ARABA-KAYAN EKSANTRİK KÜTLELİ ANKASTRE-SERBEST KİRİŞ SİSTEMİNİN BASKIN MODAL MODELİ: EULER-BERNOULLI TABANLI ANALİTİK-NÜMERİK BİR İNCELEME

Mak.Yük.Müh., Serdar Murat DEMİREL/ Prof.Dr., Naci ZAFER

Serbest Mühendis, Makine Teorisi ve Dinamiği, smdemirel@gmail.com, 0000-0003-1503-4206

Eskişehir Osmangazi Üni., Makine Teorisi ve Dinamiği, nzafer@ogu.edu.tr, 0000-0001-5026-9102

Özet

Bu çalışmada, yatay doğrultuda hareket eden bir araba üzerine ankastre bağlanmış elastik bir kiriş ve kiriş boyunca hareket eden eksantrik bir kütleden oluşan sistem için baskın modal model analitik olarak elde edilmiş ve iki farklı çalışma durumu için nümerik zaman cevapları hesaplanmıştır. İncelenen durumlar, (i) araba sabitken kayan eksantrik kütlenin kiriş üzerindeki hareketi ve (ii) arabanın trapezoidal hız profili ile hareket ettiği durumda aynı kayan kütle hareketinin kiriş dinamiği üzerindeki etkisidir. Sürekli model Euler-Bernoulli kiriş denklemi ile kurulmuş, *Birinci Mod Temelli Modal İndirgeme* yaklaşımı ile birinci moda indirgenmiş ve hareketli kütle ile eksantrik ofsetin zamanla değişen atalet, sönüm-benzeri ve rijitlik-benzeri katkıları baskın modal denkleme dahil edilmiştir.

Elde edilen zamanla değişen katsayılı baskın modal denklem, sabit parametreli kapalı form çözüme elverişli olmadığından MATLAB ortamında ode45 ile çözülmüştür. Sayısal inceleme, kayan kütlenin tek başına dahi kirişin eşdeğer modal frekansını önemli ölçüde değiştirdiğini; araba taban ivmesinin eklenmesi halinde ise tepe yer değiştirme ve residual titreşim seviyelerinin belirgin biçimde arttığını dolayısı ile, araba-kayan kütleli kiriş sistemlerinde baskın mod yaklaşımının fiziksel içgörü üretmek açısından güçlü olduğunu ve taban hareketi ile kayan kütle etkilerinin birlikte ele alınmasının zorunlu olduğunu göstermektedir.

Anahtar Kelimeler: Euler-Bernoulli kiriş, assumed modes, hareketli kütle, hareketli taban, baskın mod, analitik-nümerik çözüm, MATLAB simülasyonu

DOMINANT MODAL MODEL OF A CLAMPED-FREE BEAM SYSTEM WITH A CART AND A SLIDING ECCENTRIC MASS: AN EULER–BERNOULLI-BASED ANALYTICAL-NUMERICAL STUDY

Msc., Serdar Murat DEMİREL/ Prof.Dr., Naci ZAFER

Freelance Engineer, Theory of Machines and Dynamics, smdemirel@gmail.com, 0000-0003-1503-4206

Eskişehir Osmangazi Uni., Theory of Machines and Dynamics, nzafer@ogu.edu.tr, 0000-0001-5026-9102

Abstract

In this study, a dominant modal model is derived analytically for a system consisting of an elastic beam clamped to a cart moving in the horizontal direction and an eccentric mass traveling along the beam. Numerical time responses are computed for two different operating conditions. The investigated cases are: (i) the motion of the sliding eccentric mass along the beam while the cart is stationary, and (ii) the effect of the same sliding mass motion on the beam dynamics when the cart moves with a trapezoidal velocity profile. The continuous system is formulated using the Euler–Bernoulli beam equation, reduced to the first mode via the assumed-modes approach, and the time-varying inertia, damping-like, and stiffness-like contributions of the moving mass and its eccentric offset are incorporated into the dominant modal equation.

Since the resulting dominant modal equation has time-varying coefficients and is not amenable to a closed-form solution with constant parameters, it is solved numerically in MATLAB using ode45. The numerical investigation shows that even the sliding mass alone significantly alters the equivalent modal frequency of the beam; when base acceleration due to cart motion is included, peak displacement and residual vibration levels increase markedly. Therefore, the results demonstrate that the dominant mode approach provides strong physical insight for cart–beam systems with a sliding mass, and that it is essential to consider the combined effects of base motion and moving mass dynamics.

Keywords: euler–bernoulli beam, assumed modes, moving mass, moving base (base excitation), dominant mode, analytical–numerical solution, matlab simulation

GİRİŞ VE LİTERATÜR

Hareketli kütle taşıyan esnek kiriş sistemleri, vinçler, otomatik depolama ve geri alma sistemleri, raylı taşıyıcı yapılar ve hassas konumlama düzenekleri gibi birçok mühendislik uygulamasında ortaya çıkmaktadır. Bu tür sistemlerde dinamik davranış, yalnız kirişin elastik özelliklerine değil, aynı zamanda hareketli kütlenin konumuna, hızına ve ivmesine de bağlıdır. Eğer bir kiriş araba gibi hareketli taban üzerine bağlıysa, problem daha da karmaşık hale gelir; çünkü bu durumda yapıya hem kayan kütlenin iç kuplajı hem de taban ivmesi kaynaklı dış uyarım aynı anda etki eder [1-4].

Hareketli yük ve hareketli kütle problemleri literatürde uzun süredir incelenmektedir[1][2. Hareketli kütlenin kiriş dinamiğine doğrudan katılması halinde ise problem, yalnız dış kuvvet etkisiyle sınırlı kalmamakta; kütlenin taşıdığı atalet, Coriolis-benzeri kuplaj ve zamanla değişen modal parametreler sistem denklemlerine girmektedir. Literatürde yapılan çalışmalar zamanla değişen hareketli kütle-kiriş sistemleri için modal parametre tahminlerinde bu tip sistemlerin sabit katsayılı modellere indirgenemeyeceğini göstermiştir [3]. Ayrıca hareketli tabana bağlı ankastre kiriş dinamiğinde taban ivmesinin modal koordinatlara projeksiyonu mümkündür [4].

Bu çalışmalara ek olarak, hareketli kütle altındaki kiriş davranışının hız profiline duyarlı olduğunu ve özellikle trapezoidal hareket profillerinin dinamik cevabı önemli ölçüde etkilediğini göstermiştir [5]. Bununla birlikte mevcut literatürde, araba hareketi ile kiriş üzerinde kayan eksantrik kütle hareketini aynı baskın modal model içinde toplayan ve ardından iki farklı işletim durumu için zaman cevaplarını karşılaştırmalı biçimde sunan çalışmalar görece sınırlıdır. Özellikle eksantrik kütlenin yalnız translasyonel etkisinin değil, ofset kaynaklı dönel atalet katkısının da baskın mod denklemi içine nasıl dahil edileceğinin sistematik sunumu az sayıdadır.

Bu çalışma, literatürdeki söz konusu boşluğu analitik-nümerik bir çerçeve ile hedeflemektedir. Amaç, tam süreklilik gösteren Euler-Bernoulli modelinden başlayarak birinci mod baskın kabulü ile zamanla değişen katsayılı baskın modal denklemi türetmek, bu denklemi iki işletim durumu için MATLAB ortamında çözmek ve kiriş zaman cevaplarını yorumlamaktır. Çalışma kasıtlı olarak kontrolör, giriş şekillendirme veya deneysel modal tanımlama bölümlerini dışarıda bırakmakta; yalnızca model, denklemlerin eldesi, nümerik çözüm ve elde edilen dinamik sonuçlar üzerine odaklanmaktadır.

1. KURAMSAL ÇERÇEVE

1.1 Euler-Bernoulli Kiriş Denklemi

Kirişin, araba ile birlikte hareket eden yerel koordinat sistemindeki enine yer değiştirmesi $w(x,t)$ olmak üzere, klasik Euler-Bernoulli yaklaşımında, homojen ve ince bir ankastre-serbest kiriş için yönetici denklem

$$\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+c\frac{\partial w}{\partial t}+EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=f(x,t) \tag{1}$$

şeklindedir [6]. Burada $x\in[0,L]$ kiriş boyunca uzaysal koordinat, E Young modülü, I ikinci alan momenti, ρ yoğunluk, A kesit alanı ve c eşdeğer viskoz sönüm katsayısıdır.

Ankastre-serbest sınır koşulları

$$w(0,t)=0,\frac{\partial w}{\partial x}(0,t)=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L,t)=0,\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(L,t)=0 \tag{3}$$

olarak yazılır. Bu sınır koşulları altında, serbest titreşim probleminin birinci özdeğer kökü

$$\beta_1 L = 1.875104 \ldots \quad (4)$$

olup birinci doğal frekans

$$\omega_1 = \beta_1^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \frac{1}{L^2} \quad (5)$$

ile belirlenir [6,7].

1.2 Birinci Mod Temelli Modal İndirgeme Yaklaşımı ve Baskın Mod

Yer değiştirme alanı modal açılım ile

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) q_n(t) \quad (6)$$

şeklinde yazılabilir. Bu çalışmada birinci modun baskın olduğu kabul edilerek

$$w(x,t) \approx \phi(x) q(t) \quad (7)$$

yaklaşımı kullanılmıştır. Burada $\phi(x)$, uca göre normalize edilmiş birinci mod şeklidir. Ankastre-serbest kiriş için tip-normalize mod şekli

$$\phi(x) = \frac{\cosh(\beta x) - \cos(\beta x) - \sigma[\sinh(\beta x) - \sin(\beta x)]}{\cosh(\beta L) - \cos(\beta L) - \sigma[\sinh(\beta L) - \sin(\beta L)]} \quad (8)$$

$$\sigma = \frac{\cosh(\beta L) + \cos(\beta L)}{\sinh(\beta L) + \sin(\beta L)}, \beta = \frac{\beta_1 L}{L} \quad (9)$$

ifadesiyle verilir.

Bu mod şekline karşılık gelen kirişe ait modal kütle, modal rijitlik ve taban ivmesi katılım katsayıları sırasıyla

$$M_b = \int_0^L \rho A \, \phi^2(x) \, dx \quad (10)$$

$$K_b = M_b \omega_1^2 \quad (11)$$

$$P_b = \int_0^L \rho A \phi(x) \, dx \quad (12)$$

olarak tanımlanır.

1.3 Araba-Kayan Eksantrik Kütleli Sistemin Baskın Modal Denklemi

1.3.1 Kinematik Tanımlar

Arabanın yatay taban ivmesi $a_b(t)$ ile, kayan kütlenin kiriş üzerindeki konumu ise $s(t)$, eksantrik hareketli kütlenin değeri m, eksantrik ofseti e olmak üzere, kütlenin kiriş üzerindeki modal noktadaki enine yer değiştirmesi

$$w_m(t) = \psi(s(t)) q(t) \quad (13)$$

olarak yazılır. Burada

$$\psi(s) = \phi(s) + e\phi'(s) \quad (14)$$

eşdeğer modal şekil fonksiyonudur. Bu noktadaki hız ifadesi

$$\dot{w}_m = \psi(s)\dot{q} + \psi'(s)\dot{s}q \tag{15}$$

şeklindedir. Burada

$$\psi'(s) = \phi'(s) + e\phi''(s) \tag{16}$$

olur. Küçük dönme varsayımı altında lokal eğim

$$\theta(s,t) \approx \phi'(s)\, q(t) \tag{17}$$

ile elde edilir.

1.3.2 Enerji İfadeleri

Kirişe ait kinetik enerji, birinci mod temelli modal indirgeme yaklaşımı altında

$$T_b = \frac{1}{2} M_b \dot{q}^2 \tag{18}$$

şeklindedir. Kayan kütlenin translasyonel kinetik enerjisi

$$T_m = \frac{1}{2} m(\psi(s)\dot{q} + \psi'(s)\dot{s}q)^2 \tag{19}$$

olarak yazılır. Eksantrik ofset e için dönel atalet $J_e = me^2$ kabul edilirse, küçük dönme varsayımı altında ek kinetik enerji

$$T_e = \frac{1}{2} J_e(\phi'(s)\dot{q} + \phi''(s)\dot{s}q)^2 \tag{20}$$

şeklinde ifade edilir.

Kirişe ait elastik potansiyel enerji

$$V = \frac{1}{2} K_b q^2 \tag{21}$$

olarak yazılır. Yerçekimi etkisi, genelleştirilmiş kuvvet formunda temsil edilmiştir:

$$Q_g(s) = mg\psi(s) + Q_{g,b} \tag{22}$$

burada $Q_{g,b}$, kiriş öz-ağırlığından gelen genelleştirilmiş kuvvettir.

1.3.3 Lagrange Denklemleri ile Elde Edilen Baskın Modal Denklem

Lagrange denklemi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q}\frac{\partial V}{\partial q}\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = Q \tag{23}$$

biçiminde yazılır. Burada $T = T_b + T_m + T_e$, Rayleigh sönüm fonksiyonu ise

$$D = \frac{1}{2} C_b \dot{q}^2 \tag{24}$$

olarak kabul edilmiştir. Düzenleme sonunda aşağıdaki zamanla değişen katsayılı baskın modal denklem elde edilir:

$$M_{eq}(t)\ddot{q} + C_{eq}(t)\dot{q} + K_{eq}(t)q = Q_g(s) - [P_b + m\psi(s)]a_b(t) \quad (25)$$

Burada

$$M_{eq}(t) = M_b + m\psi^2(s) + J_e[\phi'(s)]^2 \quad (26)$$

$$C_{eq}(t) = C_b + 2m\psi(s)\psi'(s)\dot{s} + 2J_e\phi'(s)\phi''(s)\dot{s} \quad (27)$$

$$K_{eq}(t) = K_b + m[\psi(s)\psi''(s)\dot{s}^2 + \psi(s)\psi'(s)\ddot{s}] + J_e[\phi'(s)\phi'''(s)\dot{s}^2 + \phi'(s)\phi''(s)\ddot{s}] \quad (28)$$

ifadeleridir. Burada

$$\psi''(s) = \phi''(s) + e\phi'''(s) \quad (29)$$

oarak tanımlanmıştır.

Bu denklem üç önemli fiziksel mekanizmayı aynı anda içerir:

1. $M_{eq}(t)$: kayan kütle ve eksantrik ofset nedeniyle zamanla değişen eşdeğer modal atalet,
2. $C_{eq}(t)$: kayan kütlenin hızı ile oluşan Coriolis-benzeri modal kuplaj,
3. $K_{eq}(t)$: kütlenin ivmesi ve hızının kareleriyle değişen parametre-benzeri rijitlik katkıları.

1.3.4 İncelenen Özel Durumlar

Bu çalışmada iki özel durum incelenmiştir. Bunlardan birincisi Durum A olarak adlandırılacak olan "Arabanın hareketli, kayan eksantrik kütlenin sabit" olduğu durumdur. Bu durum için

$$s(t) = s_0 \quad (30)$$

olup

$$\dot{s}(t) = 0, \ddot{s}(t) = 0 \quad (31)$$

şeklindedir. Buna rağmen araba ivmesi sıfır değildir ve sistem taban ivmesi ile zorlanmaktadır. Bu durumda eşdeğer modal katsayılar zamanla değişmemekte, ancak titreşim cevabı araba ivmesinden etkilenmektedir.

İkinci durum olan Durum B'de hem araba hem de eksantrik kütle trapezoidal hareket profili ile hareket etmektedir. Bu durumda $s(t)$, $\dot{s}(t)$ve $\ddot{s}(t)$ zamanla değiştiğinden eşdeğer modal parametreler de beraberinde zamanla değişmektedir. Böylece sistem hem kayan eksantrik kütlenin iç kuplajı hem de araba taban ivmesi etkisi altında zorlanmaktadır.

2 NUMERİK ANALİZ

2.1 Birinci Dereceden Durum Uzayı Formu

Tam analitik kapalı formun çözümü, $s(t)$, $\dot{s}(t)$, $\ddot{s}(t)$ ve $a_b(t)$ terimleri zamanla değiştiği için genel durumda mümkün değildir. Bu nedenle modal denklem, aşağıdaki birinci mertebe durum uzayı biçimine dönüştürülmüştür: $x_1 = q, x_2 = \dot{q}$ olmak üzere

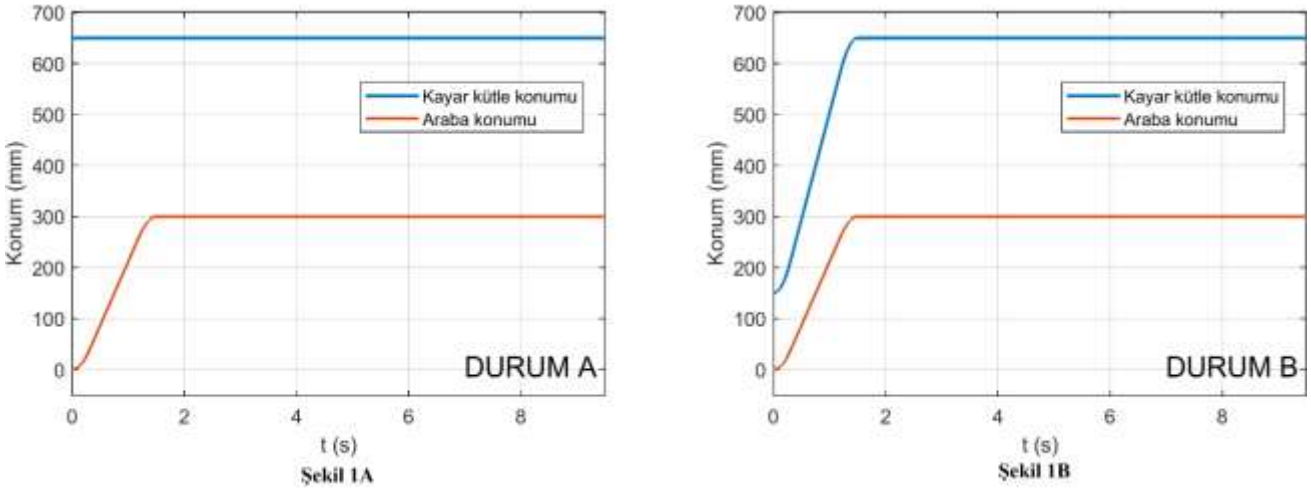
$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (32)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{Q_g(s) - [P_b + m\psi(s)]a_b(t) - C_{eq}(t)x_2 - K_{eq}(t)x_1}{M_{eq}(t)} \quad (33)$$

Bu sistem MATLAB ortamında ode45 ile çözülmüştür.

2.2 Hareket Profilleri

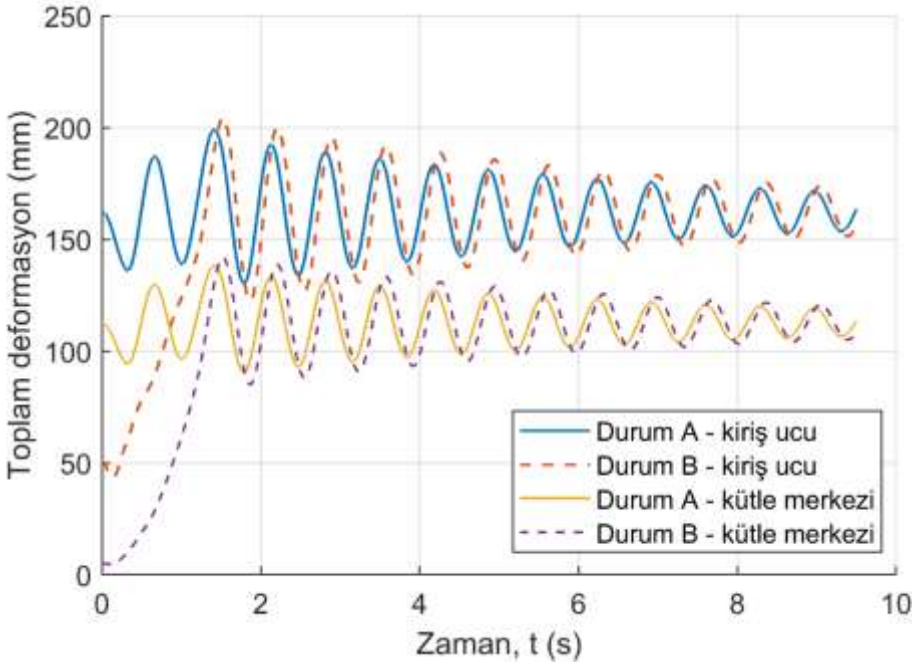
Hem kayan kütle hem de araba hareketi için analitik trapezoidal profil kullanılmıştır. Toplam hareket süresi $T_{move} = 1.5$ s olup ivmelenme, sabit hız ve yavaşlama evreleri $N_a : N_c : N_d = 20 : 60 : 20$ oranında tanımlanmıştır (Şekil 1). Durum A için sabit olan kayan kütle başlangıç konumu 0.65 m'dir. Durum B'de ise kayan kütlenin başlangıç konumu 0.15m toplam kayma mesafesi 0.50 m'dir. Her iki durum için arabanın toplam yatay yer değiştirmesi 0.30 m olarak alınmıştır (Şekil 1B). Bu profil seçimi ile $s(t)$, $\dot{s}(t)$, $\ddot{s}(t)$ ve analitik olarak elde edilmiş, sonra durum denklemlerine doğrudan uygulanmıştır.



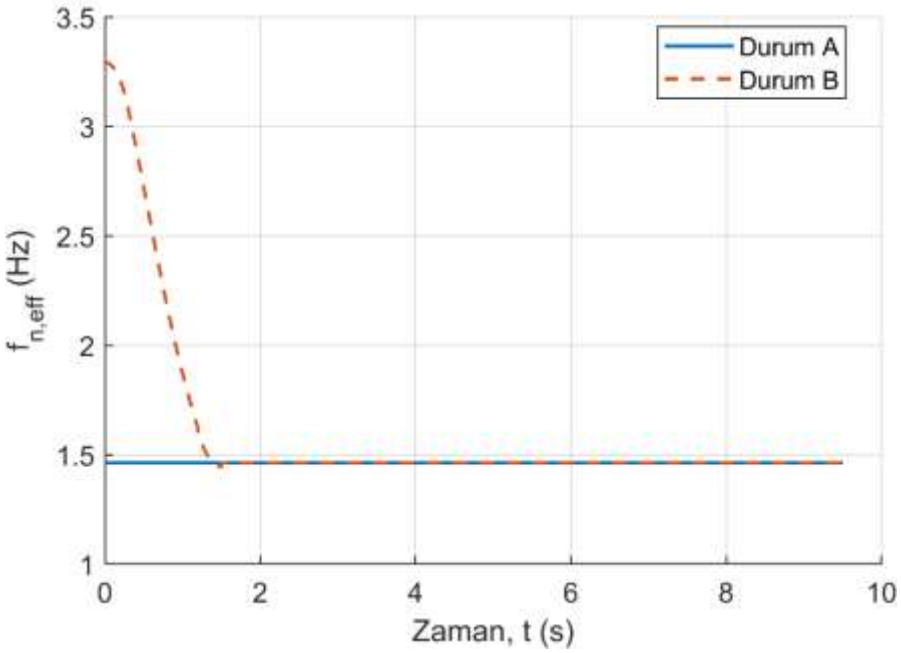
Şekil 4. Hareket profilleri

3 SİMÜLASYON

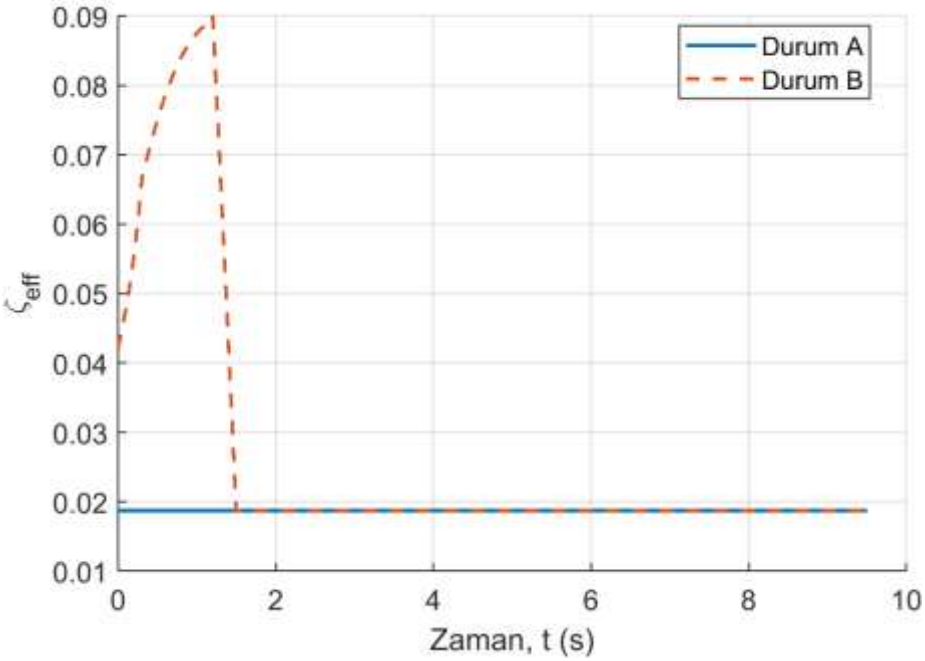
Sayısal çözüm için MATLAB kullanılarak kiriş ve kayan eksantrik kütle parametreleri tanımlanmış, birinci mod şekli ve türevleri analitik olarak hesaplanmış, Durum A ve Durum B için hareket profilleri oluşturulmuş (Şekil 1), baskın modal denklem ode45 çözümleyicisi ile çözülmüş ve karşılaştırmalı olarak uç nokta ile hareketli kütlenin merkezinin deformasyona bağlı yer değiştirmesi (Şekil 2), anlık eşdeğer modal frekans (Şekil 3), anlık eşdeğer sönüm oranı (Şekil 4) ile modal enerjiye (Şekil 5) ait grafikler elde edilmiştir.



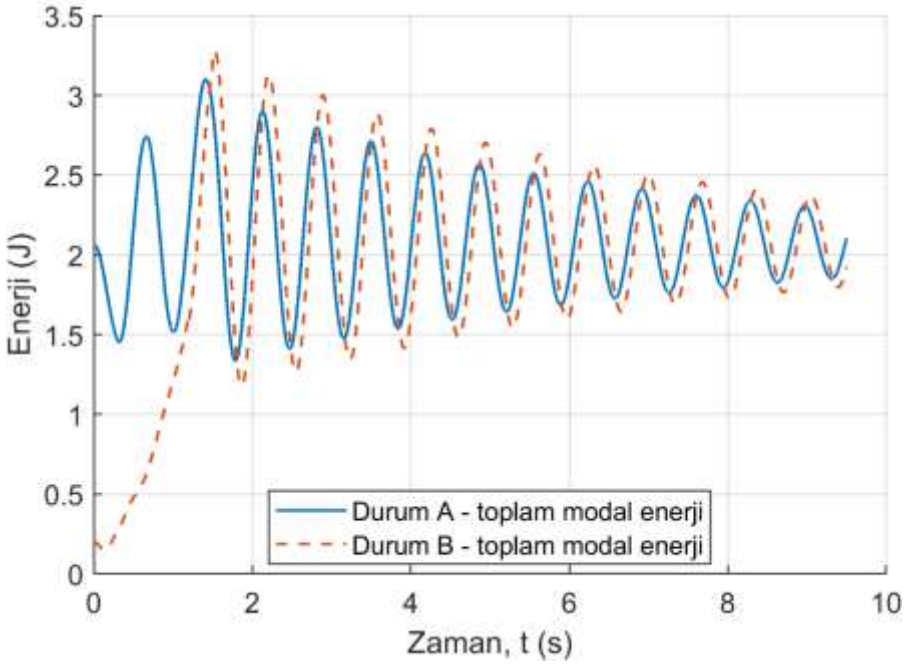
Şekil 5. Durum A ve Durum B için uç nokta ve eksantrik hareketli kütlenin yer değiştirmesi



Şekil 6. Anlık eşdeğer modal frekans



Şekil 7. Anlık eşdeğer sönüm oranı



Şekil 8. Toplam modal enerji

3 SONUÇLAR

3.1 Parametreler

Problemin çözümünde kullanılan temel fiziksel parametreler şunlardır: Kiriş uzunluğu: $L = 1.0$ m, Genişlik: $b = 40$ mm, Kalınlık: $h = 4.17$ mm, Elastisite modülü: $E = 210$ GPa, Yoğunluk: $\rho = 7850$ kg/m^3,

Kayan kütle: $m = 3.0$ kg, Eksantrik ofset: $e = 130$ mm, Referans yapısal sönüm oranı: $\zeta_b = 0.044609$. Bu parametrelerle, yalın kirişin birinci doğal frekansı $f_{1,b} = 3.484104$ Hz olarak hesaplanmıştır.

3.2 Simülasyon Sonuçları

Simülasyon sonrası elde edilen değerler Tablo 1'de özetlenmektedir. Sayısal bulgular, sistem dinamiğine ilişkin üç temel değerlendirmeyi desteklemektedir.

Birinci olarak, kayan kütlenin yalnızca sisteme eklenen sabit bir kütle olarak değil, aynı zamanda zamana bağlı modal katsayıların oluşmasına neden olan bir iç kuplaj mekanizması olarak ele alınması gerektiği görülmektedir. Modelde yalnızca sabit ek kütle yaklaşımının kullanılması durumunda, doğal frekanstaki zamana bağlı değişim ile hız etkilerinden kaynaklanan sönüm-benzeri katkıların temsil edilmesi mümkün olmamaktadır.

İkinci olarak, eksantrik ofsetten kaynaklanan dönel atalet etkisinin baskın modal denkleme sistematik biçimde dahil edilebildiği ve bu katkının özellikle kütlenin kiriş boyunca distal bölgelere ilerlediği durumlarda etkin ataleti belirgin şekilde artırdığı belirlenmiştir. Böylece, fiziksel davranışı koruyan ancak hesaplama açısından sadeleştirilmiş tek serbestlik dereceli bir model yapısının elde edilmesi mümkün olmaktadır.

Üçüncü olarak, araba hareketi ile kayan kütle hareketinin eşzamanlı olarak gerçekleşmesi yalnızca sistem üzerindeki dinamik zorlamanın genliğini artırmamakta, aynı zamanda modal cevabın zaman içerisindeki faz karakteristiğini ve residual titreşim seviyesini de önemli ölçüde değiştirmektedir. Bu nedenle, hareketli taban etkisi içeren sistemlerin modellenmesinde yalnızca sabit taban varsayımına dayanan kayan kütle yaklaşımlarının yeterli doğruluk sağlamadığı sonucuna ulaşılmıştır.

PARAMETRE	DEĞER	
	DURUM A	DURUM B
Başlangıç Statik Modal Yer Değiştirme	162.2632 mm	50.5018 mm
Tepe Uç Yer Değiştirmesi	198.8736 mm	204.4052 mm
Hareket Sonrası Uç RMS Değeri	13.7069 mm	17.5580 mm
Hareket Sonunda Eşdeğer Modal Frekans	1.4624 Hz	1.4624 Hz
Hareket Sonunda Eşdeğer Sönüm Oranı	0.018724	0.018724

Tablo 1. Simülasyon sonrası hesaplanan değerler.

4. SONUÇ

Bu çalışmada, araba-kayan eksantrik kütleli ankastre-serbest kiriş sistemi için Euler-Bernoulli temelli baskın modal model analitik olarak türetilmiş ve iki farklı işletim durumu için nümerik zaman cevapları hesaplanmıştır. Assumed-modes yaklaşımı ile elde edilen model, kayan kütlenin konum, hız ve ivmesinden gelen etkileri; ayrıca eksantrik ofsetin dönel atalet katkısını aynı modal denklem içinde birleştirmektedir.

Çalışmada gözlenmiş olan ve zamanla değişen eşdeğer sönüm davranışı, klasik yapısal viskoz sönümden farklı olarak hareketli eksantrik kütlenin oluşturduğu hız-bağımlı iç kuplaj etkisinden kaynaklanmaktadır. Özellikle hareketli kütle hızının sıfır olmadığı durumda ortaya çıkan $2m\psi(s)\psi'(s)\dot{s}$ teriminin, modal denklem içerisinde

sönüm-benzeri bir katkı oluşturduğu görülmektedir. Ancak bu durum fiziksel bir enerji yutumu artışı anlamına gelmemekte; sistem enerjisinin modal titreşim ile hareketli kütlenin taşınım kinetiği arasında yeniden dağıtılmasını temsil etmektedir. Literatürde bu tür davranışlar hareketli sistemlerin non-self-adjoint ve convective karakteri ile ilişkilendirilebilir [8].

Araba hareketinin eklenmesi ile tepe yer değiştirme ve residual titreşim seviyelerinin değişimi net bir şekilde görülmektedir. Yani sistemin dinamik karakterinin, yalnız kütle varlığına değil, kütlenin zaman içindeki taşınma biçimine ve taban hareketine de güçlü biçimde bağlı olduğu ortaya konmuştur. Bu durum gelecekte tasarlanması muhtemel titreşim baskılayan bir kontrolör tasarımında önem arz etmektedir.

Bu çerçevede baskın mod modeli, daha karmaşık tam alan çözümlerden önce kullanılabilecek güçlü bir analitik-nümerik araç sunmaktadır. İleride, aynı modelin deneysel verilerle güncellenmesi, çok modlu genişletilmesi ve kontrol sentezi için temel alınması mümkündür.

KAYNAKLAR

[1] Frýba, L. (1972). *Vibration of Solids and Structures Under Moving Loads*. Springer.

[2] Ouyang, H. (2011). Moving-load dynamic problems: A tutorial. *Mechanical Systems and Signal Processing, 25*(6), 2039-2060. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2010.12.010

[3] Ma, Z.-S., Su, D.-L., Zhang, Y., & Wang, Y. (2014). Modal parameter estimation of the coupled moving-mass and beam time-varying system. In *ISMA 2014*.

[4] Kane, T. R., Ryan, R. R., & Banerjee, A. K. (1987). Dynamics of a cantilever beam attached to a moving base. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 10*(2), 139-151. https://doi.org/10.2514/3.20195

[5] Karagülle, H., & Akdağ, M. (2023). Vibration control of a beam under a moving mass through adjusting trapezoidal velocity profile. *International Journal of Pure and Applied Sciences, 9*(1), 115-126. https://doi.org/10.29132/ijpas.1172085

[6] Rao, S. S. (2017). *Mechanical Vibrations* (6th ed.). Pearson.

[7] Maia, N. M. M., & Silva, J. M. M. (1997). *Theoretical and Experimental Modal Analysis*. Wiley.

[8] Nikkhoo, Ali & Rofooei, Fayaz & Shadnam, M.R.. (2007). Dynamic behavior and modal control of beams under moving mass. Journal of Sound and Vibration. 306. 712-724. 10.1016/j.jsv.2007.06.008.