 3-uzayda ve Minkowski 3-uzayında Mannheim eğri çifti olma koşulları incelenmiştir.

Quasi çatı kavramı için gerekli olan quasi-normal vektör Coquillart (1987) tarafından tanımlanmıştır. Quasi çatı ise ilk olarak 3-boyutlu Öklid uzayında Dede vd. (2015) tarafından tanımlanmıştır. 3-boyutlu Öklid uzayında bir uzay eğrisi için teğet vektör hesaplanıp ardından bir **k** izdüşüm vektörü yardımıyla quasi-normal vektör elde edilir ve bu iki vektörün vektörel çarpımı sonucu birim quasi-normal vektör bulunur. Böylece 3-boyutlu Öklid uzayında quasi çatı elde edilir. Buna bağlı olarak da quasi eğrilikleri ve türev denklemleri hesaplanır. Quasi çatı teğet etrafındaki gereksiz bükülmeyi önlemesi açısından önemli bir kavramdır. Çünkü Frenet çatısının dezavantajlarından biri olan eğriliğin sıfır olması durumunda Frenet çatısı tanımsız olmasına rağmen quasi çatı hesaplanabilir. Quasi

çatı tanımlanmasının ardından Minkowski 3-uzayı ve Galilean uzayı gibi pek çok farklı uzayda çalışılmıştır.

Bu tez çalışmasının amacı, 3-boyutlu Öklid uzayında tanımlanmış olan quasi çatıyı 4-boyutlu Öklid uzayına taşıyıp 4-boyutlu Öklid uzayında teğetin sıfır olması gibi Frenet çatısının tanımsız olduğu durumlarda bile uygulamalardaki kısıtlamalarından etkilenmeyen daha genel alternatif bir çatı oluşturmaktır. Çalışmada, Öklidyen 4-uzayda quasi çatı tanımlanmış buradan yola çıkarak da quasi eğrilikleri ve quasi türev denklemleri elde edilmiştir. Daha sonra da Öklidyen 4-uzayda Frenet çatısı ve quasi çatı arasındaki ilişkiler incelenmiş, quasi çatı için Bertrand ve Mannheim eğri çiftleri ile özelliklerine yer verilerek anlaşılabilirliği arttırmak adına tüm bu çalışmalar örneklerle desteklenmiştir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Öklidyen 3-uzayda eğriler teorisi diferensiyel geometrinin ana çalışma alanlarından biridir. Bu uzayda uzay eğrileri üzerine çalışmalar 1847 yılında Frenet ve 1851 yılında Serret tarafından yapılmış ve bugün Serret-Frenet Çatısı olarak adlandırılan ortonormal çatı ortaya çıkmıştır. Ayrıca, Yüce (2017) çalışmasında Öklidyen 3-uzayda bu çatı yardımıyla eğriler ve yüzeyler konusunu incelemiştir. En çok bilinen çatılardan biri de eğrinin hızı ve yüzeyin normali yardımıyla tanımlanan Darboux çatısıdır. İsmini 1887 - 1896 yılları arasında yayınlanan 4 ciltlik çalışmalarının ardından Fransız matematikçi Jean Gaston Darboux'dan almıştır. 2015 yılında Şentürk ve Yüce (2015) tarafından Öklidyen 3-uzayda yüzeylerin karakteristik özellikleri Darboux çatısı yardımıyla verilmiştir. Bunun dışında iyi bilinen bir diğer çatı Frenet çatısıdır. Bir eğrinin açık bir aralıkta türevlenebilir olması durumunda her noktada karşılıklı olarak ortogonal birim vektörler kümesinin oluşturulabileceği ve bu vektörlere Frenet çatısı veya hareketli çatı vektörleri denildiği iyi bilinmektedir. Bu çatı vektörlerinin eğri boyunca oranları eğrinin eğriliklerini tanımlar. Elemanları bir eğrinin çatı vektörleri ve eğrilikleri olan kümeye eğrilerin Frenet aparatı denir. Frenet çatısı klasik diferensiyel geometride önemli bir rol oynar. Bununla birlikte Frenet çatısının uygulamalarda çeşitli dezavantajları vardır. Örneğin, Frenet çatısı eğriliğin olmadığı her yerde tanımsızdır. Ayrıca, Frenet çatısının ikinci bir dezavantajı da teğet vektör etrafında istenmeyen bir dönmeye sebep olmasıdır (Bloomenthal, 1990).

Bishop çatısı (Bishop, 1975) veya paralel taşıma çatısı, eğrinin ikinci türevinin olmadığı hallerde bile iyi tanımlanan hareketli bir çatı kavramı oluşturmak için alternatif bir yaklaşımdır. Ortonormal bir çatıyı, çatının her bir bileşenini Öklid 4-uzayında paralel öteleyerek bir eğri boyunca paralel taşıyabiliriz. Bu durumda bazı noktalarda eğrilikler olmadığı için Frenet çatıları oluşturulamaz fakat Bishop çatısı kullanılabilir (Bishop, 1975). Yılmaz ve Turgut tarafından 2010 yılında Bishop çatısının yeni bir versiyonu verilmiştir. $\alpha'' \neq 0$ olmak üzere Frenet eğrilik fonksiyonları k_1, k_2 ve k_3 ile $\mathbb{E}^4$ Öklid 4-uzayında birim hızlı bir α eğrisi için Frenet vektörleri ise Alessio tarafından verilmiştir (Alessio, 2009). Bu kavram 2014'de Çelik ve diğerleri tarafından dört boyutlu Öklid uzayına genişletilmiş ve paralel bir çatı oluşturulmuştur. Dört boyutlu Öklid uzayında bu çatı paralel taşıma çatısı olarak adlandırılır ve bu konuda Ateş vd. (2019), Körpınar ve Turhan (2013), Gökçelik vd. (2014) ve Hanson ve Ma (1995) gibi çalışmalar mevcuttur. Klok, dönmeyi minimize eden çatılar kullanarak süpürme yüzeylerini tanımlamıştır (Klok, 1986). Süpürme yüzeyleri için rotasyonu minimize eden çatının doğru bir şekilde hesaplanması ise Wang tarafından gerçekleştirilmiştir (Wang vd., 2008). Bunların yanı sıra dört boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^4$de bir

çok çalışma yapılmıştır. Bunlardan bazıları Olah-Gol ve Pal (2009), Bulca (2012) ve Bulca (2017) şeklindedir.

Bertrand eğri çifti 1850 yılında ilk defa Bertrand tarafından ifade edilmiştir. 1967 yılında Lai zayıflatılmış Bertrand eğrileri üzerine çalışmış, 2003 yılında Matsuda ve Yorozu 4-boyutlu Öklid uzayında Bertrand eğrilerini genelleştirmek için öneride bulunmuştur. Ekici (2021), 3-boyutlu Öklid uzayında bir uzay eğrisi için Frenet çatısı, quasi çatı, Bertrand ve Mannheim eğri çiftlerini detaylı incelemiştir. 2014 yılında Kazaz vd. Minkowski-3 uzayında Darboux çatısı yardımıyla Bertrand D-eğri ikililerini tanımlayarak genel karakterizasyonları üzerine çalışmalar yapmıştır. 2004 yılında Balgetir 3-boyutlu Minkowski uzayında null Bertrand eğrilerini çalışmıştır. 2010 yılında Öztekin ve Bektaş 3-boyutlu Minkowski uzayında Bertrand eğrileri ile ilgili hesaplamalar yapmıştır. Choi vd. 2012 yılında yaptığı çalışmada Bertrand eğrilerini 3-boyutlu uzayda incelemiştir. Dede vd. 2018 yılında yaptıkları çalışmada yönlü Bertrand eğrilerinin özelliklerini quasi çatı yardımıyla incelemiştir. Kandilci vd. (2023), Minkowski uzayında yönlü Bertrand eğrileri üzerine çalışmıştır.

1878 yılında Mannheim'ın tanımladığı Mannheim eğri ikilisi üzerine Öklid uzayında ve Minkowski uzayında yapılmış birçok çalışma vardır. Blum (1966), 3-boyutlu Öklid uzayında Mannheim eğrilerini Riccati denklemlerinden faydalanarak araştırmıştır. 2008 yılında Wang ve Liu eğrinin birinci ve ikinci eğriliklerinin kareleri toplamı sabit olacak şekilde bu özel eğri çiftini yeniden ifade etmiş ve bu eğri sınıfına Mannheim eğrileri adı verilmiştir. Azak (2009), bu eğrilerin timelike özelliğinde olanlarını Lorentz uzayında 3-boyutlu olarak çalışmıştır. Liu ve Wang tarafından 2008 yılında $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında ve Öklidyen 3-uzayda Mannheim eğri ikilisi olma şartları verilmiştir. 2009 yılında Mannheim eğri ikililerinin eğrilikleri ile torsiyonları arasındaki bağıntılar Orbay ve Kasap tarafından Öklidyen 3-uzayda elde edilmiştir. 2011 yılında 3-boyutlu Minkowski uzayında null Mannheim eğrileri tanımlanarak bu eğriler için gerek ve yeter şartlar açıklanmıştır. Ardından 3-boyutlu Minkowski uzayında quasi çatı yardımıyla Mannheim ve Bertrand eğri ikilileri ile bazı özellikleri verilmiştir. 2016 yılında $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında Tarım tarafından yönlü Bertrand eğri ikilileri ile yönlü Mannheim eğri ikililerinin eğrilikleri arasındaki bağıntılar hesaplanmıştır. Kandilci vd. Minkowski uzayında yönlü Bertrand eğriler üzerine çalışmıştır (Kandilci vd., 2023). Bunların yanı sıra Kahraman vd. (2011), Tuncer vd. (2017), Honda ve Takahashi (2020) ve Elsharkawy ve Elshenhab (2022) şeklinde çalışmalar mevcuttur. Ayrıca, 4-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatı ve Bishop çatı vektörleri kullanılarak Bertrand ve Mannheim eğrileri üzerine pek çok çalışma yapılmıştır. Bunlardan bazıları Irmak (2018), Matsuda ve Yorozu (2003), Honda vd. (2022) ve Yanlin vd. (2022) olarak sıralanabilir. Coquillart'ın (Coquillart, 1987) çalışmasından esinlenen Dede, bir uzay eğrisi boyunca uyarlanmış yeni bir çatı tanıttı ve bu çatıyı quasi çatı olarak

adlandırdı. Quasi çatı, Frenet çatısına başka bir alternatiftir ve Frenet çatısına göre bazı avantajları vardır. Bu avantajlar hesaplanması daha kolaydır, aynı doğruluğa sahiptir ve paralel taşıma çatısının bir genellemesi olarak düşünülebilir; şeklinde sıralanabilir. Quasi çatı kavramı, sabit bir izdüşüm vektörüne ve ana normal ile quasi-normal vektör alanı arasındaki Öklid açısına dayanmaktadır (Dede vd., 2015). İkinci türev olmadığında, çatı bir Öklid açısı kadar döner ve quasi-normal, teğet ve izdüşüm vektörlerine dik bir birim vektör olarak verilir. Ekici'nin çalışmasında 3-boyutlu Öklid uzayında bir uzay eğrisi için Frenet çatısı, quasi çatı, Bertrand ve Mannheim eğri çiftleri gibi konular detaylı bir şekilde incelenmiştir (Ekici, 2021).

Bu çalışma şu şekilde düzenlenmiştir: $\mathbb{E}^3$ uzayda tanımlanan quasi çatı $\mathbb{E}^4$ uzayına genişletilerek Frenet çatısının hesaplanamadığı durumlardaki dezavantajlar ortadan kaldırılıp eğrinin ikinci türevinin olmadığı durumlarda bile hesaplanabilen, aynı doğrulukta sonuçlar veren ve eğrinin teğet etrafında gereksiz bükülmesini önleyen daha genel alternatif bir çatı tanımlanmıştır. Quasi eğrilikleri ile quasi denklemlerine yer verilerek quasi eğrilikleri ile $\mathbb{E}^4$ uzayındaki düzenli bir eğrinin birinci, ikinci ve üçüncü dereceden türevleri arasındaki ilişkiler gösterilmiştir. Daha sonra Frenet çatısı ile quasi çatı arasındaki bağıntılar incelenmiş ve 3-boyutlu Öklid uzayında verilen yönlü Bertrand ve Mannheim eğrileri ile ilgili tanım ve teoremler 4-boyutlu Öklid uzayında quasi çatı yardımıyla ifade ve ispat edilerek örneklerle desteklenmiştir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Çalışma süresince kullanılacak olan tanımlara ve teoremlere bu bölümde yer verilmiştir.

3.1. Öklidyen 3-Uzayda Yapılar

Diferensiyel geometride klasik eğriler ile ilgili konular ele alınırken Frenet çatısı (üç yüzlüsü) sıkça kullanılır. Burada da bir uzay eğrisi üzerinde incelenen Frenet çatısı hakkında bilgiler verilmiştir.

Tanım 3.1.1: A reel bir afin uzay ve A uzayıyla birleşen $n-$boyutlu vektör uzayı da V olmak üzere bu uzayda iç çarpım işlemi $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n)$ ve $\mathbf{b} = (b_1, ..., b_n)$ vektörleri için

$$\begin{array}{rccccc} \langle , \rangle & : & V \times V & \rightarrow & \mathbb{R} & \\ & & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \rightarrow & \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle & = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \end{array}$$

şeklinde tanımlanırsa A afin uzayında uzaklık ve açı gibi temel metrik kavramlar tanımlanabilir. Bu şekilde sırası ile V vektör uzayı $n-$boyutlu Öklid uzayı $\langle , \rangle$ dönüşümü de standart Öklid iç çarpımı olarak adlandırılır (Hacısalioğlu, 2000).

Tanım 3.1.2: $I \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere bu açık aralıkta (I, α) komşuluğu yardımıyla verilen $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), ..., \alpha_n(t))$ parametrizasyonuyla gösterilen $N = \alpha(I) \subset \mathbb{E}^n$ kümesi uzay eğrisi olarak adlandırılır. Uzay eğrisi α ile gösterilir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 3.1.3: (J, α) koordinat komşuluğunda bir N eğrisi alalım. $s \in J$ olmak üzere her s için $\|\alpha'(s)\| = 1$ koşulu sağlanıyorsa N eğrisi bu komşulukta birim hızlı eğri olarak adlandırılır. Buna göre s yay-parametresi adını alır (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 3.1.4: $\mathbb{E}^n$ de bir N eğrisi için (J, α) koordinat komşuluğu alındığında $t \in J$ olmak üzere bu noktadaki Frenet r-ayaklısını $\{\mathbf{U}_1(t), ..., \mathbf{U}_r(t)\}$ şeklinde gösterirsek $1 \leq i < r$ koşulunu sağlayan

$$\begin{array}{rccc} k_i : & J & \rightarrow \mathbb{R} & \\ & t & \rightarrow k_i(t) = \langle \mathbf{U}_i'(t),\ \mathbf{U}_{i+1}(t) \rangle & \end{array}$$

fonksiyonuna $\mathbb{E}^n$ uzayında α eğrisinin i-yinci eğriliği denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 3.1.5: 3-boyutlu Öklid uzayında alınan $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektörleri için Öklid iç çarpımı

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)$$

şeklindedir. Burada $\mathbb{R}^3$ uzayı Öklidyen 3-uzay olarak adlandırılır ve $\mathbb{E}^3$ ile gösterilir (Hacısalioğlu, 1998).

Tanım 3.1.6: 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ ün standart bazı $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ olmak üzere $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i e_i$ ve $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{3} b_i e_i$ bu uzayda verilen herhangi iki vektör olmak üzere **a** ve **b** nin vektörel çarpımı veya bazen dış çarpım diye $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ ile gösterilen

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

vektörüne denir.

3-Boyutlu Vektörel Çarpımın Özellikleri:

1. Pozitif ortonormal taban $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ için

$$\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = \sum_k \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k$$

şeklinde ifade edilir.

2. Öklidyen 3-uzayda vektörel çarpım işlemi için bilineerlik (çift doğrusallık) özelliği sağlanır.

3. Öklidyen 3-uzayda vektörel çarpım işlemi için asimetri (ters simetri) özelliği geçerlidir yani $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$ vektörel çarpımı $(-\mathbf{b} \wedge \mathbf{a})$ vektörel çarpımına eşittir.

4. $(\mathbf{a} \wedge \lambda\mathbf{b}) \wedge \mathbf{b}$ vektörel çarpımının eşiti $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ dir.

5. $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0$ ancak ve ancak **a** ve **b** vektörleri lineer bağımlıdır.

6. Pozitif ortonormal taban $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e göre bileşen formu

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})_k = \sum_i \sum_j \varepsilon_{ijk} \mathbf{a}_i \mathbf{b}_j$$

şeklindedir.

7. Öklidyen 3-uzayda $< \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \mathbf{c} >$ karma çarpımı $< \mathbf{a}, \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} >$ karma çarpımına eşittir.

8. Öklidyen 3-uzayda vektörel çarpım işlemi için $< \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \mathbf{a} > = 0$ ve $< \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \mathbf{b} > = 0$ dır.

9. Lagrange özdeşliği ise

$$\begin{aligned} < \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} > &= \begin{vmatrix} < \mathbf{a}, \mathbf{u} > & < \mathbf{a}, \mathbf{v} > \\ < \mathbf{b}, \mathbf{u} > & < \mathbf{b}, \mathbf{v} > \end{vmatrix} \\ &= < \mathbf{a}, \mathbf{u} >< \mathbf{b}, \mathbf{v} > - < \mathbf{a}, \mathbf{v} >< \mathbf{b}, \mathbf{u} > \end{aligned}$$

şeklindedir.

10. Öklidyen 3-uzayda üçlülerin vektörel çarpımı
$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{u} = < \mathbf{a}, \mathbf{u} > \mathbf{b} - < \mathbf{b}, \mathbf{u} > \mathbf{a}$ olarak ifade edilir.

11. 3-boyutlu Öklid uzayında vektörel çarpım işlemi için $||\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}||^2 =< \mathbf{a}, \mathbf{a} >< \mathbf{b}, \mathbf{b} > - < \mathbf{a}, \mathbf{b} >^2$ özelliği sağlanır (Shaw, 1987).

Tanım 3.1.7: $\mathbb{E}^3$ uzayında (I, α) koordinat komşuluğu yardımıyla verilen birim hızlı bir M eğrisinin birim teğet $\mathbf{t}$, birim normal $\mathbf{n}$, binormal $\mathbf{b}$ vektörleri için $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ üçlüsü Frenet çatısı adını alır. O halde

$$\mathbf{t}(s) = \alpha'(s), \quad \mathbf{n}(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} \quad \text{ve} \quad \mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s) \tag{3.1}$$

olur. Buradan

$$\mathbf{b}(s) = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

şeklindedir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 3.1.8: Öklidyen 3-uzayda birim hızlı bir $M = \alpha(I)$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı için k_1 ve k_2 Frenet eğrilikleri olmak üzere Frenet türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

$$k_1 = \langle \mathbf{t}', \mathbf{n} \rangle, \quad k_2 = \langle \mathbf{n}', \mathbf{b} \rangle \tag{3.3}$$

biçiminde yazılır (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 3.1.9: $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi yay parametresi ile verilmiş olsun. $k_1(s) = ||\alpha''(s)||$ değerine α eğrisinin s noktasındaki eğriliği adı verilir (Do Carmo, 1976).

Tanım 3.1.10: α eğrisine bir dönme çizgisi ya da helis denir ancak ve ancak eğrinin Frenet eğrilikleri k_1 ve k_2 sabittir (Gray, 1993).

3.2. Öklidyen 3-Uzayda Uzay Eğrisi Boyunca Quasi Çatı

Dede ve arkadaşları 2015 yılında bir uzay eğrisinin quasi çatısını tanımladılar. Quasi çatının Frenet çatısına göre iki önemli üstünlüğü vardır. Bunlar

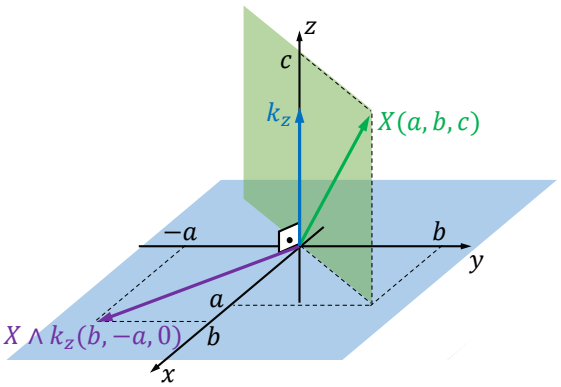
a) Eğrinin ikinci türevinin sıfır olduğu durumlarda da tanımlanabilir.

b) Eğrinin teğet vektörü çevresinde gereksiz bükülmesinin önüne geçer.

Örneğin eğriliği her zaman sıfır olan bir doğru için bile quasi çatı bulunabilir. $\mathbf{k}_z = (0,0,1)$ ve $\mathbf{X} = (a,b,c)$ şeklinde olmak üzere

$$\mathbf{X} \wedge \mathbf{k}_z = (a,b,c) \wedge (0,0,1) = (b,-a,0)$$

elde edilir. Buradan $\mathbf{X} \wedge \mathbf{k}_z$, xy-düzleminde yatan ve $\mathbf{X}$ vektörüne dik olan bir vektördür yani $\mathbf{X}$ vektörünün izdüşümüdür. Şekil 3.1 de y-ekseni yönünde quasi çatının izdüşüm vektörü sırasıyla $\mathbf{k}_x = (1,0,0)$, $\mathbf{k}_y = (0,1,0)$ ile $\mathbf{k}_z = (0,0,1)$ olarak verilmiştir (Dede vd., 2015). Burada $\mathbf{k}$ izdüşüm vektörünün, koordinat eksenleri boyunca alınan birim vektör

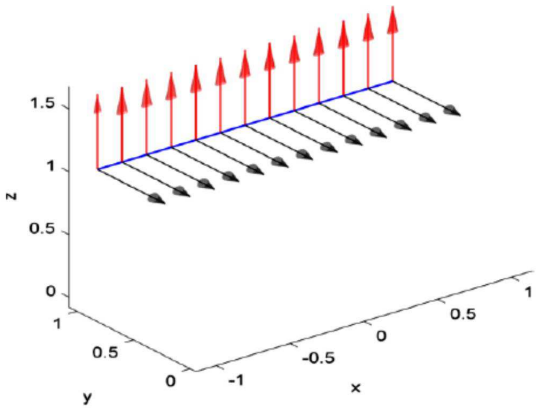


Şekil 3.1 İzdüşüm vektörü

olması önemlidir.

Bir eğri için teğet vektör **t** ile izdüşüm vektörü **k** olmak üzere bu iki vektörün paralel olması halinde $\mathbf{t} \wedge \mathbf{k} = 0$ olur. Sırasıyla $x-$ekseni doğrultusundaki quasi çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n_q}, \mathbf{b_q}, \mathbf{k}_x\}$, $y-$ekseni doğrultusundaki quasi çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n_q}, \mathbf{b_q}, \mathbf{k}_y\}$ ve $z-$ekseni doğrultusundaki quasi çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n_q}, \mathbf{b_q}, \mathbf{k}_z\}$ şeklinde gösterilir.

Şekil 3.2 de ise bir doğru için Frenet vektörleri hesaplanamazken bile hesaplanması mümkün olan quasi çatı vektörleri gösterilmiştir.



Şekil 3.2 Doğru boyunca quasi-çatı gösterimi

Tanım 3.2.1: 3-boyutlu Öklid uzayında alınan bir eğrinin quasi çatı vektörleri

$$\mathbf{t} = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \quad \mathbf{n_q} = \frac{\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}}{\|\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}\|} \quad \text{ve} \quad \mathbf{b_q} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q \tag{3.4}$$

ile gösterilir. İzdüşüm vektörü **k** için birim olan teğet vektör, quasi-normal vektör ve quasi-binormal vektör sırasıyla **t**, $\mathbf{n}_q$, $\mathbf{b}_q$ ile temsil edilir (Dede vd., 2015).

Teorem 3.2.1: $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında eğrinin quasi çatılı türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}_\mathbf{q}' \\ \mathbf{b}_\mathbf{q}' \end{bmatrix} = \|\alpha'\| \begin{bmatrix} 0 & k_{q1} & k_2 \\ -k_{q1} & 0 & k_{q3} \\ -k_{q2} & -k_{q3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n_q} \\ \mathbf{b_q} \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

olur. Bu türev denklemleri aynı Frenet çatısındaki türev denklemleri gibidir. Quasi eğrilikleri ise

$$k_{q1} = \frac{\langle \mathbf{t}', \mathbf{n_q} \rangle}{\|\alpha'\|}, \quad k_{q2} = \frac{\langle \mathbf{t}', \mathbf{b_q} \rangle}{\|\alpha'\|} \quad \text{ve} \quad k_{q3} = \frac{\langle \mathbf{n}_\mathbf{q}', \mathbf{b_q} \rangle}{\|\alpha'\|} \tag{3.6}$$

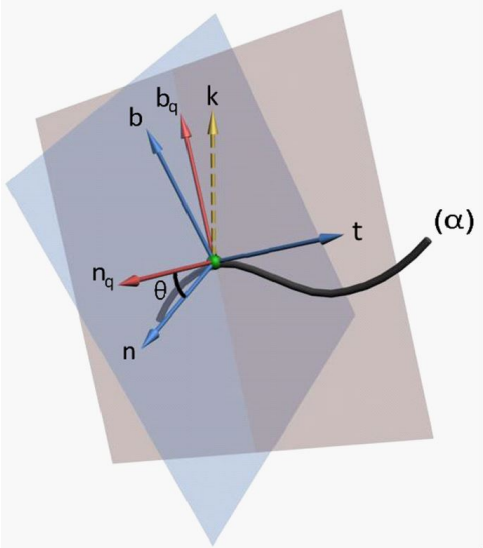
şeklinde yazılır (Dede vd., 2015).

3.3. Öklidyen 3-Uzayda Frenet Çatısı ile Quasi Çatı Arasındaki Bağıntılar

Öklidyen 3-uzayda Şekil 3.3 deki gibi verilmiş $\mathbf{n}$ ve $\mathbf{n}_q$ vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere (3.1) ile verilen Frenet çatısı ve (3.4) ile verilen quasi çatı vektörleri arasındaki bağıntı

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

şeklindedir (Dede vd., 2015).



Şekil 3.3 Frenet çatı ve quasi-çatı arasındaki yapı

Teorem 3.3.1: Birim hızlı $\alpha(s)$ eğrisi için $\mathbf{n}$ normal ve $\mathbf{n}_q$ quasi-normal vektörleri arasındaki açı θ ise Frenet eğrilikler ve quasi eğrilikleri arasındaki bağıntı

$$\begin{aligned} k_{q1} &= k_1 \cos\theta \\ k_{q2} &= -k_1 \sin\theta \\ k_{q3} &= d\theta + k_2 \end{aligned} \tag{3.7}$$

ve θ açısı

$$\cos\theta = \frac{\det(\alpha'', \alpha', \kappa)}{\|\alpha' \wedge k\| \, \|\alpha''\|}$$

biçiminde ifade edilir (Dede vd., 2015).

Örnek 3.3.1: $\mathbb{E}^3$ de bir $\alpha(s) = (\cos s, \sin s, s^2)$ ile verilen uzay eğrisi için $\mathbf{k}_z = (0, 0, 1)$ izdüşüm vektörü yardımıyla z-ekseni yönünde hesaplanan quasi çatı vektörleri

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{1+4s^2}}(-\cos s, -\sin s, 2s)$$
$$\mathbf{n}_q = (-\sin s, \cos s, 0)$$
$$\mathbf{b}_q = \frac{1}{\sqrt{1+4s^2}}(-2s\cos s, -2s\sin s, -1)$$

ve quasi eğrilikleri ise

$$k_{q1} = \frac{-1}{\sqrt{1+4t^2}}, \quad k_{q2} = \frac{-2}{\sqrt{1+4t^2}} \quad \text{ve} \quad k_{q3} = \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 3.3.2: $\mathbb{R}^3$ uzayında alınan regüler bir $\alpha(t)$ eğrisinin quasi eğrilikleri eğrinin türevleri yardımıyla hesaplanmak istenirse

$$k_{q1} = \frac{\det[\alpha'', \alpha', \mathbf{k}]}{||\alpha' \wedge \mathbf{k}||\,||\alpha'||^2}$$
$$k_{q2} = \frac{\langle \alpha', \mathbf{k}\rangle \langle \alpha'', \alpha'\rangle - ||\alpha'||^2 \langle \alpha'', \mathbf{k}\rangle}{||\alpha'||^3 ||\alpha' \wedge \mathbf{k}||}$$
$$k_{q3} = \frac{\langle \alpha', \mathbf{k}\rangle \det[\alpha', \alpha'', \mathbf{k}]}{||\alpha' \wedge \mathbf{k}||^2 ||\alpha'||^2}$$

ile ifade edilir (Dede vd., 2015).

Sonuç 3.3.1: Bir uzay eğrisinin k_{q1}, k_{q2}, k_{q3} ile ifade edilen quasi eğriliklerinin $\mathbf{k}$ ile temsil edilen izdüşüm vektörüne bağlı olduğu kolayca görülür (Dede vd., 2015).

3.4. Öklidyen 3-Uzayda Yönlü Bertrand ve Mannheim Eğrileri

Burada $\mathbb{E}^3$ de yönlü Bertrand eğrileri ve yönlü Mannheim eğrileri ile ilgili kullanılacak olan temel bilgilere yer verilmiştir.

Tanım 3.4.1: $\mathbb{E}^3$ de alınan M ve N uzay eğrileri için koordinat komşulukları sırasıyla (J, α) ile (J, β) olsun. $s \in J$ olmak üzere $\alpha(s) \in M$ noktası ile $\beta(s) \in N$ noktasında M eğrisi ile N eğrisinin $\{U_1, U_2, U_3\}$ ve $\{U_1^*, U_2^*, U_3^*\}$ şeklinde verilen Frenet çatılı her s

değeri için eğer $\{U_2, U_2^*\}$ ikilisi doğrusal ise bu (M, N) eğri çifti Bertrand eğri çifti olarak adlandırılır (Hacısalihoğlu, 1998).

Teorem 3.4.1: Bertrand eğri ikilisi (M, N) sırayla (J, α) ile (J, β) yardımıyla tanımlandığına göre her $s \in J$ değerine karşılık gelen $d(\alpha(s), \beta(s))$ sabit olarak bulunur (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 3.4.2: $\mathbb{E}^3$ de α ile α_1 birim hızlı eğrileri için α eğrisine ait asli normal vektör ile α_1 eğrisine ait olan binormal vektörün lineer bağımlı olması durumunda α eğrisi Mannheim eğrisi ve α_1 eğrisi Mannheim eğri ortağı olarak adlandırılır. Başka bir ifadeyle $\mathbb{E}^3$ de α ve α_1 eğrilerinin karşılıklı noktalarında α eğrisinin asli normal doğrultusu ile α_1 eğrisinin binormal doğrultusu çakışıyorsa α eğrisine bir Mannheim eğri, α_1 eğrisine ise α eğrisinin Mannheim eğri çifti adı verilir $\{\alpha, \alpha_1\}$ ikilisine de Mannheim eğri çifti denir (Liu ve Wang, 2008).

Teorem 3.4.2: 3-boyutlu Öklid uzayında alınan Mannheim eğrilerine ait ilgili noktalar arasındaki mesafe sabittir (Orbay ve Kasap, 2009).

Teorem 3.4.3: $\mathbb{E}^3$ de bir uzay eğrisini Mannheim eğri çifti olarak adlandırabilmek için gerek ve yeter şart eğriye ait olan k_1 eğriliği ile k_2 burulması arasında $\lambda \neq 0$ şeklinde bir sabit olmak üzere $k_1 = \lambda(k_1^2 + k_2^2)$ bağıntısının sağlanmasıdır (Wang ve Liu, 2007).

Tanım 3.4.3: E^3 de α, β şeklinde alınan iki eğrinin quasi çatıları sırasıyla $\{t, n_q, b_q\}$ ve $\{t^\lambda, n_q^\lambda, b_q^\lambda\}$ verilsin. Eğrilerin n_q ve n_q^λ quasi-normal vektörlerinin lineer bağımlı olması durumunda α ve β eğrileri yönlü Bertrand eğri ikilisi adını alır (Dede vd., 2018).

Teorem 3.4.4: Bir $\alpha(s)$ uzay eğrisi için $||\alpha'(s)|| = 1$ olmak üzere $\beta(s_1)$ eğrisi ile yönlü Bertrand eğri ikilisi olsun.

(a) $\alpha(s)$ ve $\beta(s_1)$ yönlü Bertrand eğri çifti arasındaki uzaklık sabittir.

(b) $\alpha(s)$ ve $\beta(s_1)$ yönlü Bertrand eğri çifti için $k_3 = 0$ şartı sağlanıyorsa bu eğrilerin teğet vektörleri arasında yer alan açının değeri sabittir (Dede vd., 2018).

Teorem 3.4.5: Öklidyen 3-uzayda birim hızlı bir $\alpha(s)$ uzay eğrisi olmak üzere $(\alpha(s), \beta(s_1))$ Bertrand eğri ikilisi olsun. Bu eğrilerin quasi çatıları arasındaki bağıntı

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^{\lambda} &= \pm\frac{1(1-\lambda k_1)\mathbf{t} + (\lambda k_3)\mathbf{b}_q}{\sqrt{(1-k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}} \\ \mathbf{n}_q^{\lambda} &= \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q^{\lambda} &= \pm\frac{1(-\lambda k_3)\mathbf{t} + (1-\lambda k_1)\mathbf{b}_q}{\sqrt{(1-k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}} \end{aligned}$$

biçimindedir (Dede vd., 2018).

Teorem 3.4.6: Yay parametresi ile ifade edilen $\alpha(s)$ eğrisinin yönlü Bertrand eğri çifti $\beta(s)$ olsun. $\beta(s)$ uzay eğrisine ait quasi eğrilikleri sırasıyla k_{q1}^{λ}, k_{q2}^{λ} ve k_{q3}^{λ} olmak üzere bu eğri çiftinin quasi eğrilikleri ilişkisi

$$\begin{aligned} k_{q1}^{\lambda} &= \frac{(1-\lambda k_{q1})k_{q1} - \lambda k_{q3}^2}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2 + \lambda^2 k_{q3}^2}} \\ k_{q2}^{\lambda} &= \pm\frac{\lambda k_{q3}^{'}(1-\lambda k_{q1}) + \lambda^2 k_{q1}^{\prime} k_{q3} + ((1-\lambda k_{q1})^2 + \lambda^2 k_{q3}^2)k_{q2}}{(1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2} \\ k_{q3}^{\lambda} &= \pm\frac{k_{q3}}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2 + \lambda^2 k_{q3}^2}} \end{aligned}$$

olarak yazılır (Dede vd., 2018).

3.5. Öklidyen 4-Uzayda Yapılar

Bu kısımda 4-boyutlu Öklidyen uzayda kullanılacak bazı yapılara yer verilmiştir.

Tanım 3.5.1: $\mathbb{R}^4$ uzayında $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ ve $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ için

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4)$$

şeklinde Öklid iç çarpımı tanımlanır. Böylece $\mathbb{R}^4$ uzayı $\mathbb{E}^4$ olarak adlandırılır (Hacısalioğlu, 1998).

Tanım 3.5.2: $\mathbb{E}^4$, 4-boyutlu Öklid uzayının standart bazı $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ ile verilsin $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{4} a_i e_i$, $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{4} b_i e_i$ ve $\mathbf{c} = \sum_{i=1}^{4} c_i e_i$ bu uzayda verilen herhangi üç vektör olmak üzere

a, **b** ve **c** nin vektörel çarpımı veya bazen dış çarpım diye $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ ile gösterilen

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} &= (a_2b_3c_4 - c_2b_4c_3 - a_3b_2c_4 + a_3b_4c_2 + a_4b_2c_3 - a_4b_3c_2,\\ &\quad -a_1b_3c_4 + a_1b_4c_3 + a_3b_1c_4 - a_3b_4c_1 - a_4b_1c_3 + a_4b_3c_1,\\ &\quad a_1b_2c_4 - a_1b_4c_2 - a_2b_1c_4 + a_2b_4c_1 + a_4b_1c_2 - a_4b_2c_1,\\ &\quad -a_1b_2c_3 + a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3 - a_2b_3c_1 - a_3b_1c_2 + a_3b_2c_1)\end{aligned}$$

vektörüne denir. Ayrıca üç vektörün vektörel çarpımını tanımlamak için determinant sembolü kullanılabilir. Bu da vektörel çarpımın özelliklerinin belirlenmesinde determinant özelliklerinin kullanılmasını sağlar buna göre

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}\\ &= e_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}\\ &\quad + e_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix} - e_4 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır (Alessio, 2009). Burada

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \text{ ve } \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_4$$

şeklindedir.

Örnek 3.5.1: $\mathbf{a} = (1, 0, 3, -1)$, $\mathbf{b} = (0, 2, 1, 0)$ ve $\mathbf{c} = (3, -1, 2, 7)$ ise

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} &= (0 \cdot 1 \cdot 7 - 0 \cdot 0 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \cdot 7 - 3 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1,\\ &\quad -1 \cdot 1 \cdot 7 + 1 \cdot 0 \cdot 2 + 3 \cdot 0 \cdot 7 - 3 \cdot 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 3,\\ &\quad 1 \cdot 2 \cdot 7 + 1 \cdot 0 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \cdot 7 + 0 \cdot 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 3,\\ &\quad -1 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 2 - 0 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 3)\\ &= (-47, -10, 20, 13)\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 3.5.2: $\mathbf{a} = (1, 0, 3, -1)$, $\mathbf{b} = (0, 2, 1, 0)$ ve $\mathbf{c} = (3, -1, 2, 7)$ ise

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \end{vmatrix} \\
&= e_1 \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 7 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} \\
&\quad + e_3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix} - e_4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= (-47, -10, 20, 13)
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

4-Boyutlu Vektörel Çarpımın Özellikleri:

1. Üçlü doğrusallık $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ de değerler

$$\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k = \sum_m \varepsilon_{ijkm} \mathbf{e}_m$$

şeklinde ifade edilir.

2. Öklidyen 4-uzayda asimetriklik (ters simetri) özelliği

$$\mathbf{c} \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$$
$$= -\mathbf{a} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{c} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} \text{ dir.}$$

3. Öklidyen 4-uzayda $(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}) \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ çarpımının eşiti $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ şeklindedir.

4. Öklidyen 4-uzayda $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = 0$ dır ancak ve ancak $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ve $\mathbf{c}$ vektörleri lineer bağımlıdır.

5. Pozitif ortonormal taban $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ e göre bileşen formu

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})_m = \sum_i \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijkm} a_i b_j c_k$$

şeklinde ifade edilir.

6. Öklidyen 4-uzayda $< \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}, \mathbf{d} >$ karma çarpımı $< -\mathbf{a}, \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} >$ karma çarpımına eşittir.

7. $< \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_i >= 0, i = 1, 2, 3$ dür.

8. Öklidyen 4-uzayda $< \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} >$ karma çarpımı için

$$< \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} >= \begin{vmatrix} < \mathbf{a}, \mathbf{u} > & < \mathbf{a}, \mathbf{v} > & < \mathbf{a}, \mathbf{w} > \\ < \mathbf{b}, \mathbf{u} > & < \mathbf{b}, \mathbf{v} > & < \mathbf{b}, \mathbf{w} > \\ < \mathbf{c}, \mathbf{u} > & < \mathbf{c}, \mathbf{v} > & < \mathbf{c}, \mathbf{w} > \end{vmatrix}$$

özelliği sağlanır.

9. Öklidyen 4-uzayda Lagrange özelliği

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \wedge \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} &= - \begin{vmatrix} < \mathbf{a}, \mathbf{u} > & < \mathbf{a}, \mathbf{v} > & \mathbf{a} \\ < \mathbf{b}, \mathbf{u} > & < \mathbf{b}, \mathbf{v} > & \mathbf{b} \\ < \mathbf{c}, \mathbf{u} > & < \mathbf{c}, \mathbf{v} > & \mathbf{c} \end{vmatrix} \\ &= -(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \mu \mathbf{c}) \end{aligned}$$

geçerlidir. Burada α, β, μ

$$\begin{aligned} \alpha &= (< \mathbf{b}, \mathbf{u} >)(< \mathbf{c}, \mathbf{v} >) - (< \mathbf{c}, \mathbf{u} >)(< \mathbf{b}, \mathbf{v} >) \\ \beta &= (< \mathbf{c}, \mathbf{u} >)(< \mathbf{a}, \mathbf{v} >) - (< \mathbf{a}, \mathbf{u} >)(< \mathbf{c}, \mathbf{v} >) \\ \mu &= (< \mathbf{a}, \mathbf{u} >)(< \mathbf{b}, \mathbf{v} >) - (< \mathbf{b}, \mathbf{u} >)(< \mathbf{a}, \mathbf{v} >) \end{aligned}$$

şeklindedir (Shaw, 1987).

Tanım 3.5.3: $\alpha : I \to \mathbb{E}^4$ birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda $\alpha''(s) \neq 0$ olmak üzere Frenet çatısı

$$\begin{aligned} &\mathbf{t}(s) = \alpha'(s) && \mathbf{n}(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} \\ &\mathbf{b}_2(s) = \frac{\alpha'(s) \times \alpha''(s) \times \alpha'''(s)}{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s) \times \alpha'''(s)\|} && \mathbf{b}_1(s) = \mathbf{b}_2(\mathbf{s}) \times \mathbf{t}(\mathbf{s}) \times \mathbf{n}(\mathbf{s}) \end{aligned} \tag{3.8}$$

şeklindedir (Alessio, 2009). $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ dörtlüsü her noktada birbirine ortogonaldir (Gürhan, 2013).

Tanım 3.5.4: $\alpha : I \subseteq \mathbb{R}$ şeklinde bir açık aralık için 4-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^4$ de $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$ biçiminde bir α birim hızlı eğrisi alınsın. α uzay eğrisinin $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ Frenet çatı vektörleri ve k_1, k_2 ve k_3 Frenet eğrilikleri olmak üzere bu eğriye ait Frenet türev

formülleri

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}_1' \\ \mathbf{b}_2' \end{bmatrix} = \|\alpha'\| \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

şeklindedir (Elzawy, 2017). Frenet eğrilikleri ise

$$k_1 = \langle \mathbf{t}', \mathbf{n} \rangle , \quad k_2 = \langle \mathbf{n}', \mathbf{b_1} \rangle \quad \text{ve } k_3 = \langle \mathbf{b_1'}, \mathbf{b_2} \rangle \tag{3.10}$$

şeklinde yazılır.

Uyarı: Bir uzay eğrisinin karakterinin belirlenmesinde eğriliklerin önemi büyüktür. $\mathbb{E}^4$ de bir uzay eğrisinin;

i) Birinci eğriliği k_1, eğrinin teğet doğrusundan,

ii) İkinci eğriliği k_2, eğrinin düzlemsel eğriden,

iii) Üçüncü eğriliği k_3, eğrinin üç boyutlu eğriden uzaklaşma miktarını temsil eder.

O halde $\mathbb{E}^4$ de bir α eğrisi için

i) $k_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha$ bir doğrudur,

ii) $k_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha$ bir düzlemsel eğridir,

iii) $k_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha$, E^4 uzayının üç boyutlu alt uzayında yatan bir eğridir (Gürhan, 2013).

iv) $k_2 = 0$ ve $k_1 > 0$ sabittir $\Leftrightarrow \alpha$ çemberdir,

v) $k_3 = 0$, $k_2 = c_2$ ve $k_1 = c_1$; için $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \alpha$ bir dairesel helisdir,

vi) $k_3 = c_3$, $k_2 = c_2$, ve $k_1 = c_1$ için $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \alpha$ doğrusu $\dfrac{1}{|c_3|}$ yarıçaplı küreddir (Hacısalihoğlu, 1993).

3.6. Öklidyen 4-Uzayda Bertrand ve Mannheim Eğrileri

Bu kısımda ise, $\mathbb{E}^4$ de yönlü Bertrand eğrileri ve yönlü Mannheim eğrileri ile ilgili kullanılacak olan temel bilgiler yer almaktadır.

Tanım 3.6.1: $\mathbb{E}^n$ de alınan M ve N uzay eğrileri için koordinat komşulukları sırasıyla (J, α) ile (J, β) olsun. $s \in J$ olmak üzere $\alpha(s) \in M$ noktası ile $\beta(s) \in N$ noktasında M eğrisi ile N eğrisinin $\{U_1, \ldots, U_r\}$ ve $\{U_1^*, \ldots, U_r^*\}$ şeklinde verilen Frenet çatılı her $s \in J$ değeri için eğer $\{U_2, U_2^*\}$ ikilisi doğrusal ise bu (M, N) eğri çifti Bertrand eğri çifti olarak adlandırılır (Hacısalihoğlu, 1998).

Teorem 3.6.1: Bertrand eğri ikilisi (M, N) sırayla (J, α) ve (J, β) yardımıyla tanımlandığına göre her $s \in J$ değerine karşılık gelen $d(\alpha(s), \beta(s))$ sabit olarak bulunur (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 3.6.2: C ve $\widetilde{C}$ eğrileri $\mathbb{E}^4$ te özel Frenet eğrileri ve $\Phi : C \to \widetilde{C}$, C nin her bir noktasını $\widetilde{C}$ nin her bir noktasıyla eşleyen birebir ve örten bir fonksiyon olsun. Eğer C eğrisinin her bir noktasındaki birinci normal doğrusu, $\widetilde{C}$ eğrisinin Φ dönüşümü altında karşılık gelen noktasındaki ikinci ve üçüncü normal doğrularının gerdiği düzlemde yatıyorsa, C eğrisine genelleştirilmiş Mannheim eğri, $\widetilde{C}$ eğrisine de C nin genelleştirilmiş Mannheim eğri çifti adı verilir (Matsuda, 2009).

Tanım 3.6.3: Herhangi bir eğrinin Mannheim eğrisi olması için gerek ve yeter şart eğriye ait olan k_1 eğriliği ile k_2 burulması arasında $\lambda \neq 0$ şeklinde bir sabit olmak üzere $k_1 = \lambda(k_1^2 + k_2^2)$ bağıntısının sağlanmasıdır (Liu ve Wang, 2008).

Teorem 3.6.2: $\mathbb{E}^n$ de Mannheim eğrilerinin ilgili noktaları arasındaki mesafe sabittir (Orbay ve Kasap, 2009).

4. ÖKLİDYEN 4-UZAYDA QUASİ ÇATILI EĞRİLER

Bu kısımda, Öklidyen 4-uzayda alınan uzay eğrileri hem Frenet çatısı hem de quasi çatı göz önünde bulundurularak incelenmiştir. Bu eğriler sahip oldukları eğriliklere göre karakterize edilmiştir. 4-boyutlu Öklid uzayında bir eğri ve eğri boyunca quasi çatı ile quasi eğrilikleri tanımlanıp quasi çatının Frenet çatısı ve Bishop çatısı gibi diğer çatılara göre avantajları ele alınmıştır.

4.1. Öklidyen 4-Uzayda Quasi Çatı

Bir açık aralıkta türevlenebilir bir eğrimiz varsa karşılıklı ortonormal vektörlerden oluşan bir küme oluşturabiliriz, bu vektörler hareketli çatı ya da Frenet çatısı olarak bilinir. Bir eğrinin düz bir çizgiden sapma miktarına eğrinin eğriliği denir. Bir eğrinin elemanlarına (vektörler ve eğrilikler) ise Frenet aparatları denir (Elsayied vd., 2021).

Bishop, Frenet çatısı dışında bir uzay eğrisi boyunca çok sayıda çatı tanımlayabileceğimizi gösterdi. Bishop'un paralel taşıma çatısı, ikinci türevin kaybolduğu noktalarda bile düzgün bir eğri üzerinde iyi tanımlanmış Frenet çatısına bir alternatiftir. Teğet vektörün gözlemine dayalı paralel taşıma çatısı kavramı, teğet vektörün değişmeden kalması değişmeyen ve diğer türevlerin teğet vektörle aynı yönde ve teğet vektöre dik bir düzlemde ele alınmasını ifade eder (Dede, 2015).

Quasi-normal vektör $\mathbf{n}_q$ nun 3D offset eğrisi uygulamasından esinlenerek Dede ve diğerleri boru biçiminde bir yüzey oluşturmak için bir uzay eğrisinin quasi çatısını tanıttı. Quasi çatı, Frenet çatısı için bir alternatiftir ancak hesaplamalarda Bishop gibi dönüşü en aza indiren çatılardan çok daha kolaydır, aynı doğruluğa sahiptir ve paralel taşıma çatısının bir genellemesi olarak kabul edilebilir. Eğrinin ikinci türevinin olmadığı durumda bile iyi tanımlanmıştır. Örneğin, bir doğrunun eğriliği her zaman sıfır olup böyle bir durumda dahi quasi çatı hesaplanabilmektedir. Quasi çatı, çatı vektörlerinin eğri boyunca teğet etrafında gereksiz bükülmesini ve dönmesini önler (Dede, 2015). Quasi çatı kavramı, sabit bir izdüşüm vektörüne ve ana normal ve quasi-normal vektör alanı arasındaki bir Öklid açısına dayanır. Quasi çatının ana fikri ise quasi-normal vektörün, teğet vektörün sabit vektörle çapraz çarpımına eşit olmasıdır. İkinci türev kaybolduğunda, çatı bir Öklid açısı kadar döner ve quasi-normal vektör, teğete dik bir birim vektör ve izdüşüm vektörlerinin birleşimi olarak verilir (Elsayied vd., 2021).

4-boyutlu Öklid uzayında iki vektörün vektörel çarpımı tanımlı olmadığından iki adet izdüşüm vektöründen faydalanılırsa, $\mathbf{X} = (a, b, c, d)$, $\mathbf{k}_z = (0, 0, 1, 0)$ ve $\mathbf{k}_t = (0, 0, 0, 1)$ olmak üzere

$$\mathbf{X} \wedge \mathbf{k}_z \wedge \mathbf{k}_t = (a, b, c, d) \wedge (0, 0, 1, 0) \wedge (0, 0, 0, 1) = (b, -a, 0, 0)$$

bulunur. Bu ise $\mathbf{X} \wedge \mathbf{k}_z \wedge \mathbf{k}_t$ vektörünün $\mathbf{X}$ vektörüne dik olan yani $zt-$düzlemine ortogonal $xy-$ düzleminde yatan bir vektör olduğu anlamına gelir. $\mathbf{X} \wedge \mathbf{k}_z \wedge \mathbf{k}_t$ vektörü, $\mathbf{X}$ vektörünün izdüşüm vektörüdür. Burada $\mathbf{k}_z$ ve $\mathbf{k}_t$ izdüşüm vektörlerinin, eksenler boyunca birer birim vektör olması önemlidir. Eğri için hesaplanan $\mathbf{t}$ teğet vektörünün $\mathbf{k}_z \wedge \mathbf{k}_t$ izdüşüm vektörleri tarafından gerilen düzleme paralel olması durumunda $\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_z \wedge \mathbf{k}_t = 0$ olacaktır. Benzer şekilde diğer durumlarda incelenecek olursa $\mathbf{X} = (a, b, c, d)$ ile $\mathbf{k}_x = (1, 0, 0, 0)$ ve $\mathbf{k}_y = (0, 1, 0, 0)$ izdüşüm vektörleri alınırsa

$$\mathbf{X} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y = (a, b, c, d) \wedge (1, 0, 0, 0) \wedge (0, 1, 0, 0) = (0, 0, d, -c)$$

bulunur. Bu durumda $\mathbf{X} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y$ vektörü $xy-$düzlemine dik olan ve $zt-$ düzleminde bulunan bir vektördür. $\mathbf{X} = (a, b, c, d)$ ile $\mathbf{k}_x = (1, 0, 0, 0)$ ve $\mathbf{k}_z = (0, 0, 1, 0)$ izdüşüm vektörleri alınırsa

$$\mathbf{X} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_z = (a, b, c, d) \wedge (1, 0, 0, 0) \wedge (0, 0, 1, 0) = (0, d, 0, b)$$

bulunur. Bu durumda $\mathbf{X} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_z$ vektörü $xz-$düzlemine dik olan ve $yt-$ düzleminde bulunan bir vektördür. $\mathbf{X} = (a, b, c, d)$ ile $\mathbf{k}_x = (1, 0, 0, 0)$ ve $\mathbf{k}_t = (0, 0, 0, 1)$ izdüşüm vektörleri alınırsa

$$\mathbf{X} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_t = (a, b, c, d) \wedge (1, 0, 0, 0) \wedge (0, 0, 0, 1) = (0, c, -b, 0)$$

bulunur. Bu durumda $\mathbf{X} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_t$ vektörü $xt-$düzlemine dik olan ve $yz-$ düzleminde bulunan bir vektördür. $\mathbf{X} = (a, b, c, d)$ ile $\mathbf{k}_y = (0, 1, 0, 0)$ ve $\mathbf{k}_z = (0, 0, 1, 0)$ izdüşüm vektörleri alınırsa

$$\mathbf{X} \wedge \mathbf{k}_y \wedge \mathbf{k}_z = (a, b, c, d) \wedge (0, 1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1, 0) = (d, 0, 0, -a)$$

bulunur. Bu durumda $\mathbf{X} \wedge \mathbf{k}_y \wedge \mathbf{k}_z$ vektörü $yz-$düzlemine dik olan ve $xt-$ düzleminde bulunan bir vektördür. $\mathbf{X} = (a, b, c, d)$ ile $\mathbf{k}_y = (0, 1, 0, 0)$ ve $\mathbf{k}_t = (0, 0, 0, 1)$ izdüşüm vektörleri alınırsa

$$\mathbf{X} \wedge \mathbf{k}_y \wedge \mathbf{k}_t = (a, b, c, d) \wedge (0, 1, 0, 0) \wedge (0, 0, 0, 1) = (-c, 0, a, 0)$$

bulunur. Bu durumda $\mathbf{X} \wedge \mathbf{k}_y \wedge \mathbf{k}_t$ vektörü $yt-$düzlemine dik olan ve $xz-$ düzleminde bulunan bir vektördür. Hesaplamalarda diğer izdüşüm vektörleri kullanılabileceği gibi kolaylık olması açısından genellikle $\mathbf{k}_x = (1, 0, 0, 0)$ ve $\mathbf{k}_y = (0, 1, 0, 0)$ izdüşüm vektörleri

tercih edilir. $\mathbf{k}_x$ ve $\mathbf{k}_y$ izdüşüm vektörleri yardımıyla $zt-$ düzleminde izdüşümü bulunan vektörün diğer izdüşüm vektörleri kullanılarak bulunan izdüşümleri de tekil olduğundan rahatlıkla istenilen izdüşüm vektörleri alınabilir. Bu şekilde quasi çatı $xy-$düzlemi, $xz-$düzlemi, $xt-$düzlemi, $yz-$düzlemi, $yt-$düzlemi ve $zt-$düzlemi olmak üzere altı türe ayrılır ve sırasıyla $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y\}$, $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{k}_x, \mathbf{k}_z\}$, $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{k}_x, \mathbf{k}_t\}$, $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{k}_y, \mathbf{k}_z\}$, $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{k}_y, \mathbf{k}_t\}$ ve $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{k}_z, \mathbf{k}_t\}$ şeklinde gösterilir.

$\mathbf{k}_x$ ve $\mathbf{k}_y$ izdüşüm vektörlerinden faydalanılırsa 4-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı regüler bir α uzay eğrisinin quasi çatısı şu şekilde tanımlanır.

$$\mathbf{t} = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|} \qquad \mathbf{n}_q = \frac{\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y}{\|\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y\|}$$
$$\mathbf{b}_{q2} = \frac{\alpha'(s) \wedge \mathbf{n}_q(s) \wedge \alpha'''(s)}{\|\alpha'(s) \wedge \mathbf{n}_q(s) \wedge \alpha'''(s)\|} \qquad \mathbf{b}_{q1} = \mathbf{b}_{q2} \wedge \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q \tag{4.1}$$

Burada $\mathbf{k}_x$, $\mathbf{k}_y$ izdüşüm vektörleri için birim vektörler $\mathbf{t}$ teğet, $\mathbf{n}_q$ quasi-normal, $\mathbf{b}_{q1}$ birinci quasi-binormal ve $\mathbf{b}_{q2}$ ise ikinci quasi-binormal olarak isimlendirilir. Quasi eğrilikleri de

$$k_{q1} = \langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q \rangle, \quad k_{q2} = \langle \mathbf{t}', \mathbf{b}_{q1} \rangle, \quad k_{q3} = \langle \mathbf{n}_q', \mathbf{b}_{q1} \rangle \text{ ve } \quad k_{q4} = \langle \mathbf{b}_{q1}', \mathbf{b}_{q2} \rangle \tag{4.2}$$

şeklindedir.

Teorem 4.1.1: 4-boyutlu Öklid uzayında α uzay eğrisi için quasi çatının türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}_q' \\ \mathbf{b}_{q1}' \\ \mathbf{b}_{q2}' \end{bmatrix} = \|\alpha'\| \begin{bmatrix} 0 & k_{q1} & k_{q2} & 0 \\ -k_{q1} & 0 & k_{q3} & 0 \\ -k_{q2} & -k_{q3} & 0 & k_{q4} \\ 0 & 0 & -k_{q4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_{q1} \\ \mathbf{b}_{q2} \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

şeklindedir.

İspat: $\mathbf{t}$ birim teğet vektörün türevi hesaplanırsa

$$\mathbf{t}' = a_1\mathbf{t} + b_1\mathbf{n}_q + c_1\mathbf{b}_{q1} + d_1\mathbf{b}_{q2} \quad , \quad a_1, b_1, c_1, d_1 \in \mathbb{R}$$

olur. Eşitliğin iki tarafıda $\mathbf{t}$ teğet vektörü ile çarpılırsa $< \mathbf{t}, \mathbf{t}' >$ ifadesi

$$a_1 < \mathbf{t}, \mathbf{t} > + b_1 < \mathbf{t}, \mathbf{n}_q > + c_1 < \mathbf{t}, \mathbf{b}_{q1} > + d_1 < \mathbf{t}, \mathbf{b}_{q2} > = a_1$$

bulunur. Her iki tarafın türevi alınırsa

$$< \mathbf{t}', \mathbf{t} > + < \mathbf{t}, \mathbf{t}' > = 0$$

olur. Buradan

$$< \mathbf{t}', \mathbf{t} >=< \mathbf{t}, \mathbf{t}' >$$

ve

$$< \mathbf{t}', \mathbf{t} >= 0$$

elde edilir. O halde $< \mathbf{t}, \mathbf{t}' >= a_1$ ve $< \mathbf{t}, \mathbf{t}' >= 0$ olup

$$< \mathbf{t}', \mathbf{t} >= a_1 = 0$$

bulunur.

$$\mathbf{t}' = a_1\mathbf{t} + b_1\mathbf{n}_q + c_1\mathbf{b}_{q1} + d_1\mathbf{b}_{q2}$$

eşitliğinin her iki tarafı $\mathbf{n}_q$ ile skaler çarpılırsa $< \mathbf{n}_q, \mathbf{t}' >$ ifadesi

$$a_1 < \mathbf{n}_q, \mathbf{t} > +b_1 < \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q > +c_1 < \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_{q1} > +d_1 < \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_{q2} >= b_1$$

olur. Buradan

$$< \mathbf{t}', \mathbf{n}_q >=< \mathbf{n}_q, \mathbf{t}' >= b_1$$

elde edilir. $< \mathbf{n}_q, \mathbf{t}' >= b_1$ ve $< \mathbf{t}', \mathbf{n}_q >= k_{q1}||\alpha'||$ olduğundan

$$< \mathbf{t}', \mathbf{n}_q >= k_{q1}||\alpha'|| = b_1$$

yazılabilir. Burada

$$\mathbf{t}' = a_1\mathbf{t} + b_1\mathbf{n}_q + c_1\mathbf{b}_{q1} + d_1\mathbf{b}_{q2}$$

eşitliğini ele alalım. Eşitliğin her iki yanı $\mathbf{b}_{q2}$ ile skaler çarpılırsa $< \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{t}' >$ ifadesi

$$a_1 < \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{t} > +b_1 < \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{n}_q > +c_1 < \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{b}_{q1} > +d_1 < \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{b}_{q2} >= d_1$$

bulunur. (4.3) den $\mathbf{t}'$ değeri bu ifadede yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} < \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{t}' > &=< \mathbf{b}_{q2}, ||\alpha'||(k_{q1}\mathbf{n}_q + k_{q2}\mathbf{b}_{q1}) > \\ &= ||\alpha'|| + k_{q2} < \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{b}_{q1} > \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} < \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{t}' > &=< \mathbf{t}', \mathbf{b}_{q2} >= d_1 \\ < \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{t}' > &= 0 \end{aligned}$$

yazılır. Buna göre

$$\mathbf{t}' = a_1\mathbf{t} + b_1\mathbf{n}_q + c_1\mathbf{b}_{q1} + d_1\mathbf{b}_{q2}$$

eşitliğinin her iki tarafı bu defa $\mathbf{b}_{q1}$ ile skaler çarpılırsa $< \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{t}' >$ ifadesi

$$a_1 < \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{t} > +b_1 < \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{n}_q > +c_1 < \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{b}_{q1} > +d_1 < \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{b}_{q2} >= c_1$$

bulunur. (4.3) den $\mathbf{t}'$ değeri burada yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} < \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{t}' > &= < \mathbf{b}_{q1}, ||\alpha'||(k_1\mathbf{n}_q + k_2\mathbf{b}_{q1}) > \\ &= ||\alpha'||(k_{q1} < \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{n}_q > + k_{q2} < \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{b}_{q1} >) \\ &= ||\alpha'||k_{q2} \end{aligned}$$

olur. Bu durumda $< \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{t}' >= c_1$ ve $< \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{t}' >= ||\alpha'||k_2$ olduğundan

$$< \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{t}' >= c_1 = ||\alpha'||k_2$$

olur. Burada

$$a_1 = 0,\ b_1 = ||\alpha'||k_1,\ c_1 = ||\alpha'||k_2 \text{ ve } d_1 = 0$$

olmak üzere a_1, b_1, c_1, d_1 değerleri

$$\mathbf{t}' = a_1\mathbf{t} + b_1\mathbf{n}_q + c_1\mathbf{b}_{q1} + d_1\mathbf{b}_{q2}$$

eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= ||\alpha'||k_1\mathbf{n}_q + ||\alpha'||k_2\mathbf{b}_{q1} \\ &= ||\alpha'||(k_1\mathbf{n}_q + k_2\mathbf{b}_{q1}) \end{aligned}$$

elde edilir. $\mathbf{n}_q$ quasi-normal vektörün türevi hesaplanırsa

$$\mathbf{n}_q' = a_2\mathbf{t} + b_2\mathbf{n}_q + c_2\mathbf{b}_{q1} + d_2\mathbf{b}_{q2} \quad , \quad a_2, b_2, c_2, d_2 \in \mathbb{R}$$

olur. Eşitliğin her iki tarafı $\mathbf{t}$ ile skaler çarpılırsa $< \mathbf{t}, \mathbf{n}_q' >$ ifadesi

$$a_2 < \mathbf{t}, \mathbf{t} > + b_2 < \mathbf{t}, \mathbf{n}_q > + c_2 < \mathbf{t}, \mathbf{b}_{q2} > + d_2 < \mathbf{t}, \mathbf{b}_{q1} >= a_2$$

bulunur. Eşitliğinde her iki yanın türevi alınırsa

$$< \mathbf{t}', \mathbf{n}_q > + < \mathbf{t}, \mathbf{n}_q' >= 0$$

elde edilir. Buna göre

$$< \mathbf{t}', \mathbf{n}_q >= - < \mathbf{t}, \mathbf{n}_q' >$$

yazılır. O halde (4.2) de k_{q1} quasi eğriliğinin eşiti ile $< \mathbf{t}, \mathbf{n}_q' >= a_2$ ve $< \mathbf{t}, \mathbf{n}_q' >= -||\alpha'||k_{q1}$ dikkate alınırsa

$$a_2 =< \mathbf{t}, \mathbf{n}_q^{'} >= -||\alpha'||k_{q1}$$

bulunur. Buna göre

$$\mathbf{n}_q' = a_2\mathbf{t} + b_2\mathbf{n}_q + c_2\mathbf{b}_{q1} + d_2\mathbf{b}_{q2}$$

eşitliği ele alınıp her iki yanı $\mathbf{n}_q$ ile skalar çarpılırsa $< \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q' >$ ifadesi

$$a_2 < \mathbf{n}_q, \mathbf{t} > + b_2 < \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q > + c_2 < \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_{q1} > + d_2 < \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_{q2} >= b_2$$

olur. Buradan da

$$\mathbf{n}_q' = a_2\mathbf{t} + b_2\mathbf{n}_q + c_2\mathbf{b}_{q1} + d_2\mathbf{b}_{q2}$$

eşitliğinin her iki tarafı $\mathbf{b}_{q2}$ ile skalar çarpılırsa $< \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{n}_q' >$ ifadesi

$$a_2 < \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{t} > + b_2 < \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{n}_q > + c_2 < \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{b}_{q1} > + d_2 < \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{b}_{q2} >= d_2$$

bulunur ve bu ifadede (4.3) den $\mathbf{n}_q'$ değeri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} < \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{n}_q' > &=< \mathbf{b}_{q2}, ||\alpha'||(-k_{q1}\mathbf{t} + k_{q3}\mathbf{b}_{q1}) > \\ &= ||\alpha'||(-k_{q1} < \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{t} > + k_{q3} < \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{b}_{q1} >) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Buradan $< \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{n}_q' >= d_2$ ve $< \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{n}_q' >= 0$ olduğundan

$$< \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{n}_q' >= d_2 = 0$$

olarak hesaplanır. Şimdi

$$\mathbf{n}_q' = a_2\mathbf{t} + b_2\mathbf{n}_q + c_2\mathbf{b}_{q1} + d_2\mathbf{b}_{q2}$$

eşitliğini alalım. Bu eşitliğin her iki tarafı $\mathbf{b}_{q1}$ ile skalar çarpılırsa $< \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{n}_q' >$ ifadesi

$$a_2 < \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{t} > + b_2 < \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{n}_q > + c_2 < \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{b}_{q1} > + d_2 < \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{b}_{q2} >= c_2$$

olur. Buradan

$$< \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{n}_q >= 0$$

bulunur. Son eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa

$$< \mathbf{b}_{q1}', \mathbf{n}_q > + < \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{n}_q' >= 0$$

hesaplanır ve

$$< \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{n}_q^{'} >= - < \mathbf{b}_{q1}^{'}, \mathbf{n}_q >$$

elde edilir. (4.2) den k_{q3} quasi eğriliğinin eşiti göz önünde bulundurulursa ve

$$- < \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_{q1}^{'} >= ||\alpha'||k_{q3}$$

eşitliğinde simetri özelliğinden faydalanılırsa

$$- < \mathbf{b}_{q1}^{'}, \mathbf{n}_q >= ||\alpha'||k_{q3}$$

yazılır. $< \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{n}_q' >= c_2$ ve $- < \mathbf{b}_{q1}^{'}, \mathbf{n}_q >= ||\alpha'||k_{q3}$ olduğundan

$$\begin{aligned} < \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{n}_q^{'} > &= - < \mathbf{b}_{q1}^{'}, \mathbf{n}_q >= ||\alpha'||k_{q3} \\ &= ||\alpha'||k_{q3} \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre

$$c_2 = ||\alpha'||k_{q3}$$

bulunur. Buradan

$$a_2 = -||\alpha'||k_1, b_2 = 0, c_2 = ||\alpha'||k_{q3} \text{ ve } d_2 = 0$$

olmak üzere a_2, b_2, c_2, d_2 değerleri

$$\mathbf{n}'_q = a_2\mathbf{t} + b_2\mathbf{n}_q + c_2\mathbf{b}_{q1} + d_2\mathbf{b}_{q2}$$

eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\mathbf{n}'_q = -||\alpha'||k_1\mathbf{t} + k_3\mathbf{b}_{q1}$$

olur. Buna göre

$$\mathbf{b}'_{q2} = a_3\mathbf{t} + b_3\mathbf{n}_q + c_3\mathbf{b}_{q1} + d_3\mathbf{b}_{q2} \quad , \quad a_3, b_3, c_3, d_3 \in \mathbb{R}$$

eşitliğinin her iki tarafı $\mathbf{t}$ ile skaler çarpılırsa

$$\begin{aligned} < \mathbf{t}, \mathbf{b}'_{q2} > &= a_3 < \mathbf{t}, \mathbf{t} > + b_3 < \mathbf{t}, \mathbf{n}_q > + c_3 < \mathbf{t}, \mathbf{b}_{q1} > + d_3 < \mathbf{t}, \mathbf{b}_{q2} > \\ &= a_3 \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadede (4.3) den $\mathbf{b}'_{q2}$ değeri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} < \mathbf{t}, \mathbf{b}'_{q2} > &=< \mathbf{t}, ||\alpha'||(-k_{q4}\mathbf{b}_{q1}) > \\ &= ||\alpha'||(-k_{q4} < \mathbf{t}, \mathbf{b}_{q1} >) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. $< \mathbf{t}, \mathbf{b}'_{q2} >= a_3$ ve $< \mathbf{t}, \mathbf{b}'_{q2} >= 0$ olduğundan

$$< \mathbf{t}, \mathbf{b}'_{q2} >= a_3 = 0$$

elde edilir. Şimdi

$$\mathbf{b}'_{q2} = a_3\mathbf{t} + b_3\mathbf{n}_q + c_3\mathbf{b}_{q1} + d_3\mathbf{b}_{q2}$$

eşitliği alınıp her iki tarafı $\mathbf{n}_q$ ile çarpılırsa $< \mathbf{n}_q, \mathbf{b}'_{q2} >$ ifadesi

$$a_3 < \mathbf{n}_q, \mathbf{t} > + b_3 < \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q > + c_3 < \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_{q1} > + d_3 < \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_{q2} >= b_3$$

bulunur. Burada (4.3) den $\mathbf{b}'_{q2}$ değeri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} < \mathbf{n}_q, \mathbf{b}'_{q2} > &=< \mathbf{n}_q, ||\alpha'||(-k_{q4}\mathbf{b}_{q1}) > \\ &= ||\alpha'||(-k_{q4} < \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_{q1} >) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $< \mathbf{n}_q, \mathbf{b}'_{q2} >= b_3$ ve $< \mathbf{n}_q, \mathbf{b}'_{q2} >= 0$ olduğundan

$$< \mathbf{n}_q, \mathbf{b}'_{q2} >= b_3 = 0$$

bulunur. Şimdi

$$\mathbf{b}'_{q2} = a_3\mathbf{t} + b_3\mathbf{n}_q + c_3\mathbf{b}_{q1} + d_3\mathbf{b}_{q2}$$

eşitliğinin her iki tarafı $\mathbf{b}_{q2}$ ile çarpılırsa $< \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{b}'_{q2} >$ ifadesi

$$a_3 < \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{t} > + b_3 < \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{n}_q > + c_3 < \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{b}_{q1} > + d_3 < \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{b}_{q2} >= d_3$$

olur. (4.5) den $\mathbf{b}'_{q2}$ değeri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} < \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{b}'_{q2} > &=< \mathbf{b}_{q2}, ||\alpha'||(-k_{q4}\mathbf{b}_{q1}) > \\ &= ||\alpha'||(-k_{q4} < \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{b}_{q1} >) \\ &= 0 \end{aligned}$$

hesaplanır $< \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{b}'_{q2} >= d_3$ ve $< \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{b}'_{q2} >= 0$ olduğundan

$$< \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{b}'_{q2} >= d_3 = 0$$

yazılır. Şimdi

$$\mathbf{b}'_{q2} = a_3\mathbf{t} + b_3\mathbf{n}_q + c_3\mathbf{b}_{q1} + d_3\mathbf{b}_{q2}$$

eşitliğinin her iki tarafı $\mathbf{b}_{q1}$ ile çarpılırsa $< \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{b}'_{q2} >$ ifadesi

$$a_3 < \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{t} > + b_3 < \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{n}_q > + c_3 < \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{b}_{q1} > + d_3 < \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{b}_{q2} >= c_3$$

olur. (4.3) den $\mathbf{b}'_{q2}$ değeri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} < \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{b}'_{q2} > &=< \mathbf{b}_{q1}, ||\alpha'||(-k_{q4}\mathbf{b}_{q1}) > \\ &= ||\alpha'||(-k_{q4} < \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{b}_{q1} >) \\ &= ||\alpha'||(-k_{q4}) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buna göre $< \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{b}'_{q2} >= c_3$ ve $< \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{b}'_{q2} >= ||\alpha'||(-k_{q4})$ olduğundan

$$< \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{b}'_{q2} >= c_3 = ||\alpha'||(-k_{q4})$$

bulunur. Şimdi

$$a_3 = 0,\ b_3 = 0,\ c_3 = -||\alpha'||k_{q4} \text{ ve } d_3 = 0$$

olmak üzere a_3,b_3, c_3 ve d_3 değerleri

$$\mathbf{b}'_{q2} = a_3\mathbf{t} + b_3\mathbf{n}_q + c_3\mathbf{b}_{q1} + d_3\mathbf{b}_{q2}$$

eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\mathbf{b}'_{q2} = -||\alpha'||k_{q4}\mathbf{b}_{q1}$$

elde edilir. Şimdi

$$\mathbf{b}'_{q1} = a_4\mathbf{t} + b_4\mathbf{n}_q + c_4\mathbf{b}_{q1} + d_4\mathbf{b}_{q2}$$

türevi için eşitliğin her iki tarafı $\mathbf{t}$ ile skaler çarpılırsa $< \mathbf{t}, \mathbf{b}'_{q1} >$ ifadesi

$$a_4 < \mathbf{t}, \mathbf{t} > + b_4 < \mathbf{t}, \mathbf{n}_q > + c_4 < \mathbf{t}, \mathbf{b}_{q1} > + d_4 < \mathbf{t}, \mathbf{b}_{q2} > = a_4$$

olur. (4.3) den $\mathbf{b}'_{q1}$ değeri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} < \mathbf{t}, \mathbf{b}'_{q1} > &= < \mathbf{t}, ||\alpha'||(-k_{q2}\mathbf{t} - k_{q3}\mathbf{n}_q + k_{q4}\mathbf{b}_{q2}) > \\ &= ||\alpha'||(-k_{q2} < \mathbf{t}, \mathbf{t} > - k_{q3} < \mathbf{t}, \mathbf{n}_q > + k_{q4} < \mathbf{t}, \mathbf{b}_{q2} >) \end{aligned}$$

bulunur $< \mathbf{t}, \mathbf{b}'_{q1} >= a_4$ ve $< \mathbf{t}, \mathbf{b}'_{q1} >= -||\alpha'||k_{q2}$ olduğundan

$$< \mathbf{t}, \mathbf{b}'_{q1} >= -||\alpha'||k_{q2}$$

yazılır. Şimdi

$$\mathbf{b}'_{q1} = a_4\mathbf{t} + b_4\mathbf{n}_q + c_4\mathbf{b}_{q1} + d_4\mathbf{b}_{q2}$$

eşitliğinin her iki tarafı $\mathbf{n}_q$ ile skalar çarpılırsa $< \mathbf{n}_q, \mathbf{b}'_{q1} >$ ifadesi

$$a_4 < \mathbf{n}_q, \mathbf{t} > + b_4 < \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q > + c_4 < \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_{q1} > + d_4 < \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_{q2} > = b_4$$

ifadesinde (4.3) den $\mathbf{b}'_{q1}$ değeri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} < \mathbf{n}_q, \mathbf{b}'_{q1} > &= < \mathbf{n}_q, ||\alpha'||(-k_{q2}\mathbf{t} - k_{q3}\mathbf{n}_q + k_{q4}\mathbf{b}_{q2}) > \\ &= ||\alpha'||(-k_{q2} < \mathbf{n}_q, \mathbf{t} > - k_{q3} < \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q > + k_{q4} < \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_{q2} >) \\ &= -||\alpha'||k_{q3} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $< \mathbf{n}_q, \mathbf{b}'_{q1} >= b_4$ ve $< \mathbf{n}_q, \mathbf{b}'_{q1} >= -||\alpha'||k_{q3}$ olup

$$< \mathbf{n}_q, \mathbf{b}'_{q1} >= b_4 = -||\alpha'||k_{q3}$$

bulunur.

$$\mathbf{b}'_{q1} = a_4\mathbf{t} + b_4\mathbf{n}_q + c_4\mathbf{b}_{q1} + d_4\mathbf{b}_{q2}$$

eşitliğini göz önüne alalım. Bu eşitliğin her iki tarafı $\mathbf{b}_{q2}$ ile skaler çarpılırsa $< \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{b}'_{q1} >$ ifadesi

$$a_4 < \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{t} > + b_4 < \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{n}_q > + c_4 < \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{b}_{q1} > + d_4 < \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{b}_{q2} >= d_4$$

(4.3) den $\mathbf{b}'_{q1}$ değeri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} < \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{b}'_{q1} > &=< \mathbf{b}_{q2}, ||\alpha'||(-k_{q2}\mathbf{t} - k_{q3}\mathbf{n}_q + k_{q4}\mathbf{b}_{q2}) > \\ &= ||\alpha'||(-k_{q2} < \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{t} > -k_{q3} < \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{n}_q > +k_{q4} < \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{b}_{q2} >) \\ &= ||\alpha'||k_{q4} \end{aligned}$$

olur ve son iki eşitlikten $< \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{b}'_{q1} >= d_4$ ve $< \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{b}'_{q1} >= ||\alpha'||k_{q4}$ olduğundan

$$< \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{b}'_{q1} >= d_4 = ||\alpha'||k_{q4}$$

elde edilir. Şimdi

$$\mathbf{b}'_{q1} = a_4\mathbf{t} + b_4\mathbf{n}_q + c_4\mathbf{b}_{q1} + d_4\mathbf{b}_{q2}$$

eşitliğinde her iki taraf $\mathbf{b}_{q1}$ ile skaler çarpılırsa $< \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{b}'_{q1} >$ ifadesi

$$a_4 < \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{t} > + b_4 < \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{n}_q > +c_4 < \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{b}_{q1} > +d_4 < \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{b}_{q2} >= c_4$$

olur. (4.3) den $\mathbf{b}'_{q1}$ değeri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} < \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{b}'_{q1} > &=< \mathbf{b}_{q1}, ||\alpha'||(-k_{q2}\mathbf{t} - k_{q3}\mathbf{n}_q + k_{q4}\mathbf{b}_{q2}) > \\ &= ||\alpha'||(-k_{q2} < \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{t} > -k_{q3} < \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{n}_q > +k_{q4} < \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{b}_{q2} >) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur ve buradan $< \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{b}'_{q1} >= c_4$ aynı zamanda $< \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{b}'_{q1} >= 0$ olduğundan

$$< \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{b}'_{q1} >= c_4 = 0$$

olarak elde edilir. Şimdi

$$a_4 = -||\alpha'||k_{q2},\ b_4 = -||\alpha'||k_{q3},\ c_4 = 0 \text{ ve } d_4 = -||\alpha'||k_{q4}$$

olmak üzere a_4, b_4, c_4, d_4 değerleri

$$\mathbf{b}'_{q1} = a_4\mathbf{t} + b_4\mathbf{n}_q + c_4\mathbf{b}_{q1} + d_4\mathbf{b}_{q2}$$

eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\mathbf{b}'_{q1} = -||\alpha'||k_{q2}\mathbf{t} - ||\alpha'||k_{q3}\mathbf{n}_q + ||\alpha'||k_{q4}\mathbf{b}_{q2}$$

bulunur. Hesaplanan

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= ||\alpha'||k_{q1}\mathbf{n}_q + ||\alpha'||k_{q2}\mathbf{b}_{q1} \\ \mathbf{n}'_q &= -||\alpha'||k_{q1}\mathbf{t} + k_{q3}\mathbf{b}_{q1} \\ \mathbf{b}'_{q1} &= -||\alpha'||k_{q2}\mathbf{t} - ||\alpha'||k_{q3}\mathbf{n}_q + ||\alpha'||k_{q4}\mathbf{b}_{q2} \\ \mathbf{b}'_{q2} &= -||\alpha'||k_{q4}\mathbf{b}_{q1} \end{aligned}$$

değerleri matris formatında yazılırsa

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}_q' \\ \mathbf{b}_{q1}' \\ \mathbf{b}_{q2}' \end{bmatrix} = \|\alpha'\| \begin{bmatrix} 0 & k_{q1} & k_{q2} & 0 \\ -k_{q1} & 0 & k_{q3} & 0 \\ -k_{q2} & -k_{q3} & 0 & k_{q4} \\ 0 & 0 & -k_{q4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_{q1} \\ \mathbf{b}_{q2} \end{bmatrix}$$

olur.

Sonuç 4.1.1: Bu teoremde quasi çatıya göre hesaplanan dördüncü eğrilik olan k_{q4} değeri sıfır alındığında (3.5) ile verilen 3-boyutlu Öklid uzayında bir uzay eğrisi için quasi çatının türev formülleri elde edilir.

Örnek 4.1.1: 4-boyutlu Öklid uzayında verilen

$$\alpha(s) = (\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin s, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos s)$$

bir uzay eğrisi olmak üzere Frenet çatısı ve Frenet eğrilikleri ile izdüşüm vektörleri $\mathbf{k}_x = (1,0,0,0)$ ve $\mathbf{k}_y = (0,1,0,0)$ olarak alınan $xy-$düzlemindeki quasi çatı ve quasi eğrilikleri hesaplanmak istenirse (3.8) eşitliklerinden faydalanılırsa

$$\alpha'(s) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos\tfrac{s}{\sqrt{2}}, -\sin\tfrac{s}{\sqrt{2}}, \cos s, -\sin s)$$

ve

$$||\alpha'(s)|| = \sqrt{\langle\alpha'(s), \alpha'(s)\rangle} = 1$$

bulunur. O halde $\alpha(s)$ eğrisi yay parametresine göre parametrelendirilmiş bir eğridir. Buradan

$$\mathbf{t} = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos\tfrac{s}{\sqrt{2}}, -\sin\tfrac{s}{\sqrt{2}}, \cos s, -\sin s)$$

olarak hesaplanır. $\mathbf{n}(s)$ normal vektörü için

$$\alpha''(s) \;\; = -\tfrac{1}{2}(\sin\tfrac{s}{\sqrt{2}}, \cos\tfrac{s}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\sin s, \sqrt{2}\cos s)$$

ve buradan $||\alpha''(s)|| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(s) \;\; &= \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} \\ &= \tfrac{-1}{\sqrt{3}}(\sin\tfrac{s}{\sqrt{2}}, \cos\tfrac{s}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\sin s, \sqrt{2}\cos s) \end{aligned}$$

bulunur. $\mathbf{b}_2(s)$ ikinci binormal vektörü için

$$\alpha'''(s) \;\; = \tfrac{-1}{\sqrt{2}}(\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{s}{\sqrt{2}}, \tfrac{-1}{2}\sin\tfrac{s}{\sqrt{2}}, \cos s, \sin s)$$

olup $\alpha'(s) \wedge \alpha''(s) \wedge \alpha'''(s)$ vektörel çarpımı aşağıdaki determinant yardımıyla hesaplanırsa

$$\alpha'(s) \wedge \alpha''(s) \wedge \alpha'''(s) = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \cos\frac{s}{\sqrt{2}} & -\sin\frac{s}{\sqrt{2}} & \cos s & -\sin s \\ \sin\frac{s}{\sqrt{2}} & \cos\frac{s}{\sqrt{2}} & \sqrt{2}\sin s & \sqrt{2}\cos s \\ \frac{1}{2}\cos\frac{s}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{2}\sin\frac{s}{\sqrt{2}} & \cos s & \sin s \end{vmatrix}$$

$$= (-\tfrac{\sqrt{2}}{3}\sin\tfrac{s}{\sqrt{2}}, -\tfrac{\sqrt{2}}{3}\cos\tfrac{s}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{3}\sin s, \tfrac{1}{3}\cos s)$$

buradan

$$\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s) \wedge \alpha'''(s)\| = \tfrac{1}{\sqrt{3}}$$

olur ve

$$\mathbf{b}_2(s) = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s) \wedge \alpha'''(s)}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s) \wedge \alpha'''(s)\|}$$

$$= \tfrac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2}\sin\tfrac{s}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\cos\tfrac{s}{\sqrt{2}}, \sin s, \cos s)$$

şeklinde bulunur. $\mathbf{b}_1(s)$ birinci binormal vektörü için aşağıda yer alan $\mathbf{b}_2(s) \wedge \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$ determinantı benzer şekilde hesaplanırsa

$$\mathbf{b}_2(s) \wedge \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s) = \frac{\sqrt{2}}{6}\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ -\sqrt{2}\sin\frac{s}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2}\cos\frac{s}{\sqrt{2}} & \sin s & \cos s \\ \cos\frac{s}{\sqrt{2}} & -\sin\frac{s}{\sqrt{2}} & \sqrt{2}\cos s & -\sin s \\ \sin\frac{s}{\sqrt{2}} & \cos\frac{s}{\sqrt{2}} & \sqrt{2}\sin s & \sqrt{2}\cos s \end{vmatrix}$$

birinci binormal vektör

$$\mathbf{b}_1(s) = \mathbf{b}_2(s) \wedge \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$$

$$= -\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos\tfrac{s}{\sqrt{2}}, -\sin\tfrac{s}{\sqrt{2}}, -\cos s, \sin s)$$

olarak elde edilir. Birim hızlı $\alpha(s)$ eğrisi için (3.10) ile verilen Frenet eğrilikleri ise

$$k_1(s) = < -\tfrac{1}{2}(\sin\tfrac{s}{\sqrt{2}}, \cos\tfrac{s}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\sin s, \sqrt{2}\cos s,$$

$$-\tfrac{\sqrt{3}}{3}(\sin\tfrac{s}{\sqrt{2}}, \cos\tfrac{s}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\sin s, \sqrt{2}\cos s) >$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ve

$$k_2(s) = < \tfrac{-\sqrt{6}}{6}(\cos\tfrac{s}{\sqrt{2}}, -\sin\tfrac{s}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{2}\cos s, -2\sin s),$$

$$-\tfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\tfrac{s}{\sqrt{2}}, -\sin\tfrac{s}{\sqrt{2}}, -\cos s, \sin s) >$$

$$= \frac{-\sqrt{3}}{6}$$

ve

$$\begin{aligned} k_3(s) = & < \tfrac{\sqrt{3}}{3}(-\cos\tfrac{s}{\sqrt{2}}, \sin\tfrac{s}{\sqrt{2}}, \cos s, -\sin s), \\ & -\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos\tfrac{s}{\sqrt{2}}, -\sin\tfrac{s}{\sqrt{2}}, -\cos s, \sin s) > \\ = & \frac{-\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

olarak bulunur. (4.1) eşitliklerinden faydalanarak $\mathbf{n}_q$ birim quasi-normal vektörü için aşağıdaki determinant kullanılırsa

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \cos\frac{s}{\sqrt{2}} & -\sin\frac{s}{\sqrt{2}} & \cos s & -\sin s \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

birim quasi-normal vektörü

$$\mathbf{n}_q = \frac{\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y}{\|\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y\|} = (0, 0, \sin(s), \cos(s))$$

bulunur. İkinci birim quasi-binormal vektörü $\mathbf{b}_{q2}$ için aşağıda yer alan determinant benzer şekilde hesaplanırsa

$$\alpha'(s) \wedge \mathbf{n}_q(s) \wedge \alpha'''(s) = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \cos\frac{s}{\sqrt{2}} & -\sin\frac{s}{\sqrt{2}} & \cos s & -\sin s \\ 0 & 0 & \sin s & \cos s \\ -\cos\frac{s}{\sqrt{2}} & \sin\frac{s}{\sqrt{2}} & -2\cos s & -2\sin s \end{vmatrix}$$

ikinci birim quasi-binormal vektör

$$\mathbf{b}_{q2} = \frac{\alpha'(s) \wedge \mathbf{n}_q(s) \wedge \alpha'''(s)}{\|\alpha'(s) \wedge \mathbf{n}_q(s) \wedge \alpha'''(s)\|} = (\sin\tfrac{s}{\sqrt{2}}, \cos\tfrac{s}{\sqrt{2}}, 0, 0)$$

olur ve son olarak birinci birim quasi-binormal $\mathbf{b}_{q1}$ için

$$\mathbf{b}_{q2} \wedge \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \sin\frac{s}{\sqrt{2}} & \cos\frac{s}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\cos\frac{s}{\sqrt{2}} & \sin\frac{s}{\sqrt{2}} & -\cos s & \sin s \\ 0 & 0 & \sin s & \cos s \end{vmatrix}$$

determinantı yardımıyla $\mathbf{b}_{q2} \wedge \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q$ vektörel çarpımı hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{q1} = & \quad \mathbf{b}_{q2} \wedge \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q \\ = & \quad \tfrac{-1}{\sqrt{2}}(\cos \tfrac{s}{\sqrt{2}}, -\sin \tfrac{s}{\sqrt{2}}, -\cos s, \sin s) \end{aligned}$$

olur. (4.2) ile verilen quasi çatı eğrilikleri hesaplanırsa k_{q1} için

$$k_{q1} =< -\frac{1}{2}(\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\sin s, \sqrt{2}\cos s), (0, 0, \sin s, \cos s) >= -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

k_{q2} için

$$\begin{aligned} k_{q2} = & \quad < -\tfrac{1}{2}(\sin \tfrac{s}{\sqrt{2}}, \cos \tfrac{s}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\sin s, \sqrt{2}\cos s), \\ & \quad \tfrac{-1}{\sqrt{2}}(\cos \tfrac{s}{\sqrt{2}}, -\sin \tfrac{s}{\sqrt{2}}, -\cos s, -\sin s) >= 0 \end{aligned}$$

k_{q3} için

$$k_{q3} =< (0, 0, \cos s, -\sin s), \frac{-1}{\sqrt{2}}(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, -\cos s, -\sin s) >= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ve k_4 için

$$\begin{aligned} k_{q4} = & \quad < \tfrac{-1}{2}(-\sin \tfrac{s}{\sqrt{2}}, -\cos \tfrac{s}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\sin s, \sqrt{2}\cos s), \\ & \quad \tfrac{-1}{\sqrt{2}}(\cos \tfrac{s}{\sqrt{2}}, -\sin \tfrac{s}{\sqrt{2}}, -\cos s, \sin s) >= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 4.1.2: $\alpha(s)$ 4-boyutlu Öklid uzayında regüler bir eğri olmak üzere $\alpha(s)$ eğrisinin türevleri yardımıyla hesaplanan quasi eğrilikleri

$$\begin{aligned} k_{q1} = & \quad \frac{\det(\alpha', \mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y, \alpha'')}{\|\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y\| \, ||\alpha'||^2} \\ k_{q2} = & \quad \frac{\det(\alpha'', (\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''), \alpha', (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y))}{||\alpha'||^3 ||\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y|| \, ||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||} \\ k_{q3} = & \quad \frac{-\det(\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''', \alpha', \alpha'' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y, \alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y)}{||\alpha'||^2 ||\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y|| \, ||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||} \\ k_{q4} = & \quad \frac{\det(\alpha'' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''', \alpha', \alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y, \alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''')}{||\alpha'||^2 ||\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y|| \, ||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||^2} \\ & + \frac{\det(\alpha' \wedge (\alpha'' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''', \alpha', \alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y, \alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''')}{||\alpha'||^2 ||\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y|| \, ||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||^2} \\ & + \frac{\det(\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha^{(iv)}, \alpha', \alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y, \alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha^{(iv)})}{||\alpha'||^2 ||\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y|| \, ||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||^2} \end{aligned} \tag{4.4}$$

şeklindedir.

İspat: k_{q1} için (4.1) denkleminden **t** yazılırsa

$$\mathbf{t} = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \text{olduğundan } \alpha' = \mathbf{t}\,\|\alpha'\| = \|\alpha'\|\,\mathbf{t}$$

eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\alpha'' = ||\alpha'||'\mathbf{t} + ||\alpha'||\mathbf{t}'$$

bulunur. Ayrıca (4.3) den $\mathbf{t}'$ eşiti yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\alpha'' = &\ ||\alpha'||'\mathbf{t}+||\alpha'||(||\alpha'||(k_{q1}\mathbf{n}_q + k_{q2}\mathbf{b}_{q1}))\\ = &\ ||\alpha'||'\mathbf{t}+||\alpha'||^2 k_{q1}\mathbf{n}_q + ||\alpha'||^2 k_{q2}\mathbf{b}_{q1}\end{aligned}$$

olur. Eşitliğin her iki tarafı $\mathbf{n}_q$ ile skaler çarpılırsa $< \mathbf{n}_q, \alpha'' >$ ifadesi

$$||\alpha'||' < \mathbf{n}_q, \mathbf{t} > +||\alpha'||^2 k_{q1} < \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q > +||\alpha'||^2 k_{q2} < \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_{q1} >= ||\alpha'||^2 k_{q1}$$

elde edilir. Burada (4.1) denkleminden faydalanarak $\mathbf{n}_q$ quasi-normalin eşiti yerine yazılırsa

$$< \frac{\mathbf{t} \wedge \mathbf{k_x} \wedge \mathbf{k_y}}{||\mathbf{t} \wedge \mathbf{k_x} \wedge \mathbf{k_y}||}, \alpha'' >= ||\alpha'||^2 k_{q1}$$

bulunur. (4.1) ifadesi kullanılarak **t** teğet vektörün eşiti yerine yazılırsa ve düzenlenirse

$$< \frac{(\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y)}{\|\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y\|}, \alpha'' >= ||\alpha'||^2 k_{q1}$$

elde edilir. Böylece skaler dörtlü çarpımın gösteriminden

$$\frac{< \alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y, \alpha'' >}{\|\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y\|\ ||\alpha'||^2} = k_{q1} = \frac{\det(\alpha', \mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y, \alpha'')}{\|\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y\|\ ||\alpha'||^2}$$

olur. k_{q2} için (4.2) denklemi kullanılarak (4.1) den $\mathbf{b}_{q1}$ değeri yerine yazılırsa

$$k_{q2} = \frac{< \mathbf{t}', \mathbf{b}_{q2} \wedge \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q >}{||\alpha'||}$$

elde edilir. (4.1) denklemindeki **t** teğet vektörünün türevi alınıp $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}_q$, $\mathbf{b}_{q2}$ vektörlerinin eşitleri yukarıdaki ifadede yerine yazılırsa

$$k_{q2} = \frac{1}{||\alpha'||} < \frac{\alpha''||\alpha'|| - ||\alpha'||'\alpha'}{||\alpha'||^2}, \frac{\alpha' \wedge \mathbf{n}_q \wedge \alpha'''}{||\alpha' \wedge \mathbf{n}_q \wedge \alpha'''||} \wedge \frac{\alpha'}{||\alpha'||} \wedge \frac{\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y}{||\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y||} >$$

bulunur. Karma çarpımın özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned}k_{q2} = &\ \frac{1}{||\alpha'||} < \frac{\alpha''}{||\alpha'||}, \frac{\alpha' \wedge \mathbf{n}_q \wedge \alpha'''}{||\alpha' \wedge \mathbf{n}_q \wedge \alpha'''||} \wedge \frac{\alpha'}{||\alpha'||} \wedge \frac{\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y}{||\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y||} >\\ &-\frac{1}{||\alpha'||} < \frac{||\alpha'||'\alpha'}{||\alpha'||^2}, \frac{\alpha' \wedge \mathbf{n}_q \wedge \alpha'''}{||\alpha' \wedge \mathbf{n}_q \wedge \alpha'''||} \wedge \frac{\alpha'}{||\alpha'||} \wedge \frac{\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y}{||\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y||} >\end{aligned}$$

olur.

$$< \frac{||\alpha'||'\alpha'}{||\alpha'||^2}, \frac{\alpha' \wedge \mathbf{n}_q \wedge \alpha'''}{||\alpha' \wedge \mathbf{n}_q \wedge \alpha'''||} \wedge \frac{\alpha'}{||\alpha'||} \wedge \frac{\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y}{||\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y||} >= 0$$

olduğundan dolayı

$$k_{q2} = \frac{1}{||\alpha'||} < \frac{\alpha''}{||\alpha'||}, \frac{\alpha' \wedge \mathbf{n}_q \wedge \alpha'''}{||\alpha' \wedge \mathbf{n}_q \wedge \alpha'''||} \wedge \frac{\alpha'}{||\alpha'||} \wedge \frac{\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y}{||\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y||} >$$

dir. (4.1) denklemi kullanılarak $\mathbf{t}$ teğet vektörünün ve $\mathbf{n}_q$ quasi-normalin eşiti yerine yazılıp düzenlenirse

$$\begin{aligned}
k_{q2} &= \frac{1}{||\alpha'||^3} < \alpha'', \frac{\alpha' \wedge (\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''}{||\alpha' \wedge (\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||} \wedge \alpha' \wedge \frac{\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y}{||\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y||} > \\
&= \frac{1}{||\alpha'||} < \frac{\alpha''}{||\alpha'||}, \frac{\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''}{||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||} \wedge \frac{\alpha'}{||\alpha'||} \wedge \frac{\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y}{||\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y||} > \\
&= \frac{< \alpha'', (\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''') \wedge \alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) >}{||\alpha'||^3 ||\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y||\ ||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||} \\
&= \frac{\det(\alpha'', (\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''), \alpha', (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y))}{||\alpha'||^3 ||\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y||\ ||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||}
\end{aligned}$$

olur. k_{q3} için (4.3) eşitlikleri kullanılırsa

$$k_{q3} = -\frac{< (\mathbf{b}_{q2} \wedge \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q)', \mathbf{n}_q >}{||\alpha'||}$$

elde edilir. Parantez içerisindeki vektörel çarpımın türevi alınıp yerine yazılırsa

$$(\mathbf{b}_{q2} \wedge \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q)' = (\mathbf{b}'_{q2} \wedge \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q) + (\mathbf{b}_{q2} \wedge \mathbf{t}' \wedge \mathbf{n}_q) + (\mathbf{b}_{q2} \wedge \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}'_q)$$

bulunur ve

$$\begin{aligned}
k_{q3} &= -\frac{< (\mathbf{b}'_{q2} \wedge \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q) + (\mathbf{b}_{q2} \wedge \mathbf{t}' \wedge \mathbf{n}_q) + (\mathbf{b}_{q2} \wedge \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}'_q), \mathbf{n}_q >}{||\alpha'||} \\
&= -\frac{(< \mathbf{b}'_{q2} \wedge \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q > + < \mathbf{b}_{q2} \wedge \mathbf{t}' \wedge \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q > + < \mathbf{b}_{q2} \wedge \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}'_q, \mathbf{n}_q >)}{||\alpha'||}
\end{aligned}$$

olup $< \mathbf{b}'_{q2} \wedge \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q >= 0$ ve $< \mathbf{b}_{q2} \wedge \mathbf{t}' \wedge \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q >= 0$ olduğundan

$$k_{q3} = -\frac{1}{||\alpha'||} < \mathbf{b}_{q2} \wedge \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}'_q, \mathbf{n}_q >$$

olur. (4.1) eşitlikleri kullanılarak $\mathbf{t}, \mathbf{n}_q$ ve $\mathbf{b}_{q2}$ değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
k_{q3} &= -\frac{1}{||\alpha'||} < \frac{\alpha' \wedge \mathbf{n}_q \wedge \alpha'''}{||\alpha' \wedge \mathbf{n}_q \wedge \alpha'''||} \wedge \frac{\alpha'}{||\alpha'||} \wedge (\frac{\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y}{||\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y||})', (\frac{\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y}{||\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y||}) > \\
&= \frac{-1}{||\alpha'||} < \frac{\alpha' \wedge (\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''}{||\alpha' \wedge (\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||} \wedge \frac{\alpha'}{||\alpha'||} \wedge (\frac{\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y}{||\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y||})', \frac{\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y}{||\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y||} > \\
&= \frac{-1}{||\alpha'||} < \frac{\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''}{||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||} \wedge \frac{\alpha'}{||\alpha'||} \wedge (\frac{\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y}{||\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y||})', \frac{\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y}{||\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y||} >
\end{aligned}$$

elde edilir. Parantez içerisindeki kesrin türevi alınıp yukarıdaki eşitlikte yerine konulursa

$$(\frac{\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y}{||\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y||})' = \frac{(\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y)'||\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y|| - ||\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y||'(\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y)}{||\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y||^2}$$

ve

$$\begin{aligned} k_{q3} &= \frac{-1}{||\alpha'||}(< \frac{\alpha'\wedge(\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y)\wedge\alpha'''}{||\alpha'\wedge(\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y)\wedge\alpha'''||} \wedge \frac{\alpha'}{||\alpha'||} \wedge \frac{(\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y)'}{||\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y||}, \frac{\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y}{||\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y||} > \\ &\quad - < \frac{\alpha'\wedge(\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y)\wedge\alpha'''}{||\alpha'\wedge(\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y)\wedge\alpha'''||} \wedge \frac{\alpha'}{||\alpha'||} \wedge \frac{||\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y||'(\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y)}{||\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y||^2}, \frac{\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y}{||\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y||} >) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$< \frac{\alpha'\wedge(\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y)\wedge\alpha'''}{||\alpha'\wedge(\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y)\wedge\alpha'''||} \wedge \frac{\alpha'}{||\alpha'||} \wedge \frac{||\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y||'(\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y)}{||\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y||^2}, \frac{\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y}{||\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y||} >= 0$$

olduğundan

$$k_{q3} = \frac{1}{||\alpha'||^2} < \frac{\alpha'\wedge(\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y)\wedge\alpha'''}{||\alpha'\wedge(\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y)\wedge\alpha'''||} \wedge \alpha' \wedge \frac{(\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y)'}{||\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y||}, \frac{\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y}{||\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y||} >$$

parantez içindeki ifadenin türevi alınırsa

$$(\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y)' = (\alpha''\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y) + (\alpha'\wedge\mathbf{k}'_x\wedge\mathbf{k}_y) + (\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}'_y)$$

bulunur. $(\alpha'\wedge\mathbf{k}'_x\wedge\mathbf{k}_y) = 0$ ve $(\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}'_y) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} k_{q3} &= \frac{1}{||\alpha'||^2} < \frac{\alpha'\wedge(\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y)\wedge\alpha'''}{||\alpha'\wedge(\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y)\wedge\alpha'''||} \wedge \alpha' \wedge (\alpha''\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y), \frac{\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y}{||\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y||} > \\ &= \frac{-\det(\alpha'\wedge(\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y)\wedge\alpha''', \alpha', \alpha''\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y, \alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y)}{||\alpha'||^2||\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y||\,||\alpha'\wedge(\alpha'\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y)\wedge\alpha'''||} \end{aligned}$$

olur. k_{q4} için (4.3) eşitlikleri kullanılırsa

$$k_{q4} = \frac{1}{||\alpha'||} < (\mathbf{b}_{q2}\wedge\mathbf{t}\wedge\mathbf{n}_q)', \mathbf{b}_{q2} >$$

parantez içindeki vektörel çarpımın türevi alınıp yerine yazılırsa

$$(\mathbf{b}_{q2}\wedge\mathbf{t}\wedge\mathbf{n}_q)' = (\mathbf{b}'_{q2}\wedge\mathbf{t}\wedge\mathbf{n}_q) + (\mathbf{b}_{q2}\wedge\mathbf{t}'\wedge\mathbf{n}_q) + (\mathbf{b}_{q2}\wedge\mathbf{t}\wedge\mathbf{n}'_q)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} k_{q4} &= \frac{1}{||\alpha'||} < (\mathbf{b}'_{q2}\wedge\mathbf{t}\wedge\mathbf{n}_q) + (\mathbf{b}_{q2}\wedge\mathbf{t}'\wedge\mathbf{n}_q) + (\mathbf{b}_{q2}\wedge\mathbf{t}\wedge\mathbf{n}'_q), \mathbf{b}_{q2} > \\ &= \frac{1}{||\alpha'||}(< \mathbf{b}'_{q2}\wedge\mathbf{t}\wedge\mathbf{n}_q, \mathbf{b}_{q2} > + < \mathbf{b}_{q2}\wedge\mathbf{t}'\wedge\mathbf{n}_q, \mathbf{b}_{q2} > + < \mathbf{b}_{q2}\wedge\mathbf{t}\wedge\mathbf{n}'_q, \mathbf{b}_{q2} >) \end{aligned}$$

olur. Bu ifadede $< \mathbf{b}_{q2} \wedge \mathbf{t}' \wedge \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_{q2} >= 0$ ve $< \mathbf{b}_{q2} \wedge \mathbf{t}' \wedge \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_{q2} >= 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} k_{q4} = & \frac{1}{||\alpha'||} < \mathbf{b}'_{q2} \wedge \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_{q2} > \\ = & \frac{1}{||\alpha'||^2} < (\frac{\alpha' \wedge \mathbf{n}_q \wedge \alpha'''}{||\alpha' \wedge \mathbf{n}_q \wedge \alpha'''||})' \wedge \alpha' \wedge \frac{\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y}{||\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y||}, \frac{\alpha' \wedge \mathbf{n}_q \wedge \alpha'''}{||\alpha' \wedge \mathbf{n}_q \wedge \alpha'''||} > \\ = & \frac{1}{||\alpha'||^2} < (\frac{\alpha' \wedge (\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''}{||\alpha' \wedge (\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||})' \wedge \alpha' \wedge \frac{\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y}{||\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y||}, \frac{\alpha' \wedge (\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''}{||\alpha' \wedge (\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||} > \\ = & \frac{1}{||\alpha'||} < (\frac{\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''}{||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||})' \wedge \frac{\alpha'}{||\alpha'||} \wedge \frac{\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y}{||\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y||}, \frac{\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''}{||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||} > \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Parantez içerisindeki kesrin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} (\frac{\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''}{||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||})' = & \frac{(\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''')' ||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||}{||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||^2} \\ & - \frac{||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||' (\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''')}{||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||^2} \end{aligned}$$

olup aşağıdaki eşitlikte yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} k_{q4} = & \frac{1}{||\alpha'||} < \frac{(\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''')'}{||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||} \wedge \frac{\alpha'}{||\alpha'||} \wedge \frac{\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y}{||\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y||}, \frac{\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''}{||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||} > \\ & - < \frac{||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||' (\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''')}{||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||^2} \wedge \frac{\alpha'}{||\alpha'||} \wedge \frac{\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y}{||\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y||}, \frac{\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''}{||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||} > \end{aligned}$$

olur. Burada

$$< \frac{||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||' (\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''')}{||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||^2} \wedge \frac{\alpha'}{||\alpha'||} \wedge \frac{\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y}{||\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y||}, \frac{\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''}{||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||} > \quad = 0$$

olduğundan

$$k_{q4} \quad = \frac{1}{||\alpha'||^2} < \frac{(\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''')'}{||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||} \wedge \alpha' \wedge \frac{\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y}{||\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y||}, \frac{\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''}{||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||} >$$

bulunur.

Parantez içerisindeki ifadenin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} (\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''')' = & (\alpha'' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''') + (\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y)' \wedge \alpha''') \\ & + (\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha^{(iv)}) \\ = & (\alpha' \wedge (\alpha'' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y + \alpha' \wedge \mathbf{k}'_x \wedge \mathbf{k}_y + \alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}'_y) \wedge \alpha''') \\ & + (\alpha'' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''') + (\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha^{(iv)}) \end{aligned}$$

gerekli işlemler ile

$$\begin{aligned}(\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''')' &= (\alpha'' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''') + (\alpha' \wedge (\alpha'' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''') \\ &\quad + (\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x' \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''') + (\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y') \wedge \alpha''') \\ &\quad + (\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha^{(iv)}) \\ &= (\alpha'' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''') + (\alpha' \wedge (\alpha'' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''') \\ &\quad + (\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha^{(iv)})\end{aligned}$$

olacağından bu değer yukarıdaki ifadede yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}k_{q4} &= \tfrac{1}{||\alpha'||^2}(< \tfrac{(\alpha'' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''')}{||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||} \wedge \alpha' \wedge \tfrac{\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y}{||\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y||}, \tfrac{\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''}{||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||} > \\ &\quad + \tfrac{1}{||\alpha'||} < \tfrac{(\alpha' \wedge (\alpha'' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''')}{||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||} \wedge \alpha' \wedge \tfrac{\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y}{||\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y||}, \tfrac{\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''}{||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||} > \\ &\quad + \tfrac{1}{||\alpha'||} < \tfrac{(\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha^{(iv)})}{||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||} \wedge \alpha' \wedge \tfrac{\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y}{||\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y||}, \tfrac{\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''}{||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||} >) \\ &= \tfrac{\det(\alpha'' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''', \alpha', \alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y, \alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''')}{||\alpha'||^2 ||\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y|| \, ||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||^2} \\ &\quad + \tfrac{\det(\alpha' \wedge (\alpha'' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''', \alpha', \alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y, \alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''')}{||\alpha'||^2 ||\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y|| \, ||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||^2} \\ &\quad + \tfrac{\det(\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha^{(iv)}, \alpha', \alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y, \alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha^{(iv)})}{||\alpha'||^2 ||\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y|| \, ||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||^2}\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Örnek 4.1.2: İzdüşüm vektörü olarak $\mathbf{k}_x = (1,0,0,0)$ ve $\mathbf{k}_y = (0,1,0,0)$ alınırsa

$$\alpha(s) = (\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin s, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos s)$$

eğrisinin quasi çatı eğrilikleri eğrinin türevleri cinsinden hesaplanırsa

$$\alpha'(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, -\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \cos s, -\sin s) \quad \text{ve} \quad ||\alpha'(s)|| = 1$$

$$\alpha''(s) = -\frac{1}{2}(\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\sin s, \sqrt{2}\cos s)$$

olup

$$\begin{aligned}\det(\alpha', \mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y, \alpha'') &= -\tfrac{1}{2\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \cos\frac{s}{\sqrt{2}} & -\sin\frac{s}{\sqrt{2}} & \cos s & -\sin s \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\frac{s}{\sqrt{2}} & \cos\frac{s}{\sqrt{2}} & \sqrt{2}\sin s & \sqrt{2}\cos s \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ \cos\frac{s}{\sqrt{2}} & -\sin\frac{s}{\sqrt{2}} & \cos s & -\sin s \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, -\sin s, \cos s)$$

olur ve

$$||\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y|| = \sqrt{< (0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin s, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos s), (0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin s, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos s) >}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

olarak hesaplanır. Bulunan değerler (4.4) denklemi kullanılarak k_{q1} ifadesinde yerine yazılırsa

$$k_{q1} = \frac{\det[\alpha', \mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y, \alpha'']}{\|\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y\| \ \ \|\alpha'\|^2} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

olur. k_{q2} için

$$\alpha'''(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{-1}{2}\cos(\frac{s\sqrt{2}}{2}), \frac{1}{2}\sin(\frac{s\sqrt{2}}{2}), -\cos(s), -\sin(s))$$

olmak üzere aşağıdaki determinant yardımıyla $< \alpha'', \alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''' >$ değeri ve

$$||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||$$

normu hesaplanırsa

$$\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''' = \frac{-\sqrt{2}}{4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ \cos(\frac{s\sqrt{2}}{2}) & -\sin(\frac{s\sqrt{2}}{2}) & \cos(s) & -\sin(s) \\ 0 & 0 & -\sin(s) & \cos(s) \\ \frac{1}{2}\cos(\frac{s\sqrt{2}}{2}) & \frac{-1}{2}\sin(\frac{s\sqrt{2}}{2}) & \cos(s) & \sin(s) \end{vmatrix}$$

elde edilir ve (4.4) denkleminde k_{q2} ifadesinde yerine konulursa

$$k_{q2} = \frac{\det(\alpha'', (\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''), \alpha', (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y))}{||\alpha'||^3 ||\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y|| \ ||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||}$$

$$= 0$$

bulunur. k_{q3} için aşağıdaki matris yardımıyla değerler hesaplanırsa

$$\alpha'' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y = \frac{-1}{2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ \sin\frac{s}{\sqrt{2}} & \cos\frac{s}{\sqrt{2}} & \sqrt{2}\sin s & \sqrt{2}\cos s \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

olur ve (4.4) denkleminde k_{q3} ifadesinde yerine konulursa

$$\begin{aligned} k_{q3} &= \frac{-\det(\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''', \alpha', \alpha'' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y, \alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y)}{||\alpha'||^2 ||\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y|| \; ||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

bulunur. k_{q4} için

$$\alpha'''(s) = \frac{-1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{2}\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, -\cos s, -\sin s)$$

$$\alpha^{(iv)}(s) = (\frac{1}{4}\sin s, \frac{1}{4}\cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos s, -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos s)$$

olup

$$\alpha'' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''' = \tfrac{1}{4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ \sin\frac{s}{\sqrt{2}} & \cos\frac{s}{\sqrt{2}} & \sqrt{2}\sin s & \sqrt{2}\cos s \\ 0 & 0 & \sin s & -\cos s \\ \frac{1}{2}\cos\frac{s}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\sin\frac{s}{\sqrt{2}} & -\cos s & -\sin s \end{vmatrix}$$

$$\alpha' \wedge (\alpha'' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''' = -\tfrac{1}{2\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -\cos\frac{s}{\sqrt{2}} & \sin\frac{s}{\sqrt{2}} & -\cos s & \sin s \\ 0 & 0 & \sin s & -\cos s \\ \frac{1}{2}\cos\frac{s}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\sin\frac{s}{\sqrt{2}} & \cos s & \sin s \end{vmatrix}$$

$$\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha^{(iv)} = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -\cos\frac{s}{\sqrt{2}} & \sin\frac{s}{\sqrt{2}} & -\cos s & \sin s \\ 0 & 0 & \sin s & -\cos s \\ \frac{1}{4}\sin s & \frac{1}{4}\cos s & -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos s & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin s \end{vmatrix}$$

determinantları benzer şekilde hesaplanırsa ve (4.4) denkleminde k_{q4} ifadesinde yerine konulursa

$$\begin{aligned} k_{q4} = & \frac{\det(\alpha'' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''', \alpha', \alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y, \alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''')}{||\alpha'||^2 ||\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y|| \; ||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||^2} \\ & + \frac{\det(\alpha' \wedge (\alpha'' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''', \alpha', \alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y, \alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''')}{||\alpha'||^2 ||\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y|| \; ||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||^2} \\ & + \frac{\det(\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha^{(iv)}, \alpha', \alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y, \alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha^{(iv)})}{||\alpha'||^2 ||\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y|| \; ||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''||^2} \\ = & \frac{1}{2} \end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 4.1.2: Bir uzay eğrisi için k_{q1}, k_{q2}, k_{q3}, k_{q4} ile verilen quasi eğriliklerinin $\mathbf{k}_x$, $\mathbf{k}_y$ izdüşüm vektörlerine bağlı olduğu kolayca görülür.

4.2. Öklidyen 4-Uzayda Quasi Çatı ile Frenet Çatı Arasındaki Bağıntılar

$\mathbb{R}^4$, 4-boyutlu uzayda birim hızlı olmayan bir α uzay eğrisi boyunca $\alpha'(s) \neq 0$ ve $\alpha''(s) \neq 0$ olmak üzere Frenet vektörleri

$$\mathbf{t}(s) = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|} \qquad \mathbf{n}(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

$$\mathbf{b}_2(s) = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s) \wedge \alpha'''(s)}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s) \wedge \alpha'''(s)\|} \qquad \mathbf{b}_1(s) = \mathbf{b}_2(s) \wedge \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$$

şeklinde ve yine 4-boyutlu uzayda birim hızlı regüler bir α uzay eğrisinin quasi çatısı, $\mathbf{k}_x$ ve $\mathbf{k}_y$ izdüşüm vektörleri olmak üzere

$$\mathbf{t} = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|} \qquad \mathbf{n}_q = \frac{\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y}{\|\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y\|}$$

$$\mathbf{b}_{q2} = \frac{\alpha'(s) \wedge \mathbf{n}_q(\mathbf{s}) \wedge \alpha'''(s)}{\|\alpha'(s) \wedge \mathbf{n}_q(\mathbf{s}) \wedge \alpha'''(s)\|} \qquad \mathbf{b}_{q1} = \mathbf{b}_{q2} \wedge \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q$$

şeklindedir.

Teorem 4.2.1: 4-boyutlu Öklid uzayında dönüşüm matrisi

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & \sin\theta \\ 0 & -\sin\psi\cos\phi - \sin\phi\sin\theta\cos\psi & \cos\psi\cos\phi - \sin\phi\sin\theta\sin\psi & \cos\theta\sin\phi \\ 0 & \sin\psi\sin\phi - \cos\psi\sin\theta\cos\phi & -\cos\phi\sin\theta\sin\psi - \cos\psi\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix}$$

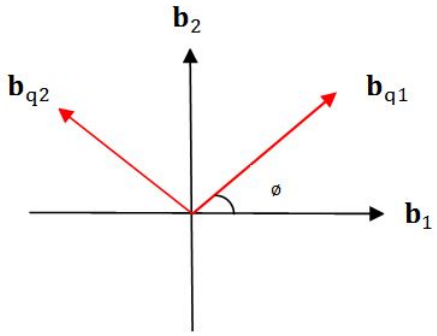
olmak üzere $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{b}_{q2}\}$ quasi çatı vektörleri ve $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ Frenet çatı vektörleri arasında

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_{q1} \\ \mathbf{b}_{q2} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Dönüşüm matrisinin teğet vektörü olan **t** değişmeden kalacak şekilde seçilip $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{b}_{q2}\}$ quasi çatı vektörleri için $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ Frenet çatı vektörleri olmak üzere üç

olası dönme düzlemi ele alınırsa ilk dönüş birinci binormal $\mathbf{b}_1$ ve ikinci binormal $\mathbf{b}_2$ nin kapsadığı uzayda $\mathbf{b}_1$ ve $\mathbf{b}_{q1}$ vektörleri arasındaki açı Şekil 4.1 deki gibi ϕ olacak şekilde alınırsa $< \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_{q1} >$ iç çarpımının eşiti $< \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_{q1} >= \cos\phi$ olur. Burada



Şekil 4.1 Birinci dönme düzlemi, $\mathbf{Span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ düzleminde ϕ açısı

$$\mathbf{b}_{q1} = \cos\phi\mathbf{b}_1 + \cos(\pi/2 - \phi)\mathbf{b}_2$$

ve

$$\mathbf{b}_{q2} = \cos(\pi/2 + \phi)\mathbf{b}_1 + \sin(\pi/2 - \phi)\mathbf{b}_2$$

olup buradan da

$$\mathbf{b}_{q1} = \cos\phi\mathbf{b}_1 + \sin\phi\mathbf{b}_2$$

ile

$$\mathbf{b}_{q2} = -\sin\phi\mathbf{b}_1 + \cos\phi\mathbf{b}_2$$

yazılır. O halde

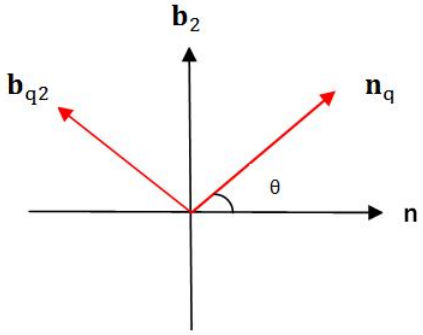
$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_{q1} \\ \mathbf{b}_{q2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

olur. İkinci dönüş normal vektör $\mathbf{n}$ ve ikinci binormal vektör $\mathbf{b}_2$ nin kapsadığı uzayda $\mathbf{n}$ ve $\mathbf{n}_q$ vektörleri arasındaki açı Şekil 4.2 deki gibi θ olacak şekilde alınırsa $< \mathbf{n}, \mathbf{n}_q >= \cos\theta$ olur. Burada

$$\mathbf{n}_q = \cos\theta\mathbf{n} + \sin(\pi/2 - \theta)\mathbf{b}_2$$

ve

$$\mathbf{b}_{q2} = \cos(\pi/2 + \theta)\mathbf{n} + \sin(\pi/2 - \theta)\mathbf{b}_2$$



Şekil 4.2 İkinci dönme düzlemi, **Span**$\{\mathbf{n}, \mathbf{b}_2\}$ düzleminde θ açısı

olacağından

$$\mathbf{n}_q = \cos\theta\mathbf{n} + \sin\theta\mathbf{b}_2$$

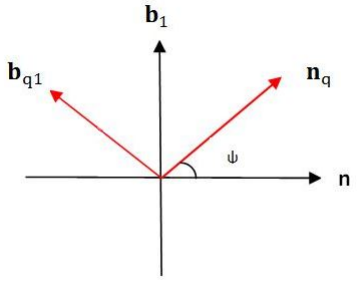
ile

$$\mathbf{b}_{q2} = \cos\theta\mathbf{b}_2 - \sin\theta\mathbf{n}$$

yazılır. O halde

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_{q1} \\ \mathbf{b}_{q2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

olur. Üçüncü dönüş ise normal vektör $\mathbf{t}$ ve birinci binormal vektör $\mathbf{b}_1$ in kapsadığı uzayda $\mathbf{n}$



Şekil 4.3 Üçüncü dönme düzlemi, **Span**$\{\mathbf{t}, \mathbf{b}_1\}$ düzleminde ψ açısı

ve $\mathbf{n}_q$ vektörleri arasındaki açı Şekil 4.3 deki gibi ψ olacak şekilde alınırsa $< \mathbf{n}, \mathbf{n}_q >= \cos\psi$ olur. Burada

$$\mathbf{n}_q = \cos\psi\mathbf{n} + \cos(\pi/2 + \psi)\mathbf{b}_1$$

ve

$$\mathbf{b}_{q1} = \cos(\pi/2 + (\pi/2 + \psi))\mathbf{n} + \cos(\pi/2 - (\pi/2 - \psi))\mathbf{b}_1$$

olduğundan

$$\mathbf{n}_q = \cos\psi\mathbf{n} + \sin\psi\mathbf{b}_1$$

ile

$$\mathbf{b}_{q1} = -\sin\psi\mathbf{n} + \cos\psi\mathbf{b}_1$$

yazılır. O halde

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_{q1} \\ \mathbf{b}_{q2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

olur. Buna göre dönüşüm matrisi M şu şekilde

$$M = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

yazılır. Buradan da

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & \sin\theta \\ 0 & -\sin\psi\cos\phi - \sin\phi\sin\theta\cos\psi & \cos\psi\cos\phi - \sin\phi\sin\theta\sin\psi & \cos\theta\sin\phi \\ 0 & \sin\psi\sin\phi - \cos\psi\sin\theta\cos\phi & -\cos\phi\sin\theta\sin\psi - \cos\psi\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

olarak bulunur. Buna göre M dönüşüm matrisi olmak üzere Frenet çatısı ve quasi çatı arasındaki bağıntı

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_{q1} \\ \mathbf{b}_{q2} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4.2.2: 4-boyutlu Öklid uzayında ters dönüşüm matrisi

$$M^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta\cos\psi & -\sin\theta\sin\phi\cos\psi\text{- }\sin\psi\cos\phi & -\sin\theta\cos\phi\cos\psi\text{+ }\sin\psi\sin\phi \\ 0 & \sin\psi\cos\theta & -\sin\theta\sin\phi\sin\psi\text{+ }\cos\psi\cos\phi & -\sin\theta\cos\phi\sin\psi\text{- }\sin\phi\cos\psi \\ 0 & \sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix}$$

olmak üzere $\{\mathbf{t},\mathbf{n}_q,\mathbf{b}_{q1},\mathbf{b}_{q2}\}$ quasi çatı vektörleri ve $\{\mathbf{t},\mathbf{n},\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2\}$ Frenet çatı vektörleri arasında

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = M^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_{q1} \\ \mathbf{b}_{q2} \end{bmatrix}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (4.5) eşitliklerinde $\mathbf{b}_{q1}$ ifadesi $\cos\phi$ ile $\mathbf{b}_{q2}$ ifadesi ise $(-\sin\phi)$ ile genişletilip bu ifadeler taraf tarafa toplanırsa

$$\mathbf{b}_1=\cos\phi\mathbf{b}_{q1}-\sin\phi\mathbf{b}_{q2}$$

eşitliğine ulaşılır. Benzer şekilde $\mathbf{b}_{q1}$ ifadesi $\sin\phi$ ile $\mathbf{b}_{q2}$ ifadesi ise $(\cos\phi)$ ile genişletilip bu ifadeler taraf tarafa toplanırsa da

$$\mathbf{b}_2=\sin\phi\mathbf{b}_{q1}+\cos\phi\mathbf{b}_{q2}$$

eşitliğine ulaşılır. Buradan

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_{q1} \\ \mathbf{b}_{q2} \end{bmatrix}$$

yazılır. (4.6) eşitliklerinde $\mathbf{n}_q$ ifadesi $\sin\theta$ ile $\mathbf{b}_{q2}$ ifadesi ise $\cos\theta$ ile genişletilip bu ifadeler taraf tarafa toplanırsa

$$\mathbf{b}_2=\sin\theta\mathbf{n}_q+\cos\theta\mathbf{b}_{q2}$$

eşitliğine ulaşılır. Yine benzer şekilde $\mathbf{n}_q$ ifadesi $\cos\theta$ ile $\mathbf{b}_{q2}$ ifadesi ise $(-\sin\theta)$ ile genişletilip bu ifadeler taraf tarafa toplanırsa da

$$\mathbf{n}=\cos\theta\mathbf{n}_q-\sin\theta\mathbf{b}_{q2}$$

eşitliğine ulaşılır. Buradan

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_{q1} \\ \mathbf{b}_{q2} \end{bmatrix}$$

yazılır. (4.7) eşitliklerinde $\mathbf{n}_q$ ifadesi $\cos\psi$ ile $\mathbf{b}_{q1}$ ifadesi ise $(-\sin\psi)$ ile genişletilip bu ifadeler taraf tarafa toplanırsa

$$\mathbf{n} = \cos\psi\mathbf{n}_q - \sin\psi\mathbf{b}_{q1}$$

eşitliğine ulaşılır. Benzer şekilde $\mathbf{n}_q$ ifadesi $\sin\psi$ ile $\mathbf{b}_{q1}$ ifadesi ise $\cos\psi$ ile genişletilip bu ifadeler taraf tarafa toplanırsa da

$$\mathbf{b}_{q1} = \sin\psi\mathbf{n}_q + \cos\psi\mathbf{b}_{q1}$$

eşitliğine ulaşılır. Buradan

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_{q1} \\ \mathbf{b}_{q2} \end{bmatrix}$$

yazılır. Buna göre $MM^{-1} = I$ olacak şekilde ters dönüşüm matrisi şu şekilde

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \right)$$

yazılır. Buradan da

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta\cos\psi & -\sin\theta\sin\phi\cos\psi - \sin\psi\cos\phi & -\sin\theta\cos\phi\cos\psi + \sin\psi\sin\phi \\ 0 & \sin\psi\cos\theta & -\sin\theta\sin\phi\sin\psi + \cos\psi\cos\phi & -\sin\theta\cos\phi\sin\psi - \sin\phi\cos\psi \\ 0 & \sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. O halde M^{-1} ters dönüşüm matrisi olmak üzere Frenet çatısı ve quasi çatı arasındaki bağıntı

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_{q1} \\ \mathbf{b}_{q2} \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4.2.3: $\alpha(s)$ eğrisi için $||\alpha'(s)|| = 1$ olmak üzere θ açısı normal ve quasi-normal, ϕ açısı birinci binormal ve birinci quasi-binormal, ψ açısı ise; ikinci binormal ve ikinci quasi-binormal vektörleri arasındaki açılar olarak verildiğinde $\alpha(s)$ uzay eğrisine ait quasi eğrilikler ile Frenet eğrilikleri arasındaki ilişkiler

$$\begin{aligned} k_{q1} &= -k_1 \cos\theta \cos\psi \\ k_{q2} &= k_1(\sin\theta \cos\psi \sin\phi + \sin\psi \cos\phi) \\ k_{q3} &= (\sin\phi d\theta) + (\cos\phi \cos\theta d\psi) + k_2(\cos\theta \cos\phi) \\ &\quad + k_3(\sin\psi \sin\phi - \sin\theta \cos\phi \cos\psi) \\ k_{q4} &= (d\phi) + (\sin\theta d\psi) + k_2(\sin\theta) + k_3(\cos\theta \cos\psi) \end{aligned} \tag{4.11}$$

şeklindedir.

İspat: İlk önce k_{q1} eğriliğini bulmak için (4.6) ifadesindeki $\mathbf{n}_q$ nun türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_q &= (\cos\theta \cos\psi)\mathbf{n} + (\cos\theta \sin\psi)\mathbf{b}_1 + (\sin\theta)\mathbf{b}_2 \\ \mathbf{n}_q' &= (-\sin\theta \cos\psi d\theta)\mathbf{n} - (\cos\theta \sin\psi d\psi)\mathbf{n} \\ &\quad + (\cos\theta \cos\psi)\mathbf{n}' + (\cos\theta d\theta)\mathbf{b}_2 + (\sin\theta)\mathbf{b}_2' \\ &\quad - (\sin\theta \sin\psi d\theta)\mathbf{b}_1 + (\cos\theta \cos\psi d\psi)\mathbf{b}_1 \\ &\quad + (\cos\theta \sin\psi)\mathbf{b}_1' \end{aligned}$$

olup (3.9) eşitliği ile verilen Frenet formülleri yukarıdaki ifadede yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_q' = {} & (-\sin\theta \cos\psi d\theta)\mathbf{n} - (\cos\theta \sin\psi d\psi)\mathbf{n} + (\cos\theta \cos\psi) \\ & (-k_1\mathbf{t} + k_2\mathbf{b}_1) + (\cos\theta d\theta)\mathbf{b}_2 - (\sin\theta)(k_3\mathbf{b}_1) \\ & -(\sin\theta \sin\psi d\theta)\mathbf{b}_1 + (\cos\theta \cos\psi d\psi)\mathbf{b}_1 \\ & +(\cos\theta \sin\psi)(-k_2\mathbf{n} + k_3\mathbf{b}_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade $\mathbf{t}$ ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} < \mathbf{t}, \mathbf{n}_q' > &= (\cos\theta \cos\psi)(-k_1) < \mathbf{t}, \mathbf{t} > \\ &= -k_1 \cos\theta \cos\psi \\ k_{q1} &= -k_1 \cos\theta \cos\psi \end{aligned}$$

olur. Şimdi k_{q2} eğriliğini bulmak için (4.6) ifadesindeki $\mathbf{b}_{q1}$ in türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_{q1} = \; & (-\sin\phi\cos\psi\sin\theta - \sin\psi\cos\phi)\mathbf{n} \\ & +(\cos\psi\cos\phi - \sin\phi\sin\theta\sin\psi)\mathbf{b}_1 + (\cos\theta\sin\phi)\mathbf{b}_2\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\mathbf{b}'_{q1} = \; & (-\cos\phi d\phi\cos\psi\sin\theta)\mathbf{n} + (\sin\phi\sin\psi d\psi\sin\theta)\mathbf{n} \\ & -(\sin\phi\cos\psi\cos\theta d\theta)\mathbf{n} - (\sin\phi\cos\psi\sin\theta)\mathbf{n}' \\ & -(\cos\psi d\psi\cos\phi)\mathbf{n} + (\sin\psi\sin\phi d\phi)\mathbf{n} - (\sin\psi\cos\phi)\mathbf{n}' \\ & -(\sin\psi\cos\phi d\psi)\mathbf{b}_1 - (\sin\phi\cos\psi d\phi)\mathbf{b}_1 + (\cos\psi\cos\phi)\mathbf{b}'_1 \\ & -(\cos\phi\sin\theta\sin\psi d\phi)\mathbf{b}_1 - (\sin\phi\cos\theta d\theta\sin\psi)\mathbf{b}_1 \\ & -(\sin\phi\sin\theta\cos\psi d\psi)\mathbf{b}_1 - (\sin\theta\sin\psi\sin\phi)\mathbf{b}'_1 \\ & -(\sin\phi\sin\theta d\theta)\mathbf{b}_2 + (\cos\theta\cos\phi d\phi)\mathbf{b}_2 + (\sin\phi\cos\theta)\mathbf{b}'_2\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. (3.9) eşitliği ile verilen Frenet formülleri yerine yazılıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\mathbf{b}'_{q1} = \; & (-\cos\phi\cos\psi\sin\theta d\phi)\mathbf{n} + (\sin\psi\sin\theta\sin\phi d\psi)\mathbf{n} \\ & -(\cos\theta\sin\phi\cos\psi d\theta)\mathbf{n} + (\sin\theta\cos\psi\sin\phi)(k_1\mathbf{t} + k_2\mathbf{b}_1) \\ & +(\sin\phi\cos\psi d\psi)\mathbf{n} + (\sin\psi\cos\phi d\phi)\mathbf{n} - (\cos\psi\cos\phi d\psi)\mathbf{n} \\ & +(\sin\psi\sin\phi d\phi)\mathbf{n} - (\sin\phi\cos\phi)(-k_1\mathbf{t} + k_2\mathbf{b}_1) \\ & -(\sin\psi\cos\phi d\psi)\mathbf{b}_1 - (\sin\phi\cos\psi d\phi)\mathbf{b}_1 \\ & -(\cos\psi\cos\phi)\mathbf{b}_2(k_2\mathbf{n}+k_3\mathbf{b}_2) - (\sin\theta\cos\phi\sin\psi d\phi)\mathbf{b}_1 \\ & -(\cos\theta\sin\psi\sin\phi d\theta)\mathbf{b}_1 - (\sin\phi\sin\theta\cos\psi d\psi)\mathbf{b}_1 \\ & +(\sin\phi\sin\theta\sin\psi)(k_2\mathbf{n}+k_3\mathbf{b}_2) - (\sin\theta\sin\phi d\theta)\mathbf{b}_2 \\ & +(\cos\theta\cos\phi d\phi)\mathbf{b}_2 - (\cos\theta\sin\phi)(k_3\mathbf{b}_1)\end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki ifade **t** ile çarpılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} < \mathbf{t}, \mathbf{b}_{q1}^{'} > &= (\sin\theta\cos\psi\sin\phi)(k_1 < \mathbf{t}, \mathbf{t} >) \\ &\quad +(\sin\psi\cos\phi)(k_1 < \mathbf{t}, \mathbf{t} >) \\ &= k_1 \sin\theta\cos\psi\sin\phi + k_1\sin\psi\cos\phi \\ &= k_1(\sin\theta\cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\phi) \\ k_{q2} &= k_1(\sin\theta\cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\phi) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi ise k_{q3} eğriliğini bulmak için benzer şekilde $\mathbf{n}_q'$ ve $\mathbf{b}_{q1}$ vektörleri skaler çarpılıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned} < \mathbf{n}_q', \mathbf{b}_{q1} > = &\ (\sin\phi d\theta) + (\cos\theta\cos\phi d\psi) + (k_2\cos\theta\cos\phi) \\ &+(k_3\sin\theta\cos\psi\cos\phi) + (k_3\sin\psi\sin\phi) \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} k_{q3} = &\ (\sin\phi d\theta) + (\cos\theta\cos\phi d\psi) \\ &+k_2(\cos\theta\cos\phi) \\ &+k_3(\sin\psi\sin\phi - \sin\theta\cos\psi\cos\phi) \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Son olarak k_{q4} eğriliğini bulmak için $\mathbf{b}_{q1}'$ ve (4.6) ifadesindeki $\mathbf{b}_{q2}$ skaler çarpılıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned} < \mathbf{b}_{q1}', \mathbf{b}_{q2} > &= (\cos^2\phi d\phi) + (\sin\theta d\psi) + (k_2\sin\theta) \\ &\quad +(\sin^2\phi d\phi) + (k_3\cos\psi\cos\theta) \\ &= (\sin\theta d\psi) + d\phi + (k_2\sin\theta) + (k_3\cos\psi\cos\theta) \\ &= d\phi + (\sin\theta d\psi) + (k_2\sin\theta) + (k_3\cos\psi\cos\theta) \end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$k_{q4} = d\phi + (\sin\theta d\psi) + (k_2\sin\theta) + (k_3\cos\psi\cos\theta)$$

olur. Buradan da

$$\begin{aligned} k_{q1} &= -k_1\cos\theta\cos\psi \\ k_{q2} &= k_1(\sin\theta\cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\phi) \\ k_{q3} &= (\sin\phi d\theta) + (\cos\phi\cos\theta d\psi) + k_2(\cos\theta\cos\phi) \\ &\quad +k_3(\sin\psi\sin\phi - \sin\theta\cos\phi\cos\psi) \\ k_{q4} &= (d\phi) + (\sin\theta d\psi) + k_2(\sin\theta) + k_3(\cos\theta\cos\psi) \end{aligned}$$

yazılır.

Sonuç 4.2.1: Bu teoremde birinci quasi-binormal $\mathbf{b}_{q1}$ ve ikinci quasi-binormal $\mathbf{b}_{q2}$ nin kapsadığı uzaydaki ϕ açısı ve normal vektör $\mathbf{n}$ ve birinci quasi-binormal vektör $\mathbf{b}_{q1}$ in kapsadığı uzaydaki ψ açısı sıfır alınırsa (3.7) ile verilen 3-boyutlu uzayda quasi eğrilikleri ve Frenet eğrilikleri arasındaki bağıntılar elde edilir.

Örnek 4.2.1: $\mathbb{E}^4$ de verilen $\alpha(s) = (\cos\frac{2s}{\sqrt{5}}, \sin\frac{2s}{\sqrt{5}}, \sin\frac{s}{\sqrt{3}}, \cos\frac{s}{\sqrt{3}})$ eğrisinin (3.8) denklemi kullanılarak Frenet vektörleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\mathbf{t} &= (\tfrac{-2\sqrt{51}}{17}\sin\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, \tfrac{2\sqrt{51}}{17}\cos\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, \tfrac{\sqrt{85}}{17}\cos\tfrac{s}{\sqrt{3}}, \tfrac{-\sqrt{85}}{17}\sin\tfrac{s}{\sqrt{3}}) \\
\mathbf{n} &= (\tfrac{-12}{13}\cos\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, \tfrac{-12}{13}\sin\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, \tfrac{-5}{13}\sin\tfrac{s}{\sqrt{3}}, \tfrac{-5}{13}\cos\tfrac{s}{\sqrt{3}}) \\
\mathbf{b}_2 &= (\tfrac{-5}{13}\cos\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, \tfrac{-5}{13}\sin\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, \tfrac{12}{13}\sin\tfrac{s}{\sqrt{3}}, \tfrac{12}{13}\cos\tfrac{s}{\sqrt{3}}) \\
\mathbf{b}_1 &= (\tfrac{-\sqrt{85}}{17}\sin\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, \tfrac{\sqrt{85}}{17}\cos\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, \tfrac{-2\sqrt{51}}{17}\cos\tfrac{s}{\sqrt{3}}, \tfrac{2\sqrt{51}}{17}\sin\tfrac{s}{\sqrt{3}})
\end{aligned}$$

bulunur. (3.10) eşitlikleri kullanılarak Frenet eğrilikleri hesaplanırsa

$$k_1(s) = \tfrac{13}{\sqrt{255}}, \quad k_2(s) = \tfrac{-14\sqrt{17}}{221} \quad \text{ve} \quad k_3(s) = \tfrac{2\sqrt{17}}{13}$$

elde edilir. $\mathbf{k}_x = (1,0,0,0)$ ve $\mathbf{k}_y = (0,1,0,0)$ izdüşüm vektörleri olmak üzere (4.1) kullanılarak quasi çatı vektörleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\mathbf{t} &= (\tfrac{-2\sqrt{51}}{17}\sin\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, \tfrac{2\sqrt{51}}{17}\cos\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, \tfrac{\sqrt{85}}{17}\cos\tfrac{s}{\sqrt{3}}, \tfrac{-\sqrt{85}}{17}\sin\tfrac{s}{\sqrt{3}}) \\
\mathbf{n}_q &= (0, 0, \sin\tfrac{s}{\sqrt{3}}, \cos\tfrac{s}{\sqrt{3}}) \\
\mathbf{b}_{q2} &= (\cos\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, \sin\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, 0, 0) \\
\mathbf{b}_{q1} &= (\tfrac{\sqrt{85}}{17}\sin\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, \tfrac{-\sqrt{85}}{17}\cos\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, \tfrac{-2\sqrt{51}}{17}\cos\tfrac{s}{\sqrt{3}}, \tfrac{2\sqrt{51}}{17}\sin\tfrac{s}{\sqrt{3}})
\end{aligned}$$

olur. (4.2) yardımıyla quasi eğrilikleri hesaplanırsa

$$k_{q1} = \frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{51}}, \; k_{q2} = 0, \; k_{q3} = \frac{-2\sqrt{17}}{17} \text{ ve } k_{q4} = \frac{-2\sqrt{17}}{17}$$

bulunur.

Örnek 4.2.2: $\mathbf{k}_x = (1,0,0,0)$ ve $\mathbf{k}_y = (0,1,0,0)$ izdüşüm vektörleri olmak üzere

$$\alpha(s) = (\cos\frac{2s}{\sqrt{5}}, \sin\frac{2s}{\sqrt{5}}, \sin\frac{s}{\sqrt{3}}, \cos\frac{s}{\sqrt{3}})$$

eğrisinin quasi eğrilikleri (4.4) yardımıyla eğrinin türevleri cinsinden hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\alpha'(s) &= (-\frac{2}{\sqrt{5}}\sin\frac{2s}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\cos\frac{2s}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{s}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{s}{\sqrt{3}}) \\
\alpha''(s) &= (-\frac{4}{5}\cos\frac{2s}{\sqrt{5}}, \frac{-4}{5}\sin\frac{2s}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{3}\sin\frac{s}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{3}\cos\frac{s}{\sqrt{3}}) \\
\alpha'''(s) &= (\frac{8}{5\sqrt{5}}\sin\frac{2s}{\sqrt{5}}, \frac{-8}{5\sqrt{5}}\cos\frac{2s}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{3\sqrt{3}}\cos\frac{s}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}\sin\frac{s}{\sqrt{3}})
\end{aligned}$$

olur. Burada $||\alpha'(s)|| = \sqrt{\frac{17}{15}}$ olarak elde edilir.

$$\det[\alpha', \mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y, \alpha''] = \frac{-\sqrt{3}}{9} \quad \text{ve} \quad ||\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y|| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

olduğundan dolayı

$$k_{q1} = \frac{\det[\alpha', \mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y, \alpha'']}{\|\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y\| \ \|\alpha'\|^2} = \frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{51}}$$

olarak bulunur.

$$\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''' = (\tfrac{14\sqrt{5}}{225}\cos\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, \tfrac{-14\sqrt{5}}{225}\sin\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, 0, 0)$$

ve

$$||\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha'''|| = \tfrac{14\sqrt{5}}{225}$$

bulunursa

$$< \alpha'', \alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''' >= 0$$

olur. Buradan da $k_{q2} = 0$ şeklinde elde edilir. Üçüncü quasi eğriliği

$$\alpha'' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y \ = (0, 0, \tfrac{-1}{3}\cos\tfrac{s}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{3}\sin\tfrac{s}{\sqrt{3}})$$

olur. Buradan $k_{q3} = \frac{-2\sqrt{17}}{17}$ bulunur. Eğrinin dördüncü türevi

$$\alpha^{(iv)}(s) = (\tfrac{16}{25}\cos\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, \tfrac{16}{25}\sin\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{3}\sin\tfrac{s}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{3}\cos\tfrac{s}{\sqrt{3}})$$

şeklinde olup

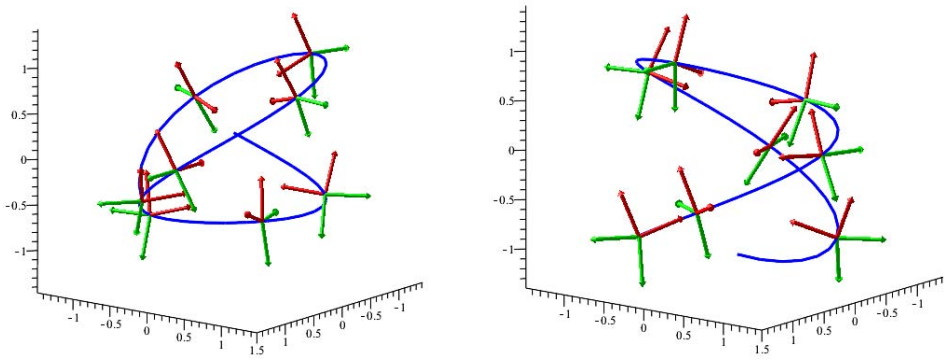
$$\alpha'' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha''' = (\tfrac{4}{45}\sin\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, \tfrac{4}{45}\cos\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, \tfrac{32}{25\sqrt{15}}\cos\tfrac{s}{\sqrt{3}}, \tfrac{32}{25\sqrt{15}}\sin\tfrac{s}{\sqrt{3}})$$

ve

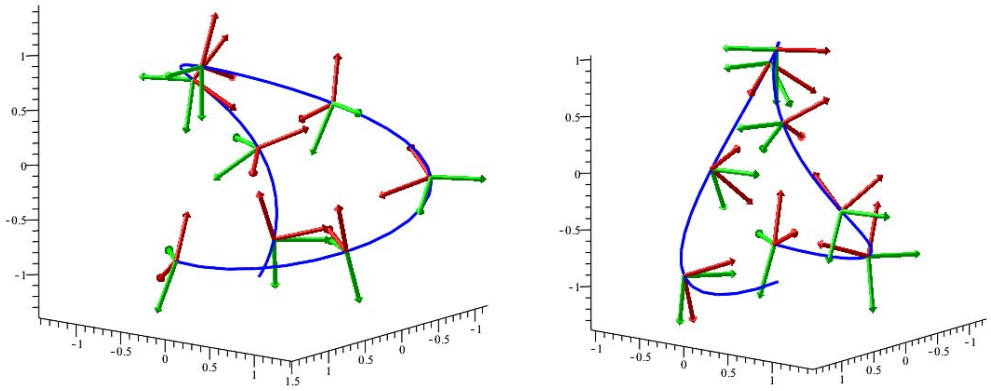
$$\alpha' \wedge (\alpha' \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y) \wedge \alpha^{(iv)} = (\tfrac{-8\sqrt{3}}{75}\sin s, \tfrac{-8\sqrt{3}}{75}\cos s, 0, 0)$$

olarak hesaplanır. $k_{q4} = \frac{-2\sqrt{17}}{17}$ bulunur.

α eğrisinin xyz ve xyt uzaylarındaki izdüşümleri için beş noktadaki normal ve quasi-normal vektörleri Şekil 4.4 de gösterilmiştir.



Şekil 4.4 **n** ve **b** Frenet vektörleri (kırmızı), $\mathbf{n}_q$ ve $\mathbf{b}_q$ quasi vektörleri (yeşil)



Şekil 4.5 **n** ve **b** Frenet vektörleri (kırmızı), $\mathbf{n}_q$ ve $\mathbf{b}_q$ quasi vektörleri (yeşil)

α eğrisinin xzt ve yzt uzaylarındaki izdüşümleri için beş noktadaki normal ve quasi-normal vektörleri Şekil 4.5 de gösterilmiştir.

Örnek 4.2.3: $\mathbb{E}^4$de verilen $\alpha(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos s, \sin s, \frac{1}{2}\cos 2s, \frac{1}{2}\sin 2s)$ eğrisinin (3.8) denklemi kullanılarak Frenet vektörleri hesaplanırsa

$$\mathbf{t} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sin s, \cos s, -\sin 2s, \cos 2s)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\sqrt{5}}{5}(-\cos s, -\sin s, -2\cos 2s, -2\sin 2s)$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}(-2\cos s, -2\sin s, 2\cos^2 s - 1, 2\cos s \sin s)$$

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin s, -\cos s, -2\cos s \sin s, 2\cos^2(s) - 1).$$

bulunur. (3.10) eşitlikleri kullanılarak Frenet eğrilikleri hesaplanırsa

$$k_1(s) = \frac{\sqrt{10}}{2}, \quad k_2(s) = \frac{-3\sqrt{10}}{10} \quad \text{ve} \quad k_3(s) = \frac{-2\sqrt{10}}{5}$$

elde edilir. $\mathbf{k}_x = (1,0,0,0)$ ve $\mathbf{k}_y = (0,1,0,0)$ izdüşüm vektörleri olmak üzere (4.1) kullanılarak quasi çatı vektörleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\mathbf{t} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sin s, \cos s, -\sin 2s, \cos 2s) \\
\mathbf{n}_q &= (0, 0, \sin - \cos 2s, -\sin 2s) \\
\mathbf{b}_{q2} &= (-\cos s, -\sin s, 0, 0) \\
\mathbf{b}_{q1} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin s, -\cos s, -2\cos s \sin s, 2\cos^2 s - 1)
\end{aligned}$$

olur. (4.2) yardımıyla quasi eğrilikleri hesaplanırsa

$$k_{q1} = \sqrt{2},\ k_{q2} = 0,\ k_{q3} = -\sqrt{2} \text{ ve } k_{q4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

bulunur.

Örnek 4.2.4: 4-boyutlu Öklid uzayında alınan

$$\alpha(s) = (s\sin s + \cos s, -s\cos s + \sin s, s\sin 2s + \tfrac{1}{2}\cos 2s, -s\cos 2s + \tfrac{1}{2}\sin 2s)$$

eğrisinin (3.8) denklemi kullanılarak Frenet vektörleri

$$\begin{aligned}
\mathbf{t} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\cos s, \sin s, 2\cos 2s, 2\sin 2s) \\
\mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{5+17s^2}}(\cos s - s\sin s, \sin s + s\cos s, 2\cos 2s - 4s\sin 2s, 2\sin 2s + 4s\sin 2s) \\
\mathbf{b}_2 &= \frac{1}{\sqrt{17}}(-4\sin s, 4\cos s, 2\sin s\cos s, 1 - 2\cos^2 s) \\
\mathbf{b}_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\cos s, -2\sin s, 2\cos^2 s - 1, 2\cos s \sin s)
\end{aligned}$$

bulunur. (3.10) eşitlikleri kullanılarak Frenet eğrilikleri sırasıyla

$$k_1(s) = \frac{-\sqrt{5}(-17s+5)}{5\sqrt{5+17s^2}}, \quad k_2(s) = \frac{-6\sqrt{5}}{5} \quad \text{ve} \quad k_3(s) = \frac{-2\sqrt{85}}{17}$$

elde edilir. $\mathbf{k}_x = (1,0,0,0)$ ve $\mathbf{k}_y = (0,1,0,0)$ izdüşüm vektörleri olmak üzere (4.1) kullanılarak quasi çatı vektörleri

$$\begin{aligned}
\mathbf{t} &= \frac{\sqrt{5}}{5}(\cos s, \sin s, 2\cos 2s, 2\sin 2s) \\
\mathbf{n}_q &= (0, 0, -\sin 2s, \cos 2s) \\
\mathbf{b}_{q2} &= \frac{1}{\sqrt{5+9s^2}}(-3s\sin s - 2\cos s, 3s\cos s - 2\sin s, \cos 2s, \sin 2s) \\
\mathbf{b}_{q1} &= \frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{5+9s^2}}(-6s\cos s + 5\sin s, -6s\sin s - 5\cos s, 3s(2\cos^2 s - 1), 6s\sin s\cos s)
\end{aligned}$$

olur. (4.2) yardımıyla quasi eğrilikleri sırasıyla

$$
\begin{aligned}
k_{q1} = & \quad \frac{4\sqrt{5}}{5} \\
k_{q2} = & \quad \frac{-1}{5\sqrt{5+9s^2}}(5-6s-12s\sin 2s+24s\cos^2 s\sin 2s-6s\cos 2s \\
& \quad +12s\cos 2s\cos^2 s-24s\cos s\sin s\cos 2s+12s\cos s\sin s\sin 2s) \\
k_{q3} = & \quad \frac{3s}{\sqrt{5}\sqrt{5+9s^2}}(2\cos 2s-4\cos 2s\cos^2 s+\sin 2s) \\
& \quad +\frac{1}{s\sqrt{5+9s^2}}(-2\sin 2s\cos^2 s-4\sin s\cos s\sin 2s+2\sin s\cos s\cos 2s)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
k_{q4} = & \quad \frac{\sqrt{5}}{5}(30s\cos 2s\cos^2 s-27s^3\cos 2s-54s^3\sin 2s-15s\cos 2s-15)s \\
& \quad +60s\cos^2 s\sin 2s-27s^3+30\sin s\cos s\sin 2s-45s^2 \\
& \quad -162s^4+30\cos 2s\cos^2 s+10-30s\sin 2s-60\cos s\sin s\cos 2s \\
& \quad +30\cos s\sin s\sin 2s-15\cos 2s+54s^3\cos 2s\cos^2 s+108s^3\sin 2s\cos^2 s \\
& \quad +54s^3\sin 2s\cos s\sin s-108s3\cos s\sin s\cos 2s)/(5+9s^2)^2
\end{aligned}
$$

bulunur.

5. ÖKLİDYEN 4-UZAYDA YÖNLÜ EĞRİ ÇİFTLERİ

Bu kısımda 4-boyutlu Öklidyen uzayda alınan bir uzay eğrisinin $\mathbf{n}_q$ quasi-normal vektöründen faydalanılarak yönlü Bertrand ve Mannheim eğri çiftleriyle ilgili teoremlere yer verilmiştir. Ayrıca bu eğri çiftlerinin quasi eğrilikleri arasındaki bağıntılar incelenmiştir.

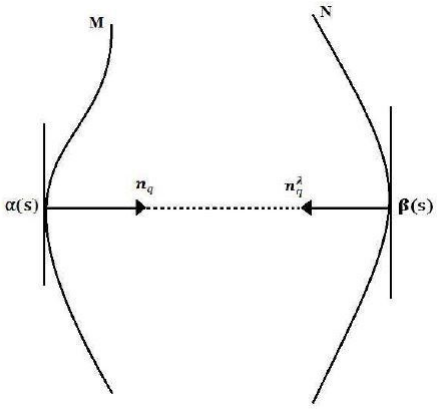
5.1. Öklidyen 4-Uzayda Yönlü Bertrand Eğrileri

Burada $\mathbb{E}^4$ de bir uzay eğrisi için quasi çatıya ait olan $\mathbf{n}_q$ quasi-normal vektörü yardımıyla yönlü Bertrand eğri ikilileri ifade edilerek yönlü Bertrand eğri ikililerinin quasi eğrilikleri için bağıntılar elde edilmiştir.

4-boyutlu Öklid uzayında verilen M ve N şeklindeki iki uzay eğrisi (I, α) ve (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. Bu eğrilerin quasi çatıları sırasıyla $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{b}_{q2}\}$ ve $\{\mathbf{t}^\lambda, \mathbf{n}_q^\lambda, \mathbf{b}_{q1}^\lambda, \mathbf{b}_{q2}^\lambda\}$ olmak üzere $\mathbf{n}_q$ ile $\mathbf{n}_q^\lambda$ quasi-normallerinin lineer bağımlı olması durumunda M ve N eğri ikilisi yönlü Bertrand eğri ikilisi olarak adlandırılır, farklı bir şekilde ifade edecek olursak Bertrand eğrisi quasi-normal vektörünü başka bir eğriyle paylaşan bir eğridir.

Teorem 5.1.1: $\mathbb{E}^4$ uzayında $||\alpha\prime(s)|| = 1$ olmak üzere verilen $\alpha(s)$ uzay eğrisi $\beta(s_1)$ eğrisi ile yönlü Bertrand eğri ikilisi olsun. Buna göre

a) $\alpha(s)$ ve $\beta(s_1)$ yönlü Bertrand eğri çifti arasındaki uzaklık sabittir.



Şekil 5.1 Bertrand eğri çifti

b) Üçüncü quasi eğriliği k_{q3} ün sıfıra eşit olması durumunda yönlü Bertrand eğri çiftinin **t** teğet vektörleri arasında yer alan açı sabittir.

İspat: Quasi çatıları $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{b}_{q2}\}$ ve $\{\mathbf{t}^\lambda, \mathbf{n}_q^\lambda, \mathbf{b}_{q1}^\lambda, \mathbf{b}_{q2}^\lambda\}$ şeklinde verilen $\alpha(s)$, $\beta(s_1)$ Bertrand eğri çifti için $\beta(s_1) = \alpha(s) + \lambda\mathbf{n}_q(s)$ olarak yazılır. Şekil 5.1 de gösterilmiştir.

a) s_1, β eğrisinin yay parametresi olmak üzere s-yay parametresine göre türev alınırsa

$$\begin{aligned}
\beta(s_1) &= \alpha(s) + \lambda\mathbf{n}_q(s) \\
\beta\prime(s_1)\tfrac{ds_1}{ds} &= \alpha'(s) + \lambda'\mathbf{n}_q(s) + \lambda\mathbf{n}_q'(s) \\
t^\lambda\tfrac{ds_1}{ds} &= \mathbf{t}(s) + \lambda'\mathbf{n}_q(s) + \lambda\mathbf{n}_q'(s)
\end{aligned}$$

(4.3) eşitliğinden $\mathbf{n}_q'(s)$ değeri yukarıdaki ifadede yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
t^\lambda\tfrac{ds_1}{ds} &= \mathbf{t}(s) + \lambda'\mathbf{n}_q + \lambda(-k_{q1}\mathbf{t}(s) + k_{q3}\mathbf{b}_{q1}(s)) \\
&= \mathbf{t}(1 - \lambda k_{q1}) + \lambda'\mathbf{n}_q(s) + \lambda k_{q3}\mathbf{b}_{q1}(s)
\end{aligned}$$

olur. Denklemin her iki tarafı $\mathbf{n}_q$ ile skaler olarak çarpılırsa

$$< \mathbf{t}^\lambda, \mathbf{n}_q > \tfrac{ds_1}{ds} = < \mathbf{t}, \mathbf{n}_q > (1 - \lambda k_{q1}) + \lambda' < \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q > + \lambda k_{q3} < \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{n}_q >$$

bulunur ve $\mathbf{n}_q$ ile $\mathbf{n}_q^\lambda$ vektörleri lineer bağımlı olduğundan

$$0 = \lambda'$$

elde edilir. Buradan λ nın sabit olduğu kolaylıkla söylenir. O halde bu iki eğri arasındaki mesafede

$$||\beta(s) - \alpha(s)|| = \lambda$$

sabit olur.

b) $\lambda' = 0$ olmak üzere bu değer $\mathbf{t}^\lambda\dfrac{ds_1}{ds} = \mathbf{t}(1-\lambda k_{q1}) + \lambda'\mathbf{n}_q(s) + \lambda k_{q3}\mathbf{b}_{q1}(s)$ eşitliğinde yerine yazılıp

$$\mathbf{t}^\lambda\tfrac{ds_1}{ds} = \mathbf{t}(1 - \lambda k_{q1}) + \lambda k_{q3}\mathbf{b}_{q1}$$

denkleminde her iki tarafının normu alınırsa

$$\begin{aligned}
||\mathbf{t}^\lambda\frac{ds_1}{ds}|| &= ||\mathbf{t}(1 - \lambda k_{q1}) + \lambda k_{q3}\mathbf{b}_{q1}|| \\
\sqrt{< \mathbf{t}^\lambda, \mathbf{t}^\lambda > (\frac{ds_1}{ds})^2} &= \sqrt{(1 - \lambda k_{q1})^2 < \mathbf{t}, \mathbf{t} > + \lambda^2 k_{q3}^2 < \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{b}_{q1} >} \\
\frac{ds_1}{ds} &= \pm\sqrt{(1 - \lambda k_{q1})^2 + \lambda^2 k_{q3}^2}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu denklem

$$\mathbf{t}^{\lambda}\frac{ds_1}{ds} = (1-\lambda k_{q1})\mathbf{t}+\lambda k_{q3}\mathbf{b}_{q1}$$

ifadesinde yerine yazılırsa

$$\mathbf{t}^{\lambda}(\pm\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2}) = (1-\lambda k_{q1})\mathbf{t}+\lambda k_{q3}\mathbf{b}_{q1}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{t}^{\lambda} = \pm\frac{(1-\lambda k_{q1})\mathbf{t}+\lambda k_{q3}\mathbf{b}_{q1}}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2}}$$

elde edilir. Bunun yanı sıra $\mathbf{t}$ ve $\mathbf{t}^{\lambda}$ teğet vektörleri arasındaki açı φ alınırsa

$$<\mathbf{t},\mathbf{t}^{\lambda}> = \cos\varphi$$

olur. $\mathbf{t}^{\lambda}$ ifadesi aşağıdaki gibi olmak üzere

$$\mathbf{t}^{\lambda} = \pm\frac{(1-\lambda k_{q1})\mathbf{t}+\lambda k_{q3}\mathbf{b}_{q1}}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2}}$$

eşitliği $\mathbf{t}$ teğet vektörü ile iç çarpılırsa

$$<\mathbf{t},\mathbf{t}^{\lambda}> = \pm\frac{(1-\lambda k_{q1})<\mathbf{t},\mathbf{t}>+\lambda k_{q3}<\mathbf{t},\mathbf{b}_{q1}>}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2}}$$

$$\cos\varphi = \pm\frac{(1-\lambda k_{q1})}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2}}$$

bulunur. Burada $k_{q3}=0$ olduğunda $\cos\varphi=\pm 1$ olduğu açıktır. Bu ise φ açısının sıfır olması anlamına gelir. Buna göre teğet vektörleri arasında bulunan açı sabittir denir.

Teorem 5.1.2: $||\alpha'(s)||=1$ koşulunu sağlayan $\alpha(s)$ uzay eğrisi ile s_1 yay parametresi ile verilen $\beta(s)$ eğrisi, $\alpha(s)$ eğrisinin yönlü Bertrand eğri ikilisi ve $\triangle=(1-\lambda k_{q1})$ olmak üzere bu eğrilerin quasi çatıları arasındaki bağıntı

$$\begin{bmatrix}\mathbf{t}^{\lambda}\\ \mathbf{n}_q^{\lambda}\\ \mathbf{b}_{q1}^{\lambda}\\ \mathbf{b}_{q2}^{\lambda}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\triangle}{e} & 0 & \frac{\lambda k_{q3}}{e} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \frac{(\lambda k_{q3}c-\triangle a)\lambda k_{q3}}{e\,f} & 0 & \frac{(\triangle a-\lambda k_{q3}c)\triangle}{e\,f} & \frac{\lambda^2 k_{q3}^2 d-\triangle^2 b}{e\,f}\\ -\frac{\lambda k_{q3}d}{f} & 0 & \frac{\triangle b}{f} & \frac{\triangle a-\lambda k_{q3}c}{f}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{t}\\ \mathbf{n}_q\\ \mathbf{b}_{q1}\\ \mathbf{b}_{q2}\end{bmatrix}$$

olarak yazılır. Burada

$$
\begin{aligned}
a = \; & \frac{-\lambda k_{q3}(k_{q2}^2+k_{q1}^2+k_{q3}^2+k_{q4}^2)-\lambda(2k'_{q1}k_{q2}+k_{q1}k'_{q2}-k''_{q3})+k_{q1}k_{q3}+k'_{q2}+}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2}} \\
& + \frac{\lambda^3 k_{q3}(-(k'_{q1})^2-k_{q1}k''_{q2}+k_{q2}k'_{q3}-k_{q3}k''_{q3}-2(k'_{q3})^2)+\lambda^2 k'_{q3}(k''_{q1}-k_{q2}k_{q3})}{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^{3/2}} \\
& + \frac{3\lambda^4 k'_{q1}k_{q3}^2k'_{q3}(\lambda k_{q1}-1)-6\lambda^5 k_{q1}^2(k'_{q1})^2k_{q3}+3\lambda^3(k'_{q1})^2}{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^{7/2}}, \\
b = \; & \frac{\lambda k_{q4}(k_{q2}+2k'_{q3}+\lambda(-k_{q1}k_{q2}+k_{q3}k'_{q4})}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2}} - \frac{\lambda^3 k_{q3}^2k'_{q3}k_{q4}}{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^{3/2}}, \\
c = \; & \frac{-\lambda k_{q2}(2k'_{q3}-k_{q2}-k_{q1})-\lambda(k''_{q1}k'_{q2}k_{q3}+k_{q1}^2)}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2}} + \frac{\lambda^2 k'_{q1}k_{q2}k_{q3}(2\lambda k'_{q1}-2)}{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^{3/2}} \\
& - \frac{\lambda^2 k_{q1}k''_{q1}(2-\lambda k_{q1})-\lambda^2(k'_{q1})^2(5-3\lambda k'_{q1})+\lambda k''_{q1}}{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^{3/2}} \\
& + \frac{(\lambda^2 k'_{q3})(k'_{q3}+\lambda k'_{q1}k_{q3}+\lambda k_{q1}+\lambda k_{q2}k_{q3}^2)+\lambda^2 k_{q3}k''_{q3}(1+\lambda k_{q1})}{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^{3/2}} \\
& + \frac{\lambda^2(k'_{q1})^2(-6-6\lambda k_{q1}+3\lambda k_{q1}^2-3\lambda^3 k_{q1}^3)+\lambda^3 k'_{q1}k_{q3}^3k'_{q3}(6\lambda k_{q1}-3-3\lambda^2 k_{q1}^2)}{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^{7/2}} \\
d = \; & \frac{\lambda k_{q2}(k_{q4}-k_{q1})+\lambda(2k'_{q3}k_{q4}+k_{q3}k'_{q4})}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2}} - \frac{\lambda^3 k_{q3}^2k'_{q3}k_{q4}}{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^{3/2}} \\
e = \; & \sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2} \\
f = \; & \sqrt{[(1-\lambda k_{q1})a-\lambda k_{q3}c]^2+(1-\lambda k_{q1})^2b^2+\lambda^2 k_{q3}^2d^2}
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

İspat: Birim hızlı uzay eğrisi $\alpha(s)$ ile $\beta(s_1)$ eğrisi yönlü Bertrand eğri ikilisi olsun. Bu eğrilerin quasi çatıları arasındaki bağıntı için

$$
\mathbf{t}^{\lambda} = \pm\frac{(1-\lambda k_{q1})\mathbf{t}+\lambda k_{q3}\mathbf{b}_{q1}}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2}} \tag{5.1}
$$

denklemi $\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y$ izdüşüm vektörleri ile vektörel olarak çarpılırsa

$$
\mathbf{t}^{\lambda}\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y = \pm\frac{(1-\lambda k_{q1})(\mathbf{t}^{\lambda}\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y)+\lambda k_{q3}(\mathbf{b}_{q1}\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y)}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2}}
$$

bulunur. Ayrıca (4.1) den

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y = ||\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y||\mathbf{n}_q$$

yazılır. $\mathbf{k}_x = (1,0,0,0)$ ve $\mathbf{k}_y = (0,1,0,0)$ olup (3.5) başlığı altındaki özelliklerden sekizincisi kullanılırsa

$$\begin{aligned} ||\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y|| &= \sqrt{< \mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y, \mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y >} \\ &= \sqrt{\begin{vmatrix} < \mathbf{t}, \mathbf{t} > & < \mathbf{t}, \mathbf{k}_x > & < \mathbf{t}, \mathbf{k}_y > \\ < \mathbf{k}_x, \mathbf{t} > & < \mathbf{k}_x, \mathbf{k}_x > & < \mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y > \\ < \mathbf{k}_y, \mathbf{t} > & < \mathbf{k}_y, \mathbf{k}_x > & < \mathbf{k}_y, \mathbf{k}_y > \end{vmatrix}} \\ &= \sqrt{1 - (< \mathbf{t}, \mathbf{k}_x >^2 + < \mathbf{t}, \mathbf{k}_y >^2)} \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadede $< \mathbf{t}, \mathbf{k}_x >= \mu$ ve $< \mathbf{t}, \mathbf{k}_y >= \gamma$ olarak adlandırılırsa

$$||\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y|| = \sqrt{1 - (\mu^2 + \gamma^2)}$$

yazılır. Buna göre, μ, γ değerleri sırasıyla $\alpha(s)$ uzay eğrisinin $\mathbf{t}$ teğetinin birinci ve ikinci bileşenleridir. Benzer yöntemle aşağıdaki hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{q1} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y &= (\mathbf{b}_{q2} \wedge \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q) \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y \\ &= -\begin{vmatrix} < \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{k}_x > & < \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{k}_y > & \mathbf{b}_{q2} \\ < \mathbf{t}, \mathbf{k}_x > & < \mathbf{t}, \mathbf{k}_y > & \mathbf{t} \\ < \mathbf{n}_q, \mathbf{k}_x > & < \mathbf{n}_q, \mathbf{k}_y > & \mathbf{n}_q \end{vmatrix} \\ &= -[(< \mathbf{t}, \mathbf{k}_x >< \mathbf{n}_q, \mathbf{k}_y > - < \mathbf{t}, \mathbf{k}_y >< \mathbf{n}_q, \mathbf{k}_x >)\mathbf{b}_{q2} \\ &\quad +(< \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{k}_x >< \mathbf{n}_q, \mathbf{k}_y > - < \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{k}_y >< \mathbf{n}_q, \mathbf{k}_x >)\mathbf{t} \\ &\quad +(< \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{k}_x >< \mathbf{t}, \mathbf{k}_y > - < \mathbf{t}, \mathbf{k}_x >< \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{k}_y >)\mathbf{n}_q] \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadede

$$\begin{aligned} (< \mathbf{t}, \mathbf{k}_x >< \mathbf{n}_q, \mathbf{k}_y > - < \mathbf{t}, \mathbf{k}_y >< \mathbf{n}_q, \mathbf{k}_x >) &= \rho \\ (< \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{k}_x >< \mathbf{n}_q, \mathbf{k}_y > - < \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{k}_y >< \mathbf{n}_q, \mathbf{k}_x >) &= \eta \\ (< \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{k}_x >< \mathbf{t}, \mathbf{k}_y > - < \mathbf{t}, \mathbf{k}_x >< \mathbf{b}_{q2}, \mathbf{k}_y >) &= \varsigma \end{aligned}$$

şeklinde adlandırılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{q1} \wedge \mathbf{k}_x \wedge \mathbf{k}_y &= \rho\mathbf{b}_{q2} + \eta\mathbf{t} + \varsigma\mathbf{n}_q \\ &= \varsigma\mathbf{n}_q \end{aligned}$$

olur. $\mathbf{t}\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y = ||\mathbf{t}\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y||\mathbf{n}_q$, $||\mathbf{t}\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y|| = \sqrt{1-(\mu^2+\gamma^2)}$ ve $\mathbf{b}_{q1}\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y = \varsigma\mathbf{n}_q$ denklemleri

$$\mathbf{t}^\lambda\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y = \pm\frac{(1-\lambda k_{q1})(\mathbf{t}\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y)+\lambda k_{q3}(\mathbf{b}_{q1}\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y)}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2k_{q3}^2}}$$

ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\mathbf{t}^\lambda\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y &= \pm\frac{\sqrt{1-(\mu^2+\gamma^2)}(1-\lambda k_{q1})\mathbf{n}_q+\lambda k_{q3}\varsigma\mathbf{n}_q}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2k_{q3}^2}}\\ &= \pm\frac{(\sqrt{1-(\mu^2+\gamma^2)}(1-\lambda k_{q1})+\lambda k_{q3}\varsigma)\mathbf{n}_q}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2k_{q3}^2}}\end{aligned}$$

elde edilir. $\mathbf{n}_q^\lambda$ yı bulmak için $||\mathbf{t}^\lambda\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y||$ ifadesi hesaplanarak

$$\begin{aligned}||\mathbf{t}^\lambda\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y|| &= \sqrt{\frac{(\sqrt{1-(\mu^2+\gamma^2)}(1-\lambda k_{q1})+\lambda k_{q3}\varsigma)^2<\mathbf{n}_q,\mathbf{n}_q>}{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2k_{q3}^2}}\\ &= \frac{\sqrt{1-(\mu^2+\gamma^2)}(1-\lambda k_{q1})+\lambda k_{q3}\varsigma}{\sqrt{(1-\lambda kq_1)^2+\lambda^2k_{q3}^2}}\end{aligned}$$

bulunur. $\mathbf{n}_q^\lambda=\dfrac{\mathbf{t}^\lambda\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y}{||\mathbf{t}^\lambda\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y||}$ olduğundan $\mathbf{t}^\lambda\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y = ||\mathbf{t}^\lambda\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y||\mathbf{n}_q^\lambda$ dır. Bu ifade

$$\mathbf{t}^\lambda\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y = \pm\frac{(\sqrt{1-(\mu^2+\gamma^2)}(1-\lambda k_{q1})+\lambda k_{q3}\varsigma)\mathbf{n}_q^\lambda}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2k_{q3}^2}}$$

olup $||\mathbf{t}^\lambda\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y||$değeri bu denklemde yerine yazılırsa

$$\frac{(\sqrt{1-(\mu^2+\gamma^2)}(1-\lambda k_{q1})+\lambda k_{q3}\varsigma)}{\sqrt{(1-\lambda kq_1)^2+\lambda^2k_{q3}^2}}\mathbf{n}_q^\lambda = \frac{(\sqrt{1-(\mu^2+\gamma^2)}(1-\lambda k_{q1})+\lambda k_{q3}\varsigma)}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2k_{q3}^2}}\mathbf{n}_q$$

bulunur. Bu durumda

$$\mathbf{n}_q^\lambda = \frac{\mathbf{t}^\lambda\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y}{||\mathbf{t}^\lambda\wedge\mathbf{k}_x\wedge\mathbf{k}_y||} = \pm\mathbf{n}_q \tag{5.2}$$

olur. Böylece bu çalışmanın en önemli sonuçlarından olan yönlü Bertrand eğri çiftlerinin quasi-normal vektörleri her zaman lineer bağımlıdır sonucuna ulaşılır. Şimdi $\mathbf{b}_{q1}^\lambda$ birinci quasi-binormal vektörünü hesaplayalım. $\mathbf{b}_{q1}^\lambda = \mathbf{b}_{q2}^\lambda\wedge\mathbf{t}^\lambda\wedge\mathbf{n}_q^\lambda$ olduğundan önce $\mathbf{b}_{q2}^\lambda$ ikinci quasi-binormal vektörü hesaplanırsa

$$\mathbf{b}_{q2} = \frac{\alpha'\wedge\mathbf{n}_q\wedge\alpha'''}{||\alpha'\wedge\mathbf{n}_q\wedge\alpha'''||} \quad \text{ve} \quad \alpha' = \mathbf{t}$$

olduğundan

$$\mathbf{b}_{q2} = \frac{\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q \wedge \mathbf{t}''}{||\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q \wedge \mathbf{t}''||}$$

yazılabilir.

O halde $\mathbf{b}_{q2}^{\lambda}$

$$\mathbf{b}_{q2}^{\lambda} = \frac{\mathbf{t}^{\lambda} \wedge \mathbf{n}_q^{\lambda} \wedge (\mathbf{t}^{\lambda})''}{||\mathbf{t}^{\lambda} \wedge \mathbf{n}_q^{\lambda} \wedge (\mathbf{t}^{\lambda})''||}$$

şeklindedir.

Burada

$$\mathbf{t}^{\lambda} = \pm\frac{(1-\lambda k_{q1})\mathbf{t} + \lambda k_{q3}\mathbf{b}_{q1}}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2 + \lambda^2 k_{q3}^2}}$$

olduğundan $(\mathbf{t}^{\lambda})'$ değeri hesaplanırsa

$$\begin{aligned}(\mathbf{t}^{\lambda})' &= \frac{(-\lambda k'_{q1})\mathbf{t} + (1-\lambda k_{q1})\mathbf{t}' + \lambda k'_{q3}\mathbf{b}_{q1} + \lambda k_{q3}\mathbf{b}'_{q1}}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2 + \lambda^2 k_{q3}^2}} \\ &\quad - \frac{((1-\lambda k_{q1})(-\lambda k'_{q1}) + \lambda^2 k_{q3}k'_{q3})((1-\lambda k_{q1})\mathbf{t} + \lambda k_{q3}\mathbf{b}_{q1})}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2 + \lambda^2 k_{q3}^2}[(1-\lambda k_{q1})^2 + \lambda^2 k_{q3}^2]}\end{aligned}$$

olur.

Burada (4.3) den $\mathbf{t}'$ ve $\mathbf{b}'_{q1}$ değerleri yukarıdaki ifadede yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}(\mathbf{t}^{\lambda})' &= \frac{(-\lambda k'_{q1} - \lambda k_{q3}k_{q2})\mathbf{t} + (k_{q1} - \lambda k_{q1}^2 - \lambda k_{q3}^2)\mathbf{n}_q}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2 + \lambda^2 k_{q3}^2}} \\ &\quad + \frac{(k_{q2} - \lambda k_{q1}k_{q2} + \lambda k'_{q3})\mathbf{b}_{q1} + (\lambda k_{q3}k_{q4})\mathbf{b}_{q2}}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2 + \lambda^2 k_{q3}^2}} \\ &\quad - \frac{(-\lambda k'_{q1} + 2\lambda^2 k_{q1}k'_{q1} - \lambda^3 k_{q1}^2 k'_{q1} + \lambda^2 k_{q3}k'_{q3} - \lambda^3 k_{q1}k_{q3}k'_{q3})\mathbf{t}}{[(1-\lambda k_{q1})^2 + \lambda^2 k_{q3}^2]^{3/2}} \\ &\quad + \frac{(k_{q1} - \lambda k_{q1}^2 - \lambda k_{q3}^2)\mathbf{n}_q}{[(1-\lambda k_{q1})^2 + \lambda^2 k_{q3}^2]^{3/2}} \\ &\quad + \frac{(-\lambda^2 k'_{q1}k_{q3} + \lambda^3 k_{q1}k'_{q1}k_{q3} + \lambda^3 k_{q3}^2 k'_{q3})\mathbf{b}_{q1}}{[(1-\lambda k_{q1})^2 + \lambda^2 k_{q3}^2]^{3/2}}\end{aligned} \tag{5.3}$$

bulunur.

Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{t}^{\lambda})'' = \; & [\frac{-\lambda k''_{q1}-\lambda k'_{q2}k_{q3}-2\lambda k_{q2}k'_{q3}-\lambda k'^{2}_{q1}+\lambda k'^{2}_{q2}+\lambda k_{q1}k^{2}_{q2}}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^{2}+\lambda^{2}k^{2}_{q3}}} \\
& -\frac{\lambda^{2}(k'_{q1})^{2}-2\lambda^{2}k'_{q1}k_{q2}k_{q3}+3\lambda^{3}k_{q1}(k'_{q1})^{2}+2\lambda^{3}k_{q1}k'_{q1}k_{q2}k_{q3}}{[(1-\lambda k_{q1})^{2}+\lambda^{2}k^{2}_{q3}]^{3/2}} \\
& +\frac{\lambda^{2}k''_{q1}-2\lambda^{2}(k'_{q1})^{2}-2\lambda^{2}k_{q1}k''_{q1}+\lambda^{3}k^{2}_{q1}k''_{q1}+\lambda^{2}(k'_{q3})^{2}}{[(1-\lambda k_{q1})^{2}+\lambda^{2}k^{2}_{q3}]^{3/2}} \\
& +\frac{\lambda^{2}k_{q3}k''_{q3}+\lambda^{3}k'_{q1}k_{q3}k'_{q3}+\lambda^{3}k_{q1}k'_{q3}+\lambda^{3}k_{q1}k_{q3}k''_{q3}+\lambda^{3}k_{q2}k^{2}_{q3}k'_{q3}}{[(1-\lambda k_{q1})^{2}+\lambda^{2}k^{2}_{q3}]^{3/2}} \\
& -\frac{6\lambda^{2}(k'_{q1})^{2}-6\lambda^{3}k_{q1}(k'_{q1})^{2}+3\lambda^{4}(k'_{q1})^{2}k^{2}_{q1}-3\lambda^{3}k'_{q1}k_{q3}k'_{q3}}{[(1-\lambda k_{q1})^{2}+\lambda^{2}k^{2}_{q3}]^{7/2}} \\
& +\frac{6\lambda^{4}k_{q1}k'_{q1}k_{q3}k'_{q3}-3\lambda^{5}k^{3}_{q1}(k'_{q1})^{2}-3\lambda^{5}k^{2}_{q1}k'_{q1}k_{q3}k'_{q3}}{[(1-\lambda k_{q1})^{2}+\lambda^{2}k^{2}_{q3}]^{7/2}}]\mathbf{t} \\
& +[\frac{-3\lambda k_{q1}k'_{q1}-3\lambda k_{q3}k'_{q3}}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^{2}+\lambda^{2}k^{2}_{q3}}}+\frac{\lambda^{2}k^{2}_{q1}k'_{q1}-\lambda^{2}k^{2}_{q1}k'_{q1}+\lambda^{3}k^{3}_{q3}}{[(1-\lambda k_{q1})^{2}+\lambda^{2}k^{2}_{q3}]^{3/2}} \\
& +\frac{\lambda^{3}k^{2}_{q1}k'_{q3}k_{q3}-\lambda^{2}k_{q1}k_{3}k'_{q3}}{[(1-\lambda k_{q1})^{2}+\lambda^{2}k^{2}_{q3}]^{3/2}}]\mathbf{n}_{q} \\
& +[\frac{k_{q3}(k_{q1}-\lambda k^{2}_{q2}-\lambda k^{2}_{q1}-\lambda k^{2}_{q3}-\lambda k^{2}_{q4})+\lambda(k''_{q3}-2k'_{q1}k_{q2}-k_{q1}k'_{q2})+k'_{q2}}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^{2}+\lambda^{2}k^{2}_{q3}}} \\
& +\frac{\lambda^{2}k''_{q1}k'_{q3}-\lambda^{3}k^{2}_{q1}k'_{q1}k_{q2}-\lambda^{3}(k'_{q1})^{2}k_{q3}-\lambda^{3}k_{q1}k''_{q1}k_{q3}-\lambda^{3}k^{2}_{q3}k''_{q3}}{[(1-\lambda k_{q1})^{2}+\lambda^{2}k^{2}_{q3}]^{3/2}} \\
& +\frac{\lambda^{3}k^{2}_{q1}k'_{q1}k_{q2}-\lambda^{2}k_{q2}k_{3}k'_{q3}+\lambda^{3}k_{q1}k_{q2}k_{q3}k'_{q3}}{[(1-\lambda k_{q1})^{2}+\lambda^{2}k^{2}_{q3}]^{3/2}} \\
& +\frac{3\lambda^{3}(k'_{q1})^{2}(1-2\lambda k_{q1}k_{q3})+3\lambda^{4}k'_{q1}(\lambda k^{2}_{q1}k_{3}-k^{2}_{q3}k'_{q3}+\lambda k_{q1}k^{2}_{q3}k'_{q3})}{[(1-\lambda k_{q1})^{2}+\lambda^{2}k^{2}_{q3}]^{7/2}}]\mathbf{b}_{q1} \\
& +[\frac{\lambda k_{q2}k_{q4}-\lambda k_{q1}k_{q2}+2\lambda k'_{q3}k_{q4}+\lambda k_{q3}k'_{q4}}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^{2}+\lambda^{2}k^{2}_{q3}}}-\frac{\lambda^{3}k^{2}_{q3}k'_{q3}k_{q4}}{[(1-\lambda k_{q1})^{2}+\lambda^{2}k^{2}_{q3}]^{3/2}}]\mathbf{b}_{q2}
\end{aligned}
$$

şeklinde hesaplanır.

Bulunan $\mathbf{t}^\lambda$, $\mathbf{n}_q^\lambda$ ve $(\mathbf{t}^\lambda)''$ değerleriyle $g = \mathbf{t}^\lambda \wedge \mathbf{n}_q^\lambda \wedge (\mathbf{t}^\lambda)''$ vektörel çarpımı hesaplanırsa

$$
\begin{aligned}
g = \; & (1-\lambda k_{q1})\Bigg[[\frac{k_{q1}k_{q3}+\lambda(k''_{q3}-2k'_{q1}k_{q2}-k_{q3}(k_{q2}^2+k_{q1}^2+k_{q3}^2+k_{q4}^2)-k_{q1}k'_{q2})+k'_{q2}}{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2} \\
& +\frac{\lambda^2 k'_{q3}(k''_{q1}-k_{q2}k_{q3})+\lambda^3 k_{q3}(k_{q1}k_{q2}k'_{q3}-(k'_{q1})^2-k_{q1}k''_{q1}-2(k'_{q3})^2-k_{q3}k''_{q3})}{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^2} \\
& +\frac{3\lambda^3(k'_{q1})^2+3\lambda^5 k_{q1}k'_{q1}k_{q3}(k_{q1}+k_{q3}k'_{q3})-3\lambda^4 k'_{q1}k_{q3}(k_{q1}(k'_{q1})^2+3\lambda^4 k_{q3}k'_{q3})}{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^4}]\mathbf{t}\wedge\mathbf{n}_q\wedge\mathbf{b}_{q1} \\
& +[\frac{\lambda(k_{q2}k_{q4}-k_{q1}k_{q2}+2k'_{q3}k_{q4}+k_{q3}k'_{q4})}{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2}+\frac{\lambda^3 k_{q3}^2 k'_{q3}k_{q4}}{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^2}]\Bigg]\,\mathbf{t}\wedge\mathbf{n}_q\wedge\mathbf{b}_{q2} \\
& +(\lambda k_{q3})[\frac{\lambda k_{q2}(k_{q2}-k'_{q3}+k_{q1}-k'_{q3})-\lambda k''_{q1}-\lambda k'_{q2}k_{q3}-\lambda k_{q1}^2}{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2} \\
& +\frac{\lambda^2 k_{q3}(2\lambda k_{q1}k'_{q1}k_{q2}+k_{q3}+k''_{q3}+\lambda k'_{q1}k'_{q3}+\lambda k_{q1}k''_{q3}+\lambda k_{q2}k_{q3}k'_{q3})-\lambda^2(k'_{q1})^2+\lambda k''_{q1}}{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^2} \\
& +\frac{\lambda^3 k_{q1}(k_{q1}k''_{q1}+k'_{q3})+\lambda^3(k'_{q1})^3-2\lambda^2 k'_{q1}k_{q2}k_{q3}-2\lambda^2(k'_{q1})^2-2\lambda^2 k_{q1}k''_{q1}}{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^2} \\
& +\frac{6\lambda^2 k'_{q1}(\lambda k_{q1}(\lambda k_{q3}k'_{q3}-k'_{q1})-k'_{q1})+3\lambda^3 k'_{q1}(\lambda k'_{q1}(k_{q1}^2-\lambda k_{q1}^3)-k_{q3}k'_{q3}(1-\lambda^2 k_{q1}^2))}{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^4}]\mathbf{b}_{q1}\wedge\mathbf{n}_q\wedge\mathbf{t} \\
& +\lambda k_{q3}(\frac{\lambda k_{q2}(k_{q4}-k_{q1})+\lambda(k_{q3}k'_{q4}+2k'_{q3}k_{q4})}{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2}-\frac{\lambda^3 k_{q3}^2 k'_{q3}k_{q4}}{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^2})\mathbf{b}_{q1}\wedge\mathbf{n}_q\wedge\mathbf{b}_{q2}
\end{aligned}
$$

elde ettiğimiz bu ifade de $\mathbf{t}=\mathbf{e}_1$, $\mathbf{n}_q=\mathbf{e}_2, \mathbf{b}_{q1}=\mathbf{e}_3$ ve $\mathbf{b}_{q2}=\mathbf{e}_4$ olmak üzere Tanım 3.5.2 deki eşitlikler kullanılarak

$$
\begin{aligned}
g = \; & (1-\lambda k_{q1})[\frac{k_{q1}k_{q3}+\lambda(k''_{q3}-2k'_{q1}k_{q2}-k_{q3}(k_{q2}^2+k_{q1}^2+k_{q3}^2+k_{q4}^2)-k_{q1}k'_{q2})+k'_{q2}}{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2} \\
& +\frac{\lambda^2 k'_{q3}(k''_{q1}-k_{q2}k_{q3})+\lambda^3 k_{q3}(k_{q1}k_{q2}k'_{q3}-(k'_{q1})^2-k_{q1}k''_{q1}-2(k'_{q3})^2-k_{q3}k''_{q3})}{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^2} \\
& +\frac{3\lambda^3(k'_{q1})^2-3\lambda^4 k'_{q1}k_{q3}(2k_{q1}k'_{q1}k''_{q1}+3\lambda^4 k_{q3}k'_{q3})+3\lambda^5 k_{q1}k'_{q1}k_{q3}(k_{q1}+k_{q3}k'_{q3})}{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^4}]\mathbf{b}_{q2} \\
& +(1-\lambda k_{q1})[\frac{\lambda(k_{q2}k_{q4}-k_{q1}k_{q2}+2k'_{q3}k_{q4}+k_{q3}k'_{q4})}{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2}+\frac{\lambda^3 k_{q3}^2 k'_{q3}k_{q4}}{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^2}]\mathbf{b}_{q1} \\
& +(\lambda k_{q3})[\frac{\lambda k_{q2}(k_{q2}-k'_{q3}+k_{q1}-k'_{q3})-\lambda k''_{q1}-\lambda k'_{q2}k_{q3}-\lambda k_{q1}^2}{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2} \\
& +\frac{\lambda^2 k_{q3}(\lambda(k_{q1}^2)'k_{q2}+k_{q3}+k''_{q3}(1+\lambda k_{q1})+\lambda k'_{q1}k'_{q3}+\lambda k_{q2}k_{q3}k'_{q3})-\lambda^2((k'_{q1})^2+2(k'_{q1})^2+2k_{q1}k''_{q1})}{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^2} \\
& +\frac{\lambda^3 k_{q1}(k_{q1}k''_{q1}+k'_{q3})+\lambda k''_{q1}+\lambda^3(k'_{q1})^3-2\lambda^2 k'_{q1}k_{q2}k_{q3}}{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^2} \\
& +\frac{6\lambda^2 k'_{q1}(\lambda^2 k_{q1}k_{q3}k'_{q3}-k'_{q1}-\lambda k_{q1}k'_{q1})+3\lambda^3 k'_{q1}(\lambda k'_{q1}(k_{q1}^2-\lambda k_{q1}^3)-k_{q3}k'_{q3}(1-\lambda^2 k_{q1}^2))}{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^4}]\mathbf{b}_{q2} \\
& +(\lambda k_{q3})(\frac{\lambda k_{q2}(k_{q4}-k_{q1})+\lambda(k_{q3}k'_{q4}+2k'_{q3}k_{q4})}{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2}-\frac{\lambda^3 k_{q3}^2 k'_{q3}k_{q4}}{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^2})(-\mathbf{t})
\end{aligned}
$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
a = & \frac{-\lambda k_{q3}(k_{q2}^2+k_{q1}^2+k_{q3}^2+k_{q4}^2)-\lambda(2k'_{q1}k_{q2}+k_{q1}k'_{q2}-k''_{q3})+k_{q1}k_{q3}+k'_{q2}}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2}} \\
& + \frac{\lambda^3 k_{q3}(-(k'_{q1})^2-k_{q1}k''_{q2}+k_{q2}k'_{q3}-k_{q3}k''_{q3}-2(k'_{q3})^2)+\lambda^2 k'_{q3}(k''_{q1}-k_{q2}k_{q3})}{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^{3/2}} \\
& + \frac{3\lambda^4 k'_{q1}k_{q3}^2k'_{q3}(\lambda k_{q1}-1)+3\lambda^4 k_{q1}k'_{q1}k_{q3}(-2\lambda k'_{q1}k_{q1})+3\lambda^3(k'_{q1})^2}{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^{7/2}}, \\
b = & \frac{\lambda k_{q4}(k_{q2}+2k'_{q3}+\lambda(-k_{q1}k_{q2}+k_{q3}k'_{q4}))}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2}} - \frac{\lambda^3 k_{q3}^2 k'_{q3}k_{q4}}{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^{3/2}}, \\
c = & \frac{-\lambda k_{q2}(2k'_{q3}-k_{q2}-k_{q1})-\lambda(k''_{q1}k'_{q2}k_{q3}+k_{q1}^2)}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2}} + \frac{\lambda^2 k'_{q1}k_{q2}k_{q3}(2\lambda k'_{q1}-2)}{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^{3/2}} \\
& + \frac{\lambda^2 k_{q3}k''_{q3}(1+\lambda k_{q1})-\lambda^2 k_{q1}k''_{q1}(2-\lambda k_{q1})-\lambda^2(k'_{q1})^2(5-3\lambda k'_{q1})}{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^{3/2}} \\
& + \frac{\lambda k''_{q1}+(\lambda^2 k'_{q3})(k'_{q3}+\lambda k'_{q1}k_{q3}+\lambda k_{q1}+\lambda k_{q2}k_{q3}^2)}{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^{3/2}} \\
& + \frac{\lambda^2(k'_{q1})^2(-6-6\lambda k_{q1}+3\lambda k_{q1}^2-3\lambda^3 k_{q1}^3)+\lambda^3 k'_{q1}k_{q3}^3k'_{q3}(6\lambda k_{q1}-3-3\lambda^2 k_{q1}^2)}{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^{7/2}} \\
d = & \frac{\lambda k_{q2}(k_{q4}-k_{q1})+\lambda(2k'_{q3}k_{q4}+k_{q3}k'_{q4})}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2}} - \frac{\lambda^3 k_{q3}^2 k'_{q3}k_{q4}}{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^{3/2}}
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$
\mathbf{t}^\lambda \wedge \mathbf{n}_q^\lambda \wedge (\mathbf{t}^\lambda)'' = \frac{[(1-\lambda k_{q1})a-\lambda k_{q3}c]\mathbf{b}_{q2}+(1-\lambda k_{q1})b\mathbf{b}_{q1}-(\lambda k_{q3})d\mathbf{t}}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2}}
$$

bulunur. O halde

$$
\begin{aligned}
||\mathbf{t}^\lambda \wedge \mathbf{n}_q^\lambda \wedge (\mathbf{t}^\lambda)''|| = & \sqrt{< \mathbf{t}^\lambda \wedge \mathbf{n}_q^\lambda \wedge (\mathbf{t}^\lambda)'', \mathbf{t}^\lambda \wedge \mathbf{n}_q^\lambda \wedge (\mathbf{t}^\lambda)'' >} \\
& \sqrt{\frac{[(1-\lambda k_{q1})a-\lambda k_{q3}c]^2+(1-\lambda k_{q1})^2 b^2+\lambda^2 k_{q3}^2 d^2}{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2}}
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir. $\mathbf{b}_{q2}^\lambda$ ifadesinde g eşitliği yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b}_{q2}^\lambda &= \frac{\mathbf{t}^\lambda \wedge \mathbf{n}_q^\lambda \wedge (\mathbf{t}^\lambda)''}{||\mathbf{t}^\lambda \wedge \mathbf{n}_q^\lambda \wedge (\mathbf{t}^\lambda)''||} \\
&= \frac{[(1-\lambda k_{q1})a-\lambda k_{q3}c]\mathbf{b}_{q2}+(1-\lambda k_{q1})b\mathbf{b}_{q1}-(\lambda k_{q3})d\mathbf{t}}{\sqrt{[(1-\lambda k_{q1})a-\lambda k_{q3}c]^2+(1-\lambda k_{q1})^2 b^2+\lambda^2 k_{q3}^2 d^2}}
\end{aligned} \tag{5.4}
$$

olur. $\mathbf{b}_{q1}^{\lambda}= \mathbf{b}_{q2}^{\lambda}\wedge\mathbf{t}^{\lambda}\wedge\mathbf{n}_{q}^{\lambda}$ vektörü hesaplanırsa

$$\mathbf{b}_{q1}^{\lambda} = \left(\frac{[(1-\lambda k_{q1})a-\lambda k_{q3}c]\mathbf{b}_{q2}+(1-\lambda k_{q1})b\mathbf{b}_{q1}-(\lambda k_{q3})d\mathbf{t}}{\sqrt{[(1-\lambda k_{q1})a-\lambda k_{q3}c]^2+(1-\lambda k_{q1})^2b^2+\lambda^2k_{q3}^2d^2}}\right)$$
$$\wedge\left(\frac{(1-\lambda k_{q1})\mathbf{t}+\lambda k_{q3}\mathbf{b}_{q1}}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2k_{q3}^2}}\right)\wedge\mathbf{n}_q$$

bulunur. Burada $\mathbf{b}_{q2}^{\lambda}$ vektörü hesaplanırken yapılan işlemlere benzer şekilde vektörel çarpımın özelliklerinden de faydalanarak gerekli düzenlemeler yapılırsa ve Tanım 3.5.2 deki eşitlikler kullanılırsa $\mathbf{t}=\mathbf{e}_1$, $\mathbf{n}_q=\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b}_{q1}=\mathbf{e}_3$ ve $\mathbf{b}_{q2}=\mathbf{e}_4$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_{q1}^{\lambda} = & \frac{[(1-\lambda k_{q1})a-\lambda k_{q3}c](1-\lambda k_{q1})\mathbf{b}_{q1}}{\sqrt{[(1-\lambda k_{q1})a-\lambda k_{q3}c]^2+(1-\lambda k_{q1})^2b^2+\lambda^2k_{q3}^2d^2}\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2k_{q3}^2}}\\ & -\frac{[(1-\lambda k_{q1})a-\lambda k_{q3}c](\lambda k_{q3}c)\mathbf{t}}{\sqrt{[(1-\lambda k_{q1})a-\lambda k_{q3}c]^2+(1-\lambda k_{q1})^2b^2+\lambda^2k_{q3}^2d^2}\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2k_{q3}^2}}\\ & -\frac{[(1-\lambda k_{q1})^2b-\lambda^2k_{q3}^2d]\mathbf{b}_{q2}}{\sqrt{[(1-\lambda k_{q1})a-\lambda k_{q3}c]^2+(1-\lambda k_{q1})^2b^2+\lambda^2k_{q3}^2d^2}\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2k_{q3}^2}}\end{aligned} \tag{5.5}$$

elde edilir. $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}_q^{\lambda}$, $\mathbf{b}_{q1}^{\lambda}$ ve $\mathbf{b}_{q2}^{\lambda}$ eşitliklerinde $e=\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2k_{q3}^2}$, $f=\sqrt{[(1-\lambda k_{q1})a-\lambda k_{q3}c]^2+(1-\lambda k_{q1})^2b^2+\lambda^2k_{q3}^2d^2}$ ve $\triangle=1-\lambda k_{q1}$ ile gösterilip matris formatında yazılırsa

$$\begin{bmatrix}\mathbf{t}^{\lambda}\\ \mathbf{n}_q^{\lambda}\\ \mathbf{b}_{q1}^{\lambda}\\ \mathbf{b}_{q2}^{\lambda}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\triangle}{e} & 0 & \frac{\lambda k_{q3}}{e} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \frac{(\lambda k_{q3}c-\triangle a)\lambda k_{q3}}{e\,f} & 0 & \frac{(\triangle a-\lambda k_{q3}c)\triangle}{e\,f} & \frac{\lambda^2k_{q3}^2d-\triangle^2b}{e\,f}\\ -\frac{\lambda k_{q3}d}{f} & 0 & \frac{\triangle b}{f} & \frac{\triangle a-\lambda k_{q3}c}{f}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{t}\\ \mathbf{n}_q\\ \mathbf{b}_{q1}\\ \mathbf{b}_{q2}\end{bmatrix}$$

olur.

Örnek 5.1.1: $\mathbb{E}^4$ de bir uzay eğrisi $\alpha(s)=\left(\frac{1}{2}\cos s,-\frac{1}{2}\sin s,\frac{s}{2},\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$ şeklinde verilsin. Bu uzay eğrisinin Frenet çatısı hesaplanırsa **(**3.8**)** denklemlerinden yararlanarak Frenet çatı vektörleri

$$\mathbf{t}(s)=\left(\tfrac{-1}{2}\sin s,\tfrac{-1}{2}\cos s,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\qquad \mathbf{n}(s)=(-\cos s,\sin s,0,0)$$

$$\mathbf{b}_2(s)=(0,0,\tfrac{\sqrt{6}}{3},-\tfrac{1}{\sqrt{3}})\qquad \mathbf{b}_1(s)=(\tfrac{-\sqrt{3}}{2}\sin s,\tfrac{-\sqrt{3}}{2}\cos s,\tfrac{-1}{2\sqrt{3}},\tfrac{-1}{\sqrt{6}})$$

şeklinde bulunur.

$\alpha(s)$ eğrisinin quasi çatıya göre Bertrand eğri çifti hesaplanırsa önce **(4.1)** denklemlerinden yararlanarak quasi çatı vektörleri

$$\mathbf{t}(s) = \left(\tfrac{-1}{2}\sin s, \tfrac{-1}{2}\cos s, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \mathbf{n}_q(s) = (0, 0, \tfrac{\sqrt{6}}{3}, \tfrac{-1}{\sqrt{3}})$$

$$\mathbf{b}_{q2}(s) = (-\cos s, \sin s, 0, 0) \qquad \mathbf{b}_{q1}(s) = (\tfrac{-\sqrt{3}}{2}\sin s, \tfrac{-\sqrt{3}}{2}\cos s, \tfrac{-1}{2\sqrt{3}}, \tfrac{-\sqrt{6}}{6})$$

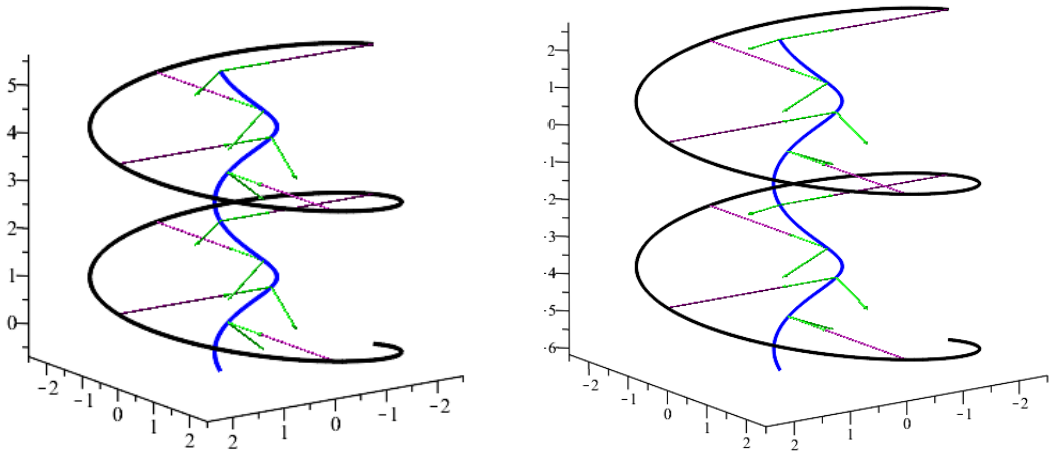
bulunur.

$\lambda = 3$ olmak üzere $\alpha(s)$ eğrisinin quasi çatıya göre Bertrand eğri eşi $\beta(s)$ ise

$$\begin{aligned}\beta(s) &= \alpha(s) + \lambda\mathbf{n}_q(s)\\ &= (\tfrac{1}{2}\cos s, -\tfrac{1}{2}\sin s, \tfrac{s}{2}, \tfrac{s}{\sqrt{2}}) + 3(0, 0, \tfrac{\sqrt{6}}{3}, \tfrac{-1}{\sqrt{3}})\\ &= (\tfrac{1}{2}\cos s, \tfrac{-1}{2}\sin s, \tfrac{s}{2} + \sqrt{6}, \tfrac{\sqrt{2}s}{2} - \sqrt{3})\end{aligned}$$

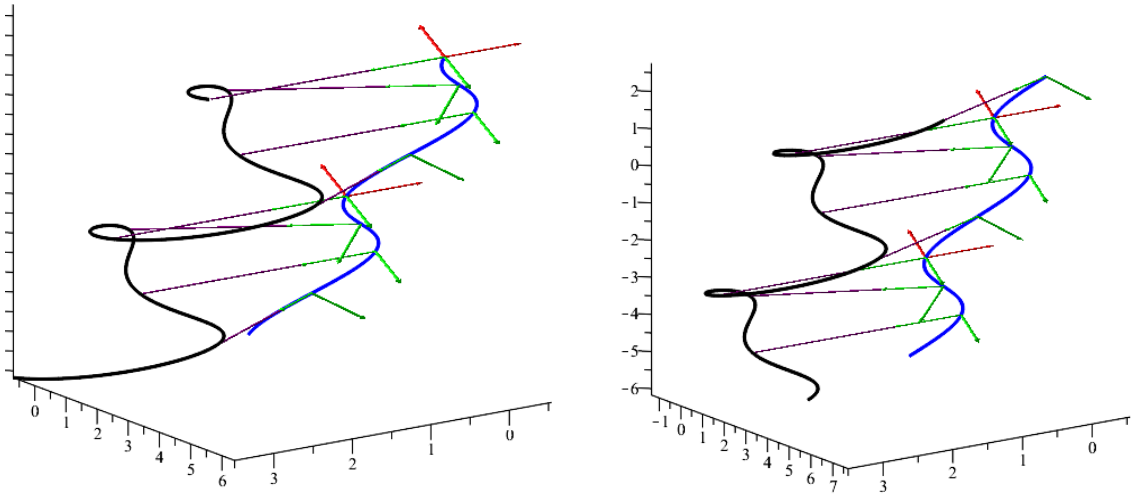
şeklinde hesaplanır.

α eğrisinin xyz ve xyt izdüşüm uzaylarındaki $\lambda = 3$ değeri için Bertrand eğri eşi β eğrisinin beş noktadaki normal ve quasi-normal vektörleri ile grafikleri Şekil 5.2 de gösterilmiştir.



Şekil 5.2 xyz ve xyt uzaylarındaki **n** ve **b** Frenet vektörleri (kırmızı), $\mathbf{n}_q$ ve $\mathbf{b}_q$ quasi vektörleri (yeşil) için Bertrand eğri çifti

α eğrisinin xzt ve yzt izdüşüm uzaylarındaki $\lambda = 3$ için Bertrand eğri eşi β eğrisinin beş noktadaki normal ve quasi-normal vektörleri ile grafikleri ise Şekil 5.3 de gösterilmiştir.



Şekil 5.3 xzt ve yzt uzaylarındaki **n** ve **b** Frenet vektörleri (kırmızı), $\mathbf{n}_q$ ve $\mathbf{b}_q$ quasi vektörleri (yeşil) için Bertrand eğri çifti

Örnek 5.1.2: $\mathbb{E}^4$ de $\alpha(s) = \left(\cos\frac{s}{\sqrt{5}}, \sin\frac{s}{\sqrt{5}}, \cos\frac{2s}{\sqrt{5}}, \sin\frac{2s}{\sqrt{5}}\right)$ şeklinde verilen α uzay eğrisinin Frenet çatısı için **(**3.8**)** denklemlerinden yararlanarak Frenet çatı vektörleri

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}(s) &= \left(\tfrac{-1}{\sqrt{5}}\sin\tfrac{s}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{\sqrt{5}}\cos\tfrac{s}{\sqrt{5}}, \tfrac{-2}{\sqrt{5}}\sin\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}}\cos\tfrac{2s}{\sqrt{5}}\right)\\
\mathbf{n}(s) &= \left(\tfrac{-1}{\sqrt{17}}\cos\tfrac{s}{\sqrt{5}}, \tfrac{-1}{\sqrt{17}}\sin\tfrac{s}{\sqrt{5}}, \tfrac{-4}{\sqrt{17}}\cos\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, \tfrac{-4}{\sqrt{17}}\sin\tfrac{2s}{\sqrt{5}}\right)\\
\mathbf{b}_2(s) &= \left(\tfrac{-4}{\sqrt{17}}\cos\tfrac{s}{\sqrt{5}}, \tfrac{-4}{\sqrt{17}}\sin\tfrac{s}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{\sqrt{17}}\cos\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{\sqrt{17}}\sin\tfrac{2s}{\sqrt{5}}\right)\\
\mathbf{b}_1(s) &= \left(\tfrac{2}{\sqrt{5}}\sin\tfrac{s}{\sqrt{5}}, \tfrac{-2}{\sqrt{5}}\cos\tfrac{s}{\sqrt{5}}, \tfrac{-1}{\sqrt{5}}\sin\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{\sqrt{5}}\cos\tfrac{2s}{\sqrt{5}}\right)
\end{aligned}$$

şeklinde Frenet eğrilikleri ise

$$k_1(s) = \frac{\sqrt{17}}{5} \qquad k_2(s) = \frac{-6\sqrt{17}}{85} \qquad k_3(s) = \frac{-2\sqrt{17}}{17}$$

bulunur. $\alpha(s)$ eğrisinin **(**4.1**)** denklemlerinden yararlanarak quasi çatı vektörleri

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}(s) &= \left(\tfrac{-1}{5}\sin\tfrac{s}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{\sqrt{5}}\cos\tfrac{s}{\sqrt{5}}, \tfrac{-2}{\sqrt{5}}\sin\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}}\cos\tfrac{2s}{\sqrt{5}}\right)\\
\mathbf{n}_q(s) &= \left(0, 0, -\cos\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, -\sin\tfrac{2s}{\sqrt{5}}\right)\\
\mathbf{b}_{q2}(s) &= \left(-\cos\tfrac{s}{\sqrt{5}}, -\sin\tfrac{s}{\sqrt{5}}, 0, 0\right)\\
\mathbf{b}_{q1}(s) &= \left(\tfrac{2}{\sqrt{5}}\sin\tfrac{s}{\sqrt{5}}, \tfrac{-2}{\sqrt{5}}\sin\tfrac{s}{\sqrt{5}}, \tfrac{-1}{\sqrt{5}}\sin\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{\sqrt{5}}\sin\tfrac{2s}{\sqrt{5}}\right)
\end{aligned}$$

şeklinde quasi eğrilikleri ise

$$k_{q1}(s) = \frac{4}{5} \qquad k_{q2}(s) = 0 \qquad k_{q3}(s) = \frac{-2}{5} \qquad k_{q4}(s) = \frac{-2}{5}$$

olarak hesaplanır. $\lambda = \frac{1}{2}$ olmak üzere $\alpha(s)$ eğrisinin quasi çatıya göre Bertrand eğri eşi

$$\begin{aligned}\beta(s) &= \alpha(s) + \lambda \mathbf{n}_q(s) \\ &= \left(\cos\tfrac{s}{\sqrt{5}}, \sin\tfrac{s}{\sqrt{5}}, \cos\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, \sin\tfrac{2s}{\sqrt{5}}\right) + \tfrac{1}{2}(0, 0, -\cos\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, -\sin\tfrac{2s}{\sqrt{5}}) \\ &= (\cos\tfrac{s}{\sqrt{5}}, \sin\tfrac{s}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{2s}{\sqrt{5}})\end{aligned}$$

olur. $\beta(s)$ eğrisinin **(**4.1**)** denklemlerinden yararlanarak quasi çatı vektörleri

$$\begin{aligned}\mathbf{t}^{\lambda}(s) &= \left(\tfrac{-1}{\sqrt{2}}\sin\tfrac{s}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\tfrac{s}{\sqrt{5}}, \tfrac{-1}{\sqrt{2}}\sin\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\tfrac{2s}{\sqrt{5}}\right) \\ \mathbf{n}_q^{\lambda}(s) &= (0, 0, -\cos\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, -\sin\tfrac{2s}{\sqrt{5}}) \\ \mathbf{b}_{q2}^{\lambda}(s) &= (-\cos\tfrac{s}{\sqrt{5}}, -\sin\tfrac{s}{\sqrt{5}}, 0, 0) \\ \mathbf{b}_{q1}^{\lambda}(s) &= (\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\tfrac{s}{\sqrt{5}}, \tfrac{-1}{\sqrt{2}}\cos\tfrac{s}{\sqrt{5}}, \tfrac{-1}{\sqrt{2}}\sin\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\tfrac{2s}{\sqrt{5}})\end{aligned}$$

şeklinde quasi eğrilikleri ise

$$k_{q1}^{\lambda}(s) = \tfrac{2}{\sqrt{10}} \qquad k_{q2}^{\lambda}(s) = 0 \qquad k_{q3}^{\lambda}(s) = \tfrac{-2}{\sqrt{10}} \qquad k_{q4}^{\lambda}(s) = \tfrac{-2}{\sqrt{10}}$$

olarak hesaplanır.

Örnek 5.1.3: $\mathbb{E}^4$ de verilen $\alpha(s) = \left(\cos\frac{s}{\sqrt{5}}, \sin\frac{s}{\sqrt{5}}, \cos\frac{2s}{\sqrt{5}}, \sin\frac{2s}{\sqrt{5}}\right)$ uzay eğrisinin $\lambda = \frac{1}{2}$ için Bertrand eğri çifti $\beta(s)$ nin quasi çatı vektörleri Teorem 5.1.2 yardımıyla hesaplanacak olursa $\alpha(s)$ eğrisinin quasi çatı vektörleri

$$\begin{aligned}\mathbf{t}(s) &= \left(\tfrac{-1}{\sqrt{5}}\sin\tfrac{s}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{\sqrt{5}}\cos\tfrac{s}{\sqrt{5}}, \tfrac{-2}{\sqrt{5}}\sin\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}}\cos\tfrac{2s}{\sqrt{5}}\right) \\ \mathbf{n}_q(s) &= (0, 0, -\cos\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, -\sin\tfrac{2s}{\sqrt{5}}) \\ \mathbf{b}_{q2}(s) &= (-\cos\tfrac{s}{\sqrt{5}}, -\sin\tfrac{s}{\sqrt{5}}, 0, 0) \\ \mathbf{b}_{q1}(s) &= (\tfrac{2}{\sqrt{5}}\sin\tfrac{s}{\sqrt{5}}, \tfrac{-2}{\sqrt{5}}\sin\tfrac{s}{\sqrt{5}}, \tfrac{-1}{\sqrt{5}}\sin\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{\sqrt{5}}\sin\tfrac{2s}{\sqrt{5}})\end{aligned}$$

ve quasi eğrilikleri aşağıdaki gibi olmak üzere

$$k_{q1}(s) = \tfrac{4}{5} \qquad k_{q2}(s) = 0 \qquad k_{q3}(s) = \tfrac{-2}{5} \qquad k_{q4}(s) = \tfrac{-2}{5}$$

şeklinde hesaplanan

$$\begin{aligned}\triangle &= (1 - \lambda k_{q1}) = \frac{3}{5}, a = \frac{-8\sqrt{10}}{125}, b = 0, c = \frac{-4\sqrt{10}}{25}, d = 0, \\ e &= \sqrt{(1 - \lambda k_{q1})^2 + \lambda^2 k_{q3}^2} = \frac{\sqrt{10}}{5}, \\ f &= \sqrt{[(1 - \lambda k_{q1})a - \lambda k_{q3} c]^2 + (1 - \lambda k_{q1})^2 b^2 + \lambda^2 k_{q3}^2 d^2} = \frac{44\sqrt{10}}{625}\end{aligned}$$

değerleri aşağıdaki eşitliklerde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}^{\lambda} &= \frac{\triangle}{e}\mathbf{t}+\frac{\lambda k_{q3}}{e}\mathbf{b}_{q1} \text{ ve } \mathbf{n}_q^{\lambda}=\mathbf{n}_q \\
\mathbf{b}_{q1}^{\lambda} &= \frac{(\lambda k_{q3}c-\triangle a)\lambda k_{q3}}{e\,f}\mathbf{t}+\frac{(\triangle a-\lambda k_{q3}c)\triangle}{e\,f}\mathbf{b}_{q1}+\frac{\lambda^2 k_{q3}^2 d-\triangle^2 b}{e\,f}\mathbf{b}_{q2} \\
\mathbf{b}_{q2}^{\lambda} &= -\frac{\lambda k_{q3}d}{f}\mathbf{t}+\frac{\triangle b}{f}\mathbf{b}_{q1}+\frac{\triangle a-\lambda k_{q3}c}{f}\mathbf{b}_{q2}
\end{aligned}$$

$\beta(s)$ eğrisinin quasi çatı vektörleri

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}^{\lambda}(s) = &\quad \left(\tfrac{-1}{\sqrt{2}}\sin\tfrac{s}{\sqrt{5}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\tfrac{s}{\sqrt{5}},\tfrac{-1}{\sqrt{2}}\sin\tfrac{2s}{\sqrt{5}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\tfrac{2s}{\sqrt{5}}\right) \\
\mathbf{n}_q^{\lambda}(s) = &\quad (0,0,-\cos\tfrac{2s}{\sqrt{5}},-\sin\tfrac{2s}{\sqrt{5}}) \\
\mathbf{b}_{q2}^{\lambda}(s) = &\quad (-\cos\tfrac{s}{\sqrt{5}},-\sin\tfrac{s}{\sqrt{5}},0,0) \\
\mathbf{b}_{q1}^{\lambda}(s) = &\quad (\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\tfrac{s}{\sqrt{5}},\tfrac{-1}{\sqrt{2}}\cos\tfrac{s}{\sqrt{5}},\tfrac{-1}{\sqrt{2}}\sin\tfrac{2s}{\sqrt{5}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\tfrac{2s}{\sqrt{5}})
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 5.1.3: $\alpha(s)$ uzay eğrisi yay parametresi yardımıyla verilsin. $k_{q1}^{\lambda}, k_{q2}^{\lambda}, k_{q3}^{\lambda}$ ve k_{q4}^{λ} eğrilikleri $\beta(s)$ uzay eğrisinin quasi eğrilikleri olmak üzere $\alpha(s), \beta(s)$ Bertrand eğri çiftinin quasi eğrilikleri arasındaki bağıntılar

$$\begin{aligned}
k_{q1}^{\lambda} = &\quad \frac{(k_{q1}-\lambda k_{q1}^2-\lambda k_{q3}^2)}{e} \\
k_{q2}^{\lambda} = &\quad \frac{h[(\lambda k'_{q1}+\lambda k_{q2}k_{q3})(\lambda k_{q3})]}{e^2 f} \\
&+\frac{h[(1\text{-}\lambda k_{q1})(k_{q2}\text{-}\lambda k_{q1}k_{q2}+\lambda k'_{q3})]}{e^2 f} \\
&-\frac{(\lambda k_{q3}k_{q4})[(1-\lambda k_{q1})^2 b-\lambda^2 k_{q3}^2 d]}{e^2 f} \\
k_{q3}^{\lambda} = &\quad \frac{h[(\lambda k_{q1}k_{q3})+(1-\lambda k_{q1})k_{q3}]}{ef} \\
k_{q4}^{\lambda} = &\quad \frac{[\lambda k'_{q1}a-a'(1-\lambda k_{q1})+(\lambda k'_{q3}c+\lambda k_{q3}c')][(1-\lambda k_{q1})^2 b-\lambda^2 k_{q3}^2 d]}{ef^2} \\
&-\frac{[k_{q4}b-\lambda k_{q1}k_{q4}b][(1-\lambda k_{q1})^2 b-\lambda^2 k_{q3}^2 d]}{ef^2} \\
&+\frac{e'h([(1-\lambda k_{q1})^2 b-\lambda^2 k_{q3}^2 d]-[(1-\lambda k_{q1})b](1-\lambda k_{q1})-\lambda^2 k_{q3}^2 d)}{ef^4} \\
&+\frac{h([(1-\lambda k_{q1})^2 b-\lambda^2 k_{q3}^2 d][(1-\lambda k_{q1})(-\lambda k'_{q1})b^2+bb'(1-\lambda k_{q1})^2])}{ef^4} \\
&-\frac{hb(1-\lambda k_{q1})[(1-\lambda k_{q1})-\lambda^2 k_{q3}^2 d]f'+hg'[\lambda^2 k_{q3}k'_{q3}d^2+\lambda^2 k_{q3}^2 dd']}{ef^4}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

(5.7)

olarak verilir. Burada

$$\begin{aligned} e = & \sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2}, \\ f = & \sqrt{[(1-\lambda k_{q1})a-\lambda k_{q3}c]^2+(1-\lambda k_{q1})^2 b^2+\lambda^2 k_{q3}^2 d^2} \\ h = & [(1-\lambda k_{q1})a-\lambda k_{q3}c] \end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat: Öncelikle k_{q1}^{λ} eğriliği hesaplanırsa $k_{q1}^{\lambda} =< \mathbf{t}^{\lambda'}, \mathbf{n}_q^{\lambda} >$ olup (5.3) ve (5.2) den

$$\begin{aligned} k_{q1}^{\lambda} &= \frac{(k_{q1}-\lambda k_{q1}^2-\lambda k_{q3}^2)<\mathbf{n}_q,\mathbf{n}_q>}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2}} \\ &= \frac{(k_{q1}-\lambda k_{q1}^2-\lambda k_{q3}^2)}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2}} \\ &= \frac{(k_{q1}-\lambda k_{q1}^2-\lambda k_{q3}^2)}{e} \end{aligned}$$

bulunur. $k_{q2}^{\lambda} =< \mathbf{t}^{\lambda'}, \mathbf{b}_{q1}^{\lambda} >$ hesaplanırsa (5.3) ve (5.5) den

$$\begin{aligned} k_{q2}^{\lambda} = & -\frac{(-\lambda k'_{q1}-\lambda k_{q2}k_{q3})[(1-\lambda k_{q1})a-\lambda k_{q3}c]\lambda k_{q3}<\mathbf{t},\mathbf{t}>}{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]\sqrt{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^2+(1-\lambda k_{q1})^2 b^2+\lambda^2 k_{q3}^2 d^2}} \\ & +\frac{(k_{q2}-\lambda k_{q1}k_{q2}+\lambda k'_{q3})[(1-\lambda k_{q1})a-\lambda k_{q3}c](1-\lambda k_{q1})<\mathbf{b}_{q1},\mathbf{b}_{q1}>}{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]\sqrt{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^2+(1-\lambda k_{q1})^2 b^2+\lambda^2 k_{q3}^2 d^2}} \\ & -\frac{(\lambda k_{q3}k_{q4})[(1-\lambda k_{q1})^2 b-\lambda^2 k_{q3}^2 d]<\mathbf{b}_{q2},\mathbf{b}_{q2}>}{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]\sqrt{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^2+(1-\lambda k_{q1})^2 b^2+\lambda^2 k_{q3}^2 d^2}} \end{aligned}$$

ve gerekli işlemler ile

$$\begin{aligned} k_{q2}^{\lambda} = & \frac{[(1-\lambda k_{q1})a-\lambda k_{q3}c][(\lambda k'_{q1}+\lambda k_{q2}k_{q3})\lambda k_{q3}+(1-\lambda k_{q1})(k_{q2}-\lambda k_{q1}k_{q2}+\lambda k'_{q3})]}{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]\sqrt{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^2+(1-\lambda k_{q1})^2 b^2+\lambda^2 k_{q3}^2 d^2}} \\ & -\frac{(\lambda k_{q3}k_{q4})[(1-\lambda k_{q1})^2 b-\lambda^2 k_{q3}^2 d]}{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]\sqrt{[(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^2+(1-\lambda k_{q1})^2 b^2+\lambda^2 k_{q3}^2 d^2}} \\ = & \frac{h[(\lambda k'_{q1}+\lambda k_{q2}k_{q3})\lambda k_{q3}+(1-\lambda k_{q1})(k_{q2}-\lambda k_{q1}k_{q2}+\lambda k'_{q3})]}{e^2 f} \\ & -\frac{(\lambda k_{q3}k_{q4})[(1-\lambda k_{q1})^2 b-\lambda^2 k_{q3}^2 d]}{e^2 f} \end{aligned}$$

olur. $k_{q3}^{\lambda} =< \mathbf{n}_q^{\lambda'}, \mathbf{b}_{q1}^{\lambda} >$ hesaplanırsa (5.2) ve (5.5) den $\mathbf{n}_q^{\lambda} = \mathbf{n}_q$ olduğundan $(\mathbf{n}_q^{\lambda})' = \mathbf{n}_q'$ olur ve

$$\begin{aligned} k_{q3}^{\lambda} &= \frac{[(1-\lambda k_{q1})a - \lambda k_{q3}c]\lambda k_{q1}k_{q3} < \mathbf{t}, \mathbf{t} >}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2 + \lambda^2 k_{q3}^2}\sqrt{[(1-\lambda k_{q1})^2 + \lambda^2 k_{q3}^2]^2 + (1-\lambda k_{q1})^2 b^2 + \lambda^2 k_{q3}^2 d^2}} \\ &+ \frac{[(1-\lambda k_{q1})a - \lambda k_{q3}c](1-\lambda k_{q1})k_{q3} < \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{b}_{q1} >}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2 + \lambda^2 k_{q3}^2}\sqrt{[(1-\lambda k_{q1})^2 + \lambda^2 k_{q3}^2]^2 + (1-\lambda k_{q1})^2 b^2 + \lambda^2 k_{q3}^2 d^2}} \\ &= \frac{[(1-\lambda k_{q1})a - \lambda k_{q3}c][\lambda k_{q1}k_{q3} + (1-\lambda k_{q1})k_{q3}]}{\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2 + \lambda^2 k_{q3}^2}\sqrt{[(1-\lambda k_{q1})^2 + \lambda^2 k_{q3}^2]^2 + (1-\lambda k_{q1})^2 b^2 + \lambda^2 k_{q3}^2 d^2}} \\ &= \frac{h[\lambda k_{q1}k_{q3} + (1-\lambda k_{q1})k_{q3}]}{ef} \end{aligned}$$

bulunur. $k_4^{\lambda} = - < \mathbf{b}_{q2}^{\lambda'}, \mathbf{b}_{q1}^{\lambda} >$ için (5.4) ve (5.5) eşitliği yardımıyla $\mathbf{b}_{q2}^{\lambda'}$ değeri hesaplanırsa

t birim quasi-teğet vektörün katsayısı x olmak üzere

$$\begin{aligned} x = \; & (\frac{\lambda k_{q3}d(-k_{q2}b + \lambda k_{q1}k_{q2}b) - \lambda k_{q3}d - \lambda k_{q3}d'}{\sqrt{[(1-\lambda k_{q1})a - \lambda k_{q3}c]^2 + (1-\lambda k_{q1})^2 b^2 + \lambda^2 k_{q3}^2 d^2}} \\ & + \frac{[(1-\lambda k_{q1})a - \lambda k_{q3}c][-\lambda k_{q1}'a + a'(1-\lambda k_{q1}) - \lambda k_{q3}'c - \lambda k_{q3}c']}{([(1-\lambda k_{q1})a - \lambda k_{q3}c]^2 + (1-\lambda k_{q1})^2 b^2 + \lambda^2 k_{q3}^2 d^2)^{3/2}} \\ & - \frac{((1-\lambda k_{q1})(-\lambda k_{q1}')b^2 + bb'(1-\lambda k_{q1})^2)}{([(1-\lambda k_{q1})a - \lambda k_{q3}c]^2 + (1-\lambda k_{q1})^2 b^2 + \lambda^2 k_{q3}^2 d^2)^{3/2}} \\ & - \frac{bb'(1-\lambda k_{q1})^2 + (\lambda^2 k_{q3}k_{q3}'d^2 + \lambda^2 k_{q3}^2 dd')}{([(1-\lambda k_{q1})a - \lambda k_{q3}c]^2 + (1-\lambda k_{q1})^2 b^2 + \lambda^2 k_{q3}^2 d^2)^{3/2}}) \end{aligned}$$

$\mathbf{n}_q$ birim quasi-normal vektörün katsayısı y olmak üzere

$$y = -\frac{k_{q3} + \lambda k_{q1}k_{q3}b - \lambda k_{q1}k_{q3}d}{\sqrt{[(1-\lambda k_{q1})^2 + \lambda^2 k_{q3}^2]^2 + (1-\lambda k_{q1})^2 b^2 + \lambda^2 k_{q3}^2 d^2}}$$

$\mathbf{b}_{q1}$ birinci birim quasi -binormal vektörün katsayısı z olmak üzere

$$z = (\frac{(-k_{q4}a + \lambda k_{q1}k_{q4}a + \lambda k_{q3}k_{q4}c) + [-\lambda k'_{q1}b + b'(1-\lambda k_{q1})] - \lambda k_{q2}k_{q3}d}{\sqrt{[(1-\lambda k_{q1})^2 + \lambda^2 k_{q3}^2]^2 + (1-\lambda k_{q1})^2 b^2 + \lambda^2 k_{q3}^2 d^2}}$$

$$-\frac{[(1-\lambda k_{q1})a - \lambda k_{q3}c][-\lambda k'_{q1}a + a'(1-\lambda k_{q1}) - \lambda k'_{q3}c - \lambda k_{q3}c']}{([(1-\lambda k_{q1})a - \lambda k_{q3}c]^2 + (1-\lambda k_{q1})^2 b^2 + \lambda^2 k_{q3}^2 d^2)^{3/2}}$$

$$+\frac{(1-\lambda k_{q1})(-\lambda k'_{q1})b^2 + bb'(1-\lambda k_{q1})^2}{([(1-\lambda k_{q1})a - \lambda k_{q3}c]^2 + (1-\lambda k_{q1})^2 b^2 + \lambda^2 k_{q3}^2 d^2)^{3/2}}$$

$$+\frac{\lambda^2 k_{q3}k'_{q3}d^2 + \lambda^2 k_{q3}^2 dd'}{([(1-\lambda k_{q1})a - \lambda k_{q3}c]^2 + (1-\lambda k_{q1})^2 b^2 + \lambda^2 k_{q3}^2 d^2)^{3/2}})\mathbf{b}_{q1}$$

ve $\mathbf{b}_{q2}$ ikinci birim quasi-binormal vektörün katsayısı t olmak üzere

$$t = (\frac{[-\lambda k'_{q1}a + a'(1-\lambda k_{q1}) - \lambda k'_{q3}c - \lambda k_{q3}c'] + k_{q4}b - \lambda k_{q1}k_4 b}{\sqrt{[(1-\lambda k_{q1})a - \lambda k_{q3}c]^2 + (1-\lambda k_{q1})^2 b^2 + \lambda^2 k_{q3}^2 d^2}}$$

$$-\frac{[(1-\lambda k_{q1})a - \lambda k_{q3}c][-\lambda k'_{q1}a + a'(1-\lambda k_{q1}) - \lambda k'_{q3}c - \lambda k_{q3}c']}{([(1-\lambda k_{q1})a - \lambda k_{q3}c]^2 + (1-\lambda k_{q1})^2 b^2 + \lambda^2 k_{q3}^2 d^2)^{3/2}}$$

$$+\frac{(1-\lambda k_{q1})(-\lambda k'_{q1})b^2 + bb'(1-\lambda k_{q1})^2}{([(1-\lambda k_{q1})a - \lambda k_{q3}c]^2 + (1-\lambda k_{q1})^2 b^2 + \lambda^2 k_{q3}^2 d^2)^{3/2}}$$

$$+\frac{(\lambda^2 k_{q3}k'_{q3}d^2 + \lambda^2 k_{q3}^2 dd'))[(1-\lambda k_{q1})a - \lambda k_{q3}c]}{([(1-\lambda k_{q1})a - \lambda k_{q3}c]^2 + (1-\lambda k_{q1})^2 b^2 + \lambda^2 k_{q3}^2 d^2)^{3/2}})\mathbf{b}_{q2}$$

$\mathbf{b}_{q2}^{\lambda'}$ değeri

$$\mathbf{b}_{q2}^{\lambda'} = x\mathbf{t} + y\mathbf{n}_q + z\mathbf{b}_{q1} + t\mathbf{b}_{q2}$$

olarak bulunur.

Elde edilen bu $\mathbf{b}_{q2}^{\lambda'}$ değeri ve (5.5) eşitliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
k_{q4}^{\lambda} = & \frac{(bh(1-\lambda k_{q1})\lambda k_{q2}k_{q3}}{([(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^2+(1-\lambda k_{q1})^2 b^2+\lambda^2 k_{q3}^2 d^2)\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2}} \\
& -\frac{\lambda^3 h^2 d k'_{q1} k_{q3}^2 a+\lambda^2 k_{q3}^2 d a' h^2-\lambda^3 k_{q1} k_{q3}^2 d a' h^2-\lambda^3 k_{q3}^2 dh k'_{q3} c}{([(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^2+(1-\lambda k_{q1})^2 b^2+\lambda^2 k_{q3}^2 d^2)^2\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2}} \\
& -\frac{\lambda^3 k_{q3}^2 dh k'_{q1} b^2+\lambda^3 k_{q1} k'_{q1} k_{q3}^2 dh b^2-\lambda^3 k_{q3}^3 dh c'}{([(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^2+(1-\lambda k_{q1})^2 b^2+\lambda^2 k_{q3}^2 d^2)^2\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2}} \\
& +\frac{bb'(1\text{-}\lambda k_{q1})^2\lambda^2 k_{q3}^2 dh+\lambda^3 k_{q3}^3 k'_{q3} h d^3+\lambda^4 k_{q3}^4 d^2 h d') < \mathbf{t},\mathbf{t} >}{([(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^2+(1-\lambda k_{q1})^2 b^2+\lambda^2 k_{q3}^2 d^2)^2\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2}} \\
& +\frac{(\lambda k_{q1} k_{q4} h^2-k_{q4} h^2+(h-\lambda h k_{q1})[(-\lambda k'_{q1})b+b'(1-\lambda k_{q1})]+\lambda k_{q2} k_{q3} dh}{([(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^2+(1-\lambda k_{q1})^2 b^2+\lambda^2 k_{q3}^2 d^2)\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2}} \\
& +\frac{\lambda k'_{q1} h a-a' h+\lambda k_{q1} a' h+h\lambda k'_{q3} c+h\lambda k_{q3} c'}{([(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^2+(1-\lambda k_{q1})^2 b^2+\lambda^2 k_{q3}^2 d^2)\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2}} \\
& +\frac{\lambda^2 k_{q1} k'_{q1} b^2-\lambda k'_{q1} b^2+bb'(1\text{-}\lambda k_{q1})^2+\lambda^4 k'_{q3} d^3 k_{q3}^3 d' bh(1\text{-}\lambda k_{q1})^2) < \mathbf{b}_{q1},\mathbf{b}_{q1} >}{([(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^2+(1-\lambda k_{q1})^2 b^2+\lambda^2 k_{q3}^2 d^2)^2\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2}} \\
& +\frac{([\lambda k'_{q1} a-a'+\lambda k_{q1} a'+\lambda k'_{q3} c+\lambda k_{q3} c'\text{-}k_{q4} b+\lambda k_{q1} k_{q4} b][(1\text{-}\lambda k_{q1})^2 b\text{-}\lambda^2 k_{q3}^2 d]}{([(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^2+(1-\lambda k_{q1})^2 b^2+\lambda^2 k_{q3}^2 d^2)\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2}} \\
& +\frac{((1-\lambda k_{q1})^2 b-\lambda^2 k_{q3}^2 d)(-\lambda k'_{q1} a h^2+h^2 a'\text{-}\lambda k_{q1} h^2 a'\text{-}\lambda h^2 k'_{q3} c\text{-}\lambda h^2 k_{q3} c')}{([(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^2+(1-\lambda k_{q1})^2 b^2+\lambda^2 k_{q3}^2 d^2)^2\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2}} \\
& -\frac{(\lambda h k'_{q1} b^2+\lambda^2 h k_{q1} k'_{q1} b^2+hbb'(1-\lambda k_{q1})^2)((1-\lambda k_{q1})^2 b-\lambda^2 k_{q3}^2 d)}{([(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^2+(1-\lambda k_{q1})^2 b^2+\lambda^2 k_{q3}^2 d^2)^2\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2}} \\
& +\frac{(\lambda^2 h k_{q3} k'_{q3} d^2+\lambda^2 h k_{q3}^2 d d')((1-\lambda k_{q1})^2 b-\lambda^2 k_{q3}^2 d) < \mathbf{b}_{q2},\mathbf{b}_{q2} >}{([(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2]^2+(1-\lambda k_{q1})^2 b^2+\lambda^2 k_{q3}^2 d^2)^2\sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2+\lambda^2 k_{q3}^2}}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
k_{q4}^{\lambda} &= \frac{[\lambda k'_{q1}a - a'(1-\lambda k_{q1}) + (\lambda k'_{q3}c + \lambda k_{q3}c')][(1-\lambda k_{q1})^2 b - \lambda^2 k_{q3}^2 d]}{ef^2} \\
&- \frac{[k_{q4}b - \lambda k_{q1}k_{q4}b][(1-\lambda k_{q1})^2 b - \lambda^2 k_{q3}^2 d]}{ef^2} \\
&+ \frac{e'h([(1-\lambda k_{q1})^2 b - \lambda^2 k_{q3}^2 d] - [(1-\lambda k_{q1})b][(1-\lambda k_{q1}) - \lambda^2 k_{q3}^2 d])}{ef^4} \\
&+ \frac{h([(1-\lambda k_{q1})^2 b - \lambda^2 k_{q3}^2 d][(1-\lambda k_{q1})(-\lambda k'_{q1})b^2 + bb'(1-\lambda k_{q1})^2]}{ef^4} \\
&- \frac{h[(1-\lambda k_{q1})b][(1-\lambda k_{q1}) - \lambda^2 k_{q3}^2 d]f'}{ef^4} \\
&+ \frac{hg'[\lambda^2 k_{q3}k'_{q3}d^2 + \lambda^2 k_{q3}^2 dd']}{ef^4}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

Burada d', e', f', g', a', b' ve c' değerleri

$$
\begin{aligned}
d' = &\frac{[\lambda k'_{q2}k_{q4} + \lambda k_{q2}k'_{q4} - \lambda k'_{q1}k_{q2} - \lambda k_{q1}k'_{q2} + 2\lambda k''_{q3}k_{q4} + 2\lambda k_{q3}k''_{q4}]}{e} \\
&- \frac{[(1-\lambda k_{q1})(-\lambda k'_{q1}) + \lambda^2 k_{q3}k'_{q3}][\lambda k_{q2}k_{q4} - \lambda k_{q2}k_{q1} + 2\lambda k'_{q3}k_{q4} + \lambda k_{q3}k'_{q4}]}{e^3} \\
&- \frac{[2\lambda^3 k_{q3}(k'_{q3})^2 k_{q4} + \lambda^3 k_{q3}^2 k''_{q3}k_{q4} + \lambda^3 k_{q3}^2 k'_{q3}k'_{q4}]}{e^3} \\
&- \frac{3[(1-\lambda k_{q1})(-\lambda k'_{q1}) + \lambda^2 k_{q3}k'_{q3}][\lambda^3 k_{q3}^2 k'_{q3}k_{q4}]}{e^5}
\end{aligned}
$$

ve

$$
e' = [(1-\lambda k_{q1})(-\lambda k'_{q1})b^2 + bb'(1-\lambda k_{q1})^2] + [\lambda^2 k_{q3}k'_{q3}d^2 + \lambda^2 k_{q3}^2 dd']
$$

ile

$$
f' = [(1-\lambda k_{q1})(-\lambda k'_{q1})b^2 + bb'(1-\lambda k_{q1})^2]
$$

ve de

$$
g' = ((1-\lambda k_{q1})^2 b - \lambda^2 k_{q3}^2 d - (1-\lambda k_{q1})b[(1-\lambda k_{q1}) - \lambda^2 k_{q3}^2 d])
$$

ve

$$a' = \frac{k'_{q1}k_{q3}+k_{q1}k'_{q3}+k''_{q2} - \lambda k'_{q3}(k^2_{q1}+k^2_{q2}+k^2_{q3}+k^2_{q4})}{e}$$

$$-\frac{2\lambda k_{q3}(k_{q1}k'_{q1}+k_{q2}k'_{q2}+k_{q3}k'_{q3}+k_{q4}k'_{q4})}{e}$$

$$-\frac{\lambda(2k''_{q1}k_{q2}+3k'_{q1}k'_{q2}+k_{q1}k''_{q2} - k'''_{q3})}{e}$$

$$+\frac{[(1-\lambda k_{q1})\lambda k'_{q1}][-\lambda k_{q3}(k^2_{q2}+k^2_{q1}+k^2_{q3}+k^2_{q4})+k'_{q2}(1-2\lambda k'_{q1}-\lambda k_{q1})+\lambda k''_{q3}+k_{q1}k_{q3}]}{e^3}$$

$$+\frac{k_{q2}k'_{q3}-(k'_{q1})^2\lambda^3 k'_{q3}-k_{q1}k''_{q1}-k_{q3}k''_{q3}-2(k'_{q3})^2}{e^3}$$

$$+\frac{\lambda^3 k_{q3}k''_{q3}(k_{q2}-k'_{q3}-4k'_{q3}\lambda^2 k''_{q1}-\lambda^2 k_{q2}k_{q3})}{e^3}$$

$$+\frac{\lambda^3 k_{q3}(k'_{q2}k'_{q3}-3k'_{q1}k''_{q1}-k_{q1}k''_{q1}+k'''_{q3}k_{q3}+\lambda^2 k_{q3}k'''_{q1}-\lambda^2 k^2_{q3}k'_{q2}-\lambda^2 k_{q3}k_{q2}k'_{q3})}{e^3}$$

$$-\frac{3[(1-\lambda k_{q1})(-\lambda k'_{q1})+\lambda^2 k_{q3}k'_{q3}][-\lambda^3 k_{q3}(k'_{q1})^2+k_{q2}k'_{q3}-k'_{q1}k''_{q1}+k_{q2}k'_{q3}]}{e^5}$$

$$+\frac{3[(1\text{-}\lambda k_{q1})\lambda k'_{q1}\text{-}\lambda^2 k_{q3}k'_{q3}][k_{q3}(\text{-}\lambda^3(k'_{q1})^2\text{-}2k''_{q3})\text{-}k'_{q3}(2k'_{q3}\text{-}\lambda^2 k''_{q1}\text{-}\lambda^2 k_{q2}k_{q3})\text{-}k'_{q1}k''_{q1}]}{e^5}$$

$$+\frac{((k''_{q1}k'_{q3}k^2_{q3}+2k'_{q1}k_{q3}(k'_{q3})^2+k'_{q1}k^2_{q3}k''_{q3})3\lambda^4(\lambda k_{q1}\text{-}1)+3\lambda^5(k'_{q1})^2k^2_{q3}k'_{q3})}{e^7}$$

$$+\frac{3\lambda^4((k_{q1})^2k_{q3}+k_{q1}k''_{q1}k''_{q3})(\text{-}2k'_{q1}+\lambda k_{q1})+(\text{-}2k''_{q1}+\lambda k'_{q1})(3\lambda^4 k_{q1}k'_{q1}k_{q3})+6\lambda^2 k'_{q1}k''_{q1}}{e^7}$$

$$+\frac{7[(1\text{-}\lambda k_{q1})\lambda k'_{q1}\text{-}\lambda^2 k^2_{q3}k'_{q3}][3\lambda^2(k'_{q1})(\lambda^2 k^2_{q3}(k_{q1}k'_{q3}\text{-}k'_{q3})+\lambda^2 k_{q1}k_{q3}(\text{-}2k'_{q1}+\lambda k_{q1})+k'_{q1})]}{e^9}$$

ve

$$b' = \frac{\lambda k'_{q4}k_{q2}+\lambda k_{q4}k'_{q2}+2\lambda k'_{q3}k'_{q4}+2\lambda k_{q4}k''_{q3}-\lambda k'_{q1}k_{q2}-\lambda k_{q1}k'_{q2}+k'_{q3}k'_{q4}+k_{q3}k''_{q4}}{e}$$

$$\frac{[-\lambda k'_{q1}+\lambda^2 k'_{q1}k_{q1}+\lambda^2 k'_{q3}k_{q3}][\lambda k_{q4}k_{q2}+2\lambda k'_{q3}k_{q4}-\lambda k_{q1}k_{q2}+\lambda k_{q3}k'_{q4}]}{e^3}$$

$$-\frac{(2\lambda^3(k'_{q3})^2k_{q3}k_{q4}+\lambda^3 k^2_{q3}k''_{q3}k_{q4}+\lambda^3 k^2_{q3}k'_{q3}k'_{q4})}{e^3}$$

$$\frac{[3\lambda k'_{q1}+3\lambda^2 k_{q1}k'_{q1}+3\lambda^2 k_{q3}k'_{q3}](\lambda^3 k^2_{q3}k'_{q3}k_{q4})}{e^5}$$

$$
\begin{aligned}
c' = \; & \frac{(k'_{q2}(2\lambda k_{q2} - 3\lambda k'_{q3} + \lambda k_{q1}) + k'_{q1}(\lambda k_{q2} - 2\lambda k_{q1}) - 2\lambda k_{q2} k''_{q3} - \lambda k''_{q2} k_{q3})}{e} \\
& - \frac{(1 - \lambda k_{q1})[(-\lambda k'_{q1}) + 2\lambda^2 k_{q3} k'_{q3}] + 2\lambda^3 (k'_{q1})^2 k_{q2} k'_{q3} - 2\lambda^2 k''_{q1} k_{q2} k_{q3}}{e^3} \\
& - \frac{2\lambda^2 k'_{q1} k'_{q2} k_{q3} - 2\lambda^2 k'_{q1} k_{q2} k'_{q3} - 2\lambda^2 k'_{q1} k''_{q1} - 2\lambda^2 k_{q1} k'''_{q1} + 2\lambda^3 k_{q1} k'_{q1} k''_{q1}}{e^3} \\
& - \frac{10\lambda^2 k'_{q1} k''_{q1} + 9\lambda^3 (k'_{q1})^2 k''_{q1} + \lambda k'''_{q1} + 2\lambda^2 k'_{q3} k''_{q3} + \lambda^3 k''_{q1} k_{q3} k'_{q3} + \lambda^3 k'_{q1} (k'_{q3})^2}{e^3} \\
& + \frac{\lambda^3 k_{q1} k_{q3} k''_{q3} + \lambda^3 k'_{q1} k'_{q3} + \lambda^3 k_{q1} k''_{q3} + \lambda^2 k'_{q2} k'_{q3} k^2_{q3} + \lambda^2 k_{q2} k''_{q3} k^2_{q3} + \lambda^3 k^2_{q1} k'''_{q1}}{e^3} \\
& + \frac{2\lambda^2 k_{q2} (k'_{q3})^2 k_{q3} + \lambda^2 k_{q3} k'''_{q3} + \lambda^3 k'_{q1} k_{q3} k''_{q3} + \lambda^3 k_{q1} k'_{q3} k''_{q3} + \lambda^3 k_{q1} k_{q3} k'''_{q3}}{e^3} \\
& + \frac{(3\lambda k'_{q1} - 3\lambda^2 k_{q1} k'_{q1})(2\lambda^3 (k'_{q1})^2 k_{q2} k_{q3} - 2\lambda^2 k'_{q1} k_{q2} k_{q3} - 2\lambda^2 k_{q1} k''_{q1} + \lambda^3 k^2_{q1} k''_{q1})}{e^5} \\
& + \frac{(3\lambda k'_{q1} - 3\lambda^2 k_{q1} k'_{q1})(-5\lambda^2 (k'_{q1})^2 + 3\lambda^3 (k'_{q1})^3 + \lambda^2 (k'_{q3})^2 + \lambda^3 k'_{q1} k_{q3} k'_{q3})}{e^5} \\
& + \frac{\lambda^2 k_{q2} k'_{q3} k^2_{q3} + \lambda^2 k_{q3} k''_{q3} + \lambda^3 k_{q1} k_{q3} k''_{q3}}{e^5} \\
& - \frac{24\lambda^2 k'_{q1} k''_{q1} - 6\lambda^2 (k'_{q1})^3 + 6\lambda^3 k'_{q1} k^2_{q1} k''_{q1} + 6\lambda^3 (k'_{q1})^3 k_{q1} + 6\lambda^3 k_{q1} (k'_{q1})^3}{e^{12}} \\
& \frac{+6\lambda^3 k^2_{q1} k'_{q1} k''_{q1} - 15\lambda^4 k^3_{q1} (k'_{q1})^2 - 9\lambda^5 k^2_{q1} (k'_{q1})^3 - 6\lambda^5 k^3_{q1} k'_{q1} k''_{q1}}{e^{12}} \\
& + \frac{6\lambda^4 (k'_{q1})^2 k_{q3} k'_{q3} + 6\lambda^4 k_{q1} k''_{q1} k_{q3} k'_{q3} + 6\lambda^4 k_{q1} k'_{q1} (k'_{q3})^2 - 3\lambda^5 k^2_{q1} k'_{q1} k_{q3} k''_{q3}}{e^{12}} \\
& + \frac{6\lambda^4 k_{q1} k'_{q1} k_{q3} k''_{q3} - 3\lambda^3 k''_{q1} k_{q3} k'_{q3} - 3\lambda^3 k'_{q1} (k'_{q3})^2 - 3\lambda^3 k'_{q1} k_{q3} k''_{q3}}{e^{12}} \\
& - \frac{6\lambda^5 k_{q1} (k'_{q1})^2 k_{q3} k'_{q3} - 3\lambda^5 k^2_{q1} k''_{q1} k_{q3} k'_{q3} - 3\lambda^5 k^2_{q1} k'_{q1} (k'_{q3})^2}{e^{12}} \\
& - \frac{(7\lambda k'_{q1} (1 - \lambda k_{q1}) + \lambda^2 k_{q3} k'_{q3})[-6\lambda^2 (k'_{q1})^2 - 6\lambda^2 k_{q1} (k'_{q1})^2 + 6\lambda^3 (k'_{q1})^2 k^2_{q1}]}{e^9} \\
& + \frac{(7\lambda k'_{q1} (1 - \lambda k_{q1}) + \lambda^2 k_{q3} k'_{q3})[-3\lambda^5 k^3_{q1} (k'_{q1})^2 + 6\lambda^4 k_{q1} k'_{q1} k_{q3} k'_{q3}]}{e^9} \\
& + \frac{(7\lambda k'_{q1} (1 - \lambda k_{q1}) + \lambda^2 k_{q3} k'_{q3})[-3\lambda^3 k'_{q1} k_{q3} k'_{q3} - 3\lambda^5 k^2_{q1} k'_{q1} k_{q3} k'_{q3}]}{e^9} \\
& + \frac{6\lambda^3 (k'_{q1})^3 k_{q1} + 6\lambda^3 k_{q1} (k'_{q1})^3 + 6\lambda^3 k^2_{q1} k'_{q1} k''_{q1} - 15\lambda^4 k^3_{q1} (k'_{q1})^2}{e^{12}} \\
& - \frac{9\lambda^5 k^2_{q1} (k'_{q1})^3 - 6\lambda^5 k^3_{q1} k'_{q1} k''_{q1} + 6\lambda^4 (k'_{q1})^2 k_{q3} k'_{q3}}{e^{12}}
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

O halde

$$\begin{aligned}
k_{q1}^{\lambda} &= \frac{(k_{q1} - \lambda k_{q1}^2 - \lambda k_{q3}^2)}{e} \\
k_{q2}^{\lambda} &= \frac{h([(\lambda k'_{q1}+\lambda k_{q2}k_{q3})(\lambda k_{q3})]+[(1\text{-}\lambda k_{q1})(k_{q2}\text{-}\lambda k_{q1}k_{q2}+\lambda k'_{q3})])}{e^2 f} \\
&\quad - \frac{(\lambda k_{q3}k_{q4})[(1-\lambda k_{q1})^2 b - \lambda^2 k_{q3}^2 d]}{e^2 f} \\
k_{q3}^{\lambda} &= \frac{h[(\lambda k_{q1}k_{q3}) + (1-\lambda k_{q1})k_{q3}]}{ef}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
k_{q4}^{\lambda} &= \frac{[\lambda k'_{q1}a - a'(1-\lambda k_{q1}) + (\lambda k'_{q3}c + \lambda k_{q3}c')][(1-\lambda k_{q1})^2 b - \lambda^2 k_{q3}^2 d]}{ef^2} \\
&\quad - \frac{[k_{q4}b - \lambda k_{q1}k_{q4}b][(1-\lambda k_{q1})^2 b - \lambda^2 k_{q3}^2 d]}{ef^2} \\
&\quad + \frac{e'h([(1-\lambda k_{q1})^2 b - \lambda^2 k_{q3}^2 d] - [(1-\lambda k_{q1})b](1-\lambda k_{q1}) - \lambda^2 k_{q3}^2 d])}{ef^4} \\
&\quad + \frac{h([(1-\lambda k_{q1})^2 b - \lambda^2 k_{q3}^2 d][(1-\lambda k_{q1})(-\lambda k'_{q1})b^2 + bb'(1-\lambda k_{q1})^2]}{ef^4} \\
&\quad - \frac{hb(1-\lambda k_{q1})[(1-\lambda k_{q1}) - \lambda^2 k_{q3}^2 d]f'}{ef^4} \\
&\quad + \frac{hg'[\lambda^2 k_{q3}k'_{q3}d^2 + \lambda^2 k_{q3}^2 dd']}{ef^4}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 5.1.4: 4-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^4$ de bir uzay eğrisi

$$\alpha(s) = (\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos 2s, \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin 2s, \frac{1}{3\sqrt{2}}\cos 3s, \frac{1}{3\sqrt{2}}\sin 3s)$$

olarak alınsın.

Buradan $||\alpha(s)|| = 1$ olduğundan eğri yay parametresi ile verilmiştir yani birim hızlı bir eğri alınmıştır.

Bu durumda α eğrisinin Frenet vektörleri

$$\begin{aligned}
\mathbf{t} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin 2s, \cos 2s, -\sin 3s, \cos 3s) \\
\mathbf{n} &= \frac{-2}{\sqrt{52}}(-2\cos 2s, -2\sin 2s, -3\cos 3s, -3\sin 3s) \\
\mathbf{b}_2 &= \frac{-2}{\sqrt{52}}(3(2\cos^2 s - 1), 4\cos s \sin s, -2\cos s(4\cos^2 s - 3), 2\sin s(4\cos^2 s - 1)) \\
\mathbf{b}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{2}{\sqrt{2}}\cos s \sin s, -(2\cos^2 s - 1), -\sin s(4\cos^2 s - 1), \cos s(4\cos^2 s - 3))
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Buradan da Frenet eğrilikleri

$$k_1 = \frac{13}{\sqrt{26}}, \quad k_2 = -\frac{5}{\sqrt{26}} \qquad \text{ve} \quad k_3 = -\frac{12}{\sqrt{26}}$$

olur. Benzer şekilde quasi çatı vektörleri ise

$$\begin{aligned}
\mathbf{t} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin 2s, \cos 2s, -\sin 3s, \cos 3s) \\
\mathbf{n}_q &= (0, 0, -\cos 3s, -\sin 3s) \\
\mathbf{b}_{q2} &= (1 - 2\cos^2 s, -2\cos s \sin s, 0, 0) \\
\mathbf{b}_{q1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{2}{\sqrt{2}}\cos s \sin s, -(2\cos^2 s - 1), -\sin s(4\cos^2 s - 1), \cos s(4\cos^2 s - 3))
\end{aligned}$$

olup quasi eğrilikleri ise

$$k_{q1} = \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad k_{q2} = 0, \quad k_{q3} = -\frac{3}{\sqrt{2}} \qquad \text{ve} \quad k_{q4} = -\sqrt{2}$$

biçimindedir. Böylece Bertrand eğri eşi

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda \mathbf{n}_q$$

yapısında $\lambda = 2$ alınır ve elde edilen eşitlikler yerlerine yazılırsa

$$\beta(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{2}\cos 2s, \frac{1}{2}\sin 2s, \frac{1}{3}\cos 3s, \frac{1}{3}\sin 3s) + 2(0, 0, -\cos 3s, -\sin 3s)$$

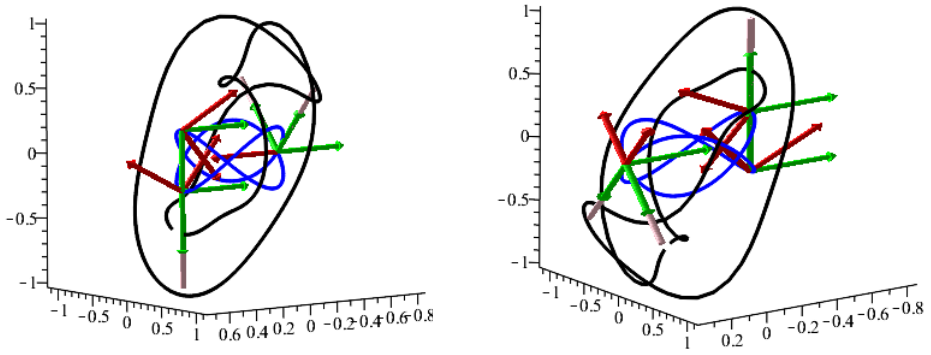
olup gerekli sadeleştirmeler ile

$$\beta(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{2}\cos 2s, \frac{1}{2}\sin 2s, -2\cos 3s + \frac{1}{3}\cos 3s, -2\sin 3s + \frac{1}{3}\sin 3s)$$

bulunur.

Buradan $\lambda = 2$ için xyz izdüşüm uzayındaki Bertrand eğri eşi

$$\beta(s) = (\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos 2s, \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin 2s, \frac{1}{3\sqrt{2}}\cos 3s)$$



Şekil 5.4 xyz ve xyt uzaylarındaki eğri (mavi) ve Bertrand eğri eşi (siyah)

ve xyt izdüşüm uzayındaki Bertrand eğri eşi

$$\beta(s) = (\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos 2s, \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin 2s, \frac{1}{3\sqrt{2}}\sin 3s)$$

olur. Eğri ve onun Bertrand eğri eşi Şekil 5.4 de gösterilmiştir.

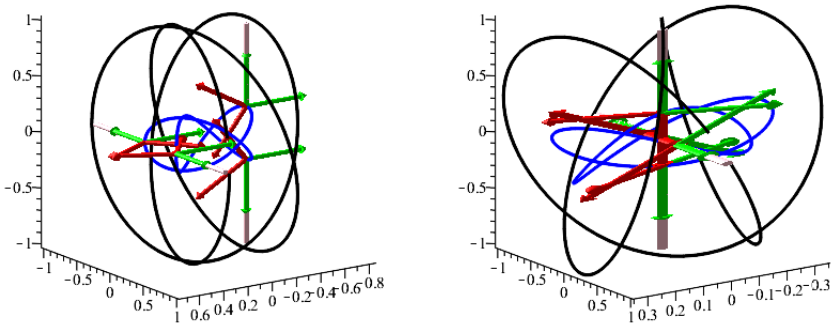
Burada $\lambda = 2$ için xzt izdüşüm uzayındaki Bertrand eğri eşi

$$\beta(s) = (\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos 2s, \frac{1}{3\sqrt{2}}\cos 3s, \frac{1}{3\sqrt{2}}\sin 3s)$$

ve yzt izdüşüm uzayındaki Bertrand eğri eşi ise

$$\beta(s) = (\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin 2s, \frac{1}{3\sqrt{2}}\cos 3s, \frac{1}{3\sqrt{2}}\sin 3s)$$

olur. Eğri ve onun Bertrand eğri eşi Şekil 5.5 de gösterilmiştir.



Şekil 5.5 xzt ve yzt uzaylarındaki eğri (mavi) ve Bertrand eğri eşi (siyah)

Örnek 5.1.5: $\mathbb{E}^4$ de verilen $\alpha(s) = \left(\cos\frac{s}{\sqrt{5}}, \sin\frac{s}{\sqrt{5}}, \cos\frac{2s}{\sqrt{5}}, \sin\frac{2s}{\sqrt{5}}\right)$ uzay eğrisinin $\lambda = \frac{1}{2}$ için Bertrand eğri çifti $\beta(s)$ nin quasi eğrilikleri Teorem 5.1.3 yardımıyla hesaplanacak olursa $\alpha(s)$ eğrisinin quasi çatı vektörleri

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}(s) = &\quad \left(\tfrac{-1}{\sqrt{5}}\sin\tfrac{s}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{\sqrt{5}}\cos\tfrac{s}{\sqrt{5}}, \tfrac{-2}{\sqrt{5}}\sin\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}}\cos\tfrac{2s}{\sqrt{5}}\right)\\
\mathbf{n}_q(s) = &\quad (0, 0, -\cos\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, -\sin\tfrac{2s}{\sqrt{5}})\\
\mathbf{b}_{q2}(s) = &\quad (-\cos\tfrac{s}{\sqrt{5}}, -\sin\tfrac{s}{\sqrt{5}}, 0, 0)\\
\mathbf{b}_{q1}(s) = &\quad (\tfrac{2}{\sqrt{5}}\sin\tfrac{s}{\sqrt{5}}, \tfrac{-2}{\sqrt{5}}\sin\tfrac{s}{\sqrt{5}}, \tfrac{-1}{\sqrt{5}}\sin\tfrac{2s}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{\sqrt{5}}\sin\tfrac{2s}{\sqrt{5}})
\end{aligned}$$

ve quasi eğrilikleri aşağıdaki gibi olmak üzere

$$k_{q1}(s) = \tfrac{4}{5} \qquad k_{q2}(s) = 0 \qquad k_{q3}(s) = \tfrac{-2}{5} \qquad k_{q4}(s) = \tfrac{-2}{5}$$

şeklinde hesaplanan

$$\begin{aligned}
\triangle &= (1-\lambda k_{q1}) = \frac{3}{5}, a = \frac{-8\sqrt{10}}{125}, b = 0, c = \frac{-4\sqrt{10}}{25}, d = 0,\\
e &= \sqrt{(1-\lambda k_{q1})^2 + \lambda^2 k_{q3}^2} = \frac{\sqrt{10}}{5},\\
f &= \sqrt{[(1-\lambda k_{q1})a - \lambda k_{q3}c]^2 + (1-\lambda k_{q1})^2 b^2 + \lambda^2 k_{q3}^2 d^2} = \frac{44\sqrt{10}}{625}
\end{aligned}$$

değerleri (5.6) denklemlerinde yerine yazılırsa $\beta(s)$ eğrisinin quasi eğrilikleri

$$k_{q1}^{\lambda} = \tfrac{\sqrt{10}}{5}, \qquad k_{q2}^{\lambda} = 0$$

$$k_{q3}^{\lambda} = \tfrac{-\sqrt{10}}{5}, \qquad k_{q4}^{\lambda} = \tfrac{-\sqrt{10}}{5}$$

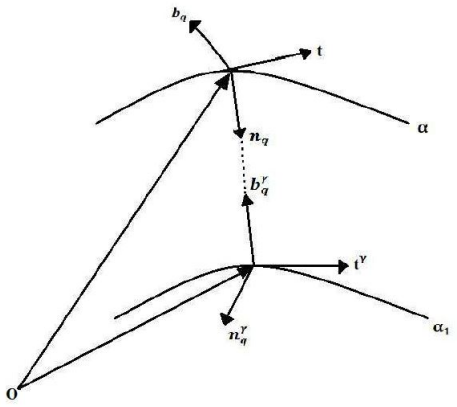
elde edilir.

5.2. Öklidyen 4-Uzayda Yönlü Mannheim Eğrileri

Burada $\mathbb{E}^4$ de bir uzay eğrisinin quasi çatısına ait olan quasi-normal vektörü yardımıyla yönlü Mannheim eğrileri tanımlanarak yönlü Mannheim eğrilerinin bazı özellikleri verilmiştir.

Sırasıyla $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{b}_{q2}\}$ve $\{\mathbf{t}^{\lambda}, \mathbf{n}_q^{\lambda}, \mathbf{b}_{q1}^{\lambda}, \mathbf{b}_{q2}^{\lambda}\}$ şeklinde quasi çatı vektörleri ile verilen α ve α_1 birim hızlı eğrileri için eğer α uzay eğrisinin quasi-normali ile α_1 uzay eğrisinin quasi-binormali lineer bağımlı olma şartını sağlıyor ise α eğrisi yönlü Mannheim eğrisidir, α_1 eğrisi ise yönlü Mannheim eğri ortağıdır denir.

Teorem 5.2.1: α ile α_1 yay parametreli yönlü uzay eğrileri olsun. α ve α_1 yönlü Mannheim eğrilerinin ilgili noktaları arasında mesafe sabit değer alır.



Şekil 5.6 Mannheim eğri çifti

İspat: Mannheim eğri tanımından

$$\alpha = \alpha_1 + \lambda \mathbf{b}_{q1}^{\lambda}$$

yazılabilir. Şekil 5.6 da gösterilmiştir. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$\frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{ds_1} = \frac{d\alpha_1}{ds_1} + \frac{d\lambda}{ds_1}\mathbf{b}_{q1}^{\lambda} + \lambda\frac{d\mathbf{b}_{q1}^{\lambda}}{ds_1}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}\tfrac{ds}{ds_1} &= \mathbf{t}^{\lambda} + \lambda'\mathbf{b}_{q1}^{\lambda} + \lambda(-k_2^{\lambda}\mathbf{t}^{\lambda} - k_3^{\lambda}\mathbf{n}_q^{\lambda} + k_4^{\lambda}\mathbf{b}_{q2}^{\lambda}) \text{ olur veya} \\
\mathbf{t}\tfrac{ds}{ds_1} &= \mathbf{t}^{\lambda} + \lambda'\mathbf{b}_{q1}^{\lambda} - \lambda k_2^{\lambda}\mathbf{t}^{\lambda} - \lambda k_3^{\lambda}\mathbf{n}_q^{\lambda} + \lambda k_4^{\lambda}\mathbf{b}_{q2}^{\lambda} \\
\mathbf{t}\tfrac{ds}{ds_1} &= (1 - \lambda k_2^{\lambda})\mathbf{t}^{\lambda} + \lambda k_3^{\lambda}\mathbf{n}_q^{\lambda} + \lambda'\mathbf{b}_{q1}^{\lambda} + \lambda k_4^{\lambda}\mathbf{b}_{q2}^{\lambda}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\mathbf{n}_q$ ve $\mathbf{b}_{q1}^{\lambda}$ lineer bağımlı olduğundan $< \mathbf{t}, \mathbf{b}_{q1}^{\lambda} >= 0$ olur. Yukarıdaki denklemin her iki tarafı $\mathbf{b}_{q1}^{\lambda}$ ile skaler olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned}
< \mathbf{t}\tfrac{ds}{ds_1}, \mathbf{b}_{q1}^{\lambda} > &= < (1 - \lambda k_2^{\lambda})\mathbf{t}^{\lambda} + \lambda k_3^{\lambda}\mathbf{n}_q^{\lambda} + \lambda'\mathbf{b}_{q1}^{\lambda} + \lambda k_4^{\lambda}\mathbf{b}_{q2}^{\lambda}, \mathbf{b}_{q1}^{\lambda} > \\
\Rightarrow 0 &= (1 - \lambda k_2^{\lambda}) < \mathbf{t}^{\lambda}, \mathbf{b}_{q1}^{\lambda} > + \lambda k_3^{\lambda} < \mathbf{n}_q^{\lambda}, \mathbf{b}_{q1}^{\lambda} > \\
&\quad + \lambda' < \mathbf{b}_{q1}^{\lambda}, \mathbf{b}_{q1}^{\lambda} > + k_4^{\lambda}\lambda < \mathbf{b}_{q2}^{\lambda}, \mathbf{b}_{q1}^{\lambda} > \\
\Rightarrow 0 &= \lambda'
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da λ nın sıfırdan farklı bir sabit olduğu söylenir. Diğer yandan iki nokta arasındaki uzaklık fonksiyonundan

$$\begin{aligned} d(\alpha_1,\alpha) &= ||\alpha-\alpha_1|| \\ &= ||\lambda \mathbf{b}_{q1}^{\lambda}|| \\ &= |\lambda|||\mathbf{b}_{q1}^{\lambda}|| \\ &= |\lambda| = sabit \neq 0 \end{aligned}$$

yazılır.

Teorem 5.2.2: α ve α_1, $\mathbb{E}^4$ uzayında birim hızlı yönlü eğriler olsun. α ve s_1 yay parametresi ile verilen α_1 eğrisinin yönlü Mannheim eğri çifti olması için gerek ve yeter şart λ sıfırdan farklı bir sabit ve $\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y$ izdüşüm vektörleri olmak üzere

$$k_{q1} = \pm \frac{k_{q2}^{\lambda} - \lambda (k_{q2}^{\lambda})^2 - \lambda (k_{q3}^{\lambda})^2 - \lambda (k_{q4}^{\lambda})^2}{(1-\lambda(k_{q2}^{\lambda}))^2 - \lambda^2 (k_{q3}^{\lambda})^2 + \lambda^2 (k_{q4}^{\lambda})^2}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada k_{q1}, k_{q2}, k_{q3} ve k_{q4}, α eğrisinin k_{q1}^{λ}, k_{q2}^{λ}, k_{q3}^{λ} ve k_{q4}^{λ} ise α_1 eğrisinin quasi eğrilikleridir.

İspat: ($\Rightarrow$) α uzay eğrisi ile α_1 Mannheim eğri eşine ait quasi çatılar sırası ile $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{b}_{q2}\}$ ve $\{\mathbf{t}^{\lambda}, \mathbf{n}_q^{\lambda}, \mathbf{b}_{q1}^{\lambda}, \mathbf{b}_{q2}^{\lambda}\}$ olarak verilsin. Şekil 5.1 den $\alpha(s) = \alpha_1(s) + \lambda \mathbf{b}_{q1}^{\lambda}(s)$ yazılabilir. Bu ifadenin s_1 parametresine göre türevi alınarsa ve türev formülleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{ds_1} &= \alpha_1'(s) + \lambda' \mathbf{b}_{q1}^{\lambda}(s) + \lambda (\mathbf{b}_{q1}^{\lambda})'(s) \\ \Rightarrow \mathbf{t}\frac{ds}{ds_1} &= \mathbf{t}^{\lambda} + \lambda(-k_{q2}^{\lambda}\mathbf{t}^{\lambda} - k_{q3}^{\lambda}\mathbf{n}_q^{\lambda} + k_{q4}^{\lambda}\mathbf{b}_{q2}^{\lambda}) \\ \Rightarrow \mathbf{t}\frac{ds}{ds_1} &= (1-\lambda k_{q2}^{\lambda})\mathbf{t}^{\lambda} - \lambda k_{q3}^{\lambda}\mathbf{n}_q^{\lambda} + \lambda k_{q4}^{\lambda}\mathbf{b}_{q2}^{\lambda} \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitliğin s_1 parametresine göre türevi alınıp (4.3) türev formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}}{ds}\frac{ds}{ds_1}\frac{ds}{ds_1} + \mathbf{t}\left(\frac{d^2 s}{ds_1^2}\right) &= (-\lambda' k_{q2}^{\lambda} - \lambda (k_{q2}^{\lambda})')\mathbf{t}^{\lambda} + (\mathbf{t}^{\lambda})'(1-\lambda k_{q2}^{\lambda}) \\ &\quad -(k_{q3}^{\lambda})'\mathbf{n}_q^{\lambda} - k_{q3}^{\lambda}\mathbf{n}_q' + (k_{q4}^{\lambda})'\mathbf{b}_{q2}^{\lambda} + k_{q4}^{\lambda}\mathbf{b}_{q2}' \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 + \mathbf{t}\left(\frac{d^2 s}{ds_1^2}\right) &= -\lambda (k_{q2}^{\lambda})'\mathbf{t}^{\lambda} + (\mathbf{t}^{\lambda})'(1-\lambda k_{q2}^{\lambda}) - (k_{q3}^{\lambda})'\mathbf{n}_q^{\lambda} \\ &\quad -k_{q3}^{\lambda}\mathbf{n}_q' + (k_{q4}^{\lambda})'\mathbf{b}_{q2}^{\lambda} + k_{q4}^{\lambda}\mathbf{b}_{q2}' \end{aligned}$$

ve

$$(k_{q1}\mathbf{n}_q + k_{q2}\mathbf{b}_{q1})(\frac{ds}{ds_1})^2 + \mathbf{t}(\frac{d^2s}{ds_1^2}) = -\lambda(k_{q2}^\lambda)'\mathbf{t}^\lambda + (k_{q1}^\lambda\mathbf{n}_q^\lambda + k_{q2}^\lambda\mathbf{b}_{q1}^\lambda)(1-\lambda k_{q2}^\lambda)$$
$$-(k_{q3}^\lambda)'\mathbf{n}_q^\lambda - k_{q3}^\lambda(-k_{q1}^\lambda\mathbf{t}^\lambda + k_{q3}^\lambda\mathbf{b}_{q1}^\lambda)$$
$$+(k_{q4}^\lambda)'\mathbf{b}_{q2}^\lambda + k_{q4}^\lambda(-k_{q4}^\lambda\mathbf{b}_{q1}^\lambda)$$

elde edilir. Bu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(k_{q1}\mathbf{n}_q + k_{q2}\mathbf{b}_{q1})(\frac{ds}{ds_1})^2 + \mathbf{t}(\frac{d^2s}{ds_1^2}) = -\lambda(k_{q2}^\lambda)'\mathbf{t}^\lambda + k_{q1}^\lambda\mathbf{n}_q^\lambda + k_{q2}^\lambda\mathbf{b}_{q1}^\lambda - \lambda k_{q1}^\lambda k_{q2}^\lambda\mathbf{n}_q^\lambda$$
$$-\lambda(k_{q2}^\lambda)^2\mathbf{b}_{q1}^\lambda - (k_{q3}^\lambda)'\mathbf{n}_q^\lambda + k_{q1}^\lambda k_{q3}^\lambda\mathbf{t}^\lambda$$
$$-(k_{q3}^\lambda)^2\mathbf{b}_{q1}^\lambda + (k_{q4}^\lambda)'\mathbf{b}_{q2}^\lambda - (k_{q4}^\lambda)^2\mathbf{b}_{q1}^\lambda$$

veya

$$(k_{q1}\mathbf{n}_q + k_{q2}\mathbf{b}_{q1})(\frac{ds}{ds_1})^2 + \mathbf{t}(\frac{d^2s}{ds_1^2}) = \mathbf{t}^\lambda(k_{q1}^\lambda k_{q3}^\lambda - \lambda(k_{q2}^\lambda)') + \mathbf{b}_{q2}^\lambda(\mathbf{k}_{q4}^\lambda)'$$
$$+\mathbf{n}_q^\lambda(k_{q1}^\lambda - \lambda k_{q1}^\lambda k_{q2}^\lambda - (k_{q3}^\lambda)')$$
$$+\mathbf{b}_{q1}^\lambda(k_{q2}^\lambda - \lambda(k_{q2}^\lambda)^2 - (k_{q3}^\lambda)^2 - (k_{q4}^\lambda)^2)$$

bulunur. Bu denklemin her iki tarafı $\mathbf{n}_q$ ile skaler olarak çarpılırsa

$$< (k_{q1}\mathbf{n}_q + k_{q2}\mathbf{b}_{q1})(\frac{ds}{ds_1})^2 + \mathbf{t}(\frac{d^2s}{ds_1^2}), \mathbf{n}_q > = (k_{q2}^\lambda - \lambda((k_{q2}^\lambda)^2 + (k_{q3}^\lambda)^2 + (k_{q4}^\lambda)^2)) < \mathbf{b}_{q1}^\lambda, \mathbf{n}_q >$$

elde edilir. Burada gerekli işlemler yapılırsa

$$(\frac{ds}{ds_1})^2(k_{q1} < \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q > + k_{q2} < \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{n}_q >) + (\frac{d^2s}{ds_1^2}) < \mathbf{t}, \mathbf{n}_q >= (k_{q2}^\lambda - \lambda((k_{q2}^\lambda)^2 + (k_{q3}^\lambda)^2 + (k_{q4}^\lambda)^2))$$

olur. $\mathbf{n}_q$ ile $\mathbf{b}_{q1}^\lambda$ lineer bağımlı olduğundan $\mathbf{n}_q \perp \mathbf{n}_q^\lambda$ ve $\mathbf{t}^\lambda \perp \mathbf{n}_q$ olur. Ayrıca $\mathbf{b}_{q1}^\lambda = \pm\mathbf{n}_q$ yazılabilir. O halde

$$\pm k_{q1} < \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q > (\frac{ds}{ds_1})^2 = (k_{q2}^\lambda - \lambda((k_{q2}^\lambda)^2 - (k_{q3}^\lambda)^2 - (k_{q4}^\lambda)^2))$$

elde edilir. Buradan da

$$\pm k_{q1}(\frac{ds}{ds_1})^2 = (k_{q2}^\lambda - \lambda(k_{q2}^\lambda)^2 - \lambda(k_{q3}^\lambda)^2 - \lambda(k_{q4}^\lambda)^2) \tag{5.8}$$

eşitliği bulunur.

$$\mathbf{t}\frac{ds}{ds_1} = \mathbf{t}^\lambda + \lambda(-k_{q2}^\lambda\mathbf{t}^\lambda - k_{q3}^\lambda\mathbf{n}_q^\lambda + k_{q4}^\lambda\mathbf{b}_{q2}^\lambda)$$

denkleminde eşitliğin her iki tarafının normunun karesi alınırsa

$$< \mathbf{t}, \mathbf{t} > (\frac{ds}{ds_1})^2 =< \mathbf{t}^\lambda, \mathbf{t}^\lambda > (1 - \lambda(k_{q2}^\lambda))^2 - \lambda^2(k_{q3}^\lambda)^2 < \mathbf{n}_q^\lambda, \mathbf{n}_q^\lambda > + \lambda^2(k_{q4}^\lambda)^2 < \mathbf{b}_{q2}^\lambda, \mathbf{b}_{q2}^\lambda >$$

olup

$$\frac{ds}{ds_1} = \pm\sqrt{(1-\lambda(k_{q2}^{\lambda}))^2 - \lambda^2(k_{q3}^{\lambda})^2 + \lambda^2(k_{q4}^{\lambda})^2} \tag{5.9}$$

elde edilir. Bu denklem (5.7) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\pm k_{q1}(\sqrt{(1-\lambda(k_{q2}^{\lambda}))^2 - \lambda^2(k_{q3}^{\lambda})^2 + \lambda^2(k_{q4}^{\lambda})^2})^2 &= (k_{q2}^{\lambda} - \lambda(k_{q2}^{\lambda})^2 - \lambda(k_{q3}^{\lambda})^2 - \lambda(k_{q4}^{\lambda})^2) \\
\Rightarrow \pm k_{q1}[(1-\lambda(k_{q2}^{\lambda}))^2 - \lambda^2(k_{q3}^{\lambda})^2 + \lambda^2(k_{q4}^{\lambda})^2] &= (k_{q2}^{\lambda} - \lambda(k_{q2}^{\lambda})^2 - \lambda(k_{q3}^{\lambda})^2 - \lambda(k_{q4}^{\lambda})^2) \\
\Rightarrow k_1 &= \pm\frac{(k_{q2}^{\lambda} - \lambda(k_{q2}^{\lambda})^2 - \lambda(k_{q3}^{\lambda})^2 - \lambda(k_{q4}^{\lambda})^2)}{(1-\lambda(k_{q2}^{\lambda}))^2 - \lambda^2(k_{q3}^{\lambda})^2 + \lambda^2(k_{q4}^{\lambda})^2}
\end{aligned}$$

olur.

$(\Leftarrow) k_{q1} = \pm\frac{(k_{q2}^{\lambda} - \lambda(k_{q2}^{\lambda})^2 - \lambda(k_{q3}^{\lambda})^2 - \lambda(k_{q4}^{\lambda})^2)}{(1-\lambda(k_{q2}^{\lambda}))^2 - \lambda^2(k_{q3}^{\lambda})^2 + \lambda^2(k_{q4}^{\lambda})^2}$ eşitliğinin sağlandığını kabul edelim.

$$\alpha(s) = \alpha_1(s) + \lambda\mathbf{b}_{q1}^{\lambda}$$

denklemini ele alalım. Bu denklemin s_1 ye göre türevi alınıp (4.3) türev formülleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{ds_1} &= \alpha_1'(s) + \lambda'\mathbf{b}_{q1}^{\lambda} + \lambda(\mathbf{b}_{q1}^{\lambda})' \\
\mathbf{t}\frac{ds}{ds_1} &= \mathbf{t}^{\lambda} + \lambda'\mathbf{b}_{q1}^{\lambda} + \lambda(-k_{q2}^{\lambda}\mathbf{t}^{\lambda} - k_{q3}^{\lambda}\mathbf{n}_q^{\lambda} + k_{q4}^{\lambda}\mathbf{b}_{q2}^{\lambda}) \\
\mathbf{t}\frac{ds}{ds_1} &= \mathbf{t}^{\lambda} + \lambda(-k_{q2}^{\lambda}\mathbf{t}^{\lambda} - k_{q3}^{\lambda}\mathbf{n}_q^{\lambda} + k_{q4}^{\lambda}\mathbf{b}_{q2}^{\lambda})
\end{aligned}$$

bulunur.

Bu eşitliğin s_1 ye göre türevi alınıp (4.3) türev formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{t}}{ds}\frac{ds}{ds_1}\frac{ds}{ds_1} + \mathbf{t}(\frac{d^2s}{ds_1^2}) &= (\mathbf{t}^{\lambda})' + \lambda(-(k_{q2}^{\lambda})'\mathbf{t}^{\lambda} - (k_{q3}^{\lambda})'\mathbf{n}_q^{\lambda} + (k_{q4}^{\lambda})'\mathbf{b}_{q2}^{\lambda} \\
&\quad -k_{q2}^{\lambda}(k_{q1}^{\lambda}\mathbf{n}_q^{\lambda} + k_{q2}^{\lambda}\mathbf{b}_{q1}^{\lambda}) - k_{q3}^{\lambda}(k_{q3}^{\lambda}\mathbf{b}_{q1}^{\lambda} - k_{q1}^{\lambda}\mathbf{t}^{\lambda}) \\
&\quad +k_{q4}^{\lambda}(-k_{q4}^{\lambda}\mathbf{b}_{q1}^{\lambda}))
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}'(\frac{ds}{ds_1})^2 + \mathbf{t}(\frac{d^2s}{ds_1^2}) &= (\mathbf{t}^{\lambda})' + \lambda(-(k_{q2}^{\lambda})'\mathbf{t}^{\lambda} - (k_{q3}^{\lambda})'\mathbf{n}_q^{\lambda} + (k_{q4}^{\lambda})'\mathbf{b}_{q2}^{\lambda} \\
&\quad -k_{q2}^{\lambda}(k_{q1}^{\lambda}\mathbf{n}_q^{\lambda} + k_{q2}^{\lambda}\mathbf{b}_{q1}^{\lambda}) - k_{q3}^{\lambda}(-k_{q1}^{\lambda}\mathbf{t}^{\lambda} + k_{q3}^{\lambda}\mathbf{b}_{q1}^{\lambda}) \\
&\quad +k_{q4}^{\lambda}(-k_{q4}^{\lambda}\mathbf{b}_{q1}^{\lambda}))
\end{aligned}$$

ve

$$(k_{q1}\mathbf{n}_q + k_{q2}\mathbf{b}_{q1})(\frac{ds}{ds_1})^2 + \mathbf{t}(\frac{d^2s}{ds_1^2}) = (k_{q1}^\lambda \mathbf{n}_q^\lambda + k_{q2}^\lambda \mathbf{b}_{q1}^\lambda) + \lambda(-(k_{q2}^\lambda)'\mathbf{t}^\lambda - (k_{q3}^\lambda)'\mathbf{n}_q^\lambda + (k_{q4}^\lambda)'\mathbf{b}_{q2}^\lambda - k_{q2}^\lambda(k_{q1}^\lambda \mathbf{n}_q^\lambda + k_{q2}^\lambda \mathbf{b}_{q1}^\lambda) - k_{q3}^\lambda(-k_{q1}^\lambda \mathbf{t}^\lambda + k_{q3}^\lambda \mathbf{b}_{q1}^\lambda) + k_{q4}^\lambda(-k_{q4}^\lambda \mathbf{b}_{q1}^\lambda))$$

olarak bulunur. Bu denklemin her iki tarafı $\mathbf{n}_q$ ile skaler olarak çarpılırsa

$$< (k_{q1}\mathbf{n}_q + k_{q2}\mathbf{b}_{q1})(\frac{ds}{ds_1})^2 + \mathbf{t}(\frac{d^2s}{ds_1^2}), \mathbf{n}_q > = (k_{q2}^\lambda - \lambda((k_{q2}^\lambda)^2 + (k_{q3}^\lambda)^2 + (k_{q4}^\lambda)^2)) < \mathbf{b}_{q1}^\lambda, \mathbf{n}_q >$$

olur ve $\mathbf{b}_{q1}^\lambda = \mathbf{n}_q$ olduğu göz önünde bulundurularak gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}(\frac{ds}{ds_1})^2(k_{q1} < \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q > + k_{q2} < \mathbf{b}_{q1}, \mathbf{n}_q >) + (\frac{d^2s}{ds_1^2}) < \mathbf{t}, \mathbf{n}_q > &= k_{q2}^\lambda < \mathbf{b}_{q1}^\lambda, \mathbf{n}_q > \\ &- \lambda k_{q2}^{\lambda^2} < \mathbf{b}_{q1}^\lambda, \mathbf{n}_q > \\ &- \lambda k_{q3}^{\lambda^2} < \mathbf{b}_{q1}^\lambda, \mathbf{n}_q > \\ &- \lambda k_{q4}^{\lambda^2} < \mathbf{b}_{q1}^\lambda, \mathbf{n}_q >\end{aligned}$$

veya

$$k_{q1}(\frac{ds}{ds_1})^2 = (k_{q2}^\lambda - \lambda(k_{q2}^\lambda)^2 - \lambda(k_{q3}^\lambda)^2 - \lambda(k_{q4}^\lambda)^2)$$

elde edilir. Bulunan son denklemin her iki tarafı $(\frac{ds}{ds_1})^2$ ifadesine bölünürse

$$k_{q1} = \pm\frac{(k_{q2}^\lambda - \lambda(k_{q2}^\lambda)^2 - \lambda(k_{q3}^\lambda)^2 - \lambda(k_{q4}^\lambda)^2)}{(ds/ds_1)^2}$$

eşitliği elde edilir. Buradan da (5.8) yardımıyla

$$k_{q1} = \pm\frac{(k_{q2}^\lambda - \lambda(k_{q2}^\lambda)^2 - \lambda(k_{q3}^\lambda)^2 - \lambda(k_{q4}^\lambda)^2)}{(1 - \lambda(k_{q2}^\lambda))^2 - \lambda^2(k_{q3}^\lambda)^2 + \lambda^2(k_{q4}^\lambda)^2}$$

yazılır. Bu denklem ve kabulümüz göz önüne alınırsa $\mathbf{b}_{q1}^\lambda$ ile $\mathbf{n}_q$ lineer bağımlı olmalıdır. O halde $\mathbf{n}_q^\lambda \perp \mathbf{n}_q$ ve $\mathbf{t}^\lambda \perp \mathbf{n}_q$ olduğu sonucuna ulaşılır. Bu durumda α ile α_1 Mannheim eğri ikilisidir.

Örnek 5.2.1: 4-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^4$ de bir uzay eğrisi

$$\alpha(s) = (\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos 2s, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin 2s, \frac{1}{3\sqrt{2}}\cos 3s, \frac{1}{3\sqrt{2}}\sin 3s)$$

şeklinde verilsin. Bu uzay eğrisinin **(**3.8**)** denklemlerinden yararlanarak Frenet çatı vektörleri

$\mathbf{t}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin 2s, \cos 2s, -\sin 3s, \cos 3s)$

$\mathbf{n}(s) = \frac{1}{\sqrt{13}}(-2\cos 2s, -2\sin 2s, -3\cos 3s, -3\cos 3s)$

$\mathbf{b}_2(s) = \frac{1}{\sqrt{13}}(-6\cos^2 s + 3, -6\cos s \sin s, 2\cos s(4\cos^2 s - 3), 2\sin s(4\cos^2 s - 1))$

$\mathbf{b}_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2\cos s \sin s, -(2\cos^2 s - 1), -(4\cos^2 s - 1), \cos s(4\cos^2 s - 3))$

olarak bulunur. Frenet eğrilikleri ise

$$k_1 = \frac{\sqrt{26}}{2} \quad k_2 = \frac{-5}{\sqrt{26}} \quad k_3 = \frac{-6\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$$

şeklindedir. $\alpha(s)$ eğrisinin **(4.1)** denklemlerinden yararlanarak quasi çatı vektörleri

$$\mathbf{t}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin 2s, \cos 2s, -\sin 3s, \cos 3s)$$

$$\mathbf{n}_q(s) = (0, 0, -\cos 3s, -\sin 3s)$$

$$\mathbf{b}_{q2}(s) = (1 - 2\cos^2 s, -2\sin s \cos s, 0, 0)$$

$$\mathbf{b}_{q1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2\cos s \sin s, \cos s(1 - 2\cos^2 s), (1 - 4\cos^2 s)\sin s, \cos s(4\cos^2 s - 3))$$

ve quasi eğrilikleri ise

$$k_{q1} = \frac{3}{\sqrt{2}} \quad k_{q2} = 0 \quad k_{q3} = \frac{-3}{\sqrt{2}} \quad k_{q4} = -\sqrt{2}$$

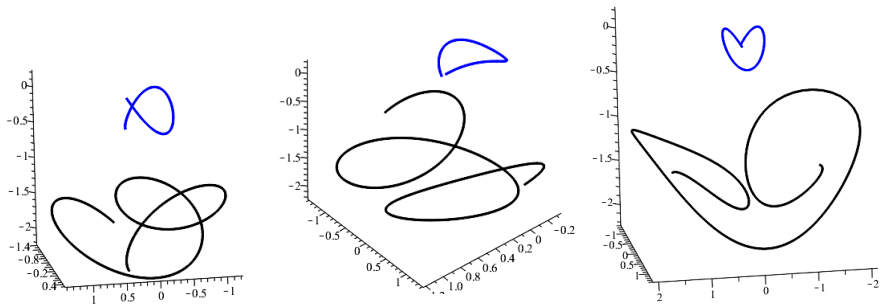
şeklinde bulunur. $\lambda = 2$ olmak üzere Mannheim eğri eşi $\beta(s) = \alpha(s) + \lambda \mathbf{b}_{q1}(s)$

$$\begin{aligned}
\beta(s) &= \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos 2s, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin 2s, \frac{1}{3\sqrt{2}}\cos 3s, \frac{1}{3\sqrt{2}}\sin 3s\right) \\
&\quad + \frac{2}{\sqrt{2}}(2\cos s \sin s, \cos s(1 - 2\cos^2 s), (1 - 4\cos^2 s)\sin s, \cos s(4\cos^2 s - 3)) \\
&= \left(3\sqrt{2}\cos s \sin s + \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos 2s, -\frac{3}{\sqrt{2}}(2\cos^2 s - 1)\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin 2s,\right. \\
&\quad \left. -\frac{3}{\sqrt{2}}(4\cos^2 s - 1)\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin s + \frac{1}{3\sqrt{2}}\cos 3s, \frac{3}{\sqrt{2}}\cos s(4\cos^2 s - 3)\frac{1}{3\sqrt{2}}\sin 3s\right)
\end{aligned}$$

olur. $\beta(s)$ eğrisinin quasi eğrilikleri ise

$$k_{q1}^{\lambda} = \frac{3\sqrt{82}}{\sqrt{119}} \quad k_{q2}^{\lambda} = 0 \quad k_{q3}^{\lambda} = \frac{3\sqrt{37}}{\sqrt{119}} \quad k_{q4}^{\lambda} = \frac{-2\sqrt{82}}{\sqrt{119}}$$

olarak hesaplanır. α eğrisinin xyz, xzt ve yzt izdüşüm uzaylarındaki eğri(mavi) ve $\lambda = 2$ için β Mannheim eğri eşi (siyah) grafikleri Şekil 5.7 de gösterilmiştir.



Şekil 5.7 xyz, xzt ve yzt uzaylarındaki eğri (mavi) ve Mannheim eğri eşi (siyah)

Örnek 5.2.2: 4-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^4$ de bir uzay eğrisi

$$\alpha(s) = (\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos 2s, \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin 2s, \frac{1}{3\sqrt{2}}\cos 3s, \frac{1}{3\sqrt{2}}\sin 3s)$$

olarak alınsın. Buradan $||\alpha(s)|| = 1$ olduğundan eğri yay parametresi ile verilmiştir.

Bu durumda $\alpha(s)$ ile verilen eğrinin Frenet vektörleri

$$\begin{aligned}
\mathbf{t} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin 2s, \cos 2s, -\sin 3s, \cos 3s) \\
\mathbf{n} &= \frac{-2}{\sqrt{52}}(-2\cos 2s, -2\sin 2s, -3\cos 3s, -3\sin 3s) \\
\mathbf{b}_2 &= \frac{-2}{\sqrt{52}}(3(2\cos^2 s - 1), 4\cos s \sin s, -2\cos s(4\cos^2 s - 3), 2\sin s(4\cos^2 s - 1)) \\
\mathbf{b}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{2}{\sqrt{2}}\cos s \sin s, -(2\cos^2 s - 1), -\sin s(4\cos^2 s - 1), \cos s(4\cos^2 s - 3))
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Buradan Frenet eğrilikleri

$$k_1 = \frac{13}{\sqrt{26}}, \quad k_2 = -\frac{5}{\sqrt{26}} \qquad \text{ve} \quad k_3 = -\frac{12}{\sqrt{26}}$$

olur. Benzer şekilde $\alpha(s)$ ile verilen eğrinin quasi çatı vektörleri ise

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_q &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin 2s, \cos 2s, -\sin 3s, \cos 3s) \\
\mathbf{n}_q &= (0, 0, -\cos 3s, -\sin 3s) \\
\mathbf{b}_{q2} &= (1 - 2\cos^2 s, -2\cos s \sin s, 0, 0) \\
\mathbf{b}_{q1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{2}{\sqrt{2}}\cos s \sin s, -(2\cos^2 s - 1), -\sin s(4\cos^2 s - 1), \cos s(4\cos^2 s - 3))
\end{aligned}$$

olup quasi eğrilikleri

$$k_{q1} = \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad k_{q2} = 0, \quad k_{q3} = -\frac{3}{\sqrt{2}} \qquad \text{ve} \quad k_{q4} = -\sqrt{2}$$

biçimindedir.

Buradan Mannheim eğri eşi $\beta(s) = \alpha(s) + \lambda\mathbf{b}_{q1}$ yapısında $\lambda = 3$ alınır ve elde edilen eşitlikler yerlerine yazılırsa Mannheim eğri eşi

$$\begin{aligned}
\beta(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{2}\cos 2s, \frac{1}{2}\sin 2s, \frac{1}{3}\cos 3s, \frac{1}{3}\sin 3s) \\
&\quad +3.\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{2}{\sqrt{2}}\cos s \sin s, -(2\cos^2 s - 1), -\sin s(4\cos^2 s - 1), \cos s(4\cos^2 s - 3))
\end{aligned}$$

bulunup gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\beta(s) &= (3\sqrt{2}\cos s \sin s + \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos 2s, \frac{-3}{\sqrt{2}}(2\cos^2 s - 1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin 2s, \\ &\quad \frac{-3}{\sqrt{2}}\sin s(4\cos^2 s - 1) + \frac{1}{3\sqrt{2}}\cos 3s, \frac{3}{\sqrt{2}}\cos s(4\cos^2 s - 3) + \frac{1}{3\sqrt{2}}\sin 3s)\end{aligned}$$

elde edilir.

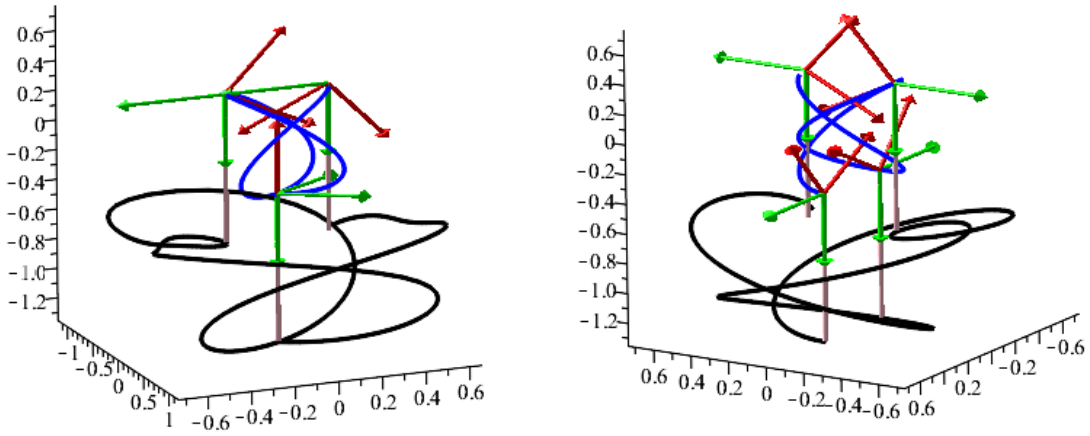
Buradan $\lambda = 3$ için xyz izdüşüm uzayındaki Mannheim eğri eşi

$$\beta(s) = (\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos 2s, \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin 2s, \frac{1}{3\sqrt{2}}\cos 3s)$$

ve xyt izdüşüm uzayındaki Mannheim eğri eşi

$$\beta(s) = (\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos 2s, \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin 2s, \frac{1}{3\sqrt{2}}\sin 3s)$$

olur ve $\alpha(s)$ eğrisi ile birlikte (mavi) Şekil 5.8 de gösterilmiştir.



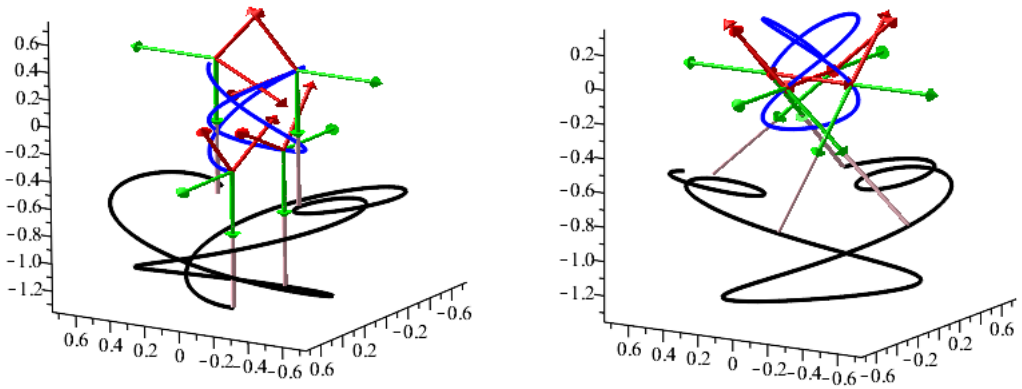
Şekil 5.8 xyz ve xyt uzaylarındaki eğri (mavi) ve Mannheim eğri eşi (siyah)

Benzer şekilde $\lambda = 3$ için xzt izdüşüm uzayındaki Mannheim eğri eşi

$$\beta(s) = (\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos 2s, \frac{1}{3\sqrt{2}}\cos 3s, \frac{1}{3\sqrt{2}}\sin 3s)$$

ve yzt izdüşüm uzayındaki Mannheim eğri eşi

$$\beta(s) = (\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin 2s, \frac{1}{3\sqrt{2}}\cos 3s, \frac{1}{3\sqrt{2}}\sin 3s)$$



Şekil 5.9 xzt ve yzt uzaylarındaki eğri (mavi) ve Mannheim eğri eşi (siyah)

olur ve $\alpha(s)$ eğrisi ile birlikte (mavi) Şekil 5.9 da gösterilmiştir.

Bu bölümde yapılan hesaplar, daha önce ki çalışmalarda olan Bertrand ve Mannheim eğri çiftleri için bulunanlarla benzerlik göstermektedir.

Bu tez çalışmasındaki grafikler Maple programı kullanılarak çizdirilmiştir.

6. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, 3-boyutlu Öklid uzayında Dede vd. tarafından 2015 yılında, bir uzay eğrisi boyunca tanımlanan quasi çatı kullanılarak 4-boyutlu Öklid uzayında quasi çatı tanımlanmıştır. 4-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına alternatif olarak quasi çatı tercih edilmesinin en önemli nedeni eğriliğin sıfır olduğu durumlarda bile quasi çatının hesaplanabiliyor olmasıdır. Tüm bunların yanı sıra quasi çatı teğet etrafında gereksiz bükülmeyi önler, hesaplanması daha kolaydır ve Frenet çatısına alternatif olan diğer çatılarla aynı doğrulukta sonuçlar verir ve onlara göre daha geneldir.

Çalışmamızda öncelikle 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısı, Frenet eğrilikleri, Frenet türev denklemleri, quasi çatı, quasi eğrilikleri, quasi türev denklemleri verilmiştir. Sonra 4-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısı, Frenet eğrilikleri, Frenet türev denklemleri ifade edilmiştir. Ardından 4-boyutlu Öklid uzayında alınan iki izdüşüm vektörü yardımıyla quasi çatıyı oluşturan teğet vektör, quasi-normal vektör ve birim quasi-normal vektörler hesaplanmıştır. Bunlara bağlı olarak quasi eğrilikler ve quasi türev denklemleri elde edilmiştir. Daha sonra 4-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısı ve Frenet eğrilikleri ile quasi çatı ve quasi eğrilikleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Frenet çatısı ve quasi çatıyı oluşturan vektörler arasındaki açılardan faydalanarak iki çatı arasındaki geçiş koşulları hesaplanmıştır. 4-boyutlu Öklid uzayında quasi çatı yardımıyla Bertrand ve Mannheim eğri çiftleri incelenmiştir. Tüm bu çalışmalar sonucunda 4-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısı ve quasi çatı için elde edilen veriler karşılaştırılmış ve quasi çatının Frenet çatısına göre avantajları ortaya konulmuştur. Ayrıca 4-boyutlu uzayda quasi çatı, quasi eğrilikleri ve quasi çatı ile ilgili teoremler örneklendirilmiş ve şekiller yardımıyla gösterilmiştir.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, Öklid uzayında temel kavramlara ve açıklamalara yer verilmiş ardından çalışmanın yapılmasına yardımcı olan teoremler, önermeler ve ispatlar sıralanmıştır. İfade edilen bu temel kavramlar; teorem, önerme ve ispatlar yardımıyla çalışmanın dördüncü bölümünde 4-boyutlu Öklid uzayında iki vektörün vektörel çarpımı tanımlı olmadığından iki adet izdüşüm vektörü alınarak quasi çatı tanımlanmıştır. Quasi çatı tanımlandıktan sonra quasi eğrilikleri ve quasi türev denklemleri hesaplanmıştır. Ardından 4-boyutlu uzayda Frenet çatısı ve quasi çatı arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Çatıyı oluşturan vektörler arasındaki açılar yardımıyla Frenet çatısı ve quasi çatı arasındaki geçiş şartları hesaplanmıştır. 4-boyutlu uzayda quasi çatıyla ilgili yapılan hesaplamalar sonucu elde edilen bilgilerden yola çıkarak Bertrand ve Mannheim eğri çiftleri incelenmiştir.

Benzer hesaplar Minkowski 4-uzayı, Galilean 4-uzay gibi 4-boyutlu farklı uzaylara taşınabilir. Bu uzaylarda quasi çatı kullanılarak Bertrand ve Mannheim eğri çiftleri için bazı özellikler verilebilir. 4-boyutlu uzayda veya daha yüksek boyutlu uzaylarda quasi çatı yardımıyla yüzeyler incelenebilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Alessio, O. (2009). *Differential Geometry of Intersection Curves R^4 of Three Implicit Surfaces*, Comput. Aided Geom. Des., 26, 455-471.

Azak, A. (2009). *Üç Boyutlu Lorentz Uzayı L^3 de Timelike Mannheim Eğri Çifti üzerine*, II, 35-45.

Ateş, F., Gök, İ., Ekmekçi, F. N. & Yaylı, Y. (2019). *Characterizations of Inclined Curves According to Parallel Transport Frame in E^4 and Bishop Frame in E^3*, Konuralp Journal of Mathematics, 7(1), 16-24.

Balgetir, H., Bektaş, M. & Inoguchi, J. (2004). *Null Bertrand Curves in Minkowski 3-space and Their Characterizations*, Note di Metamatica, 23(1), 7-13.

Bertrand, J.M. (1850). *Memoire Sur la Theorie Des Courbes a Double Courbure,* Journal de Mathematiques Pures Et Appliquees, 15, 332-350.

Bishop, R. L. (1975). *There is More Than One Way to Frame a Curve*, The American Mathematical Monthly, 82(3), 246-251.

Bloomenthal, J. (1990). *Calculation of Reference Frames Along a Space Curve*, Graphics gems, Academic Press Professional, Inc., San Diego, CA.

Blum, R. (1966). *A Remarkable Class of Mannheim-Curves,* Canadian Mathematical Bulletin, 9(2), 223-228.

Bulca, B. (2012). *A characterization of a Sufaces in E^4*, Uludağ Üniversitesi, Phd. Thesis.

Bulca B., Arslan K., Bayram, B. & Öztürk, G. (2017). *Canal Surfaces in 4-dimensional Euclidean Space*, An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications, 7(1), 83-89.

Choi, J., Kang, T. & Kim, Y. (2012). *Bertrand Curves in 3-dimensional Space Forms*, Applied Mathematics and Computation, 219(3), 1040-1046.

Coquillart, S. (1987). *Computing Offsets of B-spline Curves,* Computer-Aided Design, 19(6), 305-309.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Darboux, J.G. (1896). *Leçons Sur La Théorie Générale Des Surfaces Et Les Applications Géométriques Du Calcul Infinitésimal*, Gauthier-Villars et Fils, Imprimeurs-Libraires, De L'école Polytechnique, Du Burbau des Longitudes, Quai des Grands-Augistins, 55, Paris.

Dede, M., Ekici, C. & Görgülü, A. (2015). *Directional q-frame Along a Space Curve*, IJARCSSE, 5(12), 775-780.

Dede, M., Ekici, C. & Güven, I.A. (2018). *Directional Bertrand Curves,* Gazi University Journal of Science, 31(1), 202-211.

Dede, M., Ekici, C. & Tozak, H. (2015). *Directional Tubular Surfaces*, International Journal of Algebra, 9(12), 527-535.

Do Carmo, M.P. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Elsharkawy, A. & Elshenhab, A. M. (2022). Mannheaim Curves and Their Partner Curves in Minkowski 3-space E_1^3, Demonstratio Mathematica, 55, 798-811.

Elzawy, M. (2017). Smarandache Curves and Euclidean, (4-space) E^4,Journal of Egyptian Mathematical Society.

Ekici, C. (2021). *Eğrilerin ve Yüzeylerin Diferensiyel Geometrisi,* 371, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Basımevi, Eskişehir.

Frenet, F. (1852). *Sur les Courbes à Double Courbure, Thèse, Toulouse*, Abstract in Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 17, 437-447.

Gray, A. (1993). *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces*, CRS Press, Inc.

Gökçelik, F. Bozkurt, Z. Gök, İ., Ekmekçi, F. N. & Yaylı, Y. (2014). *Parallel Transport Frame in 4-dimensional Euclidean Space* E^4, Caspian Journal of Mathematical Sciences (CJMS) University of Mazandaran, 3(1), 91-102.

Gürhan, N. (2013). *Frenet Eğrisi ile Bağlantılı Eğriler ve Uygulamaları*, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Hacısalihoğlu, H.H. (1998). *Diferensiyel Geometri,* Ankara Üniversitesi, Ankara.

Hacısalihoğlu, H.H. (1993). *Diferensiyel Geometri,* Cilt I, Ankara Üniversitesi, Ankara.

Hanson, A. J. & Ma, H. (1995), *Parallel Transport Approach to Curve Framing,* Tech. Math. Rep. Indiana University Computer Science Department*, 425, 1-20.*

Honda, S. & Takahashi, M. (2020). *Bertrand and Mannheim Curves of Framed Curves in the 3-dimensional Euclidean Sapce*, Turkish Journal of Mathematics, 44(3), 883-899.

Honda, S., Takahashi, M. & Yu, Haiou. (2023). *Bertrand and Mannheim Curves of Framed Curves in the 4-dimensional Euclidean Sapce*, Journal of Geometry, 114(12), 1-21.

Irmak, Y. (2018). *Dört Boyutlu Öklid Uzayında Bertrand Eğrileri ve Geometrik Uygulmaları,* Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi.

Kahraman, T., Önder, M., Kazaz, M. & Uğurlu, H. H. (2011). Some Characterizations of Mnanheim Partner Curves in the Minkowski 3-space E_1^3, Proceedings of the Estonian Academy of Sciences, 60(10), 210-220.

Kazaz, M., Uğurlu, H. H., Önder, M. & Oral, S. (2014). *Bertrand partner D-curves in the Minkowski 3-space* E_1^3, Mathematical Sciences and Applications E-Notes, 2(1), 68-82.

Kandilci, G. T., Ekici, C. & Dede, M. (2023). *Directional Bertrand Curves in Minkowski Space*, Innovative Reserch in Natural Science and Mathematics (15-38), Duvar Yayınları.

Klok, F. (1986). *Two Moving Coordinate Frames for Sweeping Along a 3D Trajectory*, Comput. Aided Geom. Des., 3, 217-229.

Körpınar, T. & Turhan, E. (2013). *Biharmonic curves according to parallel transport frame in E4,* Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica, 31(2), 213-217.

Kuhnel, W. (2006). *Differential Geometry Curves-Surfaces-Manifolds,* American Mathematical Society, Second Edition.

Lai H., 1967, Weakened Bertrand curves, Tôhoku Mathematical Journal, 19(2), 141-155.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Liu, H. & Wang, F. (2008). *Mannheim Partner Curves in 3-space*, Journal of Geometry, 88, 120-126.

Matsuda, H. & Yorozu, S. (2003). *Notes on Bertrand Curves*, Yokohama Mathematical Journal, 50, 41-58.

Matsuda, H. & Yorozu, S. (2009). *On Generalized Mannheim Curves in Euclidean 4-space*, Nihonkai Math. J., 20, 33-56.

Olah-Gol, R. & Pal, L. (2009). *Some Notes on Drawing Twofolds in 4-Dimensional Euclidean Space*, Acta Universitatis Sapientiae, Informatica, 1(2), 125-134.

Orbay, K., & Kasap, E. (2009). *On Mannheim Partner Curves in* E^3, International Journal of Physical Sciences, 4(5), 261-264.

Öztekin, H., & Bektaş, M. (2010). *Representation Formulae for Bertrand Curves in the Minkowski 3-space*, Scientia Magna, 6(1), 89-96.

Sabuncuoğlu, A. (2010). *Diferensiyel Geometri,* Nobel Yayınları, Türkiye.

Şentürk, G. Y. & Yüce, S. (2015). *Characteristic properties of the ruled surface with Darboux frame in* E^3, Kuwait J. Sci., 42(2), 14-33.

Shaw, R. (1987). *Vector Cross Products in n Dimensions*, International of Mathematical Education, 18(6), 803-816.

Serret, J.A. (1851). *Sur Quelques Formules Relatives à la Théorie des Courbes à Double Courbure*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 16, 193-207.

Tarım, G., (2016). *Minkowski Uzayında Yönlü Eğriler Üzerine*, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi.

Tuncer, Y., Karacan, M. K. & Yonn, D. W. (2017). *Non-null Weakened Mnanheim Curves in Minkowski 3-space*, Annals of the Alexandru Ioan Cuza University-Mathematics, 2, 403-412.

Wang, F. & Liu, H. L. (2007). *Mannheim Partner Curves in 3-Euclidean Space*, Mathematics in Practice and Theory, 37(1), 141-43.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Venant, B.S. (1845). *Memoire Sur Les Lignes Courbes Non Planes*, Journal de I'Ecole Polytechnique, 18, 1-76.

Yanlin, Li., Uçum, A., İlarslan, K. & Camcı, Ç. (2022). *A New Class of Bertrand Curves in Euclidean 4-space*, Symmetry, 14(6), 1191-1202.

Yılmaz, S. & Turgut, M. (2010). *A New Version of Bishop Frame and An Application to Cpherical Images*, J. Math. Anal. Appl., 371, 764-776.

Yüce, S. (2017). *Öklid Uzayında Diferansiyel Geometri*, Pegem Akademi Yayıncılık, Ankara.