Bazı Chamfered Çokyüzlülerle İlgili Metrik Geometriler Üzerine

Serhat YAVUZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı

Ağustos 2018

On The Metric Geometries Related Some Chamfered Polyhedra

Serhat YAVUZ

MASTER OF SCIENCE THESIS

Deparment of Mathematics - Computer

Aug 2018

Bazı Chamfered Çokyüzlülerle İlgili Metrik Geometriler Üzerine

Serhat YAVUZ

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Özcan Gelişgen

”Bu tez ESOGÜ BAP tarafından 2017-1541 no’lu proje çerçevesinde desteklenmiştir.”

Ağustos 2018

ONAY

Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS öğrencisi Serhat YAVUZ'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Bazı Chamfered Çokyüzlülerle İlgili Metrik Geometriler Üzerine" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Özcan Gelişgen

İkinci Danışman : -

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Özcan Gelişgen

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Ümit Ziya Savcı

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Temel Ermiş

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Özcan Gelişgen danışmanlığında hazırlamış olduğum "Bazı Chamfered Çokyüzlülerle İlgili Metrik Geometriler Üzerine" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 13/08/2018

Serhat YAVUZ

ÖZET

Bu tezde, 3- boyutlu analitik uzayda tetrahedron hariç Platonik cisimlere chamfer işlemi uygulanarak elde edilen chamfered çokyüzlüler olarak adlandırılan çokyüzlüler ile ilgili metrikler belirlenmiş; bu metriklerin belirlediği geometrilerin izometri grupları ile $\mathbb{R}^3$ ün izometri grubu arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Birinci ve ikinci bölümde, çalışmanının amacıve litaretü hakkında bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde chamfer işlemi olarak adlandırılan işlem ve chamfered konveks çokyüzlüleri hakkında bilgiler verilerek, Minkowski geometrisi ve $\mathbb{R}^3$ ün izometri grubu hakkında temel kavramlar verilerek tanımları hatırlatılmıştır.

Dördüncü, beşinci, altıncı ve yedinci bölümlerde, birim küreleri sırasıyla **chamfered küp, chamfered octahedron, chamfered dodecahedron** ve **chamfered icosahedron** çokyüzlüleri olacak şekilde uzaklık fonksiyonları belirlenerek, bu uzaklık fonksiyonlarının metrik oldukları ispat edilmiştir. Elde edilen metrikler ile donatılmış uzayların izometri grupları araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Metrik, Metrik Geometri, İzometri, İzometri Grup, Uzaklık Fonksiyonu, Chamfered Cisimler, Chamfered küp, Chamfered octahedron, Chamfered dodecahedron ve Chamfered icosahedron.

SUMMARY

In this thesis, we determine some special metrics related with some of Chamfered Platonic polyhedra without tetrahedron which are obtained by using chamfer opretion to Platonic solids, are given in $3-$dimensional real space $\mathbb{R}^3$; and study the metric geometries defined by these metrics.

In the first and second chapter, the aim of study and knowledge about litareture of topic are given. Then, in the third chapter some knowledge about chamfer operation and chamfered polyhedra, and information about Minkowski geometry and ısometry group of $\mathbb{R}^3$ are given.

In the third, forth, fifth, sixth and seventh chapters, the distance functions of which unit spheres are **chamfered hexahedron, chamfered octahedron, chamfered dodecahedron** and **chamfered icosahedron** are defined, respectively. It is proved that distance functions are metrics. Isometry groups of $\mathbb{R}^3$ furnished by obtained metrics are researched.

Keywords: Metric, Metric Geometry, Metric Geometry, Isometry, Isometry Group, Distance function, Chamfered polyhedra, Chamfered Hexahedron, Chamfered Octahedron, Chamfered Dodecahedron and Chamfered Icosahedron.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde, yüksek lisans eğitimimin her aşamasında benden deneyimlerini, bilimsel katkılarını esirgemeyen ve destek veren değerli danışman hocam sayın,

Prof. Dr. Özcan GELİŞGEN 'e

sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca lisans ve yüksek lisans eğitimin boyunca yardımı, bilgisi ve tecrübesi ile bana sürekli destek olan Dr. Öğr. Üyesi Temel ERMİŞ hocama teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca maddi manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan annem Vildan, babam Noman ve kardeşim Oğuzhan'a teşekkür ederim.

ESKİŞEHİR, 2018
Serhat YAVUZ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET . . . . . **vi**

SUMMARY . . . . . **vii**

TEŞEKKÜR . . . . . **viii**

İÇİNDEKİLER . . . . . **ix**

ŞEKİLLER DİZİNİ . . . . . **x**

1. GİRİŞ VE AMAÇ **1**

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI **3**

3. TEMEL KAVRAMLAR **6**

4. CHAMFERED KÜP UZAYI **12**
4.1. Chamfered Küp Metriği ve Özellikleri 12
4.2. Chamfered Küp İzometri Grubu 17

5. CHAMFERED OCTAHEDRON UZAYI **38**
5.1. Chamfered Octahedron Metriği ve Özellikleri 38
5.2. Chamfered Octahedron İzometri Grubu 42

6. CHAMFERED DODECAHEDRON UZAYI **64**
6.1. Chamfered Dodecahedron Metriği ve Özellikleri 64
6.2. Chamfered Dodecahedron İzometri Grubu 70

7. CHAMFERED ICOSAHEDRON UZAYI **103**
7.1. Chamfered Icosahedron Metriği ve Özellikleri 103
7.2. Chamfered icosahedron İzometri Grubu 109

8. BULGULAR VE TARTIŞMA **141**

9. SONUÇ VE ÖNERİLER **142**

KAYNAKLAR DİZİNİ **143**

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil		Sayfa
1.1	Çokyüzlüler ve yüzleri	1
1.2	Platonik cisimler	2
3.1	Truncation işlemi	6
3.2	Genişleme işlemi	7
3.3	Chamfer işlemi ve Chamfered Platonik cisimler	7
4.1	Chamfered Küp ve Kübe Chamfer İşlemi Uygulanması	12
4.2	Chamfered kübün koordinat sistemine yerleştirilmesi	14
4.3	Chamfered küp yolu	15
4.4	$\mathbb{R}^3_{CC}$ de Yansıma Düzlemlerine Göre K öşe Noktaların Görüntüleri	20
4.5	$\mathbb{R}^3_{CC}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri	24
4.6	$\mathbb{R}^3_{CC}$ de σ_O İnversiyonu Altında Köşe Noktaların Görüntüleri	24
4.7	$\mathbb{R}^3_{CC}$ de Dönme Yansıma Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri	27
4.8	$\mathbb{R}^3_{CC}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri	30
4.9	$\mathbb{R}^3_{CC}$ da Minimum Uzaklık Kümesi	31
4.10	$\mathbb{R}^3_{CC}$ da Birim Küre Ve Minimum Uzaklık Kümesi	32
5.1	Chamfered Octahedron	38
5.2	Chamfered octahedronun koordinat sistemine yerleştirilmesi	40
5.3	Chamfered octahedron yolu	41
5.4	$\mathbb{R}^3_{CO}$ de Yansıma Düzlemlerine Göre K öşe Noktaların Görüntüleri	46
5.5	$\mathbb{R}^3_{CO}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri	50
5.6	$\mathbb{R}^3_{CO}$ de σ_O İnversiyonu Altında Köşe Noktaların Görüntüleri	50
5.7	$\mathbb{R}^3_{CO}$ de Dönme Yansıma Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri	53
5.8	$\mathbb{R}^3_{CO}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri	56
5.9	$\mathbb{R}^3_{CO}$ da Minimum Uzaklık Kümesi	57
5.10	$\mathbb{R}^3_{CO}$ da Birim Küre Ve Minimum Uzaklık Kümesi	58
6.1	Chamfered Dodecahedron ve Fullerene C_{80}	64
6.2	Chamfered dodecahedronun koordinat sistemine yerleştirilmesi	67
6.3	Chamfered dodecahedron yolu	67
6.4	$\mathbb{R}^3_{CD}$ de Yansıma Düzlemlerine Göre Köşe Noktaların Görüntüleri	74
6.5	$\mathbb{R}^3_{CD}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri	79
6.6	$\mathbb{R}^3_{CD}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri	80
6.7	$\mathbb{R}^3_{CD}$ de σ_O İnversiyonu Altında Köşe Noktaların Görüntüleri	81

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

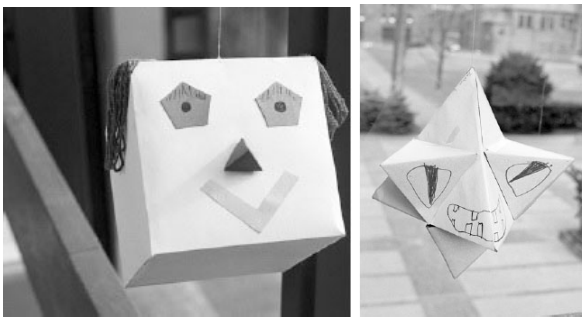
6.8 $\mathbb{R}^3_{CD}$ de Dönme Yansıma Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri 83
6.9 $\mathbb{R}^3_{CD}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri . . . 87
6.10 $\mathbb{R}^3_{CD}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri . . . 88
6.11 $\mathbb{R}^3_{CD}$ da Minimum Uzaklık Kümesi 89
6.12 $\mathbb{R}^3_{CD}$ de Birim Küre Ve Minimum Uzaklık Kümesi 90

7.1 Chamfered Icosahedron 103
7.2 Deltoidal hexacontahedronun koordinat sistemine yerleştirilmesi 106
7.3 Chamfered icosahedron yolu 106
7.4 $\mathbb{R}^3_{CI}$ de Yansıma Düzlemlerine Göre K öşe Noktaların Görüntüleri 113
7.5 $\mathbb{R}^3_{CI}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri 117
7.6 $\mathbb{R}^3_{CI}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri 118
7.7 $\mathbb{R}^3_{CI}$ de σ_O İnversiyonu Altında Köşe Noktaların Görüntüleri 119
7.8 $\mathbb{R}^3_{CI}$ de Dönme Yansıma Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri 121
7.9 $\mathbb{R}^3_{CI}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri . . . 125
7.10 $\mathbb{R}^3_{CI}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri . . . 126
7.11 $\mathbb{R}^3_{CI}$ da Minimum Uzaklık Kümesi 127
7.12 $\mathbb{R}^3_{CI}$ de Birim Küre Ve Minimum Uzaklık Kümesi 128

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Marjorie Senechal'in "Shaping Space; Exploring Polyhedra in Nature, Art, and the Geometrical Imagination" isimli kitabında bahsettiği gibi; çokyüzlü (Polyhedron) nedir? Soru kısa olmasına rağmen cevap oldukça uzundur. Daha önce Çokyüzlü Krallığı'nı hiç duymamış olsanız da, neredeyse hayvan, bitki ve mineral krallıkları kadar geniş ve çeşitlidir hatta üçünüde kapsamaktadır. Uzun ve ilginç geçmişleri ile yaşlı çokyüzlüler ve dün ya da dünden önce doğmuş yeni çokyüzlüler mevcuttur. Bu krallıkta, çokyüzlü mimarisinde bir yürüyüş yapabilirsiniz, çokyüzlü fuarındaki zanaatkarları, sanat galerilerini ve korunmuş doğayı ziyaret edebilirsiniz. Burayı gezerken dört boyutlu uzayda polyhedra hayaletleri bile görülebilirsiniz.

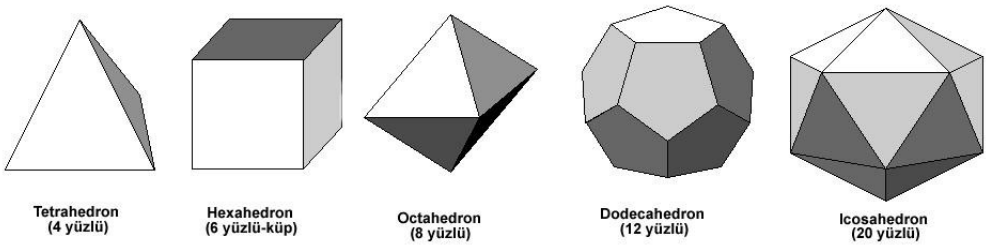
Çokyüzlü Krallığı'nın sınırları belirsiz olmasına rağmen, fakat sınır bölgelerini ziyaret etmek güvenlidir. Çokyüzlü Krallığı'nın dili matematiktir, ancak bu kısa ilk ziyareti idare edebilmek için şu üç önemli kelimeyi öğrenmelisiniz: yüz, kenar ve köşe. Polihedron kelimesi Yunanca köklü "çok" ve Hint-Avrupa köklü "koltuk" kelimesinden gelmektedir. Geometriciler için, birçok yüzü olan bir nesne anlamına gelir. Şekil1.1 de yüzleri olan bir çokyüzlüyü görürüz. Ama çokyüzlünün yüzlerinden söz ederken kastettiğimiz şey bu değildir [M. Senechal, 2013].



Şekil 1.1 Çokyüzlüler ve yüzleri

Çokyüzlüler oldukça geniş ve çeşitli olup tarih boyunca insanların daima ilgisini çekmiştir. Bu nedenle bir çok çalışmada ve alanda çokyüzlüler karşımıza çıkmaktadır. Çokyüzlülerin en popüler olanı mükemmel simetrilerinden dolayı Platonik cisimler olarak adlandırılan düzgün çokyüzlülerdir ve beş tanedir(Bakınız şekil1.2). Ayrıca pek çok

çokyüzlü Platonik cisimlere bir takım işlemler uygulanarak elde edilirler. Bu işlemlere örnek olarak kesme(truncation), yükseltme(kleetope) ve chamfer işlemleri verilebilir.



Şekil 1.2 Platonik cisimler

Bu çalışmanın amacı ise en çok simetrik özelliklere sahip olan çokyüzlüler olan Platonik cisimlere chamfer işlemi uygulanarak elde edilen chamfered çokyüzler ele alınarak bu çokyüzlüleri küre olarak verecek metrikleri belirlenecektir. Bu metrikler ile teşkil edilen metrik uzayın çeşitli özellikleri ve geometrinin en temel problemlerinden olan bir metrikle döşenmiş uzayın izometrilerinin bulunması problemi ele alınacaktır.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Çokyüzlüler sahip oldukları simetrilerden dolayı matematiksel açıdan insanların ilgisini çekmiştir. Çokyüzlüler, tüm bu güzelliklerinin ve ilginç özelliklerinin yanında anlaşılması güç şekillerdir. Bu da onların matematiksel yapılarından değil, insanların hayal edebilme güçlüklerinden kaynaklanmaktadır. Bir çokyüzlüyü göz önüne getirip ona herhangi bir açıdan bakabilmek oldukça güçtür. Hele de onikiyüzlü ya da yirmiyüzlü için bu iş daha da zordur. Düzgün olmayan, yıldız çokyüzlüleri söylemeye dahi gerek yoktur. Çokyüzlülerin sırlarının düzlem geometriye oranla daha sonraları keşfedilmiş olmasının nedeni belki de bu özellikleridir.

İnsanlar çokyüzlülerle akıldan uğraşmanın çok zor olduğunun farkına varmış ve onların birer modelini yapıp, bu modeller üzerinde çalışmaya karar vermişlerdir. Böylelikle bundan daha binlerce yıl önce beş düzgün çokyüzlünün modellerini yapmayı başarmışlardır. Britanya Adaları'nda yapılan arkeolojik kazılarda Platon'dan bin yıl öncesine ait taştan yapılmış beş düzgün çokyüzlü bulunmuştur (Bu tarza erişilebilecek çevirim içi adres http://anlamak.com/platon'un-beş-katı-cismi.html).

Tüm ayrıt ve yüzleri eş ve her köşeden aynı sayıda yüz geçen çokyüzlülere ise düzgün çokyüzlü denir. Bazı arkeolojik kazılarda, İskoçya da, cilalı taş devri insanları tarafından binlerce yıl öncesine ait oyulmuş taştan yapılmış düzgün çokyüzlüler bulunmuştur. Bunlar Oxford Üniversitesi'ndeki Ashmolean Müzesi'nde yer almaktadır. Uzun yıllar üzerine çalışılmış olmasına rağmen sadece beş tane düzgün çokyüzlü bulunabilmiştir. Euclid'in "Elemanlar" adlı kitabında yeni çokyüzlülerin bulunamayacağının ispatı ile bu yöndeki çalışmalar son bulmuştur. Her ne kadar Platon başka düzgün çokyüzlü elde edilemeyeceğini ispatlayamamış olsa da, M.Ö. yaklaşık 360 lı yıllarda "Timaus" adlı eserinde düzgün çokyüzlülerden bahsederek onlardan haberdar olduğunu ispatlamıştı. Platon'a göre doğa beş öğeden oluşuyordu, her bir doğal öğe bu düzgün çokyüzlüler ile simgelenebilirdi. Ona göre dört yüzlü (tetrahedron) ateşi, altı yüzlü (hexahedron) toprağı, sekiz yüzlü (octahedron) havayı, on iki yüzlü (dodecahedron) evreni ve yirmi yüzlü (icosahedron) ise suyu simgeliyordu. Plato'nun "Timaus" adlı eserindeki bu düşüncesinden dolayı bu şekillere Platonik Cisimler adı verilir.

Günümüzde atom ve atom altı dünya ile ilgili yapılan birçok moleküler teori ve kristal yapı ile ilgili yapılan çalışmalarda Platon'un görüşünün tamamen geçerli olmadığı görülse de, Platon'un tamamen yanlış bir bir çıkarsamada bulunmadığı da görülmektedir.

Atomlar kristal yapı oluştururken Plato'nun tanımladığı düzgün çokyüzlüler (Dodecahedron-on iki yüzlü hariç) formunda dizilmekte olduğu bir çok kimyasal ve fiziksel çalışmada yerini almıştır (Atiyah M., Sutcliffe P., Polyhedra in Physics, Chemistry and Geometry, Milan Journal of Mathematics, 71, 33-58, 2003). 2006 yılında Meksika'daki San Louis Patosi Teknoloji Araştırma Enstitüsünden Josa Luis Rodriguez Lopez ile Austin'deki Texas Üniversitesi'nden Miguel Jose Yacaman altın-paladyum atomlarının kristal yapı diziliminde on iki yüzlünün (dodecahedron) varlığını göstermişlerdir (Carrizales J. M. M., Lopez J. L. R., Pal U., Yoshida M. M. ve Yacaman M. J., The Completion of the Platonic Polyhedra: The Dodecahedron, Small Volume 2, Issue 3, pages 351-355, 2006.).

Platonik cisimler gibi düzgün çokgenlerden oluşan bir çokyüzlü sınıfıda Arşimedyan cisimlerdir. Arşimedyan cisimler düzgün çokgen olan yüzlerden oluşmasına rağmen Platonik cisimlerin aksine düzgün çokgenlerin türü birden fazladır. Aslında bilindiği kadarıyla Arşimed tarafından kaleme alınmış eski bir yazın yoktur. Arşimed cisimlerinin bu ismi almış olmasının sebebi Pappus'un *Koleksiyon*'ununda Arşimed'in, yüzleri birden fazla düzgün çokgen olan on üç cisim bulduğundan bahsetmesidir. (Field, J.V., pp 241-289). Altın oranın gizemleri, platonik ve arşimed cisimlerinin şekilleri, matematiksel ve geometriksel kuralları Leonardo da Vinci ve Albrecht Dürer gibi önde gelen sanatçıların eserlerinde şifrelenmişlerdi. (Bu tarza erişilebilecek çevirim içi adres https://en.wikipedia.org/wiki/Luca_Pacioli).

Ayrıt ve yüzleri eş olmayan çokyüzlülere düzgün olmayan çokyüzlü denilmektedir. Bunlara en güzel örnek Arşimedyan cisimlerin duali olan Katalan cisimlerdir. Katalan cisimler 1865 yılında Belçikalı matematikçi Eugene Catalan tarafından tanımlanmıştır (Catalan Eugène,1865). 1865 yılında keşfettiği Katalan cisimler Eugène Charles Catalan'a Fransa Bilimler Akademisi ödülünü kazandırmıştır (Bu tarza erişilebilecek çevirim içi adres http://tr.wikipedia.org/wiki/Eugene_Charles_Catalan). Katalan cisimleri, Platonik cisimler ve Arşimedyan cisimlerden ayıran en önemli özellik, düzgün olmayan konveks yapılar olmasıdır. Katalan cisimlerin yüzlerinin oluşturan şekillerin kenar uzunlukları farklıdır.

Maksimum metriği ve taksi metriği ile döşenmiş 3-boyutlu uzayların küreleri incelendiğinde sırasıyla kürelerin küp ve düzgün sekizyüzlü olduğu görülmektedir. Bilindiği üzere küp(düzgün altı yüzlü) ve düzgün sekiz yüzlü Platonik cisimlerin iki tanesidir. O halde diğer çokyüzlüleri küre olrak verebilecek metrikler dolayısıyla bu metrikler ile teşkil olunan metrik uzaylar mevcut olmalıdır. Bu bağlamda (T. Ermiş, 2014) doktora tezinde küreleri Platonik cisimlerden diğer ikisi olan düzgün onikiyüzlü (dodecahedron) ve düzgün yirmiyüzlü (icosahedron) küre olarak veren metrikleri vermiş bu metrikler ile oluşturulan metrik uzayın özelliklerini incelemiştir. Ayrıca (Gelisgen ve Kaya,

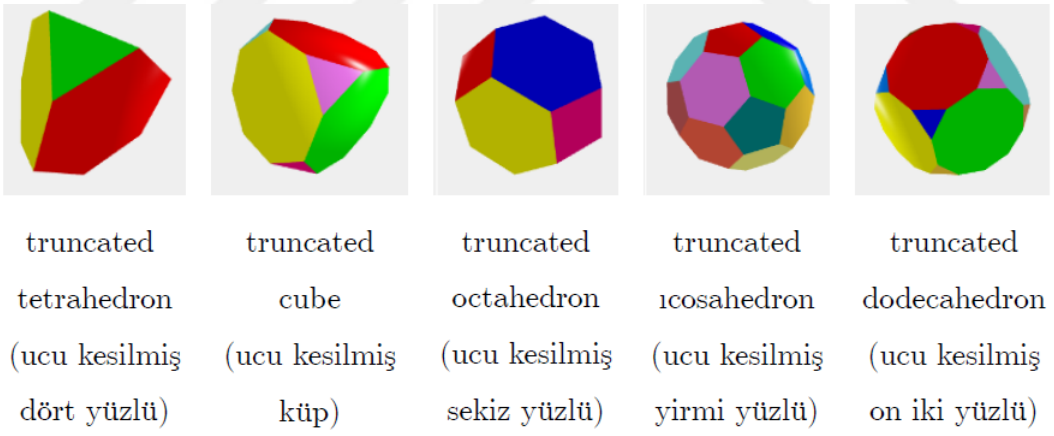
2015) çalışmalarında küresi Katalan cisimlerden biri olan deltoidal icositetrahedron olan bir metrik uzay tanıtarak bu uzayın izometri grubunu vermişlerdir.

(G. Z. Erçınar, 2015) ve (G. Bozkurt, 2016) tezlerinde sırasıyla Katalan cisimlerinden ikisi olan rhombic dodecahedron ve triakis octahedronu küre olarak veren metrik uzayları vermişler ve özelliklerini incelemişlerdir. Daha sonralarda (Z. Çolak, 2016) ve (Z. Can, 2016) doktora tezlerinde bazı Katalan ve Arşimed cisimleri küre alan metrik uzaylar ve bu uzayların izometri grupları bulunmuştur.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Çokyüzlüler içinde özellikle düzgün olanları insanların ilgisini çekmiştir. Bazı arkeolojik kazılarda binlerce yıl öncesine ait taştan yapılmış düzgün çokyüzlüler bulunmuştur. Bunca yıl uğraşılmış olmasına karşın sadece beş tane düzgün çokyüzlü bulunabilmiştir. Yeni çokyüzlüler bulma yönündeki çabalar, Öklid'in "Elemanlar" adlı kitabında bunun başarılamayacağını ispatlaması ile son bulmuştur. Sonuç olarak düzgün geometrik cisimlerden üçgen yüzlülerden 3 tane, beşgen yüzlülerden 1 tane ve bir tane de kare yüzlü vardır.

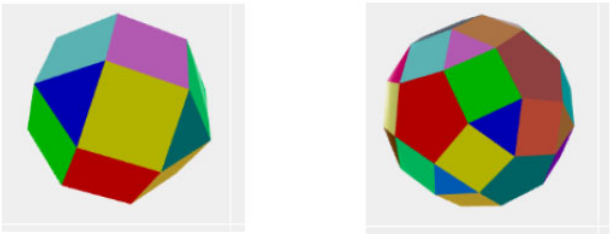
Bu beş düzgün çokyüzlü üzerinde uygulanan bazı yöntemler ile yeni simetrik çokyüzlü elde etmek mümkündür. Truncation(kesme) işlemi bunlardan bir tanesidir. Platonik cisimlerin ucu kesilerek Arşimed cisimlerinden beş tanesi elde edilebilir. Bu beş cismi elde etmek için uygulanan kesme işlemi simetriyi korumak için çokyüzlünün merkezini bir köşesine birleştiren doğruya dik bir düzleme göre yapılır ve tüm köşeler için aynı işlem uygulanır (Şekil3.1).



Şekil 3.1 Truncation işlemi

Bir diğer işlem ise genişleme işlemidir. Genişleme, herbir yüzün merkezden uzağa hareketi ile gerçekleşir ve bu şekilde konveks bir gövde oluşur. Merkezden uzağa gerçekleştirilen bu harekette, mesafe Platonik cismin simetrisini korumak amacıyla herbir yüzde aynı uzaklıktadır. Genişletilmiş bir çokyüzlü, orijinal çokyüzlünü tüm yüzlerine

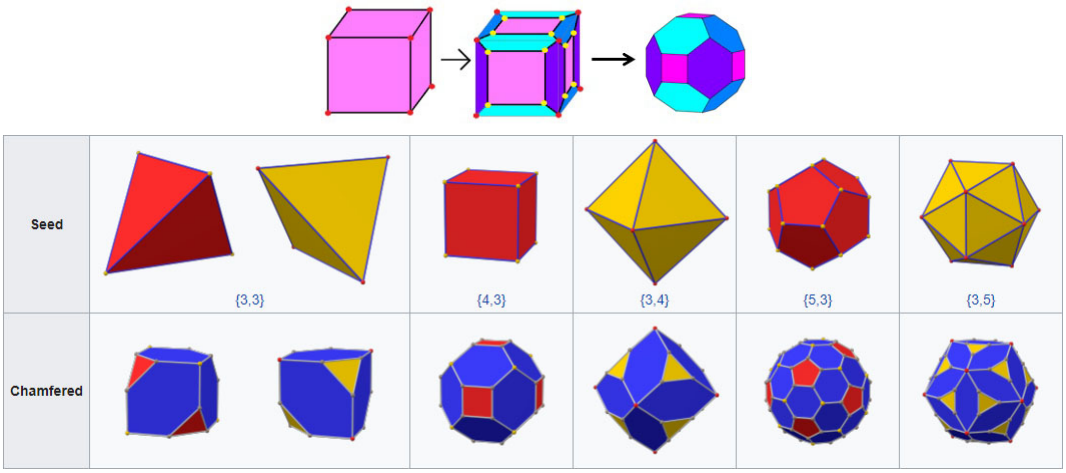
sahiptir. Rhombicuboctahedron ve rhombicosidodecahedron, genişleme denilen yöntemle Platonik cisimlerden elde edilebilir.



rhombicuboctahedron rhombicosidodecahedron

Şekil 3.2 Genişleme işlemi

Bu çalışmada kullanılacak yöntem ise, chamfer(pah kırma) veya kenar kesimi, bir polyhedronu diğerine dönüştüren bir topolojik operatördür. Bu işlem için önce yüzler dışa doğru birbirinden uzaklaştırılır ve köşe noktaları da aynı oranda köşegenler doğrultusunda hareket ettirilir. Daha sonra cismin birbirinden uzaklaştırılan yüzlerinin köşe noktaları ile köşegenler doğrultusunda hareket ettirilen noktalar birleştirilir. Bu işlem ile orijinal yüzleri ve köşe noktalarını korur ve cisme yeni altıgen yüzler ekler(Şekil3.3). Bu işlemle orijina kenar sayısı E olan cisim 2E yeni köşe, 3E yeni kenar ve yeni altıgen yüzler içeren oluklu bir forma sahip olacaktır(Şekil3.3).



Şekil 3.3 Chamfer işlemi ve Chamfered Platonik cisimler

Minkowski geometrilerinin tanıtıldığı ve incelendiği bir çok çalışma yapılmıştır. Bu bölüm, yapılan tez çalışmasını diğer kaynaklara başvurmadan anlaşılır kılmak amacı ile Minkowski geometrileri adına bilinen bazı kavramlar ve özellikler Kaya (2002), Özcan ve Kaya (2003), Kaya ve Çolakoğlu (2006), Krause (1975), Martin (1998), Millmann and Parker (1991), Thompson (1996), Coxeter (1961), Gelişgen (2007), Çolakoglu (2009), Salihova (2006), Gelişgen ve Ermiş (2014), Ermiş ve Gelişgen (2015), Colak (2016) ve Can (2016) kaynaklarından esas alınarak özetlenmiştir.

(Thomson,1996) da ifade edildiği gibi Minkowski geometrisi, eliptik ve hiperbolik geometriden farklı sonlu boyutlu bir Öklidyen olmayan geometridir. Ayrıca Space-time Minkowskian geometrisinden de farklıdır. Minkowski geometrisindeki lineer yapı Öklidyen geometrideki yapı ile hemen hemen aynıdır. Noktalar, doğrular ve düzlemler Öklidyen geometrinin noktaları, doğruları ve düzlemleri ile aynı iken açı ölçümü Öklidyen geometri ile aynı yolla yapılmaktadır. Yalnızca bir fark vardır. Bu fark ise uzaklığın tüm yönlerde aynı olmamasıdır. Dolayısıyla Minkowski geometrilerinde uzaklıkla ilgili kavramların incelenmesi oldukça ilgi çekici konular ortaya çıkarmaktadır. Örneğin, Öklidyen uzaydaki alışılmış kürenin yerine alınan ”yeni birim küre” değişebilen bir genel simetrik konvek kümedir ve paralellik aksiyomu geçerli olmasına rağmen, Pisagor teoremi ve benzeri bir çok teorem geçerli değildir. Bu geometrilere örnek olarak Taksi Geometri, Çin Dama geometrisi ve α - geometrisi verilebilir.

Daha önce yapılan çalışmalarda Maksimum ve Taksi metrikerinin birim küreleri sırasıyla düzgün altıyüzlü vesekizyüzlü olduğu görülmektedir. n- boyutlu $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında verilen konveks yapılar için birim küreleri bu konveks yapılar olan normların varlığı bilinmektedir. Fakat daha önce yapılan çalışmalar incelendiğinde varlığı bilinen bu normların nasıl tanımlı oldukları bilinmemektedir. Bu durumda akla önemli iki soru gelmektedir;

”Birim küreleri belli bazı konveks cisimler olacak şekilde metrikler bulunabilir mi?”

”Eğer bulunabilirse, bu metrikler analitik olarak nasıl ifade edilirler?”

Bu metrikler koordinatlar yardımıyla ifade edilebilirse, yeni metriklerle geometriler kolaylıkla inşa edilebilecektir. Bu metrikler sayesinde konveks cisimler için matematiksel formüller verilerek, bu yapılar üzerinde matematik ve diğer bilim dalları açısından daha kolay bir şekilde çalışma imkanı sağlanır.

Geometrik çalışmalar genellikle çeşitli uzaylardaki geometrik objelerin dönüşümleri üzerinedir. Bu dönüşümler ile grup yapısı oluşturulabilir.Bu grupların çoğu ise ilgili

uzaydaki simetriler ve izometrilerden oluşur.Üzerinde bulunma, arada olma, eş olma, açı ölçümü veya uzaklıklar gibi geometrik özellikleri koruyor olmalarından dolayı izometri grupları ayrı bir önem teşkil eder(Martin,G.E,2008). Sonraki bölümlerde değinilecek olan Chamfered Cisimlerin metrikleri ile döşenmiş analitik 3- uzayın izometri grupları, Chamfered Cisimlerin simetrilerinden faydalanarak, analitik olarak bulunacak ve alışılmış Öklid metriğine göre olan izometri grubu ile karşılaştırılacaktır.

$\mathbb{P}$ noktalar kümesi, $\mathbb{L}$ doğrular kümesi d herhangi uzaklık fonksiyonu olmak üzere $\mathbf{M} = [\mathbb{P}, \mathbb{L}, d]$ metrik geometrisi verilsin. $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ dönüşümü

$$\forall A, B \in \mathbb{P}, d(A, B) \quad = \quad d(f(A), f(B))$$

özelliğini sağlıyorsa f dönüşümüne izometri denir. Yani izometriler uzaklığı koruyan dönüşümlerdir. Grup teoride, izometri grubu, genellikle o uzakdaki matematiksel objelerin simetrilerinden ve öteleme dönüşümlerinden oluşan küme ile temsil edilir. **M** metrik geometrisinde bir F şeklinin simetrisi, $f(F) = F$ özelliğini sağlayan $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ izometri dönüşümüdür.

(Martin,G.E., 2008) kaynağına baplı kalınarak $\mathbb{R}^3$ deki izometriler aşağıdaki gibi özetlenebilir;

· $\mathbb{R}^3$ deki bir dönüşüm, uzaydaki noktaların kümesinin kendi üzerine birebir eşlemesidir.

· Her l doğrusu için $\alpha(l)$ yine bir doğru olacak şekildeki bir α dönüşümüne kolinasyon adı verilir.

· Özdeşlik dönüşümü her P noktası için $i(P) = P$ biçiminde tanımlanır.

· Her P, Q noktası için $P' = \alpha(P)$ ve $Q' = \alpha(Q)$ olmak üzere $P'Q' = PQ$ ise α dönüşümüne izometri adı verilir.

· Bir α izometrisi bir noktalar kümesini sabit bırakıyorsa, α ya bu noktalar kümesinin bir simetrisi denir.

· Δ bir düzlem olmak üzere, uzaydaki noktaların σ_Δ eşleşmesi;

"P, Δ üzerinde ise $\sigma_\Delta(P) = P$ dir.

P, Δ üzerinde değilse Δ, $\overline{PQ}$ nun orta dikmesi olmak üzere $\sigma_\Delta(P) = Q$ dur." biçiminde tanımlı ise σ_Δ ya yansıma denir.

· Γ ve Δ düzlemleri bir l doğrusu boyunca kesişiyorlarsa $\sigma_\Gamma\sigma_\Delta$ dönüşümüne l ekseni etrafında dönme adı verilir.

· Γ ve Δ kesişen iki düzlem ve Π bu iki düzleme dik bir düzlem olmak üzere $\sigma_\Pi\sigma_\Gamma\sigma_\Delta$ dönüşümüne Γ, Δ , Π düzlemlerinin ortak noktasına göre dönme yansıma denir.

· M, P ve Q noktalarının orta noktası olmak üzere tüm P noktaları için $\sigma_M(P) = Q$ biçiminde tanımlı σ_M dönüşümüne M noktasına göre inversiyon denir, ayrıca σ_M ye nokta yansıması adı da verilir.

· Γ, Δ düzlemleri paralel ise $\sigma_\Gamma\sigma_\Delta$ dönüşümü Γ, Δ düzlemlerinin ortak dik doğruları boyunca bir ötelemedir.

· Γ, Δ kesişen iki düzlem ve M düzlemlerin ortak noktalarından biri olmak üzere $\sigma_M\sigma_\Gamma\sigma_\Delta$ dönüşümüne dönme inversiyonu denir.

$\mathbb{R}^3$ de bu dönüşümlerin oluşturduğu küme, fonksiyonlarda bileşke işlemi ile birlikte izometri grubunu oluşturur.

Octahedral simetri grubu dönme yansıma (düzleme ve noktaya göre), dönme ve yansımanın bileşkesi olan 48 dönüşüm içermektedir. Küp, octahedron çokyüzlüleri octahedral simetriye sahip çokyüzlülerden bazılarıdır. Octahedral grup O_h ile gösterilir ve sahip olduğu dönüşümler aşağıda özetlenmiştir.

· Birim

· 90 derecelik 6 dönme

· 120 derecelik 8 dönme

· 180 derecelik 9 dönme

· 90 derecelik 6 dönme yansıma

· 60 derecelik 8 dönme yansıma

· 9 yansıma

· inversiyon

Icosahedral simetri grubu dönme yansıma (düzleme ve noktaya göre), dönme ve yansımanın bileşkesi olan 120 dönüşüm içermektedir. Dodecahedron ve icosahedron icosahedral simetri grubuna sahip çokyüzlülerden bazılarıdır. Icosahedral grup I_h ile gösterilir ve sahip olduğu dönüşümler aşağıda özetlenmiştir.

· Birim

· 72 derecelik 12 dönme

· 144 derecelik 12 dönme

· 120 derecelik 20 dönme

· 180 derecelik 15 dönme

· 108 derecelik 12 dönme yansıma

· 36 derecelik 12 dönme yansıma

· 60 derecelik 20 dönme yansıma

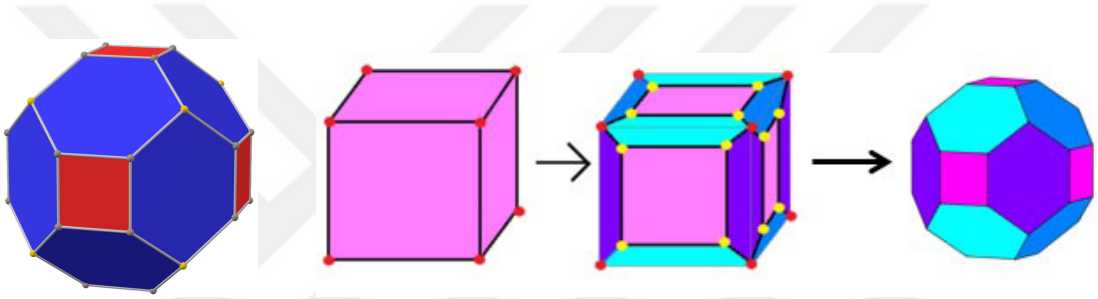
· 15 yansıma

· inversiyon

4. CHAMFERED KÜP UZAYI

4.1 Chamfered Küp Metriği ve Özellikleri

Chamfered küp, Platonik cisimlerden olan kübe chamfered işlemi uygulanması sonucunda elde edilen bir konveks çokyüzlüdür. Chamfered küp 32 köşe 48 kenar ve 12 si altıgen 6 tanesi kare olmak üzere toplamda 18 adet yüze sahiptir. Altıgen yüzleri oluşturan altıgenlerin kenar uzunlukları eş olmasına rağmen iç açıları eş olmadığından düzgün altıgen değillerdir.(Şekil4.1).



Şekil 4.1 Chamfered Küp ve Kübe Chamfer İşlemi Uygulanması

Ayrıca chamfered küp 48 tane simetriye sahip olup, simetri grubu O_h ile gösterilir.

Bu bölümde birim küresi chamfered küp olan uzaklık fonksiyonu tanıtılmış ve d_{CC} ile gösterilmiştir ve bu uzaklık fonksiyonunun metrik aksiyomlarını sağladığını ve bazı özellikleri verilmektedir.

Tanım 4.1 *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\mathbb{R}^3$de iki farklı nokta olsun. Buna göre*

$$\begin{aligned} u &= \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}, \\ v &= \text{mid}\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}, \\ w &= \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\} \end{aligned}$$

olarak tanımlasın.

Tanım 4.2 *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ analitik 3-boyutlu uzayda iki farklı nokta olsun. $d_{CC} : \mathbb{R}^3 x\, \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$*

$$d_{CC}(P_1, P_2) = \max\left\{\frac{5-2\sqrt{3}}{2}(u+v), u\right\}$$

olacak şekilde tanımlanan d_{CC} fonksiyonuna P_1 ve P_2 noktaları arasındaki chamfered küp uzaklık fonksiyonu denir.

Yardımcı Teorem 4.1 *P_1=(x_1, y_1, z_1) ve P_2=(x_2, y_2, z_2), $\mathbb{R}^3$ de iki farklı nokta olsun. Bu takdirde,*

$$d_{CC}(P_1, P_2) \geq \tfrac{5-2\sqrt{3}}{2}(u+v)$$
$$d_{CC}(P_1, P_2) \geq u$$

olur.

İspat *Maksimum fonksiyonun tanımından ispat aşikardır.*

Önerme 4.1 *Analitik 3-boyutlu uzayda d_{CC} uzaklık fonksiyonu metriktir ve bu metrikle donatılmış uzayın birim küresi chamfered küptür.*

İspat *$d_{CC} : \mathbb{R}^3 x \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uzaklık fonksiyonu ve $P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ve $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ $\mathbb{R}^3$de üç farklı nokta olsun. Bütün $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^3$ için d_{CC} aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa $\mathbb{R}^3$ de bir metriktir.*

M1) $d_{CC}(P_1, P_2) \geq 0$ *ve* $d_{CC}(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$
M2) $d_{CC}(P_1, P_2) = d_{CC}(P_2, P_1)$
M3) $d_{CC}(P_1, P_3) \leq d_{CC}(P_1, P_2) + d_{CC}(P_2, P_3)$.

M1) *Mutlak değer daima negatif olmayan değer taşıdığından mutlak değerli ifadelerin pozitif ifadelerle çarpılıp toplanmasıyla yine negatif olmayan değerler elde edilir. Açıkça $d_{CC}(P_1, P_2) \geq 0$ dır. Eğer, $d_{CC}(P_1, P_2)$=0 ise $\frac{5-2\sqrt{3}}{2}(u+v)$=0 ve u=0 olup buradan da $|x_1 - x_2|$=0, $|y_1 - y_2|$=0, $|z_1 - z_2|$=0 $\Longrightarrow$ x_1=$x_2, y_1 = y_2, z_1$=$z_2 \Longrightarrow$ P_1=P_2 olur. Tersine P_1=$P_2 \Longrightarrow |x_1 - x_2|$=0, $|y_1 - y_2|$=0, $|z_1 - z_2|$=0 $\Longrightarrow$ $d_{CC}(P_1, P_2)$=0 bulunur.*
M2) *Mutlak değerden dolayı $|x_1 - x_2|$=$|x_2 - x_1|$, $|y_1 - y_2|$= $|y_2 - y_1|$, $|z_1 - z_2|$=$|z_2 - z_1|$ olduğundan açıkça, $d_{CC}(P_1, P_2)$=$d_{CC}(P_2, P_1)$ dir. Yani d_{CC} simetriktir.*
M3) *P_1=(x_1, y_1, z_1),P_2=(x_2, y_2, z_2) ve P_3=(x_3, y_3, z_3) $\in$ $\mathbb{R}^3$ olsun. X_{13}=$|x_1 - x_3|$, Y_{13}=$|y_1 - y_3|$, Z_{13}=$|z_1 - z_3|$, X_{12}=$|x_1 - x_2|$, Y_{12}=$|y_1 - y_2|$, Z_{12}=$|z_1 - z_2|$, X_{23}=$|x_3 - x_2|$, Y_{23}=$|y_3 - y_2|$, Z_{23}=$|z_3 - z_2|$ olmak üzere ve de u_{ij}, v_{ij}, w_{ij} ile $\{X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij}\}$ kümesinin sırasıyla maksimum, orta ve minimum değerlerini gösterirse, ayrıca U_{ij}, V_{ij} ve W_{ij} de ilgili ifadedeki X_{ij}, Y_{ij} veya Z_{ij} yerine sırasıyla $X_{ik} + X_{kj}$, $Y_{ik} + Y_{kj}$ veya $Z_{ik} + Z_{kj}$ alınması ile*

elde edilen ifadeyi işaret etmek üzere

$$\begin{aligned} d_{CC}(P_1,P_3) &= \max\left\{\tfrac{5-2\sqrt{3}}{2}\left(u_{13}+v_{13}\right),u_{13}\right\} \\ &\leq \max\left\{\tfrac{5-2\sqrt{3}}{2}\left(\left(U_{12}+U_{23}\right)+\left(V_{12}+V_{23}\right)\right),U_{12}+U_{23}\right\} \\ &\leq \max\left\{\tfrac{5-2\sqrt{3}}{2}\left(U_{12}+V_{12}\right),U_{12}\right\}+\max\left\{\tfrac{5-2\sqrt{3}}{2}\left(U_{23}+V_{23}\right),U_{23}\right\} \\ &= X \end{aligned}$$

dir. Burada yardımcı teorem 4.1 den dolayı

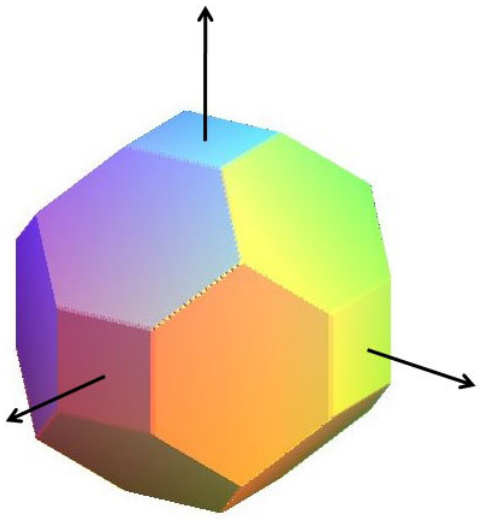
$$\begin{aligned} d_{CC}(P_1,P_2) &\geq \max\left\{\tfrac{5-2\sqrt{3}}{2}\left(U_{12}+V_{12}\right),U_{12}\right\} \\ d_{DH}(P_2,P_3) &\geq \max\left\{\tfrac{5-2\sqrt{3}}{2}\left(U_{23}+V_{23}\right),U_{23}\right\} \end{aligned}$$

olur. O halde $X \leq d_{CC}(P_1,P_2)+d_{CC}(P_2,P_3)$ *bulunur. Buna göre* $d_{CC}(P_1,P_3) \leq d_{CC}(P_1,P_2)+d_{CC}(P_2,P_3)$ *elde edilir. Yani chamfered küp uzaklık fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar.*

Sonuç olarak chamfered küp uzaklık fonksiyonu metriktir. Ayrıca bu metrikle döşenmiş analitik 3-uzayda orijinden 1 birim chamfered küp uzaklığındaki noktaların kümesi;

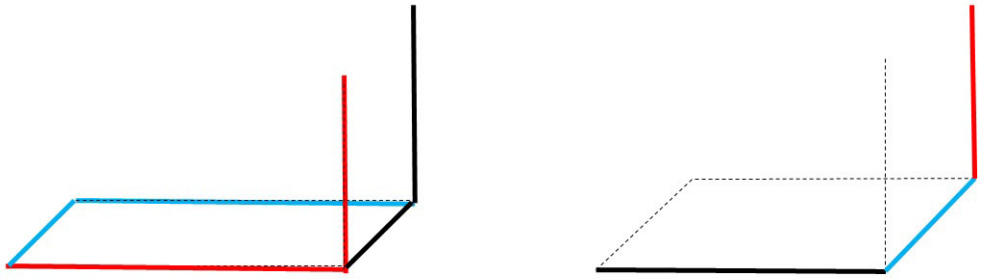
$$S_{CC}=\left\{(x,y,z):\max\left\{\frac{5-2\sqrt{3}}{2}\left(u+v\right),u\right\}=1\right\}$$

olup bu noktaların geometrik yeri şekil4.2 de görüldüğü gibi chamfered küptür.



Şekil 4.2 Chamfered kübün koordinat sistemine yerleştirilmesi

Geometrik olarak P_1 noktasından P_2 noktasına olan yol için 2 farklı ihtimal vardır. Buna göre, bu yollar aşağıdaki gibi ifade edilebilir.
(i) İki koordinat eksenine paralel olan iki doğru parçasının birleşimidir.
(ii) Bir koordinat eksenine paralel olan bir doğru parçasıdır.
Böylece P_1 ve P_2 noktaları arasındaki chamfered küp uzaklığı (i) deki yol için bahsedilen iki doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamının $\frac{5-2\sqrt{3}}{2}$ katı, (ii) deki yol için bahsedilen doğru parçasının Öklidyen uzunluğudur. (Şekil4.3)



Şekil 4.3 Chamfered küp yolu

Sonuç 4.1 $u = \max\{|x-x_0|, |y-y_0|, |z-z_0|\}$ *ve* $v = \text{mid}\{|x-x_0|, |y-y_0|, |z-z_0|\}$ *olmak üzere* $\mathbb{R}^3_{CC}$ *de* (x_0, y_0, z_0) *merkezli ve* r *yarıçaplı küre*

$$\max\left\{\frac{5-2\sqrt{3}}{2}(u+v), u\right\} = r$$

denklemi ile ifade edilen köşe noktaları $\left(\frac{4\sqrt{3}-3}{13}r, \frac{4\sqrt{3}-3}{13}r, r\right)$ *ve* $\left(\frac{2\sqrt{3}+5}{13}r, \frac{2\sqrt{3}+5}{13}r, \frac{2\sqrt{3}+5}{13}r\right)$ *noktalarının herbir bileşeninin* $+/-$ *işaret değişiklikleri ve üç bileşenin tüm muhtemel permütasyonlarının* (x_0, y_0, z_0) *kadar ötelenmişlerinden oluşan 18 yüzlü bir çokyüzlü olan chamfered küptür.*

Bu bölümün geri kalan kısmında sıkça kullanılacağından dolayı merkezil birim kürenin köşe noktaları aşağıdaki şekilde isimlendirilmiştir.

$A_0 = \left(\frac{4\sqrt{3}-3}{13}, \frac{4\sqrt{3}-3}{13}, 1\right), A_1 = \left(\frac{4\sqrt{3}-3}{13}, \frac{4\sqrt{3}-3}{13}, -1\right), A_2 = \left(\frac{4\sqrt{3}-3}{13}, -\frac{4\sqrt{3}-3}{13}, 1\right),$
$A_3 = \left(\frac{4\sqrt{3}-3}{13}, -\frac{4\sqrt{3}-3}{13}, -1\right), A_4 = \left(-\frac{4\sqrt{3}-3}{13}, \frac{4\sqrt{3}-3}{13}, 1\right), A_5 = \left(-\frac{4\sqrt{3}-3}{13}, \frac{4\sqrt{3}-3}{13}, -1\right),$
$A_6 = \left(-\frac{4\sqrt{3}-3}{13}, -\frac{4\sqrt{3}-3}{13}, 1\right), A_7 = \left(-\frac{4\sqrt{3}-3}{13}, -\frac{4\sqrt{3}-3}{13}, -1\right), A_8 = \left(1, \frac{4\sqrt{3}-3}{13}, \frac{4\sqrt{3}-3}{13}\right),$
$A_9 = \left(1, \frac{4\sqrt{3}-3}{13}, -\frac{4\sqrt{3}-3}{13}\right), A_{10} = \left(1, -\frac{4\sqrt{3}-3}{13}, \frac{4\sqrt{3}-3}{13}\right), A_{11} = \left(1, -\frac{4\sqrt{3}-3}{13}, -\frac{4\sqrt{3}-3}{13}\right),$
$A_{12} = \left(-1, \frac{4\sqrt{3}-3}{13}, \frac{4\sqrt{3}-3}{13}\right), A_{13} = \left(-1, \frac{4\sqrt{3}-3}{13}, -\frac{4\sqrt{3}-3}{13}\right), A_{14} = \left(-1, -\frac{4\sqrt{3}-3}{13}, \frac{4\sqrt{3}-3}{13}\right),$
$A_{15} = \left(-1, -\frac{4\sqrt{3}-3}{13}, -\frac{4\sqrt{3}-3}{13}\right), A_{16} = \left(\frac{4\sqrt{3}-3}{13}, 1, \frac{4\sqrt{3}-3}{13}\right), A_{17} = \left(\frac{4\sqrt{3}-3}{13}, 1, -\frac{4\sqrt{3}-3}{13}\right),$
$A_{18} = \left(\frac{4\sqrt{3}-3}{13}, -1, \frac{4\sqrt{3}-3}{13}\right), A_{19} = \left(\frac{4\sqrt{3}-3}{13}, -1, -\frac{4\sqrt{3}-3}{13}\right), A_{20} = \left(-\frac{4\sqrt{3}-3}{13}, 1, \frac{4\sqrt{3}-3}{13}\right),$
$A_{21} = \left(-\frac{4\sqrt{3}-3}{13}, 1, -\frac{4\sqrt{3}-3}{13}\right), A_{22} = \left(-\frac{4\sqrt{3}-3}{13}, -1, \frac{4\sqrt{3}-3}{13}\right), A_{23} = \left(-\frac{4\sqrt{3}-3}{13}, -1, -\frac{4\sqrt{3}-3}{13}\right),$
$A_{24} = \left(\frac{2\sqrt{3}+5}{13}, \frac{2\sqrt{3}+5}{13}, \frac{2\sqrt{3}+5}{13}\right), A_{25} = \left(\frac{2\sqrt{3}+5}{13}, \frac{2\sqrt{3}+5}{13}, -\frac{2\sqrt{3}+5}{13}\right), A_{26} = \left(\frac{2\sqrt{3}+5}{13}, -\frac{2\sqrt{3}+5}{13}, \frac{2\sqrt{3}+5}{13}\right),$
$A_{27} = \left(\frac{2\sqrt{3}+5}{13}, -\frac{2\sqrt{3}+5}{13}, -\frac{2\sqrt{3}+5}{13}\right), A_{28} = \left(-\frac{2\sqrt{3}+5}{13}, \frac{2\sqrt{3}+5}{13}, \frac{2\sqrt{3}+5}{13}\right), A_{29} = \left(-\frac{2\sqrt{3}+5}{13}, \frac{2\sqrt{3}+5}{13}, -\frac{2\sqrt{3}+5}{13}\right),$
$A_{30} = \left(-\frac{2\sqrt{3}+5}{13}, -\frac{2\sqrt{3}+5}{13}, \frac{2\sqrt{3}+5}{13}\right), A_{31} = \left(-\frac{2\sqrt{3}+5}{13}, -\frac{2\sqrt{3}+5}{13}, -\frac{2\sqrt{3}+5}{13}\right).$

Aşağıdaki önermede $\mathbb{R}^3$ deki noktalar arasındaki Öklidyen ve chamfered küp uzaklıkları arasındaki geçiş bağıntısı verilmektedir.

Önerme 4.2 *$\mathbb{R}^3$ de P_1 ve P_2 noktalarından geçen doğru l olsun. Eğer l doğrusunun doğrultu vektörü (p, q, r) olmak üzere,*

$$\rho_{P_1P_2} = \max\left\{\frac{5-2\sqrt{3}}{2}\left(\max\{|p|,|q|,|r|\} + \text{mid}\{|p|,|q|,|r|\}\right), \max\{|p|,|q|,|r|\}\right\}$$

ve $\mu_{P_1P_2} = \frac{\rho_{P_1P_2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$ ise $d_{CC}(P_1, P_2) = \mu_{P_1P_2} d_E(P_1, P_2)$ olur.

İspat *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\mathbb{R}^3$ deki herhangi iki nokta olsun. P_1 ve P_2 den geçen doğru l ise*

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} = \lambda$$

olur. l nin doğrultu vektörü (p, q, r) olduğundan $(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1) = \lambda(p, q, r)$ dir. Buna göre $d_{CC}(P_1, P_2) = \lambda\rho_{P_1P_2}$ ve $d_E(P_1, P_2) = \lambda\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ olduğundan dolayı $\frac{d_{DH}(P_1,P_2)}{\rho_{P_1P_2}} = \frac{d_E(P_1,P_2)}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$ bulunur. Bu ise önermenin ifadesindeki sonucu verir.

Yukarıdaki önerme herhangi bir doğru boyunca $d_{CC}(P_1, P_2)$ uzaklığının aynı doğru boyunca olan Öklidyen uzaklığın pozitif katı olduğu gösterir. Buna göre aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 4.2 *$\mathbb{R}^3$de A, B, X doğrudaş üç farklı nokta ise*

$$d_E(A,X) = d_E(B,X) \iff d_{CC}(A,X) = d_{CC}(B,X)$$

Sonuç 4.3 *3-boyutlu uzayda A, B, X doğrudaş üç farklı nokta ise*

$$d_{CC}(A,X)/d_{CC}(B,X) = d_E(A,X)/d_E(B,X)$$

olur.

Yani doğru boyunca olan d_E, d_{CC} uzaklıklarının oranı aynıdır.

4.2 Chamfered Küp İzometri Grubu

Chamfered küp 48 tane simetriye sahip olup, simetri grubu O_h ile gösterilir. Bu kısımda d_{CC} metriği ile donatılmış $\mathbb{R}^3$ ün izometri grubu araştırılacaktır. Bunun için öncelikle hangi Öklidyen izometrilerin Chamfered küp uzaklığını koruduğu tespit edilecek daha sonra ise bu izometrilerden başka izometrilerin olmadığı gösterilecektir. $\alpha : \mathbb{R}^3_{CC} \to \mathbb{R}^3_{CC}$ dönüşüm olmak üzere her $X, Y \in \mathbb{R}^3_{CC}$ için

$$d_{CC}(X,Y) = d_{CC}(\alpha(X), \alpha(Y))$$

ise α dönüşümü $\mathbb{R}^3_{CC}$ de bir izometridir.

Aşağıda ifade edilen önermeler ile hangi Öklidyen izometrilerin chamfered küp uzayında da izometri oldukları verilmektedir.

Önerme 4.3 *$\mathbb{R}^3$de her Öklidyen öteleme $\mathbb{R}^3_{CC}$ ün bir izometrisidir.*

İspat *α=(a_1, a_2, a_3), X=$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere $T_\alpha : \mathbb{R}^3_{CC} \to \mathbb{R}^3_{CC}$, $T_\alpha(X)$=$\alpha + X$ olacak şekilde reel uzayda bir öteleme olsun. P_1=(x_1, y_1, z_1) , P_2=$(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3_{CC}$ için $X_T = |a_1 + x_1 - a_1 - x_2|$, $Y_T = |a_2 + y_1 - a_2 - y_2|$, $Z_T = |a_3 + z_1 - a_3 - z_2|$ ve $u_T = \max\{X_T, Y_T, Z_T\}$, $v_T = \text{mid}\{X_T, Y_T, Z_T\}$ olmak üzere*

$$\begin{aligned} d_{CC}(T_\alpha(P_1), T_\alpha(P_2)) &= \max\left\{\frac{5-2\sqrt{3}}{2}(u_T + v_T), u_T\right\} \\ &= \max\left\{\frac{5-2\sqrt{3}}{2}(u+v), u\right\} \\ &= d_{CC}(P_1, P_2) \end{aligned}$$

olur. Bundan dolayı T_α bir izometridir.

Yukarıdaki önerme gereğince $\mathbb{R}^3_{CC}$ uzayında dönme ve yansımaları bulmak için orijinden geçen düzlemleri düşünmek yeterli olacaktır. Aşağıdaki önermede $\mathbb{R}^3_{CC}$ de uzaklığı koruyan yansımalar ifade edilecektir.

Önerme 4.4 *$\mathbb{R}^3_{CC}$ de $\Delta = ax + by + cz = 0$ düzlemine göre yansımanın izometri olması için gerek ve yeter koşul düzlemin doğrultu vektörü (a, b, c) nin*

$$D = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (-1,1,0), (1,0,1), (1,0,-1), (0,1,1), (0,1,-1)\}$$

elemanlarına paralel olmasıdır.

İspat *$\Delta : ax + by + cz = 0$ birim normali (a, b, c) olan düzlem olmak ü zere $\sigma_\Delta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Öklidyen yansıma*

$$\sigma_\Delta(x, y, z) = ((1-2a^2)x - 2aby - 2acz, -2abx + (1-2b^2)y - 2bcz, -2acx - 2bcy + (1-2c^2)z)$$

biçiminde tanımlanır. Chamfered kübün köşe noktaları $A_0 = \left(\frac{4\sqrt{3}-3}{13}, \frac{4\sqrt{3}-3}{13}, 1\right)$, $A_{24} = \left(\frac{2\sqrt{3}+5}{13}, \frac{2\sqrt{3}+5}{13}, \frac{2\sqrt{3}+5}{13}\right)$, $A_{17} = \left(\frac{4\sqrt{3}-3}{13}, 1, -\frac{4\sqrt{3}-3}{13}\right)$ *konum vektörü olarak alındığında $\mathbb{R}^3_{CC}$ ün bir tabanı ve taban vektörlerini koruyan bir yansıma izometri olacağından bu tabanı koruyan yansımaları tespit etmek izometrileri bulmak için yeterli olacaktır. Öklidyen yansımada taban vektörleri*

$$\sigma_\Delta\left(\tfrac{4\sqrt{3}-3}{13}, \tfrac{4\sqrt{3}-3}{13}, 1\right) = \left(\tfrac{4\sqrt{3}-3}{13}(1 - 2a^2 - 2ab) - 2ac, \tfrac{4\sqrt{3}-3}{13}(1 - 2b^2 - 2ab) - 2bc, \tfrac{4\sqrt{3}-3}{13}(-2ac - 2bc) + 1 - 2c^2\right)$$

$$\sigma_\Delta\left(\tfrac{2\sqrt{3}+5}{13}, \tfrac{2\sqrt{3}+5}{13}, \tfrac{2\sqrt{3}+5}{13}\right) = \tfrac{2\sqrt{3}+5}{13}(1 - 2a^2 - 2ab - 2ac, -2ab + 1 - 2b^2 - 2bc, -2ac - 2bc + 1 - 2c^2)$$

$$\sigma_\Delta\left(\tfrac{4\sqrt{3}-3}{13}, 1, -\tfrac{4\sqrt{3}-3}{13}\right) = \left(\tfrac{4\sqrt{3}-3}{13}(1 - 2a^2 - 2ac) - 2ab, \tfrac{4\sqrt{3}-3}{13}(-2ab - 2bc) + 1 - 2b^2, \tfrac{4\sqrt{3}-3}{13}(-2ac + 1 - 2c^2) - 2bc\right)$$

olur. Açıkça $d_{CC}(O, A_0) = d_{CC}(O, A_{24}) = d_{CC}(O, A_{17}) = 1$ dir. Eğer yansıma d_{CC} uzaklığını koruyor ise taban vektörlerinin yansıma altındaki görüntüleri için uzaklık korunmalıdır. Yani

$$d_{CC}(\sigma_\Delta(O), \sigma_\Delta(A_0)) = d_{CC}(\sigma_\Delta(O), \sigma_\Delta(A_{24})) = d_{CC}(\sigma_\Delta(O), \sigma_\Delta(A_{17})) = 1$$

olmalıdır. Böylece $X_1 = \left|\frac{4\sqrt{3}-3}{13}(1 - 2a^2 - 2ab) - 2ac\right|$, $Y_1 = \left|\frac{4\sqrt{3}-3}{13}(1 - 2b^2 - 2ab) - 2bc\right|$, $Z_1 = \left|\frac{4\sqrt{3}-3}{13}(-2ac - 2bc) + 1 - 2c^2\right|$, $X_2 = \frac{2\sqrt{3}+5}{13}|1 - 2a^2 - 2ab - 2ac|$, $Y_2 = \frac{2\sqrt{3}+5}{13}|-2ab + 1 - 2b^2 - 2bc|$, $Z_2 = \frac{2\sqrt{3}+5}{13}|-2ac - 2bc + 1 - 2c^2|$, $X_3 = \left|\frac{4\sqrt{3}-3}{13}(1 - 2a^2 - 2ac) - 2ab\right|$, $Z_3 = \left|\frac{4\sqrt{3}-3}{13}(-2ac + 1 - 2c^2) - 2bc\right|$,

$Y_3=\left|\frac{4\sqrt{3}-3}{13}\left(1-2b^2-2ab\right)-2bc\frac{4\sqrt{3}-3}{13}\left(-2ab-2bc\right)+1-2b^2\right|$ *olmak üzere* $i=1,2,3$ *için* $u_i=\max\{X_i,Y_i,Z_i\}$, $v_i=\text{mid}\{X_i,Y_i,Z_i\}$ *denilirse*

$$d_{CC}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(A_0))=\max\left\{\frac{5-2\sqrt{3}}{2}\left(u_1+v_1\right),u_1\right\}=1$$
$$d_{CC}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(A_{24}))=\max\left\{\frac{5-2\sqrt{3}}{2}\left(u_2+v_2\right),u_2\right\}=1$$
$$d_{CC}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(A_{17}))=\max\left\{\frac{5-2\sqrt{3}}{2}\left(u_3+v_3\right),u_3\right\}=1$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözülürse;

$$(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),$$
$$(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}},0),(-\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}},0),(\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}}),(\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,-\tfrac{1}{\sqrt{2}}),(0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}),(0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},-\tfrac{1}{\sqrt{2}})$$

sonuçları bulunur.

Tersine $\sigma_\Delta(X)=Y$ *iken* OX *ve* OY *vektörlerinin doğrultu vektörleri sırasıyla* (p_1,q_1,r_1) *ve* (p_2,q_2,r_2) *ise önerme 4.2 den dolayı* $d_{CC}(O,X)=d_{CC}(O,Y)$ *olması için* $\mu_{OX}=\mu_{OY}$ *olduğunu göstermek yeterlidir.*

Buna göre aşağıdaki liste (p_2,q_2,r_2) *doğrultusunun ilgili yansımaya göre* (p_1,q_1,r_1) *cinsinden karşılığını vermektedir.*

Δ	(p_2,q_2,r_2)	Δ	(p_2,q_2,r_2)
$x=0$	$(-p_1,q_1,r_1)$	$x+z=0$	$(-2r_1,2q_1,-2p_1)$
$y=0$	$(p_1,-q_1,r_1)$	$x-z=0$	$(2r_1,2q_1,2p_1)$
$z=0$	$(p_1,q_1,-r_1)$	$y+z=0$	$(2p_1,-2r_1,-2q_1)$
$x+y=0$	$(-2q_1,-2p_1,2r_1)$	$y-z=0$	$(2p_1,2r_1,2q_1)$
$x-z=0$	$(2q_1,2p_1,2r_1)$		

Böylelikle $\mu_{OX}=\mu_{OY}$ *olduğu kolaylıkla görülebilir.*

Sonuç 4.4 *Orijinden geçen düzlemlere göre izometrik yansımalarının kümesi* S_{CC} *aşağıda denklemleri verilen 9 tane Öklidyen yansımadan oluşur. Bunlar*

$$\{x=0,y=0,z=0,x+y=0,x-y=0,x+z=0,x-z=0,y+z=0,y-z=0\}.$$

Şekil4.4 deki tablo birim kürenin köşe noktalarının ilgili yansıma dönüşümleri altındaki görüntülerini vermektedir.

	(1,0,0)	(0,1,0)	(0,0,1)	(1,1,0)	(1,0,1)	(0,1,1)	(1,-1,0)	(1,0,-1)	(0,1,-1)
A_0	A_4	A_2	A_1	A_6	A_{13}	A_{19}	A_0	A_8	A_{16}
A_1	A_5	A_3	A_0	A_7	A_9	A_{17}	A_1	A_{12}	A_{18}
A_2	A_6	A_0	A_3	A_2	A_{15}	A_{18}	A_4	A_{10}	A_{17}
A_3	A_7	A_1	A_2	A_3	A_{11}	A_{16}	A_5	A_{14}	A_{19}
A_4	A_0	A_6	A_5	A_4	A_{12}	A_{23}	A_2	A_9	A_{20}
A_5	A_1	A_7	A_4	A_5	A_8	A_{21}	A_3	A_{13}	A_{22}
A_6	A_2	A_4	A_7	A_0	A_{14}	A_{22}	A_6	A_{11}	A_{21}
A_7	A_3	A_5	A_6	A_1	A_{10}	A_{20}	A_7	A_{15}	A_{23}
A_8	A_{12}	A_{10}	A_9	A_{22}	A_5	A_{11}	A_{16}	A_0	A_8
A_9	A_{13}	A_{11}	A_8	A_{23}	A_1	A_9	A_{17}	A_4	A_{10}
A_{10}	A_{14}	A_8	A_{11}	A_{18}	A_7	A_{10}	A_{20}	A_2	A_9
A_{11}	A_{15}	A_9	A_{10}	A_{19}	A_3	A_8	A_{21}	A_6	A_{11}
A_{12}	A_8	A_{14}	A_{13}	A_{20}	A_4	A_{15}	A_{18}	A_1	A_{12}
A_{13}	A_9	A_{15}	A_{12}	A_{21}	A_0	A_{13}	A_{19}	A_5	A_{14}
A_{14}	A_{10}	A_{12}	A_{15}	A_{16}	A_6	A_{14}	A_{22}	A_3	A_{13}
A_{15}	A_{11}	A_{13}	A_{14}	A_{17}	A_2	A_{12}	A_{23}	A_7	A_{15}
A_{16}	A_{20}	A_{18}	A_{17}	A_{14}	A_{21}	A_3	A_8	A_{16}	A_0
A_{17}	A_{21}	A_{19}	A_{16}	A_{15}	A_{17}	A_1	A_9	A_{20}	A_2
A_{18}	A_{22}	A_{16}	A_{19}	A_{10}	A_{23}	A_2	A_{12}	A_{18}	A_1
A_{19}	A_{23}	A_{17}	A_{18}	A_{11}	A_{19}	A_0	A_{13}	A_{22}	A_3
A_{20}	A_{16}	A_{22}	A_{21}	A_{12}	A_{20}	A_7	A_{10}	A_{17}	A_4
A_{21}	A_{17}	A_{23}	A_{20}	A_{13}	A_{16}	A_5	A_{11}	A_{21}	A_6
A_{22}	A_{18}	A_{20}	A_{23}	A_8	A_{22}	A_6	A_{14}	A_{19}	A_5
A_{23}	A_{19}	A_{21}	A_{22}	A_9	A_{18}	A_4	A_{15}	A_{23}	A_7
A_{24}	A_{28}	A_{26}	A_{25}	A_{30}	A_{29}	A_{27}	A_{24}	A_{24}	A_{24}
A_{25}	A_{29}	A_{27}	A_{24}	A_{31}	A_{25}	A_{25}	A_{25}	A_{28}	A_{26}
A_{26}	A_{30}	A_{24}	A_{27}	A_{26}	A_{31}	A_{26}	A_{28}	A_{26}	A_{25}
A_{27}	A_{31}	A_{25}	A_{26}	A_{27}	A_{27}	A_{24}	A_{29}	A_{30}	A_{27}
A_{28}	A_{24}	A_{30}	A_{29}	A_{28}	A_{28}	A_{31}	A_{26}	A_{25}	A_{28}
A_{29}	A_{25}	A_{31}	A_{28}	A_{29}	A_{24}	A_{29}	A_{27}	A_{29}	A_{30}
A_{30}	A_{26}	A_{28}	A_{31}	A_{24}	A_{30}	A_{30}	A_{30}	A_{27}	A_{29}
A_{31}	A_{27}	A_{29}	A_{30}	A_{25}	A_{26}	A_{28}	A_{31}	A_{31}	A_{31}

Şekil 4.4 $\mathbb{R}^3_{CC}$ de Yansıma Düzlemlerine Göre K öşe Noktaların Görüntüleri

Önerme 4.5 *Orijinden geçen bir l doğrusuna göre bir r_θ dönmesinin izometri olması için gerek ve yeter koşul*

$$D_1 = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$$
$$D_2 = \{(1,1,1),\ (-1,1,1),(1,-1,1),\ (1,1,-1)\}$$
$$D_3 = \{(1,1,0),\ (1,0,1),(0,1,1),\ (1,-1,0),\ (1,0,-1),\ (0,1,-1)\}$$

ve

$$R_1 = \{r_\theta \mid \theta \in \{\pi/2\,,\,\pi,3\pi/2\}\,,\ \text{dönme ekseninin doğrultu vektörü } D_1 \text{ in elemanı}\}$$
$$R_2 = \{r_\theta \mid \theta \in \{2\pi/3\,,\,4\pi/3\}\,,\ \text{dönme ekseninin doğrultu vektörü } D_2 \text{ nin elemanı}\}$$
$$R_3 = \{r_\theta \mid \theta = \pi,\ \text{dönme ekseninin doğrultu vektörü } D_3 \text{ ün elemanı}\}$$

olmak üzere $r_\theta \in R_{CC} = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ olmasıdır.

İspat *Bir l doğrusunun birim doğrultusu (p,q,r) olmak üzere, l etrafında r_θ Öklidyen dönmenin matris formu;*

$$\begin{bmatrix} \cos\theta + p^2(1-\cos\theta) & pq(1-\cos\theta) - r\sin\theta & pr(1-\cos\theta) + q\sin\theta \\ pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta & \cos\theta + q^2(1-\cos\theta) & qr(1-\cos\theta) - p\sin\theta \\ pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta & qr(1-\cos\theta) + p\sin\theta & \cos\theta - r^2(1-\cos\theta) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. l eksenindeki bir dönme , l doğrusu boyunca kesişen iki düzlemin yansımalarının birleşimi olduğundan önerme 4.4 den l doğrusunun doğrultu vektörleri $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,1)$, $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,-1,0)$, $(1,0,-1)$, $(0,1,-1)$ olarak alınabilir.

$\mathbb{R}^3_{CC}$ deki izometrik dönmelerin bulunması için , d_{CC} birim küresinin kenarlarının uzunluklarını koruyan dönmelerin bulunması yeterlidir.

$A_8 = \left(1, \frac{4\sqrt{3}-3}{13}, \frac{4\sqrt{3}-3}{13}\right)$, $A_9 = \left(1, \frac{4\sqrt{3}-3}{13}, -\frac{4\sqrt{3}-3}{13}\right)$ $A_{24} = \left(\frac{2\sqrt{3}+5}{13}, \frac{2\sqrt{3}+5}{13}, \frac{2\sqrt{3}+5}{13}\right)$ *olan d_{CC} birim küresinin köşe noktaları ele alınsın. Buna göre*

$$r_\theta(A_8) = \begin{pmatrix} \cos\theta + p^2(1-\cos\theta) + \frac{4\sqrt{3}-3}{13}\left((pq+pr)(1-\cos\theta) + (q-r)\sin\theta\right), \\ pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta + \frac{4\sqrt{3}-3}{13}\left(\cos\theta + (q^2+qr)(1-\cos\theta) - p\sin\theta\right), \\ pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta) + \frac{4\sqrt{3}-3}{13}\left(\cos\theta + (qr+r^2)(1-\cos\theta) + p\sin\theta\right) \end{pmatrix}$$

$$r_\theta(A_9) = \begin{pmatrix} \cos\theta + p^2(1-\cos\theta) + \frac{4\sqrt{3}-3}{13}\left((pq-pr)(1-\cos\theta) - (q+r)\sin\theta\right), \\ pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta + \frac{4\sqrt{3}-3}{13}\left(\cos\theta + (q^2-qr)(1-\cos\theta) + p\sin\theta\right), \\ pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta) + \frac{4\sqrt{3}-3}{13}\left(-\cos\theta + (qr-r^2)(1-\cos\theta) + p\sin\theta\right) \end{pmatrix}$$

$$r_\theta(A_{24}) = \frac{2\sqrt{3}+5}{13}\begin{pmatrix} \cos\theta + (p^2+pq+pr)(1-\cos\theta) + (q-r)\sin\theta, \\ \cos\theta + (pq+q^2+qr)(1-\cos\theta) + (r-p)\sin\theta, \\ \cos\theta + (pr+qr+r^2)(1-\cos\theta) + (p-q)\sin\theta \end{pmatrix}$$

bulunur. O halde $\theta \neq 0$ olmak üzere $d_{CC}(r_\theta(A_8), r_\theta(A_9)) = \frac{8\sqrt{3}-6}{13}$ ve $d_{CC}(r_\theta(A_8), r_\theta(A_{24})) = 4 - 2\sqrt{3}$ olmalıdır. Böylece,

$$\begin{aligned} X_1 &= \left|\frac{8\sqrt{3}-6}{13}\left(pr(1-\cos\theta) + q\sin\theta\right)\right|, \\ Y_1 &= \left|\frac{8\sqrt{3}-6}{13}\left(qr(1-\cos\theta) - p\sin\theta\right)\right|, \\ Z_1 &= \left|\frac{8\sqrt{3}-6}{13}\left(\cos\theta + r^2(1-\cos\theta)\right)\right|, \\ X_2 &= \frac{8\sqrt{3}-6}{13}\left|(q-r)\sin\theta - \cos\theta + \left(-p^2+pq+pr\right)(1-\cos\theta)\right|, \\ Y_2 &= \frac{8\sqrt{3}-6}{13}\left|(-p-r)\sin\theta + \cos\theta + \left(q^2-pq+qr\right)(1-\cos\theta)\right|, \\ Z_2 &= \frac{8\sqrt{3}-6}{13}\left|(p+q)\sin\theta + \cos\theta + \left(r^2+qr-pr\right)(1-\cos\theta)\right| \end{aligned}$$

olmak üzere; $i = 1, 2$ *için* $u_i = \max\{X_i, Y_i, Z_i\}$ *ve* $v_i = \text{mid}\{X_i, Y_i, Z_i\}$ *denilirse*

$$d_{CC}(r_\theta(A_8), r_\theta(A_9)) = \max\left\{\tfrac{5-2\sqrt{3}}{2}(u_1 + v_1), u_1\right\} = \tfrac{8\sqrt{3}-6}{13}$$
$$d_{CC}(r_\theta(A_8), r_\theta(A_{24})) = \max\left\{\tfrac{5-2\sqrt{3}}{2}(u_2 + v_2), u_2\right\} = 4 - 2\sqrt{3}$$

elde edilir.

l *doğrusunun doğrultu vektörü* $(0, 0, 1)$ *ise* $(p, q, r) = (0, 0, 1)$ *olur.* p, q, r *değerlerini* $d_{CC}(r_\theta(A_8), r_\theta(A_9)) = \frac{8\sqrt{3}-6}{13}$ *ve* $d_{CC}(r_\theta(A_8), r_\theta(A_{24})) = 4 - 2\sqrt{3}$ *de yerine yazılırsa*

$$X_1 = \frac{16\sqrt{3}-12}{13}|\cos\theta|,\ Y_1 = \frac{16\sqrt{3}-12}{13}|\sin\theta|,\ Z_1 = 0,$$
$$X_2 = \frac{8-2\sqrt{3}}{13}|\cos\theta - \sin\theta|,\ Y_2 = \frac{8-2\sqrt{3}}{13}|\cos\theta + \sin\theta|,\ Z_2 = \frac{8-2\sqrt{3}}{13}$$

olmak üzere $i = 1, 2$ *için* $u_i = \max\{X_i, Y_i, Z_i\}$ *ve* $v_i = \text{mid}\{X_i, Y_i, Z_i\}$ *denilirse*

$$\max\left\{\frac{5-2\sqrt{3}}{2}(u_1 + v_1), u_1\right\} = \frac{8\sqrt{3}-6}{13}$$
$$\max\left\{\frac{5-2\sqrt{3}}{2}(u_2 + v_2), u_2\right\} = 4 - 2\sqrt{3}$$

elde edilir. Bu iki denklem çözülürse $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi$, $\theta = 3\pi/2$ *olur.Buradan* z *ekseni etrafındaki* $\theta = \pi/2, \pi, 3\pi/2$ *radyanlık dönmeler* $\mathbb{R}^3_{CC}$ *ün bir izometrisidir. Benzer şekilde* l *nin yön vektörü* $(0, 1, 0)$ *veya* $(1, 0, 0)$ *ise* $\theta = \pi/2, \pi, 3\pi/2$ *olarak bulunur.*

l *doğrusunun yön vektörü* $(1, 1, 1)$ *ise* $(p, q, r) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olur.* p, q, r *değerleri* $d_{CC}(r_\theta(A_8), r_\theta(A_9)) = \frac{8\sqrt{3}-6}{13}$ *ve* $d_{CC}(r_\theta(A_8), r_\theta(A_{24})) = 4 - 2\sqrt{3}$ *de yerine yazılırsa,*

$$X_1 = \tfrac{8\sqrt{3}-6}{39}|2\cos\theta + 1|, Y_1 = \left|\tfrac{8\sqrt{3}-6}{39}(1 - \cos\theta) + \tfrac{2\sqrt{3}-8}{13}\sin\theta\right|, Z_1 = \left|\tfrac{8\sqrt{3}-6}{39}(1 - \cos\theta) + \tfrac{8-2\sqrt{3}}{13}\sin\theta\right|$$
$$X_2 = \tfrac{8-2\sqrt{3}}{39}|4\cos\theta) - 1|, Y_2 = \tfrac{8-2\sqrt{3}}{39}\left|2\cos\theta) + 2\sqrt{3}\sin\theta + 1\right|, Z_2 = \tfrac{8-2\sqrt{3}}{39}\left|2\cos\theta - 2\sqrt{3}\sin\theta + 1\right|$$

olmak üzere $i = 1, 2$ *için* $u_i = \max\{X_i, Y_i, Z_i\}$ *ve* $v_i = \text{mid}\{X_i, Y_i, Z_i\}$ *denilirse*

$$\max\left\{\frac{5-2\sqrt{3}}{2}(u_1 + v_1), u_1\right\} = \frac{8\sqrt{3}-6}{13}$$
$$\max\left\{\frac{5-2\sqrt{3}}{2}(u_2 + v_2), u_2\right\} = 4 - 2\sqrt{3}$$

elde edilir. Bu denklemler çözülürse $\theta = 2\pi/3$, $\theta = 4\pi/3$ *bulunur. Buradan* l *etrafındaki* $\theta = 2\pi/3, 4\pi/3$ *radyanlık dönmeler* $\mathbb{R}^3_{CC}$ *ün bir izometrisidir. Benzer şekilde* l *nin yön vektörü (-1,1,1), (1,1,-1) veya (1,-1,1) ise* $\theta = 2\pi/3, 4\pi/3$ *olarak bulunur.*

l *doğrusunun yön vektörü (1,1,0) ise* $(p, q, r) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$*olur.* p, q, r *değerlerini* $d_{CC}(r_\theta(A_8), r_\theta(A_9)) = \frac{8\sqrt{3}-6}{13}$ *ve* $d_{CC}(r_\theta(A_8), r_\theta(A_{24})) = 4 - 2\sqrt{3}$ *de yerine yazılırsa;*

$X_1=\frac{8\sqrt{3}-6}{13}\left|\cos\theta\right|$, $Y_1=\frac{4\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{13}\left|\sin\theta\right|$, $Z_1=\frac{4\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{13}\left|\sin\theta\right|$, $X_2=\frac{8-2\sqrt{3}}{26}\left|2\cos\theta\text{-}\sqrt{2}\sin\theta\right|$, $Y_2=\frac{8-2\sqrt{3}}{26}\left|\sqrt{2}\sin\theta-2\cos\theta\right|$ *ve* $Z_2=\frac{8-2\sqrt{3}}{13}\left|\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta\right|$ *olmak üzere ve de* $i=1,2$ *için* $u_i=\max\{X_i,Y_i,Z_i\}$ *ve* $v_i=\text{mid}\{X_i,Y_i,Z_i\}$ *denilirse*

$$\max\left\{\frac{5-2\sqrt{3}}{2}\left(u_1+v_1\right),u_1\right\} = \frac{8\sqrt{3}-6}{13}$$

$$\max\left\{\frac{5-2\sqrt{3}}{2}\left(u_2+v_2\right),u_2\right\} = 4-2\sqrt{3}$$

elde edilir. Bu denklemler çözülürse $\theta=\pi$ *elde edilir. Buradan* l *etrafındaki ,* $\theta=\pi$ *radyanlık dönmeler* $\mathbb{R}^3_{CC}$ *ün bir izometrisidir. Benzer şekilde* l *nin yön vektörü* $(1,0,1)$*,* $(0,1,1)$ *,* $(1,-1,0)$*,* $(1,0,-1)$*,* $(0,1,-1)$ *ise* $\theta=\pi$ *olur.*

Tersine $r_\theta(X)=Y$ *olacak şekilde* X *ve* Y *noktalarıyla oluşturulan* OX *ve* OY *doğrularının doğrultuları sırasıyla* (p_1,q_1,r_1) *ve* (p_2,q_2,r_2) *olmak üzere* $d_{CC}(O,X)=d_{CC}(O,Y)$ *olduğunu göstermek için önerme 4.2 den* $\mu_{OX}=\mu_{OY}$ *olduğu gösterilmelidir. Bu ise* (p_1,q_1,r_1) *vektörünün tüm durumlar için görüntüleri bulunarak kolaylıkla gösterilebilir. Örneğin dönme ekseninin doğrultu vektörü* $(1,0,0)$ *olmak üzere bu eksende* $\theta=\frac{\pi}{2}$ *radyanlık dönme dönüşümü yapılınca* $(p_2,q_2,r_2)=(p_1,-r_1,q_1)$ *bulunur. Buradan da* $\mu_{OX}=\mu_{OY}$ *olduğu görülür. benzer şekilde diğer dönme eksenleri ve dönme açıları için eşitlik gösterilebilir. Buda ispatı tamamlar.*

Şekil4.5 deki tablo birim kürenin köşe noktalarının ilgili dönme dönüşümleri altındaki görüntülerini vermektedir.

Sonuç 4.5 *Orijinden geçen doğrulara göre izometrik dönmelerin* R_{CC} *kümesi tam olarak 23 Öklidyen dönme içerir.*

	(1,0,0)			(0,1,0)			(0,0,1)			(1,1,0)	(1,0,1)	(0,1,1)	(1,-1,0)	(1,0,-1)	(0,1,-1	(1,1,1)		(-1,1,1)		(1,-1,1)		(1,1,-1)	
	π/2	π	3π/2	π/2	π	3π/2	π/2	π	3π/2	π	π	π	π	π	π	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3
A_0	A_{18}	A_3	A_{17}	A_9	A_5	A_{12}	A_4	A_6	A_2	A_1	A_{10}	A_{20}	A_7	A_{15}	A_{23}	A_8	A_{16}	A_{21}	A_{14}	A_{22}	A_{11}	A_{19}	A_{13}
A_1	A_{16}	A_2	A_{19}	A_{13}	A_4	A_8	A_5	A_7	A_3	A_0	A_{14}	A_{22}	A_6	A_{11}	A_{21}	A_{12}	A_{18}	A_{23}	A_{10}	A_{20}	A_{15}	A_{17}	A_9
A_2	A_{19}	A_1	A_{16}	A_{11}	A_7	A_{14}	A_0	A_4	A_6	A_5	A_8	A_{21}	A_3	A_{13}	A_{22}	A_9	A_{20}	A_{17}	A_{15}	A_{18}	A_{10}	A_{23}	A_{12}
A_3	A_{17}	A_0	A_{18}	A_{15}	A_6	A_{10}	A_1	A_5	A_7	A_4	A_{12}	A_{23}	A_2	A_9	A_{20}	A_{13}	A_{22}	A_{19}	A_{11}	A_{16}	A_{14}	A_{21}	A_8
A_4	A_{22}	A_7	A_{21}	A_8	A_1	A_{13}	A_6	A_2	A_0	A_3	A_{11}	A_{16}	A_5	A_{14}	A_{19}	A_{10}	A_{17}	A_{20}	A_{12}	A_{23}	A_9	A_{18}	A_{15}
A_5	A_{20}	A_6	A_{23}	A_{12}	A_0	A_9	A_7	A_3	A_1	A_2	A_{15}	A_{18}	A_4	A_{10}	A_{17}	A_{14}	A_{19}	A_{22}	A_8	A_{21}	A_{13}	A_{16}	A_{11}
A_6	A_{23}	A_5	A_{20}	A_{10}	A_3	A_{15}	A_2	A_0	A_4	A_7	A_9	A_{17}	A_1	A_{12}	A_{18}	A_{11}	A_{21}	A_{16}	A_{13}	A_{19}	A_8	A_{22}	A_{14}
A_7	A_{21}	A_4	A_{22}	A_{14}	A_2	A_{11}	A_3	A_1	A_5	A_6	A_{13}	A_{19}	A_0	A_8	A_{16}	A_{15}	A_{23}	A_{18}	A_9	A_{17}	A_{12}	A_{20}	A_{10}
A_8	A_{10}	A_{11}	A_9	A_1	A_{13}	A_4	A_{20}	A_{14}	A_{18}	A_{17}	A_2	A_{12}	A_{23}	A_7	A_{15}	A_{16}	A_0	A_5	A_{22}	A_6	A_{19}	A_3	A_{21}
A_9	A_8	A_{10}	A_{11}	A_5	A_{12}	A_0	A_{21}	A_{15}	A_{19}	A_{16}	A_6	A_{14}	A_{22}	A_3	A_{13}	A_{20}	A_2	A_7	A_{18}	A_4	A_{23}	A_1	A_{17}
A_{10}	A_{11}	A_9	A_8	A_3	A_{15}	A_6	A_{16}	A_{12}	A_{22}	A_{21}	A_0	A_{13}	A_{19}	A_5	A_{14}	A_{17}	A_4	A_1	A_{23}	A_2	A_{18}	A_7	A_{20}
A_{11}	A_9	A_8	A_{10}	A_7	A_{14}	A_2	A_{17}	A_{13}	A_{23}	A_{20}	A_4	A_{15}	A_{18}	A_1	A_{12}	A_{21}	A_6	A_3	A_{19}	A_0	A_{22}	A_5	A_{16}
A_{12}	A_{14}	A_{15}	A_{13}	A_0	A_9	A_5	A_{22}	A_{10}	A_{16}	A_{19}	A_3	A_8	A_{21}	A_6	A_{11}	A_{18}	A_1	A_4	A_{20}	A_7	A_{17}	A_2	A_{23}
A_{13}	A_{12}	A_{14}	A_{15}	A_4	A_8	A_1	A_{23}	A_{11}	A_{17}	A_{18}	A_7	A_{10}	A_{20}	A_2	A_9	A_{22}	A_3	A_6	A_{16}	A_5	A_{21}	A_0	A_{19}
A_{14}	A_{15}	A_{13}	A_{12}	A_2	A_{11}	A_7	A_{18}	A_8	A_{20}	A_{23}	A_1	A_9	A_{17}	A_4	A_{10}	A_{19}	A_5	A_0	A_{21}	A_3	A_{16}	A_6	A_{22}
A_{15}	A_{13}	A_{12}	A_{14}	A_6	A_{10}	A_3	A_{19}	A_9	A_{21}	A_{22}	A_5	A_{11}	A_{16}	A_0	A_8	A_{23}	A_7	A_2	A_{17}	A_1	A_{20}	A_4	A_{18}
A_{16}	A_2	A_{19}	A_1	A_{17}	A_{21}	A_{20}	A_{12}	A_{22}	A_{10}	A_9	A_{18}	A_4	A_{15}	A_{23}	A_7	A_0	A_8	A_{13}	A_6	A_{14}	A_3	A_{11}	A_5
A_{17}	A_0	A_{18}	A_3	A_{21}	A_{20}	A_{16}	A_{13}	A_{23}	A_{11}	A_8	A_{22}	A_6	A_{14}	A_{19}	A_5	A_4	A_{10}	A_{15}	A_2	A_{12}	A_7	A_9	A_1
A_{18}	A_3	A_{17}	A_0	A_{19}	A_{23}	A_{22}	A_8	A_{20}	A_{14}	A_{13}	A_{16}	A_5	A_{11}	A_{21}	A_6	A_1	A_{12}	A_9	A_7	A_{10}	A_2	A_{15}	A_4
A_{19}	A_1	A_{16}	A_2	A_{23}	A_{22}	A_{18}	A_9	A_{21}	A_{15}	A_{12}	A_{20}	A_7	A_{10}	A_{17}	A_4	A_5	A_{14}	A_{11}	A_3	A_8	A_6	A_{13}	A_0
A_{20}	A_6	A_{23}	A_5	A_{16}	A_{17}	A_{21}	A_{14}	A_{18}	A_8	A_{11}	A_{19}	A_0	A_{13}	A_{22}	A_3	A_2	A_9	A_{12}	A_4	A_{15}	A_1	A_{10}	A_7
A_{21}	A_4	A_{22}	A_7	A_{20}	A_{16}	A_{17}	A_{15}	A_{19}	A_9	A_{10}	A_{23}	A_2	A_{12}	A_{18}	A_1	A_6	A_{11}	A_{14}	A_0	A_{13}	A_5	A_8	A_3
A_{22}	A_7	A_{21}	A_4	A_{18}	A_{19}	A_{23}	A_{10}	A_{16}	A_{12}	A_{15}	A_{17}	A_1	A_9	A_{20}	A_2	A_3	A_{13}	A_8	A_5	A_{11}	A_0	A_{14}	A_6
A_{23}	A_5	A_{20}	A_6	A_{22}	A_{18}	A_{19}	A_{11}	A_{17}	A_{13}	A_{14}	A_{21}	A_3	A_8	A_{16}	A_0	A_7	A_{15}	A_{10}	A_1	A_9	A_4	A_{12}	A_2
A_{24}	A_{26}	A_{27}	A_{25}	A_{25}	A_{29}	A_{28}	A_{28}	A_{30}	A_{26}	A_{25}	A_{26}	A_{28}	A_{31}	A_{31}	A_{31}	A_{24}	A_{24}	A_{29}	A_{30}	A_{30}	A_{27}	A_{27}	A_{29}
A_{25}	A_{24}	A_{26}	A_{27}	A_{29}	A_{28}	A_{24}	A_{29}	A_{31}	A_{27}	A_{24}	A_{30}	A_{30}	A_{30}	A_{27}	A_{29}	A_{28}	A_{26}	A_{31}	A_{26}	A_{28}	A_{31}	A_{25}	A_{25}
A_{26}	A_{27}	A_{25}	A_{24}	A_{27}	A_{31}	A_{30}	A_{24}	A_{28}	A_{30}	A_{29}	A_{24}	A_{29}	A_{27}	A_{29}	A_{30}	A_{25}	A_{28}	A_{25}	A_{31}	A_{26}	A_{26}	A_{31}	A_{28}
A_{27}	A_{25}	A_{24}	A_{26}	A_{31}	A_{30}	A_{26}	A_{25}	A_{29}	A_{31}	A_{28}	A_{28}	A_{31}	A_{26}	A_{25}	A_{28}	A_{29}	A_{30}	A_{27}	A_{27}	A_{24}	A_{30}	A_{29}	A_{24}
A_{28}	A_{30}	A_{31}	A_{29}	A_{24}	A_{25}	A_{29}	A_{30}	A_{26}	A_{24}	A_{27}	A_{27}	A_{24}	A_{29}	A_{30}	A_{27}	A_{26}	A_{25}	A_{28}	A_{28}	A_{31}	A_{25}	A_{26}	A_{31}
A_{29}	A_{28}	A_{30}	A_{31}	A_{28}	A_{24}	A_{25}	A_{31}	A_{27}	A_{25}	A_{26}	A_{31}	A_{26}	A_{28}	A_{26}	A_{25}	A_{30}	A_{27}	A_{30}	A_{24}	A_{29}	A_{29}	A_{24}	A_{27}
A_{30}	A_{31}	A_{29}	A_{28}	A_{26}	A_{27}	A_{31}	A_{26}	A_{24}	A_{28}	A_{31}	A_{25}	A_{25}	A_{25}	A_{28}	A_{26}	A_{27}	A_{29}	A_{24}	A_{29}	A_{27}	A_{24}	A_{30}	A_{30}
A_{31}	A_{29}	A_{28}	A_{30}	A_{30}	A_{26}	A_{27}	A_{27}	A_{25}	A_{29}	A_{30}	A_{29}	A_{27}	A_{24}	A_{24}	A_{24}	A_{31}	A_{31}	A_{26}	A_{25}	A_{25}	A_{28}	A_{28}	A_{26}

Şekil 4.5 $\mathbb{R}^3_{CC}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

Yardımcı Teorem 4.2 *(x, y, z) noktasını $(-x, -y, -z)$ noktasına eşleyen dönüşüm olan orijine göre σ_O inversiyonu (noktaya göre yansıma) $\mathbb{R}^3_{CC}$ ün bir izometrisidir.*

Şekil4.6 daki tabloda inversiyon dönüşümü altında birim kürenin köşe noktalarının görüntüleri verilmektedir.

A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}	A_{17}	A_{18}	A_{19}	A_{20}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{24}	A_{25}	A_{26}	A_{27}	A_{28}	A_{29}	A_{30}	A_{31}
A_7	A_6	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1	A_0	A_{15}	A_{14}	A_{13}	A_{12}	A_{11}	A_{10}	A_9	A_8	A_{23}	A_{22}	A_{21}	A_{20}	A_{19}	A_{18}	A_{17}	A_{16}	A_{31}	A_{30}	A_{29}	A_{28}	A_{27}	A_{26}	A_{25}	A_{24}

Şekil 4.6 $\mathbb{R}^3_{CC}$ de σ_O İnversiyonu Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

Önerme 4.6 *d_{CC} uzaklığını invaryant bırakan orijine göre altı tane dönme yansıması vardır.*

İspat *$r_\theta \in R_{CC}$, Γ ve Δ düzlemleri, Π düzlemine dik olmak üzere dönme yansıma ρ : $\sigma_\Pi\sigma_\Delta\sigma_\Gamma = \sigma_\Pi r_\theta$ şeklinde ifade edilebilir.O halde dönme ekseni yansıma düzlemine dik olmak zorundadır. Bu nedenle önerme 4.5 deki dönme eksenlerinden 9 tanesi incelenmelidir. Çünkü D_2 de verilen dönme eksenlerinin hiçbiri önerme 4.4 de verilen yansıma düzlemlerne dik değildir. Π düzlemi olarak $z = 0$ düzlemi alınırsa r_θ nın birim doğrultusu (0,0,1) olup*

$$\rho : \sigma_\Pi r_\theta(x, y, z) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, -z)$$

bulunur.

$$\rho(A_8) = \rho\left(1, \tfrac{4\sqrt{3}-3}{13}, \tfrac{4\sqrt{3}-3}{13}\right) = \left(\cos\theta - \tfrac{4\sqrt{3}-3}{13}\sin\theta, \sin\theta + \tfrac{4\sqrt{3}-3}{13}\cos\theta, -\tfrac{4\sqrt{3}-3}{13}\right)$$
$$\rho(A_9) = \rho\left(1, \tfrac{4\sqrt{3}-3}{13}, -\tfrac{4\sqrt{3}-3}{13}\right) = \left(\cos\theta - \tfrac{4\sqrt{3}-3}{13}\sin\theta, \sin\theta + \tfrac{4\sqrt{3}-3}{13}\cos\theta, \tfrac{4\sqrt{3}-3}{13}\right)$$
$$\rho(A_{24}) = \rho\left(\tfrac{2\sqrt{3}+5}{13}, \tfrac{2\sqrt{3}+5}{13}, \tfrac{2\sqrt{3}+5}{13}\right) = \tfrac{2\sqrt{3}+5}{13}\left(\cos\theta - \sin\theta, \sin\theta + \cos\theta, -1\right)$$

elde edilir. $d_{CC}(\rho(A_8), \rho(A_{96}))=\frac{8\sqrt{3}-6}{13}$ ve $d_{CC}(\rho(A_8), \rho(A_{24}))=4 - 2\sqrt{3}$ olmak zorunda olduğundan

$$\begin{aligned} X_1 &= 0, Y_1 = 0, Z_1 = \frac{8\sqrt{3}-6}{13}, \\ X_2 &= \frac{8-2\sqrt{3}}{13}\left|\cos\theta + \sin\theta\right|, Y_2 = \frac{8-2\sqrt{3}}{13}\left|\sin\theta - \cos\theta\right|, Z_2 = \frac{8-2\sqrt{3}}{13} \end{aligned}$$

olmak üzere ve de $i = 1, 2$ için $u_i = \max\{X_i, Y_i, Z_i\}$ ve $v_i = \text{mid}\{X_i, Y_i, Z_i\}$ denilirse

$$\max\left\{\frac{5-2\sqrt{3}}{2}\left(u_1 + v_1\right), u_1\right\} = \frac{8\sqrt{3}-6}{13}$$

ve

$$\max\left\{\frac{5-2\sqrt{3}}{2}\left(u_2 + v_2\right), u_2\right\} = 4 - 2\sqrt{3}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülürse $\theta = \pi/2$, π,$3\pi/2$ bulunur. Burada elde edilen sonuçlardan kolaylıkla $\sigma_\Pi r_\pi = \sigma_O$ olduğu gösterilebilir. O halde $z = 0$ düzlemine göre 2 tane dönme yansıma elde edilir.Benzer şekilde Π olarak $x = 0$ ve $y = 0$ düzlemlerine göre 2 şer tane dönme yansıma elde edilir.

Eğer Π düzlemi olarak $x + y = 0$ düzlemi alınırsa için Π tanımlı ise r_θ dönmesinin birim doğrultusu $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ olup,

$$\rho : \sigma_\Pi r_\theta(x, y, z) = \begin{pmatrix} (\frac{cos\theta-1}{2})x - (\frac{1+\cos\theta}{2})y + (\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})z, (\frac{-cos\theta-1}{2})x - (\frac{-1+\cos\theta}{2})y + (\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})z, \\ (-\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})x + (\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})y + \cos\theta z) \end{pmatrix}$$

olur. Buradan $d_{CC}(\rho(A_8),\rho(A_9))=\frac{8\sqrt{3}-6}{13}$ *ve* $d_{CC}(\rho(A_8),\rho(A_{24}))=4-2\sqrt{3}$ *olması gerektiğinden* $X_1=\frac{8\sqrt{3}-6}{13}\left|\cos\theta\right|$, $Y_1=\frac{4\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{13}\left|\sin\theta\right|$, $Z_1=\frac{4\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{13}\left|\sin\theta\right|$, $X_2=\frac{8-2\sqrt{3}}{13}\left|\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta\right|$, $Y_2=\frac{8-2\sqrt{3}}{13}\left|2\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta\right|$ *ve* $Z_2=0$ *olmak üzere ve de* $i=1,2$ *için* $u_i=\max\{X_i,Y_i,Z_i\}$ *ve* $v_i=\text{mid}\{X_i,Y_i,Z_i\}$ *denilirse*

$$\max\left\{\frac{5-2\sqrt{3}}{2}(u_1+v_1),u_1\right\} = \frac{8\sqrt{3}-6}{13}$$

$$\max\left\{\frac{5-2\sqrt{3}}{2}(u_2+v_2),u_2\right\} = 4-2\sqrt{3}$$

elde edilir. Bu denklemler çözülürse $\theta=\pi$ *sonucu elde edilir. Buradan elde olunan sonuca göre* $\sigma_\Pi r_\pi=\sigma_O$ *dönüşümü O =(0,0,0) göre bir inversiyon olduğundan bu durumda yeni bir dönme yansıması yoktur. Benzer şekilde* Π *düzlemi,* $x-y=0, x+z=0, x-z=0, y+z=0, y-z=0$ *düzlemlerinden herhangi biri ise dönme ekseninin doğrultusu (1,-1,0), (1,0,1), (1,0,-1), (0,1,1), (0,1,-1) olup bu durumların her birinde* $\theta=\pi$ *sonucuna ulaşılır. Bu sonuç ise orijine göre inversiyon olduğundan bu durumların hiçbirinde bir dönme yansıma yoktur.*

Şekil4.7 deki tablo birim kürenin köşe noktalarının ilgili dönme yansıma dönüşümleri altındaki görüntülerini vermektedir.

	(1,0,0)			(0,1,0)			(0,0,1)			(1,1,0)	(1,0,1)	(0,1,1)	(1,-1,0	(1,0,-1	(0,1,-1
	π/2	π	3π/2	π/2	π	3π/2	π/2	π	3π/2	π	π	π	π	π	π
A_0	A_{22}	A_7	A_{21}	A_{11}	A_7	A_{14}	A_5	A_7	A_3	A_7	A_7	A_7	A_7	A_7	A_7
A_1	A_{20}	A_6	A_{23}	A_{15}	A_6	A_{10}	A_4	A_6	A_2	A_6	A_6	A_6	A_6	A_6	A_6
A_2	A_{23}	A_5	A_{20}	A_9	A_5	A_{12}	A_1	A_5	A_7	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5
A_3	A_{21}	A_4	A_{22}	A_{13}	A_4	A_8	A_0	A_4	A_6	A_4	A_4	A_4	A_4	A_4	A_4
A_4	A_{18}	A_3	A_{17}	A_{10}	A_3	A_{15}	A_7	A_3	A_1	A_3	A_3	A_3	A_3	A_3	A_3
A_5	A_{16}	A_2	A_{19}	A_{14}	A_2	A_{11}	A_6	A_2	A_0	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2
A_6	A_{19}	A_1	A_{16}	A_8	A_1	A_{13}	A_3	A_1	A_5	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1
A_7	A_{17}	A_0	A_{18}	A_{12}	A_0	A_9	A_2	A_0	A_4	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0
A_8	A_{14}	A_{15}	A_{13}	A_3	A_{15}	A_6	A_{21}	A_{15}	A_{19}	A_{15}	A_{15}	A_{15}	A_{15}	A_{15}	A_{15}
A_9	A_{12}	A_{14}	A_{15}	A_7	A_{14}	A_2	A_{20}	A_{14}	A_{18}	A_{14}	A_{14}	A_{14}	A_{14}	A_{14}	A_{14}
A_{10}	A_{15}	A_{13}	A_{12}	A_1	A_{13}	A_4	A_{17}	A_{13}	A_{23}	A_{13}	A_{13}	A_{13}	A_{13}	A_{13}	A_{13}
A_{11}	A_{13}	A_{12}	A_{14}	A_5	A_{12}	A_0	A_{16}	A_{12}	A_{22}	A_{12}	A_{12}	A_{12}	A_{12}	A_{12}	A_{12}
A_{12}	A_{10}	A_{11}	A_9	A_2	A_{11}	A_7	A_{23}	A_{11}	A_{17}	A_{11}	A_{11}	A_{11}	A_{11}	A_{11}	A_{11}
A_{13}	A_8	A_{10}	A_{11}	A_6	A_{10}	A_3	A_{22}	A_{10}	A_{16}	A_{10}	A_{10}	A_{10}	A_{10}	A_{10}	A_{10}
A_{14}	A_{11}	A_9	A_8	A_0	A_9	A_5	A_{19}	A_9	A_{21}	A_9	A_9	A_9	A_9	A_9	A_9
A_{15}	A_9	A_8	A_{10}	A_4	A_8	A_1	A_{18}	A_8	A_{20}	A_8	A_8	A_8	A_8	A_8	A_8
A_{16}	A_6	A_{23}	A_5	A_{19}	A_{23}	A_{22}	A_{13}	A_{23}	A_{11}	A_{23}	A_{23}	A_{23}	A_{23}	A_{23}	A_{23}
A_{17}	A_4	A_{22}	A_7	A_{23}	A_{22}	A_{18}	A_{12}	A_{22}	A_{10}	A_{22}	A_{22}	A_{22}	A_{22}	A_{22}	A_{22}
A_{18}	A_7	A_{21}	A_4	A_{17}	A_{21}	A_{20}	A_9	A_{21}	A_{15}	A_{21}	A_{21}	A_{21}	A_{21}	A_{21}	A_{21}
A_{19}	A_5	A_{20}	A_6	A_{21}	A_{20}	A_{16}	A_8	A_{20}	A_{14}	A_{20}	A_{20}	A_{20}	A_{20}	A_{20}	A_{20}
A_{20}	A_2	A_{19}	A_1	A_{18}	A_{19}	A_{23}	A_{15}	A_{19}	A_9	A_{19}	A_{19}	A_{19}	A_{19}	A_{19}	A_{19}
A_{21}	A_0	A_{18}	A_3	A_{22}	A_{18}	A_{19}	A_{14}	A_{18}	A_8	A_{18}	A_{18}	A_{18}	A_{18}	A_{18}	A_{18}
A_{22}	A_3	A_{17}	A_0	A_{16}	A_{17}	A_{21}	A_{11}	A_{17}	A_{13}	A_{17}	A_{17}	A_{17}	A_{17}	A_{17}	A_{17}
A_{23}	A_1	A_{16}	A_2	A_{20}	A_{16}	A_{17}	A_{10}	A_{16}	A_{12}	A_{16}	A_{16}	A_{16}	A_{16}	A_{16}	A_{16}
A_{24}	A_{30}	A_{31}	A_{29}	A_{27}	A_{31}	A_{30}	A_{29}	A_{31}	A_{27}	A_{31}	A_{31}	A_{31}	A_{31}	A_{31}	A_{31}
A_{25}	A_{28}	A_{30}	A_{31}	A_{31}	A_{30}	A_{26}	A_{28}	A_{30}	A_{26}	A_{30}	A_{30}	A_{30}	A_{30}	A_{30}	A_{30}
A_{26}	A_{31}	A_{29}	A_{28}	A_{25}	A_{29}	A_{28}	A_{25}	A_{29}	A_{31}	A_{29}	A_{29}	A_{29}	A_{29}	A_{29}	A_{29}
A_{27}	A_{29}	A_{28}	A_{30}	A_{29}	A_{28}	A_{24}	A_{24}	A_{28}	A_{30}	A_{28}	A_{28}	A_{28}	A_{28}	A_{28}	A_{28}
A_{28}	A_{26}	A_{27}	A_{25}	A_{26}	A_{27}	A_{31}	A_{31}	A_{27}	A_{25}	A_{27}	A_{27}	A_{27}	A_{27}	A_{27}	A_{27}
A_{29}	A_{24}	A_{26}	A_{27}	A_{30}	A_{26}	A_{27}	A_{30}	A_{26}	A_{24}	A_{26}	A_{26}	A_{26}	A_{26}	A_{26}	A_{26}
A_{30}	A_{27}	A_{25}	A_{24}	A_{24}	A_{25}	A_{29}	A_{27}	A_{25}	A_{29}	A_{25}	A_{25}	A_{25}	A_{25}	A_{25}	A_{25}
A_{31}	A_{25}	A_{24}	A_{26}	A_{28}	A_{24}	A_{25}	A_{26}	A_{24}	A_{28}	A_{24}	A_{24}	A_{24}	A_{24}	A_{24}	A_{24}

Şekil 4.7 $\mathbb{R}^3_{CC}$ de Dönme Yansıma Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

Önerme 4.7 *d_{CC} uzaklığını değişmez bırakan orijine göre sekiz tane dönme inversiyonu vardır.*

İspat *Bir dönme inversiyon, $r_\theta \in R_{CC}$ olmak üzere $\rho : \sigma_O\sigma_\Delta\sigma_\Gamma = \sigma_O r_\theta$ şeklinde ifade edilir. Buna göre önerme 4.5 deki dönme eksenleri için 13 durum göz önüne alınmalıdır. r_θ, z ekseni etrafında dönme olarak ele alınırsa, r_θ nın birim vektörü (0,0,1) olur ve*

$$\rho : \sigma_O r_\theta(x, y, z) = (-x\cos\theta + y\sin\theta, -x\sin\theta - y\cos\theta, -z)$$

bulunur. Ayrıca

$$\rho(A_8) = \rho\left(1, \tfrac{4\sqrt{3}-3}{13}, \tfrac{4\sqrt{3}-3}{13}\right) = \left(-\cos\theta + \tfrac{4\sqrt{3}-3}{13}\sin\theta, -\sin\theta - \tfrac{4\sqrt{3}-3}{13}\cos\theta, -\tfrac{4\sqrt{3}-3}{13}\right)$$
$$\rho(A_9) = \rho\left(1, \tfrac{4\sqrt{3}-3}{13}, -\tfrac{4\sqrt{3}-3}{13}\right) = \left(-\cos\theta + \tfrac{4\sqrt{3}-3}{13}\sin\theta, -\sin\theta - \tfrac{4\sqrt{3}-3}{13}\cos\theta, \tfrac{4\sqrt{3}-3}{13}\right)$$
$$\rho(A_{24}) = \rho\rho\left(\tfrac{2\sqrt{3}+5}{13}, \tfrac{2\sqrt{3}+5}{13}, \tfrac{2\sqrt{3}+5}{13}\right) = \tfrac{2\sqrt{3}+5}{13}\left(-\cos\theta + \sin\theta, -\sin\theta - \cos\theta, -1\right)$$

olup $d_{CC}(\rho(A_8), \rho(A_9)) = \frac{8\sqrt{3}-6}{13}$ *ve* $d_{CC}(\rho(A_9), \rho(A_{24})) = 4 - 2\sqrt{3}$ *olmak zorunda olduğundan,* $X_1 = 0,\ Y_1 = 0,\ Z_1 = \frac{8\sqrt{3}-6}{13},\ X_2 = \frac{8-2\sqrt{3}}{13}\left|\cos\theta - \sin\theta\right|,\ Y_2 = \frac{8-2\sqrt{3}}{13}\left|\cos\theta + \sin\theta\right|$ *ve* $Z_2 = \frac{8-2\sqrt{3}}{13}$ *olmak üzere ve de* $i = 1, 2$ *için* $u_i = \max\{X_i, Y_i, Z_i\}$ *ve* $v_i = \text{mid}\{X_i, Y_i, Z_i\}$ *denilirse*

$$\max\left\{\frac{5-2\sqrt{3}}{2}\left(u_1 + v_1\right), u_1\right\} = \frac{8\sqrt{3}-6}{13}$$
$$\max\left\{\frac{5-2\sqrt{3}}{2}\left(u_2 + v_2\right), u_2\right\} = 4 - 2\sqrt{3}$$

denklemleri bulunur. Bu denklemler çözülürse $\theta = \pi/2,\ \pi, 3\pi/2$ *sonuçları elde edilir. Buradan* $\sigma_O r_\theta$ *bir dönme yansıması veya yansıma olduğundan yeni bir dönme inversiyonu yoktur.Benzer şekilde* x *ve* y *eksenleri için de yeni bir dönme inversiyonu yoktur.*r_θ*, doğrultu vektörü (1,1,0) olan* l *doğrusu etrafındaki dönme olmak üzere* r_θ *nın birim vektörü* $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ *olur ve*

$$\rho : \sigma_O r_\theta(x, y, z) = \begin{pmatrix} (\frac{-\cos\theta-1}{2})x + (\frac{-1+\cos\theta}{2})y - (\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})z, (\frac{cos\theta-1}{2})x + (\frac{-1-\cos\theta}{2})y + (\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})z, \\ (\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})x - (\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})y - \cos\theta z \end{pmatrix}$$

bulunur. Buna göre $d_{CC}(\rho(A_8), \rho(A_9)) = \frac{8\sqrt{3}-6}{13}$ *ve* $d_{CC}(\rho(A_9), \rho(A_{24})) = 4 - 2\sqrt{3}$ *olduğundan* $X_1 = \frac{4\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{13}\left|\sin\theta\right|,\ Y_1 = \frac{4\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{13}\left|\sin\theta\right|,\ Z_1 = \frac{8\sqrt{3}-6}{13}\left|\cos\theta\right|,$ $X_2 = \frac{8-2\sqrt{3}}{13}\left|\sqrt{2}\sin\theta + \cos\theta\right|,\ Y_2 = \frac{4\sqrt{3}-3}{13}\left|2\cos\theta - \sqrt{2}\sin\theta\right|$ *ve* $Z_2 = \frac{4\sqrt{3}-3}{13}\left|2\cos\theta - \sqrt{2}\sin\theta\right|$ *olmak üzere ve de* $i = 1, 2$ *için* $u_i = \max\{X_i, Y_i, Z_i\}$ *ve* $v_i = \text{mid}\{X_i, Y_i, Z_i\}$ *denilirse*

$$\max\left\{\frac{5-2\sqrt{3}}{2}\left(u_1 + v_1\right), u_1\right\} = \frac{8\sqrt{3}-6}{13}$$
$$\max\left\{\frac{5-2\sqrt{3}}{2}\left(u_2 + v_2\right), u_2\right\} = 4 - 2\sqrt{3}$$

denklemleri bulunur. Bu denklemler çözülürse $\theta = \pi$ *sonucuna ulaşılır. Buradan* $\sigma_O r_\theta$ *bir dönme yansıması veya yansıma olduğundan yeni bir dönme inversiyonu yoktur.Benzer şekilde* r_θ*, (1,-1,0), (1,0,1), (1,0,-1), (0,1,1), (0,1,-1) e paralel dönme eksenlerinden herhangi biri ise yeni bir dönme inversiyonu yoktur.*

r_θ doğrultu vektörü (1,1,1) olan l doğrusu etrafında ki dönme ise r_θ nın birim vektörü $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olacağından,*

$$\rho : \sigma_O r_\theta(x,y,z) = ((\tfrac{-2\cos\theta-1}{3})x + (\tfrac{\cos\theta+\sqrt{3}sin\theta\text{-}1}{3})y + (\tfrac{\cos\theta-\sqrt{3}sin\theta-1}{3})z$$
$$(\tfrac{\cos\theta-\sqrt{3}sin\theta-1}{3})x + (\tfrac{-1-2\cos\theta}{3})y + (\tfrac{\cos\theta+\sqrt{3}sin\theta-1}{3})z$$
$$(\tfrac{\cos\theta+\sqrt{3}sin\theta-1}{3})x + (\tfrac{\cos\theta-\sqrt{3}sin\theta-1}{3})y + (\tfrac{-1-2\cos\theta}{3})z))$$

olup $d_{CC}(\rho(A_8),\rho(A_9))=\frac{8\sqrt{3}-6}{13}$ *ve* $d_{CC}(\rho(A_9),\rho(A_{24}))=4-2\sqrt{3}$ *olması gerektiğinden* $X_1=\left|\frac{8\sqrt{3}-6}{39}(1\text{-}\cos\theta)+\frac{8-2\sqrt{3}}{13}\sin\theta\right|$, $Y_1=\left|\frac{8\sqrt{3}-6}{39}(1\text{-}\cos\theta)\text{-}\frac{8-2\sqrt{3}}{13}\sin\theta\right|$, $Z_1=\frac{8\sqrt{3}-6}{39}|1+2\cos\theta|$, $X_2=\left|\frac{2\sqrt{3}-8}{13}\sin\theta+\frac{2}{3}\cos\theta-\frac{6\sqrt{3}+2}{39}\right|$, $Y_2=\left|\frac{22-12\sqrt{3}}{39}\cos\theta-\frac{12-10\sqrt{3}}{39}\sin\theta+\frac{6\sqrt{3}+2}{39}\right|$ *ve* $Z_2=\left|\frac{12\sqrt{3}+4}{39}\cos\theta+\frac{16\sqrt{3}-12}{39}\sin\theta+\frac{6\sqrt{3}+2}{39}\right|$ *olmak üzere ve de* $i=1,2$ *için* u_i=max $\{X_i,Y_i,Z_i\}$ *ve* v_i=mid $\{X_i,Y_i,Z_i\}$ *denilirse*

$$\max\left\{\frac{5-2\sqrt{3}}{2}(u_1+v_1),u_1\right\} = \frac{8\sqrt{3}-6}{13}$$
$$\max\left\{\frac{5-2\sqrt{3}}{2}(u_2+v_2),u_2\right\} = 4-2\sqrt{3}$$

denklemleri bulunur. Bu denklemler çözülürse $\theta = 2\pi/3,\ 4\pi/3$ *sonuçlarına ulaşılır. Bu durumda (1,1,1) vektörünü doğrultu vektörü alan* l *doğrusu etrafındaki dönme kullanılarak 2 tane dönme inversiyonu elde edilir. Benzer şekilde (-1,1,1), (1,-1,1), (1,1,-1) doğrultulu eksen etrafındaki dönme kullanılarak herbiri için iki yeni dönme inversiyon elde edilir. O halde* d_{CC} *uzaklığını koruyan tam olarak sekiz dönme inversiyonu vardır.*

Şekil4.8 deki tabloda birim kürenin köşe noktalarının ilgili dönme inversiyon dönüşümü altındaki görüntülerini vermektedir.

	(1,0,0)			(0,1,0)			(0,0,1)			(1,1,0)	(1,0,1)	(0,1,1)	(1,-1,0)	(1,0,-1)	(0,1,-1	(1,1,1)		(-1,1,1)		(1,-1,1)		(1,1,-1)	
	π/2	π	3π/2	π/2	π	3π/2	π/2	π	3π/2	π	π	π	π	π	π	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3
A_0	A_{21}	A_4	A_{22}	A_{14}	A_2	A_{11}	A_3	A_1	A_5	A_6	A_{13}	A_{19}	A_0	A_8	A_{16}	A_{15}	A_{23}	A_{18}	A_9	A_{17}	A_{12}	A_{20}	A_{10}
A_1	A_{23}	A_5	A_{20}	A_{10}	A_3	A_{15}	A_2	A_0	A_4	A_7	A_9	A_{17}	A_1	A_{12}	A_{18}	A_{11}	A_{21}	A_{16}	A_{13}	A_{19}	A_8	A_{22}	A_{14}
A_2	A_{20}	A_6	A_{23}	A_{12}	A_0	A_9	A_7	A_3	A_1	A_2	A_{15}	A_{18}	A_4	A_{10}	A_{17}	A_{14}	A_{19}	A_{22}	A_8	A_{21}	A_{13}	A_{16}	A_{11}
A_3	A_{22}	A_7	A_{21}	A_8	A_1	A_{13}	A_6	A_2	A_0	A_3	A_{11}	A_{16}	A_5	A_{14}	A_{19}	A_{10}	A_{17}	A_{20}	A_{12}	A_{23}	A_9	A_{18}	A_{15}
A_4	A_{17}	A_0	A_{18}	A_{15}	A_6	A_{10}	A_1	A_5	A_7	A_4	A_{12}	A_{23}	A_2	A_9	A_{20}	A_{13}	A_{22}	A_{19}	A_{11}	A_{16}	A_{14}	A_{21}	A_8
A_5	A_{19}	A_1	A_{16}	A_{11}	A_7	A_{14}	A_0	A_4	A_6	A_5	A_8	A_{21}	A_3	A_{13}	A_{22}	A_9	A_{20}	A_{17}	A_{15}	A_{18}	A_{10}	A_{23}	A_{12}
A_6	A_{16}	A_2	A_{19}	A_{13}	A_4	A_8	A_5	A_7	A_3	A_0	A_{14}	A_{22}	A_6	A_{11}	A_{21}	A_{12}	A_{18}	A_{23}	A_{10}	A_{20}	A_{15}	A_{17}	A_9
A_7	A_{18}	A_3	A_{17}	A_9	A_5	A_{12}	A_4	A_6	A_2	A_1	A_{10}	A_{20}	A_7	A_{15}	A_{23}	A_8	A_{16}	A_{21}	A_{14}	A_{22}	A_{11}	A_{19}	A_{13}
A_8	A_{13}	A_{12}	A_{14}	A_6	A_{10}	A_3	A_{19}	A_9	A_{21}	A_{22}	A_5	A_{11}	A_{16}	A_0	A_8	A_{23}	A_7	A_2	A_{17}	A_1	A_{20}	A_4	A_{18}
A_9	A_{15}	A_{13}	A_{12}	A_2	A_{11}	A_7	A_{18}	A_8	A_{20}	A_{23}	A_1	A_9	A_{17}	A_4	A_{10}	A_{19}	A_5	A_0	A_{21}	A_3	A_{16}	A_6	A_{22}
A_{10}	A_{12}	A_{14}	A_{15}	A_4	A_8	A_1	A_{23}	A_{11}	A_{17}	A_{18}	A_7	A_{10}	A_{20}	A_2	A_9	A_{22}	A_3	A_6	A_{16}	A_5	A_{21}	A_0	A_{19}
A_{11}	A_{14}	A_{15}	A_{13}	A_0	A_9	A_5	A_{22}	A_{10}	A_{16}	A_{19}	A_3	A_8	A_{21}	A_6	A_{11}	A_{18}	A_1	A_4	A_{20}	A_7	A_{17}	A_2	A_{23}
A_{12}	A_9	A_8	A_{10}	A_7	A_{14}	A_2	A_{17}	A_{13}	A_{23}	A_{20}	A_4	A_{15}	A_{18}	A_1	A_{12}	A_{21}	A_6	A_3	A_{19}	A_0	A_{22}	A_5	A_{16}
A_{13}	A_{11}	A_9	A_8	A_3	A_{15}	A_6	A_{16}	A_{12}	A_{22}	A_{21}	A_0	A_{13}	A_{19}	A_5	A_{14}	A_{17}	A_4	A_1	A_{23}	A_2	A_{18}	A_7	A_{20}
A_{14}	A_8	A_{10}	A_{11}	A_5	A_{12}	A_0	A_{21}	A_{15}	A_{19}	A_{16}	A_6	A_{14}	A_{22}	A_3	A_{13}	A_{20}	A_2	A_7	A_{18}	A_4	A_{23}	A_1	A_{17}
A_{15}	A_{10}	A_{11}	A_9	A_1	A_{13}	A_4	A_{20}	A_{14}	A_{18}	A_{17}	A_2	A_{12}	A_{23}	A_7	A_{15}	A_{16}	A_0	A_5	A_{22}	A_6	A_{19}	A_3	A_{21}
A_{16}	A_5	A_{20}	A_6	A_{22}	A_{18}	A_{19}	A_{11}	A_{17}	A_{13}	A_{14}	A_{21}	A_3	A_8	A_{16}	A_0	A_7	A_{15}	A_{10}	A_1	A_9	A_4	A_{12}	A_2
A_{17}	A_7	A_{21}	A_4	A_{18}	A_{19}	A_{23}	A_{10}	A_{16}	A_{12}	A_{15}	A_{17}	A_1	A_9	A_{20}	A_2	A_3	A_{13}	A_8	A_5	A_{11}	A_0	A_{14}	A_6
A_{18}	A_4	A_{22}	A_7	A_{20}	A_{16}	A_{17}	A_{15}	A_{19}	A_9	A_{10}	A_{23}	A_2	A_{12}	A_{18}	A_1	A_6	A_{11}	A_{14}	A_0	A_{13}	A_5	A_8	A_3
A_{19}	A_6	A_{23}	A_5	A_{16}	A_{17}	A_{21}	A_{14}	A_{18}	A_8	A_{11}	A_{19}	A_0	A_{13}	A_{22}	A_3	A_2	A_9	A_{12}	A_4	A_{15}	A_1	A_{10}	A_7
A_{20}	A_1	A_{16}	A_2	A_{23}	A_{22}	A_{18}	A_9	A_{21}	A_{15}	A_{12}	A_{20}	A_7	A_{10}	A_{17}	A_4	A_5	A_{14}	A_{11}	A_3	A_8	A_6	A_{13}	A_0
A_{21}	A_3	A_{17}	A_0	A_{19}	A_{23}	A_{22}	A_8	A_{20}	A_{14}	A_{13}	A_{16}	A_5	A_{11}	A_{21}	A_6	A_1	A_{12}	A_9	A_7	A_{10}	A_2	A_{15}	A_4
A_{22}	A_0	A_{18}	A_3	A_{21}	A_{20}	A_{16}	A_{13}	A_{23}	A_{11}	A_8	A_{22}	A_6	A_{14}	A_{19}	A_5	A_4	A_{10}	A_{15}	A_2	A_{12}	A_7	A_9	A_1
A_{23}	A_2	A_{19}	A_1	A_{17}	A_{21}	A_{20}	A_{12}	A_{22}	A_{10}	A_9	A_{18}	A_4	A_{15}	A_{23}	A_7	A_0	A_8	A_{13}	A_6	A_{14}	A_3	A_{11}	A_5
A_{24}	A_{29}	A_{28}	A_{30}	A_{30}	A_{26}	A_{27}	A_{27}	A_{25}	A_{29}	A_{30}	A_{29}	A_{27}	A_{24}	A_{24}	A_{24}	A_{31}	A_{31}	A_{26}	A_{25}	A_{25}	A_{28}	A_{28}	A_{26}
A_{25}	A_{31}	A_{29}	A_{28}	A_{26}	A_{27}	A_{31}	A_{26}	A_{24}	A_{28}	A_{31}	A_{25}	A_{25}	A_{25}	A_{28}	A_{26}	A_{27}	A_{29}	A_{24}	A_{29}	A_{27}	A_{24}	A_{30}	A_{30}
A_{26}	A_{28}	A_{30}	A_{31}	A_{28}	A_{24}	A_{25}	A_{31}	A_{27}	A_{25}	A_{26}	A_{31}	A_{26}	A_{28}	A_{26}	A_{25}	A_{30}	A_{27}	A_{30}	A_{24}	A_{29}	A_{29}	A_{24}	A_{27}
A_{27}	A_{30}	A_{31}	A_{29}	A_{24}	A_{25}	A_{29}	A_{30}	A_{26}	A_{24}	A_{27}	A_{27}	A_{24}	A_{29}	A_{30}	A_{27}	A_{26}	A_{25}	A_{28}	A_{28}	A_{31}	A_{25}	A_{26}	A_{31}
A_{28}	A_{25}	A_{24}	A_{26}	A_{31}	A_{30}	A_{26}	A_{25}	A_{29}	A_{31}	A_{28}	A_{28}	A_{31}	A_{26}	A_{25}	A_{28}	A_{29}	A_{30}	A_{27}	A_{27}	A_{24}	A_{30}	A_{29}	A_{24}
A_{29}	A_{27}	A_{25}	A_{24}	A_{27}	A_{31}	A_{30}	A_{24}	A_{28}	A_{30}	A_{29}	A_{24}	A_{29}	A_{27}	A_{29}	A_{30}	A_{25}	A_{28}	A_{25}	A_{31}	A_{26}	A_{26}	A_{31}	A_{28}
A_{30}	A_{24}	A_{26}	A_{27}	A_{29}	A_{28}	A_{24}	A_{29}	A_{31}	A_{27}	A_{24}	A_{30}	A_{30}	A_{30}	A_{27}	A_{29}	A_{28}	A_{26}	A_{31}	A_{26}	A_{28}	A_{31}	A_{25}	A_{25}
A_{31}	A_{26}	A_{27}	A_{25}	A_{25}	A_{29}	A_{28}	A_{28}	A_{30}	A_{26}	A_{25}	A_{26}	A_{28}	A_{31}	A_{31}	A_{31}	A_{24}	A_{24}	A_{29}	A_{30}	A_{30}	A_{27}	A_{27}	A_{29}

Şekil 4.8 $\mathbb{R}^3_{CC}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

Buraya kadar olan kısımda Öklidyen 3-uzayın izometrilerinden hangilerinin d_{CC} metriğini koruduğu bulunmuştur. Daha açıkça Öklidyen 3-uzayın izometrilerinden dokuz yansıma, yirmi dört dönme, altı dönme-yansıma, sekiz dönme-inversiyon ve bir inversiyonun d_{CC} metriğini koruduğu gösterilmiştir. Bu tespit edilen elemanlar chamfered kübün Öklidyen simetri grubu olan O_h (Octahedral grup) elemanlarıdır. Bu gruba chamfered küp grup denilsin ve $G(CC)$ ile gösterilsin. Açıkça $G(CC)$, O_h grubuna izomorftur. Bundan sonraki kısımda bu dönüşümlerden başka d_{CC} metriğini koruyan izometrinin olmadığı gösterilecektir. Yani $\mathbb{R}^3_{CC}$ nin tüm izometrilerinin $T(3).G(CC)$ olduğu gösterilecektir.

Tanım 4.3 *$A = (a_1, a_2, a_3)$ ve $B = (b_1, b_2, b_3)$ $\mathbb{R}^3_{CC}$ uzayında farklı iki nokta olsun. Bu taktirde*

$$\{X \mid d_{CC}(A, X) + d_{CC}(B, X) = d_{CC}(A, B)\}$$

kümesine A, B noktalarının minimum uzaklık kümesi denir ve $[AB]$ ile gösterilir.

Genel olarak, $[AB]$ kümesi AB köşegenli bir altıgen üzerine kurulu oniki yüzlü oluşturur. (Şekil4.9)



Şekil 4.9 $\mathbb{R}^3_{CC}$ da Minimum Uzaklık Kümesi

Önerme 4.8 *$\phi : \mathbb{R}^3_{CC} \to \mathbb{R}^3_{CC}$ bir izometri ve $[AB]$ bir altıgen üzerine kurulu oniki yüzlü olsun. O halde*

$$\phi([AB]) = [\phi(A)\phi(B)]$$

olur.

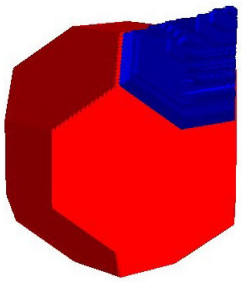
İspat *$Y \in \phi([AB])$ olsun.*

$$\begin{aligned} Y \in \phi([AB]) &\iff \exists X \in [AB] \ni Y = \phi(X) \\ &\iff d_{CC}(A, X) + d_{CC}(B, X) = d_{CC}(A, B) \\ &\iff d_{CC}(\phi(A), \phi(X)) + d_{CC}(\phi(B), \phi(X)) = d_{CC}(\phi(A), \phi(B)) \\ &\Leftrightarrow \quad Y = \phi(X) \in [\phi(A)\phi(B)]\,. \end{aligned}$$

Sonuç 4.6 *$\phi : \mathbb{R}^3_{CC} \to \mathbb{R}^3_{CC}$ bir izometri ve $[AB]$ paralelyüz olsun. Bu durumda ϕ, $[AB]$ nin köşelerini köşelere dönüştürür ve kenar uzunluklarını korur.*

Önerme 4.9 *$f : \mathbb{R}^3_{CC} \to \mathbb{R}^3_{CC}$ dönüşümü $f(O) = O$ olacak şekilde bir izometri olsun. Bu taktirde $f \in G(CC)$ olur.*

İspat *$O=(0,0,0)$ ve $D=(0,\frac{10+4\sqrt{3}}{13},\frac{10+4\sqrt{3}}{13})$ olmak üzere $[OD]$ bir altıgen üzerine kurulu oniki yüzlüsünü gözönüne alalım. Bu oniki yüzlünün köşe noktalarından altısı* $A_0=\left(\frac{4\sqrt{3}-3}{13},\frac{4\sqrt{3}-3}{13},1\right)$, $A_4=\left(-\frac{4\sqrt{3}-3}{13},\frac{4\sqrt{3}-3}{13},1\right)$, $A_{16}=\left(\frac{4\sqrt{3}-3}{13},1,\frac{4\sqrt{3}-3}{13}\right)$, $A_{20}=\left(-\frac{4\sqrt{3}-3}{13},1,\frac{4\sqrt{3}-3}{13}\right)$, $A_{24}=\left(\frac{2\sqrt{3}+5}{13},\frac{2\sqrt{3}+5}{13},\frac{2\sqrt{3}+5}{13}\right)$, $A_{28}=\left(-\frac{2\sqrt{3}+5}{13},\frac{2\sqrt{3}+5}{13},\frac{2\sqrt{3}+5}{13}\right)$ *olup bu noktalar aynı zamanda merkezil birim chamfered küp birim küresinin köşe noktalarıdır. Dahası bu altı nokta chamfered kübün her biri aynı altıgen olan bir yüzünün köşe noktalarıdır (Şekil 4.10).*



Şekil 4.10 $\mathbb{R}^3_{CC}$ da Birim Küre Ve Minimum Uzaklık Kümesi

f izometrisi $[OD]$ oniki yüzlüsünün köşe noktalarını köşe noktalara dönüştürüp, kenar uzaklıklarını korduğundan ve $f(O)=O$ olduğundan dolayı A_0, A_4, A_{16}, A_{20}, A_{24} ve A_{28} noktalarını chamfered kübün yine bir altıgen yüzünün köşe noktalarına dönüştürür. Ayrıca bu dönüştürme işlemi gerçekleşirken kenar uzunlukları korunacağından dolayı açıkça ifade edilirse f izometrisi, chamfered kübün biraltıgen yüzünün köşe noktalarını yine bir altıgen yüzünün köşe noktalarına dönüştürür. O halde chamfered küp 12 altıgen yüze sahip olduğundan bir altıgen yüzün dönüşebileceği 12 altıgen yüz ihtimali vardır. Ayrıca kenar uzunlukları korunmak zorunda olduğundan A_0, A_4, A_{16}, A_{20}, A_{24} ve A_{28} noktaları dönüşümü için altıgen yüz üzerinde dört farklı ihtimal vardır. Bu taktirde chamfered kübün her bir altıgen yüzü için 4 ihtimal olduğundan dolayı bu noktaların dönüşebileceği 48 ihtimal vardır. Bu ihtimaller ise aşağıda tek tek sıralanmış ve her bir dönüşümün önceden tespit edilen hareketlerden hangisine karşılık geldiği ifade edilmiştir.

1. $f(A_0)=A_4$, $f(A_4)=A_0$, $f(A_{16})=A_{20}$, $f(A_{20})=A_{16}$, $f(A_{24})=A_{28}$ ve $f(A_{28})=A_{24}$ ise $\Delta: x=0$ düzlemi olmak üzere $f=\sigma_\Delta$ yansımasıdır.

2. $f(A_0)=A_2$, $f(A_4)=A_6$, $f(A_{16})=A_{18}$, $f(A_{20})=A_{22}$, $f(A_{24})=A_{26}$ ve $f(A_{28})=A_{30}$ ise $\Delta: y=0$ düzlemi olmak üzere $f=\sigma_\Delta$ yansımasıdır.

3. $f(A_0) = A_1,\ f(A_4) = A_5\ ,\ f(A_{16}) = A_{17},\ f(A_{20}) = A_{21},\ f(A_{24}) = A_{25}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{29}$ *ise* $\Delta : z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

4. $f(A_0) = A_6,\ f(A_4) = A_4\ ,\ f(A_{16}) = A_{14},\ f(A_{20}) = A_{12},\ f(A_{24}) = A_{30}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{28}$ *ise* $\Delta : x + y = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

5. $f(A_0) = A_{13},\ f(A_4) = A_{12}\ ,\ f(A_{16}) = A_{21},\ f(A_{20}) = A_{20},\ f(A_{24}) = A_{29}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{28}$ *ise* $\Delta : x + z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

6. $f(A_0) = A_{19},\ f(A_4) = A_{23}\ ,\ f(A_{16}) = A_3,\ f(A_{20}) = A_7,\ f(A_{24}) = A_{27}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{31}$ *ise* $\Delta : y + z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

7. $f(A_0) = A_0,\ f(A_4) = A_2\ ,\ f(A_{16}) = A_8,\ f(A_{20}) = A_{10},\ f(A_{24}) = A_{24}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{26}$ *ise* $\Delta : x - y = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

8.$f(A_0) = A_8,\ f(A_4) = A_9\ ,\ f(A_{16}) = A_{16},\ f(A_{20}) = A_{17},\ f(A_{24}) = A_{24}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{25}$ *ise* $\Delta : x - z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

9.$f(A_0) = A_{16},\ f(A_4) = A_{20}\ ,\ f(A_{16}) = A_0,\ f(A_{20}) = A_4,\ f(A_{24}) = A_{24}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{28}$ *ise* $\Delta : y - z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

10. $f(A_0) = A_{18},\ f(A_4) = A_{22}\ ,\ f(A_{16}) = A_2,\ f(A_{20}) = A_6,\ f(A_{24}) = A_{26}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{30}$ *ise dönme ekseni* $(1, 0, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{\pi}{2}}$ *dönmesidir.*

11. $f(A_0) = A_3,\ f(A_4) = A_7\ ,\ f(A_{16}) = A_{19},\ f(A_{20}) = A_{23},\ f(A_{24}) = A_{27}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{31}$ *ise dönme ekseni* $(1, 0, 0)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmesidir.*

12. $f(A_0) = A_{17},\ f(A_4) = A_{21}\ ,\ f(A_{16}) = A_1,\ f(A_{20}) = A_5,\ f(A_{24}) = A_{25}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{29}$ *ise dönme ekseni* $(1, 0, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{3\pi}{2}}$ *dönmesidir.*

13. $f(A_0) = A_9,\ f(A_4) = A_8\ ,\ f(A_{16}) = A_{17},\ f(A_{20}) = A_{16},\ f(A_{24}) = A_{25}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{24}$ *ise dönme ekseni* $(0, 1, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{\pi}{2}}$ *dönmesidir.*

14. $f(A_0) = A_5,\ f(A_4) = A_1\ ,\ f(A_{16}) = A_{21},\ f(A_{20}) = A_{17},\ f(A_{24}) = A_{29}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{25}$ *ise dönme ekseni* $(0, 1, 0)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmesidir.*

15. $f(A_0) = A_{12},\ f(A_4) = A_{13}\ ,\ f(A_{16}) = A_{20},\ f(A_{20}) = A_{21},\ f(A_{24}) = A_{28}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{29}$ *ise dönme ekseni* $(0, 1, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{3\pi}{2}}$ *dönmesidir.*

16. $f(A_0) = A_4$, $f(A_4) = A_6$, $f(A_{16}) = A_{12}$, $f(A_{20}) = A_{14}$, $f(A_{24}) = A_{28}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{30}$ *ise dönme ekseni* $(0,0,1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{\pi}{2}}$ *dönmesidir.*

17. $f(A_0) = A_6$, $f(A_4) = A_2$, $f(A_{16}) = A_{22}$, $f(A_{20}) = A_{18}$, $f(A_{24}) = A_{30}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{26}$ *ise dönme ekseni* $(0,0,1)$ *olmak üzere* $f = r_{\pi}$ *dönmesidir.*

18. $f(A_0) = A_2$, $f(A_4) = A_0$, $f(A_{16}) = A_{10}$, $f(A_{20}) = A_8$, $f(A_{24}) = A_{26}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{24}$ *ise dönme ekseni* $(0,0,1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{3\pi}{2}}$ *dönmesidir.*

19. $f(A_0) = A_1$, $f(A_4) = A_3$, $f(A_{16}) = A_9$, $f(A_{20}) = A_{11}$, $f(A_{24}) = A_{25}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{27}$ *ise dönme ekseni* $(1,1,0)$ *olmak üzere* $f = r_{\pi}$ *dönmesidir.*

20. $f(A_0) = A_{10}$, $f(A_4) = A_{11}$, $f(A_{16}) = A_{18}$, $f(A_{20}) = A_{19}$, $f(A_{24}) = A_{26}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{27}$ *ise dönme ekseni* $(1,0,1)$ *olmak üzere* $f = r_{\pi}$ *dönmesidir.*

21. $f(A_0) = A_{20}$, $f(A_4) = A_{16}$, $f(A_{16}) = A_4$, $f(A_{20}) = A_0$, $f(A_{24}) = A_{28}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{24}$ *ise dönme ekseni* $(0,1,1)$ *olmak üzere* $f = r_{\pi}$ *dönmesidir.*

22. $f(A_0) = A_7$, $f(A_4) = A_5$, $f(A_{16}) = A_{15}$, $f(A_{20}) = A_{13}$, $f(A_{24}) = A_{31}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{29}$ *ise dönme ekseni* $(1,-1,0)$ *olmak üzere* $f = r_{\pi}$ *dönmesidir.*

23. $f(A_0) = A_{15}$, $f(A_4) = A_{14}$, $f(A_{16}) = A_{23}$, $f(A_{20}) = A_{22}$, $f(A_{24}) = A_{31}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{30}$ *ise dönme ekseni* $(1,0,-1)$ *olmak üzere* $f = r_{\pi}$ *dönmesidir.*

24. $f(A_0) = A_{23}$, $f(A_4) = A_{19}$, $f(A_{16}) = A_7$, $f(A_{20}) = A_3$, $f(A_{24}) = A_{31}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{27}$ *ise dönme ekseni* $(0,1,-1)$ *olmak üzere* $f = r_{\pi}$ *dönmesidir.*

25. $f(A_0) = A_8$, $f(A_4) = A_{10}$, $f(A_{16}) = A_0$, $f(A_{20}) = A_2$, $f(A_{24}) = A_{24}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{26}$ *ise dönme ekseni* $(1,1,1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

26. $f(A_0) = A_{16}$, $f(A_4) = A_{17}$, $f(A_{16}) = A_8$, $f(A_{20}) = A_9$, $f(A_{24}) = A_{24}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{25}$ *ise dönme ekseni* $(1,1,1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

27. $f(A_0) = A_{21}$, $f(A_4) = A_{20}$, $f(A_{16}) = A_{13}$, $f(A_{20}) = A_{12}$, $f(A_{24}) = A_{29}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{28}$ *ise dönme ekseni* $(-1,1,1)$ *olamk üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

28. $f(A_0) = A_{14}$, $f(A_4) = A_{12}$, $f(A_{16}) = A_6$, $f(A_{20}) = A_4$, $f(A_{24}) = A_{30}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{28}$ *ise dönme ekseni* $(-1,1,1)$*olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

29. $f(A_0) = A_{22}$, $f(A_4) = A_{23}$, $f(A_{16}) = A_{14}$, $f(A_{20}) = A_{15}$, $f(A_{24}) = A_{30}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{31}$ *ise dönme ekseni* $(1, -1, 1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

30. $f(A_0) = A_{11}$, $f(A_4) = A_9$, $f(A_{16}) = A_3$, $f(A_{20}) = A_1$, $f(A_{24}) = A_{27}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{25}$ *ise dönme ekseni* $(1, -1, 1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

31. $f(A_0) = A_{19}$, $f(A_4) = A_{18}$, $f(A_{16}) = A_{11}$, $f(A_{20}) = A_{10}$, $f(A_{24}) = A_{27}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{26}$ *ise dönme ekseni* $(1, 1, -1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

32. $f(A_0) = A_{13}$, $f(A_4) = A_{15}$, $f(A_{16}) = A_5$, $f(A_{20}) = A_7$, $f(A_{24}) = A_{29}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{31}$ *ise dönme ekseni* $(1, 1, -1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

33 $f(A_0) = A_{15}$, $f(A_4) = A_{13}$, $f(A_{16}) = A_7$, $f(A_{20}) = A_5$, $f(A_{24}) = A_{31}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{29}$ *ise dönme ekseni* $(1, 1,1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

34.$f(A_0) = A_{23}$, $f(A_4) = A_{22}$, $f(A_{16}) = A_{15}$, $f(A_{20}) = A_{14}$, $f(A_{24}) = A_{31}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{30}$ *ise dönme ekseni* $(1, 1,1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inverisyonudur.*

*35*$f(A_0) = A_{18}$, $f(A_4) = A_{19}$, $f(A_{16}) = A_{10}$, $f(A_{20}) = A_{11}$, $f(A_{24}) = A_{26}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{27}$ *ise dönme ekseni* $(-1, 1,1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

36.$f(A_0) = A_9$, $f(A_4) = A_{11}$, $f(A_{16}) = A_1$, $f(A_{20}) = A_3$, $f(A_{24}) = A_{25}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{27}$ *ise dönme ekseni* $(-1, 1,1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

37.$f(A_0) = A_{17}$, $f(A_4) = A_{16}$, $f(A_{16}) = A_9$, $f(A_{20}) = A_8$, $f(A_{24}) = A_{25}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{24}$ *ise dönme ekseni* $(1, -1,1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*38*$f(A_0) = A_{12}$, $f(A_4) = A_{14}$, $f(A_{16}) = A_4$, $f(A_{20}) = A_6$, $f(A_{24}) = A_{28}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{30}$ *ise dönme ekseni* $(1, -1,1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

39.$f(A_0) = A_{20}$, $f(A_4) = A_{21}$, $f(A_{16}) = A_{12}$, $f(A_{20}) = A_{13}$, $f(A_{24}) = A_{28}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{29}$ *ise dönme ekseni* $(1, 1,$-1$)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

40.$f(A_0) = A_{10}$, $f(A_4) = A_8$, $f(A_{16}) = A_2$, $f(A_{20}) = A_0$, $f(A_{24}) = A_{26}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{24}$ *ise dönme ekseni* $(1, 1,$-1$)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

41. $f(A_0) = A_{22}$, $f(A_4) = A_{18}$, $f(A_{16}) = A_6$, $f(A_{20}) = A_2$, $f(A_{24}) = A_{30}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{26}$ *ise* $\Delta : x = 0$ *ve dönme ekseni* $(1, 0, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_\Delta r_{\frac{\pi}{2}}$ *dönme yansımasıdır.*

42. $f(A_0) = A_{21}$, $f(A_4) = A_{17}$, $f(A_{16}) = A_5$, $f(A_{20}) = A_1$, $f(A_{24}) = A_{29}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{25}$ *ise* $\Delta : x = 0$ *ve dönme ekseni* $(1,0,0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_\Delta r_{\frac{3\pi}{2}}$*dönme yansımasıdır.*

43. $f(A_0) = A_{11}$, $f(A_4) = A_{10}$, $f(A_{16}) = A_{19}$, $f(A_{20}) = A_{18}$, $f(A_{24}) = A_{27}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{26}$ *ise* $\Delta : y = 0$ *ve dönme ekseni* $(0,1,0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_\Delta r_{\frac{\pi}{2}}$ *dönme yansımasıdır.*

44. $f(A_0) = A_{14}$, $f(A_4) = A_{15}$, $f(A_{16}) = A_{22}$, $f(A_{20}) = A_{23}$, $f(A_{24}) = A_{30}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{31}$ *ise* $\Delta : y = 0$ *ve dönme ekseni* $(0,1,0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_\Delta r_{\frac{3\pi}{2}}$ *dönme yansımasıdır.*

45. $f(A_0) = A_5$, $f(A_4) = A_7$, $f(A_{16}) = A_{13}$, $f(A_{20}) = A_{15}$, $f(A_{24}) = A_{29}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{31}$ *ise* $\Delta : z = 0$ *ve dönme ekseni* $(0,0,1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_\Delta r_{\frac{\pi}{2}}$ *dönme yansımasıdır.*

46.$f(A_0) = A_3$, $f(A_4) = A_1$, $f(A_{16}) = A_{11}$, $f(A_{20}) = A_9$, $f(A_{24}) = A_{27}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{25}$ *ise* $\Delta : z = 0$ *ve dönme ekseni* $(0,0,1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_\Delta r_{\frac{3\pi}{2}}$*dönme yansımasıdır.*

47. $f(A_0) = A_0$, $f(A_4) = A_4$, $f(A_{16}) = A_{16}$, $f(A_{20}) = A_{20}$, $f(A_{24}) = A_{24}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{28}$ *ise* f *birim dönüşümdür.*

48. $f(A_0) = A_7$, $f(A_4) = A_3$, $f(A_{16}) = A_{23}$, $f(A_{20}) = A_{19}$, $f(A_{24}) = A_{31}$ *ve* $f(A_{28}) = A_{27}$ *ise* f *inversiyondur.*

Buna göre orijini koruyan f *izometrisi* $G(CC)$ *nin bir elemanıdır. Bir başka deyişle chamfered küp uzaklığını koruyan Öklidyen izometriler dışında bir izometri yoktur.*

Teorem 4.1 $f : \mathbb{R}^3_{CC} \to \mathbb{R}^3_{CC}$ *dönüşümü bir izometri olsun.* $f = T_A \circ g$ *olacak şekilde bir tek* $T_A \in T(3)$ *ve* $g \in G(CC)$ *vardır.*

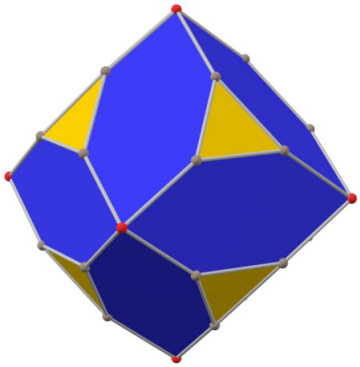
İspat $A = (a_1, a_2, a_3)$ *olmak üzere* $f(O) = A$ *olsun. Bu taktirde* $g = T_{-A} \circ f$ *olacak şekilde tanımlı* g *dönüşümü bir izometridir ve* $g(O) = O$ *olur. Böylece önerme 4.9 dan dolayı* $g \in G(CC)$ *ve* $f = T_A \circ g$ *olur. İspatın tekliği aşikardır.*

Buna göre chamfered küp metriği ile donatılmış analitik 3-uzayın izometrilerinin grubu chamfered kübün (Öklidyen) simetri grubu olan O_h ile 3-boyutlu analitik uzayın tüm ötelemelerinin grubu olan $T(3)$ ün yarı-direkt çarpımıdır. Yani $\mathbb{R}^3_{CC}$ nin tüm izometrilerinin kümesi $T(3).G(CC)$ dir.

5. CHAMFERED OCTAHEDRON UZAYI

5.1 Chamfered Octahedron Metriği ve Özellikleri

Chamfered octahedron, Platonik cisimlerden olan octahedrona (sekizyüzlüye) chamfered işlemi uygulanması sonucunda elde edilen bir konveks çokyüzlüdür. Chamfered octahedron 30 köşe 48 kenar ve 12 si altıgen 8 tanesi eşkenar üçgen olmak üzere toplamda 20 adet yüze sahiptir. Altıgen yüzleri oluşturan altıgenlerin kenar uzunlukları eş olmasına rağmen iç açıları eş olmadığından düzgün altıgen değillerdir.(Şekil5.1).



Şekil 5.1 Chamfered Octahedron

Ayrıca chamfered octahedron 48 tane simetriye sahip olup, simetri grubu O_h ile gösterilir.

Bu bölümde birim küresi chamfered octahedron olan uzaklık fonksiyonu tanıtılmış ve d_{CO} ile gösterilmiştir ve bu uzaklık fonksiyonunun metrik aksiyomlarını sağladığını ve bazı özellikleri verilmektedir.

Tanım 5.1 *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\mathbb{R}^3$de iki farklı nokta olsun. Buna göre*

$$\begin{aligned} u &= \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}, \\ v &= \text{mid}\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}, \\ w &= \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\} \end{aligned}$$

olarak tanımlasın.

Tanım 5.2 *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\mathbb{R}^3$de iki farklı nokta olsun.*

$$d_{CO}(P_1, P_2) = \max\left\{\frac{9+\sqrt{6}}{15}(u+v+w), u+v\right\}$$

şeklinde tanımlanan $d_{CO} : \mathbb{R}^3 x\, \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$ fonksiyonuna P_1 ve P_2 noktaları arasındaki chamfered octahedron uzaklık fonksiyonu denir.

Yardımcı Teorem 5.1 *P_1=(x_1, y_1, z_1) ve P_2=(x_2, y_2, z_2) $\mathbb{R}^3$de iki farklı nokta olsun. Bu takdirde,*

$$d_{CO}(P_1, P_2) \geq \tfrac{9+\sqrt{6}}{15}(u+v+w)$$
$$d_{CO}(P_1, P_2) \geq u+v$$

olur.

İspat *Maksimum fonksiyonun tanımından ispat aşikardır.*

Önerme 5.1 *$\mathbb{R}^3$ de d_{CO} uzaklık fonksiyonu metriktir ve bu metrikle donatılmış uzayın birim küresi chamfered octahedrondur.*

İspat *$d_{CO} : \mathbb{R}^3 x \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uzaklık fonksiyonu ve $P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ve $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ $\mathbb{R}^3$de üç farklı nokta olsun. Bütün $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^3$ için d_{CO} aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa $\mathbb{R}^3$ de bir metriktir.*

M1) $d_{CO}(P_1, P_2) \geq 0$ *ve* $d_{CO}(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$
M2) $d_{CO}(P_1, P_2) = d_{CO}(P_2, P_1)$
M3) $d_{CO}(P_1, P_3) \leq d_{CO}(P_1, P_2) + d_{CO}(P_2, P_3)$.

M1) *Mutlak değer daima negatif olmayan değerler üretti ğinden mutlak değerli ifadelerin pozitif ifadelerle çarpılıp toplanması sonucu negatif olmayan değerler elde edilir. Açıkça* $d_{CO}(P_1, P_2) \geq 0$ *dır. Eğer,* $d_{CO}(P_1, P_2)$=0 *ise* $\frac{9+\sqrt{6}}{15}(u+v+w)$=0 *ve* u+v=0 *olup buradan*

$$|x_1 - x_2| = 0, |y_1 - y_2| = 0, |z_1 - z_2| = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2 \Longrightarrow P_1 = P_2$$

olur. Tersine P_1=$P_2 \implies |x_1 - x_2|$=0, $|y_1 - y_2|$=0, $|z_1 - z_2|$=0 $\implies d_{CO}(P_1, P_2)$=0 *bulunur.*

M2) *Mutlak değerden dolayı* $|x_1 - x_2|$=$|x_2 - x_1|$, $|y_1 - y_2|$= $|y_2 - y_1|$, $|z_1 - z_2|$=$|z_2 - z_1|$ *olduğundan açıkça,* $d_{CO}(P_1, P_2)$=$d_{CO}(P_2, P_1)$ *dir. Yani* d_{CO} *simetriktir.*

M3) P_1=(x_1, y_1, z_1),P_2=(x_2, y_2, z_2) *ve* P_3=$(x_3, y_3, z_3) \in \mathbb{R}^3$ *olsun.* u_1=$|x_1 - x_3|$, v_1=$|y_1 - y_3|$, w_1=$|z_1 - z_3|$, u_2=$|x_1 - x_2|$, v_2=$|y_1 - y_2|$, w_2=$|z_1 - z_2|$, u_3=$|x_3 - x_2|$, v_3=$|y_3 - y_2|$, w_3=$|z_3 - z_2|$ *olmak üzere,*

$$\begin{aligned} d_{CO}(P_1, P_3) &= \max\left\{\tfrac{9+\sqrt{6}}{15}(u_1+v_1+w_1), u_1+v_1\right\} \\ &\leq \max\left\{\tfrac{9+\sqrt{6}}{15}((u_2+u_3)+(v_2+v_3)+(w_2+w_3)), (u_2+u_3)+(v_2+v_3)\right\} \\ &\leq \max\left\{\tfrac{9+\sqrt{6}}{15}(u_2+v_2+w_2), u_2+v_2\right\} + \max\left\{\tfrac{9+\sqrt{6}}{15}(u_3+v_3+w_3), u_3+v_3\right\} \\ &= X \end{aligned}$$

dir. Burada yardımcı teorem 5.1 den dolayı

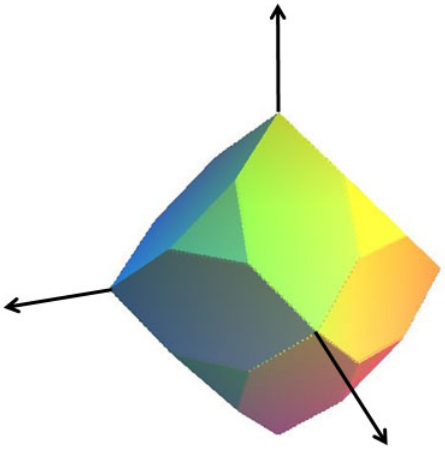
$$d_{CO}(P_1,P_2) \geq \max\left\{\tfrac{9+\sqrt{6}}{15}\left(u_2+v_2+w_2\right), u_2+v_2\right\}$$
$$d_{CO}(P_2,P_3) \geq \max\left\{\tfrac{9+\sqrt{6}}{15}\left(u_3+v_3+w_3\right), u_3+v_3\right\}$$

olur. O halde $X \leq d_{CO}(P_1,P_2) + d_{CO}(P_2,P_3)$ *bulunur. Buna göre* $d_{CO}(P_1,P_3) \leq d_{CO}(P_1,P_2) + d_{CO}(P_2,P_3)$ *elde edilir. Yani chamfered octahedron uzaklık fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar.*

Sonuç olarak chamfered octahedron uzaklık fonksiyonu metriktir. Ayrıca bu metrikle döşenmiş analitik 3-uzayda orijinden 1 birim chamfered octahedron uzaklığındaki noktaların kümesi;

$$S_{CO} = \left\{(x,y,z) : \max\left\{\frac{9+\sqrt{6}}{15}\left(u+v+w\right), u+v\right\} = 1\right\}$$

olup bu noktaların geometrik yeri şekil5.2 de görüldüğü gibi chamfered octahedrondur.



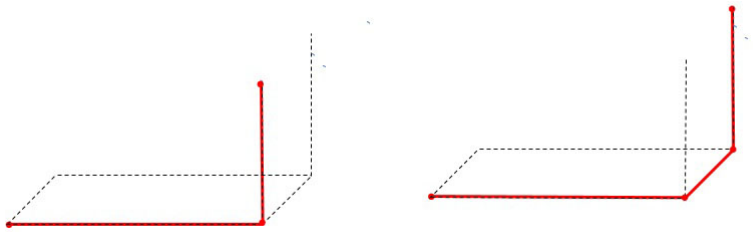
Şekil 5.2 Chamfered octahedronun koordinat sistemine yerleştirilmesi

Geometrik olarak P_1 noktasından P_2 noktasına olan yol için 2 farklı ihtimal vardır. Buna göre, bu yollar aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

(i) Üç koordinat eksenine paralel olan üç doğru parçasının birleşimidir.

(ii) İki koordinat eksenine paralel olan iki doğru parçasının birleşimidir.

Böylece P_1 ve P_2 noktaları arasındaki chamfered octahedron uzaklığı (i) deki yol için bahsedilen üç doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamının $\frac{9+\sqrt{6}}{15}$ katı, (ii) deki yol için bahsedilen iki doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamıdır. (Şekil5.3)



Şekil 5.3 Chamfered octahedron yolu

Sonuç 5.1 $u = \max\{|x-x_0|, |y-y_0|, |z-z_0|\}$, $v = \text{mid}\{|x-x_0|, |y-y_0|, |z-z_0|\}$ *ve* $w = \min\{|x-x_0|, |y-y_0|, |z-z_0|\}$ *olmak üzere* $\mathbb{R}^3_{CO}$ *de* (x_0, y_0, z_0) *merkezli ve* r *yarıçaplı küre*

$$\max\left\{\frac{9+\sqrt{6}}{15}(u+v+w), u+v\right\} = r$$

denklemi ile ifade edilen köşe noktaları $(0,0,r)$ *ve* $\left(\frac{4-\sqrt{6}}{5}r, \frac{4-\sqrt{6}}{5}r, \frac{1+\sqrt{6}}{5}r\right)$ *noktalarının herbir bileşeninin* $+/-$ *işaret değişiklikleri ve üç bileşenin tüm muhtemel permütasyonlarının* (x_0, y_0, z_0) *kadar ötelenmişlerinden oluşan 20 yüzlü bir çokyüzlü olan chamfered octahedrondur.*

Bu bölümün geri kalan kısmında sıkça kullanılacağından dolayı merkezil birim kürenin köşe noktaları aşağıdaki şekilde isimlendirilmiştir.

$A_0 = (0,0,1)$, $A_1 = (0,0,-1)$, $A_2 = (1,0,0)$, $A_3 = (-1,0,0)$, $A_4 = (0,1,0)$, $A_5 = (0,-1,0)$,
$A_6 = \left(\frac{4-\sqrt{6}}{5}, \frac{4-\sqrt{6}}{5}, \frac{1+\sqrt{6}}{5}\right)$, $A_7 = \left(\frac{4-\sqrt{6}}{5}, \frac{4-\sqrt{6}}{5}, -\frac{1+\sqrt{6}}{5}\right)$, $A_8 = \left(\frac{4-\sqrt{6}}{5}, -\frac{4-\sqrt{6}}{5}, \frac{1+\sqrt{6}}{5}\right)$,
$A_9 = \left(\frac{4-\sqrt{6}}{5}, -\frac{4-\sqrt{6}}{5}, -\frac{1+\sqrt{6}}{5}\right)$, $A_{10} = \left(-\frac{4-\sqrt{6}}{5}, \frac{4-\sqrt{6}}{5}, \frac{1+\sqrt{6}}{5}\right)$, $A_{11} = \left(-\frac{4-\sqrt{6}}{5}, \frac{4-\sqrt{6}}{5}, -\frac{1+\sqrt{6}}{5}\right)$,
$A_{12} = \left(-\frac{4-\sqrt{6}}{5}, -\frac{4-\sqrt{6}}{5}, \frac{1+\sqrt{6}}{5}\right)$, $A_{13} = \left(-\frac{4-\sqrt{6}}{5}, -\frac{4-\sqrt{6}}{5}, -\frac{1+\sqrt{6}}{5}\right)$, $A_{14} = \left(\frac{1+\sqrt{6}}{5}, \frac{4-\sqrt{6}}{5}, \frac{4-\sqrt{6}}{5}\right)$,
$A_{15} = \left(\frac{1+\sqrt{6}}{5}, \frac{4-\sqrt{6}}{5}, -\frac{4-\sqrt{6}}{5}\right)$, $A_{16} = \left(\frac{1+\sqrt{6}}{5}, -\frac{4-\sqrt{6}}{5}, \frac{4-\sqrt{6}}{5}\right)$, $A_{17} = \left(\frac{1+\sqrt{6}}{5}, -\frac{4-\sqrt{6}}{5}, -\frac{4-\sqrt{6}}{5}\right)$,
$A_{18} = \left(-\frac{1+\sqrt{6}}{5}, \frac{4-\sqrt{6}}{5}, \frac{4-\sqrt{6}}{5}\right)$, $A_{19} = \left(-\frac{1+\sqrt{6}}{5}, \frac{4-\sqrt{6}}{5}, -\frac{4-\sqrt{6}}{5}\right)$, $A_{20} = \left(-\frac{1+\sqrt{6}}{5}, -\frac{4-\sqrt{6}}{5}, \frac{4-\sqrt{6}}{5}\right)$,
$A_{21} = \left(-\frac{1+\sqrt{6}}{5}, -\frac{4-\sqrt{6}}{5}, -\frac{4-\sqrt{6}}{5}\right)$, $A_{22} = \left(\frac{4-\sqrt{6}}{5}, \frac{1+\sqrt{6}}{5}, \frac{4-\sqrt{6}}{5}\right)$, $A_{23} = \left(\frac{4-\sqrt{6}}{5}, \frac{1+\sqrt{6}}{5}, -\frac{4-\sqrt{6}}{5}\right)$,
$A_{24} = \left(\frac{4-\sqrt{6}}{5}, -\frac{1+\sqrt{6}}{5}, \frac{4-\sqrt{6}}{5}\right)$, $A_{25} = \left(\frac{4-\sqrt{6}}{5}, -\frac{1+\sqrt{6}}{5}, -\frac{4-\sqrt{6}}{5}\right)$, $A_{26} = \left(-\frac{4-\sqrt{6}}{5}, \frac{1+\sqrt{6}}{5}, \frac{4-\sqrt{6}}{5}\right)$,
$A_{27} = \left(-\frac{4-\sqrt{6}}{5}, \frac{1+\sqrt{6}}{5}, -\frac{4-\sqrt{6}}{5}\right)$, $A_{28} = \left(-\frac{4-\sqrt{6}}{5}, -\frac{1+\sqrt{6}}{5}, \frac{4-\sqrt{6}}{5}\right)$, $A_{29} = \left(-\frac{4-\sqrt{6}}{5}, -\frac{1+\sqrt{6}}{5}, -\frac{4-\sqrt{6}}{5}\right)$.

Aşağıdaki önermede $\mathbb{R}^3_{CO}$ deki noktalar arasındaki Öklidyen ve chamfered octahedron uzaklıkları arasındaki geçiş bağıntısı verilmektedir.

Önerme 5.2 *$\mathbb{R}^3$ de P_1 ve P_2 noktalarından geçen doğru l olsun. Eğer l doğrusunun doğrultu vektörü (p,q,r),*

$$\rho_{P_1P_2} = \max\left\{ \begin{array}{r} \frac{9+\sqrt{6}}{15}\left(\max\{|p|,|q|,|r|\} + \text{mid}\{|p|,|q|,|r|\} + \min\{|p|,|q|,|r|\}\right), \\ \max\{|p|,|q|,|r|\} + \text{mid}\{|p|,|q|,|r|\} \end{array} \right\}$$

ve $\mu_{P_1P_2} = \frac{\rho_{P_1P_2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$ ise $d_{CO}(P_1,P_2) = \mu_{P_1P_2} d_E(P_1,P_2)$ olur.

İspat *$P_1 = (x_1,y_1,z_1)$ ve $P_2 = (x_2,y_2,z_2)$, $\mathbb{R}^3$ deki herhangi iki nokta olsun. P_1 ve P_2 den geçen doğru l ise*

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} = \lambda$$

olur. l doğrusunun doğrultu vektörü (p,q,r) olduğundan $(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1) = \lambda(p,q,r)$ dir. Buna göre $d_{CO}(P_1,P_2) = \lambda\rho_{P_1P_2}$ ve $d_E(P_1,P_2) = \lambda\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ olduğundan dolayı $\frac{d_{CO}(P_1,P_2)}{\rho_{P_1P_2}} = \frac{d_E(P_1,P_2)}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$ bulunur. Bu ise önermenin ifadesindeki sonucu verir.

Yukarıdaki önerme herhangi bir doğru boyunca $d_{CO}(P_1,P_2)$ uzaklığının aynı doğru boyunca olan Öklidyen uzaklığın pozitif katı olduğu gösterir. Buna göre aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 5.2 *$\mathbb{R}^3$de A,B,X doğrudaş üç farklı nokta ise*

$$d_E(A,X) = d_E(B,X) \iff d_{CO}(A,X) = d_{CO}(B,X)$$

Sonuç 5.3 *3-boyutlu uzayda A,B,X doğrudaş üç farklı nokta ise*

$$d_{CO}(A,X)/d_{CO}(B,X) = d_E(A,X)/d_E(B,X)$$

olur.

Yani doğru boyunca olan d_E, d_{CO} uzaklıklarının oranı aynıdır.

5.2 Chamfered Octahedron İzometri Grubu

Chamfered octahedron 48 tane simetriye sahip olup, simetri grubu O_h ile gösterilir. Bu kısımda d_{CO} metriği ile donatılmış $\mathbb{R}^3$ ün izometri grubu araştırılacaktır. Bunun için öncelikle

hangi Öklidyen izometrilerin Chamfered octahedron uzaklığını koruduğu tespit edilecek daha sonra ise bu izometrilerden başka izometrilerin olmadığı gösterilecektir. $\alpha : \mathbb{R}^3_{CO} \to \mathbb{R}^3_{CO}$ dönüşüm olmak üzere her $X, Y \in \mathbb{R}^3_{CO}$ için

$$d_{CO}(X,Y) = d_{CO}(\alpha(X), \alpha(Y))$$

ise α dönüşümü $\mathbb{R}^3_{CO}$ de bir izometridir.

Aşağıda ifade edilen önermeler ile hangi Öklidyen izometrilerin chamfered octahedron uzayında da izometri oldukları verilmektedir.

Önerme 5.3 *$\mathbb{R}^3$de her Öklidyen öteleme $\mathbb{R}^3_{CO}$ ün bir izometrisidir.*

İspat *α=(a_1, a_2, a_3), X=$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere $T_\alpha : \mathbb{R}^3_{CO} \to \mathbb{R}^3_{CO}$, $T_\alpha(X)$=$\alpha + X$ olacak şekilde reel uzayda bir öteleme olsun. P_1=(x_1, y_1, z_1) , P_2=$(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3_{CO}$ için $X_T = |a_1 + x_1 - a_1 - x_2|$, $Y_T = |a_2 + y_1 - a_2 - y_2|$, $Z_T = |a_3 + z_1 - a_3 - z_2|$ ve $u_T = \max\{X_T, Y_T, Z_T\}$, $v_T = \text{mid}\{X_T, Y_T, Z_T\}$ ve $w_T = \min\{X_T, Y_T, Z_T\}$ olmak üzere*

$$\begin{aligned} d_{CO}(T_\alpha(P_1), T_\alpha(P_2)) &= \max\left\{\frac{9+\sqrt{6}}{15}(u_T + v_T + w_T), u_T + v_T\right\} \\ &= \max\left\{\frac{9+\sqrt{6}}{15}(u + v + w), u + v\right\} \\ &= d_{CO}(P_1, P_2) \end{aligned}$$

olur. Bundan dolayı T_α bir izometridir.

Yukarıdaki önerme gereğince $\mathbb{R}^3_{CO}$ uzayında dönme ve yansımaları bulmak için orijinden geçen düzlemleri düşünmek yeterli olacaktır. Aşağıdaki önermede $\mathbb{R}^3_{CO}$ de uzaklığı koruyan yansımalar ifade edilecektir.

Önerme 5.4 *$\mathbb{R}^3_{CO}$ de $\Delta = ax + by + cz = 0$ düzlemine göre yansımanın izometri olması için gerek ve yeter koşul düzlemin doğrultu vektörü (a, b, c) nin*

D=$\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (-1,1,0), (1,0,1), (1,0,-1), (0,1,1), (0,1,-1)\}$

elemanlarına paralel olmasıdır.

İspat *$\Delta : ax + by + cz = 0$ birim normali (a, b, c) olan düzlem olmak ü zere $\sigma_\Delta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Öklidyen yansıma*

$$\sigma_\Delta(x,y,z) = ((1-2a^2)x - 2aby - 2acz, -2abx + (1-2b^2)y - 2bcz, -2acx - 2bcy + (1-2c^2)z)$$

biçiminde tanımlanır.

chamfered octahedronun köşe noktaları $A_2 = (1,0,0)$, $A_6 = \left(\frac{4-\sqrt{6}}{5}, \frac{4-\sqrt{6}}{5}, \frac{1+\sqrt{6}}{5}\right)$, $A_{14} = \left(\frac{1+\sqrt{6}}{5}, \frac{4-\sqrt{6}}{5}, \frac{4-\sqrt{6}}{5}\right)$ *konum vektörü olarak alındığında* $\mathbb{R}^3_{CO}$ *ün bir tabanı ve taban vektörlerini koruyan bir yansıma izometri olacağından bu tabanı koruyan yansımaları tespit etmek izometrileri bulmak için yeterli olacaktır. Öklidyen yansımada taban vektörleri*

$$\sigma_\Delta(1,0,0) = (1-2a^2, -2ab, -2ac)$$
$$\sigma_\Delta\left(\tfrac{4-\sqrt{6}}{5}, \tfrac{4-\sqrt{6}}{5}, \tfrac{1+\sqrt{6}}{5}\right) =$$
$$\tfrac{\sqrt{6}-4}{5}\begin{pmatrix} -1+2a^2+2ab+\left(2+\sqrt{6}\right)ac, 2ab-1+2b^2+\left(2+\sqrt{6}\right)bc, \\ \dfrac{4ac+4bc-2-\sqrt{6}+\left(4+2\sqrt{6}\right)c^2}{2} \end{pmatrix}$$
$$\sigma_\Delta\left(\tfrac{1+\sqrt{6}}{5}, \tfrac{4-\sqrt{6}}{5}, \tfrac{4-\sqrt{6}}{5}\right) =$$
$$-\tfrac{1+\sqrt{6}}{5}\begin{pmatrix} -1+2a^2+\left(-4+2\sqrt{6}\right)(ab+ac), 2ab+2-\sqrt{6}+\left(-4+2\sqrt{6}\right)(b^2+bc), \\ 2ac+2-\sqrt{6}+\left(-4+2\sqrt{6}\right)(bc+c^2) \end{pmatrix}$$

olur. Açıkça $d_{CO}(O,A_2) = d_{CO}(O,A_6) = d_{CO}(O,A_{14}) = 1$ *dir. Eğer yansıma* d_{CO} *uzaklığını koruyor ise taban vektörlerinin yansıma altındaki görüntüleri için uzaklık korunmalıdır. Yani*

$$d_{CO}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(A_2)) = d_{CO}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(A_6)) = d_{CO}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(A_{14})) = 1$$

olmalıdır. Böylece $X_1 = |1-2a^2|$, $Y_1 = |-2ab|$, $Z_1 = |-2ac|$,
$X_2 = \frac{\sqrt{6}-4}{5}\left|-1+2a^2+2ab+\left(2+\sqrt{6}\right)ac\right|$, $Y_2 = \frac{\sqrt{6}-4}{5}\left|2ab-1+2b^2+\left(2+\sqrt{6}\right)bc\right|$,
$Z_2 = \frac{\sqrt{6}-4}{10}\left|4ac+4bc-2-\sqrt{6}+\left(4+2\sqrt{6}\right)c^2\right|$,
$X_3 = \frac{1+\sqrt{6}}{5}\left|-1+2a^2+\left(-4+2\sqrt{6}\right)(ab+ac)\right|$,
$Y_3 = \frac{1+\sqrt{6}}{5}\left|2ab+2-\sqrt{6}+\left(-4+2\sqrt{6}\right)(b^2+bc)\right|$,
$Z_3 = \frac{1+\sqrt{6}}{5}\left|2ac+2-\sqrt{6}+\left(-4+2\sqrt{6}\right)(bc+c^2)\right|$ *olmak üzere* $i = 1,2,3$ *için* $u_i = \max\{X_i,Y_i,Z_i\}$, $v_i = \text{mid}\{X_i,Y_i,Z_i\}$ *ve* $w_i = \min\{X_i,Y_i,Z_i\}$ *denilirse*

$$d_{CO}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(A_2)) = \max\left\{\tfrac{9+\sqrt{6}}{15}(u_1+v_1+w_1), u_1+v_1\right\} = 1$$
$$d_{CO}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(A_6)) = \max\left\{\tfrac{9+\sqrt{6}}{15}(u_2+v_2+w_2), u_2+v_2\right\} = 1$$
$$d_{CO}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(A_{14})) = \max\left\{\tfrac{9+\sqrt{6}}{15}(u_3+v_3+w_3), u_3+v_3\right\} = 1$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözülürse;

$$(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),$$
$$\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}},0\right),\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}},0\right),\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

sonuçları bulunur.

Tersine $\sigma_\Delta(X) = Y$ iken OX ve OY vektörlerinin doğrultu vektörleri sırasıyla (p_1, q_1, r_1) ve (p_2, q_2, r_2) ise önerme 5.2 den dolayı $d_{CO}(O, X) = d_{CO}(O, Y)$ olması için $\mu_{OX} = \mu_{OY}$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Buna göre aşağıdaki liste (p_2, q_2, r_2) doğrultusunun ilgili yansımaya göre (p_1, q_1, r_1) cinsinden karşılığını vermektedir.

Δ	(p_2, q_2, r_2)	Δ	(p_2, q_2, r_2)
$x = 0$	$(-p_1, q_1, r_1)$	$x + z = 0$	$(-2r_1, 2q_1, -2p_1)$
$y = 0$	$(p_1, -q_1, r_1)$	$x - z = 0$	$(2r_1, 2q_1, 2p_1)$
$z = 0$	$(p_1, q_1, -r_1)$	$y + z = 0$	$(2p_1, -2r_1, -2q_1)$
$x + y = 0$	$(-2q_1, -2p_1, 2r_1)$	$y - z = 0$	$(2p_1, 2r_1, 2q_1)$
$x - z = 0$	$(2q_1, 2p_1, 2r_1)$		

Böylelikle $\mu_{OX} = \mu_{OY}$ olduğu kolaylıkla görülebilir.

Sonuç 5.4 *Orijinden geçen düzlemlere göre izometrik yansımalarının kümesi S_{CO} aşağıda denklemleri verilen 9 tane Öklidyen yansımadan oluşur. Bunlar*

$$\{x = 0, y = 0, z = 0, x + y = 0, x - y = 0, x + z = 0, x - z = 0, y + z = 0, y - z = 0\}.$$

Şekil5.4 deki tablo birim kürenin köşe noktalarının ilgili yansıma dönüşümleri altındaki görüntülerini vermektedir.

	(1,0,0)	(0,1,0)	(0,0,1)	(1,1,0)	(1,0,1)	(0,1,1)	(1,-1,0)	(1,0,-1)	(0,1,-1)
A_0	A_0	A_0	A_1	A_0	A_3	A_5	A_0	A_2	A_4
A_1	A_1	A_1	A_0	A_1	A_2	A_4	A_1	A_3	A_5
A_2	A_3	A_2	A_2	A_5	A_1	A_2	A_4	A_0	A_2
A_3	A_2	A_3	A_3	A_4	A_0	A_3	A_5	A_1	A_3
A_4	A_4	A_5	A_4	A_3	A_4	A_1	A_2	A_4	A_0
A_5	A_5	A_4	A_5	A_2	A_5	A_0	A_3	A_5	A_1
A_6	A_{10}	A_8	A_7	A_{12}	A_{19}	A_{25}	A_6	A_{14}	A_{22}
A_7	A_{11}	A_9	A_6	A_{13}	A_{15}	A_{23}	A_7	A_{18}	A_{24}
A_8	A_{12}	A_6	A_9	A_8	A_{21}	A_{24}	A_{10}	A_{16}	A_{23}
A_9	A_{13}	A_7	A_8	A_9	A_{17}	A_{22}	A_{11}	A_{20}	A_{25}
A_{10}	A_6	A_{12}	A_{11}	A_{10}	A_{18}	A_{29}	A_8	A_{15}	A_{26}
A_{11}	A_7	A_{13}	A_{10}	A_{11}	A_{14}	A_{27}	A_9	A_{19}	A_{28}
A_{12}	A_8	A_{10}	A_{13}	A_6	A_{20}	A_{28}	A_{12}	A_{17}	A_{27}
A_{13}	A_9	A_{11}	A_{12}	A_7	A_{16}	A_{26}	A_{13}	A_{21}	A_{29}
A_{14}	A_{18}	A_{16}	A_{15}	A_{28}	A_{11}	A_{17}	A_{22}	A_6	A_{14}
A_{15}	A_{19}	A_{17}	A_{14}	A_{29}	A_7	A_{15}	A_{23}	A_{10}	A_{16}
A_{16}	A_{20}	A_{14}	A_{17}	A_{24}	A_{13}	A_{16}	A_{26}	A_8	A_{15}
A_{17}	A_{21}	A_{15}	A_{16}	A_{25}	A_9	A_{14}	A_{27}	A_{12}	A_{17}
A_{18}	A_{14}	A_{20}	A_{19}	A_{26}	A_{10}	A_{21}	A_{24}	A_7	A_{18}
A_{19}	A_{15}	A_{21}	A_{18}	A_{27}	A_6	A_{19}	A_{25}	A_{11}	A_{20}
A_{20}	A_{16}	A_{18}	A_{21}	A_{22}	A_{12}	A_{20}	A_{28}	A_9	A_{19}
A_{21}	A_{17}	A_{19}	A_{20}	A_{23}	A_8	A_{18}	A_{29}	A_{13}	A_{21}
A_{22}	A_{26}	A_{24}	A_{23}	A_{20}	A_{27}	A_9	A_{14}	A_{22}	A_6
A_{23}	A_{27}	A_{25}	A_{22}	A_{21}	A_{23}	A_7	A_{15}	A_{26}	A_8
A_{24}	A_{28}	A_{22}	A_{25}	A_{16}	A_{29}	A_8	A_{18}	A_{24}	A_7
A_{25}	A_{29}	A_{23}	A_{24}	A_{17}	A_{25}	A_6	A_{19}	A_{28}	A_9
A_{26}	A_{22}	A_{28}	A_{27}	A_{18}	A_{26}	A_{13}	A_{16}	A_{23}	A_{10}
A_{27}	A_{23}	A_{29}	A_{26}	A_{19}	A_{22}	A_{11}	A_{17}	A_{27}	A_{12}
A_{28}	A_{24}	A_{26}	A_{29}	A_{14}	A_{28}	A_{12}	A_{20}	A_{25}	A_{11}
A_{29}	A_{25}	A_{27}	A_{28}	A_{15}	A_{24}	A_{10}	A_{21}	A_{29}	A_{13}

Şekil 5.4 $\mathbb{R}^3_{CO}$ de Yansıma Düzlemlerine Göre K öşe Noktaların Görüntüleri

Önerme 5.5 *Orijinden geçen bir l doğrusuna göre bir r_θ d önmesinin izometri olması için gerek ve yeter koşul*

$$D_1 = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ \ (0,0,1)\}$$
$$D_2 = \{(1,1,1),\ (-1,1,1),(1,-1,1),\ \ (1,1,-1)\}$$
$$D_3 = \{(1,1,0),\ (1,0,1),(0,1,1),\ \ (1,-1,0),\ \ (1,0,-1),\ \ (0,1,-1)\}$$

ve

$$R_1 = \{r_\theta \mid \theta \in \{\pi/2\,,\,\pi,3\pi/2\}\,,\ dönme\ ekseninin\ doğrultu\ vektörü\ D_1\ in\ elemanı\}$$
$$R_2 = \{r_\theta \mid \theta \in \{2\pi/3\,,\,4\pi/3\}\,,\ dönme\ ekseninin\ doğrultu\ vektörü\ D_2\ nin\ elemanı\}$$
$$R_3 = \{r_\theta \mid \theta = \pi,\ dönme\ ekseninin\ doğrultu\ vektörü\ D_3\ ün\ elemanı\}$$

olmak üzere $r_\theta \in R_{CO} = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ olmasıdır.

İspat *Bir l doğrusunun birim doğrultusu (p,q,r) olmak üzere, l etrafında r_θ Öklidyen dönmenin matris formu;*

$$\begin{bmatrix} \cos\theta + p^2(1-\cos\theta) & pq(1-\cos\theta) - r\sin\theta & pr(1-\cos\theta) + q\sin\theta \\ pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta & \cos\theta + q^2(1-\cos\theta) & qr(1-\cos\theta) - p\sin\theta \\ pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta & qr(1-\cos\theta) + p\sin\theta & \cos\theta - r^2(1-\cos\theta) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. l eksenindeki bir dönme , l doğrusu boyunca kesişen iki düzlemin yansımalarının birleşimi olduğundan önerme 5.4 den l doğrusunun doğrultu vektörleri $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,1)$, $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,-1,0)$, $(1,0,-1)$, $(0,1,-1)$ olarak alınabilir.

$\mathbb{R}^3_{CO}$ deki izometrik dönmelerin bulunması için , d_{CO} birim küresinin kenarlarının uzunluklarını koruyan dönmelerin bulunması yeterlidir.

$A_2 = (1,0,0)$, $A_6 = \left(\frac{4-\sqrt{6}}{5}, \frac{4-\sqrt{6}}{5}, \frac{1+\sqrt{6}}{5}\right)$, $A_{14} = \left(\frac{1+\sqrt{6}}{5}, \frac{4-\sqrt{6}}{5}, \frac{4-\sqrt{6}}{5}\right)$ olan d_{CO} birim küresinin köşe noktaları ele alınsın. Buna göre

$$r_\theta(A_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta + p^2(1-\cos\theta), \\ pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta, \\ pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$r_\theta(A_6) = \begin{pmatrix} \frac{4-\sqrt{6}}{5}\left(\cos\theta + (p^2+pq)(1-\cos\theta) - r\sin\theta\right) + \frac{1+\sqrt{6}}{5}\left(pr(1-\cos\theta) + q\sin\theta\right), \\ \frac{4-\sqrt{6}}{5}\left(\cos\theta + (pq+q^2)(1-\cos\theta) + r\sin\theta\right) + \frac{1+\sqrt{6}}{5}\left(qr(1-\cos\theta) - p\sin\theta\right), \\ \frac{4-\sqrt{6}}{5}\left((pr+qr)(1-\cos\theta) + (p-q)\sin\theta\right) + \frac{1+\sqrt{6}}{5}\left(r^2(1-\cos\theta) + \cos\theta\right) \end{pmatrix}$$

$$r_\theta(A_{14}) = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{6}}{5}\left(p^2(1-\cos\theta) + \cos\theta\right) + \frac{4-\sqrt{6}}{5}\left((pq+pr)(1-\cos\theta) + (q-r)\sin\theta\right), \\ \frac{1+\sqrt{6}}{5}\left(pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta\right) + \frac{4-\sqrt{6}}{5}\left(\cos\theta + (q^2+qr)(1-\cos\theta) - p\sin\theta\right), \\ \frac{1+\sqrt{6}}{5}\left(pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta\right) + \frac{4-\sqrt{6}}{5}\left(\cos\theta + (qr+r^2)(1-\cos\theta) + p\sin\theta\right) \end{pmatrix}$$

bulunur. O halde $\theta \neq 0$ olmak üzere $d_{CO}(r_\theta(A_2), r_\theta(A_{14})) = \frac{6-\sqrt{6}}{5}$ ve $d_{CO}(r_\theta(A_6), r_\theta(A_{14})) = \frac{4\sqrt{6}-6}{5}$ olmalıdır. Böylece,

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{4-\sqrt{6}}{5}\left|\cos\theta + \left(p^2 - pq - pr\right)(1-\cos\theta) + q\sin\theta\right|, \\ Y_1 &= \frac{4-\sqrt{6}}{5}\left|-\cos\theta + \left(pq - q^2 - qr\right)(1-\cos\theta) + (p+r)\sin\theta\right|, \\ Z_1 &= \frac{4-\sqrt{6}}{5}\left|-\cos\theta + \left(pr - qr - r^2\right)(1-\cos\theta) - (p+q)\sin\theta\right|, \\ X_2 &= \frac{2\sqrt{6}-3}{5}\left|\cos\theta + \left(p^2 - pr\right)(1-\cos\theta) - q\sin\theta\right|, \\ Y_2 &= \frac{2\sqrt{6}-3}{5}\left|(pq - qr)(1-\cos\theta) + (p+r)\sin\theta\right|, \\ Z_2 &= \frac{2\sqrt{6}-3}{5}\left|-\cos\theta + \left(pr - r^2\right)(1-\cos\theta) - q\sin\theta\right| \end{aligned}$$

olmak üzere; $i = 1,2$ *için* $u_i = \max\{X_i, Y_i, Z_i\}$, $v_i = \text{mid}\{X_i, Y_i, Z_i\}$ *ve* $w_i = \min\{X_i, Y_i, Z_i\}$ *denilirse*

$$d_{CO}(r_\theta(A_2), r_\theta(A_{14})) = \max\left\{\frac{9+\sqrt{6}}{15}(u_1+v_1+w_1), u_1+v_1\right\} = \frac{6-\sqrt{6}}{5}$$
$$d_{CO}(r_\theta(A_6), r_\theta(A_{14})) = \max\left\{\frac{9+\sqrt{6}}{15}(u_2+v_2+w_2), u_2+v_2\right\} = \frac{4\sqrt{6}-6}{5}$$

elde edilir.

l doğrusunun doğrultu vektörü $(0,0,1)$ *ise* $(p,q,r) = (0,0,1)$ *olur.* p,q,r *değerlerini* $d_{CO}(r_\theta(A_2), r_\theta(A_{14}))=\frac{6-\sqrt{6}}{5}$ *ve* $d_{CO}(r_\theta(A_6), r_\theta(A_{14}))=\frac{4\sqrt{6}-6}{5}$ *de yerine yazılırsa*

$$X_1 = \frac{4-\sqrt{6}}{5}|\cos\theta+\sin\theta|, Y_1 = \frac{4-\sqrt{6}}{5}|-\cos\theta+\sin\theta|, Z_1 = \frac{4-\sqrt{6}}{5},$$
$$X_2 = \frac{2\sqrt{6}-3}{5}(1+|\sin\theta|), Y_2 = \frac{2\sqrt{6}-3}{5}(1+|\cos\theta|), Z_2 = \frac{2\sqrt{6}-3}{5}(|\cos\theta|+|\sin\theta|)$$

olmak üzere $i = 1,2$ *için* $u_i = \max\{X_i, Y_i, Z_i\}$, $v_i = \text{mid}\{X_i, Y_i, Z_i\}$ *ve* $w_i = \min\{X_i, Y_i, Z_i\}$ *denilirse*

$$\max\left\{\frac{9+\sqrt{6}}{15}(u_1+v_1+w_1), u_1+v_1\right\} = \frac{6-\sqrt{6}}{5}$$
$$\max\left\{\frac{9+\sqrt{6}}{15}(u_2+v_2+w_2), u_2+v_2\right\} = \frac{4\sqrt{6}-6}{5}$$

elde edilir. Bu iki denklem çözülürse $\theta = \pi/2, \theta = \pi, \theta = 3\pi/2$ *olur.Buradan* z *ekseni etrafındaki* $\theta = \pi/2, \pi, 3\pi/2$ *radyanlık dönmeler* $\mathbb{R}^3_{CO}$ *ün bir izometrisidir. Benzer şekilde* l *nin yön vektörü* $(0,1,0)$ *veya* $(1,0,0)$ *ise* $\theta = \pi/2, \pi, 3\pi/2$ *olarak bulunur.*

l doğrusunun yön vektörü $(1,1,1)$ *ise* $(p,q,r) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olur.* p,q,r *değerleri* $d_{CO}(r_\theta(A_2), r_\theta(A_{14})) = \frac{6-\sqrt{6}}{5}$ *ve* $d_{CO}(r_\theta(A_6), r_\theta(A_{14})) = \frac{4\sqrt{6}-6}{5}$ *de yerine yazılırsa,*

$$X_1 = \tfrac{4-\sqrt{6}}{15}|4\cos\theta-1|, Y_1 = \tfrac{4-\sqrt{6}}{15}\left|-1-2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\right|,$$
$$Z_1 = \tfrac{4-\sqrt{6}}{15}\left|1+2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\right|, X_2 = \tfrac{2\sqrt{6}-3}{5}\left|\cos\theta-\tfrac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right|+\tfrac{2\sqrt{3}}{3}|\sin\theta|,$$
$$Y_2 = \tfrac{2\sqrt{6}-3}{5}\left|\cos\theta-\tfrac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right|+\left|\cos\theta+\tfrac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right|, Z_2 = \tfrac{2\sqrt{6}-3}{5}\left|\cos\theta+\tfrac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right|+\tfrac{2\sqrt{3}}{3}|\sin\theta|$$

olmak üzere $i = 1,2$ *için* $u_i = \max\{X_i, Y_i, Z_i\}$, $v_i = \text{mid}\{X_i, Y_i, Z_i\}$ *ve* $w_i = \min\{X_i, Y_i, Z_i\}$ *denilirse*

$$\max\left\{\frac{9+\sqrt{6}}{15}(u_1+v_1+w_1), u_1+v_1\right\} = \frac{6-\sqrt{6}}{5}$$
$$\max\left\{\frac{9+\sqrt{6}}{15}(u_2+v_2+w_2), u_2+v_2\right\} = \frac{4\sqrt{6}-6}{5}$$

elde edilir. Bu denklemler çözülürse $\theta = 2\pi/3, \theta = 4\pi/3$ *bulunur. Buradan* l *etrafındaki* $\theta = 2\pi/3,\ 4\pi/3$ *radyanlık dönmeler* $\mathbb{R}^3_{CO}$ *ün bir izometrisidir. Benzer şekilde* l *nin yön vektörü (-1,1,1), (1,1,-1) veya (1,-1,1) ise* $\theta = 2\pi/3,\ 4\pi/3$ *olarak bulunur.*

l doğrusunun yön vektörü (0,1,1) ise $(p,q,r) = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$*olur.* p,q,r *değerlerini* $d_{CO}(r_\theta(A_2), r_\theta(A_{14}))=\frac{6-\sqrt{6}}{5}$ *ve* $d_{CO}(r_\theta(A_6), r_\theta(A_{14}))=\frac{4\sqrt{6}-6}{5}$ *de yerine yazılırsa;* $X_1 = \frac{4-\sqrt{6}}{5}\left|\cos\theta\right|$, $Y_1 = \frac{4-\sqrt{6}}{5}\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta - 1\right|$, $Z_1 = \frac{4-\sqrt{6}}{5}\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta + 1\right|$, $X_2=\frac{2\sqrt{6}-3}{5}\left(\left|\cos\theta\text{-}\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right| + \left|\frac{\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta-1}{2}\right|\right)$, $Y_2=\frac{2\sqrt{6}-3}{5}\left(\left|\cos\theta\text{-}\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right| + \left|\frac{\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta+1}{2}\right|\right)$ *ve* $Z_2 = \frac{2\sqrt{6}-3}{5}\left(\left|\frac{\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta-1}{2}\right| + \left|\frac{\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta+1}{2}\right|\right)$ *olmak üzere ve de* $i = 1,2$ *için* $u_i = \max\{X_i, Y_i, Z_i\}$, $v_i = \text{mid}\{X_i, Y_i, Z_i\}$ *ve* $w_i = \min\{X_i, Y_i, Z_i\}$ *denilirse*

$$\max\left\{\frac{9+\sqrt{6}}{15}(u_1+v_1+w_1), u_1+v_1\right\} = \frac{6-\sqrt{6}}{5}$$

$$\max\left\{\frac{9+\sqrt{6}}{15}(u_2+v_2+w_2), u_2+v_2\right\} = \frac{4\sqrt{6}-6}{5}$$

elde edilir. Bu denklemler çözülürse $\theta = \pi$ *elde edilir. Buradan* l *etrafındaki ,* $\theta = \pi$ *radyanlık dönmeler* $\mathbb{R}^3_{CO}$ *ün bir izometrisidir. Benzer şekilde* l *nin yön vektörü* $(1,1,0)$ *,* $(1,0,1)$*,* $(1,-1,0)$*,* $(1,0,-1)$*,* $(0,1,-1)$ *ise* $\theta = \pi$ *olur.*

Tersine $r_\theta(X) = Y$ *olacak şekilde* X *ve* Y *noktalarıyla oluşturulan* OX *ve* OY *doğrularının doğrultuları sırasıyla* (p_1,q_1,r_1) *ve* (p_2,q_2,r_2) *olmak üzere* $d_{CO}(O,X) = d_{CO}(O,Y)$ *olduğunu göstermek için önerme 5.2 den* $\mu_{OX} = \mu_{OY}$ *olduğu gösterilmelidir. Bu ise* (p_1,q_1,r_1) *vektörünün tüm durumlar için görüntüleri bulunarak kolaylıkla gösterilebilir. Örneğin dönme ekseninin doğrultu vektörü* $(1,0,0)$ *olmak üzere bu eksende* $\theta = \frac{\pi}{2}$ *radyanlık dönme dönüşümü yapılınca* $(p_2,q_2,r_2) = (p_1,-r_1,q_1)$ *bulunur. Buradan da* $\mu_{OX} = \mu_{OY}$ *olduğu görülür. benzer şekilde diğer dönme eksenleri ve dönme açıları için eşitlik gösterilebilir. Buda ispatı tamamlar.*

Şekil5.5 deki tablo birim kürenin köşe noktalarının ilgili dönme dönüşümleri altındaki görüntülerini vermektedir.

	(1,0,0)			(0,1,0)			(0,0,1)			(1,1,0)	(1,0,1)	(0,1,1)	(1,-1,0)	(1,0,-1)	(0,1,-1	(1,1,1)		(-1,1,1)		(1,-1,1)		(1,1,-1)	
	π/2	π	3π/2	π/2	π	3π/2	π/2	π	3π/2	π	π	π	π	π	π	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3
A_0	A_5	A_1	A_4	A_2	A_1	A_3	A_0	A_0	A_0	A_1	A_2	A_4	A_1	A_3	A_5	A_2	A_4	A_4	A_3	A_5	A_2	A_5	A_3
A_1	A_4	A_0	A_5	A_3	A_0	A_2	A_1	A_1	A_1	A_0	A_3	A_5	A_0	A_2	A_4	A_3	A_5	A_5	A_2	A_4	A_3	A_4	A_2
A_2	A_2	A_2	A_2	A_1	A_3	A_0	A_4	A_3	A_5	A_4	A_0	A_3	A_5	A_1	A_3	A_4	A_0	A_1	A_5	A_0	A_5	A_1	A_4
A_3	A_3	A_3	A_3	A_0	A_2	A_1	A_5	A_2	A_4	A_5	A_1	A_2	A_4	A_0	A_2	A_5	A_1	A_0	A_4	A_1	A_4	A_0	A_5
A_4	A_0	A_5	A_1	A_4	A_4	A_4	A_3	A_5	A_2	A_2	A_5	A_0	A_3	A_5	A_1	A_0	A_2	A_3	A_0	A_3	A_1	A_2	A_1
A_5	A_1	A_4	A_0	A_5	A_5	A_5	A_2	A_4	A_3	A_3	A_4	A_1	A_2	A_4	A_0	A_1	A_3	A_2	A_1	A_2	A_0	A_3	A_0
A_6	A_{24}	A_9	A_{23}	A_{15}	A_{11}	A_{18}	A_{10}	A_{12}	A_8	A_7	A_{16}	A_{26}	A_{13}	A_{21}	A_{29}	A_{14}	A_{22}	A_{27}	A_{20}	A_{28}	A_{17}	A_{25}	A_{19}
A_7	A_{22}	A_8	A_{25}	A_{19}	A_{10}	A_{14}	A_{11}	A_{13}	A_9	A_6	A_{20}	A_{28}	A_{12}	A_{17}	A_{27}	A_{18}	A_{24}	A_{29}	A_{16}	A_{26}	A_{21}	A_{23}	A_{15}
A_8	A_{25}	A_7	A_{22}	A_{17}	A_{13}	A_{20}	A_6	A_{10}	A_{12}	A_{11}	A_{14}	A_{27}	A_9	A_{19}	A_{28}	A_{15}	A_{26}	A_{23}	A_{21}	A_{24}	A_{16}	A_{29}	A_{18}
A_9	A_{23}	A_6	A_{24}	A_{21}	A_{12}	A_{16}	A_7	A_{11}	A_{13}	A_{10}	A_{18}	A_{29}	A_8	A_{15}	A_{26}	A_{19}	A_{28}	A_{25}	A_{17}	A_{22}	A_{20}	A_{27}	A_{14}
A_{10}	A_{28}	A_{13}	A_{27}	A_{14}	A_7	A_{19}	A_{12}	A_8	A_6	A_9	A_{17}	A_{22}	A_{11}	A_{20}	A_{25}	A_{16}	A_{23}	A_{26}	A_{18}	A_{29}	A_{15}	A_{24}	A_{21}
A_{11}	A_{26}	A_{12}	A_{29}	A_{18}	A_6	A_{15}	A_{13}	A_9	A_7	A_8	A_{21}	A_{24}	A_{10}	A_{16}	A_{23}	A_{20}	A_{25}	A_{28}	A_{14}	A_{27}	A_{19}	A_{22}	A_{17}
A_{12}	A_{29}	A_{11}	A_{26}	A_{16}	A_9	A_{21}	A_8	A_6	A_{10}	A_{13}	A_{15}	A_{23}	A_7	A_{18}	A_{24}	A_{17}	A_{27}	A_{22}	A_{19}	A_{25}	A_{14}	A_{28}	A_{20}
A_{13}	A_{27}	A_{10}	A_{28}	A_{20}	A_8	A_{17}	A_9	A_7	A_{11}	A_{12}	A_{19}	A_{25}	A_6	A_{14}	A_{22}	A_{21}	A_{29}	A_{24}	A_{15}	A_{23}	A_{18}	A_{26}	A_{16}
A_{14}	A_{16}	A_{17}	A_{15}	A_7	A_{19}	A_{10}	A_{26}	A_{20}	A_{24}	A_{23}	A_8	A_{18}	A_{29}	A_{13}	A_{21}	A_{22}	A_6	A_{11}	A_{28}	A_{12}	A_{25}	A_9	A_{27}
A_{15}	A_{14}	A_{16}	A_{17}	A_{11}	A_{18}	A_6	A_{27}	A_{21}	A_{25}	A_{22}	A_{12}	A_{20}	A_{28}	A_9	A_{19}	A_{26}	A_8	A_{13}	A_{24}	A_{10}	A_{29}	A_7	A_{23}
A_{16}	A_{17}	A_{15}	A_{14}	A_9	A_{21}	A_{12}	A_{22}	A_{18}	A_{28}	A_{27}	A_6	A_{19}	A_{25}	A_{11}	A_{20}	A_{23}	A_{10}	A_7	A_{29}	A_8	A_{24}	A_{13}	A_{26}
A_{17}	A_{15}	A_{14}	A_{16}	A_{13}	A_{20}	A_8	A_{23}	A_{19}	A_{29}	A_{26}	A_{10}	A_{21}	A_{24}	A_7	A_{18}	A_{27}	A_{12}	A_9	A_{25}	A_6	A_{28}	A_{11}	A_{22}
A_{18}	A_{20}	A_{21}	A_{19}	A_6	A_{15}	A_{11}	A_{28}	A_{16}	A_{22}	A_{25}	A_9	A_{14}	A_{27}	A_{12}	A_{17}	A_{24}	A_7	A_{10}	A_{26}	A_{13}	A_{23}	A_8	A_{29}
A_{19}	A_{18}	A_{20}	A_{21}	A_{10}	A_{14}	A_7	A_{29}	A_{17}	A_{23}	A_{24}	A_{13}	A_{16}	A_{26}	A_8	A_{15}	A_{28}	A_9	A_{12}	A_{22}	A_{11}	A_{27}	A_6	A_{25}
A_{20}	A_{21}	A_{19}	A_{18}	A_8	A_{17}	A_{13}	A_{24}	A_{14}	A_{26}	A_{29}	A_7	A_{15}	A_{23}	A_{10}	A_{16}	A_{25}	A_{11}	A_6	A_{27}	A_9	A_{22}	A_{12}	A_{28}
A_{21}	A_{19}	A_{18}	A_{20}	A_{12}	A_{16}	A_9	A_{25}	A_{15}	A_{27}	A_{28}	A_{11}	A_{17}	A_{22}	A_6	A_{14}	A_{29}	A_{13}	A_8	A_{23}	A_7	A_{26}	A_{10}	A_{24}
A_{22}	A_8	A_{25}	A_7	A_{23}	A_{27}	A_{26}	A_{18}	A_{28}	A_{16}	A_{15}	A_{24}	A_{10}	A_{21}	A_{29}	A_{13}	A_6	A_{14}	A_{19}	A_{12}	A_{20}	A_9	A_{17}	A_{11}
A_{23}	A_6	A_{24}	A_9	A_{27}	A_{26}	A_{22}	A_{19}	A_{29}	A_{17}	A_{14}	A_{28}	A_{12}	A_{20}	A_{25}	A_{11}	A_{10}	A_{16}	A_{21}	A_8	A_{18}	A_{13}	A_{15}	A_7
A_{24}	A_9	A_{23}	A_6	A_{25}	A_{29}	A_{28}	A_{14}	A_{26}	A_{20}	A_{19}	A_{22}	A_{11}	A_{17}	A_{27}	A_{12}	A_7	A_{18}	A_{15}	A_{13}	A_{16}	A_8	A_{21}	A_{10}
A_{25}	A_7	A_{22}	A_8	A_{29}	A_{28}	A_{24}	A_{15}	A_{27}	A_{21}	A_{18}	A_{26}	A_{13}	A_{16}	A_{23}	A_{10}	A_{11}	A_{20}	A_{17}	A_9	A_{14}	A_{12}	A_{19}	A_6
A_{26}	A_{12}	A_{29}	A_{11}	A_{22}	A_{23}	A_{27}	A_{20}	A_{24}	A_{14}	A_{17}	A_{25}	A_6	A_{19}	A_{28}	A_9	A_8	A_{15}	A_{18}	A_{10}	A_{21}	A_7	A_{16}	A_{13}
A_{27}	A_{10}	A_{28}	A_{13}	A_{26}	A_{22}	A_{23}	A_{21}	A_{25}	A_{15}	A_{16}	A_{29}	A_8	A_{18}	A_{24}	A_7	A_{12}	A_{17}	A_{20}	A_6	A_{19}	A_{11}	A_{14}	A_9
A_{28}	A_{13}	A_{27}	A_{10}	A_{24}	A_{25}	A_{29}	A_{16}	A_{22}	A_{18}	A_{21}	A_{23}	A_7	A_{15}	A_{26}	A_8	A_9	A_{19}	A_{14}	A_{11}	A_{17}	A_6	A_{20}	A_{12}
A_{29}	A_{11}	A_{26}	A_{12}	A_{28}	A_{24}	A_{25}	A_{17}	A_{23}	A_{19}	A_{20}	A_{27}	A_9	A_{14}	A_{22}	A_6	A_{13}	A_{21}	A_{16}	A_7	A_{15}	A_{10}	A_{18}	A_8

Şekil 5.5 $\mathbb{R}^3_{CO}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

Sonuç 5.5 *Orijinden geçen doğrulara göre izometrik dönmelerin R_{CO} kümesi tam olarak 23 Öklidyen dönme içerir.*

Yardımcı Teorem 5.2 *(x, y, z) noktasını $(-x, -y, -z)$ noktasına eşleyen dönüşüm olan orijine göre σ_O inversiyonu (noktaya göre yansıma) $\mathbb{R}^3_{CO}$ ün bir izometrisidir.*

Şekil5.6 daki tabloda inversiyon dönüşümü altında birim kürenin köşe noktalarının görüntüleri verilmektedir.

A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}	A_{17}	A_{18}	A_{19}	A_{20}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{24}	A_{25}	A_{26}	A_{27}	A_{28}	A_{29}
A_1	A_0	A_3	A_2	A_5	A_4	A_{13}	A_{12}	A_{11}	A_{10}	A_9	A_8	A_7	A_6	A_{21}	A_{20}	A_{19}	A_{18}	A_{17}	A_{16}	A_{15}	A_{14}	A_{29}	A_{28}	A_{27}	A_{26}	A_{25}	A_{24}	A_{23}	A_{22}

Şekil 5.6 $\mathbb{R}^3_{CO}$ de σ_O İnversiyonu Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

Önerme 5.6 *d_{CO} uzaklığını invaryant bırakan orijine göre altı tane dönme yansıması vardır.*

İspat *$r_\theta \in R_{CO}$, Γ ve Δ düzlemleri, Π düzlemine dik olmak üzere dönme yansıma ρ : $\sigma_\Pi\sigma_\Delta\sigma_\Gamma = \sigma_\Pi r_\theta$ şeklinde ifade edilebilir.O halde dönme ekseni yansıma düzlemine dik olmak zorundadır. Bu nedenle önerme 5.5 deki dönme eksenlerinden 9 tanesi incelenmelidir. Çünkü D_2 de verilen dönme eksenlerinin hiçbiri önerme 5.4 de verilen yansıma düzlemlere dik değildir. Π düzlemi olarak $z = 0$ düzlemi alınırsa r_θ nın birim doğrultusu (0,0,1) olup*

$$\rho : \sigma_\Pi r_\theta(x, y, z) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, -z)$$

bulunur.

$$\rho(A_2) = \rho(1, 0, 0) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$
$$\rho(A_6) = \rho\left(\tfrac{4-\sqrt{6}}{5}, \tfrac{4-\sqrt{6}}{5}, \tfrac{1+\sqrt{6}}{5}\right) = \left(\tfrac{4-\sqrt{6}}{5}(\cos\theta - \sin\theta), \tfrac{4-\sqrt{6}}{5}(\cos\theta + \sin\theta), -\tfrac{1+\sqrt{6}}{5}\right)$$
$$\rho(A_{14}) = \rho\left(\tfrac{1+\sqrt{6}}{5}, \tfrac{4-\sqrt{6}}{5}, \tfrac{4-\sqrt{6}}{5}\right) = \left(\tfrac{1+\sqrt{6}}{5}\cos\theta - \tfrac{4-\sqrt{6}}{5}\sin\theta, \tfrac{1+\sqrt{6}}{5}\sin\theta + \tfrac{4-\sqrt{6}}{5}\cos\theta, -\tfrac{4-\sqrt{6}}{5}\right)$$

elde edilir. $d_{CO}(r_\theta(A_2), r_\theta(A_{14}))=\frac{6-\sqrt{6}}{5}$ ve $d_{CO}(r_\theta(A_6), r_\theta(A_{14}))=\frac{4\sqrt{6}-6}{5}$ olmak zorunda olduğundan

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{4-\sqrt{6}}{5}, Y_1 = \frac{4-\sqrt{6}}{5}\left|-\cos\theta + \sin\theta\right|, Z_1 = \frac{4-\sqrt{6}}{5}\left|\cos\theta + \sin\theta\right|, \\ X_2 &= \frac{2\sqrt{6}-3}{5}\left|\cos\theta\right|, Y_2 = \frac{2\sqrt{6}-3}{5}\left|\sin\theta\right|, Z_2 = \frac{2\sqrt{6}-3}{5} \end{aligned}$$

olmak üzere ve de $i = 1, 2$ için $u_i = \max\{X_i, Y_i, Z_i\}$, $v_i = \text{mid}\{X_i, Y_i, Z_i\}$ ve $w_i = \min\{X_i, Y_i, Z_i\}$ denilirse

$$\begin{aligned} \max\left\{\frac{9+\sqrt{6}}{15}(u_1 + v_1 + w_1), u_1 + v_1\right\} &= \frac{6-\sqrt{6}}{5} \\ \max\left\{\frac{9+\sqrt{6}}{15}(u_2 + v_2 + w_2), u_2 + v_2\right\} &= \frac{4\sqrt{6}-6}{5} \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülürse $\theta = \pi/2$, π,$3\pi/2$ bulunur. Burada elde edilen sonuçlardan kolaylıkla $\sigma_\Pi r_\pi = \sigma_O$ olduğu gösterilebilir. O halde $z = 0$ düzlemine göre 2 tane dönme yansıma elde edilir.Benzer şekilde Π olarak $x = 0$ ve $y = 0$ düzlemlerine göre 2 şer tane dönme yansıma elde edilir.

Eğer Π düzlemi olarak $x + y = 0$ düzlemi alınırsa için Π tanımlı ise r_θ dönmesinin birim doğrultusu $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ olup,

$$\rho : \sigma_\Pi r_\theta(x, y, z) = \begin{pmatrix} (\frac{cos\theta-1}{2})x - (\frac{1+\cos\theta}{2})y + (\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})z, (\frac{-cos\theta-1}{2})x - (\frac{-1+\cos\theta}{2})y + (\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})z, \\ (-\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})x + (\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})y + \cos\theta z) \end{pmatrix}$$

olur. Buradan $d_{CO}(r_\theta(A_2), r_\theta(A_{14}))=\frac{6-\sqrt{6}}{5}$ *ve* $d_{CO}(r_\theta(A_6), r_\theta(A_{14}))=\frac{4\sqrt{6}-6}{5}$ *olması gerektiğinden* $X_1=\frac{4-\sqrt{6}}{5}\left|\frac{2-\sqrt{2}\sin\theta}{2}\right|$, $Y_1=\frac{4-\sqrt{6}}{5}\left|\frac{-2\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta}{2}\right|$, $Z_1=\frac{4-\sqrt{6}}{5}\left|\frac{2\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta}{2}\right|$, $X_2=\frac{2\sqrt{6}-3}{5}\left|\frac{1-\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta}{2}\right|$, $Y_2=\frac{2\sqrt{6}-3}{5}\left|\frac{1-\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta}{2}\right|$ *ve* $Z_2=\frac{2\sqrt{6}-3}{5}\left|\frac{2\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta}{2}\right|$ *olmak üzere ve de* $i=1,2$ *için* $u_i=\max\{X_i,Y_i,Z_i\}$, $v_i=\text{mid}\{X_i,Y_i,Z_i\}$ *ve* $w_i=\min\{X_i,Y_i,Z_i\}$ *denilirse*

$$\max\left\{\frac{9+\sqrt{6}}{15}(u_1+v_1+w_1),u_1+v_1\right\} = \frac{6-\sqrt{6}}{5}$$

$$\max\left\{\frac{9+\sqrt{6}}{15}(u_2+v_2+w_2),u_2+v_2\right\} = \frac{4\sqrt{6}-6}{5}$$

elde edilir. Bu denklemler çözülürse $\theta=\pi$ *sonucu elde edilir. Buradan elde olunan sonuca göre* $\sigma_\Pi r_\pi=\sigma_O$ *dönüşümü O =(0,0,0) göre bir inversiyon olduğundan bu durumda yeni bir dönme yansıması yoktur. Benzer şekilde* Π *düzlemi,* $x-y=0, x+z=0, x-z=0, y+z=0, y-z=0$ *düzlemlerinden herhangi biri ise dönme ekseninin doğrultusu (1,-1,0), (1,0,1), (1,0,-1), (0,1,1), (0,1,-1) olup bu durumların her birinde* $\theta=\pi$ *sonucuna ulaşılır. Bu sonuç ise orijine göre inversiyon olduğundan bu durumların hiçbirinde bir dönme yansıma yoktur.*

Şekil5.7 deki tablo birim kürenin köşe noktalarının ilgili dönme yansıma dönüşümleri altındaki görüntülerini vermektedir.

	(1,0,0)			(0,1,0)			(0,0,1)			(1,1,0)	(1,0,1)	(0,1,1)	(1,-1,0	(1,0,-1	(0,1,-1
	π/2	π	3π/2	π/2	π	3π/2	π/2	π	3π/2	π	π	π	π	π	π
A_0	A_5	A_1	A_4	A_2	A_1	A_3	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1
A_1	A_4	A_0	A_5	A_3	A_0	A_2	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0
A_2	A_3	A_3	A_3	A_1	A_3	A_0	A_4	A_3	A_5	A_3	A_3	A_3	A_3	A_3	A_3
A_3	A_2	A_2	A_2	A_0	A_2	A_1	A_5	A_2	A_4	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2
A_4	A_0	A_5	A_1	A_5	A_5	A_5	A_3	A_5	A_2	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5
A_5	A_1	A_4	A_0	A_4	A_4	A_4	A_2	A_4	A_3	A_4	A_4	A_4	A_4	A_4	A_4
A_6	A_{28}	A_{13}	A_{27}	A_{17}	A_{13}	A_{20}	A_{11}	A_{13}	A_9	A_{13}	A_{13}	A_{13}	A_{13}	A_{13}	A_{13}
A_7	A_{26}	A_{12}	A_{29}	A_{21}	A_{12}	A_{16}	A_{10}	A_{12}	A_8	A_{12}	A_{12}	A_{12}	A_{12}	A_{12}	A_{12}
A_8	A_{29}	A_{11}	A_{26}	A_{15}	A_{11}	A_{18}	A_7	A_{11}	A_{13}	A_{11}	A_{11}	A_{11}	A_{11}	A_{11}	A_{11}
A_9	A_{27}	A_{10}	A_{28}	A_{19}	A_{10}	A_{14}	A_6	A_{10}	A_{12}	A_{10}	A_{10}	A_{10}	A_{10}	A_{10}	A_{10}
A_{10}	A_{24}	A_9	A_{23}	A_{16}	A_9	A_{21}	A_{13}	A_9	A_7	A_9	A_9	A_9	A_9	A_9	A_9
A_{11}	A_{22}	A_8	A_{25}	A_{20}	A_8	A_{17}	A_{12}	A_8	A_6	A_8	A_8	A_8	A_8	A_8	A_8
A_{12}	A_{25}	A_7	A_{22}	A_{14}	A_7	A_{19}	A_9	A_7	A_{11}	A_7	A_7	A_7	A_7	A_7	A_7
A_{13}	A_{23}	A_6	A_{24}	A_{18}	A_6	A_{15}	A_8	A_6	A_{10}	A_6	A_6	A_6	A_6	A_6	A_6
A_{14}	A_{20}	A_{21}	A_{19}	A_9	A_{21}	A_{12}	A_{27}	A_{21}	A_{25}	A_{21}	A_{21}	A_{21}	A_{21}	A_{21}	A_{21}
A_{15}	A_{18}	A_{20}	A_{21}	A_{13}	A_{20}	A_8	A_{26}	A_{20}	A_{24}	A_{20}	A_{20}	A_{20}	A_{20}	A_{20}	A_{20}
A_{16}	A_{21}	A_{19}	A_{18}	A_7	A_{19}	A_{10}	A_{23}	A_{19}	A_{29}	A_{19}	A_{19}	A_{19}	A_{19}	A_{19}	A_{19}
A_{17}	A_{19}	A_{18}	A_{20}	A_{11}	A_{18}	A_6	A_{22}	A_{18}	A_{28}	A_{18}	A_{18}	A_{18}	A_{18}	A_{18}	A_{18}
A_{18}	A_{16}	A_{17}	A_{15}	A_8	A_{17}	A_{13}	A_{29}	A_{17}	A_{23}	A_{17}	A_{17}	A_{17}	A_{17}	A_{17}	A_{17}
A_{19}	A_{14}	A_{16}	A_{17}	A_{12}	A_{16}	A_9	A_{28}	A_{16}	A_{22}	A_{16}	A_{16}	A_{16}	A_{16}	A_{16}	A_{16}
A_{20}	A_{17}	A_{15}	A_{14}	A_6	A_{15}	A_{11}	A_{25}	A_{15}	A_{27}	A_{15}	A_{15}	A_{15}	A_{15}	A_{15}	A_{15}
A_{21}	A_{15}	A_{14}	A_{16}	A_{10}	A_{14}	A_7	A_{24}	A_{14}	A_{26}	A_{14}	A_{14}	A_{14}	A_{14}	A_{14}	A_{14}
A_{22}	A_{12}	A_{29}	A_{11}	A_{25}	A_{29}	A_{28}	A_{19}	A_{29}	A_{17}	A_{29}	A_{29}	A_{29}	A_{29}	A_{29}	A_{29}
A_{23}	A_{10}	A_{28}	A_{13}	A_{29}	A_{28}	A_{24}	A_{18}	A_{28}	A_{16}	A_{28}	A_{28}	A_{28}	A_{28}	A_{28}	A_{28}
A_{24}	A_{13}	A_{27}	A_{10}	A_{23}	A_{27}	A_{26}	A_{15}	A_{27}	A_{21}	A_{27}	A_{27}	A_{27}	A_{27}	A_{27}	A_{27}
A_{25}	A_{11}	A_{26}	A_{12}	A_{27}	A_{26}	A_{22}	A_{14}	A_{26}	A_{20}	A_{26}	A_{26}	A_{26}	A_{26}	A_{26}	A_{26}
A_{26}	A_8	A_{25}	A_7	A_{24}	A_{25}	A_{29}	A_{21}	A_{25}	A_{15}	A_{25}	A_{25}	A_{25}	A_{25}	A_{25}	A_{25}
A_{27}	A_6	A_{24}	A_9	A_{28}	A_{24}	A_{25}	A_{20}	A_{24}	A_{14}	A_{24}	A_{24}	A_{24}	A_{24}	A_{24}	A_{24}
A_{28}	A_9	A_{23}	A_6	A_{22}	A_{23}	A_{27}	A_{17}	A_{23}	A_{19}	A_{23}	A_{23}	A_{23}	A_{23}	A_{23}	A_{23}
A_{29}	A_7	A_{22}	A_8	A_{26}	A_{22}	A_{23}	A_{16}	A_{22}	A_{18}	A_{22}	A_{22}	A_{22}	A_{22}	A_{22}	A_{22}

Şekil 5.7 $\mathbb{R}^3_{CO}$ de Dönme Yansıma Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

Önerme 5.7 *d_{CO} uzaklığını değişmez bırakan orijine göre sekiz tane dönme inversiyonu vardır.*

İspat *Bir dönme inversiyon, $r_\theta \in R_{CO}$ olmak üzere $\rho : \sigma_O\sigma_\Delta\sigma_\Gamma = \sigma_O r_\theta$ şeklinde ifade edilir. Buna göre önerme 5.5 deki dönme eksenleri için 13 durum göz önüne alınmalıdır. r_θ, z ekseni etrafında dönme olarak ele alınırsa, r_θ nın birim vektörü (0,0,1) olur ve*

$$\rho : \sigma_O r_\theta(x, y, z) = (-x\cos\theta + y\sin\theta, -x\sin\theta - y\cos\theta, -z)$$

bulunur. Ayrıca

$\rho(A_2)=\rho\,(1,0,0) = (-\cos\theta, -\sin\theta, 0)$

$\rho(A_6)=\rho\left(\frac{4-\sqrt{6}}{5}, \frac{4-\sqrt{6}}{5}, \frac{1+\sqrt{6}}{5}\right) = \left(\frac{4-\sqrt{6}}{5}\,(-\cos\theta+\sin\theta)\,, \frac{4-\sqrt{6}}{5}\,(-\sin\theta-\cos\theta)\,, -\frac{1+\sqrt{6}}{5}\right)$

$\rho(A_{14})=\rho\left(\frac{1+\sqrt{6}}{5}, \frac{4-\sqrt{6}}{5}, \frac{4-\sqrt{6}}{5}\right) = \left(-\frac{1+\sqrt{6}}{5}\cos\theta+\frac{4-\sqrt{6}}{5}\sin\theta, -\frac{1+\sqrt{6}}{5}\sin\theta - \frac{4-\sqrt{6}}{5}\cos\theta, -\frac{4-\sqrt{6}}{5}\right)$

olup $d_{CO}(r_\theta(A_2), r_\theta(A_{14}))=\frac{6-\sqrt{6}}{5}$ *ve* $d_{CO}(r_\theta(A_6), r_\theta(A_{14}))=\frac{4\sqrt{6}-6}{5}$ *olmak zorunda olduğundan,* $X_1=\frac{4-\sqrt{6}}{5}\left|-\cos\theta+\sin\theta\right|$, $Y_1=\frac{4-\sqrt{6}}{5}\left|\cos\theta+\sin\theta\right|$, $Z_1=\frac{4-\sqrt{6}}{5}$, $X_2=\frac{2\sqrt{6}-3}{5}\left|\cos\theta\right|$, $Y_2=\frac{2\sqrt{6}-3}{5}\left|\sin\theta\right|$ *ve* $Z_2=\frac{2\sqrt{6}-3}{5}$ *olmak üzere ve de* $i=1,2$ *için* $u_i=\max\{X_i,Y_i,Z_i\}$, $v_i=\text{mid}\{X_i,Y_i,Z_i\}$ *ve* $w_i=\min\{X_i,Y_i,Z_i\}$ *denilirse*

$$\begin{aligned}\max\left\{\frac{9+\sqrt{6}}{15}(u_1+v_1+w_1),u_1+v_1\right\} &= \frac{6-\sqrt{6}}{5}\\ \max\left\{\frac{9+\sqrt{6}}{15}(u_2+v_2+w_2),u_2+v_2\right\} &= \frac{4\sqrt{6}-6}{5}\end{aligned}$$

denklemleri bulunur. Bu denklemler çözülürse $\theta=\pi/2,\ \pi,3\pi/2$ *sonuçları elde edilir. Buradan* $\sigma_O r_\theta$ *bir dönme yansıması veya yansıma olduğundan yeni bir dönme inversiyonu yoktur.Benzer şekilde* x *ve* y *eksenleri için de yeni bir dönme inversiyonu yoktur.*r_θ*, doğrultu vektörü (1,1,0) olan* l *doğrusu etrafındaki dönme olmak üzere* r_θ *nın birim vektörü* $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ *olur ve*

$$\rho:\sigma_O r_\theta(x,y,z)=\begin{pmatrix}(\frac{-\cos\theta-1}{2})x+(\frac{-1+\cos\theta}{2})y-(\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})z,(\frac{cos\theta-1}{2})x+(\frac{-1-\cos\theta}{2})y+(\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})z,\\ (\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})x-(\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})y-\cos\theta z\end{pmatrix}$$

bulunur. Buna göre $d_{CO}(r_\theta(A_2), r_\theta(A_{14}))=\frac{6-\sqrt{6}}{5}$ *ve* $d_{CO}(r_\theta(A_6), r_\theta(A_{14}))=\frac{4\sqrt{6}-6}{5}$ *olduğundan* $X_1=\frac{4-\sqrt{6}}{5}\left|\frac{-2\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta}{2}\right|$, $Y_1=\frac{4-\sqrt{6}}{5}\left|\frac{2\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta}{2}\right|$, $Z_1=\frac{4-\sqrt{6}}{5}\left|\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta\right|$, $X_2=\frac{2\sqrt{6}-3}{5}\left|\frac{1-\sqrt{2}\sin\theta+\cos\theta}{2}\right|$, $Y_2=\frac{2\sqrt{6}-3}{5}\left|\frac{1+\sqrt{2}\sin\theta-\cos\theta}{2}\right|$ *ve* $Z_2=\frac{2\sqrt{6}-3}{5}\left|\frac{\sqrt{2}\sin\theta+2\cos\theta}{2}\right|$ *olmak üzere ve de* $i=1,2$ *için* $u_i=\max\{X_i,Y_i,Z_i\}$, $v_i=\text{mid}\{X_i,Y_i,Z_i\}$ *ve* $w_i=\min\{X_i,Y_i,Z_i\}$ *denilirse*

$$\begin{aligned}\max\left\{\frac{9+\sqrt{6}}{15}(u_1+v_1+w_1),u_1+v_1\right\} &= \frac{6-\sqrt{6}}{5}\\ \max\left\{\frac{9+\sqrt{6}}{15}(u_2+v_2+w_2),u_2+v_2\right\} &= \frac{4\sqrt{6}-6}{5}\end{aligned}$$

denklemleri bulunur. Bu denklemler çözülürse $\theta=\pi$ *sonucuna ulaşılır. Buradan* $\sigma_O r_\theta$ *bir dönme yansıması veya yansıma olduğundan yeni bir dönme inversiyonu yoktur.Benzer şekilde* r_θ*, (1,-1,0), (1,0,1), (1,0,-1), (0,1,1), (0,1,-1) e paralel dönme eksenlerinden herhangi biri ise yeni bir dönme inversiyonu yoktur.*

r_θ *doğrultu vektörü (1,1,1) olan* l *doğrusu etrafında ki dönme ise* r_θ *nın birim vektörü* $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$ *olacağından,*

$$\begin{aligned}\rho:\sigma_O r_\theta(x,y,z)=((\tfrac{-2\cos\theta-1}{3})x+(\tfrac{\cos\theta+\sqrt{3}sin\theta\text{-}1}{3})y+(\tfrac{\cos\theta-\sqrt{3}sin\theta-1}{3})z\\ (\tfrac{\cos\theta-\sqrt{3}sin\theta-1}{3})x+(\tfrac{-1-2\cos\theta}{3})y+(\tfrac{\cos\theta+\sqrt{3}sin\theta-1}{3})z\\ (\tfrac{\cos\theta+\sqrt{3}sin\theta-1}{3})x+(\tfrac{\cos\theta-\sqrt{3}sin\theta-1}{3})y+(\tfrac{-1-2\cos\theta}{3})z))\end{aligned}$$

olup $d_{CO}(r_\theta(A_2), r_\theta(A_{14}))=\frac{6-\sqrt{6}}{5}$ *ve* $d_{CO}(r_\theta(A_6), r_\theta(A_{14}))=\frac{4\sqrt{6}-6}{5}$ *olması gerektiğinden* $X_1=\frac{4-\sqrt{6}}{15}\left|1+2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\right|$, $Y_1=\frac{4-\sqrt{6}}{15}\left|1+2\cos\theta-2\sqrt{3}\sin\theta\right|$, $Z_1=\frac{4-\sqrt{6}}{15}\left|1-4\cos\theta\right|$, $X_2=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5}\left|\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta\right|$, $Y_2=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5}\left|2\sin\theta\right|$ *ve* $Z_2=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5}\left|\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta\right|$ *olmak üzere ve de* $i=1,2$ *için* $u_i=\max\{X_i,Y_i,Z_i\}$, $v_i=\text{mid}\{X_i,Y_i,Z_i\}$ *ve* $w_i=\min\{X_i,Y_i,Z_i\}$ *denilirse*

$$\max\left\{\frac{9+\sqrt{6}}{15}(u_1+v_1+w_1),u_1+v_1\right\}=\frac{6-\sqrt{6}}{5}$$

$$\max\left\{\frac{9+\sqrt{6}}{15}(u_2+v_2+w_2),u_2+v_2\right\}=\frac{4\sqrt{6}-6}{5}$$

denklemleri bulunur. Bu denklemler çözülürse $\theta=2\pi/3,\ 4\pi/3$ *sonuçlarına ulaşılır. Bu durumda (1,1,1) vektörünü doğrultu vektörü alan* l *doğrusu etrafındaki dönme kullanılarak 2 tane dönme inversiyonu elde edilir. Benzer şekilde (-1,1,1), (1,-1,1), (1,1,-1) doğrultulu eksen etrafındaki dönme kullanılarak herbiri için iki yeni dönme inversiyon elde edilir. O halde* d_{CO} *uzaklığını koruyan tam olarak sekiz dönme inversiyonu vardır.*

Şekil5.8 deki tabloda birim kürenin köşe noktalarının ilgili dönme inversiyon dönüşümü altındaki görüntülerini vermektedir.

	(1,0,0)			(0,1,0)			(0,0,1)			(1,1,0)	(1,0,1)	(0,1,1)	(1,-1,0	(1,0,-1	(0,1,-1	(1,1,1)		(-1,1,1)		(1,-1,1)		(1,1,-1)	
	π/2	π	3π/2	π/2	π	3π/2	π/2	π	3π/2	π	π	π	π	π	π	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3
A_0	A_4	A_0	A_5	A_3	A_0	A_2	A_1	A_1	A_1	A_0	A_3	A_5	A_0	A_2	A_4	A_3	A_5	A_5	A_2	A_4	A_3	A_4	A_2
A_1	A_5	A_1	A_4	A_2	A_1	A_3	A_0	A_0	A_0	A_1	A_2	A_4	A_1	A_3	A_5	A_2	A_4	A_4	A_3	A_5	A_2	A_5	A_3
A_2	A_3	A_3	A_3	A_0	A_2	A_1	A_5	A_2	A_4	A_5	A_1	A_2	A_4	A_0	A_2	A_5	A_1	A_0	A_4	A_1	A_4	A_0	A_5
A_3	A_2	A_2	A_2	A_1	A_3	A_0	A_4	A_3	A_5	A_4	A_0	A_3	A_5	A_1	A_3	A_4	A_0	A_1	A_5	A_0	A_5	A_1	A_4
A_4	A_1	A_4	A_0	A_5	A_5	A_5	A_2	A_4	A_3	A_3	A_4	A_1	A_2	A_4	A_0	A_1	A_3	A_2	A_1	A_2	A_0	A_3	A_0
A_5	A_0	A_5	A_1	A_4	A_4	A_4	A_3	A_5	A_2	A_2	A_5	A_0	A_3	A_5	A_1	A_0	A_2	A_3	A_0	A_3	A_1	A_2	A_1
A_6	A_{27}	A_{10}	A_{28}	A_{20}	A_8	A_{17}	A_9	A_7	A_{11}	A_{12}	A_{19}	A_{25}	A_6	A_{14}	A_{22}	A_{21}	A_{29}	A_{24}	A_{15}	A_{23}	A_{18}	A_{26}	A_{16}
A_7	A_{29}	A_{11}	A_{26}	A_{16}	A_9	A_{21}	A_8	A_6	A_{10}	A_{13}	A_{15}	A_{23}	A_7	A_{18}	A_{24}	A_{17}	A_{27}	A_{22}	A_{19}	A_{25}	A_{14}	A_{28}	A_{20}
A_8	A_{26}	A_{12}	A_{29}	A_{18}	A_6	A_{15}	A_{13}	A_9	A_7	A_8	A_{21}	A_{24}	A_{10}	A_{16}	A_{23}	A_{20}	A_{25}	A_{28}	A_{14}	A_{27}	A_{19}	A_{22}	A_{17}
A_9	A_{28}	A_{13}	A_{27}	A_{14}	A_7	A_{19}	A_{12}	A_8	A_6	A_9	A_{17}	A_{22}	A_{11}	A_{20}	A_{25}	A_{16}	A_{23}	A_{26}	A_{18}	A_{29}	A_{15}	A_{24}	A_{21}
A_{10}	A_{23}	A_6	A_{24}	A_{21}	A_{12}	A_{16}	A_7	A_{11}	A_{13}	A_{10}	A_{18}	A_{29}	A_8	A_{15}	A_{26}	A_{19}	A_{28}	A_{25}	A_{17}	A_{22}	A_{20}	A_{27}	A_{14}
A_{11}	A_{25}	A_7	A_{22}	A_{17}	A_{13}	A_{20}	A_6	A_{10}	A_{12}	A_{11}	A_{14}	A_{27}	A_9	A_{19}	A_{28}	A_{15}	A_{26}	A_{23}	A_{21}	A_{24}	A_{16}	A_{29}	A_{18}
A_{12}	A_{22}	A_8	A_{25}	A_{19}	A_{10}	A_{14}	A_{11}	A_{13}	A_9	A_6	A_{20}	A_{28}	A_{12}	A_{17}	A_{27}	A_{18}	A_{24}	A_{29}	A_{16}	A_{26}	A_{21}	A_{23}	A_{15}
A_{13}	A_{24}	A_9	A_{23}	A_{15}	A_{11}	A_{18}	A_{10}	A_{12}	A_8	A_7	A_{16}	A_{26}	A_{13}	A_{21}	A_{29}	A_{14}	A_{22}	A_{27}	A_{20}	A_{28}	A_{17}	A_{25}	A_{19}
A_{14}	A_{19}	A_{18}	A_{20}	A_{12}	A_{16}	A_9	A_{25}	A_{15}	A_{27}	A_{28}	A_{11}	A_{17}	A_{22}	A_6	A_{14}	A_{29}	A_{13}	A_8	A_{23}	A_7	A_{26}	A_{10}	A_{24}
A_{15}	A_{21}	A_{19}	A_{18}	A_8	A_{17}	A_{13}	A_{24}	A_{14}	A_{26}	A_{29}	A_7	A_{15}	A_{23}	A_{10}	A_{16}	A_{25}	A_{11}	A_6	A_{27}	A_9	A_{22}	A_{12}	A_{28}
A_{16}	A_{18}	A_{20}	A_{21}	A_{10}	A_{14}	A_7	A_{29}	A_{17}	A_{23}	A_{24}	A_{13}	A_{16}	A_{26}	A_8	A_{15}	A_{28}	A_9	A_{12}	A_{22}	A_{11}	A_{27}	A_6	A_{25}
A_{17}	A_{20}	A_{21}	A_{19}	A_6	A_{15}	A_{11}	A_{28}	A_{16}	A_{22}	A_{25}	A_9	A_{14}	A_{27}	A_{12}	A_{17}	A_{24}	A_7	A_{10}	A_{26}	A_{13}	A_{23}	A_8	A_{29}
A_{18}	A_{15}	A_{14}	A_{16}	A_{13}	A_{20}	A_8	A_{23}	A_{19}	A_{29}	A_{26}	A_{10}	A_{21}	A_{24}	A_7	A_{18}	A_{27}	A_{12}	A_9	A_{25}	A_6	A_{28}	A_{11}	A_{22}
A_{19}	A_{17}	A_{15}	A_{14}	A_9	A_{21}	A_{12}	A_{22}	A_{18}	A_{28}	A_{27}	A_6	A_{19}	A_{25}	A_{11}	A_{20}	A_{23}	A_{10}	A_7	A_{29}	A_8	A_{24}	A_{13}	A_{26}
A_{20}	A_{14}	A_{16}	A_{17}	A_{11}	A_{18}	A_6	A_{27}	A_{21}	A_{25}	A_{22}	A_{12}	A_{20}	A_{28}	A_9	A_{19}	A_{26}	A_8	A_{13}	A_{24}	A_{10}	A_{29}	A_7	A_{23}
A_{21}	A_{16}	A_{17}	A_{15}	A_7	A_{19}	A_{10}	A_{26}	A_{20}	A_{24}	A_{23}	A_8	A_{18}	A_{29}	A_{13}	A_{21}	A_{22}	A_6	A_{11}	A_{28}	A_{12}	A_{25}	A_9	A_{27}
A_{22}	A_{11}	A_{26}	A_{12}	A_{28}	A_{24}	A_{25}	A_{17}	A_{23}	A_{19}	A_{20}	A_{27}	A_9	A_{14}	A_{22}	A_6	A_{13}	A_{21}	A_{16}	A_7	A_{15}	A_{10}	A_{18}	A_8
A_{23}	A_{13}	A_{27}	A_{10}	A_{24}	A_{25}	A_{29}	A_{16}	A_{22}	A_{18}	A_{21}	A_{23}	A_7	A_{15}	A_{26}	A_8	A_9	A_{19}	A_{14}	A_{11}	A_{17}	A_6	A_{20}	A_{12}
A_{24}	A_{10}	A_{28}	A_{13}	A_{26}	A_{22}	A_{23}	A_{21}	A_{25}	A_{15}	A_{16}	A_{29}	A_8	A_{18}	A_{24}	A_7	A_{12}	A_{17}	A_{20}	A_6	A_{19}	A_{11}	A_{14}	A_9
A_{25}	A_{12}	A_{29}	A_{11}	A_{22}	A_{23}	A_{27}	A_{20}	A_{24}	A_{14}	A_{17}	A_{25}	A_6	A_{19}	A_{28}	A_9	A_8	A_{15}	A_{18}	A_{10}	A_{21}	A_7	A_{16}	A_{13}
A_{26}	A_7	A_{22}	A_8	A_{29}	A_{28}	A_{24}	A_{15}	A_{27}	A_{21}	A_{18}	A_{26}	A_{13}	A_{16}	A_{23}	A_{10}	A_{11}	A_{20}	A_{17}	A_9	A_{14}	A_{12}	A_{19}	A_6
A_{27}	A_9	A_{23}	A_6	A_{25}	A_{29}	A_{28}	A_{14}	A_{26}	A_{20}	A_{19}	A_{22}	A_{11}	A_{17}	A_{27}	A_{12}	A_7	A_{18}	A_{15}	A_{13}	A_{16}	A_8	A_{21}	A_{10}
A_{28}	A_6	A_{24}	A_9	A_{27}	A_{26}	A_{22}	A_{19}	A_{29}	A_{17}	A_{14}	A_{28}	A_{12}	A_{20}	A_{25}	A_{11}	A_{10}	A_{16}	A_{21}	A_8	A_{18}	A_{13}	A_{15}	A_7
A_{29}	A_8	A_{25}	A_7	A_{23}	A_{27}	A_{26}	A_{18}	A_{28}	A_{16}	A_{15}	A_{24}	A_{10}	A_{21}	A_{29}	A_{13}	A_6	A_{14}	A_{19}	A_{12}	A_{20}	A_9	A_{17}	A_{11}

Şekil 5.8 $\mathbb{R}^3_{CO}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

Buraya kadar olan kısımda Öklidyen 3-uzayın izometrilerinden hangilerinin d_{CO} metriğini koruduğu bulunmuştur. Daha açıkça Öklidyen 3-uzayın izometrilerinden dokuz yansıma, yirmi dört dönme, altı dönme-yansıma, sekiz dönme-inversiyon ve bir inversiyonun d_{CO} metriğini koruduğu gösterilmiştir. Bu tespit edilen elemanlar chamfered octahedronun Öklidyen simetri grubu olan O_h (Octahedral grup) elemanlarıdır. Bu gruba chamfered octahedron grup denilsin ve $G(CO)$ ile gösterilsin. Açıkça $G(CO)$, O_h grubuna izomorftur. Bundan sonraki kısımda bu dönüşümlerden başka d_{CO} metriğini koruyan izometrinin olmadığı gösterilecektir. Yani $\mathbb{R}^3_{CO}$ nin tüm izometrilerinin $T(3).G(CO)$ olduğu gösterilecektir.

Tanım 5.3 *$A = (a_1, a_2, a_3)$ ve $B = (b_1, b_2, b_3)$ $\mathbb{R}^3_{CO}$ uzayında farklı iki nokta olsun. Bu taktirde*

$$\{X \mid d_{CO}(A, X) + d_{CO}(B, X) = d_{CO}(A, B)\}$$

kümesine A, B noktalarının minimum uzaklık kümesi denir ve $[AB]$ ile gösterilir.

Genel olarak, $[AB]$ kümesi AB köşegenli bir altıgen üzerine kurulu oniki yüzlü oluşturur. (Şekil5.9)



Şekil 5.9 $\mathbb{R}^3_{CO}$ da Minimum Uzaklık Kümesi

Önerme 5.8 *$\phi : \mathbb{R}^3_{CO} \to \mathbb{R}^3_{CO}$ bir izometri ve $[AB]$ bir altıgen üzerine kurulu oniki yüzlü olsun. O halde*

$$\phi([AB]) = [\phi(A)\phi(B)]$$

olur.

İspat *$Y \in \phi([AB])$ olsun.*

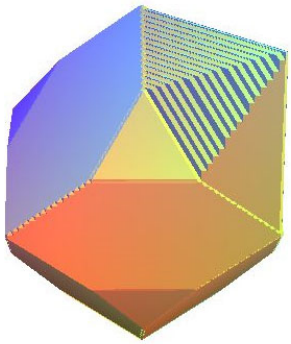
$$\begin{aligned} Y \in \phi([AB]) &\iff \exists X \in [AB] \ni Y = \phi(X) \\ &\iff d_{CO}(A,X) + d_{CO}(B,X) = d_{CO}(A,B) \\ &\iff d_{CO}(\phi(A),\phi(X)) + d_{CO}(\phi(B),\phi(X)) = d_{CO}(\phi(A),\phi(B)) \\ &\Leftrightarrow \quad Y = \phi(X) \in [\phi(A)\phi(B)]\,. \end{aligned}$$

Sonuç 5.6 *$\phi : \mathbb{R}^3_{CO} \to \mathbb{R}^3_{CO}$ bir izometri ve $[AB]$ paralelyüz olsun. Bu durumda ϕ, $[AB]$ nin köşelerini köşelere dönüştürür ve kenar uzunluklarını korur.*

Önerme 5.9 *$f : \mathbb{R}^3_{CO} \to \mathbb{R}^3_{CO}$ dönüşümü $f(O) = O$ olacak şekilde bir izometri olsun. Bu taktirde $f \in G(CO)$ olur.*

İspat *$O = (0,0,0)$ ve $D = (0,1,1)$ olmak üzere $[OD]$ bir altıgen üzerine kurulu oniki yüzlüsünü gözönüne alalım. Bu oniki yüzlünün köşe noktalarından altısı $A_0 = (0,0,1)$, $A_4 = (0,1,0)$, $A_6 = \left(\frac{4-\sqrt{6}}{5}, \frac{4-\sqrt{6}}{5}, \frac{1+\sqrt{6}}{5}\right)$, $A_{10} = \left(-\frac{4-\sqrt{6}}{5}, \frac{4-\sqrt{6}}{5}, \frac{1+\sqrt{6}}{5}\right)$, $A_{22} = \left(\frac{4-\sqrt{6}}{5}, \frac{1+\sqrt{6}}{5}, \frac{4-\sqrt{6}}{5}\right)$, $A_{26} = \left(-\frac{4-\sqrt{6}}{5}, \frac{1+\sqrt{6}}{5}, \frac{4-\sqrt{6}}{5}\right)$ olup bu noktalar aynı zamanda merkezil birim chamfered octahedron birim küresinin köşe noktalarıdır. Dahası bu altı*

nokta chamfered octahedronun her biri aynı altıgen olan bir yüzünün köşe noktalarıdır (Şekil 5.10).



Şekil 5.10 $\mathbb{R}^3_{CO}$ da Birim Küre Ve Minimum Uzaklık Kümesi

f izometrisi $[OD]$ oniki yüzlüsünün köşe noktalarını köşe noktalara dönüştürüp, kenar uzaklıklarını korduğundan ve $f(O) = O$ olduğundan dolayı A_0, A_4, A_6, A_{10}, A_{22} ve A_{26} noktalarını chamfered octahedronun yine bir altıgen yüzünün köşe noktalarına dönüştürür. Ayrıca bu dönüştürme işlemi gerçekleşirken kenar uzunlukları korunacağından dolayı açıkça ifade edilirse f izometrisi, chamfered octahedronun biraltıgen yüzünün köşe noktalarını yine bir altıgen yüzünün köşe noktalarına dönüştürür. O halde chamfered octahedron 12 altıgen yüze sahip olduğundan bir altıgen yüzün dönüşebileceği 12 altıgen yüz ihtimali vardır. Ayrıca kenar uzunlukları korunmak zorunda olduğundan A_0, A_4, A_6, A_{10}, A_{22} ve A_{26} noktaları dönüşümü için altıgen yüz üzerinde dört farklı ihtimal vardır. Bu taktirde chamfered octahedronun her bir altıgen yüzü için 4 ihtimal olduğundan dolayı bu noktaların dönüşebileceği 48 ihtimal vardır. Bu ihtimaller ise aşağıda tek tek sıralanmış ve her bir dönüşümün önceden tespit edilen hareketlerden hangisine karşılık geldiği ifade edilmiştir.

1. $f(A_0) = A_0$, $f(A_4) = A_4$, $f(A_6) = A_{10}$, $f(A_{10}) = A_6$, $f(A_{22}) = A_{26}$ ve $f(A_{26}) = A_{22}$ ise $\Delta : x = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ yansımasıdır.

2. $f(A_0) = A_0$, $f(A_4) = A_5$, $f(A_6) = A_8$, $f(A_{10}) = A_{12}$, $f(A_{22}) = A_{22}$ ve $f(A_{26}) = A_{28}$ ise $\Delta : y = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ yansımasıdır.

3. $f(A_0) = A_1$, $f(A_4) = A_4$, $f(A_6) = A_7$, $f(A_{10}) = A_{11}$, $f(A_{22}) = A_{23}$ ve $f(A_{26}) = A_{27}$ ise $\Delta : z = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ yansımasıdır.

4. $f(A_0) = A_0$, $f(A_4) = A_3$, $f(A_6) = A_{12}$, $f(A_{10}) = A_{10}$, $f(A_{22}) = A_{20}$ *ve* $f(A_{26}) = A_{18}$ *ise* $\Delta : x + y = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

5. $f(A_0) = A_3$, $f(A_4) = A_4$, $f(A_6) = A_{19}$, $f(A_{10}) = A_{18}$, $f(A_{22}) = A_{27}$ *ve* $f(A_{26}) = A_{26}$ *ise* $\Delta : x + z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

6. $f(A_0) = A_5$, $f(A_4) = A_1$, $f(A_6) = A_{25}$, $f(A_{10}) = A_{29}$, $f(A_{22}) = A_9$ *ve* $f(A_{26}) = A_{13}$ *ise* $\Delta : y + z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

7. $f(A_0) = A_0$, $f(A_4) = A_2$, $f(A_6) = A_6$, $f(A_{10}) = A_8$, $f(A_{22}) = A_{14}$ *ve* $f(A_{26}) = A_{16}$ *ise* $\Delta : x - y = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

8.$f(A_0) = A_2$, $f(A_4) = A_4$, $f(A_6) = A_{14}$, $f(A_{10}) = A_{15}$, $f(A_{22}) = A_{22}$ *ve* $f(A_{26}) = A_{23}$ *ise* $\Delta : x - z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

9.$f(A_0) = A_4$, $f(A_4) = A_0$, $f(A_6) = A_{22}$, $f(A_{10}) = A_{26}$, $f(A_{22}) = A_6$ *ve* $f(A_{26}) = A_{10}$ *ise* $\Delta : y - z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

10. $f(A_0) = A_5$, $f(A_4) = A_0$, $f(A_6) = A_{24}$, $f(A_{10}) = A_{28}$, $f(A_{22}) = A_8$ *ve* $f(A_{26}) = A_{12}$ *ise dönme ekseni* $(1, 0, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{\pi}{2}}$ *dönmesidir.*

11. $f(A_0) = A_1$, $f(A_4) = A_5$, $f(A_6) = A_9$, $f(A_{10}) = A_{13}$, $f(A_{22}) = A_{25}$ *ve* $f(A_{26}) = A_{29}$ *ise dönme ekseni* $(1, 0, 0)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmesidir.*

12. $f(A_0) = A_4$, $f(A_4) = A_1$, $f(A_6) = A_{23}$, $f(A_{10}) = A_{27}$, $f(A_{22}) = A_7$ *ve* $f(A_{26}) = A_{11}$ *ise dönme ekseni* $(1, 0, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{3\pi}{2}}$ *dönmesidir.*

13. $f(A_0) = A_2$, $f(A_4) = A_4$, $f(A_6) = A_{15}$, $f(A_{10}) = A_{14}$, $f(A_{22}) = A_{23}$ *ve* $f(A_{26}) = A_{22}$ *ise dönme ekseni* $(0, 1, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{\pi}{2}}$ *dönmesidir.*

14. $f(A_0) = A_1$, $f(A_4) = A_4$, $f(A_6) = A_{11}$, $f(A_{10}) = A_7$, $f(A_{22}) = A_{27}$ *ve* $f(A_{26}) = A_{23}$ *ise dönme ekseni* $(0, 1, 0)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmesidir.*

15. $f(A_0) = A_3$, $f(A_4) = A_4$, $f(A_6) = A_{18}$, $f(A_{10}) = A_{19}$, $f(A_{22}) = A_{26}$ *ve* $f(A_{26}) = A_{27}$ *ise dönme ekseni* $(0, 1, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{3\pi}{2}}$ *dönmesidir.*

16. $f(A_0) = A_0$, $f(A_4) = A_3$, $f(A_6) = A_{10}$, $f(A_{10}) = A_{12}$, $f(A_{22}) = A_{18}$ *ve* $f(A_{26}) = A_{20}$ *ise dönme ekseni* $(0, 0, 1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{\pi}{2}}$ *dönmesidir.*

17. $f(A_0) = A_0$, $f(A_4) = A_5$, $f(A_6) = A_{12}$, $f(A_{10}) = A_8$, $f(A_{22}) = A_{28}$ *ve* $f(A_{26}) = A_{24}$ *ise dönme ekseni* $(0,0,1)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmesidir.*

18. $f(A_0) = A_0$, $f(A_4) = A_2$, $f(A_6) = A_8$, $f(A_{10}) = A_6$, $f(A_{22}) = A_{16}$ *ve* $f(A_{26}) = A_{14}$ *ise dönme ekseni* $(0,0,1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{3\pi}{2}}$ *dönmesidir.*

19. $f(A_0) = A_1$, $f(A_4) = A_2$, $f(A_6) = A_7$, $f(A_{10}) = A_9$, $f(A_{22}) = A_{15}$ *ve* $f(A_{26}) = A_{17}$ *ise dönme ekseni* $(1,1,0)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmesidir.*

20. $f(A_0) = A_2$, $f(A_4) = A_5$, $f(A_6) = A_{16}$, $f(A_{10}) = A_{17}$, $f(A_{22}) = A_{24}$ *ve* $f(A_{26}) = A_{25}$ *ise dönme ekseni* $(1,0,1)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmesidir.*

21. $f(A_0) = A_4$, $f(A_4) = A_0$, $f(A_6) = A_{26}$, $f(A_{10}) = A_{22}$, $f(A_{22}) = A_{10}$ *ve* $f(A_{26}) = A_6$ *ise dönme ekseni* $(0,1,1)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmesidir.*

22. $f(A_0) = A_1$, $f(A_4) = A_3$, $f(A_6) = A_{13}$, $f(A_{10}) = A_{11}$, $f(A_{22}) = A_{21}$ *ve* $f(A_{26}) = A_{19}$ *ise dönme ekseni* $(1,-1,0)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmesidir.*

23. $f(A_0) = A_3$, $f(A_4) = A_5$, $f(A_6) = A_{21}$, $f(A_{10}) = A_{20}$, $f(A_{22}) = A_{29}$ *ve* $f(A_{26}) = A_{28}$ *ise dönme ekseni* $(1,0,-1)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmesidir.*

24. $f(A_0) = A_5$, $f(A_4) = A_1$, $f(A_6) = A_{29}$, $f(A_{10}) = A_{25}$, $f(A_{22}) = A_{13}$ *ve* $f(A_{26}) = A_9$ *ise dönme ekseni* $(0,1,-1)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmesidir.*

25. $f(A_0) = A_2$, $f(A_4) = A_0$, $f(A_6) = A_{14}$, $f(A_{10}) = A_{16}$, $f(A_{22}) = A_6$ *ve* $f(A_{26}) = A_8$ *ise dönme ekseni* $(1,1,1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

26. $f(A_0) = A_4$, $f(A_4) = A_2$, $f(A_6) = A_{22}$, $f(A_{10}) = A_{23}$, $f(A_{22}) = A_{14}$ *ve* $f(A_{26}) = A_{15}$ *ise dönme ekseni* $(1,1,1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

27. $f(A_0) = A_4$, $f(A_4) = A_3$, $f(A_6) = A_{27}$, $f(A_{10}) = A_{26}$, $f(A_{22}) = A_{19}$ *ve* $f(A_{26}) = A_{18}$ *ise dönme ekseni* $(-1,1,1)$ *olamk üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

28. $f(A_0) = A_3$, $f(A_4) = A_0$, $f(A_6) = A_{20}$, $f(A_{10}) = A_{18}$, $f(A_{22}) = A_{12}$ *ve* $f(A_{26}) = A_{10}$ *ise dönme ekseni* $(-1,1,1)$*olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

29. $f(A_0) = A_5$, $f(A_4) = A_3$, $f(A_6) = A_{28}$, $f(A_{10}) = A_{29}$, $f(A_{22}) = A_{20}$ *ve* $f(A_{26}) = A_{21}$ *ise dönme ekseni* $(1,-1,1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

30. $f(A_0) = A_2$, $f(A_4) = A_1$, $f(A_6) = A_{17}$, $f(A_{10}) = A_{15}$, $f(A_{22}) = A_9$ *ve* $f(A_{26}) = A_7$ *ise dönme ekseni* $(1,-1,1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

31. $f(A_0) = A_5$, $f(A_4) = A_2$, $f(A_6) = A_{25}$, $f(A_{10}) = A_{24}$, $f(A_{22}) = A_{17}$ *ve* $f(A_{26}) = A_{16}$ *ise dönme ekseni* $(1,1,-1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

32. $f(A_0) = A_3$, $f(A_4) = A_1$, $f(A_6) = A_{19}$, $f(A_{10}) = A_{21}$, $f(A_{22}) = A_{11}$ *ve* $f(A_{26}) = A_{13}$ *ise dönme ekseni* $(1,1,-1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

33 $f(A_0) = A_3$, $f(A_4) = A_1$, $f(A_6) = A_{21}$, $f(A_{10}) = A_{19}$, $f(A_{22}) = A_{13}$ *ve* $f(A_{26}) = A_{11}$ *ise dönme ekseni* $(1,1,1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

34.$f(A_0) = A_5$, $f(A_4) = A_3$, $f(A_6) = A_{29}$, $f(A_{10}) = A_{28}$, $f(A_{22}) = A_{21}$ *ve* $f(A_{26}) = A_{20}$ *ise dönme ekseni* $(1,1,1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inverisyonudur.*

*35*$f(A_0) = A_5$, $f(A_4) = A_2$, $f(A_6) = A_{24}$, $f(A_{10}) = A_{25}$, $f(A_{22}) = A_{16}$ *ve* $f(A_{26}) = A_{17}$ *ise dönme ekseni* $(-1,1,1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

36.$f(A_0) = A_2$, $f(A_4) = A_1$, $f(A_6) = A_{15}$, $f(A_{10}) = A_{17}$, $f(A_{22}) = A_7$ *ve* $f(A_{26}) = A_9$ *ise dönme ekseni* $(-1,1,1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

37.$f(A_0) = A_4$, $f(A_4) = A_2$, $f(A_6) = A_{23}$, $f(A_{10}) = A_{22}$, $f(A_{22}) = A_{15}$ *ve* $f(A_{26}) = A_{14}$ *ise dönme ekseni* $(1,-1,1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*38*$f(A_0) = A_3$, $f(A_4) = A_0$, $f(A_6) = A_{18}$, $f(A_{10}) = A_{20}$, $f(A_{22}) = A_{10}$ *ve* $f(A_{26}) = A_{12}$ *ise dönme ekseni* $(1,-1,1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

39.$f(A_0) = A_4$, $f(A_4) = A_3$, $f(A_6) = A_{26}$, $f(A_{10}) = A_{27}$, $f(A_{22}) = A_{18}$ *ve* $f(A_{26}) = A_{19}$ *ise dönme ekseni* $(1,1,$-1$)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

40.$f(A_0) = A_2$, $f(A_4) = A_0$, $f(A_6) = A_{16}$, $f(A_{10}) = A_{14}$, $f(A_{22}) = A_8$ *ve* $f(A_{26}) = A_6$ *ise dönme ekseni* $(1,1,$-1$)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

41. $f(A_0) = A_5$, $f(A_4) = A_0$, $f(A_6) = A_{28}$, $f(A_{10}) = A_{24}$, $f(A_{22}) = A_{12}$ *ve* $f(A_{26}) = A_8$ *ise* $\Delta : x = 0$ *ve dönme ekseni* $(1,0,0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_\Delta r_{\frac{\pi}{2}}$ *dönme yansımasıdır.*

42. $f(A_0) = A_4$, $f(A_4) = A_1$, $f(A_6) = A_{27}$, $f(A_{10}) = A_{23}$, $f(A_{22}) = A_{11}$ *ve* $f(A_{26}) = A_7$ *ise* $\Delta : x = 0$ *ve dönme ekseni* $(1,0,0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_\Delta r_{\frac{3\pi}{2}}$*dönme yansımasıdır.*

43. $f(A_0) = A_2$, $f(A_4) = A_5$, $f(A_6) = A_{17}$, $f(A_{10}) = A_{16}$, $f(A_{22}) = A_{25}$ *ve* $f(A_{26}) = A_{24}$ *ise* $\Delta : y = 0$ *ve dönme ekseni* $(0,1,0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_\Delta r_{\frac{\pi}{2}}$ *dönme yansımasıdır.*

44. $f(A_0) = A_3$, $f(A_4) = A_5$, $f(A_6) = A_{20}$, $f(A_{10}) = A_{21}$, $f(A_{22}) = A_{28}$ *ve* $f(A_{26}) = A_{29}$ *ise* $\Delta : y = 0$ *ve dönme ekseni* $(0,1,0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_\Delta r_{\frac{3\pi}{2}}$ *dönme yansımasıdır.*

45. $f(A_0) = A_1$, $f(A_4) = A_3$, $f(A_6) = A_{11}$, $f(A_{10}) = A_{13}$, $f(A_{22}) = A_{19}$ *ve* $f(A_{26}) = A_{21}$ *ise* $\Delta : z = 0$ *ve dönme ekseni* $(0,0,1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_\Delta r_{\frac{\pi}{2}}$ *dönme yansımasıdır.*

46.$f(A_0) = A_1$, $f(A_4) = A_2$, $f(A_6) = A_9$, $f(A_{10}) = A_7$, $f(A_{22}) = A_{17}$ *ve* $f(A_{26}) = A_{15}$ *ise* $\Delta : z = 0$ *ve dönme ekseni* $(0,0,1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_\Delta r_{\frac{3\pi}{2}}$*dönme yansımasıdır.*

47. $f(A_0) = A_0$, $f(A_4) = A_4$, $f(A_6) = A_6$, $f(A_{10}) = A_{10}$, $f(A_{22}) = A_{22}$ *ve* $f(A_{26}) = A_{26}$ *ise* f *birim dönüşümdür.*

48. $f(A_0) = A_1$, $f(A_4) = A_5$, $f(A_6) = A_{13}$, $f(A_{10}) = A_9$, $f(A_{22}) = A_{29}$ *ve* $f(A_{26}) = A_{25}$ *ise* f *inversiyondur.*

Buna göre orijini koruyan f *izometrisi* $G(CO)$ *nin bir elemanıdır. Bir başka deyişle chamfered octahedron uzaklığını koruyan Öklidyen izometriler dışında bir izometri yoktur.*

Teorem 5.1 $f : \mathbb{R}^3_{CO} \to \mathbb{R}^3_{CO}$ *dönüşümü bir izometri olsun.* $f = T_A \circ g$ *olacak şekilde bir tek* $T_A \in T(3)$ *ve* $g \in G(CO)$ *vardır.*

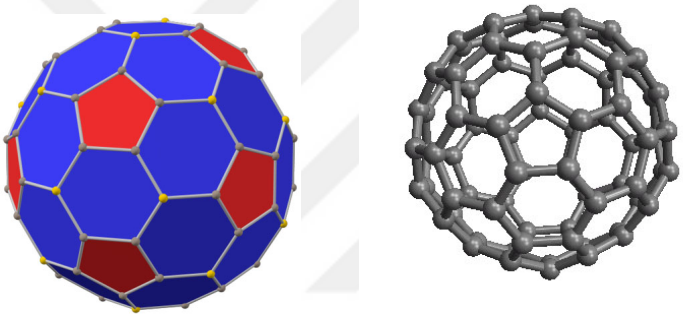
İspat $A = (a_1, a_2, a_3)$ *olmak üzere* $f(O) = A$ *olsun. Bu taktirde* $g = T_{-A} \circ f$ *olacak şekilde tanımlı* g *dönüşümü bir izometridir ve* $g(O) = O$ *olur. Böylece önerme 5.9 dan dolayı* $g \in G(CO)$ *ve* $f = T_A \circ g$ *olur. İspatın tekliği aşikardır.*

Buna göre chamfered octahedron metriği ile donatılmış analitik 3-uzayın izometrilerinin grubu chamfered octahedronun (Öklidyen) simetri grubu olan O_h ile 3-boyutlu analitik uzayın tüm ötelemelerinin grubu olan $T(3)$ ün yarı-direkt çarpımıdır. Yani $\mathbb{R}^3_{CO}$ nin tüm izometrilerinin kümesi $T(3).G(CO)$ dir.

6. CHAMFERED DODECAHEDRON UZAYI

6.1 Chamfered Dodecahedron Metriği ve Özellikleri

Chamfered dodecahedron, Platonik cisimlerden olan dodecahedrona chamfered işlemi uygulanması sonucunda elde edilen bir konveks çokyüzlüdür. Chamfered dodecahedron 80 köşe 120 kenar ve 30 u altıgen 12 tanesi düzgün beşgen olmak üzere toplamda 42 adet yüze sahiptir. Altıgen yüzleri oluşturan altıgenlerin kenar uzunlukları eş olmasına rağmen iç açıları eş olmadığından düzgün altıgen değillerdir. (Şekil6.1).



Şekil 6.1 Chamfered Dodecahedron ve Fullerene C_{80}

Chamfered dodecahedron fullerene C_{80} in şeklidir. Bazen bu şekil, icodahedral simetrisini tanımlamak ve diğer az simetrik 80-köşeli fullerenelerden ayırmak için $C_{80}(I_h)$ olarak adlandırılır. Deza, Deza & Grishukhin (1998) tarafından L_1 uzayında izometrik olarak gömülebilen bir iskelete sahip olarak bulunan sadece dört fulleren biridir. Ayrıca chamfered dodecahedron 120 tane simetriye sahip olup, simetri grubu I_h ile gösterilir.

Bu bölümde, birim küresi chamfered dodecahedron olan uzaklık fonksiyonu d_{CD} ile gösterilir ve bu uzaklık fonksiyonunun metrik aksiyomların sapladığını ve bazı özellikleri verilecektir.

Tanım 6.1 $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ *ve* $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\mathbb{R}^3$*de iki farklı nokta olsun. Buna göre*

$$\begin{aligned} u &= \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}, \\ v &= \text{mid}\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}, \\ w &= \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\} \end{aligned}$$

olarak tanımlasın. Ayrıca $X \to Y \to Z \to X$ *şeklindeki yönlendirmeye pozitif(+) yön,* $Z \to Y \to X \to Z$ *şeklindeki yönlendirmeye negatif(−) yön denilecektir. Buna göre* u^+ *ve* u^- *ile* u *da göre ilgili yöndeki bir sonraki terim gösterilecektir. Örneğin* $u = |y_1 - y_2|$ *ise* $u^+ = |z_1 - z_2|$ *ve* $u^- = |x_1 - x_2|$ *olacaktır.*

Tanım 6.2 $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ *ve* $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ *analitik 3-boyutlu uzayda iki farklı nokta olsun. Burada* $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ *altın oran ve* $\alpha = \frac{13\sqrt{5}-5}{82} + \frac{\left(7\sqrt{5}-9\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{205}$, $\beta = \varphi\alpha$ *olmak üzere* $d_{CD} : \mathbb{R}^3 x\, \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$,

$$d_{CD}(P_1, P_2) = \max\left\{\frac{\varphi}{2}u + \frac{1}{2}u^- + \frac{1}{2\varphi}u^+, u, \beta u + \alpha u^+\right\}$$

şeklinde tanımlanan d_{CD} *fonksiyonuna* P_1 *ve* P_2 *noktaları arasındaki chamfered dodecahedron uzaklık fonksiyonu adı verilir.*

Yardımcı Teorem 6.1 P_1=(x_1, y_1, z_1) *ve* P_2=(x_2, y_2, z_2) $\mathbb{R}^3$*de iki farklı nokta olsun. Bu takdirde,*

$$\begin{aligned} &d_{CD}(P_1, P_2) \geq \tfrac{\varphi}{2}u + \tfrac{1}{2}u^- + \tfrac{1}{2\varphi}u^+ \\ &d_{CD}(P_1, P_2) \geq u \\ &d_{CD}(P_1, P_2) \geq \beta u + \alpha u^+ \end{aligned}$$

olur.

İspat *Maksimum fonksiyonun tanımından ispat aşikardır.*

Önerme 6.1 $\mathbb{R}^3$ *de* d_{CD} *uzaklık fonksiyonu metriktir ve bu metrikle donatılmış uzayın birim küresi chamfered dodecahedrondur.*

İspat $d_{CD} : \mathbb{R}^3 x \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *uzaklık fonksiyonu ve* $P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ *ve* $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$, $\mathbb{R}^3$*de üç farklı nokta olsun. Bütün* $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^3$ *için* d_{CD} *aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa* $\mathbb{R}^3$ *de bir metriktir.*

M1) $d_{CD}(P_1, P_2) \geq 0$ *ve* $d_{CD}(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$
M2) $d_{CD}(P_1, P_2) = d_{CD}(P_2, P_1)$
M3) $d_{CD}(P_1, P_3) \leq d_{CD}(P_1, P_2) + d_{CD}(P_2, P_3)$.

M1) *Mutlak değer daima negatif olmayan değerler üretti ğinden mutlak değerli ifadelerin pozitif ifadelerle çarpılıp toplanması sonucu negatif olmayan değerler elde edilir. Açıkça* $d_{CD}(P_1,P_2) \geq 0$. *Yani* d_{CD} *pozitif tanımlıdır. Eğer,* $d_{CD}(P_1,P_2)=0$ *ise* $\varphi u + \frac{1}{2}u^- + \frac{1}{4\varphi}u^+ = 0,\ u = 0$ *ve* $\alpha u + \beta u^+ = 0$ *olacağından dolayı* $|x_1-x_2|=0, |y_1-y_2|=0, |z_1-z_2|=0 \Longrightarrow x_1=x_2, y_1=y_2, z_1=z_2 \Longrightarrow P_1=P_2$ *olur.Tersine* $P_1=P_2 \Longrightarrow |x_1-x_2|=0, |y_1-y_2|=0, |z_1-z_2|=0 \Longrightarrow d_{CD}(P_1,P_2)=0$ *bulunur.*

M2) *Mutlak değerden dolayı* $|x_1-x_2|=|x_2-x_1|$, $|y_1-y_2|=|y_2-y_1|$, $|z_1-z_2|=|z_2-z_1|$ *olduğundan açıkça,* $d_{CD}(P_1,P_2)=d_{CD}(P_2,P_1)$ *dir. Yani* d_{CD} *simetriktir.*

M3) $P_1=(x_1,y_1,z_1)$, $P_2=(x_2,y_2,z_2)$ *ve* $P_3=(x_3,y_3,z_3) \in \mathbb{R}^3$ *olsun.* $X_{13}=|x_1-x_3|$, $Y_{13}=|y_1-y_3|$, $Z_{13}=|z_1-z_3|$, $X_{12}=|x_1-x_2|$, $Y_{12}=|y_1-y_2|$, $Z_{12}=|z_1-z_2|$, $X_{23}=|x_3-x_2|$, $Y_{23}=|y_3-y_2|$, $Z_{23}=|z_3-z_2|$ *olmak üzere ve de* u_{ij}, v_{ij}, w_{ij} *ile* $\{X_{ij},Y_{ij},Z_{ij}\}$ *kümesinin sırasıyla maksimum, orta ve minimum değerlerini gösterirse, ayrıca* U_{ij}, V_{ij} *ve* W_{ij} *de ilgili ifadedeki* X_{ij}, Y_{ij} *veya* Z_{ij} *yerine sırasıyla* $X_{ik}+X_{kj}$, $Y_{ik}+Y_{kj}$ *veya* $Z_{ik}+Z_{kj}$ *alınması ile elde edilen ifadeyi işaret etmek üzere*

$$\begin{aligned} d_{CD}(P_1,P_3) &= \max\left\{\tfrac{\varphi}{2}u_{13}+\tfrac{1}{2}u_{13}^- + \tfrac{1}{2\varphi}u_{13}^+, u_{13}, \beta u_{13}+\alpha u_{13}^+\right\} \\ &\leq \max\left\{\begin{array}{c} \frac{\varphi}{2}(U_{12}+U_{23}) + \frac{1}{2}\left(U_{12}^- + U_{23}^-\right) + \frac{1}{2\varphi}\left(U_{12}^+ + U_{23}^+\right), \\ (U_{12}+U_{23}), \beta(U_{12}+U_{23}) + \alpha\left(U_{12}^+ + U_{23}^+\right) \end{array}\right\} \\ &\leq \begin{array}{c} \max\left\{\frac{\varphi}{2}U_{12}+\frac{1}{2}U_{12}^- + \frac{1}{2\varphi}U_{12}^+, U_{12}, \beta U_{12}+\alpha U_{12}^+\right\} + \\ \max\left\{\frac{\varphi}{2}U_{23}+\frac{1}{2}U_{23}^- + \frac{1}{2\varphi}U_{23}^+, U_{23}, \beta U_{23}+\alpha U_{23}^+\right\} \end{array} \\ &= X \end{aligned}$$

dir. Burada yardımcı teorem 6.1 den dolayı

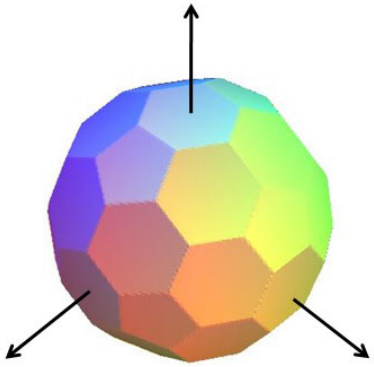
$$\begin{aligned} d_{CC}(P_1,P_2) &\geq \max\left\{\tfrac{\varphi}{2}U_{12}+\tfrac{1}{2}U_{12}^- + \tfrac{1}{2\varphi}U_{12}^+, U_{12}, \beta U_{12}+\alpha U_{12}^+\right\} \\ d_{CD}(P_2,P_3) &\geq \max\left\{\tfrac{\varphi}{2}U_{23}+\tfrac{1}{2}U_{23}^- + \tfrac{1}{2\varphi}U_{23}^+, U_{23}, \beta U_{23}+\alpha U_{23}^+\right\} \end{aligned}$$

olur. O halde $X \leq d_{CD}(P_1,P_2) + d_{CD}(P_2,P_3)$ *bulunur. Buna göre* $d_{CD}(P_1,P_3) \leq d_{CD}(P_1,P_2) + d_{CD}(P_2,P_3)$ *elde edilir. Yani chamfered dodecahedron uzaklık fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar.*

Sonuç olarak chamfered dodecahedron uzaklık fonksiyonu metriktir. Ayrıca bu metrikle döşenmiş analitik 3-uzayda orijinden 1 birim chamfered dodecahedron uzaklığındaki noktaların kümesi;

$$S_{CD} = \left\{(x,y,z) : \max\left\{\frac{\varphi}{2}\varphi u + \frac{1}{2}u^- + \frac{1}{2\varphi}u^+, u, \beta u + \alpha u^+\right\} = 1\right\}$$

olup bu noktaların geometrik yeri şekil6.2 de görüldüğü gibi chamfered dodecahedrondur.



Şekil 6.2 Chamfered dodecahedronun koordinat sistemine yerleştirilmesi

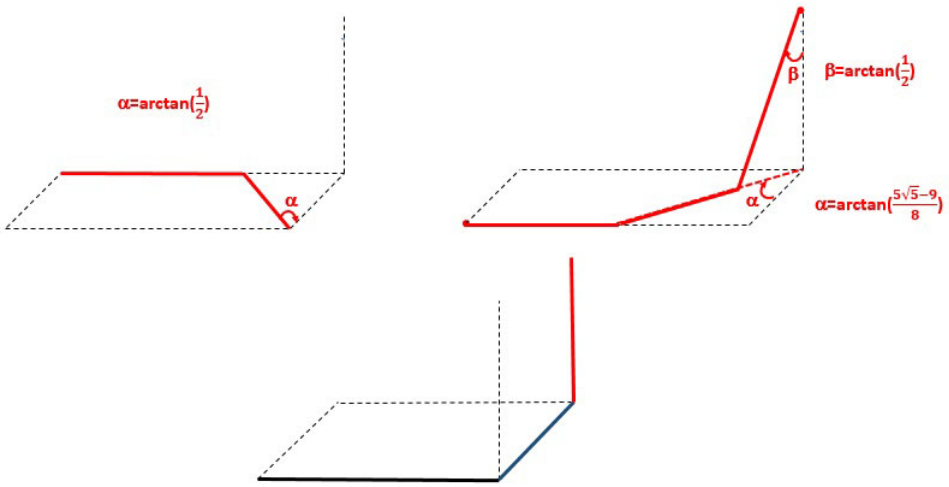
Chamfered dodecahedron uzaklık fonksiyonu göz önüne alındığında geometrik olarak P_1 noktasından P_2 noktasına olan yol için 3 farklı ihtimal vardır. Buna göre, bu yollar aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

(i) Koordinat eksenlerinden birine paralel olan bir doğru parçasıdır.

(ii) Biri koordinat eksenlerinden birine paralel diğeri bir diğer koordinat ekseni ile $\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ radyanlık açı yapan iki doğru parçasının birleşimidir.

(iii) Biri koordinat eksenlerinden birine paralel diğerleri diğer koordinat eksenleri ile $\arctan\left(\frac{5\sqrt{5}-9}{8}\right)$ ve $\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ radyanlık açı yapan üç doğru parçasının birleşimidir.

Böylece P_1 ve P_2 noktaları arasındaki chamfered dodecahedron uzaklığı (i) deki yol için bahsedilen doğru parçasının Öklidyen uzunluğu, (ii) deki yol için bahsedilen iki doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamının β katı, (iii) deki yol için bahsedilen üç doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamının φ katıdır (Şekil6.3)



Şekil 6.3 Chamfered dodecahedron yolu

Sonuç 6.1 $u = \max\{|x-x_0|, |y-y_0|, |z-z_0|\}$, $v = \text{mid}\{|x-x_0|, |y-y_0|, |z-z_0|\}$ *ve* $w = \min\{|x-x_0|, |y-y_0|, |z-z_0|\}$ *ve ayrıca* $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ *altın oran ve* $\alpha = \frac{13\sqrt{5}-5}{82} + \frac{(7\sqrt{5}-9)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{205}$, $\beta = \varphi\alpha$ *olmak üzere* $\mathbb{R}^3_{CD}$ *de* (x_0, y_0, z_0) *merkezli ve* r *yarıçaplı küre*

$$\max\left\{\frac{\varphi}{2}u + \frac{1}{2}u^- + \frac{1}{2\varphi}u^+, u, \beta u + \alpha u^+\right\} = r$$

denklemi ile ifade edilen köşe noktaları $(0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}r, r)$, $(r, 0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}r)$, $(\frac{3-\sqrt{5}}{2}r, r, 0)$,
$\left(\left(2+2\sqrt{5}-\frac{2\sqrt{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}\right)r, \left(\frac{(5-\sqrt{5})\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}-\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)r, r\right)$,
$\left(r, \left(2+2\sqrt{5}-\frac{2\sqrt{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}\right)r, \left(\frac{(5-\sqrt{5})\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}-\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)r\right)$,
$\left(\left(\frac{(5-\sqrt{5})\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}-\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)r, r, \left(2+2\sqrt{5}-\frac{2\sqrt{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}\right)r\right)$,
$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}r, \left(\frac{2\sqrt{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}-\frac{5+3\sqrt{5}}{2}\right)r, \left(\frac{7+\sqrt{5}}{2}+\frac{(\sqrt{5}-5)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}\right)r\right)$,
$\left(\left(\frac{7+\sqrt{5}}{2}+\frac{(\sqrt{5}-5)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}\right)r, \frac{\sqrt{5}-1}{2}r, \left(\frac{2\sqrt{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}-\frac{5+3\sqrt{5}}{2}\right)r\right)$,
$\left(\left(\frac{2\sqrt{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}-\frac{5+3\sqrt{5}}{2}\right)r, \left(\frac{7+\sqrt{5}}{2}+\frac{(\sqrt{5}-5)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}\right)r, \frac{\sqrt{5}-1}{2}r\right)$,
$\left(0, \left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}-\frac{2\sqrt{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}\right)r, \left(\frac{(5-\sqrt{5})\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}-3\right)r\right)$,
$\left(\left(\frac{(5-\sqrt{5})\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}-3\right)r, 0, \left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}-\frac{2\sqrt{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}\right)r\right)$,
$\left(\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}-\frac{2\sqrt{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}\right)r, \left(\frac{(5-\sqrt{5})\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}-3\right)r, 0\right)$ *ve* $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}r, \frac{\sqrt{5}-1}{2}r, \frac{\sqrt{5}-1}{2}r\right)$
noktalarının herbir bileşeninin $+/-$ *işaret değişikliklerinin* (x_0, y_0, z_0) *kadar ötelenmişlerinden oluşan 42 yüzlü bir çokyüzlü olan chamfered dodecahedrondur.*

Bu bölümün geri kalan kısmında sıkça kullanılacağından dolayı merkezil birim kürenin köşe noktaları aşağıdaki şekilde isimlendirilmiştir. Burada $k_0 = \frac{2\sqrt{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5} - \frac{5+3\sqrt{5}}{2}$, $k_1 = 2+2\sqrt{5} - \frac{2\sqrt{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$, $k_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $k_3 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $k_4 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2} - \frac{2\sqrt{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$, $k_5 = \frac{(5-\sqrt{5})\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5} - 3$, $k_6 = \frac{7+\sqrt{5}}{2} + \frac{(\sqrt{5}-5)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$, $k_7 = 1$ ve $k_8 = \frac{(5-\sqrt{5})\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5} - \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere

$A_0 = (0, k_2, k_7)\,, A_1 = (0, k_2, -k_7)\,, A_2 = (0, -k_2, k_7)\,, A_3 = (0, -k_2, -k_7)\,,$
$A_4 = (k_7, 0, k_2)\,, A_5 = (k_7, 0, -k_2)\,, A_6 = (-k_7, 0, k_2)\,, A_7 = (-k_7, 0, -k_2)\,,$
$A_8 = (k_2, k_7, 0)\,, A_9 = (k_2, -k_7, 0)\,, A_{10} = (-k_2, k_7, 0)\,, A_{11} = (-k_2, -k_7, 0)\,,$
$A_{12} = (k_1, k_8, k_7)\,, A_{13} = (k_1, k_8, -k_7)\,, A_{14} = (k_1, -k_8, k_7)\,, A_{15} = (k_1, -k_8, -k_7)\,,$
$A_{16} = (-k_1, k_8, k_7)\,, A_{17} = (-k_1, k_8, -k_7)\,, A_{18} = (-k_1, -k_8, k_7)\,, A_{19} = (-k_1, -k_8, -k_7)\,,$
$A_{20} = (k_7, k_1, k_8)\,, A_{21} = (k_7, k_1, -k_8)\,, A_{22} = (k_7, -k_1, k_8)\,, A_{23} = (k_7, -k_1, -k_8)\,,$
$A_{24} = (-k_7, k_1, k_8)\,, A_{25} = (-k_7, k_1, -k_8)\,, A_{26} = (-k_7, -k_1, k_8)\,, A_{27} = (-k_7, -k_1, -k_8)\,,$
$A_{28} = (k_8, k_7, k_1)\,, A_{29} = (k_8, k_7, -k_1)\,, A_{30} = (k_8, -k_7, k_1)\,, A_{31} = (k_8, -k_7, -k_1)\,,$
$A_{32} = (-k_8, k_7, k_1)\,, A_{33} = (-k_8, k_7, -k_1)\,, A_{34} = (-k_8, -k_7, k_1)\,, A_{35} = (-k_8, -k_7, -k_1)\,,$
$A_{36} = (k_3, k_0, k_6)\,, A_{37} = (k_3, k_0, -k_6)\,, A_{38} = (k_3, -k_0, k_6)\,, A_{39} = (k_3, -k_0, -k_6)\,,$
$A_{40} = (-k_3, k_0, k_6)\,, A_{41} = (-k_3, k_0, -k_6)\,, A_{42} = (-k_3, -k_0, k_6)\,, A_{43} = (-k_3, -k_0, -k_6)\,,$
$A_{44} = (k_6, k_3, k_0)\,, A_{45} = (k_6, k_3, -k_0)\,, A_{46} = (k_6, -k_3, k_0)\,, A_{47} = (k_6, -k_3, -k_0)\,,$
$A_{48} = (-k_6, k_3, k_0)\,, A_{49} = (-k_6, k_3, -k_0)\,, A_{50} = (-k_6, -k_3, k_0)\,, A_{51} = (-k_6, -k_3, -k_0)\,,$
$A_{52} = (k_0, k_6, k_3)\,, A_{53} = (k_0, k_6, -k_3)\,, A_{54} = (k_0, -k_6, k_3)\,, A_{55} = (k_0, -k_6, -k_3)\,,$
$A_{56} = (-k_0, k_6, k_3)\,, A_{57} = (-k_0, k_6, -k_3)\,, A_{58} = (-k_0, -k_6, k_3)\,, A_{59} = (-k_0, -k_6, -k_3)\,,$
$A_{60} = (0, k_4, k_5)\,, A_{61} = (0, k_4, -k_5)\,. A_{62} = (0, -k_4, k_5)\,, A_{63} = (0, -k_4, -k_5)\,,$
$A_{64} = (k_5, 0, k_4)\, A_{65} = (k_5, 0, -k_4)\,, A_{66} = (-k_5, 0, k_4)\,, A_{67} = (-k_5, 0, -k_4)$
$A_{68} = (k_4, k_5, 0)\,, A_{69} = (k_4, -k_5, 0)\,, A_{70} = (-k_4, k_5, 0)\, A_{71} = (-k_4, -k_5, 0)\,,$
$A_{72} = (k_3, k_3, k_3)\,, A_{73} = (k_3, k_3, -k_3)\, A_{74} = (k_3, -k_3, k_3)\,, A_{75} = (k_3, -k_3, -k_3)\,,$
$A_{76} = (-k_3, k_3, k_3)\, A_{77} = (-k_3, k_3, -k_3)\,, A_{78} = (-k_3, -k_3, k_3)\,, A_{79} = (-k_3, -k_3, -k_3)\,.$

Aşağıdaki önermede $\mathbb{R}^3$ deki noktalar arasındaki Öklidyen ve chamfered dodecahedron uzaklıkları arasındaki geçiş bağıntısını ifade etmektedir.

Önerme 6.2 *$\mathbb{R}^3$ de P_1 ve P_2 noktalarından geçen doğru l olsun. E ğer l doğrusunun doğrultu vektörü (p, q, r), $u = \max\{|p|, |q|, |r|\}$, $v = \text{mid}\{|p|, |q|, |r|\}$ ve $w = \min\{|p|, |q|, |r|\}$ ve ayrıca $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ altın oran ve $\alpha = \frac{13\sqrt{5}-5}{82} + \frac{\left(7\sqrt{5}-9\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{205}$, $\beta = \varphi\alpha$ olmak üzere*

$$\rho_{P_1P_2} = \max\left\{\frac{\varphi}{2}u + \frac{1}{2}u^- + \frac{1}{2\varphi}u^+, u, \beta u + \alpha u^+\right\}$$

ve $\mu_{P_1P_2} = \frac{\rho_{P_1P_2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$ ise $d_{CD}(P_1, P_2) = \mu_{P_1P_2} d_E(P_1, P_2)$ olur.

İspat *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\mathbb{R}^3$ deki herhangi iki nokta olsun. P_1 ve P_2 den geçen doğru l ise*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \lambda$$

olur. l doğrusunun doğrultu vektörü (p,q,r) olduğ undan $(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1) = \lambda(p,q,r)$ dir. Buna göre $d_{CD}(P_1,P_2) = \lambda\rho_{P_1P_2}$ ve $d_E(P_1,P_2) = \lambda\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ olduğ undan dolayı $\frac{d_{CD}(P_1,P_2)}{\rho_{P_1P_2}} = \frac{d_E(P_1,P_2)}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$ bulunur. Bu ise önermenin ifadesindeki sonucu verir.

Yukarıdaki önerme herhangi bir doğru boyunca $d_{CD}(P_1,P_2)$ uzaklığının aynı doğru boyunca olan Öklidyen uzaklığın pozitif katı olduğu gösterir. Buna göre aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 6.2 *$\mathbb{R}^3$de A, B, X doğrudaş üç farklı nokta ise*

$$d_E(A,X) = d_E(B,X) \iff d_{CD}(A,X) = d_{CD}(B,X)$$

Sonuç 6.3 *3-boyutlu uzayda A, B, X doğrudaş üç farklı nokta ise*

$$d_{CD}(A,X)/d_{CD}(B,X) = d_E(A,X)/d_E(B,X)$$

olur.

Yani doğru boyunca olan d_E, d_{CD} uzaklıklarının oranı aynıdır.

6.2 Chamfered Dodecahedron İzometri Grubu

Chamfered dodecahedron 120 tane simetriye sahip olup, simetri grubu I_h ile gösterilir. Bu kısımda d_{CD} metriği ile donatılmış $\mathbb{R}^3$ ün izometri grubu araştırılacaktır. Bunun için öncelikle hangi Öklidyen izometrilerin chamfered dodecahedron uzaklığını koruduğu tespit edilecek daha sonra ise bu izometrilerden başka izometrilerin olmadığı gösterilecektir. $\alpha : \mathbb{R}^3_{CD} \to \mathbb{R}^3_{CD}$ dönüşüm olmak üzere her $X, Y \in \mathbb{R}^3_{CD}$ için

$$d_{CD}(X,Y) = d_{CD}(\alpha(X), \alpha(Y))$$

ise α dönüşümü $\mathbb{R}^3_{CD}$ de bir izometridir.

Aşağıda ifade edilen önermeler ile hangi Öklidyen izometrilerin chamfered dodecahedron uzayında da izometri oldukları verilmektedir.

Önerme 6.3 *$\mathbb{R}^3$de her Öklidyen öteleme $\mathbb{R}^3_{CD}$ ün bir izometrisidir.*

İspat $\alpha=(a_1,a_2,a_3)$, $X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ *olmak üzere* $T_\alpha:\mathbb{R}^3_{CD}\to\mathbb{R}^3_{CD}$, $T_\alpha(X)=\alpha+X$ *olacak şekilde reel uzayda bir öteleme olsun.* $P_1=(x_1,y_1,z_1)$, $P_2=(x_2,y_2,z_2)\in\mathbb{R}^3_{CD}$ *için* $X_T=|a_1+x_1-a_1-x_2|$, $Y_T=|a_2+y_1-a_2-y_2|$, $Z_T=|a_3+z_1-a_3-z_2|$ *ve* $u_T=\max\{X_T,Y_T,Z_T\}$, $v_T=\text{mid}\{X_T,Y_T,Z_T\}$, $w_T=\min\{X_T,Y_T,Z_T\}$ *ve ayrıca* $\varphi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ *altın oran ve* $\alpha=\frac{13\sqrt{5}-5}{82}+\frac{\left(7\sqrt{5}-9\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{205}$, $\beta=\varphi\alpha$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} d_{CD}(T_A(P_1),T_A(P_2)) &= \max\left\{\frac{\varphi}{2}u_T+\frac{1}{2}u_T^-+\frac{1}{2\varphi}u_T^+,u_T,\beta u_T+\alpha u_T^+\right\} \\ &= \max\left\{\frac{\varphi}{2}u+\frac{1}{2}u^-+\frac{1}{2\varphi}u^+,u,\beta u+\alpha u^+\right\} \\ &= d_{CD}(P_1,P_2) \end{aligned}$$

olur. Bundan dolayı T_α *bir izometridir.*

Yukarıdaki önerme gereğince $\mathbb{R}^3_{CD}$ uzayında dönme ve yansımaları bulmak için orijinden geçen düzlemleri düşünmek yeterli olacaktır. Aşağıdaki önermede $\mathbb{R}^3_{CD}$ de uzaklığı koruyan yansımalar ifade edilecektir.

Önerme 6.4 $\mathbb{R}^3_{CD}$ *de* $\Delta=ax+by+cz=0$ *düzlemine göre yansımanın izometri olması için gerek ve yeter koşul düzlemin doğrultu vektörü* (a,b,c) *nin*

$$D=\{(\pm1,\varphi,\pm(1-\varphi)),(\pm(1-\varphi),\pm1,\varphi),(\varphi,\pm(1-\varphi),\pm1),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

elemanlarına paralel olmasıdır.

İspat $\Delta: ax+by+cz=0$ *birim normali* (a,b,c) *olan düzlem olmak üzere* $\sigma_\Delta:\mathbb{R}^3_{CD}\to\mathbb{R}^3_{CD}$ *Öklidyen yansıma,*

$$\sigma_\Delta(x,y,z)=((1-2a^2)x-2aby-2acz,-2abx+(1-2b^2)y-2bcz,-2acx-2bcy+(1-2c^2)z)$$

şeklinde tanımlanır. $\mathbb{R}^3_{CD}$ *ün taban vektörlerini koruyan yansıma izometri olacağından, chamfered dodecahedronun köşe noktalarından olan,* $\mathbb{R}^3_{CD}$ *ün* $A_0=\left(0,\frac{3-\sqrt{5}}{2},1\right)$, $A_{72}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, $A_{52}=\left(\frac{2\sqrt{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}-\frac{5+3\sqrt{5}}{2},\frac{7+\sqrt{5}}{2}+\frac{\left(\sqrt{5}-5\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5},\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ *tabanını koruyan yansımaları tespit etmek izometrileri bulmak için yeterli olacaktır. Açıkça* $d_{CD}(O,A_0)=d_{CD}(O,A_{72})=d_{CD}(O,A_{52})=1$ *olmalıdır. Eğer yansıma* d_{CD} *uzaklığını koruyor ise taban vektörlerinin yansıma altındaki görüntüleri için uzaklık korunmalıdır. Yani* $d_{CD}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(A_0))=d_{CD}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(A_{72}))=d_{CD}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(A_{52}))=1$ *olmalıdır. Böylece,* $X_1=\left|\left(\sqrt{5}\text{-}3\right)ab\text{-}2ac\right|$, $Y_1=\left|(1\text{-}2b^2)\,\frac{3\text{-}\sqrt{5}}{2}\text{-}2bc\right|$, $Z_1=\left|1\text{-}2c^2\text{-}\left(3\text{-}\sqrt{5}\right)bc\right|$, $X_2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\,|\text{-}1+2a^2+2ab+2ac|$, $Y_2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\,|2ab\text{-}1+2b^2+2bc|$, $Z_2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\,|2ac+2bc\text{-}1+2c^2|$,

$$X_3 = \left(\frac{2\sqrt{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{25} - \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right)$$
$$\left|\sqrt{25+10\sqrt{5}}\left((-2+2\sqrt{5})ab + (6-2\sqrt{5})ac\right) - 5 + 10ac + 10a^2 + 10ab\right|,$$
$$Y_3 = \left(\frac{2\sqrt{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{25} - \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right)$$
$$\left|\sqrt{25+10\sqrt{5}}\left(1-\sqrt{5} + (-2+2\sqrt{5})b^2 + (6-2\sqrt{5})bc\right) - 5 + 10bc + 10b^2 + 10ab\right|,$$
$$Z_3 = \left(\frac{2\sqrt{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{25} - \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right)$$
$$\left|\sqrt{25+10\sqrt{5}}\left(-3+\sqrt{5} + (6-2\sqrt{5})c^2 + (2\sqrt{5}-2)bc\right) - 5 + 10ac + 10bc + 10c^2\right|$$

olmak üzere $i = 1,2,3$ *için* $u_i = \max\{X_i, Y_i, Z_i\}$, *ayrıca* $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ *altın oran ve* $\alpha = \frac{13\sqrt{5}-5}{82} + \frac{\left(7\sqrt{5}-9\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{205}$, $\beta = \varphi\alpha$ *denilirse*

$$d_{CD}(\sigma_\Delta(O), \sigma_\Delta(A_0)) = \max\left\{\tfrac{\varphi}{2}u_1 + \tfrac{1}{2}u_1^- + \tfrac{1}{2\varphi}u_1^+, u_1, \beta u_1 + \alpha u_1^+\right\} = 1$$
$$d_{CD}(\sigma_\Delta(O), \sigma_\Delta(A_{72})) = \max\left\{\tfrac{\varphi}{2}u_2 + \tfrac{1}{2}u_2^- + \tfrac{1}{2\varphi}u_2^+, u_2, \beta u_2 + \alpha u_2^+\right\} = 1$$
$$d_{CD}(\sigma_\Delta(O), \sigma_\Delta(A_{52})) = \max\left\{\tfrac{\varphi}{2}u_3 + \tfrac{1}{2}u_3^- + \tfrac{1}{2\varphi}u_3^+, u_3, \beta u_3 + \alpha u_3^+\right\} = 1$$

denklem sistemi elde edilir. Denklem sistemi çözülürse, $(\pm 1, \varphi, \pm(1-\varphi))$, $(\pm(1-\varphi), \pm 1, \varphi)$, $(\varphi, \pm(1-\varphi), \pm 1)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ *çözümleri elde edilir.*

Tersine normal vektörleri D *kümesindeki vektörlere paralel olacak şekildeki düzlemlere göre yansımaların uzaklığ ı koruduğu gösterilmelidir.* $\sigma_\Delta(X) = Y$ *olacak şekilde* X *ve* Y *noktaları için* (p_1, q_1, r_1) *ve* (p_2, q_2, r_2), OX *ve* OY *vektörlerinin yön vektörleri olsun.* $d_{CD}(O, X) = d_{CD}(O, Y)$ *olduğunu göstermek için önerme 6.2 den* $\mu_{OX} = \mu_{OY}$ *olduğunu göstermek yeterlidir.* (p_1, q_1, r_1) *vektörünün düzleme göre yansıma altındaki görüntüleri bulunursa;*

1. Durum: $1x + \varphi y + (1-\varphi)z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1, q_1, r_1) = (\tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 - \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}r_1, \tfrac{-1-\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1}{2}r_1, \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1}{2}q_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1),$$

2. Durum: $1x + \varphi y + -(1-\varphi)z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1, q_1, r_1) = (\tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{-1-\sqrt{5}}{4}q_1 - \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1, \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1 - \tfrac{1}{2}r_1, \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1 - \tfrac{1}{2}q_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1),$$

3.Durum: -$1x + \varphi y + (1-\varphi)z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1, q_1, r_1) = (\tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1, \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1}{2}r_1, \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1}{2}q_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1),$$

4.Durum: -$1x + \varphi y + -(1-\varphi)z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1, q_1, r_1) = (\tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}r_1, \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1 - \tfrac{1}{2}r_1, \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1 - \tfrac{1}{2}q_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1),$$

5.Durum: (1-φ)$x + 1y + \varphi z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1, q_1, r_1) = (\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 - \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1}{2}r_1, \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1}{2}q_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1, \tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{-1-\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1),$$

6.Durum: -$(1$-$\varphi)x + 1y + \varphi z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$\sigma_\Delta(p_1, q_1, r_1) = (\frac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{4}q_1 - \frac{1}{2}r_1, \frac{1-\sqrt{5}}{4}p_1 + \frac{1}{2}q_1 + \frac{-1-\sqrt{5}}{4}r_1, -\frac{1}{2}p_1 - \frac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{4}r_1),$

7.Durum: $(1-\varphi)x - 1y + \varphi z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$\sigma_\Delta(p_1, q_1, r_1) = (\frac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{4}q_1 + \frac{1}{2}r_1, \frac{1-\sqrt{5}}{4}p_1 + \frac{1}{2}q_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{4}r_1, \frac{1}{2}p_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{4}r_1),$

8.Durum: $-(1-\varphi)x - 1y + \varphi z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$\sigma_\Delta(p_1, q_1, r_1) = (\frac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{4}q_1 - \frac{1}{2}r_1, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \frac{1}{2}q_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{4}r_1, -\frac{1}{2}p_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{4}r_1),$

9.Durum: $\varphi x + (1-\varphi)y + 1z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$\sigma_\Delta(p_1, q_1, r_1) = (\frac{1-\sqrt{5}}{4}p_1 + \frac{1}{2}q_1 - \frac{1+\sqrt{5}}{4}r_1, \frac{1}{2}p_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{4}r_1, -\frac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \frac{1}{2}r_1),$

10.Durum: $\varphi x + -(1-\varphi)y + 1z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$\sigma_\Delta(p_1, q_1, r_1) = (\frac{1-\sqrt{5}}{4}p_1 - \frac{1}{2}q_1 - \frac{1+\sqrt{5}}{4}r_1, -\frac{1}{2}p_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{4}r_1, -\frac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{4}q_1 + \frac{1}{2}r_1),$

11.Durum: $\varphi x + (1-\varphi)y - 1z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$\sigma_\Delta(p_1, q_1, r_1) = (\frac{1-\sqrt{5}}{4}p_1 + \frac{1}{2}q_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{4}r_1, \frac{1}{2}p_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{4}r_1, \frac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{4}q_1 + \frac{1}{2}r_1),$

12.Durum: $\varphi x + -(1-\varphi)y - 1z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$\sigma_\Delta(p_1, q_1, r_1) = (\frac{1-\sqrt{5}}{4}p_1 - \frac{1}{2}q_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{4}r_1, -\frac{1}{2}p_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{4}r_1, \frac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \frac{1}{2}r_1),$

13.Durum: $1x = 0$ *yansıma düzlemi için,*$\sigma_\Delta\ (p_1, q_1, r_1) = (-p_1, q_1, r_1)$,
14.Durum: $1y = 0$ *yansıma düzlemi için,*$\sigma_\Delta\ (p_1, q_1, r_1) = (p_1, -q_1, r_1)$,
15.Durum: $1z = 0$ *yansıma düzlemi için,*$\sigma_\Delta\ (p_1, q_1, r_1) = (p_1, q_1, -r_1)$.

sonuçları elde edilir. Çıkan bu sonuçlara ve önerme 4.2 ye göre de $\mu(OX) = \mu(OY)$ *olduğu görülmektedir. Böylece ispat tamamlanmış olur.*

Sonuç 6.4 S_{CD} *izometrik yansımalarının kümesi orijinden geçen dü zlemlere göre on beş Öklidyen yansımadan oluşur. Orijinden geçen düzlemler;*

$x = 0$	$y = 0$	$z = 0$
$x + \varphi y + (1-\varphi)z = 0$	$(1-\varphi)x + y + \varphi z = 0$	$\varphi x + (1-\varphi)y + z = 0$
$x + \varphi y - (1-\varphi)z = 0$	$-(1-\varphi)x + y + \varphi z = 0$	$\varphi x - (1-\varphi)y + z = 0$
$-x + \varphi y + (1-\varphi)z = 0$	$(1-\varphi)x - y + \varphi z = 0$	$\varphi x + (1-\varphi)y - z = 0$
$-x + \varphi y - (1-\varphi)z = 0$	$-(1-\varphi)x - y + \varphi z = 0$	$\varphi x + -(1-\varphi)y - z = 0$

Şekil6.4 deki tablolar birim kürenin köşe noktalarının ilgili yansıma dönüşümleri altındaki görüntülerini vermektedir.

	(1,0,0)	(0,1,0)	(0,0,1)	((φ-1),1,φ)	((φ-1),1,-φ)	((φ-1),-1,φ)	((φ-1),-1,-φ)	(1,φ,(φ-1))	(1,-φ,(φ-1))	(-1,φ,(φ-1))	(-1,-φ,(φ-1))	(φ,(φ-1),1)	(φ,(φ-1),-1)	(-φ,(φ-1),1)	(-φ,(φ-1),-1)
A_0	A_0	A_2	A_1	A_{79}	A_8	A_{10}	A_{75}	A_{78}	A_0	A_{74}	A_0	A_6	A_{72}	A_4	A_{76}
A_1	A_1	A_3	A_0	A_8	A_{78}	A_{74}	A_{10}	A_1	A_{75}	A_1	A_{79}	A_{73}	A_7	A_{77}	A_5
A_2	A_2	A_0	A_3	A_{11}	A_{73}	A_{77}	A_9	A_2	A_{76}	A_2	A_{72}	A_{78}	A_4	A_{74}	A_6
A_3	A_3	A_1	A_2	A_{72}	A_{11}	A_9	A_{76}	A_{73}	A_3	A_{77}	A_3	A_5	A_{79}	A_7	A_{75}
A_4	A_6	A_4	A_5	A_{75}	A_4	A_{73}	A_4	A_9	A_8	A_{72}	A_{74}	A_{79}	A_2	A_0	A_{77}
A_5	A_7	A_5	A_4	A_5	A_{74}	A_5	A_{72}	A_{75}	A_{73}	A_8	A_9	A_3	A_{78}	A_{76}	A_1
A_6	A_4	A_6	A_7	A_6	A_{77}	A_6	A_{79}	A_{76}	A_{78}	A_{11}	A_{10}	A_0	A_{73}	A_{75}	A_2
A_7	A_5	A_7	A_6	A_{76}	A_7	A_{78}	A_7	A_{10}	A_{11}	A_{79}	A_{77}	A_{72}	A_1	A_3	A_{74}
A_8	A_{10}	A_9	A_8	A_1	A_0	A_{72}	A_{73}	A_{79}	A_4	A_5	A_{78}	A_{77}	A_{76}	A_8	A_8
A_9	A_{11}	A_8	A_9	A_{74}	A_{75}	A_3	A_2	A_4	A_{77}	A_{76}	A_5	A_9	A_9	A_{78}	A_{79}
A_{10}	A_8	A_{11}	A_{10}	A_{77}	A_{76}	A_0	A_1	A_7	A_{74}	A_{75}	A_6	A_{10}	A_{10}	A_{73}	A_{72}
A_{11}	A_9	A_{10}	A_{11}	A_2	A_3	A_{79}	A_{78}	A_{72}	A_7	A_6	A_{73}	A_{74}	A_{75}	A_{11}	A_{11}
A_{12}	A_{16}	A_{14}	A_{13}	A_{59}	A_{68}	A_{33}	A_{47}	A_{58}	A_{60}	A_{38}	A_{12}	A_{26}	A_{36}	A_{64}	A_{48}
A_{13}	A_{17}	A_{15}	A_{12}	A_{68}	A_{58}	A_{46}	A_{32}	A_{13}	A_{39}	A_{61}	A_{59}	A_{37}	A_{27}	A_{49}	A_{65}
A_{14}	A_{18}	A_{12}	A_{15}	A_{35}	A_{45}	A_{57}	A_{69}	A_{62}	A_{56}	A_{14}	A_{36}	A_{50}	A_{64}	A_{38}	A_{24}
A_{15}	A_{19}	A_{13}	A_{14}	A_{44}	A_{34}	A_{69}	A_{56}	A_{37}	A_{15}	A_{57}	A_{63}	A_{65}	A_{51}	A_{25}	A_{39}
A_{16}	A_{12}	A_{18}	A_{17}	A_{51}	A_{29}	A_{70}	A_{55}	A_{42}	A_{16}	A_{54}	A_{60}	A_{66}	A_{44}	A_{22}	A_{40}
A_{17}	A_{13}	A_{19}	A_{16}	A_{28}	A_{50}	A_{54}	A_{70}	A_{61}	A_{55}	A_{17}	A_{43}	A_{45}	A_{67}	A_{41}	A_{23}
A_{18}	A_{14}	A_{16}	A_{19}	A_{71}	A_{53}	A_{49}	A_{31}	A_{18}	A_{40}	A_{62}	A_{52}	A_{42}	A_{20}	A_{46}	A_{66}
A_{19}	A_{15}	A_{17}	A_{18}	A_{52}	A_{71}	A_{30}	A_{48}	A_{53}	A_{63}	A_{41}	A_{19}	A_{21}	A_{43}	A_{67}	A_{47}
A_{20}	A_{24}	A_{22}	A_{21}	A_{39}	A_{64}	A_{45}	A_{20}	A_{31}	A_{68}	A_{44}	A_{54}	A_{43}	A_{18}	A_{60}	A_{57}
A_{21}	A_{25}	A_{23}	A_{20}	A_{65}	A_{38}	A_{21}	A_{44}	A_{55}	A_{45}	A_{68}	A_{30}	A_{19}	A_{42}	A_{56}	A_{61}
A_{22}	A_{26}	A_{20}	A_{23}	A_{47}	A_{22}	A_{37}	A_{64}	A_{69}	A_{29}	A_{52}	A_{46}	A_{59}	A_{62}	A_{16}	A_{41}
A_{23}	A_{27}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{46}	A_{65}	A_{36}	A_{47}	A_{53}	A_{28}	A_{69}	A_{63}	A_{58}	A_{40}	A_{17}
A_{24}	A_{20}	A_{26}	A_{25}	A_{24}	A_{49}	A_{66}	A_{43}	A_{48}	A_{58}	A_{35}	A_{70}	A_{60}	A_{53}	A_{39}	A_{14}
A_{25}	A_{21}	A_{27}	A_{24}	A_{48}	A_{25}	A_{42}	A_{67}	A_{70}	A_{34}	A_{59}	A_{49}	A_{52}	A_{61}	A_{15}	A_{38}
A_{26}	A_{22}	A_{24}	A_{27}	A_{66}	A_{41}	A_{26}	A_{51}	A_{56}	A_{50}	A_{71}	A_{33}	A_{12}	A_{37}	A_{55}	A_{62}
A_{27}	A_{23}	A_{25}	A_{26}	A_{40}	A_{67}	A_{50}	A_{27}	A_{32}	A_{71}	A_{51}	A_{57}	A_{36}	A_{13}	A_{63}	A_{54}
A_{28}	A_{32}	A_{30}	A_{29}	A_{17}	A_{60}	A_{52}	A_{37}	A_{51}	A_{64}	A_{23}	A_{42}	A_{49}	A_{56}	A_{68}	A_{28}
A_{29}	A_{33}	A_{31}	A_{28}	A_{61}	A_{16}	A_{36}	A_{53}	A_{43}	A_{22}	A_{65}	A_{50}	A_{57}	A_{48}	A_{29}	A_{68}
A_{30}	A_{34}	A_{28}	A_{31}	A_{54}	A_{39}	A_{19}	A_{62}	A_{64}	A_{49}	A_{40}	A_{21}	A_{30}	A_{69}	A_{58}	A_{51}
A_{31}	A_{35}	A_{29}	A_{30}	A_{38}	A_{55}	A_{63}	A_{18}	A_{20}	A_{41}	A_{48}	A_{65}	A_{69}	A_{31}	A_{50}	A_{59}
A_{32}	A_{28}	A_{34}	A_{33}	A_{41}	A_{56}	A_{60}	A_{13}	A_{27}	A_{38}	A_{47}	A_{66}	A_{70}	A_{32}	A_{45}	A_{52}
A_{33}	A_{29}	A_{35}	A_{32}	A_{57}	A_{40}	A_{12}	A_{61}	A_{67}	A_{46}	A_{39}	A_{26}	A_{33}	A_{70}	A_{53}	A_{44}
A_{34}	A_{30}	A_{32}	A_{35}	A_{62}	A_{15}	A_{43}	A_{58}	A_{36}	A_{25}	A_{66}	A_{45}	A_{54}	A_{47}	A_{34}	A_{71}
A_{35}	A_{31}	A_{33}	A_{34}	A_{14}	A_{63}	A_{39}	A_{42}	A_{44}	A_{67}	A_{24}	A_{37}	A_{46}	A_{55}	A_{71}	A_{35}
A_{36}	A_{40}	A_{38}	A_{37}	A_{63}	A_{44}	A_{29}	A_{23}	A_{34}	A_{52}	A_{64}	A_{14}	A_{27}	A_{12}	A_{36}	A_{70}
A_{37}	A_{41}	A_{39}	A_{36}	A_{45}	A_{62}	A_{22}	A_{28}	A_{15}	A_{65}	A_{33}	A_{35}	A_{13}	A_{26}	A_{70}	A_{37}
A_{38}	A_{42}	A_{36}	A_{39}	A_{31}	A_{21}	A_{61}	A_{46}	A_{54}	A_{32}	A_{12}	A_{64}	A_{71}	A_{38}	A_{14}	A_{25}
A_{39}	A_{43}	A_{37}	A_{38}	A_{20}	A_{30}	A_{47}	A_{60}	A_{65}	A_{13}	A_{33}	A_{55}	A_{39}	A_{71}	A_{24}	A_{15}
A_{40}	A_{36}	A_{42}	A_{41}	A_{27}	A_{33}	A_{48}	A_{63}	A_{66}	A_{18}	A_{30}	A_{56}	A_{40}	A_{68}	A_{23}	A_{16}
A_{41}	A_{37}	A_{43}	A_{40}	A_{32}	A_{26}	A_{62}	A_{49}	A_{57}	A_{31}	A_{19}	A_{67}	A_{68}	A_{41}	A_{17}	A_{22}
A_{42}	A_{38}	A_{40}	A_{43}	A_{50}	A_{61}	A_{25}	A_{35}	A_{16}	A_{66}	A_{38}	A_{28}	A_{18}	A_{21}	A_{69}	A_{42}
A_{43}	A_{39}	A_{41}	A_{42}	A_{60}	A_{51}	A_{34}	A_{24}	A_{29}	A_{59}	A_{67}	A_{17}	A_{20}	A_{19}	A_{43}	A_{69}
A_{44}	A_{48}	A_{46}	A_{45}	A_{15}	A_{36}	A_{68}	A_{21}	A_{35}	A_{44}	A_{20}	A_{62}	A_{67}	A_{16}	A_{52}	A_{33}
A_{45}	A_{49}	A_{47}	A_{44}	A_{37}	A_{14}	A_{20}	A_{68}	A_{63}	A_{21}	A_{45}	A_{34}	A_{17}	A_{66}	A_{32}	A_{53}
A_{46}	A_{50}	A_{44}	A_{47}	A_{69}	A_{23}	A_{13}	A_{38}	A_{46}	A_{33}	A_{60}	A_{22}	A_{35}	A_{54}	A_{18}	A_{67}
A_{47}	A_{51}	A_{45}	A_{46}	A_{22}	A_{69}	A_{39}	A_{12}	A_{23}	A_{61}	A_{32}	A_{47}	A_{55}	A_{34}	A_{66}	A_{19}
A_{48}	A_{44}	A_{50}	A_{49}	A_{25}	A_{70}	A_{40}	A_{19}	A_{24}	A_{62}	A_{31}	A_{48}	A_{56}	A_{29}	A_{65}	A_{12}
A_{49}	A_{45}	A_{51}	A_{48}	A_{70}	A_{24}	A_{18}	A_{41}	A_{49}	A_{30}	A_{63}	A_{25}	A_{28}	A_{57}	A_{13}	A_{64}
A_{50}	A_{46}	A_{48}	A_{51}	A_{42}	A_{17}	A_{27}	A_{71}	A_{60}	A_{26}	A_{50}	A_{29}	A_{14}	A_{65}	A_{31}	A_{58}
A_{51}	A_{47}	A_{49}	A_{50}	A_{16}	A_{43}	A_{71}	A_{26}	A_{28}	A_{51}	A_{27}	A_{61}	A_{64}	A_{15}	A_{59}	A_{30}
A_{52}	A_{56}	A_{54}	A_{53}	A_{19}	A_{52}	A_{28}	A_{65}	A_{71}	A_{36}	A_{22}	A_{18}	A_{25}	A_{60}	A_{44}	A_{32}
A_{53}	A_{57}	A_{55}	A_{52}	A_{53}	A_{18}	A_{64}	A_{29}	A_{19}	A_{23}	A_{37}	A_{71}	A_{61}	A_{24}	A_{33}	A_{45}
A_{54}	A_{58}	A_{52}	A_{55}	A_{30}	A_{65}	A_{17}	A_{54}	A_{38}	A_{70}	A_{16}	A_{20}	A_{34}	A_{46}	A_{62}	A_{27}
A_{55}	A_{59}	A_{53}	A_{54}	A_{64}	A_{31}	A_{55}	A_{16}	A_{21}	A_{17}	A_{70}	A_{39}	A_{47}	A_{35}	A_{26}	A_{63}
A_{56}	A_{52}	A_{58}	A_{57}	A_{67}	A_{32}	A_{56}	A_{15}	A_{26}	A_{14}	A_{69}	A_{40}	A_{48}	A_{28}	A_{21}	A_{60}
A_{57}	A_{53}	A_{59}	A_{56}	A_{33}	A_{66}	A_{14}	A_{57}	A_{41}	A_{69}	A_{15}	A_{27}	A_{29}	A_{49}	A_{61}	A_{20}
A_{58}	A_{54}	A_{56}	A_{59}	A_{58}	A_{13}	A_{67}	A_{34}	A_{12}	A_{24}	A_{42}	A_{68}	A_{62}	A_{23}	A_{30}	A_{50}
A_{59}	A_{55}	A_{57}	A_{58}	A_{12}	A_{59}	A_{35}	A_{66}	A_{68}	A_{43}	A_{25}	A_{13}	A_{22}	A_{63}	A_{51}	A_{31}
A_{60}	A_{60}	A_{62}	A_{61}	A_{43}	A_{28}	A_{32}	A_{39}	A_{50}	A_{12}	A_{46}	A_{16}	A_{24}	A_{52}	A_{20}	A_{56}
A_{61}	A_{61}	A_{63}	A_{60}	A_{29}	A_{42}	A_{38}	A_{33}	A_{17}	A_{47}	A_{13}	A_{51}	A_{53}	A_{25}	A_{57}	A_{21}
A_{62}	A_{62}	A_{60}	A_{63}	A_{34}	A_{37}	A_{41}	A_{30}	A_{14}	A_{48}	A_{18}	A_{44}	A_{58}	A_{22}	A_{54}	A_{26}
A_{63}	A_{63}	A_{61}	A_{62}	A_{36}	A_{35}	A_{31}	A_{40}	A_{45}	A_{19}	A_{49}	A_{15}	A_{23}	A_{59}	A_{27}	A_{55}
A_{64}	A_{66}	A_{64}	A_{65}	A_{55}	A_{20}	A_{53}	A_{22}	A_{30}	A_{28}	A_{36}	A_{38}	A_{51}	A_{14}	A_{12}	A_{49}
A_{65}	A_{67}	A_{65}	A_{64}	A_{21}	A_{54}	A_{23}	A_{52}	A_{39}	A_{37}	A_{29}	A_{31}	A_{15}	A_{50}	A_{48}	A_{13}
A_{66}	A_{64}	A_{66}	A_{67}	A_{26}	A_{57}	A_{24}	A_{59}	A_{40}	A_{42}	A_{34}	A_{32}	A_{16}	A_{45}	A_{47}	A_{18}
A_{67}	A_{65}	A_{67}	A_{66}	A_{56}	A_{27}	A_{58}	A_{25}	A_{33}	A_{35}	A_{43}	A_{41}	A_{44}	A_{17}	A_{19}	A_{46}
A_{68}	A_{70}	A_{69}	A_{68}	A_{13}	A_{12}	A_{44}	A_{45}	A_{59}	A_{20}	A_{21}	A_{58}	A_{41}	A_{40}	A_{28}	A_{29}
A_{69}	A_{71}	A_{68}	A_{69}	A_{46}	A_{47}	A_{15}	A_{14}	A_{22}	A_{57}	A_{36}	A_{23}	A_{31}	A_{30}	A_{42}	A_{43}
A_{70}	A_{68}	A_{71}	A_{70}	A_{49}	A_{48}	A_{16}	A_{17}	A_{25}	A_{54}	A_{55}	A_{24}	A_{32}	A_{33}	A_{37}	A_{36}
A_{71}	A_{69}	A_{70}	A_{71}	A_{18}	A_{19}	A_{51}	A_{50}	A_{52}	A_{27}	A_{26}	A_{53}	A_{38}	A_{39}	A_{35}	A_{34}
A_{72}	A_{76}	A_{74}	A_{73}	A_3	A_{72}	A_8	A_5	A_{11}	A_{72}	A_4	A_2	A_7	A_0	A_{72}	A_{10}
A_{73}	A_{77}	A_{75}	A_{72}	A_{73}	A_2	A_4	A_8	A_3	A_5	A_{73}	A_{11}	A_1	A_6	A_{10}	A_{73}
A_{74}	A_{78}	A_{72}	A_{75}	A_9	A_5	A_1	A_{74}	A_{74}	A_{10}	A_0	A_4	A_{11}	A_{74}	A_2	A_7
A_{75}	A_{79}	A_{73}	A_{74}	A_4	A_9	A_{75}	A_0	A_5	A_1	A_{10}	A_{75}	A_{75}	A_{11}	A_6	A_3
A_{76}	A_{72}	A_{78}	A_{77}	A_7	A_{10}	A_{76}	A_3	A_6	A_2	A_9	A_{76}	A_{76}	A_8	A_5	A_0
A_{77}	A_{73}	A_{79}	A_{76}	A_{10}	A_6	A_2	A_{77}	A_{77}	A_9	A_3	A_7	A_8	A_{77}	A_1	A_4
A_{78}	A_{74}	A_{76}	A_{79}	A_{78}	A_1	A_7	A_{11}	A_0	A_6	A_{78}	A_8	A_2	A_5	A_9	A_{78}
A_{79}	A_{75}	A_{77}	A_{78}	A_0	A_{79}	A_{11}	A_6	A_8	A_{79}	A_7	A_1	A_4	A_3	A_{79}	A_9

Şekil 6.4 $\mathbb{R}^3_{CD}$ de Yansıma Düzlemlerine Göre Köşe Noktaların Görüntüleri

Önerme 6.5 *$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve*

$$D_1 = \{1, (\pm(1-\varphi), 0),\ (0, 1, \pm(1-\varphi)),\ (\pm(1-\varphi), 0, 1)\}$$
$$D_2 = \left\{ \begin{array}{l} (1,0,0),\ (0,1,0), (0,0,1),\ (1, \pm\varphi, \pm(1-\varphi)), (\pm(1-\varphi), 1, \pm\varphi) \\ (\pm\varphi, \pm(1-\varphi), 1) \end{array} \right\}$$
$$D_3 = \left\{ \begin{array}{l} (1,1,1),\ (-1,1,1),\ (1,-1,1),\ (1,1,-1),\ (\pm(2-\varphi), 1, 0), \\ (0, \pm(2-\varphi), 1), (1, 0 \pm (2-\varphi)) \end{array} \right\}$$

olmak üzere

$$R_1 = \{r_\theta \mid \theta \in \{2\pi/5,\ 4\pi/5,\ 6\pi/5, 8\pi/5\},\ dönme\ ekseninin\ doğrultu\ vektörü\ D_1\ in\ elemanı\}$$
$$R_2 = \{r_\theta \mid \theta \in \{\pi\},\ dönme\ ekseninin\ doğrultu\ vektörü\ D_2\ in\ elemanı\}$$
$$R_3 = \{r_\theta \mid \theta = \{2\pi/3, 4\pi/3\},\ dönme\ ekseninin\ doğrultu\ vektörü\ D_3\ in\ elemanı\}$$

kümeleri verilsin. Dönme ekseni orijinden geçen bir l doğrusu olan r_θ dönmesinin bir izometri olması için gerek ve yeter koşul $r_\theta \in R_{CD} = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ olmasıdır.

İspat *Birl doğrusunun birim doğrultusu (p, q, r) olmak üzere l etrafında r_θ Öklidyen dönmenin matris formu;*

$$\begin{bmatrix} \cos\theta + p^2(1-\cos\theta) & pq(1-\cos\theta) - r\sin\theta & pr(1-\cos\theta) + q\sin\theta \\ pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta & \cos\theta + q^2(1-\cos\theta) & qr(1-\cos\theta) - p\sin\theta \\ pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta & qr(1-\cos\theta) + p\sin\theta & \cos\theta - r^2(1-\cos\theta) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. l eksenindeki bir dönme, l doğrusu boyunca kesi şen iki düzlemin yansımalarının birleşimi olduğundan önerme 6.4 den dolayı l doğrusunun doğrultu vektörleri $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(0,-1,\pm(1-\varphi))$, $((1-\varphi), 0, \pm1)$, $(-1,\pm(1-\varphi),0)$, $(1,\pm\varphi,\pm(1-\varphi))$, $(\pm(1-\varphi),\pm1,\varphi)$, $(\pm\varphi,-(1-\varphi),\pm1)$, $(1,1,1)$, $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$, $(\pm(2-\varphi),1,0)$, $(0,\pm(2-\varphi),1)$, $(1,0,\pm(2-\varphi))$ olarak alınabilir.

$\mathbb{R}^3_{CD}$ de izometrik dönmelerin bulunması için, d_{CD} metriğine göre olan birim kürenin kenarlarının uzunluklarını koruyan dönmelerin bulunması yeterlidir.

$$A_0 = (0, \tfrac{3-\sqrt{5}}{2}, 1), \qquad A_{12} = \left(2 + 2\sqrt{5} - \tfrac{2\sqrt{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}, \tfrac{(5-\sqrt{5})\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5} - \tfrac{5+\sqrt{5}}{2}, 1\right),$$
$$A_{36} = \left(\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}, \tfrac{2\sqrt{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5} - \tfrac{5+3\sqrt{5}}{2}, \tfrac{7+\sqrt{5}}{2} + \tfrac{(\sqrt{5}-5)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}\right),$$

d_{CD} birim küresinin köşe noktalarını ele alalım. Buna göre açıkça $d_{CD}(A_0,\ A_{12}) = \frac{26\sqrt{5}-10}{41} + \frac{(5-13\sqrt{5})\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{205}$ ve $d_{CD}(A_{12},\ A_{36}) = \frac{(10-2\sqrt{5})\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5} - 5 - \sqrt{5}$ dir. O halde $\theta \neq 0$ olmak üzere r_θ, d_{CD} uzaklığını koruması için

$$d_{CD}(r_\theta(A_0), r_\theta(A_{12})) = \frac{26\sqrt{5}-10}{41} + \frac{(5-13\sqrt{5})\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{205}$$

ve

$$d_{CD}(r_\theta(A_{12}), r_\theta(A_{36})) = \frac{\left(10-2\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5} - 5 - \sqrt{5}$$

olmalıdır. l doğrusunun doğrultu vektörü $(0,1,(1\text{-}\varphi))$ olarak alınırsa (p,q,r)=$(0, \frac{1}{\sqrt{2-2\varphi+\varphi^2}}, \frac{1-\varphi}{\sqrt{2-2\varphi+\varphi^2}})$ olur. p,q,r değerleri

$$d_{CD}(r_\theta(A_0), r_\theta(A_{12})) = \frac{26\sqrt{5}-10}{41} + \frac{\left(5-13\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{205}$$

ve

$$d_{CD}(r_\theta(A_{12}), r_\theta(A_{36})) = \frac{\left(10-2\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5} - 5 - \sqrt{5}$$

te yerine yazılırsa;

X_1=$\left(\frac{2\sqrt{5}+2}{5} - \frac{2\sqrt{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{25}\right)\left|5\cos\theta + \left(\sqrt{5}-2\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}\sin\theta\right|$,

Y_1=$\left(\frac{5-\sqrt{5}}{25} - \frac{\left(\sqrt{5}-3\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{50}\right)\left|15+5\sqrt{5}+10\cos\theta - 2\sqrt{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}\sin\theta\right|$,

Z_1=$\left(\frac{4\sqrt{5}}{5} - \frac{\left(1-\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{25}\right)\left|-5+5\cos\theta - \sqrt{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}\sin\theta\right|$,

X_2=$\left(\frac{2\sqrt{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{25} - \frac{3\sqrt{5}+5}{10}\right)\left|5\cos\theta + \left(2\sqrt{5}-5\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}\sin\theta\right|$,

Y_2=$\left(-\frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{\left(3\sqrt{5}-5\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{25}\right)\left|5\cos\theta + \sqrt{25+10\sqrt{5}}\sin\theta\right|$ *ve*

Z_2=$\left(\frac{\left(5-\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{25} - \frac{5+\sqrt{5}}{5}\right)\left|5\cos\theta + \sqrt{25+10\sqrt{5}}\sin\theta\right|$ *olmak üzere ve $i=1,2$ için*

$u_i = \max\{X_i, Y_i, Z_i\}$, *ayrıca* $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ *altın oran ve* $\alpha = \frac{13\sqrt{5}-5}{82} + \frac{\left(7\sqrt{5}-9\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{205}$, $\beta = \varphi\alpha$ *denilirse*

$$\max\left\{\frac{\varphi}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_1^- + \frac{1}{2\varphi}u_1^+, u_1, \beta u_1 + \alpha u_1^+\right\} = \frac{26\sqrt{5}-10}{41} + \frac{\left(5-13\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{205}$$

$$\max\left\{\frac{\varphi}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_2^- + \frac{1}{2\varphi}u_2^+, u_2, \beta u_2 + \alpha u_2^+\right\} = \frac{\left(10-2\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5} - 5 - \sqrt{5}$$

denklemlerine ulaşılır. Bu denklemler çözülürse $\theta = 2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5$ sonuçları bulunur. Benzer şekilde, eğer l doğrusunun yön vektörü; $(1,\pm(1-\varphi),0)$, $(0,1,\pm(1-\varphi))$, $(\pm(1-\varphi),0,1)$ olarak alınır ise $\theta = 2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5$ olur.

l doğrusunun yön vektörü (1,0,0) ise $(p,q,r) = (1,0,0)$ olur. p,q,r değerleri

$$d_{CD}(r_\theta(A_0), r_\theta(A_{12})) = \frac{26\sqrt{5}-10}{41} + \frac{\left(5-13\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{205}$$

ve

$$d_{CD}(r_\theta(A_{12}), r_\theta(A_{36})) = \frac{\left(10-2\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5} - 5 - \sqrt{5}$$

te yerine yazılırsa;

X_1=$2+2\sqrt{5}$-$\frac{2\sqrt{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$, Y_1=$\left(4+\frac{\left(\sqrt{5}-5\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}\right)|\cos\theta)|$, Z_1=$\left(4+\frac{\left(\sqrt{5}-5\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}\right)|\sin\theta)|$,

X_2=$\frac{2\sqrt{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$ $-$ $\frac{3\sqrt{5}+5}{2}$, Y_2=$\left(\frac{\left(3\sqrt{5}-5\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{10}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left|2\cos\theta+\left(\sqrt{5}+1\right)\sin\theta\right|$ *ve*

Z_2=$\left(\frac{\left(5-\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{10}-\frac{5+\sqrt{5}}{4}\right)\left|2\cos\theta+\left(1-\sqrt{5}\right)\sin\theta\right|$*olmak üzere ve* $i=1,2$ *için* $u_i=\max\{X_i,Y_i,Z_i\}$, *ayrıca* $\varphi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ *altın oran ve* $\alpha=\frac{13\sqrt{5}-5}{82}+\frac{\left(7\sqrt{5}-9\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{205}$, $\beta=\varphi\alpha$ *denilirse*

$$\max\left\{\frac{\varphi}{2}u_1+\frac{1}{2}u_1^-+\frac{1}{2\varphi}u_1^+,u_1,\beta u_1+\alpha u_1^+\right\}=\frac{26\sqrt{5}-10}{41}+\frac{\left(5-13\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{205}$$

$$\max\left\{\frac{\varphi}{2}u_2+\frac{1}{2}u_2^-+\frac{1}{2\varphi}u_2^+,u_2,\beta u_2+\alpha u_2^+\right\}=\frac{\left(10-2\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}-5-\sqrt{5}$$

elde edilir. Bu denklemler çözülürse $\theta=\pi$ *sonucu bulunur.Buradan* l *doğrusunun etrafındaki* $\theta=\pi$ *radyanlık dönme* $\mathbb{R}^3_{CD}$ *ün bir izometrisidir. Benzer şekilde, eğer* l *doğrusunun doğrultu vektörü* $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,\pm\varphi,\pm(1-\varphi))$, $(\pm(1-\varphi),1,\pm\varphi)$, $(\pm\varphi,\pm(1-\varphi),1)$ *ise* $\theta=\pi$ *sonucu bulunur.*

l *doğrusunun doğrultu vektörü* $(1,1,1)$ *ise* (p,q,r)=$(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$ *olur.* p, q, r *değerleri*

$$d_{CD}(r_\theta(A_0),r_\theta(A_{12}))=\frac{26\sqrt{5}-10}{41}+\frac{\left(5-13\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{205}$$

ve

$$d_{CD}(r_\theta(A_{12}),r_\theta(A_{36}))=\frac{\left(10-2\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}-5-\sqrt{5}$$

de yerine yazılırsa;

$X_1=\left(\frac{4+2\sqrt{5}}{3}-\frac{\left(3\sqrt{5}+5\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{30}\right)\left|7-3\sqrt{5}+2\cos\theta+\left(2\sqrt{15}-4\sqrt{3}\right)\sin\theta\right|$,

$Y_1=\left(\frac{5+\sqrt{5}}{15}-\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{15}\right)\left|5-3\sqrt{5}+10\cos\theta-2\sqrt{15}\sin\theta\right|$,

$Z_1=\left(\frac{2\sqrt{5}-2}{3}+\frac{\left(5-3\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{15}\right)\left|-1+\cos\theta+\left(\sqrt{15}+2\sqrt{3}\right)\sin\theta\right|$,

$X_2=\left(\frac{2\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{15}-\frac{3+\sqrt{5}}{6}\right)\left|3\sqrt{5}-5+5\cos\theta-\sqrt{15}\sin\theta\right|$,

$Y_2=\left(\frac{\left(3\sqrt{5}-5\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{15}-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left|2+\cos\theta+\left(\sqrt{15}+2\sqrt{3}\right)\sin\theta\right|$ *ve*

$Z_2=\left(\frac{\left(3\sqrt{5}+5\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{15}-\frac{15+7\sqrt{5}}{6}\right)\left|-7+3\sqrt{5}+\cos\theta+\left(\sqrt{15}-2\sqrt{3}\right)\sin\theta\right|$*olmak üzere ve* $i=1,2$ *için* $u_i=\max\{X_i,Y_i,Z_i\}$, *ayrıca* $\varphi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ *altın oran ve* $\alpha=\frac{13\sqrt{5}-5}{82}+$

$\frac{\left(7\sqrt{5}-9\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{205}$, $\beta = \varphi\alpha$ *denilirse*

$$\max\left\{\frac{\varphi}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_1^- + \frac{1}{2\varphi}u_1^+, u_1, \beta u_1 + \alpha u_1^+\right\} = \frac{26\sqrt{5}-10}{41} + \frac{\left(5-13\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{205}$$

$$\max\left\{\frac{\varphi}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_2^- + \frac{1}{2\varphi}u_2^+, u_2, \beta u_2 + \alpha u_2^+\right\} = \frac{\left(10-2\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5} - 5 - \sqrt{5}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklem sistemi çözülürse $\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ *sonuçlarına ulaşılır. Buradan* l *etrafındaki* $\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ *radyanlık dönmeler* $\mathbb{R}^3_{CD}$ *ün bir izometrisidir. Benzer şekilde, eğer* l *nin yön vektörü* $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$, $(\pm(2-\varphi),1,0)$, $(0,\pm(2-\varphi),1)$, $(1,0,\pm(2-\varphi))$ *ise* $\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ *olur.*

Tersine $r_\theta(X) = Y$ *olacak şekilde* X *ve* Y *noktalarıyla oluşturulan* OX *ve* OY *doğrularının doğrultuları sırasıyla* (p_1,q_1,r_1) *ve* (p_2,q_2,r_2) *olmak üzere* $d_{CD}(OX) = d_{CD}(OY)$ *olduğunu göstermek için önerme 6.2 den* $\mu_{OX} = \mu_{OY}$ *olduğu gösterilmelidir. Bu ise* (p_1,q_1,r_1) *vektörünün tüm durumları için görüntüleri bulunarak kolaylıkla gösterilebilir. Öreneğin doğrultu vektörü* $(1,1,1)$ *olmak üzere, bu eksende* $\frac{2\pi}{3}$ *radyanlık dönme dönüşümü yapılınca*$(p_2,q_2,r_2) = (r_1,p_{,1},q_1)$ *bulunur. Buradan da açıkça* $\mu(OX) = \mu(OY)$ *olduğu görülür. Benzer şekilde diğer dönme eksenleri ve dönme açıları için eşitlik gösterilebilir. Buda ispatı tamamlar.*

Sonuç 6.5 *Orijinden geçen doğrulara göre izometrik dönmelerin* R_{CD} *kümesi tam olarak 59 Öklidyen dönme içerir.*

Şekil6.5 ve Şekil6.6 deki tablolar birim kürenin köşe noktalarının ilgili dönme dönüşümleri altındaki görüntülerini vermektedir.

	(1,0,0	(0,1,0	(0,0,1	(1,1,1)		(-1,1,1)		(1,-1,1)		(1,1,-1)		(0,(2-φ),1)		(0,-(2-φ),1)		((2-φ),1,0)		(-(2-φ),1,0)		(1,0,(2-φ))		(1,0,-(2-φ))		(0,1,(1-φ))				(0,1,-(1-φ))			
	π	π	π	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/5	4π/5	6π/5	8π/5	2π/5	4π/5	6π/5	8π/5
A_0	A_3	A_1	A_2	A_4	A_8	A_{10}	A_6	A_{11}	A_5	A_9	A_7	A_0	A_0	A_{74}	A_{78}	A_5	A_{77}	A_7	A_{73}	A_9	A_{73}	A_{77}	A_{11}	A_{72}	A_8	A_{10}	A_{76}	A_4	A_{75}	A_{79}	A_6
A_1	A_2	A_0	A_3	A_6	A_9	A_{11}	A_4	A_{10}	A_7	A_8	A_5	A_{79}	A_{75}	A_1	A_1	A_{76}	A_4	A_{72}	A_6	A_{76}	A_{11}	A_9	A_{72}	A_7	A_{78}	A_{74}	A_5	A_{77}	A_{10}	A_8	A_{73}
A_2	A_1	A_3	A_0	A_5	A_{10}	A_8	A_7	A_9	A_4	A_{11}	A_6	A_{72}	A_{76}	A_2	A_2	A_{75}	A_7	A_7	A_5	A_{75}	A_8	A_{10}	A_{79}	A_4	A_{73}	A_{77}	A_6	A_{74}	A_9	A_{11}	A_{78}
A_3	A_0	A_2	A_1	A_7	A_{11}	A_9	A_5	A_8	A_6	A_{10}	A_4	A_3	A_3	A_{77}	A_{73}	A_6	A_{74}	A_4	A_{78}	A_{10}	A_{78}	A_{74}	A_8	A_{79}	A_{11}	A_9	A_{75}	A_7	A_{76}	A_{72}	A_5
A_4	A_5	A_7	A_6	A_8	A_0	A_1	A_{11}	A_2	A_9	A_3	A_{10}	A_{10}	A_{78}	A_{11}	A_{76}	A_1	A_{76}	A_{78}	A_3	A_4	A_4	A_{73}	A_{75}	A_{73}	A_{77}	A_6	A_2	A_{75}	A_{79}	A_6	A_0
A_5	A_4	A_6	A_7	A_{10}	A_2	A_3	A_9	A_0	A_{11}	A_1	A_8	A_{77}	A_{11}	A_{79}	A_{10}	A_{77}	A_0	A_2	A_{79}	A_{72}	A_{74}	A_5	A_5	A_1	A_7	A_{78}	A_{74}	A_3	A_7	A_{76}	A_{72}
A_6	A_7	A_5	A_4	A_9	A_1	A_0	A_{10}	A_3	A_8	A_2	A_{11}	A_{74}	A_8	A_{72}	A_9	A_{74}	A_3	A_1	A_{72}	A_{79}	A_{77}	A_6	A_6	A_2	A_4	A_{73}	A_{77}	A_0	A_4	A_{75}	A_{79}
A_7	A_6	A_4	A_5	A_{11}	A_3	A_2	A_8	A_1	A_{10}	A_0	A_9	A_9	A_{73}	A_8	A_{75}	A_2	A_{75}	A_{73}	A_0	A_7	A_7	A_{78}	A_{76}	A_{78}	A_{74}	A_5	A_1	A_{76}	A_{72}	A_5	A_3
A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_0	A_4	A_7	A_2	A_6	A_3	A_5	A_1	A_6	A_{74}	A_{75}	A_7	A_8	A_8	A_{76}	A_{77}	A_2	A_{75}	A_3	A_{74}	A_{10}	A_{76}	A_0	A_{72}	A_{73}	A_1	A_{77}	A_{10}
A_9	A_8	A_{11}	A_{10}	A_1	A_6	A_5	A_3	A_4	A_2	A_7	A_0	A_{73}	A_7	A_6	A_{72}	A_{79}	A_8	A_9	A_9	A_{73}	A_0	A_{72}	A_1	A_5	A_3	A_{79}	A_{11}	A_{11}	A_{78}	A_2	A_4
A_{10}	A_{11}	A_8	A_9	A_2	A_5	A_6	A_0	A_7	A_1	A_4	A_3	A_{78}	A_4	A_5	A_{79}	A_{72}	A_{73}	A_{10}	A_{10}	A_{78}	A_3	A_{79}	A_2	A_{76}	A_0	A_{72}	A_8	A_8	A_{73}	A_1	A_{77}
A_{11}	A_{10}	A_9	A_8	A_3	A_7	A_4	A_1	A_5	A_0	A_6	A_2	A_5	A_{77}	A_{76}	A_4	A_{11}	A_{11}	A_{75}	A_{74}	A_1	A_{76}	A_0	A_{77}	A_9	A_{75}	A_3	A_{79}	A_{78}	A_2	A_{74}	A_9
A_{12}	A_{15}	A_{17}	A_{18}	A_{20}	A_{28}	A_{33}	A_{26}	A_{34}	A_{23}	A_{31}	A_{25}	A_{60}	A_{16}	A_{54}	A_{42}	A_{65}	A_{49}	A_{27}	A_{37}	A_{69}	A_{45}	A_{57}	A_{35}	A_{44}	A_{29}	A_{70}	A_{40}	A_{22}	A_{55}	A_{51}	A_{66}
A_{13}	A_{14}	A_{16}	A_{19}	A_{24}	A_{30}	A_{35}	A_{22}	A_{32}	A_{27}	A_{29}	A_{21}	A_{43}	A_{55}	A_{17}	A_{61}	A_{48}	A_{64}	A_{36}	A_{26}	A_{56}	A_{34}	A_{69}	A_{44}	A_{67}	A_{50}	A_{54}	A_{23}	A_{41}	A_{70}	A_{28}	A_{45}
A_{14}	A_{13}	A_{19}	A_{16}	A_{21}	A_{32}	A_{29}	A_{27}	A_{30}	A_{22}	A_{35}	A_{24}	A_{52}	A_{40}	A_{62}	A_{18}	A_{39}	A_{25}	A_{51}	A_{65}	A_{47}	A_{68}	A_{33}	A_{59}	A_{20}	A_{53}	A_{49}	A_{66}	A_{46}	A_{31}	A_{71}	A_{42}
A_{15}	A_{12}	A_{18}	A_{17}	A_{25}	A_{34}	A_{31}	A_{23}	A_{28}	A_{26}	A_{33}	A_{20}	A_{19}	A_{63}	A_{41}	A_{53}	A_{24}	A_{38}	A_{64}	A_{50}	A_{32}	A_{58}	A_{46}	A_{68}	A_{43}	A_{71}	A_{30}	A_{47}	A_{67}	A_{48}	A_{52}	A_{21}
A_{16}	A_{19}	A_{13}	A_{14}	A_{22}	A_{29}	A_{32}	A_{24}	A_{35}	A_{21}	A_{30}	A_{27}	A_{12}	A_{60}	A_{38}	A_{58}	A_{23}	A_{41}	A_{67}	A_{45}	A_{31}	A_{53}	A_{49}	A_{71}	A_{36}	A_{68}	A_{33}	A_{48}	A_{64}	A_{47}	A_{59}	A_{26}
A_{17}	A_{18}	A_{12}	A_{15}	A_{26}	A_{31}	A_{34}	A_{20}	A_{33}	A_{25}	A_{28}	A_{23}	A_{59}	A_{39}	A_{61}	A_{13}	A_{40}	A_{22}	A_{44}	A_{66}	A_{48}	A_{71}	A_{30}	A_{52}	A_{27}	A_{58}	A_{46}	A_{65}	A_{49}	A_{32}	A_{68}	A_{37}
A_{18}	A_{17}	A_{15}	A_{12}	A_{23}	A_{33}	A_{28}	A_{25}	A_{31}	A_{20}	A_{34}	A_{26}	A_{36}	A_{56}	A_{14}	A_{62}	A_{47}	A_{67}	A_{43}	A_{21}	A_{55}	A_{29}	A_{70}	A_{51}	A_{64}	A_{45}	A_{57}	A_{24}	A_{38}	A_{69}	A_{35}	A_{50}
A_{19}	A_{16}	A_{14}	A_{13}	A_{27}	A_{35}	A_{30}	A_{21}	A_{29}	A_{24}	A_{32}	A_{22}	A_{63}	A_{15}	A_{57}	A_{37}	A_{66}	A_{46}	A_{20}	A_{42}	A_{70}	A_{50}	A_{54}	A_{28}	A_{51}	A_{34}	A_{69}	A_{39}	A_{25}	A_{56}	A_{44}	A_{65}
A_{20}	A_{23}	A_{25}	A_{26}	A_{28}	A_{12}	A_{17}	A_{34}	A_{18}	A_{31}	A_{15}	A_{33}	A_{70}	A_{58}	A_{35}	A_{48}	A_{61}	A_{56}	A_{42}	A_{19}	A_{64}	A_{22}	A_{37}	A_{47}	A_{53}	A_{49}	A_{66}	A_{14}	A_{39}	A_{43}	A_{24}	A_{60}
A_{21}	A_{22}	A_{24}	A_{27}	A_{32}	A_{14}	A_{19}	A_{30}	A_{16}	A_{35}	A_{13}	A_{29}	A_{49}	A_{54}	A_{59}	A_{70}	A_{57}	A_{60}	A_{18}	A_{43}	A_{36}	A_{46}	A_{65}	A_{23}	A_{61}	A_{25}	A_{42}	A_{38}	A_{15}	A_{67}	A_{48}	A_{52}
A_{22}	A_{21}	A_{27}	A_{24}	A_{29}	A_{16}	A_{13}	A_{35}	A_{14}	A_{30}	A_{19}	A_{32}	A_{33}	A_{50}	A_{71}	A_{56}	A_{17}	A_{40}	A_{58}	A_{63}	A_{20}	A_{64}	A_{45}	A_{39}	A_{37}	A_{41}	A_{26}	A_{62}	A_{55}	A_{51}	A_{66}	A_{12}
A_{23}	A_{20}	A_{26}	A_{25}	A_{33}	A_{18}	A_{15}	A_{31}	A_{12}	A_{34}	A_{17}	A_{28}	A_{57}	A_{71}	A_{51}	A_{32}	A_{41}	A_{16}	A_{62}	A_{59}	A_{44}	A_{38}	A_{21}	A_{65}	A_{13}	A_{67}	A_{50}	A_{54}	A_{63}	A_{27}	A_{40}	A_{36}
A_{24}	A_{27}	A_{21}	A_{22}	A_{30}	A_{13}	A_{16}	A_{32}	A_{19}	A_{29}	A_{14}	A_{35}	A_{54}	A_{68}	A_{44}	A_{31}	A_{38}	A_{15}	A_{61}	A_{52}	A_{51}	A_{41}	A_{26}	A_{66}	A_{18}	A_{64}	A_{45}	A_{57}	A_{60}	A_{20}	A_{39}	A_{43}
A_{25}	A_{26}	A_{20}	A_{23}	A_{34}	A_{15}	A_{18}	A_{28}	A_{17}	A_{33}	A_{12}	A_{31}	A_{30}	A_{45}	A_{68}	A_{55}	A_{14}	A_{39}	A_{53}	A_{60}	A_{27}	A_{67}	A_{50}	A_{40}	A_{42}	A_{38}	A_{21}	A_{61}	A_{56}	A_{44}	A_{65}	A_{19}
A_{26}	A_{25}	A_{23}	A_{20}	A_{31}	A_{17}	A_{12}	A_{33}	A_{15}	A_{28}	A_{18}	A_{34}	A_{46}	A_{29}	A_{52}	A_{69}	A_{54}	A_{63}	A_{13}	A_{36}	A_{43}	A_{49}	A_{66}	A_{24}	A_{62}	A_{22}	A_{37}	A_{41}	A_{16}	A_{64}	A_{47}	A_{59}
A_{27}	A_{24}	A_{22}	A_{21}	A_{35}	A_{19}	A_{14}	A_{29}	A_{13}	A_{32}	A_{16}	A_{30}	A_{69}	A_{53}	A_{28}	A_{47}	A_{62}	A_{55}	A_{37}	A_{12}	A_{67}	A_{25}	A_{42}	A_{48}	A_{58}	A_{46}	A_{65}	A_{17}	A_{40}	A_{36}	A_{23}	A_{63}
A_{28}	A_{31}	A_{33}	A_{34}	A_{12}	A_{20}	A_{25}	A_{18}	A_{26}	A_{15}	A_{23}	A_{17}	A_{66}	A_{38}	A_{47}	A_{27}	A_{68}	A_{29}	A_{48}	A_{57}	A_{62}	A_{39}	A_{19}	A_{54}	A_{32}	A_{56}	A_{60}	A_{52}	A_{45}	A_{13}	A_{41}	A_{70}
A_{29}	A_{30}	A_{32}	A_{35}	A_{16}	A_{22}	A_{27}	A_{14}	A_{24}	A_{19}	A_{21}	A_{13}	A_{26}	A_{46}	A_{39}	A_{67}	A_{28}	A_{68}	A_{56}	A_{49}	A_{18}	A_{55}	A_{63}	A_{38}	A_{70}	A_{40}	A_{12}	A_{44}	A_{53}	A_{61}	A_{57}	A_{33}
A_{30}	A_{29}	A_{35}	A_{32}	A_{13}	A_{24}	A_{21}	A_{19}	A_{22}	A_{14}	A_{27}	A_{16}	A_{45}	A_{25}	A_{66}	A_{36}	A_{39}	A_{50}	A_{31}	A_{69}	A_{37}	A_{60}	A_{52}	A_{17}	A_{47}	A_{15}	A_{43}	A_{71}	A_{34}	A_{58}	A_{62}	A_{24}
A_{31}	A_{28}	A_{34}	A_{33}	A_{17}	A_{26}	A_{23}	A_{15}	A_{20}	A_{18}	A_{25}	A_{12}	A_{37}	A_{67}	A_{24}	A_{44}	A_{51}	A_{58}	A_{69}	A_{30}	A_{53}	A_{16}	A_{36}	A_{61}	A_{55}	A_{63}	A_{59}	A_{35}	A_{71}	A_{42}	A_{14}	A_{46}
A_{32}	A_{35}	A_{29}	A_{30}	A_{14}	A_{21}	A_{24}	A_{16}	A_{27}	A_{13}	A_{22}	A_{19}	A_{42}	A_{64}	A_{23}	A_{51}	A_{44}	A_{53}	A_{70}	A_{33}	A_{28}	A_{15}	A_{43}	A_{62}	A_{56}	A_{60}	A_{52}	A_{28}	A_{68}	A_{37}	A_{17}	A_{49}
A_{33}	A_{34}	A_{28}	A_{31}	A_{18}	A_{23}	A_{26}	A_{12}	A_{25}	A_{17}	A_{20}	A_{15}	A_{50}	A_{22}	A_{65}	A_{43}	A_{52}	A_{45}	A_{32}	A_{70}	A_{42}	A_{63}	A_{59}	A_{14}	A_{48}	A_{16}	A_{36}	A_{68}	A_{29}	A_{53}	A_{61}	A_{57}
A_{34}	A_{33}	A_{31}	A_{28}	A_{15}	A_{25}	A_{20}	A_{17}	A_{23}	A_{12}	A_{26}	A_{18}	A_{21}	A_{49}	A_{40}	A_{64}	A_{35}	A_{71}	A_{55}	A_{46}	A_{13}	A_{56}	A_{60}	A_{41}	A_{69}	A_{39}	A_{19}	A_{51}	A_{58}	A_{62}	A_{54}	A_{30}
A_{35}	A_{32}	A_{30}	A_{29}	A_{19}	A_{27}	A_{22}	A_{13}	A_{21}	A_{16}	A_{24}	A_{14}	A_{65}	A_{41}	A_{48}	A_{20}	A_{71}	A_{34}	A_{47}	A_{54}	A_{61}	A_{40}	A_{12}	A_{57}	A_{31}	A_{55}	A_{63}	A_{59}	A_{50}	A_{18}	A_{38}	A_{69}
A_{36}	A_{39}	A_{41}	A_{42}	A_{44}	A_{52}	A_{57}	A_{50}	A_{58}	A_{47}	A_{55}	A_{49}	A_{56}	A_{18}	A_{30}	A_{66}	A_{37}	A_{70}	A_{26}	A_{13}	A_{46}	A_{21}	A_{61}	A_{31}	A_{68}	A_{33}	A_{48}	A_{16}	A_{23}	A_{63}	A_{27}	A_{40}
A_{37}	A_{38}	A_{40}	A_{43}	A_{48}	A_{34}	A_{59}	A_{46}	A_{56}	A_{51}	A_{53}	A_{45}	A_{67}	A_{31}	A_{19}	A_{57}	A_{70}	A_{36}	A_{12}	A_{27}	A_{60}	A_{30}	A_{47}	A_{20}	A_{41}	A_{26}	A_{62}	A_{22}	A_{17}	A_{49}	A_{32}	A_{68}
A_{38}	A_{37}	A_{43}	A_{40}	A_{45}	A_{56}	A_{53}	A_{51}	A_{54}	A_{46}	A_{59}	A_{48}	A_{28}	A_{66}	A_{58}	A_{16}	A_{15}	A_{24}	A_{71}	A_{39}	A_{23}	A_{44}	A_{29}	A_{63}	A_{21}	A_{61}	A_{25}	A_{42}	A_{69}	A_{35}	A_{50}	A_{18}
A_{39}	A_{36}	A_{42}	A_{41}	A_{49}	A_{58}	A_{55}	A_{47}	A_{52}	A_{60}	A_{57}	A_{44}	A_{17}	A_{59}	A_{67}	A_{29}	A_{25}	A_{14}	A_{38}	A_{71}	A_{28}	A_{62}	A_{22}	A_{45}	A_{19}	A_{51}	A_{34}	A_{69}	A_{43}	A_{24}	A_{60}	A_{20}
A_{40}	A_{43}	A_{37}	A_{38}	A_{46}	A_{53}	A_{56}	A_{48}	A_{59}	A_{45}	A_{54}	A_{51}	A_{14}	A_{52}	A_{64}	A_{34}	A_{22}	A_{17}	A_{41}	A_{68}	A_{35}	A_{61}	A_{25}	A_{50}	A_{12}	A_{44}	A_{29}	A_{70}	A_{36}	A_{23}	A_{63}	A_{27}
A_{41}	A_{42}	A_{36}	A_{39}	A_{50}	A_{55}	A_{58}	A_{44}	A_{57}	A_{49}	A_{52}	A_{47}	A_{35}	A_{65}	A_{53}	A_{15}	A_{16}	A_{23}	A_{68}	A_{40}	A_{24}	A_{51}	A_{34}	A_{60}	A_{26}	A_{62}	A_{22}	A_{37}	A_{70}	A_{28}	A_{45}	A_{13}
A_{42}	A_{41}	A_{39}	A_{36}	A_{47}	A_{57}	A_{52}	A_{49}	A_{55}	A_{44}	A_{58}	A_{50}	A_{64}	A_{32}	A_{12}	A_{54}	A_{69}	A_{43}	A_{19}	A_{20}	A_{63}	A_{33}	A_{48}	A_{27}	A_{38}	A_{21}	A_{61}	A_{25}	A_{14}	A_{46}	A_{31}	A_{71}
A_{43}	A_{40}	A_{38}	A_{37}	A_{51}	A_{59}	A_{54}	A_{45}	A_{53}	A_{48}	A_{56}	A_{46}	A_{55}	A_{13}	A_{33}	A_{65}	A_{42}	A_{69}	A_{21}	A_{18}	A_{49}	A_{26}	A_{62}	A_{32}	A_{71}	A_{30}	A_{47}	A_{15}	A_{24}	A_{60}	A_{20}	A_{39}
A_{44}	A_{47}	A_{49}	A_{50}	A_{52}	A_{36}	A_{41}	A_{58}	A_{42}	A_{25}	A_{39}	A_{57}	A_{48}	A_{62}	A_{31}	A_{24}	A_{53}	A_{32}	A_{66}	A_{17}	A_{38}	A_{23}	A_{13}	A_{69}	A_{39}	A_{70}	A_{40}	A_{12}	A_{65}	A_{19}	A_{25}	A_{56}
A_{45}	A_{46}	A_{48}	A_{51}	A_{56}	A_{38}	A_{43}	A_{54}	A_{40}	A_{59}	A_{37}	A_{53}	A_{25}	A_{30}	A_{63}	A_{49}	A_{33}	A_{52}	A_{16}	A_{67}	A_{12}	A_{69}	A_{39}	A_{22}	A_{57}	A_{24}	A_{18}	A_{64}	A_{13}	A_{41}	A_{70}	A_{28}
A_{46}	A_{45}	A_{51}	A_{48}	A_{53}	A_{40}	A_{37}	A_{59}	A_{38}	A_{54}	A_{43}	A_{56}	A_{29}	A_{26}	A_{50}	A_{60}	A_{19}	A_{66}	A_{34}	A_{55}	A_{21}	A_{36}	A_{68}	A_{15}	A_{65}	A_{17}	A_{27}	A_{28}	A_{31}	A_{71}	A_{42}	A_{14}
A_{47}	A_{44}	A_{50}	A_{49}	A_{57}	A_{42}	A_{39}	A_{55}	A_{36}	A_{58}	A_{41}	A_{52}	A_{61}	A_{51}	A_{27}	A_{28}	A_{67}	A_{18}	A_{54}	A_{35}	A_{68}	A_{14}	A_{20}	A_{37}	A_{15}	A_{43}	A_{71}	A_{30}	A_{59}	A_{26}	A_{16}	A_{64}
A_{48}	A_{51}	A_{45}	A_{46}	A_{54}	A_{37}	A_{40}	A_{56}	A_{43}	A_{53}	A_{38}	A_{59}	A_{62}	A_{44}	A_{20}	A_{35}	A_{64}	A_{13}	A_{57}	A_{28}	A_{71}	A_{17}	A_{27}	A_{42}	A_{16}	A_{36}	A_{68}	A_{33}	A_{52}	A_{21}	A_{15}	A_{67}
A_{49}	A_{50}	A_{44}	A_{47}	A_{58}	A_{39}	A_{42}	A_{52}	A_{41}	A_{57}	A_{36}	A_{55}	A_{34}	A_{21}	A_{45}	A_{63}	A_{12}	A_{65}	A_{29}	A_{56}	A_{26}	A_{43}	A_{71}	A_{16}	A_{66}	A_{14}	A_{20}	A_{33}	A_{32}	A_{68}	A_{37}	A_{17}
A_{50}	A_{49}	A_{47}	A_{44}	A_{55}	A_{41}	A_{36}	A_{57}	A_{39}	A_{52}	A_{42}	A_{58}	A_{22}	A_{33}	A_{60}	A_{46}	A_{30}	A_{59}	A_{15}	A_{64}	A_{19}	A_{70}	A_{40}	A_{25}	A_{54}	A_{23}	A_{13}	A_{67}	A_{18}	A_{38}	A_{69}	A_{35}
A_{51}	A_{48}	A_{46}	A_{45}	A_{59}	A_{43}	A_{38}	A_{53}	A_{37}	A_{56}	A_{40}	A_{54}	A_{47}	A_{61}	A_{32}	A_{23}	A_{58}	A_{31}	A_{65}	A_{14}	A_{41}	A_{24}	A_{18}	A_{70}	A_{34}	A_{69}	A_{39}	A_{19}	A_{66}	A_{12}	A_{22}	A_{65}
A_{52}	A_{55}	A_{57}	A_{58}	A_{36}	A_{44}	A_{49}	A_{42}	A_{50}	A_{39}	A_{47}	A_{41}	A_{40}	A_{14}	A_{69}	A_{26}	A_{45}	A_{33}	A_{24}	A_{61}	A_{54}	A_{65}	A_{17}	A_{30}	A_{28}	A_{32}	A_{56}	A_{60}	A_{21}	A_{15}	A_{67}	A_{48}
A_{53}	A_{54}	A_{56}	A_{59}	A_{40}	A_{46}	A_{51}	A_{38}	A_{48}	A_{43}	A_{45}	A_{37}	A_{27}	A_{69}	A_{15}	A_{41}	A_{32}	A_{44}	A_{60}	A_{25}	A_{16}	A_{31}	A_{55}	A_{64}	A_{49}	A_{66}	A_{14}	A_{20}	A_{61}	A_{57}	A_{33}	A_{29}
A_{54}	A_{53}	A_{59}	A_{56}	A_{37}	A_{48}	A_{45}	A_{43}	A_{46}	A_{38}	A_{51}	A_{40}	A_{68}	A_{24}	A_{42}	A_{12}	A_{63}	A_{26}	A_{35}	A_{47}	A_{65}	A_{52}	A_{28}	A_{19}	A_{23}	A_{13}	A_{67}	A_{50}	A_{30}	A_{34}	A_{58}	A_{62}
A_{55}

	((1-φ),0,1)				(-(1-φ),0,1)				((1-φ),1,0)				(-(1-φ),1,0)				(1,φ,(1-φ))	(1,φ,-(1-φ))	(1,-φ,(1-φ))	(1,-φ,-(1-φ))	(φ,(1-φ),1)	(φ,-(1-φ),1)	(-φ,(1-φ),1)	(-φ,-(1-φ),1)	((1-φ),1,φ)	((1-φ),1,-φ)	(-(1-φ),1,φ)	(-(1-φ),1,-φ)
	2π/5	4π/5	6π/5	8π/5	2π/5	4π/5	6π/5	8π/5	2π/5	4π/5	6π/5	8π/5	2π/5	4π/5	6π/5	8π/5	π	π	π	π	π	π	π	π	π	π	π	π
A_0	A_2	A_{74}	A_4	A_{72}	A_2	A_{78}	A_6	A_{76}	A_{74}	A_{75}	A_1	A_{10}	A_{78}	A_{79}	A_1	A_8	A_{72}	A_{11}	A_9	A_{76}	A_{73}	A_3	A_{77}	A_3	A_5	A_{79}	A_7	A_{75}
A_1	A_{77}	A_7	A_{79}	A_3	A_{73}	A_5	A_{75}	A_3	A_{10}	A_0	A_{74}	A_{75}	A_8	A_0	A_{78}	A_{79}	A_{11}	A_{73}	A_{77}	A_9	A_2	A_{76}	A_2	A_{72}	A_{78}	A_4	A_{74}	A_6
A_2	A_{74}	A_4	A_{72}	A_0	A_{78}	A_6	A_{76}	A_0	A_9	A_3	A_{77}	A_{76}	A_{11}	A_3	A_{73}	A_{72}	A_8	A_{78}	A_{74}	A_{10}	A_1	A_{75}	A_1	A_{79}	A_{73}	A_7	A_{77}	A_5
A_3	A_1	A_{77}	A_7	A_{79}	A_1	A_{73}	A_5	A_{75}	A_{77}	A_{76}	A_2	A_9	A_{73}	A_{72}	A_2	A_{11}	A_{79}	A_8	A_{10}	A_{75}	A_{78}	A_0	A_{74}	A_0	A_6	A_{72}	A_4	A_{76}
A_4	A_{72}	A_0	A_2	A_{74}	A_9	A_{79}	A_{77}	A_8	A_5	A_{73}	A_8	A_{72}	A_{74}	A_9	A_{75}	A_5	A_{76}	A_7	A_{78}	A_7	A_{10}	A_{11}	A_{79}	A_{77}	A_{72}	A_1	A_3	A_{74}
A_5	A_8	A_{76}	A_{78}	A_9	A_{75}	A_3	A_1	A_{73}	A_{73}	A_8	A_{72}	A_4	A_4	A_{74}	A_9	A_{75}	A_6	A_{77}	A_6	A_{79}	A_{76}	A_{78}	A_{11}	A_{10}	A_0	A_{73}	A_{75}	A_2
A_6	A_{11}	A_{75}	A_{73}	A_{10}	A_{76}	A_0	A_2	A_{78}	A_{78}	A_{11}	A_{79}	A_7	A_7	A_{77}	A_{10}	A_{76}	A_5	A_{74}	A_5	A_{72}	A_{75}	A_{73}	A_8	A_9	A_3	A_{78}	A_{76}	A_1
A_7	A_{79}	A_3	A_1	A_{77}	A_{10}	A_{72}	A_4	A_{11}	A_6	A_{78}	A_{11}	A_{79}	A_{77}	A_{10}	A_6	A_8	A_{75}	A_4	A_{73}	A_4	A_9	A_8	A_{72}	A_4	A_{79}	A_2	A_0	A_{77}
A_8	A_{76}	A_{78}	A_9	A_5	A_4	A_9	A_{79}	A_{77}	A_{72}	A_4	A_5	A_{73}	A_0	A_{78}	A_{79}	A_1	A_2	A_3	A_{79}	A_{78}	A_{72}	A_7	A_6	A_{73}	A_{74}	A_{75}	A_{11}	A_{11}
A_9	A_5	A_8	A_{76}	A_{78}	A_{79}	A_{77}	A_8	A_4	A_3	A_{77}	A_{76}	A_2	A_{75}	A_5	A_4	A_{74}	A_{77}	A_{76}	A_0	A_1	A_7	A_{74}	A_{75}	A_6	A_{10}	A_{10}	A_{73}	A_{72}
A_{10}	A_6	A_{11}	A_{75}	A_{73}	A_{72}	A_{74}	A_{11}	A_7	A_0	A_{74}	A_{75}	A_1	A_{76}	A_6	A_7	A_{77}	A_{74}	A_{75}	A_3	A_2	A_4	A_{77}	A_{76}	A_5	A_9	A_9	A_{78}	A_{79}
A_{11}	A_{75}	A_{73}	A_{10}	A_6	A_7	A_{10}	A_{72}	A_{74}	A_7	A_6	A_{78}	A_{11}	A_3	A_{73}	A_{72}	A_2	A_1	A_0	A_{72}	A_{73}	A_{79}	A_4	A_5	A_{78}	A_{77}	A_{76}	A_8	A_8
A_{12}	A_{14}	A_{38}	A_{64}	A_{36}	A_{62}	A_{50}	A_{24}	A_{56}	A_{46}	A_{39}	A_{61}	A_{32}	A_{58}	A_{59}	A_{13}	A_{68}	A_{52}	A_{71}	A_{30}	A_{48}	A_{53}	A_{63}	A_{41}	A_{19}	A_{21}	A_{43}	A_{67}	A_{47}
A_{13}	A_{57}	A_{25}	A_{51}	A_{63}	A_{37}	A_{65}	A_{39}	A_{15}	A_{33}	A_{60}	A_{38}	A_{47}	A_{68}	A_{12}	A_{58}	A_{59}	A_{71}	A_{53}	A_{49}	A_{31}	A_{18}	A_{40}	A_{62}	A_{52}	A_{42}	A_{20}	A_{46}	A_{66}
A_{14}	A_{38}	A_{64}	A_{36}	A_{12}	A_{58}	A_{26}	A_{48}	A_{60}	A_{69}	A_{15}	A_{57}	A_{56}	A_{34}	A_{63}	A_{37}	A_{44}	A_{28}	A_{50}	A_{54}	A_{70}	A_{61}	A_{55}	A_{17}	A_{43}	A_{45}	A_{67}	A_{41}	A_{23}
A_{15}	A_{61}	A_{49}	A_{27}	A_{59}	A_{13}	A_{37}	A_{65}	A_{59}	A_{57}	A_{56}	A_{14}	A_{69}	A_{45}	A_{36}	A_{62}	A_{35}	A_{51}	A_{29}	A_{70}	A_{55}	A_{42}	A_{16}	A_{54}	A_{60}	A_{66}	A_{44}	A_{22}	A_{40}
A_{16}	A_{62}	A_{46}	A_{20}	A_{52}	A_{18}	A_{42}	A_{66}	A_{40}	A_{54}	A_{55}	A_{17}	A_{70}	A_{50}	A_{43}	A_{61}	A_{28}	A_{44}	A_{34}	A_{69}	A_{56}	A_{37}	A_{15}	A_{57}	A_{63}	A_{65}	A_{51}	A_{25}	A_{39}
A_{17}	A_{41}	A_{67}	A_{43}	A_{19}	A_{53}	A_{21}	A_{47}	A_{63}	A_{70}	A_{16}	A_{54}	A_{55}	A_{29}	A_{60}	A_{42}	A_{51}	A_{35}	A_{45}	A_{57}	A_{69}	A_{62}	A_{56}	A_{14}	A_{36}	A_{50}	A_{64}	A_{38}	A_{24}
A_{18}	A_{54}	A_{22}	A_{44}	A_{60}	A_{42}	A_{66}	A_{40}	A_{16}	A_{30}	A_{63}	A_{41}	A_{48}	A_{71}	A_{19}	A_{53}	A_{52}	A_{68}	A_{58}	A_{46}	A_{32}	A_{13}	A_{39}	A_{61}	A_{59}	A_{37}	A_{27}	A_{49}	A_{65}
A_{19}	A_{17}	A_{41}	A_{67}	A_{43}	A_{61}	A_{45}	A_{23}	A_{55}	A_{49}	A_{40}	A_{62}	A_{31}	A_{33}	A_{52}	A_{18}	A_{71}	A_{59}	A_{68}	A_{33}	A_{47}	A_{58}	A_{60}	A_{38}	A_{12}	A_{26}	A_{36}	A_{64}	A_{48}
A_{20}	A_{52}	A_{16}	A_{62}	A_{46}	A_{69}	A_{59}	A_{41}	A_{29}	A_{21}	A_{45}	A_{68}	A_{44}	A_{38}	A_{30}	A_{55}	A_{65}	A_{40}	A_{67}	A_{50}	A_{27}	A_{32}	A_{71}	A_{51}	A_{57}	A_{36}	A_{13}	A_{63}	A_{54}
A_{21}	A_{28}	A_{40}	A_{58}	A_{69}	A_{47}	A_{63}	A_{17}	A_{53}	A_{45}	A_{68}	A_{44}	A_{20}	A_{64}	A_{54}	A_{31}	A_{59}	A_{66}	A_{41}	A_{26}	A_{51}	A_{56}	A_{50}	A_{71}	A_{33}	A_{12}	A_{37}	A_{55}	A_{62}
A_{22}	A_{44}	A_{60}	A_{18}	A_{54}	A_{31}	A_{43}	A_{57}	A_{68}	A_{65}	A_{53}	A_{28}	A_{36}	A_{46}	A_{69}	A_{47}	A_{23}	A_{48}	A_{25}	A_{42}	A_{67}	A_{70}	A_{34}	A_{59}	A_{49}	A_{52}	A_{61}	A_{15}	A_{38}
A_{23}	A_{68}	A_{56}	A_{42}	A_{30}	A_{55}	A_{19}	A_{61}	A_{45}	A_{37}	A_{29}	A_{52}	A_{64}	A_{22}	A_{46}	A_{69}	A_{47}	A_{24}	A_{49}	A_{66}	A_{43}	A_{48}	A_{58}	A_{35}	A_{70}	A_{60}	A_{53}	A_{39}	A_{14}
A_{24}	A_{71}	A_{55}	A_{37}	A_{33}	A_{56}	A_{12}	A_{62}	A_{50}	A_{42}	A_{34}	A_{59}	A_{67}	A_{25}	A_{49}	A_{70}	A_{48}	A_{23}	A_{46}	A_{65}	A_{36}	A_{47}	A_{53}	A_{28}	A_{69}	A_{63}	A_{58}	A_{40}	A_{17}
A_{25}	A_{51}	A_{63}	A_{13}	A_{57}	A_{32}	A_{36}	A_{54}	A_{71}	A_{66}	A_{58}	A_{35}	A_{43}	A_{49}	A_{70}	A_{48}	A_{24}	A_{47}	A_{22}	A_{37}	A_{64}	A_{69}	A_{29}	A_{52}	A_{46}	A_{59}	A_{62}	A_{16}	A_{41}
A_{26}	A_{35}	A_{39}	A_{53}	A_{70}	A_{48}	A_{60}	A_{14}	A_{58}	A_{50}	A_{71}	A_{51}	A_{27}	A_{67}	A_{57}	A_{32}	A_{40}	A_{65}	A_{38}	A_{21}	A_{44}	A_{55}	A_{45}	A_{68}	A_{30}	A_{19}	A_{42}	A_{56}	A_{61}
A_{27}	A_{59}	A_{15}	A_{61}	A_{49}	A_{70}	A_{52}	A_{38}	A_{34}	A_{26}	A_{50}	A_{71}	A_{51}	A_{41}	A_{33}	A_{56}	A_{66}	A_{39}	A_{64}	A_{45}	A_{20}	A_{31}	A_{68}	A_{44}	A_{54}	A_{43}	A_{18}	A_{60}	A_{57}
A_{28}	A_{40}	A_{58}	A_{69}	A_{21}	A_{64}	A_{30}	A_{51}	A_{49}	A_{36}	A_{22}	A_{65}	A_{53}	A_{16}	A_{50}	A_{43}	A_{61}	A_{14}	A_{63}	A_{59}	A_{42}	A_{44}	A_{67}	A_{24}	A_{37}	A_{46}	A_{55}	A_{71}	A_{35}
A_{29}	A_{48}	A_{50}	A_{31}	A_{65}	A_{20}	A_{69}	A_{39}	A_{41}	A_{52}	A_{64}	A_{23}	A_{37}	A_{60}	A_{42}	A_{51}	A_{17}	A_{62}	A_{15}	A_{43}	A_{58}	A_{36}	A_{25}	A_{66}	A_{45}	A_{54}	A_{47}	A_{34}	A_{71}
A_{30}	A_{23}	A_{68}	A_{56}	A_{42}	A_{51}	A_{49}	A_{28}	A_{64}	A_{63}	A_{41}	A_{48}	A_{18}	A_{55}	A_{65}	A_{20}	A_{38}	A_{57}	A_{40}	A_{12}	A_{61}	A_{67}	A_{46}	A_{39}	A_{26}	A_{33}	A_{70}	A_{53}	A_{44}
A_{31}	A_{65}	A_{29}	A_{48}	A_{50}	A_{43}	A_{57}	A_{68}	A_{22}	A_{19}	A_{49}	A_{40}	A_{62}	A_{39}	A_{21}	A_{64}	A_{54}	A_{41}	A_{56}	A_{60}	A_{13}	A_{27}	A_{38}	A_{47}	A_{66}	A_{70}	A_{32}	A_{45}	A_{52}
A_{32}	A_{66}	A_{34}	A_{47}	A_{45}	A_{36}	A_{54}	A_{71}	A_{25}	A_{12}	A_{46}	A_{39}	A_{61}	A_{40}	A_{26}	A_{67}	A_{57}	A_{38}	A_{55}	A_{63}	A_{18}	A_{20}	A_{41}	A_{48}	A_{65}	A_{69}	A_{31}	A_{50}	A_{59}
A_{33}	A_{24}	A_{71}	A_{55}	A_{37}	A_{44}	A_{46}	A_{35}	A_{67}	A_{60}	A_{38}	A_{47}	A_{13}	A_{56}	A_{66}	A_{27}	A_{41}	A_{54}	A_{39}	A_{19}	A_{62}	A_{64}	A_{49}	A_{40}	A_{21}	A_{30}	A_{69}	A_{58}	A_{51}
A_{34}	A_{47}	A_{45}	A_{32}	A_{66}	A_{27}	A_{70}	A_{52}	A_{38}	A_{59}	A_{67}	A_{24}	A_{42}	A_{63}	A_{37}	A_{44}	A_{14}	A_{61}	A_{16}	A_{36}	A_{53}	A_{43}	A_{22}	A_{65}	A_{50}	A_{57}	A_{48}	A_{29}	A_{68}
A_{35}	A_{39}	A_{53}	A_{70}	A_{26}	A_{67}	A_{33}	A_{44}	A_{46}	A_{43}	A_{25}	A_{66}	A_{58}	A_{15}	A_{45}	A_{36}	A_{62}	A_{17}	A_{60}	A_{52}	A_{37}	A_{51}	A_{64}	A_{23}	A_{42}	A_{49}	A_{56}	A_{68}	A_{28}
A_{36}	A_{12}	A_{14}	A_{38}	A_{64}	A_{54}	A_{71}	A_{25}	A_{32}	A_{62}	A_{65}	A_{53}	A_{28}	A_{62}	A_{35}	A_{15}	A_{45}	A_{60}	A_{51}	A_{34}	A_{24}	A_{29}	A_{59}	A_{67}	A_{17}	A_{20}	A_{19}	A_{43}	A_{69}
A_{37}	A_{33}	A_{24}	A_{71}	A_{55}	A_{65}	A_{39}	A_{15}	A_{13}	A_{29}	A_{52}	A_{64}	A_{23}	A_{44}	A_{14}	A_{34}	A_{63}	A_{50}	A_{61}	A_{25}	A_{35}	A_{16}	A_{66}	A_{58}	A_{28}	A_{18}	A_{21}	A_{69}	A_{42}
A_{38}	A_{64}	A_{36}	A_{12}	A_{14}	A_{34}	A_{27}	A_{70}	A_{52}	A_{47}	A_{13}	A_{33}	A_{60}	A_{30}	A_{55}	A_{65}	A_{20}	A_{32}	A_{26}	A_{62}	A_{49}	A_{57}	A_{31}	A_{19}	A_{67}	A_{68}	A_{41}	A_{17}	A_{22}
A_{39}	A_{53}	A_{70}	A_{26}	A_{35}	A_{15}	A_{13}	A_{37}	A_{65}	A_{61}	A_{32}	A_{12}	A_{46}	A_{21}	A_{64}	A_{54}	A_{31}	A_{27}	A_{33}	A_{48}	A_{63}	A_{66}	A_{18}	A_{30}	A_{56}	A_{40}	A_{68}	A_{23}	A_{16}
A_{40}	A_{58}	A_{69}	A_{21}	A_{28}	A_{16}	A_{18}	A_{42}	A_{66}	A_{62}	A_{31}	A_{19}	A_{49}	A_{26}	A_{67}	A_{57}	A_{32}	A_{20}	A_{30}	A_{47}	A_{60}	A_{65}	A_{13}	A_{33}	A_{55}	A_{39}	A_{71}	A_{24}	A_{15}
A_{41}	A_{67}	A_{43}	A_{19}	A_{17}	A_{29}	A_{20}	A_{69}	A_{59}	A_{48}	A_{18}	A_{30}	A_{63}	A_{33}	A_{56}	A_{66}	A_{27}	A_{31}	A_{21}	A_{61}	A_{46}	A_{54}	A_{32}	A_{12}	A_{64}	A_{71}	A_{38}	A_{14}	A_{25}
A_{42}	A_{30}	A_{23}	A_{68}	A_{56}	A_{66}	A_{40}	A_{16}	A_{18}	A_{34}	A_{59}	A_{67}	A_{24}	A_{51}	A_{17}	A_{29}	A_{60}	A_{45}	A_{62}	A_{22}	A_{28}	A_{15}	A_{65}	A_{53}	A_{35}	A_{13}	A_{26}	A_{70}	A_{37}
A_{43}	A_{19}	A_{17}	A_{41}	A_{67}	A_{57}	A_{68}	A_{22}	A_{31}	A_{25}	A_{66}	A_{58}	A_{35}	A_{61}	A_{28}	A_{16}	A_{50}	A_{63}	A_{44}	A_{29}	A_{23}	A_{34}	A_{52}	A_{64}	A_{14}	A_{27}	A_{12}	A_{36}	A_{70}
A_{44}	A_{60}	A_{18}	A_{54}	A_{22}	A_{46}	A_{35}	A_{67}	A_{33}	A_{20}	A_{21}	A_{45}	A_{68}	A_{14}	A_{34}	A_{63}	A_{37}	A_{16}	A_{43}	A_{71}	A_{26}	A_{28}	A_{51}	A_{27}	A_{61}	A_{64}	A_{15}	A_{59}	A_{30}
A_{45}	A_{32}	A_{66}	A_{34}	A_{47}	A_{23}	A_{55}	A_{19}	A_{61}	A_{68}	A_{44}	A_{20}	A_{21}	A_{36}	A_{62}	A_{35}	A_{15}	A_{42}	A_{17}	A_{27}	A_{71}	A_{60}	A_{26}	A_{50}	A_{29}	A_{14}	A_{65}	A_{31}	A_{58}
A_{46}	A_{20}	A_{52}	A_{16}	A_{62}	A_{35}	A_{67}	A_{33}	A_{44}	A_{39}	A_{61}	A_{32}	A_{12}	A_{69}	A_{47}	A_{23}	A_{22}	A_{70}	A_{24}	A_{18}	A_{41}	A_{49}	A_{30}	A_{63}	A_{25}	A_{28}	A_{57}	A_{13}	A_{64}
A_{47}	A_{45}	A_{32}	A_{66}	A_{34}	A_{63}	A_{17}	A_{53}	A_{21}	A_{13}	A_{33}	A_{60}	A_{38}	A_{23}	A_{22}	A_{46}	A_{69}	A_{25}	A_{70}	A_{40}	A_{19}	A_{24}	A_{62}	A_{31}	A_{48}	A_{56}	A_{29}	A_{65}	A_{12}
A_{48}	A_{50}	A_{31}	A_{65}	A_{29}	A_{60}	A_{14}	A_{58}	A_{26}	A_{18}	A_{30}	A_{63}	A_{41}	A_{24}	A_{25}	A_{49}	A_{70}	A_{22}	A_{69}	A_{39}	A_{12}	A_{23}	A_{61}	A_{32}	A_{47}	A_{55}	A_{34}	A_{66}	A_{19}
A_{49}	A_{27}	A_{59}	A_{15}	A_{61}	A_{28}	A_{64}	A_{30}	A_{51}	A_{40}	A_{62}	A_{31}	A_{19}	A_{70}	A_{48}	A_{24}	A_{25}	A_{69}	A_{23}	A_{13}	A_{38}	A_{46}	A_{33}	A_{60}	A_{22}	A_{35}	A_{54}	A_{18}	A_{67}
A_{50}	A_{31}	A_{65}	A_{29}	A_{48}	A_{24}	A_{56}	A_{12}	A_{62}	A_{71}	A_{51}	A_{27}	A_{26}	A_{43}	A_{61}	A_{28}	A_{16}	A_{37}	A_{14}	A_{20}	A_{68}	A_{63}	A_{21}	A_{45}	A_{34}	A_{17}	A_{66}	A_{32}	A_{53}
A_{51}	A_{63}	A_{13}	A_{57}	A_{25}	A_{49}	A_{28}	A_{64}	A_{30}	A_{27}	A_{26}	A_{50}	A_{71}	A_{17}	A_{29}	A_{60}	A_{42}	A_{15}	A_{36}	A_{68}	A_{21}	A_{35}	A_{44}	A_{20}	A_{62}	A_{67}	A_{16}	A_{52}	A_{33}
A_{52}	A_{16}	A_{62}	A_{46}	A_{20}	A_{38}	A_{34}	A_{27}	A_{70}	A_{64}	A_{23}	A_{37}	A_{29}	A_{18}	A_{71}	A_{19}	A_{53}	A_{59}	A_{35}	A_{66}	A_{68}	A_{43}	A_{25}	A_{13}	A_{63}	A_{51}	A_{31}	A_{24}	A_{61}
A_{53}	A_{70}	A_{26}	A_{35}	A_{39}	A_{21}	A_{47}	A_{63}	A_{17}	A_{28}	A_{36}	A_{22}	A_{65}	A_{52}	A_{18}	A_{71}	A_{19}	A_{58}	A_{13}	A_{67}	A_{34}	A_{12}	A_{24}	A_{42}	A_{68}	A_{62}	A_{23}	A_{30}	A_{50}
A_{54}	A_{22}	A_{44}	A_{60}	A_{18}	A_{71}	A_{25}	A_{32}	A_{36}	A_{55}	A_{17}	A_{70}	A_{16}	A_{31}	A_{39}	A_{21}	A_{64}	A_{33}	A_{66}	A_{14}	A_{57}	A_{41}	A_{69}	A_{15}	A_{27}	A_{29}	A_{49}	A_{61}	A_{20}
A_{55}	A_{37}	A_{33}	A_{24}	A_{71}	A_{19}	A_{61}	A_{45}	A_{23}	A_{17}	A_{70}	A_{16}	A_{54}	A_{65}	A_{20}	A_{38}	A_{30}	A_{67}	A_{32}	A_{56}	A_{15}	A_{26}	A_{14}	A_{69}	A_{40}	A_{48}	A_{28}	A_{21}	A_{60}
A_{56}	A_{42}	A_{30}	A_{23}	A_{68}	A_{12}	A_{62}	A_{50}	A_{24}	A_{14}	A_{69}	A_{15}	A_{57}	A_{66}	A_{27}	A_{41}	A_{33}	A_{64}	A_{31}	A_{55}	A_{16}	A_{21}	A_{17}	A_{70}	A_{39}	A_{47}	A_{35}	A_{26}	A_{63}
A_{57}	A_{25}	A_{51}	A_{63}	A_{13}	A_{68}	A_{22}	A_{31}	A_{43}	A_{56}	A_{14}	A_{69}	A_{15}	A_{32}	A_{40}	A_{26}	A_{67}	A_{30}	A_{65}	A_{17}	A_{54}	A_{58}	A_{70}	A_{16}	A_{20}	A_{34}	A_{46}	A_{62}	A_{27}
A_{58}	A_{69}	A_{21}	A_{28}	A_{40}	A_{26}	A_{48}	A_{60}	A_{14}	A_{35}	A_{43}	A_{25}	A_{66}	A_{39}	A_{13}	A_{68}	A_{12}	A_{53}	A_{18}	A_{64}	A_{29}	A_{19}	A_{23}	A_{37}	A_{71}	A_{61}	A_{24}	A_{33}	A_{45}
A_{59}	A_{15}	A_{61}	A_{49}	A_{27}	A_{41}	A_{29}	A_{20}	A_{69}	A_{67}	A_{24}	A_{42}	A_{34}	A_{13}	A_{68}	A_{12}	A_{58}	A_{19}	A_{52}	A_{28}	A_{65}	A_{71}	A_{36}	A_{22}	A_{18}	A_{25}	A_{60}	A_{44}	A_{32}
A_{60}	A_{18}	A_{54}	A_{22}	A_{44}	A_{14}

Yardımcı Teorem 6.2 *(x, y, z) noktasını $(-x, -y, -z)$ eşleyen dönüşüm olan orijine göre σ_0 inversiyonu(noktaya göre yansıma) $\mathbb{R}^3_{CD}$ ün bir izometrisidir.*

Şekil 6.7 deki tablolarda inversiyon dönüşümü altında birim kürenin köşe noktalarının görüntüleri verilmektedir.

A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}	A_{17}	A_{18}	A_{19}	A_{20}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{24}	A_{25}	A_{26}	A_{27}	A_{28}	A_{29}
A_3	A_2	A_1	A_0	A_7	A_6	A_5	A_4	A_{11}	A_{10}	A_9	A_8	A_{19}	A_{18}	A_{17}	A_{16}	A_{15}	A_{14}	A_{13}	A_{12}	A_{27}	A_{26}	A_{25}	A_{24}	A_{33}	A_{22}	A_{21}	A_{20}	A_{35}	A_{34}
A_{30}	A_{31}	A_{32}	A_{33}	A_{34}	A_{35}	A_{36}	A_{37}	A_{38}	A_{39}	A_{40}	A_{41}	A_{42}	A_{43}	A_{44}	A_{45}	A_{46}	A_{47}	A_{48}	A_{49}	A_{50}	A_{51}	A_{52}	A_{53}	A_{54}	A_{55}	A_{56}	A_{57}	A_{58}	A_{59}
A_{33}	A_{32}	A_{31}	A_{30}	A_{29}	A_{28}	A_{43}	A_{42}	A_{41}	A_{40}	A_{39}	A_{38}	A_{37}	A_{36}	A_{51}	A_{50}	A_{49}	A_{48}	A_{47}	A_{46}	A_{45}	A_{44}	A_{59}	A_{58}	A_{57}	A_{56}	A_{55}	A_{54}	A_{53}	A_{52}
A_{60}	A_{61}	A_{62}	A_{63}	A_{64}	A_{65}	A_{66}	A_{67}	A_{68}	A_{69}	A_{70}	A_{71}	A_{72}	A_{73}	A_{74}	A_{75}	A_{76}	A_{77}	A_{78}	A_{79}										
A_{63}	A_{62}	A_{61}	A_{60}	A_{67}	A_{66}	A_{65}	A_{64}	A_{71}	A_{70}	A_{69}	A_{68}	A_{79}	A_{78}	A_{77}	A_{76}	A_{75}	A_{74}	A_{73}	A_{72}										

Şekil 6.7 $\mathbb{R}^3_{CD}$ de σ_O İnversiyonu Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

Önerme 6.6 *d_{CD} uzaklığını invaryant bırakan orijine göre dönme yansımaların hepsi orijine göre inversiyon dönüşümüne eşittir.*

İspat *$r_\theta \in R_{DH}$, Γ, Δ ve Π düzlemine dik olan düzlemler olmak üzere bir dönme yansıma $\rho = \sigma_\Pi\sigma_\Delta\sigma_\Gamma = \sigma_\Pi r_\theta$ bile şkesi olarak yazılabilir. O halde dönme ekseni yansıma dü zlemine dik olmak zorundadır. D_1 ve D_3 de verilen dönme eksenlerinden hiçbiri sonuç 6.4 de verilen yansıma düzlemlerine dik olmadığından dolayı önerme 6.5 den Π d üzlemi için otuz bir dönme ekseninden on beş durum incelenmelidir. Π düzlemi olarak $x = 0$ düzlemini alalım. Bu durumda r_θ nın birim doğrultu vektörü $(1, 0, 0)$ olmak üzere*

$$\rho : \sigma_\Pi r_\theta(x, y, z) = (-x, ycos\theta - zsin\theta, ysin\theta + zcos\theta)$$

olarak tanımlıdır. Buradan $A_0 = (0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1)$, $A_{12} = \left(2 + 2\sqrt{5} - \frac{2\sqrt{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}, \frac{(5-\sqrt{5})\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5} - \frac{5+\sqrt{5}}{2}, 1\right)$, $A_{36} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{2\sqrt{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5} - \frac{5+3\sqrt{5}}{2}, \frac{7+\sqrt{5}}{2} + \frac{(\sqrt{5}-5)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}\right)$ *noktaları için,* $d_{CD}(\rho(A_0), \rho(A_{12}))$=$d_{CD}(A_0, A_{12})$ *ve* $d_{CD}(\rho(A_{12}), \rho(A_{36}))$=$d_{CD}(A_{12}, A_{36})$ *olmak zorunda olduğundan,* $X_1 = 2 + 2\sqrt{5} - \frac{2\sqrt{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$, $Y_1 = \left(4 + \frac{(\sqrt{5}-5)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{15}\right)|\cos\theta|$, $Z_1 = \left(4 + \frac{(\sqrt{5}-5)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{15}\right)|\sin\theta|$, $X_2 = \frac{2\sqrt{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5} - \frac{5+3\sqrt{5}}{2}$, $Y_2 = \left|\left(\frac{(3\sqrt{5}-5)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5} - \sqrt{5}\right)\cos\theta + \left(\frac{(5-\sqrt{5})\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5} - \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\sin\theta\right|$ *ve* $Z_2 = \left|\left(\frac{(3\sqrt{5}-5)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5} - \sqrt{5}\right)\sin\theta - \left(\frac{(5-\sqrt{5})\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5} - \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\cos\theta\right|$ *olmak üzere*

ve de $i = 1,2$ *için* $u_i = \max\{X_i, Y_i, Z_i\}$, *ayrıca* $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ *altın oran ve* $\alpha = \frac{13\sqrt{5}-5}{82} + \frac{\left(7\sqrt{5}-9\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{205}$, $\beta = \varphi\alpha$ *denilirse*

$$\max\left\{\frac{\varphi}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_1^- + \frac{1}{2\varphi}u_1^+, u_1, \beta u_1 + \alpha u_1^+\right\} = \frac{26\sqrt{5}-10}{41} + \frac{\left(5-13\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{205}$$

$$\max\left\{\frac{\varphi}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_2^- + \frac{1}{2\varphi}u_2^+, u_2, \beta u_2 + \alpha u_2^+\right\} = \frac{\left(10-2\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5} - 5 - \sqrt{5}$$

denklemleri ortaya çıkar. Bu denklemler çözülürse $\theta = \{0, \pi\}$ *elde edilir. Buradan açıkça* $\sigma_\Pi r_\pi$ *dönüşümünün* O *orijin etrafında* σ_O *inversiyonuna karşılık geldiği görülebilir. Bu durumda yeni bir dönme-yansıma yoktur. Benzer şekilde dönme eksenleri bir yansıma düzlemi normali olan* $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1, \pm\varphi, \pm(1-\varphi))$, $(\pm(1-\varphi), 1, \pm\varphi)$, $(\pm\varphi, \pm(1-\varphi), 1)$ *vektörleri içinde aynı sonuç elde edilir.*

Şekil 6.8 deki tablolar birim kürenin köşe noktalarının ilgili dönme-yansıma dönüşümleri altındaki görüntülerini vermektedir.

	(1,0,0)	(0,1,0)	(0,0,1)	((φ-1),1,φ)	((φ-1),1,-φ)	((φ-1),-1,φ)	((φ-1),-1,-φ)	(1,φ,(φ-1))	(1,-φ,(φ-1))	(-1,φ,(φ-1))	(-1,-φ,(φ-1))	(φ,(φ-1),1)	(φ,(φ-1),-1)	(-φ,(φ-1),1)	(-φ,(φ-1),-1)
A_0	A_3	A_3	A_3	A_3	A_3	A_3	A_3	A_3	A_3	A_3	A_3	A_3	A_3	A_3	A_3
A_1	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2
A_2	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1
A_3	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0
A_4	A_7	A_7	A_7	A_7	A_7	A_7	A_7	A_7	A_7	A_7	A_7	A_7	A_7	A_7	A_7
A_5	A_6	A_6	A_6	A_6	A_6	A_6	A_6	A_6	A_6	A_6	A_6	A_6	A_6	A_6	A_6
A_6	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5
A_7	A_4	A_4	A_4	A_4	A_4	A_4	A_4	A_4	A_4	A_4	A_4	A_4	A_4	A_4	A_4
A_8	A_{11}	A_{11}	A_{11}	A_{11}	A_{11}	A_{11}	A_{11}	A_{11}	A_{11}	A_{11}	A_{11}	A_{11}	A_{11}	A_{11}	A_{11}
A_9	A_{10}	A_{10}	A_{10}	A_{10}	A_{10}	A_{10}	A_{10}	A_{10}	A_{10}	A_{10}	A_{10}	A_{10}	A_{10}	A_{10}	A_{10}
A_{10}	A_9	A_9	A_9	A_9	A_9	A_9	A_9	A_9	A_9	A_9	A_9	A_9	A_9	A_9	A_9
A_{11}	A_8	A_8	A_8	A_8	A_8	A_8	A_8	A_8	A_8	A_8	A_8	A_8	A_8	A_8	A_8
A_{12}	A_{19}	A_{19}	A_{19}	A_{19}	A_{19}	A_{19}	A_{19}	A_{19}	A_{19}	A_{19}	A_{19}	A_{19}	A_{19}	A_{19}	A_{19}
A_{13}	A_{18}	A_{18}	A_{18}	A_{18}	A_{18}	A_{18}	A_{18}	A_{18}	A_{18}	A_{18}	A_{18}	A_{18}	A_{18}	A_{18}	A_{18}
A_{14}	A_{17}	A_{17}	A_{17}	A_{17}	A_{17}	A_{17}	A_{17}	A_{17}	A_{17}	A_{17}	A_{17}	A_{17}	A_{17}	A_{17}	A_{17}
A_{15}	A_{16}	A_{16}	A_{16}	A_{16}	A_{16}	A_{16}	A_{16}	A_{16}	A_{16}	A_{16}	A_{16}	A_{16}	A_{16}	A_{16}	A_{16}
A_{16}	A_{15}	A_{15}	A_{15}	A_{15}	A_{15}	A_{15}	A_{15}	A_{15}	A_{15}	A_{15}	A_{15}	A_{15}	A_{15}	A_{15}	A_{15}
A_{17}	A_{14}	A_{14}	A_{14}	A_{14}	A_{14}	A_{14}	A_{14}	A_{14}	A_{14}	A_{14}	A_{14}	A_{14}	A_{14}	A_{14}	A_{14}
A_{18}	A_{13}	A_{13}	A_{13}	A_{13}	A_{13}	A_{13}	A_{13}	A_{13}	A_{13}	A_{13}	A_{13}	A_{13}	A_{13}	A_{13}	A_{13}
A_{19}	A_{12}	A_{12}	A_{12}	A_{12}	A_{12}	A_{12}	A_{12}	A_{12}	A_{12}	A_{12}	A_{12}	A_{12}	A_{12}	A_{12}	A_{12}
A_{20}	A_{27}	A_{27}	A_{27}	A_{27}	A_{27}	A_{27}	A_{27}	A_{27}	A_{27}	A_{27}	A_{27}	A_{27}	A_{27}	A_{27}	A_{27}
A_{21}	A_{26}	A_{26}	A_{26}	A_{26}	A_{26}	A_{26}	A_{26}	A_{26}	A_{26}	A_{26}	A_{26}	A_{26}	A_{26}	A_{26}	A_{26}
A_{22}	A_{25}	A_{25}	A_{25}	A_{25}	A_{25}	A_{25}	A_{25}	A_{25}	A_{25}	A_{25}	A_{25}	A_{25}	A_{25}	A_{25}	A_{25}
A_{23}	A_{24}	A_{24}	A_{24}	A_{24}	A_{24}	A_{24}	A_{24}	A_{24}	A_{24}	A_{24}	A_{24}	A_{24}	A_{24}	A_{24}	A_{24}
A_{24}	A_{23}	A_{23}	A_{23}	A_{23}	A_{23}	A_{23}	A_{23}	A_{23}	A_{23}	A_{23}	A_{23}	A_{23}	A_{23}	A_{23}	A_{23}
A_{25}	A_{22}	A_{22}	A_{22}	A_{22}	A_{22}	A_{22}	A_{22}	A_{22}	A_{22}	A_{22}	A_{22}	A_{22}	A_{22}	A_{22}	A_{22}
A_{26}	A_{21}	A_{21}	A_{21}	A_{21}	A_{21}	A_{21}	A_{21}	A_{21}	A_{21}	A_{21}	A_{21}	A_{21}	A_{21}	A_{21}	A_{21}
A_{27}	A_{20}	A_{20}	A_{20}	A_{20}	A_{20}	A_{20}	A_{20}	A_{20}	A_{20}	A_{20}	A_{20}	A_{20}	A_{20}	A_{20}	A_{20}
A_{28}	A_{35}	A_{35}	A_{35}	A_{35}	A_{35}	A_{35}	A_{35}	A_{35}	A_{35}	A_{35}	A_{35}	A_{35}	A_{35}	A_{35}	A_{35}
A_{29}	A_{34}	A_{34}	A_{34}	A_{34}	A_{34}	A_{34}	A_{34}	A_{34}	A_{34}	A_{34}	A_{34}	A_{34}	A_{34}	A_{34}	A_{34}
A_{30}	A_{33}	A_{33}	A_{33}	A_{33}	A_{33}	A_{33}	A_{33}	A_{33}	A_{33}	A_{33}	A_{33}	A_{33}	A_{33}	A_{33}	A_{33}
A_{31}	A_{32}	A_{32}	A_{32}	A_{32}	A_{32}	A_{32}	A_{32}	A_{32}	A_{32}	A_{32}	A_{32}	A_{32}	A_{32}	A_{32}	A_{32}
A_{32}	A_{31}	A_{31}	A_{31}	A_{31}	A_{31}	A_{31}	A_{31}	A_{31}	A_{31}	A_{31}	A_{31}	A_{31}	A_{31}	A_{31}	A_{31}
A_{33}	A_{30}	A_{30}	A_{30}	A_{30}	A_{30}	A_{30}	A_{30}	A_{30}	A_{30}	A_{30}	A_{30}	A_{30}	A_{30}	A_{30}	A_{30}
A_{34}	A_{29}	A_{29}	A_{29}	A_{29}	A_{29}	A_{29}	A_{29}	A_{29}	A_{29}	A_{29}	A_{29}	A_{29}	A_{29}	A_{29}	A_{29}
A_{35}	A_{28}	A_{28}	A_{28}	A_{28}	A_{28}	A_{28}	A_{28}	A_{28}	A_{28}	A_{28}	A_{28}	A_{28}	A_{28}	A_{28}	A_{28}
A_{36}	A_{43}	A_{43}	A_{43}	A_{43}	A_{43}	A_{43}	A_{43}	A_{43}	A_{43}	A_{43}	A_{43}	A_{43}	A_{43}	A_{43}	A_{43}
A_{37}	A_{42}	A_{42}	A_{42}	A_{42}	A_{42}	A_{42}	A_{42}	A_{42}	A_{42}	A_{42}	A_{42}	A_{42}	A_{42}	A_{42}	A_{42}
A_{38}	A_{41}	A_{41}	A_{41}	A_{41}	A_{41}	A_{41}	A_{41}	A_{41}	A_{41}	A_{41}	A_{41}	A_{41}	A_{41}	A_{41}	A_{41}
A_{39}	A_{40}	A_{40}	A_{40}	A_{40}	A_{40}	A_{40}	A_{40}	A_{40}	A_{40}	A_{40}	A_{40}	A_{40}	A_{40}	A_{40}	A_{40}
A_{40}	A_{39}	A_{39}	A_{39}	A_{39}	A_{39}	A_{39}	A_{39}	A_{39}	A_{39}	A_{39}	A_{39}	A_{39}	A_{39}	A_{39}	A_{39}
A_{41}	A_{38}	A_{38}	A_{38}	A_{38}	A_{38}	A_{38}	A_{38}	A_{38}	A_{38}	A_{38}	A_{38}	A_{38}	A_{38}	A_{38}	A_{38}
A_{42}	A_{37}	A_{37}	A_{37}	A_{37}	A_{37}	A_{37}	A_{37}	A_{37}	A_{37}	A_{37}	A_{37}	A_{37}	A_{37}	A_{37}	A_{37}
A_{43}	A_{36}	A_{36}	A_{36}	A_{36}	A_{36}	A_{36}	A_{36}	A_{36}	A_{36}	A_{36}	A_{36}	A_{36}	A_{36}	A_{36}	A_{36}
A_{44}	A_{51}	A_{51}	A_{51}	A_{51}	A_{51}	A_{51}	A_{51}	A_{51}	A_{51}	A_{51}	A_{51}	A_{51}	A_{51}	A_{51}	A_{51}
A_{45}	A_{50}	A_{50}	A_{50}	A_{50}	A_{50}	A_{50}	A_{50}	A_{50}	A_{50}	A_{50}	A_{50}	A_{50}	A_{50}	A_{50}	A_{50}
A_{46}	A_{49}	A_{49}	A_{49}	A_{49}	A_{49}	A_{49}	A_{49}	A_{49}	A_{49}	A_{49}	A_{49}	A_{49}	A_{49}	A_{49}	A_{49}
A_{47}	A_{48}	A_{48}	A_{48}	A_{48}	A_{48}	A_{48}	A_{48}	A_{48}	A_{48}	A_{48}	A_{48}	A_{48}	A_{48}	A_{48}	A_{48}
A_{48}	A_{47}	A_{47}	A_{47}	A_{47}	A_{47}	A_{47}	A_{47}	A_{47}	A_{47}	A_{47}	A_{47}	A_{47}	A_{47}	A_{47}	A_{47}
A_{49}	A_{46}	A_{46}	A_{46}	A_{46}	A_{46}	A_{46}	A_{46}	A_{46}	A_{46}	A_{46}	A_{46}	A_{46}	A_{46}	A_{46}	A_{46}
A_{50}	A_{45}	A_{45}	A_{45}	A_{45}	A_{45}	A_{45}	A_{45}	A_{45}	A_{45}	A_{45}	A_{45}	A_{45}	A_{45}	A_{45}	A_{45}
A_{51}	A_{44}	A_{44}	A_{44}	A_{44}	A_{44}	A_{44}	A_{44}	A_{44}	A_{44}	A_{44}	A_{44}	A_{44}	A_{44}	A_{44}	A_{44}
A_{52}	A_{59}	A_{59}	A_{59}	A_{59}	A_{59}	A_{59}	A_{59}	A_{59}	A_{59}	A_{59}	A_{59}	A_{59}	A_{59}	A_{59}	A_{59}
A_{53}	A_{58}	A_{58}	A_{58}	A_{58}	A_{58}	A_{58}	A_{58}	A_{58}	A_{58}	A_{58}	A_{58}	A_{58}	A_{58}	A_{58}	A_{58}
A_{54}	A_{57}	A_{57}	A_{57}	A_{57}	A_{57}	A_{57}	A_{57}	A_{57}	A_{57}	A_{57}	A_{57}	A_{57}	A_{57}	A_{57}	A_{57}
A_{55}	A_{56}	A_{56}	A_{56}	A_{56}	A_{56}	A_{56}	A_{56}	A_{56}	A_{56}	A_{56}	A_{56}	A_{56}	A_{56}	A_{56}	A_{56}
A_{56}	A_{55}	A_{55}	A_{55}	A_{55}	A_{55}	A_{55}	A_{55}	A_{55}	A_{55}	A_{55}	A_{55}	A_{55}	A_{55}	A_{55}	A_{55}
A_{57}	A_{54}	A_{54}	A_{54}	A_{54}	A_{54}	A_{54}	A_{54}	A_{54}	A_{54}	A_{54}	A_{54}	A_{54}	A_{54}	A_{54}	A_{54}
A_{58}	A_{53}	A_{53}	A_{53}	A_{53}	A_{53}	A_{53}	A_{53}	A_{53}	A_{53}	A_{53}	A_{53}	A_{53}	A_{53}	A_{53}	A_{53}
A_{59}	A_{52}	A_{52}	A_{52}	A_{52}	A_{52}	A_{52}	A_{52}	A_{52}	A_{52}	A_{52}	A_{52}	A_{52}	A_{52}	A_{52}	A_{52}
A_{60}	A_{63}	A_{63}	A_{63}	A_{63}	A_{63}	A_{63}	A_{63}	A_{63}	A_{63}	A_{63}	A_{63}	A_{63}	A_{63}	A_{63}	A_{63}
A_{61}	A_{62}	A_{62}	A_{62}	A_{62}	A_{62}	A_{62}	A_{62}	A_{62}	A_{62}	A_{62}	A_{62}	A_{62}	A_{62}	A_{62}	A_{62}
A_{62}	A_{61}	A_{61}	A_{61}	A_{61}	A_{61}	A_{61}	A_{61}	A_{61}	A_{61}	A_{61}	A_{61}	A_{61}	A_{61}	A_{61}	A_{61}
A_{63}	A_{60}	A_{60}	A_{60}	A_{60}	A_{60}	A_{60}	A_{60}	A_{60}	A_{60}	A_{60}	A_{60}	A_{60}	A_{60}	A_{60}	A_{60}
A_{64}	A_{67}	A_{67}	A_{67}	A_{67}	A_{67}	A_{67}	A_{67}	A_{67}	A_{67}	A_{67}	A_{67}	A_{67}	A_{67}	A_{67}	A_{67}
A_{65}	A_{66}	A_{66}	A_{66}	A_{66}	A_{66}	A_{66}	A_{66}	A_{66}	A_{66}	A_{66}	A_{66}	A_{66}	A_{66}	A_{66}	A_{66}
A_{66}	A_{65}	A_{65}	A_{65}	A_{65}	A_{65}	A_{65}	A_{65}	A_{65}	A_{65}	A_{65}	A_{65}	A_{65}	A_{65}	A_{65}	A_{65}
A_{67}	A_{64}	A_{64}	A_{64}	A_{64}	A_{64}	A_{64}	A_{64}	A_{64}	A_{64}	A_{64}	A_{64}	A_{64}	A_{64}	A_{64}	A_{64}
A_{68}	A_{71}	A_{71}	A_{71}	A_{71}	A_{71}	A_{71}	A_{71}	A_{71}	A_{71}	A_{71}	A_{71}	A_{71}	A_{71}	A_{71}	A_{71}
A_{69}	A_{70}	A_{70}	A_{70}	A_{70}	A_{70}	A_{70}	A_{70}	A_{70}	A_{70}	A_{70}	A_{70}	A_{70}	A_{70}	A_{70}	A_{70}
A_{70}	A_{69}	A_{69}	A_{69}	A_{69}	A_{69}	A_{69}	A_{69}	A_{69}	A_{69}	A_{69}	A_{69}	A_{69}	A_{69}	A_{69}	A_{69}
A_{71}	A_{68}	A_{68}	A_{68}	A_{68}	A_{68}	A_{68}	A_{68}	A_{68}	A_{68}	A_{68}	A_{68}	A_{68}	A_{68}	A_{68}	A_{68}
A_{72}	A_{79}	A_{79}	A_{79}	A_{79}	A_{79}	A_{79}	A_{79}	A_{79}	A_{79}	A_{79}	A_{79}	A_{79}	A_{79}	A_{79}	A_{79}
A_{73}	A_{78}	A_{78}	A_{78}	A_{78}	A_{78}	A_{78}	A_{78}	A_{78}	A_{78}	A_{78}	A_{78}	A_{78}	A_{78}	A_{78}	A_{78}
A_{74}	A_{77}	A_{77}	A_{77}	A_{77}	A_{77}	A_{77}	A_{77}	A_{77}	A_{77}	A_{77}	A_{77}	A_{77}	A_{77}	A_{77}	A_{77}
A_{75}	A_{76}	A_{76}	A_{76}	A_{76}	A_{76}	A_{76}	A_{76}	A_{76}	A_{76}	A_{76}	A_{76}	A_{76}	A_{76}	A_{76}	A_{76}
A_{76}	A_{75}	A_{75}	A_{75}	A_{75}	A_{75}	A_{75}	A_{75}	A_{75}	A_{75}	A_{75}	A_{75}	A_{75}	A_{75}	A_{75}	A_{75}
A_{77}	A_{74}	A_{74}	A_{74}	A_{74}	A_{74}	A_{74}	A_{74}	A_{74}	A_{74}	A_{74}	A_{74}	A_{74}	A_{74}	A_{74}	A_{74}
A_{78}	A_{73}	A_{73}	A_{73}	A_{73}	A_{73}	A_{73}	A_{73}	A_{73}	A_{73}	A_{73}	A_{73}	A_{73}	A_{73}	A_{73}	A_{73}
A_{79}	A_{72}	A_{72}	A_{72}	A_{72}	A_{72}	A_{72}	A_{72}	A_{72}	A_{72}	A_{72}	A_{72}	A_{72}	A_{72}	A_{72}	A_{72}

Şekil 6.8 $\mathbb{R}^3_{CD}$ de Dönme Yansıma Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

Önerme 6.7 *d_{CD}- uzaklığını koruyan orijine göre kırk dört dönme inversiyon vardır.*

İspat *$r_\theta \in R_{CD}$ olmak üzere, bir dönme inversiyon $\rho = \sigma_O\sigma_\Delta\sigma_\Gamma = \sigma_O r_\theta$ bile şkesi olarak yazılabilir. Böylece önerme 6.5 deki otuz bir dönme ekseni için ispat verilmelidir.*

r_θ, dönme ekseni $(1,(1-\varphi),0)$ dönme eksenine paralel ise $\left(\frac{1}{\sqrt{2-2\varphi+\varphi^2}}, \frac{1-\varphi}{\sqrt{2-2\varphi+\varphi^2}}, 0\right)$ birim normal yön vektörü olur. Bu durumda

$$\rho(x,y,z)=\sigma_O r_\theta=\begin{pmatrix} -\cos\theta x + \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\sin\theta y - \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\sin\theta z, \\ -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\sin\theta x - (\cos\theta + \frac{50+10\sqrt{5}}{100}(1-\cos\theta))y - \frac{\sqrt{5}}{5}(1-\cos\theta))z, \\ \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\sin\theta x - \frac{\sqrt{5}}{5}(1-\cos\theta)y - (\cos\theta + \frac{50-10\sqrt{5}}{100}(1-\cos\theta))z \end{pmatrix}$$

$\rho(A_0), \rho(A_{12})$ ve $\rho(A_{36})$ hesaplanıp $d_{CD}(r_\theta(A_0), r_\theta(A_{12})) = \frac{26\sqrt{5}-10}{41} + \frac{(5-13\sqrt{5})\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{205}$ ve $d_{CD}(r_\theta(A_{12}), r_\theta(A_{36})) = \frac{(10-2\sqrt{5})\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5} - 5 - \sqrt{5}$ ifadelerinde yerine yazılırsa,

$$X_1=\left|-\tfrac{57}{2}+\tfrac{93\sqrt{5}}{10}-\tfrac{2\sqrt{5}}{5}+\left(80+\tfrac{4\sqrt{5}}{5}+\left(\tfrac{3+39\sqrt{5}}{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}\right)\cos\theta\right|,$$

$$Y_1=\left|\tfrac{4\sqrt{5}}{5}-\tfrac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}+\left(-\tfrac{10+2\sqrt{5}}{5}-40\left(1+\sqrt{5}\right)+\left(\tfrac{3+39\sqrt{5}}{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}\right)\cos\theta\right|,$$

$$Z_1=\left(\tfrac{2\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}-80\sqrt{5}+\tfrac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}(\sqrt{5}+1)}{5}-\tfrac{5(\sqrt{5}-5)\sqrt{30+10\sqrt{5}}}{50}\right)|\sin\theta|,$$

$$X_2=\left|\begin{array}{r} 1+\frac{(\sqrt{5}-3)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}+\left(\frac{2\sqrt{25+10\sqrt{5}}-\sqrt{5}}{20}-\frac{\sqrt{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{50}-\frac{1}{4}\right)\sqrt{50-10\sqrt{5}}\sin\theta \\ +\left(-20\sqrt{5}+\left(12\sqrt{5}-20\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}\right)\cos\theta \end{array}\right|,$$

$$Y_2=\left|\begin{array}{r} \frac{(4-2\sqrt{5})\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}+\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\left(\frac{\sqrt{5}+5}{20}+\frac{(\sqrt{5}-5)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{50}-\frac{1}{4}\right)\sqrt{50+10\sqrt{5}}\sin\theta \\ +\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\frac{(1-\sqrt{5})}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}\right)\cos\theta \end{array}\right| \text{ ve}$$

$$Z_2=\left|\left(\tfrac{\sqrt{5}}{10}+\tfrac{(5-3\sqrt{5})\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{50}\right)\sqrt{50+10\sqrt{5}}\sin\theta+\left(-\tfrac{\sqrt{5}+5}{2}+\tfrac{(5-\sqrt{5})}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}\right)\cos\theta\right|$$

olmak üzere ve de $i = 1,2$ için $u_i = \max\{X_i, Y_i, Z_i\}$, ayrıca $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ altın oran ve $\alpha = \frac{13\sqrt{5}-5}{82} + \frac{(7\sqrt{5}-9)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{205}$, $\beta = \varphi\alpha$ denilirse

$$\max\left\{\frac{\varphi}{2}u_1+\frac{1}{2}u_1^- +\frac{1}{2\varphi}u_1^+, u_1, \beta u_1+\alpha u_1^+\right\} = \frac{26\sqrt{5}-10}{41}+\frac{\left(5-13\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{205}$$

$$\max\left\{\frac{\varphi}{2}u_2+\frac{1}{2}u_2^- +\frac{1}{2\varphi}u_2^+, u_2, \beta u_2+\alpha u_2^+\right\} = \frac{\left(10-2\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}-5-\sqrt{5}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülürse $\theta = 2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5$ sonuçları bulunur. Benzer şekilde, eğer l doğrusunun yön vektörü;

$$(\pm(1-\varphi), 0, 1), (1, \pm(1-\varphi), 0), (0, 1, \pm(1-\varphi))$$

olarak alınır ise

$$\theta = 2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5$$

olur.

r_θ, *dönme ekseni* $(1,1,1)$ *dönme eksenine paralel ise* r_θ *nın birim normal yön vektörü* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olur. Bu durumda*

$$\rho(x,y,z) = \sigma_O r_\theta = \begin{pmatrix} -x\left[\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\theta\right] - y\left[\frac{(1-\cos\theta)}{3} - \frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right] - z\left[\frac{(1-\cos\theta)}{3} + \frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right], \\ -x\left[\frac{(1-\cos\theta)}{3} + \frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right] - y\left[\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\theta\right] - z\left[\frac{(1-\cos\theta)}{3} - \frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right], \\ -x\left[\frac{(1-\cos\theta)}{3} - \frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right] - y\left[\frac{(1-\cos\theta)}{3} + \frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right] - z\left[\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\theta\right] \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan $\rho(A_0)$, $\rho(A_{12})$ *ve* $\rho(A_{36})$ *hesaplanıp*

$$d_{CD}(r_\theta(A_0), r_\theta(A_{12})) = \frac{26\sqrt{5} - 10}{41} + \frac{\left(5 - 13\sqrt{5}\right)\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{205}$$

ve

$$d_{CD}(r_\theta(A_{12}), r_\theta(A_{36})) = \frac{\left(10 - 2\sqrt{5}\right)\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{5} - 5 - \sqrt{5}$$

bağıntılarında yerine yazılırsa,

$$X_1 = \left| \frac{10\sqrt{5}\text{-}10 + \left(5\text{-}3\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{15} + \left(\frac{8+4\sqrt{5}}{3} \text{-} \frac{\left(3\sqrt{5}+5\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{15} \right)\cos\theta + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{\left(\sqrt{15}\text{-}5\sqrt{3}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{15} \right)\sin\theta \right|,$$

$$Y_1 = \left| \frac{2\sqrt{5}\text{-}2}{3} + \frac{\left(5\text{-}3\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{15} + \left(\frac{2\sqrt{25+10\sqrt{5}}\text{-}\left(10+2\sqrt{5}\right)}{3} \right)\cos\theta + \left(\frac{2\sqrt{3}+2\sqrt{15}}{3} + \frac{2\sqrt{15}\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{15} \right)\sin\theta \right|,$$

$$Z_1 = \left| \frac{2\sqrt{5}\text{-}2}{3} + \frac{\left(5\text{-}3\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{15} + \left(\frac{2\text{-}2\sqrt{5}}{3} + \frac{\left(3\sqrt{5}\text{-}5\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{15} \right)\cos\theta + \left(\frac{\left(\sqrt{15}+5\sqrt{3}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{15} \text{-} \frac{6\sqrt{3}+2\sqrt{15}}{3} \right)\sin\theta \right|,$$

$$X_2 = \left| \frac{\sqrt{5}\text{-}5}{6} + \frac{\left(10\text{-}4\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{15} + \left(\frac{5\text{-}\sqrt{5}}{6} + \frac{\left(4\sqrt{5}\text{-}10\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{15} \right)\cos\theta + \left(\frac{2\sqrt{15}\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{15} \text{-} \frac{3\sqrt{15}+5\sqrt{3}}{6} \right)\sin\theta \right|,$$

$$Y_2 = \left| \frac{\sqrt{5}\text{-}5}{6} + \frac{\left(10\text{-}4\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{15} + \left(\frac{5+5\sqrt{5}}{6} + \frac{\left(1\text{-}\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{3} \right)\cos\theta + \left(\frac{\sqrt{15}+5\sqrt{3}}{6} \text{-} \frac{\left(\sqrt{15}\text{-}5\sqrt{3}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{15} \right)\sin\theta \right|$$

ve

$$Z_2 = \left| \frac{\sqrt{5}\text{-}5}{6} + \frac{\left(10\text{-}4\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{15} + \left(\frac{\left(5+\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{15} \text{-} \frac{5+2\sqrt{5}}{3} \right)\cos\theta + \left(\frac{\sqrt{15}}{3} \text{-} \frac{\left(5\sqrt{3}\text{-}3\sqrt{15}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{15} \right)\sin\theta \right|$$

olmak üzere ve de $i = 1,2$ *için* $u_i = \max\{X_i, Y_i, Z_i\}$, *ayrıca* $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ *altın oran ve* $\alpha = \frac{13\sqrt{5}-5}{82} + \frac{\left(7\sqrt{5}-9\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{205}$, $\beta = \varphi\alpha$ *denilirse*

$$\max\left\{\frac{\varphi}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_1^- + \frac{1}{2\varphi}u_1^+, u_1, \beta u_1 + \alpha u_1^+\right\} = \frac{26\sqrt{5} - 10}{41} + \frac{\left(5 - 13\sqrt{5}\right)\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{205}$$

$$\max\left\{\frac{\varphi}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_2^- + \frac{1}{2\varphi}u_2^+, u_2, \beta u_2 + \alpha u_2^+\right\} = \frac{\left(10 - 2\sqrt{5}\right)\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{5} - 5 - \sqrt{5}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülür ise $\theta = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$ *elde edilir. Benzer şekilde, eğer l nin yön vektörü*

$$(-1,1,1), (1,-1,1), (1,1,-1), (\pm(2-\varphi), 1, 0), (0, \pm(2-\varphi), 1), (1, 0, \pm(2-\varphi))$$

ise $\theta = \{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$ *elde edilir.*

r_θ, *dönme ekseni* $(1,0,0)$ *doğrultulu doğru ise birim normal yön vektörü* $(1,0,0)$ *olur. Bu durumda*

$$\rho(x,y,z) = \sigma_O r_\theta(x,y,z) = (-x, -y\cos\theta + z\sin\theta, -y\sin\theta - z\cos\theta)$$

şeklinde tanımlanır. Buradan $\rho(A_0)$, $\rho(A_{12})$ *ve* $\rho(A_{36})$ *hesaplanıp*

$$d_{CD}(r_\theta(A_0), r_\theta(A_{12})) = \frac{26\sqrt{5}-10}{41} + \frac{\left(5-13\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{205}$$

ve

$$d_{CD}(r_\theta(A_{12}), r_\theta(A_{36})) = \frac{\left(10-2\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5} - 5 - \sqrt{5}$$

bağıntılarında yerine yazılırsa, $X_1 = 2 + 2\sqrt{5} - \frac{2\sqrt{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$,
$Y_1 = \left(4 + \frac{\left(\sqrt{5}-5\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}\right)|\cos\theta|$, $Z_1 = \left(4 + \frac{\left(\sqrt{5}-5\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}\right)|\sin\theta|$, $X_2 = 0$, $Y_2 = \left|\left(\sqrt{5} + \frac{\left(5-3\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}\right)\cos\theta + \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2} + \frac{\left(\sqrt{5}-5\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}\right)\sin\theta\right|$ *ve*
$Z_2 = \left|\left(\frac{\left(\sqrt{5}-5\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5} - \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\cos\theta + \left(\sqrt{5} + \frac{\left(5-3\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}\right)\sin\theta\right|$ *olmak üzere ve de* $i = 1,2$ *için* $u_i = \max\{X_i, Y_i, Z_i\}$, *ayrıca* $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ *altın oran ve* $\alpha = \frac{13\sqrt{5}-5}{82} + \frac{\left(7\sqrt{5}-9\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{205}$, $\beta = \varphi\alpha$ *denilirse*

$$\max\left\{\frac{\varphi}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_1^- + \frac{1}{2\varphi}u_1^+, u_1, \beta u_1 + \alpha u_1^+\right\} = \frac{26\sqrt{5}-10}{41} + \frac{\left(5-13\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{205}$$

$$\max\left\{\frac{\varphi}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_2^- + \frac{1}{2\varphi}u_2^+, u_2, \beta u_2 + \alpha u_2^+\right\} = \frac{\left(10-2\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5} - 5 - \sqrt{5}$$

denklemlerine ulaşılır. Bu denklemler çözülür ise $\theta = \{0, \pi\}$ *elde edilir. Fakat* $\theta = \pi$ *için hesaplamalar yapıldığında* $\sigma_o r_\pi$ *dönüşümünün* $x = 0$ *düzlemine göre yansıma hareketine karşılık geldiği görülmektedir. Benzer şekilde, eğer l doğrusunun yön vektörü*

$$(0,1,0), (0,0,1), (1, \pm\varphi, \pm(1-\varphi)), (\pm(1-\varphi), 1, \pm\varphi), (\pm\varphi, \pm(1-\varphi), 1)$$

ise $\theta = \{0, \pi\}$ *bulunur. Eğer* $\theta = \pi$ *için dönme ekseni doğrultu vektörü bu vektöre paralel olacak şekilde alınır ve dönme -inversiyon hareketi yapılırsa benzer şekilde önerme 6.4 de tespit edilen bir düzleme göre yansıma hareketleri bulunur. Yani bu durumlarda yeni bir hareket olacak şekilde dönme-inversiyon yoktur.*

Şekil6.9 ve Şekil6.10 daki tablolar birim kürenin köşe noktalarının ilgili dönme-inversiyon dönüşümü altındaki görüntülerini verir.

	(1,0,0)	(0,1,0)	(0,0,1)	(1,1,1)		(-1,1,1)		(1,-1,1)		(1,1,-1)		(0,(2-φ),1)		(0,-(2-φ),1)		((2-φ),1,0)		(-(2-φ),1,0)		(1,0,(2-φ))		(1,0,-(2-φ))		(0,1,(1-φ))				(0,1,-(1-φ))			
	π	π	π	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/5	4π/5	6π/5	8π/5	2π/5	4π/5	6π/5	8π/5
A_0	A_0	A_2	A_1	A_7	A_{11}	A_9	A_5	A_8	A_6	A_{10}	A_4	A_3	A_3	A_{77}	A_{73}	A_6	A_{74}	A_4	A_{78}	A_{10}	A_{78}	A_{74}	A_8	A_{79}	A_{11}	A_9	A_{75}	A_7	A_{76}	A_{72}	A_5
A_1	A_1	A_3	A_0	A_5	A_{10}	A_8	A_7	A_9	A_4	A_{11}	A_6	A_{72}	A_{76}	A_2	A_2	A_{75}	A_7	A_{79}	A_5	A_{75}	A_8	A_{10}	A_{79}	A_4	A_{73}	A_{77}	A_6	A_{74}	A_9	A_{11}	A_{78}
A_2	A_2	A_0	A_3	A_6	A_9	A_{11}	A_4	A_{10}	A_7	A_8	A_5	A_{79}	A_{75}	A_1	A_1	A_{76}	A_4	A_{72}	A_6	A_{76}	A_{11}	A_9	A_{72}	A_7	A_{78}	A_{74}	A_5	A_{77}	A_{10}	A_8	A_{73}
A_3	A_3	A_1	A_2	A_4	A_8	A_{10}	A_6	A_{11}	A_5	A_9	A_7	A_0	A_0	A_{74}	A_{78}	A_5	A_{77}	A_7	A_{73}	A_9	A_{73}	A_{77}	A_{11}	A_{72}	A_8	A_{10}	A_{76}	A_4	A_{75}	A_{79}	A_6
A_4	A_6	A_4	A_5	A_{11}	A_3	A_2	A_8	A_1	A_{10}	A_0	A_9	A_9	A_{73}	A_8	A_{75}	A_2	A_{75}	A_{73}	A_0	A_7	A_7	A_{78}	A_{76}	A_{78}	A_{74}	A_5	A_1	A_{76}	A_{72}	A_5	A_3
A_5	A_7	A_5	A_4	A_9	A_1	A_0	A_{10}	A_3	A_8	A_2	A_{11}	A_{74}	A_8	A_{72}	A_9	A_{74}	A_3	A_1	A_{72}	A_{79}	A_{77}	A_6	A_6	A_2	A_4	A_{73}	A_{77}	A_0	A_4	A_{75}	A_{79}
A_6	A_4	A_6	A_7	A_{10}	A_2	A_3	A_9	A_0	A_{11}	A_1	A_8	A_{77}	A_{11}	A_{79}	A_{10}	A_{77}	A_0	A_2	A_{79}	A_{72}	A_{74}	A_5	A_5	A_1	A_7	A_{78}	A_{74}	A_3	A_7	A_{76}	A_{72}
A_7	A_5	A_7	A_6	A_8	A_0	A_1	A_{11}	A_2	A_9	A_3	A_{10}	A_{10}	A_{78}	A_{11}	A_{76}	A_1	A_{76}	A_{78}	A_3	A_4	A_4	A_{73}	A_{75}	A_{73}	A_{77}	A_6	A_2	A_{75}	A_{79}	A_6	A_0
A_8	A_{10}	A_9	A_8	A_3	A_7	A_4	A_1	A_5	A_0	A_6	A_2	A_5	A_{77}	A_{76}	A_4	A_{11}	A_{11}	A_{75}	A_{74}	A_1	A_{76}	A_0	A_{77}	A_9	A_{75}	A_5	A_{79}	A_{78}	A_2	A_{74}	A_9
A_9	A_{11}	A_8	A_9	A_2	A_5	A_6	A_0	A_7	A_1	A_4	A_3	A_{78}	A_4	A_5	A_{79}	A_{72}	A_{73}	A_{10}	A_{10}	A_{78}	A_3	A_{79}	A_2	A_{76}	A_0	A_{72}	A_8	A_8	A_{73}	A_1	A_{77}
A_{10}	A_8	A_{11}	A_{10}	A_1	A_6	A_5	A_3	A_4	A_2	A_7	A_0	A_{73}	A_7	A_6	A_{72}	A_{79}	A_{78}	A_9	A_9	A_{73}	A_0	A_{72}	A_1	A_{75}	A_3	A_{79}	A_{11}	A_{11}	A_{78}	A_2	A_{74}
A_{11}	A_9	A_{10}	A_{11}	A_0	A_4	A_7	A_2	A_6	A_3	A_5	A_1	A_6	A_{74}	A_{75}	A_7	A_8	A_8	A_{76}	A_7	A_2	A_{75}	A_3	A_{74}	A_{10}	A_{76}	A_0	A_{72}	A_{73}	A_1	A_{77}	A_{10}
A_{12}	A_{16}	A_{14}	A_{13}	A_{27}	A_{35}	A_{30}	A_{21}	A_{29}	A_{24}	A_{32}	A_{22}	A_{43}	A_{15}	A_{57}	A_{37}	A_{66}	A_{46}	A_{20}	A_{42}	A_{70}	A_{50}	A_{54}	A_{28}	A_{51}	A_{34}	A_{69}	A_{39}	A_{25}	A_{56}	A_{44}	A_{65}
A_{13}	A_{17}	A_{15}	A_{12}	A_{23}	A_{33}	A_{28}	A_{25}	A_{31}	A_{20}	A_{34}	A_{26}	A_{36}	A_{56}	A_{14}	A_{62}	A_{47}	A_{67}	A_{43}	A_{21}	A_{55}	A_{29}	A_{70}	A_{51}	A_{64}	A_{45}	A_{57}	A_{24}	A_{38}	A_{69}	A_{35}	A_{50}
A_{14}	A_{18}	A_{12}	A_{15}	A_{26}	A_{31}	A_{34}	A_{20}	A_{33}	A_{25}	A_{28}	A_{23}	A_{39}	A_{59}	A_{61}	A_{13}	A_{40}	A_{22}	A_{44}	A_{66}	A_{48}	A_{71}	A_{30}	A_{52}	A_{27}	A_{58}	A_{46}	A_{65}	A_{49}	A_{32}	A_{68}	A_{37}
A_{15}	A_{19}	A_{13}	A_{14}	A_{22}	A_{29}	A_{32}	A_{24}	A_{35}	A_{21}	A_{30}	A_{27}	A_{12}	A_{60}	A_{38}	A_{58}	A_{23}	A_{41}	A_{67}	A_{45}	A_{31}	A_{53}	A_{49}	A_{71}	A_{36}	A_{68}	A_{33}	A_{48}	A_{64}	A_{47}	A_{59}	A_{26}
A_{16}	A_{12}	A_{18}	A_{17}	A_{25}	A_{34}	A_{31}	A_{23}	A_{28}	A_{26}	A_{33}	A_{20}	A_{19}	A_{63}	A_{41}	A_{53}	A_{24}	A_{38}	A_{64}	A_{50}	A_{32}	A_{58}	A_{46}	A_{68}	A_{43}	A_{71}	A_{30}	A_{47}	A_{67}	A_{48}	A_{52}	A_{21}
A_{17}	A_{13}	A_{19}	A_{16}	A_{21}	A_{32}	A_{29}	A_{27}	A_{30}	A_{22}	A_{35}	A_{24}	A_{32}	A_{40}	A_{62}	A_{18}	A_{39}	A_{25}	A_{51}	A_{65}	A_{47}	A_{68}	A_{33}	A_{59}	A_{20}	A_{33}	A_{49}	A_{66}	A_{46}	A_{31}	A_{71}	A_{42}
A_{18}	A_{14}	A_{16}	A_{19}	A_{24}	A_{30}	A_{35}	A_{22}	A_{32}	A_{27}	A_{39}	A_{21}	A_{43}	A_{55}	A_{17}	A_{61}	A_{48}	A_{64}	A_{36}	A_{26}	A_{36}	A_{34}	A_{69}	A_{44}	A_{67}	A_{50}	A_{54}	A_{23}	A_{41}	A_{70}	A_{28}	A_{45}
A_{19}	A_{15}	A_{17}	A_{18}	A_{20}	A_{28}	A_{33}	A_{26}	A_{34}	A_{23}	A_{31}	A_{25}	A_{60}	A_{16}	A_{54}	A_{42}	A_{65}	A_{49}	A_{27}	A_{37}	A_{69}	A_{45}	A_{57}	A_{35}	A_{44}	A_{29}	A_{70}	A_{40}	A_{22}	A_{55}	A_{51}	A_{66}
A_{20}	A_{24}	A_{22}	A_{21}	A_{35}	A_{19}	A_{14}	A_{29}	A_{13}	A_{32}	A_{16}	A_{30}	A_{69}	A_{53}	A_{28}	A_{47}	A_{62}	A_{55}	A_{37}	A_{12}	A_{67}	A_{25}	A_{42}	A_{48}	A_{58}	A_{46}	A_{65}	A_{23}	A_{17}	A_{40}	A_{36}	A_{23}	A_{63}
A_{21}	A_{25}	A_{23}	A_{20}	A_{31}	A_{17}	A_{12}	A_{33}	A_{15}	A_{28}	A_{18}	A_{34}	A_{46}	A_{39}	A_{52}	A_{69}	A_{54}	A_{63}	A_{13}	A_{36}	A_{43}	A_{49}	A_{66}	A_{24}	A_{62}	A_{22}	A_{37}	A_{41}	A_{16}	A_{64}	A_{47}	A_{59}
A_{22}	A_{26}	A_{20}	A_{23}	A_{34}	A_{15}	A_{18}	A_{28}	A_{17}	A_{33}	A_{12}	A_{31}	A_{30}	A_{45}	A_{68}	A_{55}	A_{14}	A_{39}	A_{53}	A_{60}	A_{27}	A_{67}	A_{50}	A_{40}	A_{42}	A_{38}	A_{21}	A_{61}	A_{56}	A_{44}	A_{65}	A_{19}
A_{23}	A_{27}	A_{21}	A_{22}	A_{30}	A_{13}	A_{16}	A_{32}	A_{19}	A_{29}	A_{14}	A_{35}	A_{24}	A_{44}	A_{31}	A_{38}	A_{15}	A_{61}	A_{52}	A_{51}	A_{41}	A_{26}	A_{66}	A_{18}	A_{64}	A_{25}	A_{57}	A_{60}	A_{20}	A_{39}	A_{43}	
A_{24}	A_{20}	A_{26}	A_{25}	A_{33}	A_{18}	A_{15}	A_{31}	A_{12}	A_{34}	A_{17}	A_{28}	A_{27}	A_{71}	A_{51}	A_{32}	A_{41}	A_{16}	A_{62}	A_{59}	A_{44}	A_{38}	A_{21}	A_{65}	A_{13}	A_{67}	A_{50}	A_{54}	A_{63}	A_{27}	A_{40}	A_{36}
A_{25}	A_{21}	A_{27}	A_{24}	A_{29}	A_{16}	A_{13}	A_{35}	A_{14}	A_{30}	A_{19}	A_{32}	A_{33}	A_{50}	A_{71}	A_{56}	A_{17}	A_{40}	A_{58}	A_{63}	A_{20}	A_{64}	A_{45}	A_{39}	A_{37}	A_{41}	A_{26}	A_{62}	A_{55}	A_{51}	A_{66}	A_{12}
A_{26}	A_{22}	A_{24}	A_{27}	A_{32}	A_{14}	A_{19}	A_{30}	A_{16}	A_{35}	A_{13}	A_{29}	A_{49}	A_{34}	A_{39}	A_{70}	A_{57}	A_{60}	A_{18}	A_{43}	A_{36}	A_{46}	A_{65}	A_{23}	A_{61}	A_{25}	A_{42}	A_{38}	A_{15}	A_{67}	A_{48}	A_{52}
A_{27}	A_{23}	A_{25}	A_{26}	A_{28}	A_{12}	A_{17}	A_{34}	A_{18}	A_{31}	A_{15}	A_{33}	A_{70}	A_{58}	A_{35}	A_{48}	A_{61}	A_{56}	A_{42}	A_{19}	A_{64}	A_{22}	A_{37}	A_{47}	A_{53}	A_{49}	A_{66}	A_{14}	A_{39}	A_{43}	A_{24}	A_{60}
A_{28}	A_{32}	A_{30}	A_{29}	A_{19}	A_{27}	A_{22}	A_{13}	A_{21}	A_{16}	A_{24}	A_{14}	A_{65}	A_{41}	A_{48}	A_{20}	A_{71}	A_{34}	A_{47}	A_{54}	A_{61}	A_{40}	A_{12}	A_{57}	A_{31}	A_{55}	A_{63}	A_{59}	A_{50}	A_{18}	A_{38}	A_{69}
A_{29}	A_{33}	A_{31}	A_{28}	A_{15}	A_{25}	A_{20}	A_{17}	A_{23}	A_{12}	A_{26}	A_{18}	A_{21}	A_{49}	A_{40}	A_{64}	A_{35}	A_{71}	A_{55}	A_{46}	A_{13}	A_{56}	A_{60}	A_{41}	A_{69}	A_{39}	A_{19}	A_{51}	A_{58}	A_{62}	A_{54}	A_{30}
A_{30}	A_{34}	A_{28}	A_{31}	A_{18}	A_{23}	A_{26}	A_{12}	A_{25}	A_{17}	A_{20}	A_{15}	A_{50}	A_{22}	A_{65}	A_{43}	A_{52}	A_{45}	A_{32}	A_{70}	A_{42}	A_{63}	A_{59}	A_{14}	A_{48}	A_{16}	A_{36}	A_{68}	A_{29}	A_{53}	A_{61}	A_{57}
A_{31}	A_{35}	A_{29}	A_{30}	A_{14}	A_{21}	A_{24}	A_{16}	A_{27}	A_{13}	A_{22}	A_{19}	A_{42}	A_{64}	A_{23}	A_{51}	A_{44}	A_{53}	A_{70}	A_{33}	A_{58}	A_{15}	A_{43}	A_{62}	A_{56}	A_{60}	A_{52}	A_{28}	A_{68}	A_{37}	A_{17}	A_{49}
A_{32}	A_{28}	A_{34}	A_{33}	A_{17}	A_{26}	A_{23}	A_{15}	A_{20}	A_{18}	A_{25}	A_{12}	A_{37}	A_{67}	A_{24}	A_{44}	A_{51}	A_{58}	A_{69}	A_{30}	A_{53}	A_{16}	A_{36}	A_{61}	A_{55}	A_{63}	A_{59}	A_{35}	A_{71}	A_{42}	A_{14}	A_{46}
A_{33}	A_{29}	A_{35}	A_{32}	A_{13}	A_{24}	A_{21}	A_{19}	A_{22}	A_{14}	A_{27}	A_{16}	A_{45}	A_{25}	A_{66}	A_{36}	A_{59}	A_{50}	A_{31}	A_{69}	A_{37}	A_{60}	A_{52}	A_{17}	A_{47}	A_{15}	A_{43}	A_{71}	A_{34}	A_{58}	A_{62}	A_{54}
A_{34}	A_{30}	A_{32}	A_{35}	A_{16}	A_{22}	A_{27}	A_{14}	A_{24}	A_{19}	A_{21}	A_{13}	A_{26}	A_{46}	A_{39}	A_{67}	A_{28}	A_{68}	A_{56}	A_{49}	A_{18}	A_{55}	A_{63}	A_{38}	A_{70}	A_{40}	A_{12}	A_{44}	A_{53}	A_{61}	A_{57}	A_{33}
A_{35}	A_{31}	A_{33}	A_{34}	A_{12}	A_{20}	A_{25}	A_{18}	A_{26}	A_{15}	A_{23}	A_{17}	A_{66}	A_{38}	A_{47}	A_{27}	A_{68}	A_{29}	A_{48}	A_{57}	A_{62}	A_{39}	A_{19}	A_{54}	A_{32}	A_{56}	A_{60}	A_{25}	A_{13}	A_{41}	A_{70}	
A_{36}	A_{40}	A_{38}	A_{37}	A_{51}	A_{59}	A_{54}	A_{45}	A_{53}	A_{48}	A_{56}	A_{46}	A_{55}	A_{13}	A_{33}	A_{65}	A_{42}	A_{69}	A_{21}	A_{18}	A_{49}	A_{26}	A_{62}	A_{32}	A_{71}	A_{30}	A_{47}	A_{15}	A_{24}	A_{60}	A_{20}	A_{39}
A_{37}	A_{41}	A_{39}	A_{36}	A_{47}	A_{57}	A_{52}	A_{49}	A_{55}	A_{44}	A_{58}	A_{50}	A_{64}	A_{32}	A_{12}	A_{54}	A_{69}	A_{43}	A_{19}	A_{20}	A_{63}	A_{33}	A_{48}	A_{27}	A_{38}	A_{21}	A_{61}	A_{25}	A_{14}	A_{46}	A_{31}	A_{71}
A_{38}	A_{42}	A_{36}	A_{39}	A_{50}	A_{55}	A_{58}	A_{44}	A_{57}	A_{49}	A_{52}	A_{47}	A_{35}	A_{65}	A_{53}	A_{15}	A_{16}	A_{23}	A_{68}	A_{40}	A_{35}	A_{51}	A_{34}	A_{60}	A_{26}	A_{62}	A_{22}	A_{37}	A_{70}	A_{28}	A_{45}	A_{13}
A_{39}	A_{43}	A_{37}	A_{38}	A_{46}	A_{53}	A_{56}	A_{48}	A_{59}	A_{45}	A_{54}	A_{51}	A_{14}	A_{52}	A_{64}	A_{34}	A_{22}	A_{17}	A_{41}	A_{68}	A_{35}	A_{61}	A_{25}	A_{50}	A_{12}	A_{44}	A_{29}	A_{70}	A_{36}	A_{23}	A_{63}	A_{27}
A_{40}	A_{36}	A_{42}	A_{41}	A_{49}	A_{58}	A_{55}	A_{47}	A_{52}	A_{50}	A_{57}	A_{44}	A_{17}	A_{59}	A_{67}	A_{29}	A_{25}	A_{14}	A_{38}	A_{71}	A_{28}	A_{62}	A_{22}	A_{45}	A_{19}	A_{51}	A_{34}	A_{69}	A_{43}	A_{24}	A_{60}	A_{20}
A_{41}	A_{37}	A_{43}	A_{40}	A_{45}	A_{56}	A_{53}	A_{51}	A_{54}	A_{46}	A_{59}	A_{48}	A_{28}	A_{66}	A_{58}	A_{16}	A_{15}	A_{24}	A_{71}	A_{39}	A_{23}	A_{44}	A_{29}	A_{63}	A_{21}	A_{61}	A_{25}	A_{42}	A_{69}	A_{35}	A_{50}	A_{18}
A_{42}	A_{38}	A_{40}	A_{43}	A_{48}	A_{54}	A_{59}	A_{46}	A_{56}	A_{51}	A_{53}	A_{45}	A_{67}	A_{31}	A_{19}	A_{57}	A_{70}	A_{36}	A_{12}	A_{27}	A_{60}	A_{30}	A_{47}	A_{20}	A_{41}	A_{26}	A_{62}	A_{22}	A_{17}	A_{49}	A_{32}	A_{68}
A_{43}	A_{39}	A_{41}	A_{42}	A_{44}	A_{52}	A_{57}	A_{50}	A_{58}	A_{47}	A_{55}	A_{49}	A_{26}	A_{18}	A_{30}	A_{66}	A_{37}	A_{70}	A_{26}	A_{13}	A_{46}	A_{21}	A_{61}	A_{31}	A_{68}	A_{33}	A_{48}	A_{16}	A_{23}	A_{63}	A_{27}	A_{40}
A_{44}	A_{48}	A_{46}	A_{45}	A_{39}	A_{43}	A_{38}	A_{43}	A_{37}	A_{56}	A_{40}	A_{54}	A_{47}	A_{61}	A_{32}	A_{23}	A_{58}	A_{31}	A_{65}	A_{14}	A_{41}	A_{24}	A_{18}	A_{70}	A_{34}	A_{69}	A_{39}	A_{19}	A_{66}	A_{12}	A_{32}	A_{55}
A_{45}	A_{49}	A_{47}	A_{44}	A_{55}	A_{41}	A_{36}	A_{57}	A_{39}	A_{52}	A_{42}	A_{58}	A_{22}	A_{33}	A_{60}	A_{46}	A_{30}	A_{59}	A_{15}	A_{64}	A_{19}	A_{70}	A_{40}	A_{25}	A_{54}	A_{23}	A_{13}	A_{67}	A_{18}	A_{38}	A_{69}	A_{15}
A_{46}	A_{30}	A_{44}	A_{47}	A_{58}	A_{39}	A_{42}	A_{52}	A_{41}	A_{57}	A_{46}	A_{55}	A_{34}	A_{21}	A_{45}	A_{63}	A_{12}	A_{65}	A_{29}	A_{56}	A_{26}	A_{43}	A_{71}	A_{16}	A_{66}	A_{14}	A_{20}	A_{53}	A_{52}	A_{68}	A_{37}	A_{17}
A_{47}	A_{51}	A_{45}	A_{46}	A_{54}	A_{37}	A_{40}	A_{46}	A_{43}	A_{53}	A_{38}	A_{59}	A_{62}	A_{44}	A_{20}	A_{35}	A_{64}	A_{13}	A_{27}	A_{28}	A_{71}	A_{17}	A_{27}	A_{42}	A_{16}	A_{36}	A_{68}	A_{33}	A_{52}	A_{21}	A_{35}	A_{67}
A_{48}	A_{44}	A_{50}	A_{49}	A_{57}	A_{42}	A_{39}	A_{55}	A_{36}	A_{48}	A_{41}	A_{52}	A_{61}	A_{51}	A_{27}	A_{28}	A_{67}	A_{18}	A_{54}	A_{35}	A_{68}	A_{14}	A_{20}	A_{37}	A_{15}	A_{43}	A_{71}	A_{30}	A_{59}	A_{26}	A_{16}	A_{64}
A_{49}	A_{45}	A_{51}	A_{48}	A_{53}	A_{40}	A_{37}	A_{59}	A_{38}	A_{54}	A_{43}	A_{56}	A_{29}	A_{26}	A_{50}	A_{60}	A_{19}	A_{66}	A_{34}	A_{55}	A_{21}	A_{36}	A_{68}	A_{15}	A_{65}	A_{17}	A_{27}	A_{58}	A_{31}	A_{71}	A_{42}	A_{14}
A_{50}	A_{46}	A_{48}	A_{51}	A_{56}	A_{38}	A_{43}	A_{54}	A_{40}	A_{59}	A_{37}	A_{53}	A_{25}	A_{30}	A_{63}	A_{49}	A_{33}	A_{52}	A_{16}	A_{67}	A_{12}	A_{69}	A_{39}	A_{22}	A_{57}	A_{24}	A_{18}	A_{64}	A_{13}	A_{41}	A_{70}	A_{28}
A_{51}	A_{47}	A_{49}	A_{50}	A_{52}	A_{36}	A_{41}	A_{58}	A_{42}	A_{45}	A_{39}	A_{57}	A_{48}	A_{62}	A_{31}	A_{24}	A_{53}	A_{32}	A_{66}	A_{17}	A_{38}	A_{23}	A_{13}	A_{69}	A_{29}	A_{70}	A_{40}	A_{12}	A_{65}	A_{19}	A_{25}	A_{56}
A_{52}	A_{56}	A_{54}	A_{53}	A_{43}	A_{51}	A_{46}	A_{37}	A_{45}	A_{40}	A_{48}	A_{38}	A_{39}	A_{17}	A_{70}	A_{21}	A_{50}	A_{30}	A_{23}	A_{62}	A_{57}	A_{66}	A_{14}	A_{33}	A_{35}	A_{31}	A_{55}	A_{63}	A_{26}	A_{16}	A_{64}	A_{47}
A_{53}	A_{57}	A_{55}	A_{52}	A_{39}	A_{49}	A_{44}	A_{41}	A_{47}	A_{36}	A_{50}	A_{42}	A_{20}	A_{70}	A_{16}	A_{38}	A_{31}	A_{51}	A_{63}	A_{22}	A_{15}	A_{32}	A_{56}	A_{67}	A_{46}	A_{65}	A_{17}	A_{27}	A_{62}	A_{54}	A_{30}	A_{34}
A_{54}	A_{58}	A_{52}	A_{55}	A_{42}	A_{47}	A_{50}	A_{36}	A_{49}	A_{41}	A_{44}	A_{39}	A_{71}	A_{23}	A_{37}	A_{19}	A_{60}	A_{21}	A_{28}	A_{48}	A_{66}	A_{59}	A_{35}	A_{12}	A_{24}	A_{18}	A_{64}	A_{45}	A_{33}	A_{29}	A_{53}	A_{61}
A_{55}	$

	((1-φ),0,1)				(-(1-φ),0,1)				((1-φ),1,0)				(-(1-φ),1,0)				[1,φ,(1-φ)]	[1,φ,-(1-φ)]	[1,-φ,(1-φ)]	[1,-φ,-(1-φ)]	[φ,(1-φ),1]	[φ,-(1-φ),1]	[-φ,(1-φ),1]	[-φ,-(1-φ),1]	[(1-φ),1,φ]	[(1-φ),1,-φ]	[-(1-φ),1,φ]	[-(1-φ),1,-φ]
	2π/5	4π/5	6π/5	8π/5	2π/5	4π/5	6π/5	8π/5	2π/5	4π/5	6π/5	8π/5	2π/5	4π/5	6π/5	8π/5	π	π	π	π	π	π	π	π	π	π	π	π
A_0	A_1	A_{77}	A_7	A_{79}	A_1	A_{73}	A_5	A_{75}	A_{77}	A_{76}	A_2	A_9	A_{73}	A_{72}	A_2	A_{11}	A_{79}	A_8	A_{10}	A_{75}	A_{78}	A_0	A_{74}	A_0	A_6	A_{72}	A_4	A_{76}
A_1	A_{74}	A_4	A_{72}	A_0	A_{78}	A_6	A_{76}	A_0	A_9	A_3	A_{77}	A_{76}	A_{11}	A_3	A_{73}	A_{72}	A_8	A_{78}	A_{74}	A_{10}	A_1	A_{75}	A_1	A_{79}	A_{73}	A_7	A_{77}	A_5
A_2	A_{77}	A_7	A_{79}	A_3	A_{73}	A_5	A_{75}	A_3	A_{10}	A_0	A_{74}	A_{75}	A_8	A_0	A_{78}	A_{79}	A_{11}	A_{73}	A_{77}	A_9	A_2	A_{76}	A_2	A_{72}	A_{78}	A_4	A_{74}	A_6
A_3	A_2	A_{74}	A_4	A_{72}	A_2	A_{78}	A_6	A_{76}	A_{74}	A_{75}	A_1	A_{10}	A_{78}	A_{79}	A_1	A_8	A_{72}	A_{11}	A_9	A_{76}	A_{73}	A_3	A_{77}	A_3	A_5	A_{79}	A_7	A_{75}
A_4	A_{79}	A_3	A_1	A_{77}	A_{10}	A_{72}	A_{74}	A_{11}	A_6	A_{78}	A_{11}	A_{79}	A_{77}	A_{10}	A_{76}	A_6	A_{75}	A_4	A_{73}	A_4	A_9	A_8	A_{72}	A_{74}	A_{79}	A_2	A_0	A_{77}
A_5	A_{11}	A_{75}	A_{73}	A_{10}	A_{76}	A_0	A_2	A_{78}	A_{78}	A_{11}	A_{79}	A_7	A_7	A_{77}	A_{10}	A_{76}	A_5	A_{74}	A_5	A_{72}	A_{75}	A_{73}	A_8	A_9	A_3	A_{78}	A_{76}	A_1
A_6	A_8	A_{76}	A_{78}	A_9	A_{75}	A_3	A_1	A_{73}	A_{73}	A_8	A_{72}	A_4	A_4	A_{74}	A_9	A_{75}	A_6	A_{77}	A_6	A_{79}	A_{76}	A_{78}	A_{11}	A_{10}	A_0	A_{73}	A_{75}	A_2
A_7	A_{72}	A_0	A_2	A_{74}	A_9	A_{79}	A_{77}	A_8	A_5	A_{73}	A_8	A_{72}	A_{74}	A_9	A_{75}	A_5	A_{76}	A_7	A_{78}	A_7	A_{10}	A_{11}	A_{79}	A_{77}	A_{72}	A_1	A_3	A_{74}
A_8	A_{75}	A_{73}	A_{10}	A_6	A_7	A_{10}	A_{72}	A_{74}	A_{79}	A_7	A_6	A_{78}	A_3	A_{73}	A_{72}	A_2	A_1	A_0	A_{72}	A_{73}	A_{79}	A_4	A_5	A_{78}	A_{77}	A_{76}	A_8	A_8
A_9	A_6	A_{11}	A_{75}	A_{73}	A_{72}	A_{74}	A_{11}	A_7	A_0	A_{74}	A_{75}	A_1	A_{76}	A_6	A_7	A_{77}	A_{74}	A_{75}	A_3	A_2	A_4	A_{77}	A_{76}	A_5	A_9	A_9	A_{78}	A_{79}
A_{10}	A_5	A_8	A_{76}	A_{78}	A_{79}	A_{77}	A_8	A_4	A_3	A_{77}	A_{76}	A_2	A_{75}	A_5	A_4	A_{74}	A_{77}	A_{76}	A_0	A_1	A_7	A_{74}	A_{75}	A_6	A_{10}	A_{10}	A_{73}	A_{72}
A_{11}	A_{76}	A_{78}	A_9	A_5	A_4	A_9	A_{79}	A_{77}	A_{72}	A_4	A_5	A_{73}	A_0	A_{78}	A_{79}	A_1	A_2	A_3	A_{79}	A_{78}	A_{72}	A_7	A_6	A_{73}	A_{74}	A_{75}	A_{11}	A_{11}
A_{12}	A_{17}	A_{41}	A_{67}	A_{43}	A_{61}	A_{45}	A_{23}	A_{55}	A_{49}	A_{40}	A_{62}	A_{31}	A_{53}	A_{52}	A_{18}	A_{71}	A_{59}	A_{68}	A_{33}	A_{47}	A_{58}	A_{60}	A_{38}	A_{12}	A_{26}	A_{36}	A_{64}	A_{48}
A_{13}	A_{54}	A_{22}	A_{44}	A_{60}	A_{42}	A_{66}	A_{40}	A_{16}	A_{30}	A_{63}	A_{41}	A_{48}	A_{71}	A_{19}	A_{53}	A_{52}	A_{68}	A_{58}	A_{46}	A_{32}	A_{13}	A_{39}	A_{61}	A_{59}	A_{37}	A_{27}	A_{49}	A_{65}
A_{14}	A_{41}	A_{67}	A_{43}	A_{19}	A_{53}	A_{21}	A_{47}	A_{63}	A_{70}	A_{16}	A_{54}	A_{55}	A_{29}	A_{60}	A_{42}	A_{51}	A_{35}	A_{45}	A_{57}	A_{69}	A_{62}	A_{56}	A_{14}	A_{36}	A_{50}	A_{64}	A_{38}	A_{24}
A_{15}	A_{62}	A_{46}	A_{20}	A_{52}	A_{18}	A_{42}	A_{66}	A_{40}	A_{54}	A_{55}	A_{17}	A_{70}	A_{50}	A_{43}	A_{61}	A_{28}	A_{44}	A_{34}	A_{69}	A_{56}	A_{37}	A_{15}	A_{67}	A_{63}	A_{65}	A_{51}	A_{25}	A_{39}
A_{16}	A_{61}	A_{49}	A_{27}	A_{59}	A_{13}	A_{37}	A_{65}	A_{39}	A_{57}	A_{56}	A_{14}	A_{69}	A_{45}	A_{36}	A_{62}	A_{35}	A_{51}	A_{29}	A_{70}	A_{55}	A_{42}	A_{16}	A_{54}	A_{60}	A_{66}	A_{44}	A_{22}	A_{40}
A_{17}	A_{38}	A_{64}	A_{36}	A_{12}	A_{58}	A_{26}	A_{48}	A_{60}	A_{69}	A_{15}	A_{57}	A_{56}	A_{34}	A_{63}	A_{37}	A_{44}	A_{28}	A_{50}	A_{54}	A_{70}	A_{61}	A_{55}	A_{17}	A_{43}	A_{45}	A_{67}	A_{41}	A_{23}
A_{18}	A_{57}	A_{25}	A_{51}	A_{63}	A_{37}	A_{65}	A_{39}	A_{15}	A_{33}	A_{60}	A_{38}	A_{47}	A_{68}	A_{12}	A_{58}	A_{59}	A_{71}	A_{53}	A_{49}	A_{31}	A_{18}	A_{40}	A_{62}	A_{52}	A_{42}	A_{20}	A_{46}	A_{66}
A_{19}	A_{14}	A_{38}	A_{64}	A_{36}	A_{62}	A_{50}	A_{24}	A_{56}	A_{46}	A_{39}	A_{61}	A_{32}	A_{58}	A_{59}	A_{13}	A_{68}	A_{52}	A_{71}	A_{30}	A_{48}	A_{53}	A_{63}	A_{41}	A_{19}	A_{21}	A_{43}	A_{67}	A_{47}
A_{20}	A_{59}	A_{15}	A_{61}	A_{49}	A_{70}	A_{52}	A_{38}	A_{34}	A_{26}	A_{50}	A_{71}	A_{51}	A_{41}	A_{33}	A_{56}	A_{66}	A_{39}	A_{64}	A_{45}	A_{20}	A_{31}	A_{68}	A_{44}	A_{54}	A_{43}	A_{18}	A_{60}	A_{57}
A_{21}	A_{35}	A_{39}	A_{53}	A_{70}	A_{48}	A_{60}	A_{14}	A_{58}	A_{50}	A_{71}	A_{51}	A_{27}	A_{67}	A_{57}	A_{32}	A_{40}	A_{65}	A_{38}	A_{21}	A_{44}	A_{55}	A_{45}	A_{68}	A_{30}	A_{19}	A_{42}	A_{56}	A_{61}
A_{22}	A_{51}	A_{63}	A_{13}	A_{57}	A_{32}	A_{36}	A_{54}	A_{71}	A_{66}	A_{58}	A_{35}	A_{43}	A_{49}	A_{70}	A_{48}	A_{24}	A_{47}	A_{22}	A_{37}	A_{64}	A_{69}	A_{29}	A_{52}	A_{46}	A_{59}	A_{62}	A_{16}	A_{41}
A_{23}	A_{71}	A_{55}	A_{37}	A_{33}	A_{56}	A_{12}	A_{62}	A_{50}	A_{42}	A_{34}	A_{59}	A_{67}	A_{25}	A_{49}	A_{70}	A_{48}	A_{23}	A_{46}	A_{65}	A_{36}	A_{47}	A_{53}	A_{28}	A_{69}	A_{63}	A_{58}	A_{40}	A_{17}
A_{24}	A_{68}	A_{56}	A_{42}	A_{30}	A_{55}	A_{19}	A_{61}	A_{45}	A_{37}	A_{29}	A_{52}	A_{64}	A_{22}	A_{46}	A_{69}	A_{47}	A_{24}	A_{49}	A_{66}	A_{43}	A_{48}	A_{58}	A_{35}	A_{70}	A_{60}	A_{53}	A_{39}	A_{14}
A_{25}	A_{44}	A_{60}	A_{18}	A_{54}	A_{31}	A_{43}	A_{57}	A_{68}	A_{65}	A_{53}	A_{28}	A_{36}	A_{46}	A_{69}	A_{47}	A_{23}	A_{48}	A_{25}	A_{42}	A_{67}	A_{70}	A_{34}	A_{59}	A_{49}	A_{52}	A_{61}	A_{15}	A_{38}
A_{26}	A_{28}	A_{40}	A_{58}	A_{69}	A_{47}	A_{63}	A_{17}	A_{53}	A_{45}	A_{68}	A_{44}	A_{20}	A_{64}	A_{54}	A_{31}	A_{39}	A_{66}	A_{41}	A_{26}	A_{51}	A_{56}	A_{50}	A_{71}	A_{33}	A_{12}	A_{37}	A_{55}	A_{62}
A_{27}	A_{52}	A_{16}	A_{62}	A_{46}	A_{69}	A_{59}	A_{41}	A_{29}	A_{21}	A_{45}	A_{68}	A_{44}	A_{38}	A_{30}	A_{55}	A_{65}	A_{40}	A_{67}	A_{50}	A_{27}	A_{32}	A_{71}	A_{51}	A_{57}	A_{36}	A_{13}	A_{63}	A_{54}
A_{28}	A_{39}	A_{53}	A_{70}	A_{26}	A_{67}	A_{33}	A_{44}	A_{46}	A_{43}	A_{25}	A_{66}	A_{58}	A_{15}	A_{45}	A_{36}	A_{62}	A_{17}	A_{60}	A_{52}	A_{37}	A_{51}	A_{64}	A_{23}	A_{42}	A_{49}	A_{56}	A_{68}	A_{28}
A_{29}	A_{47}	A_{45}	A_{32}	A_{66}	A_{27}	A_{70}	A_{52}	A_{38}	A_{59}	A_{67}	A_{24}	A_{42}	A_{63}	A_{37}	A_{44}	A_{14}	A_{61}	A_{16}	A_{36}	A_{53}	A_{43}	A_{22}	A_{65}	A_{50}	A_{57}	A_{48}	A_{29}	A_{68}
A_{30}	A_{24}	A_{71}	A_{55}	A_{37}	A_{44}	A_{46}	A_{35}	A_{67}	A_{60}	A_{38}	A_{47}	A_{13}	A_{56}	A_{66}	A_{27}	A_{41}	A_{54}	A_{39}	A_{19}	A_{62}	A_{64}	A_{49}	A_{40}	A_{21}	A_{30}	A_{69}	A_{58}	A_{51}
A_{31}	A_{66}	A_{34}	A_{47}	A_{45}	A_{36}	A_{54}	A_{71}	A_{25}	A_{12}	A_{46}	A_{39}	A_{61}	A_{40}	A_{26}	A_{67}	A_{57}	A_{38}	A_{55}	A_{63}	A_{18}	A_{20}	A_{41}	A_{48}	A_{65}	A_{69}	A_{31}	A_{50}	A_{59}
A_{32}	A_{65}	A_{29}	A_{48}	A_{50}	A_{43}	A_{57}	A_{68}	A_{22}	A_{19}	A_{49}	A_{40}	A_{62}	A_{39}	A_{21}	A_{64}	A_{54}	A_{41}	A_{56}	A_{60}	A_{13}	A_{27}	A_{38}	A_{47}	A_{66}	A_{70}	A_{32}	A_{45}	A_{52}
A_{33}	A_{23}	A_{68}	A_{56}	A_{42}	A_{51}	A_{49}	A_{28}	A_{64}	A_{63}	A_{41}	A_{48}	A_{18}	A_{55}	A_{65}	A_{20}	A_{38}	A_{57}	A_{40}	A_{12}	A_{61}	A_{67}	A_{46}	A_{39}	A_{26}	A_{33}	A_{70}	A_{53}	A_{44}
A_{34}	A_{48}	A_{50}	A_{31}	A_{65}	A_{20}	A_{69}	A_{59}	A_{41}	A_{52}	A_{64}	A_{23}	A_{37}	A_{60}	A_{42}	A_{51}	A_{17}	A_{62}	A_{15}	A_{43}	A_{58}	A_{36}	A_{25}	A_{66}	A_{45}	A_{54}	A_{47}	A_{34}	A_{71}
A_{35}	A_{40}	A_{58}	A_{69}	A_{21}	A_{64}	A_{30}	A_{51}	A_{49}	A_{36}	A_{22}	A_{65}	A_{53}	A_{16}	A_{50}	A_{43}	A_{61}	A_{14}	A_{63}	A_{59}	A_{42}	A_{44}	A_{67}	A_{24}	A_{37}	A_{46}	A_{55}	A_{71}	A_{35}
A_{36}	A_{19}	A_{17}	A_{41}	A_{67}	A_{57}	A_{68}	A_{22}	A_{31}	A_{25}	A_{66}	A_{58}	A_{35}	A_{61}	A_{28}	A_{16}	A_{50}	A_{63}	A_{44}	A_{29}	A_{23}	A_{34}	A_{52}	A_{64}	A_{14}	A_{27}	A_{12}	A_{36}	A_{70}
A_{37}	A_{30}	A_{23}	A_{68}	A_{56}	A_{66}	A_{40}	A_{16}	A_{18}	A_{34}	A_{59}	A_{67}	A_{24}	A_{51}	A_{17}	A_{29}	A_{60}	A_{45}	A_{62}	A_{22}	A_{28}	A_{15}	A_{65}	A_{53}	A_{35}	A_{13}	A_{26}	A_{70}	A_{37}
A_{38}	A_{67}	A_{43}	A_{19}	A_{17}	A_{29}	A_{20}	A_{69}	A_{59}	A_{48}	A_{18}	A_{30}	A_{63}	A_{33}	A_{56}	A_{66}	A_{27}	A_{31}	A_{21}	A_{61}	A_{46}	A_{54}	A_{32}	A_{12}	A_{64}	A_{71}	A_{38}	A_{14}	A_{25}
A_{39}	A_{58}	A_{69}	A_{21}	A_{28}	A_{16}	A_{18}	A_{42}	A_{66}	A_{62}	A_{31}	A_{19}	A_{49}	A_{26}	A_{67}	A_{57}	A_{32}	A_{20}	A_{30}	A_{47}	A_{60}	A_{65}	A_{13}	A_{33}	A_{55}	A_{39}	A_{71}	A_{24}	A_{15}
A_{40}	A_{53}	A_{70}	A_{26}	A_{35}	A_{15}	A_{13}	A_{37}	A_{65}	A_{61}	A_{32}	A_{12}	A_{46}	A_{21}	A_{64}	A_{54}	A_{31}	A_{27}	A_{33}	A_{48}	A_{63}	A_{66}	A_{18}	A_{30}	A_{16}	A_{40}	A_{68}	A_{23}	A_{16}
A_{41}	A_{64}	A_{36}	A_{12}	A_{14}	A_{34}	A_{27}	A_{70}	A_{52}	A_{47}	A_{13}	A_{33}	A_{60}	A_{30}	A_{55}	A_{65}	A_{20}	A_{32}	A_{26}	A_{62}	A_{49}	A_{57}	A_{31}	A_{19}	A_{67}	A_{68}	A_{41}	A_{17}	A_{22}
A_{42}	A_{33}	A_{24}	A_{71}	A_{55}	A_{65}	A_{39}	A_{15}	A_{13}	A_{29}	A_{52}	A_{64}	A_{23}	A_{44}	A_{14}	A_{34}	A_{63}	A_{50}	A_{61}	A_{25}	A_{35}	A_{16}	A_{66}	A_{28}	A_{28}	A_{18}	A_{21}	A_{69}	A_{42}
A_{43}	A_{12}	A_{14}	A_{38}	A_{64}	A_{54}	A_{71}	A_{25}	A_{32}	A_{22}	A_{65}	A_{53}	A_{28}	A_{62}	A_{35}	A_{15}	A_{45}	A_{60}	A_{51}	A_{34}	A_{24}	A_{29}	A_{59}	A_{67}	A_{17}	A_{20}	A_{19}	A_{43}	A_{69}
A_{44}	A_{63}	A_{13}	A_{57}	A_{25}	A_{49}	A_{28}	A_{64}	A_{30}	A_{27}	A_{26}	A_{50}	A_{71}	A_{17}	A_{29}	A_{60}	A_{42}	A_{15}	A_{36}	A_{68}	A_{21}	A_{35}	A_{44}	A_{20}	A_{62}	A_{67}	A_{16}	A_{52}	A_{33}
A_{45}	A_{31}	A_{65}	A_{29}	A_{48}	A_{24}	A_{56}	A_{12}	A_{62}	A_{71}	A_{51}	A_{27}	A_{26}	A_{43}	A_{61}	A_{28}	A_{16}	A_{37}	A_{14}	A_{20}	A_{68}	A_{63}	A_{21}	A_{45}	A_{34}	A_{17}	A_{66}	A_{32}	A_{53}
A_{46}	A_{27}	A_{59}	A_{15}	A_{61}	A_{28}	A_{64}	A_{30}	A_{31}	A_{40}	A_{62}	A_{31}	A_{19}	A_{70}	A_{48}	A_{24}	A_{25}	A_{69}	A_{23}	A_{13}	A_{38}	A_{46}	A_{33}	A_{60}	A_{22}	A_{35}	A_{54}	A_{18}	A_{67}
A_{47}	A_{50}	A_{31}	A_{65}	A_{29}	A_{60}	A_{14}	A_{58}	A_{26}	A_{18}	A_{30}	A_{63}	A_{41}	A_{24}	A_{25}	A_{49}	A_{70}	A_{22}	A_{69}	A_{39}	A_{12}	A_{23}	A_{61}	A_{32}	A_{47}	A_{55}	A_{34}	A_{66}	A_{19}
A_{48}	A_{45}	A_{32}	A_{66}	A_{34}	A_{63}	A_{17}	A_{53}	A_{21}	A_{13}	A_{33}	A_{60}	A_{38}	A_{23}	A_{22}	A_{46}	A_{69}	A_{25}	A_{70}	A_{40}	A_{19}	A_{24}	A_{62}	A_{31}	A_{48}	A_{56}	A_{29}	A_{65}	A_{12}
A_{49}	A_{20}	A_{52}	A_{16}	A_{62}	A_{35}	A_{67}	A_{33}	A_{44}	A_{39}	A_{61}	A_{32}	A_{12}	A_{69}	A_{47}	A_{23}	A_{22}	A_{70}	A_{24}	A_{18}	A_{41}	A_{49}	A_{30}	A_{63}	A_{25}	A_{28}	A_{57}	A_{13}	A_{64}
A_{50}	A_{32}	A_{66}	A_{34}	A_{47}	A_{23}	A_{55}	A_{19}	A_{61}	A_{68}	A_{44}	A_{20}	A_{21}	A_{36}	A_{62}	A_{35}	A_{15}	A_{42}	A_{17}	A_{27}	A_{71}	A_{60}	A_{26}	A_{50}	A_{29}	A_{14}	A_{65}	A_{31}	A_{58}
A_{51}	A_{60}	A_{18}	A_{54}	A_{22}	A_{46}	A_{35}	A_{67}	A_{33}	A_{20}	A_{21}	A_{45}	A_{68}	A_{14}	A_{34}	A_{63}	A_{37}	A_{16}	A_{43}	A_{71}	A_{26}	A_{28}	A_{51}	A_{27}	A_{61}	A_{64}	A_{15}	A_{59}	A_{30}
A_{52}	A_{15}	A_{61}	A_{49}	A_{27}	A_{41}	A_{39}	A_{20}	A_{69}	A_{67}	A_{24}	A_{42}	A_{34}	A_{13}	A_{68}	A_{12}	A_{38}	A_{19}	A_{52}	A_{28}	A_{65}	A_{71}	A_{36}	A_{22}	A_{18}	A_{25}	A_{60}	A_{44}	A_{32}
A_{53}	A_{69}	A_{21}	A_{28}	A_{40}	A_{26}	A_{48}	A_{60}	A_{14}	A_{35}	A_{43}	A_{25}	A_{66}	A_{59}	A_{13}	A_{68}	A_{12}	A_{53}	A_{18}	A_{64}	A_{29}	A_{19}	A_{23}	A_{37}	A_{71}	A_{61}	A_{24}	A_{33}	A_{45}
A_{54}	A_{25}	A_{51}	A_{63}	A_{13}	A_{68}	A_{22}	A_{31}	A_{43}	A_{56}	A_{14}	A_{69}	A_{15}	A_{32}	A_{40}	A_{26}	A_{67}	A_{30}	A_{65}	A_{17}	A_{54}	A_{38}	A_{70}	A_{16}	A_{20}	A_{34}	A_{46}	A_{62}	A_{27}
A_{55}	A_{42}	A_{30}	A_{23}	A_{68}	A_{12}	A_{62}	A_{50}	A_{24}	A_{14}	A_{69}	A_{15}	A_{37}	A_{66}	A_{27}	A_{41}	A_{33}	A_{64}	A_{31}	A_{55}	A_{16}	A_{21}	A_{17}	A_{70}	A_{39}	A_{47}	A_{35}	A_{26}	A_{63}
A_{56}	A_{37}	A_{33}	A_{24}	A_{71}	A_{19}	A_{61}	A_{45}	A_{23}	A_{17}	A_{70}	A_{16}	A_{54}	A_{65}	A_{20}	A_{38}	A_{30}	A_{67}	A_{32}	A_{56}	A_{15}	A_{26}	A_{14}	A_{69}	A_{40}	A_{48}	A_{28}	A_{21}	A_{60}
A_{57}	A_{22}	A_{44}	A_{60}	A_{18}	A_{71}	A_{25}	A_{32}	A_{36}	A_{55}	A_{17}	A_{70}	A_{16}	A_{31}	A_{39}	A_{21}	A_{64}	A_{33}	A_{66}	A_{14}	A_{57}	A_{41}	A_{69}	A_{15}	A_{27}	A_{29}	A_{49}	A_{61}	A_{20}
A_{58}	A_{70}	A_{26}	A_{35}	A_{39}	A_{21}	A_{47}	A_{63}	A_{17}	A_{28}	A_{36}	A_{22}	A_{65}	A_{32}	A_{18}	A_{71}	A_{19}	A_{58}	A_{13}	A_{67}	A_{34}	A_{12}	A_{24}	A_{42}	A_{68}	A_{62}	A_{23}	A_{30}	A_{50}
A_{59}	A_{16}	A_{62}	A_{46}	A_{20}	A_{38}	A_{34}	A_{27}	A_{70}	A_{64}	A_{23}	A_{37}	A_{29}	A_{18}	A_{71}	A_{19}	A_{53}	A_{12}	A_{59}	A_{35}	A_{66}	A_{68}	A_{43}	A_{25}	A_{13}	A_{22}	A_{63}	A_{51}	A_{31}
A_{60}	A_{13}	A_{57}	A_{25}	A_{51}	$

Buraya kadar olan kısımda Öklidyen 3-uzayın izometrilerinden hangilerinin d_{CD} metriğini koruduğu bulunmuştur. Daha açıkça Öklidyen 3-uzayın izometrilerinden 15 yansıma, 60 dönme, 44 dönme-inversiyon ve bir inversiyonun d_{CD} metriğini koruduğu gösterilmiştir. Bu tespit edilen elemanlar chamfered dodecahedronun Öklidyen simetri grubu olan I_h (Icosahedral grup) elemanlarıdır. Bu gruba chamfered dodecahedron grup denilsin ve $G(CD)$ ile gösterilsin. Açıkça $G(CD)$, I_h grubuna izomorftur. Bundan sonraki kısımda bu dönüşümlerden başka d_{CD} metriğini koruyan izometrinin olmadığı gösterilecektir. Yani $\mathbb{R}^3_{CD}$ nin tüm izometrilerinin $T(3).G(CD)$ olduğu gösterilecektir.

Tanım 6.3 *$A = (a_1, a_2, a_3)$ ve $B = (b_1, b_2, b_3)$ $\mathbb{R}^3_{CD}$ uzayında iki farklı nokta olsun. Bu taktirde*

$$\{X \mid d_{CD}(A, X) + d_{CD}(B, X) = d_{CD}(A, B)\}$$

kümesine A, B noktalarının minimum uzaklık kümesi denir ve $[AB]$ ile gösterilir.

Genel olarak, $[AB]$ kümesi AB köşegenli oniki yüzlü oluşturur. Bakınız Şekil6.11.



Şekil 6.11 $\mathbb{R}^3_{CD}$ da Minimum Uzaklık Kümesi

Önerme 6.8 *$\phi : \mathbb{R}^3_{CD} \to \mathbb{R}^3_{CD}$ bir izometri ve $[AB]$ bir oniki yüzlü olsun. O halde*

$$\phi([AB]) = [\phi(A)\phi(B)]$$

olur.

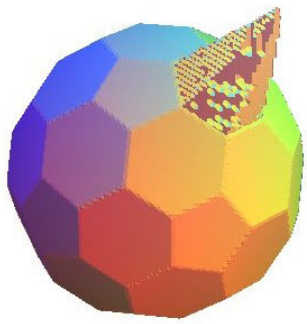
İspat *$Y \in \phi([AB])$ olsun.*

$$\begin{aligned} Y \in \phi([AB]) &\iff \exists X \in [AB] \ni Y = \phi(X) \\ &\iff d_{CD}(A, X) + d_{CD}(B, X) = d_{CD}(A, B) \\ &\iff d_{CD}(\phi(A), \phi(X)) + d_{CD}(\phi(B), \phi(X)) = d_{CD}(\phi(A), \phi(B)) \\ &\Leftrightarrow \quad Y = \phi(X) \in [\phi(A)\phi(B)]\,. \end{aligned}$$

Sonuç 6.6 *$\phi : \mathbb{R}^3_{CD} \to \mathbb{R}^3_{CD}$ bir izometri ve $[AB]$ bir onikiyüzlü olsun. Bu durumda ϕ, $[AB]$ nin köşelerini köşelere dönüştürür ve kenar uzunluklarını korur.*

Önerme 6.9 *$f : \mathbb{R}^3_{CD} \to \mathbb{R}^3_{CD}$ dönüşümü $f(O) = O$ olacak şekilde bir izometri olsun. Bu taktirde $f \in G(CD)$ olur.*

İspat *$O = (0, 0, 0)$ ve $D = (\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1, \frac{\sqrt{5}+1}{2})$ olmak üzere $[OD]$ oniki yüzlüsünü gözönüne alalım. Bu oniki yüzlünün köşe noktalarından altısı A_0, A_{12}, A_{36}, A_{52}, A_{60} ve A_{72} olup bu noktalar aynı zamanda merkezil birim chamfered dodecahedron birim küresinin köşe noktalarıdır. Dahası bu altı nokta chamfered dodecahedronun her biri aynı altıgen yüzünün köşe noktalarıdır.*



Şekil 6.12 $\mathbb{R}^3_{CD}$ de Birim Küre Ve Minimum Uzaklık Kümesi

f izometrisi $[OD]$ oniki yüzlüsünün köşe noktalarını köşe noktalara dönüştürüp, kenar uzaklıklarını koruduğundan ve $f(O) = O$ olduğundan dolayı A_0, A_{12}, A_{36}, A_{52}, A_{60} ve A_{72} noktalarını chamfered dodecahedronun yine bir altıgen yüzünün köşe noktalarına dönüştürür. Ayrıca bu dönüştürme işlemi gerçekleşirken kenar uzunlukları korunacağından dolayı bir kenarı oluşturan noktalar yine kenar oluşturacak şekilde konuşlanır. Açıkça ifade edilirse f izometrisi, chamfered dodecahedron bir altıgen yüzünün köşe noktalarını yine bir altıgen yüzünün köşe noktalarına dönüştürür. O halde chamfered dodecahedron 30 altıgen yüze sahip olduğundan bir altıgen yüzün dönüşebileceği 30 altıgen yüz ihtimali vardır. Ayrıca kenar uzunlukları korunmak zorunda olduğundan A_0, A_{12}, A_{36}, A_{52}, A_{60} ve A_{72} noktalarının yüz üzerinde konumlandırılması için dört farklı ihtimal vardır. Bu taktirde chamfered dodecahedron her bir altıgen yüzü için 4 ihtimal olduğundan dolayı bu noktaların dönüşebileceği 120 ihtimal vardır. Bu ihtimaller ise aşağıda tek tek sıralanmış

ve her bir dönüşümün önceden tespit edilen hareketlerden hangisine karşılık geldiği ifade edilmiştir.

1. $f(A_0) = A_0$, $f(A_{12}) = A_{16}$, $f(A_{36}) = A_{40}$, $f(A_{52}) = A_{56}$, $f(A_{60}) = A_{60}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{76}$ *ise* $\Delta : x = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

2.$f(A_0) = A_2$, $f(A_{12}) = A_{14}$, $f(A_{36}) = A_{38}$, $f(A_{52}) = A_{54}$, $f(A_{60}) = A_{62}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{74}$ *ise* $\Delta : y = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

3.$f(A_0) = A_1$, $f(A_{12}) = A_{13}$, $f(A_{36}) = A_{37}$, $f(A_{52}) = A_{53}$, $f(A_{60}) = A_{61}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{73}$ *ise* $\Delta : z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

4. $f(A_0) = A_0$, $f(A_{12}) = A_{12}$, $f(A_{36}) = A_{14}$, $f(A_{52}) = A_{18}$, $f(A_{60}) = A_{16}$ *ve* $f(A_{72}) = A_2$ *ise* $\Delta : x + \varphi y + (1-\varphi)z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

5. $f(A_0) = A_0$, $f(A_{12}) = A_{60}$, $f(A_{36}) = A_{52}$, $f(A_{52}) = A_{36}$, $f(A_{60}) = A_{12}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{72}$ *ise* $\Delta : -x + \varphi y + (1-\varphi)z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

6. $f(A_0) = A_{78}$, $f(A_{12}) = A_{58}$, $f(A_{36}) = A_{34}$, $f(A_{52}) = A_{71}$, $f(A_{60}) = A_{50}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{11}$ *ise* $\Delta : x+\varphi y-(1-\varphi)z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

7. $f(A_0) = A_{74}$, $f(A_{12}) = A_{38}$, $f(A_{36}) = A_{64}$, $f(A_{52}) = A_{22}$, $f(A_{60}) = A_{46}$ *ve* $f(A_{72}) = A_4$ *ise* $\Delta : -x+\varphi y-(1-\varphi)z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

8. $f(A_0) = A_{75}$, $f(A_{12}) = A_{47}$, $f(A_{36}) = A_{23}$, $f(A_{52}) = A_{65}$, $f(A_{60}) = A_{39}$ *ve* $f(A_{72}) = A_5$ *ise* $\Delta : (1-\varphi)x+y+\varphi z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

9. $f(A_0) = A_{79}$, $f(A_{12}) = A_{59}$, $f(A_{36}) = A_{63}$, $f(A_{52}) = A_{19}$, $f(A_{60}) = A_{43}$ *ve* $f(A_{72}) = A_3$ *ise* $\Delta : -(1-\varphi)x+y+\varphi z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

10.$f(A_0) = A_8$, $f(A_{12}) = A_{68}$, $f(A_{36}) = A_{44}$, $f(A_{52}) = A_{52}$, $f(A_{60}) = A_{28}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{72}$ *ise* $\Delta : (1-\varphi)x-y+\varphi z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

11. $f(A_0) = A_{10}$, $f(A_{12}) = A_{33}$, $f(A_{36}) = A_{29}$, $f(A_{52}) = A_{28}$, $f(A_{60}) = A_{32}$ *ve* $f(A_{72}) = A_8$ *ise* $\Delta : -(1-\varphi)x-y+\varphi z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

12.$f(A_0) = A_{76}$, $f(A_{12}) = A_{48}$, $f(A_{36}) = A_{70}$, $f(A_{52}) = A_{32}$, $f(A_{60}) = A_{56}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{10}$ *ise* $\Delta : \varphi x+(1-\varphi)y+z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

13. $f(A_0) = A_6$, $f(A_{12}) = A_{26}$, $f(A_{36}) = A_{27}$, $f(A_{52}) = A_{25}$, $f(A_{60}) = A_{24}$ *ve* $f(A_{72}) = A_7$ *ise* $\Delta : \varphi x - (1-\varphi)y + z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

14. $f(A_0) = A_4$, $f(A_{12}) = A_{64}$, $f(A_{36}) = A_{36}$, $f(A_{52}) = A_{44}$, $f(A_{60}) = A_{20}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{72}$ *ise* $\Delta : \varphi x + (1-\varphi)y - z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

15. $f(A_0) = A_{72}$, $f(A_{12}) = A_{36}$, $f(A_{36}) = A_{12}$, $f(A_{52}) = A_{60}$, $f(A_{60}) = A_{56}$ *ve* $f(A_{72}) = A_0$ *ise* $\Delta : \varphi x - (1-\varphi)y - z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

16. $f(A_0) = A_3$, $f(A_{12}) = A_{15}$, $f(A_{36}) = A_{39}$, $f(A_{52}) = A_{55}$, $f(A_{60}) = A_{63}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{75}$ *ise dönme ekseni* $(1,0,0)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

17. $f(A_0) = A_1$, $f(A_{12}) = A_{17}$, $f(A_{36}) = A_{41}$, $f(A_{52}) = A_{57}$, $f(A_{60}) = A_{61}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{77}$ *ise dönme ekseni* $(0,1,0)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

18. $f(A_0) = A_2$, $f(A_{12}) = A_{18}$, $f(A_{36}) = A_{42}$, $f(A_{52}) = A_{58}$, $f(A_{60}) = A_{62}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{78}$ *ise dönme ekseni* $(0,0,1)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

19. $f(A_0) = A_4$, $f(A_{12}) = A_{20}$, $f(A_{36}) = A_{44}$, $f(A_{52}) = A_{36}$, $f(A_{60}) = A_{64}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{72}$ *ise dönme ekseni* $(1,1,1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

20.$f(A_0) = A_8$, $f(A_{12}) = A_{28}$, $f(A_{36}) = A_{52}$, $f(A_{52}) = A_{44}$, $f(A_{60}) = A_{68}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{72}$ *ise dönme ekseni* $(1,1,1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

21. $f(A_0) = A_{10}$, $f(A_{12}) = A_{33}$, $f(A_{36}) = A_{57}$, $f(A_{52}) = A_{49}$, $f(A_{60}) = A_{70}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{77}$ *ise dönme ekseni* $(-1,1,1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

22. $f(A_0) = A_6$, $f(A_{12}) = A_{26}$, $f(A_{36}) = A_{50}$, $f(A_{52}) = A_{42}$, $f(A_{60}) = A_{66}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{78}$ *ise dönme ekseni* $(-1,1,1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

23. $f(A_0) = A_{11}$, $f(A_{12}) = A_{34}$, $f(A_{36}) = A_{58}$, $f(A_{52}) = A_{50}$, $f(A_{60}) = A_{71}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{78}$ *ise dönme eksen* $(1,-1,1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

24. $f(A_0) = A_5$, $f(A_{12}) = A_{23}$, $f(A_{36}) = A_{47}$, $f(A_{52}) = A_{39}$, $f(A_{60}) = A_{65}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{75}$ *ise dönme ekseni* $(1,-1,1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

25. $f(A_0) = A_9$, $f(A_{12}) = A_{31}$, $f(A_{36}) = A_{55}$, $f(A_{52}) = A_{47}$, $f(A_{60}) = A_{69}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{75}$ *ise dönme ekseni* $(1,1,-1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

26. $f(A_0) = A_7$, $f(A_{12}) = A_{25}$, $f(A_{36}) = A_{49}$, $f(A_{52}) = A_{41}$, $f(A_{60}) = A_{67}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{77}$ *ise dönme ekseni* $(1, 1, -1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

27.$f(A_0) = A_0$, $f(A_{12}) = A_{60}$, $f(A_{36}) = A_{56}$, $f(A_{52}) = A_{40}$, $f(A_{60}) = A_{16}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{76}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

28. $f(A_0) = A_0$, $f(A_{12}) = A_{16}$, $f(A_{36}) = A_{18}$, $f(A_{52}) = A_{14}$, $f(A_{60}) = A_{12}$ *ve* $f(A_{72}) = A_2$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

29. $f(A_0) = A_{74}$, $f(A_{12}) = A_{54}$, $f(A_{36}) = A_{30}$, $f(A_{52}) = A_{69}$, $f(A_{60}) = A_{46}$ *ve* $f(A_{72}) = A_9$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

30.$f(A_0) = A_{78}$, $f(A_{12}) = A_{42}$, $f(A_{36}) = A_{66}$, $f(A_{52}) = A_{26}$, $f(A_{60}) = A_{50}$ *ve* $f(A_{72}) = A_6$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

31. $f(A_0) = A_5$, $f(A_{12}) = A_{65}$, $f(A_{36}) = A_{37}$, $f(A_{52}) = A_{45}$, $f(A_{60}) = A_{21}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{73}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

32.$f(A_0) = A_{77}$, $f(A_{12}) = A_{49}$, $f(A_{36}) = A_{70}$, $f(A_{52}) = A_{33}$, $f(A_{60}) = A_{57}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{10}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

33. $f(A_0) = A_7$, $f(A_{12}) = A_{27}$, $f(A_{36}) = A_{26}$, $f(A_{52}) = A_{24}$, $f(A_{60}) = A_{25}$ *ve* $f(A_{72}) = A_6$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

34. $f(A_0) = A_{73}$, $f(A_{12}) = A_{37}$, $f(A_{36}) = A_{13}$, $f(A_{52}) = A_{61}$, $f(A_{60}) = A_{53}$ *ve* $f(A_{72}) = A_1$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

35.$f(A_0) = A_9$, $f(A_{12}) = A_{69}$, $f(A_{36}) = A_{46}$, $f(A_{52}) = A_{54}$, $f(A_{60}) = A_{30}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{74}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

36.$f(A_0) = A_{73}$, $f(A_{12}) = A_{45}$, $f(A_{36}) = A_{21}$, $f(A_{52}) = A_{65}$, $f(A_{60}) = A_{37}$ *ve* $f(A_{72}) = A_5$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

37. $f(A_0) = A_{77}$, $f(A_{12}) = A_{57}$, $f(A_{36}) = A_{61}$, $f(A_{52}) = A_{17}$, $f(A_{60}) = A_{41}$ *ve* $f(A_{72}) = A_1$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{\sqrt{5+}-1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

38. $f(A_0) = A_{11}$, $f(A_{12}) = A_{35}$, $f(A_{36}) = A_{31}$, $f(A_{52}) = A_{30}$, $f(A_{60}) = A_{34}$ *ve* $f(A_{72}) = A_9$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

39. $f(A_0) = A_{72}$, $f(A_{12}) = A_{44}$, $f(A_{36}) = A_{68}$, $f(A_{52}) = A_{28}$, $f(A_{60}) = A_{52}$ *ve* $f(A_{72}) = A_8$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

40. $f(A_0) = A_8$, $f(A_{12}) = A_{29}$, $f(A_{36}) = A_{33}$, $f(A_{52}) = A_{32}$, $f(A_{60}) = A_{28}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{10}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

41. $f(A_0) = A_{10}$, $f(A_{12}) = A_{70}$, $f(A_{36}) = A_{48}$, $f(A_{52}) = A_{56}$, $f(A_{60}) = A_{32}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{76}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

42. $f(A_0) = A_{76}$, $f(A_{12}) = A_{40}$, $f(A_{36}) = A_{16}$, $f(A_{52}) = A_{60}$, $f(A_{60}) = A_{56}$ *ve* $f(A_{72}) = A_0$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

43. $f(A_0) = A_4$, $f(A_{12}) = A_{22}$, $f(A_{36}) = A_{23}$, $f(A_{52}) = A_{21}$, $f(A_{60}) = A_{20}$ *ve* $f(A_{72}) = A_5$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

44.$f(A_0) = A_{75}$, $f(A_{12}) = A_{55}$, $f(A_{36}) = A_{63}$, $f(A_{52}) = A_{15}$, $f(A_{60}) = A_{39}$ *ve* $f(A_{72}) = A_3$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

45. $f(A_0) = A_{79}$, $f(A_{12}) = A_{51}$, $f(A_{36}) = A_{27}$, $f(A_{52}) = A_{67}$, $f(A_{60}) = A_{43}$ *ve* $f(A_{72}) = A_7$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

46. $f(A_0) = A_6$, $f(A_{12}) = A_{66}$, $f(A_{36}) = A_{40}$, $f(A_{52}) = A_{48}$, $f(A_{60}) = A_{24}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{76}$ *ise dönme ekseni*$(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

47. $f(A_0) = A_2$, $f(A_{12}) = A_{14}$, $f(A_{36}) = A_{12}$, $f(A_{52}) = A_{16}$, $f(A_{60}) = A_{18}$ *ve* $f(A_{72}) = A_0$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

48. $f(A_0) = A_{74}$, $f(A_{12}) = A_{38}$, $f(A_{36}) = A_{14}$, $f(A_{52}) = A_{62}$, $f(A_{60}) = A_{54}$ *ve* $f(A_{72}) = A_2$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

49. $f(A_0) = A_4$, $f(A_{12}) = A_{64}$, $f(A_{36}) = A_{38}$, $f(A_{52}) = A_{46}$, $f(A_{60}) = A_{22}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{74}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

50. $f(A_0) = A_{72}$, $f(A_{12}) = A_{36}$, $f(A_{36}) = A_{64}$, $f(A_{52}) = A_{20}$, $f(A_{60}) = A_{44}$ *ve* $f(A_{72}) = A_4$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

51. $f(A_0) = A_2$, $f(A_{12}) = A_{62}$, $f(A_{36}) = A_{54}$, $f(A_{52}) = A_{38}$, $f(A_{60}) = A_{14}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{74}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

52. $f(A_0) = A_{78}$, $f(A_{12}) = A_{50}$, $f(A_{36}) = A_{71}$, $f(A_{52}) = A_{34}$, $f(A_{60}) = A_{58}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{11}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\Pi}{5}}$ *dönmedir.*

53. $f(A_0) = A_6$, $f(A_{12}) = A_{24}$, $f(A_{36}) = A_{25}$, $f(A_{52}) = A_{27}$, $f(A_{60}) = A_{26}$ *ve* $f(A_{72}) = A_7$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

54.$f(A_0) = A_{76}$, $f(A_{12}) = A_{56}$, $f(A_{36}) = A_{32}$, $f(A_{52}) = A_{70}$, $f(A_{60}) = A_{48}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{10}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

55. $f(A_0) = A_{74}$, $f(A_{12}) = A_{46}$, $f(A_{36}) = A_{22}$, $f(A_{52}) = A_{64}$, $f(A_{60}) = A_{38}$ *ve* $f(A_{72}) = A_4$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

56. $f(A_0) = A_{75}$, $f(A_{12}) = A_{39}$, $f(A_{36}) = A_{65}$, $f(A_{52}) = A_{23}$, $f(A_{60}) = A_{47}$ *ve* $f(A_{72}) = A_5$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

57. $f(A_0) = A_1$, $f(A_{12}) = A_{61}$, $f(A_{36}) = A_{53}$, $f(A_{52}) = A_{37}$, $f(A_{60}) = A_{13}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{73}$ *ise dönme ekseni*$(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

58. $f(A_0) = A_{10}$, $f(A_{12}) = A_{32}$, $f(A_{36}) = A_{28}$, $f(A_{52}) = A_{29}$, $f(A_{60}) = A_{33}$ *ve* $f(A_{72}) = A_8$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

59. $f(A_0) = A_{78}$, $f(A_{12}) = A_{58}$, $f(A_{36}) = A_{62}$, $f(A_{52}) = A_{18}$, $f(A_{60}) = A_{42}$ *ve* $f(A_{72}) = A_2$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

60. $f(A_0) = A_{79}$, $f(A_{12}) = A_{59}$, $f(A_{36}) = A_{35}$, $f(A_{52}) = A_{71}$, $f(A_{60}) = A_{51}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{11}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

61. $f(A_0) = A_1$, $f(A_{12}) = A_{13}$, $f(A_{36}) = A_{15}$, $f(A_{52}) = A_{19}$, $f(A_{60}) = A_{17}$ *ve* $f(A_{72}) = A_3$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

62. $f(A_0) = A_8$, $f(A_{12}) = A_{68}$, $f(A_{36}) = A_{45}$, $f(A_{52}) = A_{53}$, $f(A_{60}) = A_{29}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{73}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

63. $f(A_0) = A_{72}$, $f(A_{12}) = A_{52}$, $f(A_{36}) = A_{60}$, $f(A_{52}) = A_{12}$, $f(A_{60}) = A_{36}$ *ve* $f(A_{72}) = A_0$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

64. $f(A_0) = A_{11}$, $f(A_{12}) = A_{71}$, $f(A_{36}) = A_{51}$, $f(A_{52}) = A_{59}$, $f(A_{60}) = A_{35}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{79}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}+1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

65. $f(A_0) = A_9$, $f(A_{12}) = A_{30}$, $f(A_{36}) = A_{34}$, $f(A_{52}) = A_{35}$, $f(A_{60}) = A_{31}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{11}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

66. $f(A_0) = A_{76}$, $f(A_{12}) = A_{48}$, $f(A_{36}) = A_{24}$, $f(A_{52}) = A_{66}$, $f(A_{60}) = A_{40}$ *ve* $f(A_{72}) = A_6$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}+1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

67. $f(A_0) = A_{73}$, $f(A_{12}) = A_{53}$, $f(A_{36}) = A_{29}$, $f(A_{52}) = A_{68}$, $f(A_{60}) = A_{45}$ *ve* $f(A_{72}) = A_8$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

68. $f(A_0) = A_3$, $f(A_{12}) = A_{63}$, $f(A_{36}) = A_{59}$, $f(A_{52}) = A_{43}$, $f(A_{60}) = A_{19}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{79}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

69. $f(A_0) = A_{77}$, $f(A_{12}) = A_{41}$, $f(A_{36}) = A_{67}$, $f(A_{52}) = A_{25}$, $f(A_{60}) = A_{49}$ *ve* $f(A_{72}) = A_7$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

70. $f(A_0) = A_3$, $f(A_{12}) = A_{19}$, $f(A_{36}) = A_{17}$, $f(A_{52}) = A_{13}$, $f(A_{60}) = A_{15}$ *ve* $f(A_{72}) = A_1$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

71. $f(A_0) = A_5$, $f(A_{12}) = A_{21}$, $f(A_{36}) = A_{20}$, $f(A_{52}) = A_{22}$, $f(A_{60}) = A_{23}$ *ve* $f(A_{72}) = A_4$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{1}{2})$*olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

72. $f(A_0) = A_{79}$, $f(A_{12}) = A_{43}$, $f(A_{36}) = A_{19}$, $f(A_{52}) = A_{63}$, $f(A_{60}) = A_{59}$ *ve* $f(A_{72}) = A_3$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4}, -\frac{1}{2})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

73. $f(A_0) = A_7$, $f(A_{12}) = A_{67}$, $f(A_{36}) = A_{43}$, $f(A_{52}) = A_{51}$, $f(A_{60}) = A_{27}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{79}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{1}{2})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

74. $f(A_0) = A_{75}$, $f(A_{12}) = A_{47}$, $f(A_{36}) = A_{69}$, $f(A_{52}) = A_{31}$, $f(A_{60}) = A_{55}$ *ve* $f(A_{72}) = A_9$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4}, -\frac{1}{2})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

75. $f(A_0) = A_7$, $f(A_{12}) = A_{27}$, $f(A_{36}) = A_{51}$, $f(A_{52}) = A_{43}$, $f(A_{60}) = A_{67}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{79}$ *ise dönme ekseni* $(1, 1, 1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

76. $f(A_0) = A_{11}$, $f(A_{12}) = A_{35}$, $f(A_{36}) = A_{59}$, $f(A_{52}) = A_{51}$, $f(A_{60}) = A_{71}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{79}$ *ise dönme ekseni* $(1,1,1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

77. $f(A_0) = A_9$, $f(A_{12}) = A_{30}$, $f(A_{36}) = A_{54}$, $f(A_{52}) = A_{46}$, $f(A_{60}) = A_{69}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{74}$ *ise dönme ekseni* $(-1,1,1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

78. $f(A_0) = A_5$, $f(A_{12}) = A_{21}$, $f(A_{36}) = A_{45}$, $f(A_{52}) = A_{37}$, $f(A_{60}) = A_{65}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{73}$ *ise dönme ekseni* $(-1,1,1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

79. $f(A_0) = A_8$, $f(A_{12}) = A_{29}$, $f(A_{36}) = A_{53}$, $f(A_{52}) = A_{45}$, $f(A_{60}) = A_{68}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{73}$ *ise dönme ekseni* $(1,-1,1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

80. $f(A_0) = A_6$, $f(A_{12}) = A_{24}$, $f(A_{36}) = A_{48}$, $f(A_{52}) = A_{40}$, $f(A_{60}) = A_{66}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{76}$ *ise dönme ekseni* $(1,-1,1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

81. $f(A_0) = A_{10}$, $f(A_{12}) = A_{32}$, $f(A_{36}) = A_{56}$, $f(A_{52}) = A_{48}$, $f(A_{60}) = A_{70}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{76}$ *ise dönme ekseni* $(1,1,-1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

82. $f(A_0) = A_4$, $f(A_{12}) = A_{22}$, $f(A_{36}) = A_{46}$, $f(A_{52}) = A_{38}$, $f(A_{60}) = A_{64}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{74}$ *ise dönme ekseni*$(1,1,-1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

83. $f(A_0) = A_3$, $f(A_{12}) = A_{63}$, $f(A_{36}) = A_{55}$, $f(A_{52}) = A_{39}$, $f(A_{60}) = A_{15}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{75}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

84. $f(A_0) = A_3$, $f(A_{12}) = A_{15}$, $f(A_{36}) = A_{13}$, $f(A_{52}) = A_{17}$, $f(A_{60}) = A_{19}$ *ve* $f(A_{72}) = A_1$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

85. $f(A_0) = A_{77}$, $f(A_{12}) = A_{57}$, $f(A_{36}) = A_{33}$, $f(A_{52}) = A_{70}$, $f(A_{60}) = A_{49}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{10}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

86. $f(A_0) = A_{73}$, $f(A_{12}) = A_{37}$, $f(A_{36}) = A_{65}$, $f(A_{52}) = A_{21}$, $f(A_{60}) = A_{45}$ *ve* $f(A_{72}) = A_5$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

87. $f(A_0) = A_6$, $f(A_{12}) = A_{66}$, $f(A_{36}) = A_{42}$, $f(A_{52}) = A_{50}$, $f(A_{60}) = A_{26}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{78}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

88. $f(A_0) = A_{74}$, $f(A_{12}) = A_{46}$, $f(A_{36}) = A_{69}$, $f(A_{52}) = A_{30}$, $f(A_{60}) = A_{54}$ *ve* $f(A_{72}) = A_9$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

89. $f(A_0) = A_4$, $f(A_{12}) = A_{20}$, $f(A_{36}) = A_{21}$, $f(A_{52}) = A_{23}$, $f(A_{60}) = A_{22}$ *ve* $f(A_{72}) = A_5$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

90. $f(A_0) = A_{78}$, $f(A_{12}) = A_{42}$, $f(A_{36}) = A_{18}$, $f(A_{52}) = A_{62}$, $f(A_{60}) = A_{58}$ *ve* $f(A_{72}) = A_2$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

91. $f(A_0) = A_{10}$, $f(A_{12}) = A_{70}$, $f(A_{36}) = A_{49}$, $f(A_{52}) = A_{57}$, $f(A_{60}) = A_{33}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{77}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

92. $f(A_0) = A_{78}$, $f(A_{12}) = A_{50}$, $f(A_{36}) = A_{26}$, $f(A_{52}) = A_{66}$, $f(A_{60}) = A_{42}$ *ve* $f(A_{72}) = A_6$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

93.$f(A_0) = A_{74}$, $f(A_{12}) = A_{54}$, $f(A_{36}) = A_{62}$, $f(A_{52}) = A_{14}$, $f(A_{60}) = A_{38}$ *ve* $f(A_{72}) = A_2$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{\sqrt{5}+-1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

94. $f(A_0) = A_8$, $f(A_{12}) = A_{28}$, $f(A_{36}) = A_{32}$, $f(A_{52}) = A_{33}$, $f(A_{60}) = A_{29}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{10}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

95. $f(A_0) = A_{79}$, $f(A_{12}) = A_{51}$, $f(A_{36}) = A_{71}$, $f(A_{52}) = A_{35}$, $f(A_{60}) = A_{59}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{11}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$*e olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

96. $f(A_0) = A_{11}$, $f(A_{12}) = A_{34}$, $f(A_{36}) = A_{30}$, $f(A_{52}) = A_{31}$, $f(A_{60}) = A_{35}$ *ve* $f(A_{72}) = A_9$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

97. $f(A_0) = A_9$, $f(A_{12}) = A_{69}$, $f(A_{36}) = A_{47}$, $f(A_{52}) = A_{55}$, $f(A_{60}) = A_{31}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{75}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

98. $f(A_0) = A_{75}$, $f(A_{12}) = A_{39}$, $f(A_{36}) = A_{15}$, $f(A_{52}) = A_{63}$, $f(A_{60}) = A_{55}$ *ve* $f(A_{72}) = A_3$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmk üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

99.$f(A_0) = A_7$, $f(A_{12}) = A_{25}$, $f(A_{36}) = A_{24}$, $f(A_{52}) = A_{26}$, $f(A_{60}) = A_{27}$ *ve* $f(A_{72}) = A_6$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

100. $f(A_0) = A_{76}$, $f(A_{12}) = A_{56}$, $f(A_{36}) = A_{60}$, $f(A_{52}) = A_{16}$, $f(A_{60}) = A_{40}$ *ve* $f(A_{72}) = A_0$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

101. $f(A_0) = A_{77}$, $f(A_{12}) = A_{44}$, $f(A_{36}) = A_{20}$, $f(A_{52}) = A_{64}$, $f(A_{60}) = A_{36}$ *ve* $f(A_{72}) = A_4$ *ise dönme ekseni*$(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

102. $f(A_0) = A_5$, $f(A_{12}) = A_{65}$, $f(A_{36}) = A_{39}$, $f(A_{52}) = A_{47}$, $f(A_{60}) = A_{23}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{75}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

103. $f(A_0) = A_1$, $f(A_{12}) = A_{17}$, $f(A_{36}) = A_{19}$, $f(A_{52}) = A_{15}$, $f(A_{60}) = A_{13}$ *ve* $f(A_{72}) = A_3$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

104. $f(A_0) = A_{77}$, $f(A_{12}) = A_{41}$, $f(A_{36}) = A_{17}$, $f(A_{52}) = A_{61}$, $f(A_{60}) = A_{57}$ *ve* $f(A_{72}) = A_1$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

105. $f(A_0) = A_7$, $f(A_{12}) = A_{67}$, $f(A_{36}) = A_{41}$, $f(A_{52}) = A_{49}$, $f(A_{60}) = A_{25}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{77}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

106. $f(A_0) = A_{79}$, $f(A_{12}) = A_{43}$, $f(A_{36}) = A_{67}$, $f(A_{52}) = A_{27}$, $f(A_{60}) = A_{51}$ *ve* $f(A_{72}) = A_7$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

107. $f(A_0) = A_1$, $f(A_{12}) = A_{61}$, $f(A_{36}) = A_{57}$, $f(A_{52}) = A_{41}$, $f(A_{60}) = A_{17}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{77}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

108. $f(A_0) = A_{73}$, $f(A_{12}) = A_{45}$, $f(A_{36}) = A_{68}$, $f(A_{52}) = A_{29}$, $f(A_{60}) = A_{53}$ *ve* $f(A_{72}) = A_8$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

109. $f(A_0) = A_5$, $f(A_{12}) = A_{23}$, $f(A_{36}) = A_{22}$, $f(A_{52}) = A_{20}$, $f(A_{60}) = A_{21}$ *ve* $f(A_{72}) = A_4$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

110. $f(A_0) = A_{75}$, $f(A_{12}) = A_{55}$, $f(A_{36}) = A_{31}$, $f(A_{52}) = A_{69}$, $f(A_{60}) = A_{47}$ *ve* $f(A_{72}) = A_9$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

111. $f(A_0) = A_{77}$, $f(A_{12}) = A_{49}$, $f(A_{36}) = A_{25}$, $f(A_{52}) = A_{67}$, $f(A_{60}) = A_{41}$ *ve* $f(A_{72}) = A_7$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

112. $f(A_0) = A_{76}$, $f(A_{12}) = A_{40}$, $f(A_{36}) = A_{66}$, $f(A_{52}) = A_{24}$, $f(A_{60}) = A_{48}$ *ve* $f(A_{72}) = A_6$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

113. $f(A_0) = A_2$, $f(A_{12}) = A_{62}$, $f(A_{36}) = A_{58}$, $f(A_{52}) = A_{42}$, $f(A_{60}) = A_{18}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{78}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

114. $f(A_0) = A_9$, $f(A_{12}) = A_{31}$, $f(A_{36}) = A_{35}$, $f(A_{52}) = A_{34}$, $f(A_{60}) = A_{30}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{11}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

115. $f(A_0) = A_{73}$, $f(A_{12}) = A_{53}$, $f(A_{36}) = A_{61}$, $f(A_{52}) = A_{13}$, $f(A_{60}) = A_{37}$ *ve* $f(A_{72}) = A_1$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

116. $f(A_0) = A_{72}$, $f(A_{12}) = A_{52}$, $f(A_{36}) = A_{28}$, $f(A_{52}) = A_{68}$, $f(A_{60}) = A_{44}$ *ve* $f(A_{72}) = A_8$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

117. $f(A_0) = A_2$, $f(A_{12}) = A_{18}$, $f(A_{36}) = A_{16}$, $f(A_{52}) = A_{12}$, $f(A_{60}) = A_{14}$ *ve* $f(A_{72}) = A_0$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

118. $f(A_0) = A_{11}$, $f(A_{12}) = A_{71}$, $f(A_{36}) = A_{50}$, $f(A_{52}) = A_{58}$, $f(A_{60}) = A_{34}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{78}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

119. $f(A_0) = A_0$, $f(A_{12}) = A_{12}$, $f(A_{36}) = A_{36}$, $f(A_{52}) = A_{52}$, $f(A_{60}) = A_{60}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{72}$ *ise* f *birim dönüşümdür.*

120. $f(A_0) = A_3$, $f(A_{12}) = A_{19}$, $f(A_{36}) = A_{43}$, $f(A_{52}) = A_{59}$, $f(A_{60}) = A_{63}$ *ve* $f(A_{72}) = A_{79}$ *ise* f *inversiyondur.*

Buna göre orijini koruyan f *izometrisi* $G(D)$ *nin bir elemanıdır. Bir başka deyişle chamfered dodecahedron uzaklığını koruyan Öklidyen izometriler dışında bir izometri yoktur.*

Teorem 6.1 $f : \mathbb{R}^3_{CD} \to \mathbb{R}^3_{CD}$ *dönüşümü bir izometri olsun.* $f = T_A \circ g$ *olacak şekilde bir tek* $T_A \in T(3)$ *ve* $g \in G(CD)$ *vardır.*

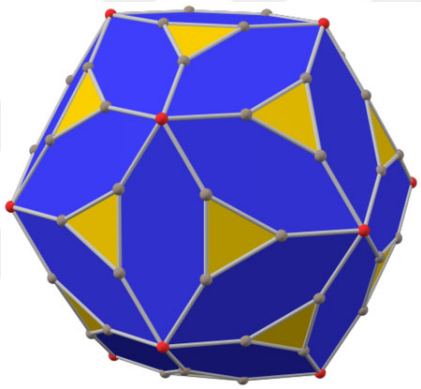
İspat $A = (a_1, a_2, a_3)$ *olmak üzere* $f(O) = A$ *olsun. Bu taktirde* $g = T_{-A} \circ f$ *olacak şekilde tanımlı* g *dönü şümü bir izometridir ve* $g(O) = O$ *olur. Böylece önerme 6.9 dan dolayı* $g \in G(CD)$ *ve* $f = T_A \circ g$ *olur. İspatın tekliği aşikardır.*

Buna göre chamfered dodecahedron metriği ile donatılmış analitik 3-uzayın izometrilerinin grubu chamfered dodecahedronun (Öklidyen) simetri grubu olan I_h ile 3-boyutlu analitik uzayın tüm ötelemelerinin grubu olan $T(3)$ ün yarı-direkt çarpımıdır. Yani $\mathbb{R}^3_{CD}$ nın tüm izometrilerinin kümesi $T(3).G(CD)$ dır.

7. CHAMFERED ICOSAHEDRON UZAYI

7.1 Chamfered Icosahedron Metriği ve Özellikleri

Chamfered icosahedron, Platonik cisimlerden olan icosahedrona chamfered işlemi uygulanması sonucunda elde edilen bir konveks çokyüzlüdür. Chamfered icosahedron 72 köşe 120 kenar ve 30 u altıgen 20 tanesi eşkenar üçgen olmak üzere toplamda 50 adet yüze sahiptir. Altıgen yüzleri oluşturan altıgenlerin kenar uzunlukları eş olmasına rağmen iç açıları eş olmadığından düzgün altıgen değillerdir. (Şekil7.1).



Şekil 7.1 Chamfered Icosahedron

Ayrıca chamfered icosahedron 120 tane simetriye sahip olup, simetri grubu I_h ile gösterilir.

Bu bölümde, birim küresi chamfered icosahedron olan uzaklık fonksiyonu d_{CI} ile gösterilir ve bu uzaklık fonksiyonunun metrik aksiyomların sapladığını ve bazı özellikleri verilecektir.

Tanım 7.1 *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\mathbb{R}^3$de iki farklı nokta olsun. Buna göre*

$$\begin{aligned} u &= \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}, \\ v &= \text{mid}\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}, \\ w &= \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\} \end{aligned}$$

olarak tanımlasın. Ayrıca $X \to Y \to Z \to X$ şeklindeki yönlendirmeye pozitif(+) yön, $Z \to Y \to X \to Z$ şeklindeki yönlendirmeye negatif(−) yön denilecektir. Buna göre u^+ ve u^- ile u da göre ilgili yöndeki bir sonraki terim gösterilecektir. Örneğin $u = |y_1 - y_2|$ ise $u^+ = |z_1 - z_2|$ ve $u^- = |x_1 - x_2|$ olacaktır.

Tanım 7.2 *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\mathbb{R}^3$de iki farklı nokta olsun.*

$$d_{CI}(P_1, P_2) = \max\left\{\frac{\varphi}{2}u + \frac{1}{2}u^- + \frac{1}{2\varphi}u^+, u, \alpha\left(u + u^+ + u^-\right), \varphi\alpha u + \frac{1}{\varphi}\alpha u^-\right\}$$

şeklinde tanımlanan $d_{CI} : \mathbb{R}^3 x\, \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$ fonksiyonuna P_1 ve P_2 noktaları arasındaki chamfered icosahedron uzaklık fonksiyonu denir.

Yardımcı Teorem 7.1 *P_1=(x_1, y_1, z_1) ve P_2=(x_2, y_2, z_2) $\mathbb{R}^3$de iki farklı nokta olsun. Bu takdirde,*

$$\begin{aligned} d_{CI}(P_1, P_2) &\geq \tfrac{\varphi}{2}u + \tfrac{1}{2}u^- + \tfrac{1}{2\varphi}u^+ \\ d_{CI}(P_1, P_2) &\geq u \\ d_{CI}(P_1, P_2) &\geq \alpha\left(u + u^+ + u^-\right) \\ d_{CI}(P_1, P_2) &\geq \varphi\alpha u + \tfrac{1}{\varphi}\alpha u^- \end{aligned}$$

olur.

İspat *Maksimum fonksiyonun tanımından ispat aşikardır.*

Önerme 7.1 *$\mathbb{R}^3$ de d_{CI} uzaklık fonksiyonu metriktir ve bu metrikle donatılmış uzayın birim küresi chamfered icosahedrondur.*

İspat *$d_{CI} : \mathbb{R}^3 x \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uzaklık fonksiyonu ve $P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ve $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$, $\mathbb{R}^3$de üç farklı nokta olsun. Bütün $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^3$ için d_{CI} aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa $\mathbb{R}^3$ de bir metriktir.*

M1) $d_{CI}(P_1, P_2) \geq 0$ *ve* $d_{CI}(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$
M2) $d_{CI}(P_1, P_2) = d_{CI}(P_2, P_1)$
M3) $d_{CI}(P_1, P_3) \leq d_{CI}(P_1, P_2) + d_{CI}(P_2, P_3)$.

M1) *Mutlak değer daima negatif olmayan değerler üretti ğinden mutlak değerli ifadelerin pozitif ifadelerle çarpılıp toplanması sonucu negatif olmayan değerler elde edilir. Açıkça $d_{CI}(P_1, P_2) \geq 0$. Yani d_{CI} pozitif tanımlıdır. Eğer, $d_{CI}(P_1, P_2)$=0 ise $\varphi u + \frac{1}{2}u^- + \frac{1}{4\varphi}u^+ = 0$, $u = 0$, $\alpha(u + u^+ + u^-) = 0$ ve $\varphi\alpha u + \frac{1}{\varphi}\alpha u^- = 0$ olacağından*

dolayı $|x_1-x_2|=0, |y_1-y_2|=0,\ |z_1-z_2|=0 \implies x_1=x_2, y_1=y_2, z_1=z_2 \implies P_1=P_2$ *olur.Tersine* $P_1=P_2 \implies |x_1-x_2|=0, |y_1-y_2|=0, |z_1-z_2|=0 \implies d_{CI}(P_1,P_2)=0$ *bulunur.*
M2) *Mutlak değerden dolayı* $|x_1-x_2|=|x_2-x_1|$, $|y_1-y_2|=|y_2-y_1|$, $|z_1-z_2|=|z_2-z_1|$ *olduğundan açıkça,* $d_{CI}(P_1,P_2)=d_{CI}(P_2,P_1)$ *dir. Yani* d_{CI} *simetriktir.*
M3) $P_1=(x_1,y_1,z_1)$, $P_2=(x_2,y_2,z_2)$ *ve* $P_3=(x_3,y_3,z_3) \in \mathbb{R}^3$ *olsun.* $X_{13}=|x_1-x_3|$, $Y_{13}=|y_1-y_3|$, $Z_{13}=|z_1-z_3|$, $X_{12}=|x_1-x_2|$, $Y_{12}=|y_1-y_2|$, $Z_{12}=|z_1-z_2|$, $X_{23}=|x_3-x_2|$, $Y_{23}=|y_3-y_2|$, $Z_{23}=|z_3-z_2|$ *olmak üzere ve de* u_{ij}, v_{ij}, w_{ij} *ile* $\{X_{ij},Y_{ij},Z_{ij}\}$ *kümesinin sırasıyla maksimum, orta ve minimum değerlerini gösterirse, ayrıca* U_{ij}, V_{ij} *ve* W_{ij} *de ilgili ifadedeki* X_{ij}, Y_{ij} *veya* Z_{ij} *yerine sırasıyla* $X_{ik}+X_{kj}, Y_{ik}+Y_{kj}$ *veya* $Z_{ik}+Z_{kj}$ *alınması ile elde edilen ifadeyi işaret etmek üzere*

$$\begin{aligned} d_{CI}(P_1,P_3) &= \max\left\{\tfrac{\varphi}{2}u_{13}+\tfrac{1}{2}u_{13}^{-}+\tfrac{1}{2\varphi}u_{13}^{+}, u_{13}, \alpha\left(u_{13}+u_{13}^{+}+u_{13}^{-}\right), \varphi\alpha u_{13}+\tfrac{1}{\varphi}u_{13}^{-}\right\} \\ &\le \max\left\{\begin{array}{r} \tfrac{\varphi}{2}\left(U_{12}+U_{23}\right)+\tfrac{1}{2}\left(U_{12}^{-}+U_{23}^{-}\right)+\tfrac{1}{2\varphi}\left(U_{12}^{+}+U_{23}^{+}\right), \left(U_{12}+U_{23}\right), \\ \alpha\left(\left(U_{12}+U_{23}\right)+\left(U_{12}^{+}+U_{23}^{+}\right)+\left(U_{12}^{-}+U_{23}^{-}\right)\right), \\ \varphi\alpha\left(U_{12}+U_{23}\right)+\tfrac{1}{\varphi}\alpha\left(U_{12}^{-}+U_{23}^{-}\right) \end{array}\right\} \\ &\le \max\left\{\tfrac{\varphi}{2}U_{12}+\tfrac{1}{2}U_{12}^{-}+\tfrac{1}{2\varphi}U_{12}^{+}, U_{12}, \alpha\left(U_{12}+U_{12}^{+}+U_{12}^{-}\right), \varphi\alpha U_{12}+\tfrac{1}{\varphi}\alpha U_{12}^{-}\right\} \\ &\quad + \max\left\{\tfrac{\varphi}{2}U_{23}+\tfrac{1}{2}U_{23}^{-}+\tfrac{1}{2\varphi}U_{23}^{+}, U_{23}, \alpha\left(U_{23}+U_{23}^{+}+U_{23}^{-}\right), \varphi\alpha U_{23}+\tfrac{1}{\varphi}\alpha U_{23}^{-}\right\} \\ &= X \end{aligned}$$

dir. Burada yardımcı teorem 7.1 den dolayı

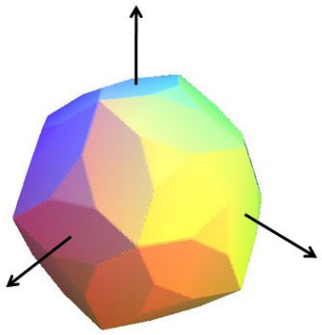
$$\begin{aligned} d_{CC}(P_1,P_2) &\ge \max\left\{\tfrac{\varphi}{2}U_{12}+\tfrac{1}{2}U_{12}^{-}+\tfrac{1}{2\varphi}U_{12}^{+}, U_{12}, \alpha\left(U_{12}+U_{12}^{+}+U_{12}^{-}\right), \varphi\alpha U_{12}+\tfrac{1}{\varphi}\alpha U_{12}^{-}\right\} \\ d_{CI}(P_2,P_3) &\ge \max\left\{\tfrac{\varphi}{2}U_{23}+\tfrac{1}{2}U_{23}^{-}+\tfrac{1}{2\varphi}U_{23}^{+}, U_{23}, \alpha\left(U_{23}+U_{23}^{+}+U_{23}^{-}\right), \varphi\alpha U_{23}+\tfrac{1}{\varphi}\alpha U_{23}^{-}\right\} \end{aligned}$$

olur. O halde $X \le d_{CI}(P_1,P_2)+d_{CI}(P_2,P_3)$ *bulunur. Buna göre* $d_{CI}(P_1,P_3) \le d_{CI}(P_1,P_2)+d_{CI}(P_2,P_3)$ *elde edilir. Yani chamfered icosahedron uzaklık fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar.*

Sonuç olarak chamfered icosahedron uzaklık fonksiyonu metriktir. Ayrıca bu metrikle döşenmiş analitik 3-uzayda orijinden 1 birim chamfered icosahedron uzaklığındaki noktaların kümesi;

$$S_{CI}=\left\{(x,y,z) : \max\left\{\frac{\varphi}{2}u+\frac{1}{2}u^{-}+\frac{1}{2\varphi}u^{+}, u, \alpha\left(u+u^{+}+u^{-}\right), \varphi\alpha u+\frac{1}{\varphi}\alpha u^{-}\right\}=1\right\}$$

olup bu noktaların geometrik yeri şekil7.2 de görüldüğü gibi chamfered icosahedrondur.



Şekil 7.2 Deltoidal hexacontahedronun koordinat sistemine yerleştirilmesi

Chamfered icosahedron uzaklık fonksiyonu göz önüne alındığında geometrik olarak P_1 noktasından P_2 noktasına olan yol için 4 farklı ihtimal vardır. Buna göre, bu yollar aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

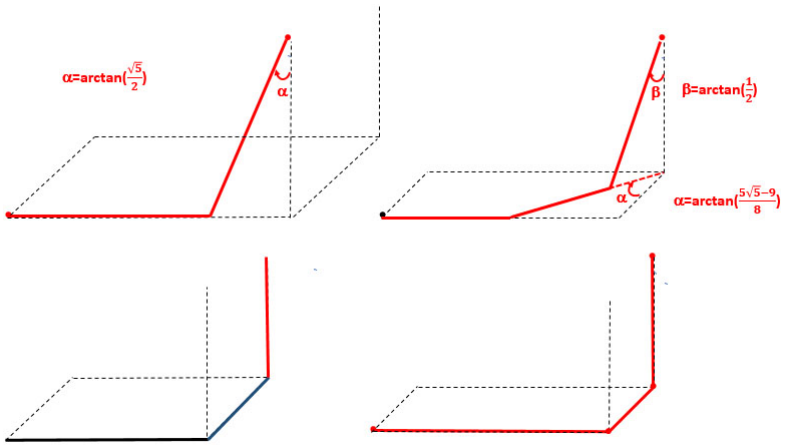
(i) Koordinat eksenlerinden birine paralel olan bir doğru parçasıdır.

(ii) Biri koordinat eksenlerinden birine paralel diğeri bir diğer koordinat ekseni ile $\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ radyanlık açı yapan iki doğru parçasının birleşimidir.

(iii) Biri koordinat eksenlerinden birine paralel diğerleri diğer koordinat eksenleri ile $\arctan\left(\frac{5\sqrt{5}-9}{8}\right)$ ve $\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ radyanlık açı yapan üç doğru parçasının birleşimidir.

(iv) Her biri koordinat eksenlerinden birine paralel olan üç doğru parçasının birleşimidir.

Böylece P_1 ve P_2 noktaları arasındaki chamfered icosahedron uzaklığı (i) deki yol için bahsedilen doğru parçasının Öklidyen uzunluğu, (ii) deki yol için bahsedilen iki doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamının $\varphi\alpha$ katı, (iii) deki yol için bahsedilen üç doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamının $\frac{\varphi}{2}$ katı, (iv) deki yol için bahsedilen üç doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamının α katıdır (Şekil7.3)



Şekil 7.3 Chamfered icosahedron yolu

Sonuç 7.1 $u = \max\{|x-x_0|, |y-y_0|, |z-z_0|\}$, $v = \text{mid}\{|x-x_0|, |y-y_0|, |z-z_0|\}$ *ve* $w = \min\{|x-x_0|, |y-y_0|, |z-z_0|\}$ *ve ayrıca* $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ *altın oran ve* $\alpha = \frac{307+293\sqrt{5}}{1882} + \frac{\left(540-208\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{9410}$ *olmak üzere* $\mathbb{R}^3_{CI}$ *de* (x_0, y_0, z_0) *merkezli ve* r *yarıçaplı küre*

$$\max\left\{\frac{\varphi}{2}u + \frac{1}{2}u^- + \frac{1}{2\varphi}u^+, u, \alpha\left(u+u^++u^-\right), \varphi\alpha u + \frac{1}{\varphi}\alpha u^-\right\} = r$$

denklemi ile ifade edilen köşe noktaları $t = \frac{\left(11\sqrt{5}-25\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$ *alınırsa*
$(\frac{1}{\varphi}r, 0, r)$, $(r, \frac{1}{\varphi}r, 0)$, $(0, r, \frac{1}{\varphi}r)$, $\left(\left(\frac{15-7\sqrt{5}}{2}-t\right)r, \left(14-6\sqrt{5}+\frac{1}{\varphi}t\right)r, r\right)$,
$\left(r, \left(\frac{15-7\sqrt{5}}{2}-t\right)r, \left(14-6\sqrt{5}+\frac{1}{\varphi}t\right)r\right)$, $\left(\left(14-6\sqrt{5}+\frac{1}{\varphi}t\right)r, r, \left(\frac{15-7\sqrt{5}}{2}-t\right)r\right)$,
$\left(0, \left(9-4\sqrt{5}-t\right)r, \left(\frac{27-11\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{\varphi}t\right)r\right)$, $\left(\left(\frac{27-11\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{\varphi}t\right)r, 0, \left(9-4\sqrt{5}-t\right)r\right)$,
$\left(\left(9-4\sqrt{5}-t\right)r, \left(\frac{27-11\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{\varphi}t\right)r, 0\right)$, $\left(\frac{1}{\varphi}r, \left(4\sqrt{5}-8+t\right)r, \left(6\sqrt{5}-13-\frac{1}{\varphi}t\right)r\right)$,
$\left(\left(6\sqrt{5}\text{-}13\text{-}\frac{1}{\varphi}t\right)r, \frac{1}{\varphi}r, \left(4\sqrt{5}\text{-}8\text{+}t\right)r\right)$ *ve* $\left(\left(4\sqrt{5}\text{-}8\text{+}t\right)r, \left(6\sqrt{5}\text{-}13\text{-}\frac{1}{\varphi}t\right)r, \frac{1}{\varphi}r\right)$ *noktalarının herbir bileşeninin* $+/-$ *işaret değişikliklerinin* (x_0, y_0, z_0) *kadar ötelenmişlerinden oluşan 50 yüzlü bir çokyüzlü olan chamfered icosahedrondur.*

Bu bölümün geri kalan kısmında sıkça kullanılacağından dolayı merkezil birim kürenin köşe noktaları aşağıdaki şekilde isimlendirilmiştir. Burada $t = \frac{\left(11\sqrt{5}-25\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$, $k_0 = 14-6\sqrt{5}+\frac{1}{\varphi}t$, $k_1 = 4\sqrt{5}-8+t$, $k_2 = 9-4\sqrt{5}-t$, $k_3 = \frac{1}{\varphi}$, $k_4 = 6\sqrt{5}-13-\frac{1}{\varphi}t$, $k_5 = \frac{27-11\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{\varphi}t$, $k_6 = 1$ ve $k_7 = \frac{15-7\sqrt{5}}{2}-t$ olmak üzere

$A_0 = (k_3, 0, k_6)$, $A_1 = (k_3, 0, -k_6)$, $A_2 = (-k_3, 0, k_6)$, $A_3 = (-k_3, 0, -k_6)$,
$A_4 = (k_6, k_3, 0)$, $A_5 = (k_6, -k_3, 0)$, $A_6 = (-k_6, k_3, 0)$, $A_7 = (-k_6, -k_3, 0)$,
$A_8 = (0, k_6, k_3)$, $A_9 = (0, k_6, -k_3)$, $A_{10} = (0, -k_6, k_3)$, $A_{11} = (0, -k_6, -k_3)$,
$A_{12} = (k_7, k_0, k_6)$, $A_{13} = (k_7, k_0, -k_6)$, $A_{14} = (k_7, -k_0, k_6)$, $A_{15} = (k_7, -k_0, -k_6)$,
$A_{16} = (-k_7, k_0, k_6)$, $A_{17} = (-k_7, k_0, -k_6)$, $A_{18} = (-k_7, -k_0, k_6)$, $A_{19} = (-k_7, -k_0, -k_6)$,
$A_{20} = (k_6, k_7, k_0)$, $A_{21} = (k_6, k_7, -k_0)$, $A_{22} = (k_6, -k_7, k_0)$, $A_{23} = (k_6, -k_7, -k_0)$,
$A_{24} = (-k_6, k_7, k_0)$, $A_{25} = (-k_6, k_7, -k_0)$, $A_{26} = (-k_6, -k_7, k_0)$, $A_{27} = (-k_6, -k_7, -k_0)$,
$A_{28} = (k_0, k_6, k_7)$, $A_{29} = (k_0, k_6, -k_7)$, $A_{30} = (k_0, -k_6, k_7)$, $A_{31} = (k_0, -k_6, -k_7)$,
$A_{32} = (-k_0, k_6, k_7)$, $A_{33} = (-k_0, k_6, -k_7)$, $A_{34} = (-k_0, -k_6, k_7)$, $A_{35} = (-k_0, -k_6, -k_7)$,
$A_{36} = (0, k_2, k_5)$, $A_{37} = (0, k_2, -k_5)$, $A_{38} = (0, -k_2, k_5)$, $A_{39} = (0, -k_2, -k_5)$,
$A_{40} = (k_5, 0, k_2)$, $A_{41} = (k_5, 0, -k_2)$, $A_{42} = (-k_5, 0, k_2)$, $A_{43} = (-k_5, 0, -k_2)$,
$A_{44} = (k_2, k_5, 0)$, $A_{45} = (k_2, -k_5, 0)$, $A_{46} = (-k_2, k_5, 0)$, $A_{47} = (-k_2, -k_5, 0)$,
$A_{48} = (k_3, k_1, k_4)$, $A_{49} = (k_3, k_1, -k_4)$, $A_{50} = (k_3, -k_1, k_4)$, $A_{51} = (k_3, -k_1, -k_4)$,
$A_{52} = (-k_3, k_1, k_4)$, $A_{53} = (-k_3, k_1, -k_4)$, $A_{54} = (-k_3, -k_1, k_4)$, $A_{55} = (-k_3, -k_1, -k_4)$,
$A_{56} = (k_4, k_3, k_1)$, $A_{57} = (k_4, k_3, -k_1)$, $A_{58} = (k_4, -k_3, k_1)$, $A_{59} = (k_4, -k_3, -k_1)$,
$A_{60} = (-k_4, k_3, k_1)$, $A_{61} = (-k_4, k_3, -k_1)$.$A_{62} = (-k_4, -k_3, k_1)$, $A_{63} = (-k_4, -k_3, -k_1)$,
$A_{64} = (k_1, k_4, k_3)$, $A_{65} = (k_1, k_4, -k_3)$, $A_{66} = (k_1, -k_4, k_3)$, $A_{67} = (k_1, -k_4, -k_3)$
$A_{68} = (-k_1, k_4, k_3)$, $A_{69} = (-k_1, k_4, -k_3)$, $A_{70} = (-k_1, -k_4, k_3)$, $A_{71} = (-k_1, -k_4, -k_3)$.

Aşağıdaki önermede $\mathbb{R}^3$ deki noktalar arasındaki Öklidyen ve chamfered icosahedron uzaklıkları arasındaki geçiş bağıntısını ifade etmektedir.

Önerme 7.2 *$\mathbb{R}^3$ de P_1 ve P_2 noktalarından geçen doğru l olsun. Eğer l doğrusunun doğrultu vektörü (p,q,r), $u = \max\{|p|,|q|,|r|\}$, $v = \text{mid}\{|p|,|q|,|r|\}$ ve $w = \min\{|p|,|q|,|r|\}$ ve ayrıca $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ altın oran ve $\alpha = \frac{307+293\sqrt{5}}{1882} + \frac{\left(540-208\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{9410}$ olmak üzere*

$$\rho_{P_1P_2} = \max\left\{\frac{\varphi}{2}u + \frac{1}{2}u^- + \frac{1}{2\varphi}u^+, u, \alpha\left(u+u^++u^-\right), \varphi\alpha u + \frac{1}{\varphi}\alpha u^-\right\}$$

ve $\mu_{P_1P_2} = \frac{\rho_{P_1P_2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$ ise $d_{CI}(P_1,P_2) = \mu_{P_1P_2} d_E(P_1,P_2)$ olur.

İspat *$P_1 = (x_1,y_1,z_1)$ ve $P_2 = (x_2,y_2,z_2)$, $\mathbb{R}^3$ deki herhangi iki nokta olsun. P_1 ve P_2 den geçen doğru l ise*

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} = \lambda$$

olur. l doğrusunun doğrultu vektörü (p,q,r) olduğ undan $(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1) = \lambda(p,q,r)$ dir. Buna göre $d_{CI}(P_1,P_2) = \lambda\rho_{P_1P_2}$ ve $d_E(P_1,P_2) = \lambda\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ olduğ undan dolayı $\frac{d_{CI}(P_1,P_2)}{\rho_{P_1P_2}} = \frac{d_E(P_1,P_2)}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$ bulunur. Bu ise önermenin ifadesindeki sonucu verir.

Yukarıdaki önerme herhangi bir doğru boyunca $d_{CI}(P_1,P_2)$ uzaklığının aynı doğru boyunca olan Öklidyen uzaklığın pozitif katı olduğu gösterir. Buna göre aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 7.2 *$\mathbb{R}^3$de A,B,X doğrudaş üç farklı nokta ise*

$$d_E(A,X) = d_E(B,X) \iff d_{CI}(A,X) = d_{CI}(B,X)$$

Sonuç 7.3 *3-boyutlu uzayda A,B,X doğrudaş üç farklı nokta ise*

$$d_{CI}(A,X)/d_{CI}(B,X) = d_E(A,X)/d_E(B,X)$$

olur.

Yani doğru boyunca olan d_E, d_{CI} uzaklıklarının oranı aynıdır.

7.2 Chamfered icosahedron İzometri Grubu

Chamfered icosahedron 120 tane simetriye sahip olup, simetri grubu I_h ile gösterilir. Bu kısımda d_{CI} metriği ile donatılmış $\mathbb{R}^3$ ün izometri grubu araştırılacaktır. Bunun için öncelikle hangi Öklidyen izometrilerin chamfered icosahedron uzaklığını koruduğu tespit edilecek daha sonra ise bu izometrilerden başka izometrilerin olmadığı gösterilecektir. $\alpha : \mathbb{R}^3_{CI} \to \mathbb{R}^3_{CI}$ dönüşüm olmak üzere her $X, Y \in \mathbb{R}^3_{CI}$ için

$$d_{CI}(X,Y) = d_{CI}(\alpha(X), \alpha(Y))$$

ise α dönüşümü $\mathbb{R}^3_{CI}$ de bir izometridir.

Aşağıda ifade edilen önermeler ile hangi Öklidyen izometrilerin chamfered icosahedron uzayında da izometri oldukları verilmektedir.

Önerme 7.3 *$\mathbb{R}^3$de her Öklidyen öteleme $\mathbb{R}^3_{CI}$ ün bir izometrisidir.*

İspat *α=(a_1, a_2, a_3), X=$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere $T_\alpha : \mathbb{R}^3_{CI} \to \mathbb{R}^3_{CI}$, $T_\alpha(X)$=$\alpha + X$ olacak şekilde reel uzayda bir öteleme olsun. P_1=(x_1, y_1, z_1) , P_2=$(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3_{CI}$ için $X_T = |a_1 + x_1 - a_1 - x_2|$, $Y_T = |a_2 + y_1 - a_2 - y_2|$, $Z_T = |a_3 + z_1 - a_3 - z_2|$ ve $u_T = \max\{X_T, Y_T, Z_T\}$, $v_T = \text{mid}\{X_T, Y_T, Z_T\}$, $w_T = \min\{X_T, Y_T, Z_T\}$ ve ayrıca $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ altın oran ve $\alpha = \frac{307+293\sqrt{5}}{1882} + \frac{(540-208\sqrt{5})\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{9410}$ olmak üzere*

$$\begin{aligned} d_{CI}(T_A(P_1), T_A(P_2)) &= \max\left\{\frac{\varphi}{2}u_T + \frac{1}{2}u_T^- + \frac{1}{2\varphi}u_T^+, u_T, \alpha\left(u_T + u_T^+ + u_T^-\right), \varphi\alpha u_T + \frac{1}{\varphi}\alpha u_T^-\right\} \\ &= \max\left\{\frac{\varphi}{2}u + \frac{1}{2}u^- + \frac{1}{2\varphi}u^+, u, \alpha\left(u + u^+ + u^-\right), \varphi\alpha u + \frac{1}{\varphi}\alpha u^-\right\} \\ &= d_{CI}(P_1, P_2) \end{aligned}$$

olur. Bundan dolayı T_α bir izometridir.

Yukarıdaki önerme gereğince $\mathbb{R}^3_{CI}$ uzayında dönme ve yansımaları bulmak için orijinden geçen düzlemleri düşünmek yeterli olacaktır. Aşağıdaki önermede $\mathbb{R}^3_{CI}$ de uzaklığı koruyan yansımalar ifade edilecektir.

Önerme 7.4 *$\mathbb{R}^3_{CI}$ de $\Delta = ax + by + cz = 0$ düzlemine göre yansımanın izometri olması için gerek ve yeter koşul düzlemin doğrultu vektörü (a, b, c) nin*

$$D = \{(\pm 1, \varphi, \pm(1-\varphi)), (\pm(1-\varphi), \pm 1, \varphi), (\varphi, \pm(1-\varphi), \pm 1), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

elemanlarına paralel olmasıdır.

İspat $\Delta : ax+by+cz=0$ *birim normali* (a,b,c) *olan düzlem olmak üzere* $\sigma_\Delta : \mathbb{R}^3_{CI} \to \mathbb{R}^3_{CI}$ *Öklidyen yansıma,*

$$\sigma_\Delta(x,y,z) = ((1-2a^2)x-2aby-2acz, -2abx+(1-2b^2)y-2bcz, -2acx-2bcy+(1-2c^2)z)$$

şeklinde tanımlanır. $\mathbb{R}^3_{CI}$ *ün taban vektörlerini koruyan yansıma izometri olacağından, chamfered icosahedronun köşe noktalarıdan olan,* $\mathbb{R}^3_{CI}$ *ün* $t = \frac{\left(11\sqrt{5}-25\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$ *alınırsa* $A_0=(\frac{1}{\varphi},0,1)$, $A_{28}=\left(14\text{-}6\sqrt{5}+\frac{1}{\varphi}t, r, \frac{15-7\sqrt{5}}{2}\text{-}t\right)$, $A_{56}=\left(6\sqrt{5}\text{-}13\text{-}\frac{1}{\varphi}t, \frac{1}{\varphi}, 4\sqrt{5}\text{-}8\text{+}t\right)$ *tabanını koruyan yansımaları tespit etmek izometrileri bulmak için yeterli olacaktır. Açıkça* $d_{CI}(O,A_0)=d_{CI}(O,A_{28})=d_{CI}(O,A_{56})=1$ *olmalıdır. Eğer yansıma* d_{CI} *uzaklığını koruyor ise taban vektörlerinin yansıma altındaki görüntüleri için uzaklık korunmalıdır. Yani* $d_{CI}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(A_0))=d_{CI}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(A_{72}))=d_{CI}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(A_{52}))=1$ *olmalıdır. Böylece,* $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ *altın oran ve* $\alpha = \frac{307+293\sqrt{5}}{1882} + \frac{\left(540-208\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{9410}$, $t = \frac{\left(11\sqrt{5}-25\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$ *olmak üzere* $X_1=\left|(1-2a^2)\frac{1}{\varphi} - 2ac\right|$, $Y_1=\left|2ab\frac{1}{\varphi} + 2bc\right|$, $Z_1=\left|1-2c^2-2ac\frac{1}{\varphi}\right|$,

$X_2 = \left|(-1+2a^2)\left(14-6\sqrt{5}+\frac{1}{\varphi}t\right)+2ab+2ac\left(\frac{15-7\sqrt{5}}{2}-t\right)\right|$,

$Y_2 = \left|2ab\left(14-6\sqrt{5}+\frac{1}{\varphi}t\right)-1+2b^2+2bc\left(\frac{15-7\sqrt{5}}{2}-t\right)\right|$,

$Z_2 = \left|2ac\left(14-6\sqrt{5}+\frac{1}{\varphi}t\right)+2bc+(-1+2c^2)\left(\frac{15-7\sqrt{5}}{2}-t\right)\right|$,

$X_3 = \left|(-1+2a^2)\left(6\sqrt{5}-13-\frac{1}{\varphi}t\right)+2ab\frac{1}{\varphi}+2ac\left(4\sqrt{5}-8+t\right)\right|$,

$Y_3 = \left|2ab\left(6\sqrt{5}-13-\frac{1}{\varphi}t\right)+(-1+2b^2)\frac{1}{\varphi}+2bc\left(4\sqrt{5}-8+t\right)\right|$,

$Z_3 = \left|2ac\left(6\sqrt{5}-13-\frac{1}{\varphi}t\right)+2bc\frac{1}{\varphi}+(-1+2c^2)\left(4\sqrt{5}-8+t\right)\right|$ *olmak üzere* $i=1,2,3$ *için* $u_i = \max\{X_i,Y_i,Z_i\}$, *ayrıca* $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ *altın oran ve* $\alpha = \frac{307+293\sqrt{5}}{1882} + \frac{\left(540-208\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{9410}$ *denilirse*

$$d_{CI}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(A_0))=\max\left\{\frac{\varphi}{2}u_1+\frac{1}{2}u_1^-+\frac{1}{2\varphi}u_1^+, u_1, \alpha\left(u_1+u_1^++u_1^-\right), \varphi\alpha u_1+\frac{1}{\varphi}\alpha u_1^-\right\}=1$$
$$d_{CI}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(A_{28}))=\max\left\{\frac{\varphi}{2}u_2+\frac{1}{2}u_2^-+\frac{1}{2\varphi}u_2^+, u_2, \alpha\left(u_2+u_2^++u_2^-\right), \varphi\alpha u_2+\frac{1}{\varphi}\alpha u_2^-\right\}=1$$
$$d_{CI}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(A_{56}))=\max\left\{\frac{\varphi}{2}u_3+\frac{1}{2}u_3^-+\frac{1}{2\varphi}u_3^+, u_3, \alpha\left(u_3+u_3^++u_3^-\right), \varphi\alpha u_3+\frac{1}{\varphi}\alpha u_3^-\right\}=1$$

denklem sistemi elde edilir. Denklem sistemi çözülürse, $(\pm1,\varphi,\pm(1-\varphi))$, $(\pm(1-\varphi),\pm1,\varphi)$, $(\varphi,\pm(1-\varphi),\pm1)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ *çözümleri elde edilir.*

Tersine normal vektörleri D *kümesindeki vektörlere paralel olacak şekildeki düzlemlere göre yansımaların uzaklığ ı koruduğu gösterilmelidir.* $\sigma_\Delta(X) = Y$ *olacak şekilde* X *ve* Y *noktaları için* (p_1,q_1,r_1) *ve* (p_2,q_2,r_2), OX *ve* OY *vektörlerinin yön vektörleri olsun.* $d_{CI}(O,X) = d_{CI}(O,Y)$ *olduğunu göstermek için önerme 7.2 den* $\mu_{OX} = \mu_{OY}$ *olduğunu göstermek yeterlidir.* (p_1,q_1,r_1) *vektörünün düzleme göre yansıma altındaki görüntüleri bulunursa;*

1. Durum: $1x + \varphi y + (1-\varphi)z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1-\tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{-1-\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1),$$

2. Durum: $1x + \varphi y + -(1-\varphi)z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{-1-\sqrt{5}}{4}q_1-\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1-\tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1-\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1),$$

3.Durum: $-1x + \varphi y + (1-\varphi)z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1),$$

4.Durum: $-1x + \varphi y + -(1-\varphi)z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1-\tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1-\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1),$$

5.Durum: $(1-\varphi)x + 1y + \varphi z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1-\tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{-1-\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1),$$

6.Durum: $-(1-\varphi)x + 1y + \varphi z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1-\tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{-1-\sqrt{5}}{4}r_1,\ -\tfrac{1}{2}p_1-\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1),$$

7.Durum: $(1-\varphi)x - 1y + \varphi z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1),$$

8.Durum: $-(1-\varphi)x - 1y + \varphi z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}q_1-\tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ -\tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1),$$

9.Durum: $\varphi x + (1-\varphi)y + 1z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1}{2}q_1-\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ -\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1}{2}r_1),$$

10.Durum: $\varphi x + -(1-\varphi)y + 1z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1-\tfrac{1}{2}q_1-\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ -\tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1,\ -\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1}{2}r_1),$$

11.Durum: $\varphi x + (1-\varphi)y - 1z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1}{2}q_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1, \tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1, \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1}{2}r_1),$$

12.Durum: $\varphi x + -(1-\varphi)y - 1z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1 - \tfrac{1}{2}q_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1, -\tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}r_1, \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1}{2}r_1),$$

13.Durum: $1x = 0$ *yansıma düzlemi için,*$\sigma_\Delta\ (p_1,q_1,r_1) = (-p_1,q_1,r_1)$,

14.Durum: $1y = 0$ *yansıma düzlemi için,*$\sigma_\Delta\ (p_1,q_1,r_1) = (p_1,-q_1,r_1)$,

15.Durum: $1z = 0$ *yansıma düzlemi için,*$\sigma_\Delta\ (p_1,q_1,r_1) = (p_1,q_1,-r_1)$.
sonuçları elde edilir. Çıkan bu sonuçlara ve önerme 4.2 ye göre de $\mu(OX) = \mu(OY)$ *olduğu görülmektedir. Böylece ispat tamamlanmış olur.*

Sonuç 7.4 S_{CI} *izometrik yansımalarının kümesi orijinden geçen düzlemlere göre on beş Öklidyen yansımadan oluşur. Orijinden geçen düzlemler;*

$x=0$	$y=0$	$z=0$
$x+\varphi y+(1-\varphi)z=0$	$(1-\varphi)x+y+\varphi z=0$	$\varphi x+(1-\varphi)y+z=0$
$x+\varphi y-(1-\varphi)z=0$	$-(1-\varphi)x+y+\varphi z=0$	$\varphi x-(1-\varphi)y+z=0$
$-x+\varphi y+(1-\varphi)z=0$	$(1-\varphi)x-y+\varphi z=0$	$\varphi x+(1-\varphi)y-z=0$
$-x+\varphi y-(1-\varphi)z=0$	$-(1-\varphi)x-y+\varphi z=0$	$\varphi x+-(1-\varphi)y-z=0$

Şekil7.4 deki tablolar birim kürenin köşe noktalarının ilgili yansıma dönüşümleri altındaki görüntülerini vermektedir.

	(1,0,0)	(0,1,0)	(0,0,1)	((φ-1),1,φ)	((φ-1),1,-φ)	((φ-1),-1,φ)	((φ-1),-1,-φ)	(1,φ,(φ-1))	(1,-φ,(φ-1))	(-1,φ,(φ-1))	(-1,-φ,(φ-1))	(φ,(φ-1),1)	(φ,(φ-1),-1)	(-φ,(φ-1),1)	(-φ,(φ-1),-1)
A_0	A_2	A_0	A_1	A_{11}	A_4	A_9	A_5	A_{10}	A_8	A_0	A_0	A_7	A_0	A_0	A_6
A_1	A_3	A_1	A_0	A_4	A_{10}	A_5	A_8	A_1	A_1	A_9	A_{11}	A_1	A_7	A_6	A_1
A_2	A_0	A_2	A_3	A_7	A_9	A_6	A_{11}	A_2	A_2	A_{10}	A_8	A_2	A_4	A_5	A_2
A_3	A_1	A_3	A_2	A_8	A_7	A_{10}	A_6	A_9	A_{11}	A_3	A_3	A_4	A_3	A_3	A_5
A_4	A_6	A_5	A_4	A_1	A_0	A_4	A_4	A_{11}	A_4	A_4	A_{10}	A_3	A_2	A_8	A_9
A_5	A_7	A_4	A_5	A_5	A_5	A_1	A_0	A_5	A_9	A_8	A_5	A_{11}	A_{10}	A_2	A_3
A_6	A_4	A_7	A_6	A_6	A_6	A_2	A_3	A_6	A_{10}	A_{11}	A_6	A_8	A_9	A_1	A_0
A_7	A_5	A_6	A_7	A_2	A_3	A_7	A_7	A_8	A_7	A_7	A_9	A_0	A_1	A_{11}	A_{10}
A_8	A_8	A_{10}	A_9	A_3	A_8	A_8	A_1	A_7	A_0	A_5	A_2	A_6	A_8	A_4	A_8
A_9	A_9	A_{11}	A_8	A_9	A_2	A_0	A_9	A_3	A_5	A_1	A_7	A_9	A_6	A_9	A_4
A_{10}	A_{10}	A_8	A_{11}	A_{10}	A_1	A_3	A_{10}	A_0	A_6	A_2	A_4	A_{10}	A_5	A_{10}	A_7
A_{11}	A_{11}	A_9	A_{10}	A_0	A_{11}	A_{11}	A_2	A_4	A_3	A_6	A_1	A_5	A_{11}	A_7	A_{11}
A_{12}	A_{16}	A_{14}	A_{13}	A_{71}	A_{44}	A_{33}	A_{59}	A_{70}	A_{36}	A_{50}	A_{12}	A_{26}	A_{48}	A_{40}	A_{60}
A_{13}	A_{17}	A_{15}	A_{12}	A_{44}	A_{70}	A_{58}	A_{32}	A_{13}	A_{51}	A_{37}	A_{71}	A_{49}	A_{27}	A_{61}	A_{41}
A_{14}	A_{18}	A_{12}	A_{15}	A_{35}	A_{57}	A_{69}	A_{45}	A_{38}	A_{68}	A_{14}	A_{48}	A_{62}	A_{40}	A_{50}	A_{24}
A_{15}	A_{19}	A_{13}	A_{14}	A_{56}	A_{34}	A_{45}	A_{68}	A_{49}	A_{15}	A_{69}	A_{39}	A_{41}	A_{63}	A_{25}	A_{51}
A_{16}	A_{12}	A_{18}	A_{17}	A_{63}	A_{29}	A_{46}	A_{67}	A_{54}	A_{16}	A_{66}	A_{36}	A_{42}	A_{56}	A_{22}	A_{52}
A_{17}	A_{13}	A_{19}	A_{16}	A_{28}	A_{62}	A_{66}	A_{46}	A_{37}	A_{67}	A_{17}	A_{55}	A_{57}	A_{43}	A_{53}	A_{23}
A_{18}	A_{14}	A_{16}	A_{19}	A_{47}	A_{65}	A_{61}	A_{31}	A_{18}	A_{52}	A_{38}	A_{64}	A_{54}	A_{20}	A_{58}	A_{42}
A_{19}	A_{15}	A_{17}	A_{18}	A_{64}	A_{47}	A_{30}	A_{60}	A_{65}	A_{39}	A_{53}	A_{19}	A_{21}	A_{55}	A_{43}	A_{59}
A_{20}	A_{24}	A_{22}	A_{21}	A_{51}	A_{40}	A_{57}	A_{20}	A_{31}	A_{44}	A_{56}	A_{66}	A_{55}	A_{18}	A_{36}	A_{69}
A_{21}	A_{25}	A_{23}	A_{20}	A_{41}	A_{50}	A_{21}	A_{56}	A_{67}	A_{57}	A_{44}	A_{30}	A_{19}	A_{54}	A_{68}	A_{37}
A_{22}	A_{26}	A_{20}	A_{23}	A_{59}	A_{22}	A_{49}	A_{40}	A_{45}	A_{29}	A_{64}	A_{58}	A_{71}	A_{38}	A_{16}	A_{53}
A_{23}	A_{27}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{58}	A_{41}	A_{48}	A_{59}	A_{65}	A_{28}	A_{45}	A_{39}	A_{70}	A_{52}	A_{17}
A_{24}	A_{20}	A_{26}	A_{25}	A_{24}	A_{61}	A_{42}	A_{55}	A_{60}	A_{70}	A_{35}	A_{46}	A_{36}	A_{65}	A_{51}	A_{14}
A_{25}	A_{21}	A_{27}	A_{24}	A_{60}	A_{25}	A_{54}	A_{43}	A_{46}	A_{34}	A_{71}	A_{61}	A_{64}	A_{37}	A_{15}	A_{50}
A_{26}	A_{22}	A_{24}	A_{27}	A_{42}	A_{53}	A_{26}	A_{63}	A_{68}	A_{62}	A_{47}	A_{33}	A_{12}	A_{49}	A_{67}	A_{38}
A_{27}	A_{23}	A_{25}	A_{26}	A_{52}	A_{43}	A_{62}	A_{27}	A_{32}	A_{47}	A_{63}	A_{69}	A_{48}	A_{13}	A_{39}	A_{66}
A_{28}	A_{32}	A_{30}	A_{29}	A_{17}	A_{36}	A_{64}	A_{49}	A_{63}	A_{40}	A_{23}	A_{54}	A_{61}	A_{68}	A_{44}	A_{28}
A_{29}	A_{33}	A_{31}	A_{28}	A_{37}	A_{16}	A_{48}	A_{65}	A_{55}	A_{22}	A_{41}	A_{62}	A_{69}	A_{60}	A_{29}	A_{44}
A_{30}	A_{34}	A_{28}	A_{31}	A_{66}	A_{51}	A_{19}	A_{38}	A_{40}	A_{61}	A_{52}	A_{21}	A_{30}	A_{45}	A_{70}	A_{63}
A_{31}	A_{35}	A_{29}	A_{30}	A_{50}	A_{67}	A_{39}	A_{18}	A_{20}	A_{53}	A_{60}	A_{41}	A_{45}	A_{31}	A_{62}	A_{71}
A_{32}	A_{28}	A_{34}	A_{33}	A_{53}	A_{68}	A_{36}	A_{13}	A_{27}	A_{30}	A_{59}	A_{42}	A_{46}	A_{32}	A_{57}	A_{64}
A_{33}	A_{29}	A_{35}	A_{32}	A_{69}	A_{52}	A_{12}	A_{37}	A_{43}	A_{58}	A_{51}	A_{26}	A_{33}	A_{46}	A_{65}	A_{56}
A_{34}	A_{30}	A_{32}	A_{35}	A_{38}	A_{15}	A_{55}	A_{70}	A_{48}	A_{25}	A_{42}	A_{57}	A_{66}	A_{59}	A_{34}	A_{47}
A_{35}	A_{31}	A_{33}	A_{34}	A_{14}	A_{39}	A_{71}	A_{54}	A_{56}	A_{43}	A_{24}	A_{49}	A_{58}	A_{67}	A_{47}	A_{35}
A_{36}	A_{36}	A_{38}	A_{37}	A_{55}	A_{28}	A_{32}	A_{51}	A_{62}	A_{12}	A_{58}	A_{16}	A_{24}	A_{64}	A_{20}	A_{68}
A_{37}	A_{37}	A_{39}	A_{36}	A_{29}	A_{54}	A_{50}	A_{33}	A_{17}	A_{59}	A_{13}	A_{63}	A_{65}	A_{25}	A_{69}	A_{21}
A_{38}	A_{38}	A_{36}	A_{39}	A_{34}	A_{49}	A_{53}	A_{30}	A_{14}	A_{60}	A_{18}	A_{56}	A_{70}	A_{22}	A_{66}	A_{26}
A_{39}	A_{39}	A_{37}	A_{38}	A_{48}	A_{35}	A_{31}	A_{52}	A_{57}	A_{19}	A_{61}	A_{15}	A_{23}	A_{71}	A_{27}	A_{67}
A_{40}	A_{42}	A_{40}	A_{41}	A_{67}	A_{20}	A_{65}	A_{22}	A_{30}	A_{28}	A_{48}	A_{50}	A_{63}	A_{14}	A_{12}	A_{61}
A_{41}	A_{43}	A_{41}	A_{40}	A_{21}	A_{66}	A_{23}	A_{64}	A_{51}	A_{49}	A_{29}	A_{31}	A_{15}	A_{62}	A_{60}	A_{13}
A_{42}	A_{40}	A_{42}	A_{43}	A_{26}	A_{69}	A_{24}	A_{71}	A_{52}	A_{24}	A_{34}	A_{32}	A_{16}	A_{57}	A_{59}	A_{18}
A_{43}	A_{41}	A_{43}	A_{42}	A_{68}	A_{27}	A_{70}	A_{25}	A_{33}	A_{35}	A_{55}	A_{53}	A_{56}	A_{17}	A_{19}	A_{58}
A_{44}	A_{46}	A_{45}	A_{44}	A_{13}	A_{12}	A_{56}	A_{57}	A_{71}	A_{20}	A_{21}	A_{70}	A_{53}	A_{52}	A_{28}	A_{29}
A_{45}	A_{47}	A_{44}	A_{45}	A_{58}	A_{59}	A_{15}	A_{14}	A_{22}	A_{69}	A_{68}	A_{23}	A_{31}	A_{30}	A_{54}	A_{55}
A_{46}	A_{44}	A_{47}	A_{46}	A_{61}	A_{60}	A_{16}	A_{17}	A_{25}	A_{66}	A_{67}	A_{24}	A_{32}	A_{33}	A_{49}	A_{48}
A_{47}	A_{45}	A_{46}	A_{47}	A_{18}	A_{19}	A_{63}	A_{62}	A_{64}	A_{27}	A_{26}	A_{65}	A_{50}	A_{51}	A_{35}	A_{34}
A_{48}	A_{52}	A_{50}	A_{49}	A_{39}	A_{56}	A_{29}	A_{23}	A_{34}	A_{64}	A_{40}	A_{14}	A_{27}	A_{12}	A_{48}	A_{46}
A_{49}	A_{53}	A_{51}	A_{48}	A_{57}	A_{38}	A_{22}	A_{28}	A_{15}	A_{41}	A_{65}	A_{35}	A_{13}	A_{26}	A_{46}	A_{49}
A_{50}	A_{54}	A_{48}	A_{51}	A_{31}	A_{21}	A_{37}	A_{58}	A_{66}	A_{32}	A_{12}	A_{40}	A_{47}	A_{50}	A_{14}	A_{25}
A_{51}	A_{55}	A_{49}	A_{50}	A_{20}	A_{30}	A_{59}	A_{36}	A_{41}	A_{13}	A_{33}	A_{67}	A_{51}	A_{47}	A_{24}	A_{15}
A_{52}	A_{48}	A_{54}	A_{53}	A_{27}	A_{33}	A_{60}	A_{39}	A_{42}	A_{18}	A_{30}	A_{68}	A_{52}	A_{44}	A_{23}	A_{16}
A_{53}	A_{49}	A_{55}	A_{52}	A_{32}	A_{26}	A_{38}	A_{61}	A_{69}	A_{31}	A_{19}	A_{43}	A_{44}	A_{53}	A_{17}	A_{22}
A_{54}	A_{50}	A_{52}	A_{55}	A_{62}	A_{37}	A_{25}	A_{35}	A_{16}	A_{42}	A_{70}	A_{28}	A_{18}	A_{21}	A_{45}	A_{54}
A_{55}	A_{51}	A_{53}	A_{54}	A_{36}	A_{63}	A_{34}	A_{24}	A_{29}	A_{71}	A_{43}	A_{17}	A_{20}	A_{19}	A_{55}	A_{45}
A_{56}	A_{60}	A_{58}	A_{57}	A_{15}	A_{48}	A_{44}	A_{21}	A_{35}	A_{56}	A_{20}	A_{38}	A_{43}	A_{16}	A_{64}	A_{33}
A_{57}	A_{61}	A_{59}	A_{56}	A_{49}	A_{14}	A_{20}	A_{44}	A_{39}	A_{21}	A_{57}	A_{34}	A_{17}	A_{42}	A_{32}	A_{65}
A_{58}	A_{62}	A_{56}	A_{59}	A_{45}	A_{23}	A_{13}	A_{50}	A_{58}	A_{33}	A_{36}	A_{22}	A_{35}	A_{66}	A_{18}	A_{43}
A_{59}	A_{63}	A_{57}	A_{58}	A_{22}	A_{45}	A_{51}	A_{12}	A_{23}	A_{37}	A_{32}	A_{59}	A_{67}	A_{34}	A_{42}	A_{19}
A_{60}	A_{56}	A_{62}	A_{61}	A_{25}	A_{46}	A_{52}	A_{19}	A_{24}	A_{38}	A_{31}	A_{60}	A_{68}	A_{29}	A_{41}	A_{12}
A_{61}	A_{57}	A_{63}	A_{60}	A_{46}	A_{24}	A_{18}	A_{53}	A_{61}	A_{30}	A_{39}	A_{25}	A_{28}	A_{69}	A_{13}	A_{40}
A_{62}	A_{58}	A_{60}	A_{63}	A_{54}	A_{17}	A_{27}	A_{47}	A_{36}	A_{26}	A_{62}	A_{29}	A_{14}	A_{41}	A_{31}	A_{70}
A_{63}	A_{59}	A_{61}	A_{62}	A_{16}	A_{55}	A_{47}	A_{26}	A_{28}	A_{63}	A_{27}	A_{37}	A_{40}	A_{15}	A_{71}	A_{30}
A_{64}	A_{68}	A_{66}	A_{65}	A_{19}	A_{64}	A_{28}	A_{41}	A_{47}	A_{48}	A_{22}	A_{18}	A_{25}	A_{36}	A_{56}	A_{32}
A_{65}	A_{69}	A_{67}	A_{64}	A_{65}	A_{18}	A_{40}	A_{29}	A_{19}	A_{23}	A_{49}	A_{47}	A_{37}	A_{24}	A_{33}	A_{57}
A_{66}	A_{70}	A_{64}	A_{67}	A_{30}	A_{41}	A_{17}	A_{66}	A_{50}	A_{46}	A_{16}	A_{20}	A_{34}	A_{58}	A_{38}	A_{27}
A_{67}	A_{71}	A_{65}	A_{66}	A_{40}	A_{31}	A_{67}	A_{16}	A_{21}	A_{17}	A_{46}	A_{51}	A_{59}	A_{35}	A_{26}	A_{39}
A_{68}	A_{64}	A_{70}	A_{69}	A_{43}	A_{32}	A_{68}	A_{15}	A_{26}	A_{14}	A_{45}	A_{52}	A_{60}	A_{28}	A_{21}	A_{36}
A_{69}	A_{65}	A_{71}	A_{68}	A_{33}	A_{42}	A_{14}	A_{69}	A_{53}	A_{45}	A_{15}	A_{27}	A_{29}	A_{61}	A_{37}	A_{20}
A_{70}	A_{66}	A_{68}	A_{71}	A_{70}	A_{13}	A_{43}	A_{34}	A_{12}	A_{24}	A_{54}	A_{44}	A_{38}	A_{23}	A_{30}	A_{62}
A_{71}	A_{67}	A_{69}	A_{70}	A_{12}	A_{71}	A_{35}	A_{42}	A_{44}	A_{55}	A_{25}	A_{13}	A_{22}	A_{39}	A_{63}	A_{31}

Şekil 7.4 $\mathbb{R}^3_{CI}$ de Yansıma Düzlemlerine Göre K öşe Noktaların Görüntüleri

Önerme 7.5 *$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve*

$$D_1 = \{1, (\pm(1-\varphi), 0),\ (0, 1, \pm(1-\varphi)),\ (\pm(1-\varphi), 0, 1)\}$$
$$D_2 = \left\{ \begin{array}{l} (1,0,0),\ (0,1,0), (0,0,1),\ (1, \pm\varphi, \pm(1-\varphi)), (\pm(1-\varphi), 1, \pm\varphi) \\ (\pm\varphi, \pm(1-\varphi), 1) \end{array} \right\}$$
$$D_3 = \left\{ \begin{array}{l} (1,1,1),\ (-1,1,1),\ (1,-1,1),\ (1,1,-1),\ (\pm(2-\varphi), 1, 0), \\ (0, \pm(2-\varphi), 1), (1, 0 \pm (2-\varphi)) \end{array} \right\}$$

olmak üzere

$$R_1 = \{r_\theta \mid \theta \in \{2\pi/5,\ 4\pi/5,\ 6\pi/5, 8\pi/5\},\ dönme\ ekseninin\ doğrultu\ vektörü\ D_1\ in\ elemanı\}$$
$$R_2 = \{r_\theta \mid \theta \in \{\pi\},\ dönme\ ekseninin\ doğrultu\ vektörü\ D_2\ in\ elemanı\}$$
$$R_3 = \{r_\theta \mid \theta = \{2\pi/3, 4\pi/3\},\ dönme\ ekseninin\ doğrultu\ vektörü\ D_3\ in\ elemanı\}$$

kümeleri verilsin. Dönme ekseni orijinden geçen bir l doğrusu olan r_θ dönmesinin bir izometri olması için gerek ve yeter koşul $r_\theta \in R_{CI} = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ olmasıdır.

İspat *Birl doğrusunun birim doğrultusu (p, q, r) olmak üzere l etrafında r_θ Öklidyen dönmenin matris formu;*

$$\begin{bmatrix} \cos\theta + p^2(1-\cos\theta) & pq(1-\cos\theta) - r\sin\theta & pr(1-\cos\theta) + q\sin\theta \\ pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta & \cos\theta + q^2(1-\cos\theta) & qr(1-\cos\theta) - p\sin\theta \\ pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta & qr(1-\cos\theta) + p\sin\theta & \cos\theta - r^2(1-\cos\theta) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. l eksenindeki bir dönme, l doğrusu boyunca kesi şen iki düzlemin yansımalarının birleşimi olduğundan önerme 7.4 den dolayı l doğrusunun doğrultu vektörleri $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(0,-1,\pm(1-\varphi))$, $((1-\varphi), 0, \pm1)$, $(-1,\pm(1-\varphi),0)$, $(1,\pm\varphi,\pm(1-\varphi))$, $(\pm(1-\varphi),\pm1,\varphi)$, $(\pm\varphi,-(1-\varphi),\pm1)$, $(1,1,1)$, $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$, $(\pm(2-\varphi),1,0)$, $(0,\pm(2-\varphi),1)$, $(1,0,\pm(2-\varphi))$ olarak alınabilir.

$\mathbb{R}^3_{CI}$ de izometrik dönmelerin bulunması için, d_{CI} metriğine göre olan birim kürenin kenarlarının uzunluklarını koruyan dönmelerin bulunması yeterlidir. $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ altın oran ve $t = \frac{(11\sqrt{5}-25)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$ olmak üzere $A_4 = \left(1, \frac{1}{\varphi}, 0\right)$, $A_{20} = \left(1, \frac{15-7\sqrt{5}}{2} - t, 14 - 6\sqrt{5} + \frac{1}{\varphi}t\right)$, $A_{56} = \left(6\sqrt{5} - 13 - \frac{1}{\varphi}t, \frac{1}{\varphi}, 4\sqrt{5} - 8 + t\right)$, d_{CI} birim küresinin köşe noktalarını ele alalım. Buna göre açıkça $d_{CI}(A_4,\ A_{20}) = 4\sqrt{5} - 8 + t$ ve $d_{CI}(A_4,\ A_{56}) = 4\sqrt{5} - 8 + t$ dir. O halde $\theta \neq 0$ olmak üzere r_θ, d_{CI} uzaklığını koruması için

$$d_{CI}(r_\theta(A_4), r_\theta(A_{20})) = 4\sqrt{5} - 8 + t \text{ ve } d_{CI}(r_\theta(A_4), r_\theta(A_{56})) = 4\sqrt{5} - 8 + t$$

olmalıdır.

l doğrusunun doğrultu vektörü $(0,1,(1-\varphi))$ *olarak alınırsa* $(p,q,r) = (0,\frac{1}{\sqrt{2-2\varphi+\varphi^2}},\frac{1-\varphi}{\sqrt{2-2\varphi+\varphi^2}})$ *olur.* p,q,r *değerleri* $d_{CI}(r_\theta(A_4),r_\theta(A_{20})) = 4\sqrt{5}-8+t$ *ve* $d_{CI}(r_\theta(A_4),r_\theta(A_{56})) = 4\sqrt{5}-8+t$ *te yerine yazılırsa;*

$X_1=\left(\frac{14-6\sqrt{5}}{5}+\frac{1}{5\varphi}t\right)\left|5\cos\theta-\sqrt{25+10\sqrt{5}}\sin\theta\right|,$

$Y_1=\left(\frac{20-8\sqrt{5}}{25}-\frac{t}{5}\right)\left|5\left(-1+\cos\theta\right)+\left(5-2\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}\sin\theta\right|,$

$Z_1=\left(\frac{3\sqrt{5}-5}{25}+\frac{\left(\sqrt{5}+5\right)}{100}t\right)\left|15-5\sqrt{5}+10\cos\theta+\left(10-4\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}\sin\theta\right|,$

$X_2=\left(6\sqrt{5}-14-\frac{4\sqrt{5}}{5}t\right)\left|\sin\theta\right|,$ $Y_2=\left(\frac{7\sqrt{5}-15}{5}+\frac{5-\sqrt{5}}{20}t\right)\left|\sqrt{5}+1+4\cos\theta\right|$ *ve* $Z_2=\left(\frac{10-4\sqrt{5}}{5}-\frac{\sqrt{5}}{10}t\right)\left|1-\sqrt{5}+4\cos\theta\right|$ *olmak üzere ve* i=1,2 *için* u_i=max $\{X_i,Y_i,Z_i\}$, *ayrıca* $\varphi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ *altın oran ve* $\alpha=\frac{307+293\sqrt{5}}{1882}+\frac{\left(540-208\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{9410}$ *denilirse*

$$\max\left\{\frac{\varphi}{2}u_1+\frac{1}{2}u_1^-+\frac{1}{2\varphi}u_1^+,u_1,\alpha\left(u_1+u_1^++u_1^-\right),\varphi\alpha u_1+\frac{1}{\varphi}\alpha u_1^-\right\} = 4\sqrt{5}-8+t$$

$$\max\left\{\frac{\varphi}{2}u_2+\frac{1}{2}u_2^-+\frac{1}{2\varphi}u_2^+,u_2,\alpha\left(u_2+u_2^++u_2^-\right),\varphi\alpha u_2+\frac{1}{\varphi}\alpha u_2^-\right\} = 4\sqrt{5}-8+t$$

denklemlerine ulaşılır. Bu denklemler çözülürse $\theta = 2\pi/5,4\pi/5,6\pi/5,8\pi/5$ *sonuçları bulunur. Benzer şekilde, eğer* l *doğrusunun yön vektörü;* $(1,\pm(1-\varphi),0)$, $(0,1,\pm(1-\varphi))$, $(\pm(1-\varphi),0,1)$ *olarak alınır ise* $\theta=2\pi/5,4\pi/5,6\pi/5,8\pi/5$ *olur.*

l *doğrusunun yön vektörü (1,0,0) ise* $(p,q,r) = (1,0,0)$ *olur.* p,q,r *değerleri* $d_{CI}(r_\theta(A_4),r_\theta(A_{20})) = 4\sqrt{5}-8+t$ *ve* $d_{CI}(r_\theta(A_4),r_\theta(A_{56})) = 4\sqrt{5}-8+t$ *te yerine yazılırsa;* X_1=$14-6\sqrt{5}+\frac{1}{\varphi}t$, Y_1=$\left(4\sqrt{5}-8+t\right)\left|\sin\theta\right)|$, Z_1=$\left(4\sqrt{5}-8+t\right)\left|\cos\theta\right)|$, X_2=0, Y_2=$\left(2\sqrt{5}\text{-}4+\frac{t}{2}\right)\left|2\cos\theta+\left(\sqrt{5}\text{-}1\right)\sin\theta\right|$ *ve* Z_2=$\left(7\text{-}3\sqrt{5}+\frac{1}{2\varphi}t\right)\left|2\cos\theta+\left(1+\sqrt{5}\right)\sin\theta\right|$ *olmak üzere ve* i=1,2 *için* u_i=max $\{X_i,Y_i,Z_i\}$, *ayrıca* $\varphi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ *altın oran ve* $\alpha=\frac{307+293\sqrt{5}}{1882}+\frac{\left(540-208\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{9410}$ *denilirse*

$$\max\left\{\frac{\varphi}{2}u_1+\frac{1}{2}u_1^-+\frac{1}{2\varphi}u_1^+,u_1,\alpha\left(u_1+u_1^++u_1^-\right),\varphi\alpha u_1+\frac{1}{\varphi}\alpha u_1^-\right\} = 4\sqrt{5}-8+t$$

$$\max\left\{\frac{\varphi}{2}u_2+\frac{1}{2}u_2^-+\frac{1}{2\varphi}u_2^+,u_2,\alpha\left(u_2+u_2^++u_2^-\right),\varphi\alpha u_2+\frac{1}{\varphi}\alpha u_2^-\right\} = 4\sqrt{5}-8+t$$

elde edilir. Bu denklemler çözülürse $\theta=\pi$ *sonucu bulunur.Buradan* l *doğrusunun etrafındaki* $\theta=\pi$ *radyanlık dönme* $\mathbb{R}^3_{CI}$ *ün bir izometrisidir. Benzer şekilde, eğer* l *doğrusunun doğrultu vektörü* $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,\pm\varphi,\pm(1-\varphi))$, $(\pm(1-\varphi),1,\pm\varphi)$, $(\pm\varphi,\pm(1-\varphi),1)$ *ise* $\theta=\pi$ *sonucu bulunur.*

l *doğrusunun doğrultu vektörü* $(1,1,1)$ *ise* (p,q,r)=$(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$ *olur.* p, q, r *değerleri* $d_{CI}(r_\theta(A_4),r_\theta(A_{20})) = 4\sqrt{5}-8+t$ *ve* $d_{CI}(r_\theta(A_4),r_\theta(A_{56})) = 4\sqrt{5}-8+t$ *de*

yerine yazılırsa;
$X_1 = \left(\frac{10-4\sqrt{5}}{15} + \frac{t}{6}\right)\left|5 - 3\sqrt{5} + 10\cos\theta - 2\sqrt{15}\sin\theta\right|,$
$Y_1 = \left(\frac{10\sqrt{5}-22}{3} + \frac{3-\sqrt{5}}{6}t\right)\left|-1 + \cos\theta + \left(2\sqrt{3} + \sqrt{15}\right)\sin\theta\right|,$
$Z_1 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{3} + \frac{\sqrt{5}+3}{12}t\right)\left|7 - 3\sqrt{5} + 2\cos\theta + \left(2\sqrt{15} - 4\sqrt{3}\right)\sin\theta\right|,$
$X_2 = \left(\frac{10\sqrt{5}-22}{3} + \frac{3-\sqrt{5}}{6}t\right)\left|-1 + \cos\theta + \left(2\sqrt{3} + \sqrt{15}\right)\sin\theta\right|,$
$Y_2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{3} + \frac{\sqrt{5}+3}{12}t\right)\left|7 - 3\sqrt{5} + 2\cos\theta + \left(2\sqrt{15} - 4\sqrt{3}\right)\sin\theta\right|$ *ve*
$Z_2 = \left(\frac{10-4\sqrt{5}}{15} + \frac{t}{6}\right)\left|5 - 3\sqrt{5} + 10\cos\theta - 2\sqrt{15}\sin\theta\right|$ *olmak üzere ve* $i = 1, 2$ *için* $u_i = \max\{X_i, Y_i, Z_i\}$, *ayrıca* $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ *altın oran ve* $\alpha = \frac{307+293\sqrt{5}}{1882} + \frac{\left(540-208\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{9410}$ *denilirse*

$$\max\left\{\frac{\varphi}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_1^- + \frac{1}{2\varphi}u_1^+, u_1, \alpha\left(u_1 + u_1^+ + u_1^-\right), \varphi\alpha u_1 + \frac{1}{\varphi}\alpha u_1^-\right\} = 4\sqrt{5} - 8 + t$$
$$\max\left\{\frac{\varphi}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_2^- + \frac{1}{2\varphi}u_2^+, u_2, \alpha\left(u_2 + u_2^+ + u_2^-\right), \varphi\alpha u_2 + \frac{1}{\varphi}\alpha u_2^-\right\} = 4\sqrt{5} - 8 + t$$

denklemleri elde edilir. Bu denklem sistemi çözülürse $\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ *sonuçlarına ulaşılır. Buradan* l *etrafındaki* $\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ *radyanlık dönmeler* $\mathbb{R}^3_{CI}$ *ün bir izometrisidir. Benzer şekilde, eğer* l *nin yön vektörü* $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$, $(1, 1, -1)$, $(\pm(2-\varphi), 1, 0)$, $(0, \pm(2-\varphi), 1)$, $(1, 0, \pm(2-\varphi))$ *ise* $\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ *olur.*

Tersine $r_\theta(X) = Y$ *olacak şekilde* X *ve* Y *noktalarıyla oluşturulan* OX *ve* OY *doğrularının doğrultuları sırasıyla* (p_1, q_1, r_1) *ve* (p_2, q_2, r_2) *olmak üzere* $d_{CI}(OX) = d_{CI}(OY)$ *olduğunu göstermek için önerme 7.2 den* $\mu_{OX} = \mu_{OY}$ *olduğu gösterilmelidir. Bu ise* (p_1, q_1, r_1) *vektörünün tüm durumları için görüntüleri bulunarak kolaylıkla gösterilebilir. Öreneğin doğrultu vektörü* $(1, 1, 1)$ *olmak üzere, bu eksende* $\frac{2\pi}{3}$ *radyanlık dönme dönüşümü yapılınca*$(p_2, q_2, r_2) = (r_1, p_{,1}, q_1)$ *bulunur. Buradan da açıkça* $\mu(OX) = \mu(OY)$ *olduğu görülür. Benzer şekilde diğer dönme eksenleri ve dönme açıları için eşitlik gösterilebilir. Buda ispatı tamamlar.*

Sonuç 7.5 *Orijinden geçen doğrulara göre izometrik dönmelerin* R_{CI} *kümesi tam olarak 59 Öklidyen dönme içerir.*

Şekil7.5 ve Şekil7.6 deki tablolar birim kürenin köşe noktalarının ilgili dönme dönüşümleri altındaki görüntülerini vermektedir.

	(1,0,0)	(0,1,0)	(0,0,1)	(1,1,1)		(-1,1,1)		(1,-1,1)		(1,1,-1)		(0,(2-φ),1)		(0,-(2-φ),1)		((2-φ),1,0)		(-(2-φ),1,0)		(1,0,(2-φ))		(1,0,-(2-φ))		(0,1,(1-φ))			
	π	π	π	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/5	4π/5	6π/5	8π/5
A_0	A_1	A_3	A_2	A_4	A_8	A_9	A_7	A_{10}	A_5	A_{11}	A_6	A_8	A_2	A_{10}	A_2	A_1	A_6	A_7	A_1	A_5	A_4	A_9	A_{11}	A_4	A_9	A_6	A_2
A_1	A_0	A_2	A_3	A_6	A_{10}	A_{11}	A_5	A_8	A_7	A_9	A_4	A_3	A_{11}	A_3	A_9	A_6	A_0	A_0	A_7	A_8	A_{10}	A_5	A_4	A_3	A_7	A_{10}	A_5
A_2	A_3	A_1	A_0	A_5	A_9	A_8	A_6	A_{11}	A_4	A_{10}	A_7	A_0	A_8	A_0	A_{10}	A_5	A_3	A_3	A_4	A_{11}	A_9	A_6	A_7	A_0	A_4	A_9	A_6
A_3	A_2	A_0	A_1	A_7	A_{11}	A_{10}	A_4	A_9	A_6	A_8	A_5	A_{11}	A_1	A_9	A_1	A_2	A_5	A_4	A_2	A_6	A_7	A_{10}	A_8	A_7	A_{10}	A_5	A_1
A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_0	A_3	A_{10}	A_2	A_{11}	A_1	A_9	A_6	A_{10}	A_{11}	A_6	A_9	A_8	A_2	A_3	A_0	A_5	A_1	A_5	A_9	A_6	A_2	A_0
A_5	A_4	A_7	A_6	A_9	A_7	A_1	A_{11}	A_0	A_{10}	A_3	A_8	A_9	A_7	A_7	A_8	A_3	A_2	A_{10}	A_{11}	A_4	A_0	A_4	A_1	A_1	A_3	A_7	A_{10}
A_6	A_7	A_4	A_5	A_{10}	A_1	A_2	A_8	A_3	A_9	A_0	A_{11}	A_{10}	A_4	A_4	A_{11}	A_0	A_1	A_9	A_8	A_7	A_3	A_7	A_2	A_2	A_0	A_4	A_9
A_7	A_6	A_5	A_4	A_{11}	A_3	A_0	A_9	A_1	A_8	A_2	A_{10}	A_5	A_9	A_8	A_5	A_{10}	A_{11}	A_1	A_0	A_3	A_6	A_2	A_6	A_{10}	A_5	A_1	A_3
A_8	A_{11}	A_9	A_{10}	A_0	A_4	A_6	A_2	A_7	A_1	A_5	A_3	A_2	A_0	A_5	A_7	A_4	A_9	A_6	A_9	A_{10}	A_1	A_3	A_{10}	A_8	A_8	A_8	A_8
A_9	A_{10}	A_8	A_{11}	A_2	A_5	A_7	A_0	A_6	A_3	A_4	A_1	A_7	A_5	A_1	A_3	A_8	A_4	A_8	A_6	A_2	A_{11}	A_{11}	A_0	A_6	A_2	A_0	A_4
A_{10}	A_9	A_{11}	A_8	A_1	A_6	A_4	A_3	A_5	A_0	A_7	A_2	A_4	A_6	A_2	A_0	A_{11}	A_7	A_{11}	A_5	A_1	A_8	A_8	A_3	A_5	A_1	A_3	A_7
A_{11}	A_8	A_{10}	A_9	A_3	A_7	A_5	A_1	A_4	A_2	A_6	A_0	A_1	A_3	A_6	A_4	A_7	A_{10}	A_5	A_{10}	A_9	A_2	A_0	A_9	A_{11}	A_{11}	A_{11}	A_{11}
A_{12}	A_{15}	A_{17}	A_{18}	A_{20}	A_{28}	A_{33}	A_{26}	A_{34}	A_{23}	A_{31}	A_{25}	A_{36}	A_{16}	A_{66}	A_{54}	A_{41}	A_{61}	A_{27}	A_{49}	A_{45}	A_{57}	A_{69}	A_{35}	A_{56}	A_{29}	A_{46}	A_{52}
A_{13}	A_{14}	A_{16}	A_{19}	A_{24}	A_{30}	A_{55}	A_{22}	A_{32}	A_{27}	A_{29}	A_{21}	A_{55}	A_{67}	A_{17}	A_{37}	A_{60}	A_{40}	A_{48}	A_{26}	A_{68}	A_{34}	A_{45}	A_{56}	A_{43}	A_{62}	A_{66}	A_{33}
A_{14}	A_{13}	A_{19}	A_{16}	A_{21}	A_{32}	A_{29}	A_{27}	A_{30}	A_{22}	A_{35}	A_{24}	A_{64}	A_{52}	A_{38}	A_{18}	A_{51}	A_{25}	A_{63}	A_{41}	A_{59}	A_{44}	A_{33}	A_{71}	A_{20}	A_{65}	A_{61}	A_{42}
A_{15}	A_{12}	A_{18}	A_{17}	A_{25}	A_{34}	A_{31}	A_{23}	A_{28}	A_{26}	A_{33}	A_{20}	A_{19}	A_{39}	A_{53}	A_{65}	A_{24}	A_{50}	A_{40}	A_{62}	A_{32}	A_{70}	A_{58}	A_{44}	A_{55}	A_{47}	A_{30}	A_{59}
A_{16}	A_{19}	A_{13}	A_{14}	A_{22}	A_{29}	A_{32}	A_{24}	A_{35}	A_{21}	A_{30}	A_{27}	A_{12}	A_{36}	A_{50}	A_{70}	A_{23}	A_{53}	A_{43}	A_{57}	A_{31}	A_{65}	A_{61}	A_{47}	A_{48}	A_{44}	A_{33}	A_{60}
A_{17}	A_{18}	A_{12}	A_{15}	A_{26}	A_{31}	A_{34}	A_{20}	A_{33}	A_{25}	A_{28}	A_{23}	A_{71}	A_{51}	A_{37}	A_{13}	A_{52}	A_{22}	A_{56}	A_{42}	A_{60}	A_{47}	A_{30}	A_{64}	A_{27}	A_{70}	A_{58}	A_{41}
A_{18}	A_{17}	A_{15}	A_{12}	A_{23}	A_{33}	A_{28}	A_{25}	A_{31}	A_{20}	A_{34}	A_{26}	A_{48}	A_{68}	A_{14}	A_{38}	A_{59}	A_{43}	A_{55}	A_{21}	A_{67}	A_{29}	A_{46}	A_{63}	A_{40}	A_{37}	A_{69}	A_{24}
A_{19}	A_{16}	A_{14}	A_{13}	A_{27}	A_{35}	A_{30}	A_{21}	A_{29}	A_{24}	A_{32}	A_{22}	A_{39}	A_{15}	A_{69}	A_{49}	A_{42}	A_{58}	A_{20}	A_{54}	A_{46}	A_{62}	A_{66}	A_{28}	A_{63}	A_{34}	A_{45}	A_{51}
A_{20}	A_{23}	A_{25}	A_{26}	A_{28}	A_{12}	A_{17}	A_{34}	A_{18}	A_{31}	A_{15}	A_{33}	A_{46}	A_{70}	A_{35}	A_{60}	A_{37}	A_{68}	A_{54}	A_{19}	A_{40}	A_{22}	A_{49}	A_{59}	A_{65}	A_{61}	A_{42}	A_{14}
A_{21}	A_{22}	A_{24}	A_{27}	A_{32}	A_{14}	A_{19}	A_{30}	A_{16}	A_{35}	A_{13}	A_{29}	A_{61}	A_{34}	A_{71}	A_{46}	A_{69}	A_{36}	A_{18}	A_{55}	A_{48}	A_{58}	A_{41}	A_{23}	A_{37}	A_{25}	A_{54}	A_{40}
A_{22}	A_{21}	A_{27}	A_{24}	A_{29}	A_{16}	A_{13}	A_{35}	A_{14}	A_{30}	A_{19}	A_{32}	A_{33}	A_{62}	A_{47}	A_{68}	A_{17}	A_{52}	A_{70}	A_{39}	A_{20}	A_{40}	A_{57}	A_{51}	A_{49}	A_{53}	A_{26}	A_{38}
A_{23}	A_{20}	A_{26}	A_{25}	A_{33}	A_{18}	A_{15}	A_{31}	A_{12}	A_{34}	A_{17}	A_{28}	A_{69}	A_{47}	A_{63}	A_{32}	A_{53}	A_{16}	A_{38}	A_{71}	A_{56}	A_{50}	A_{21}	A_{41}	A_{13}	A_{43}	A_{62}	A_{66}
A_{24}	A_{27}	A_{21}	A_{22}	A_{30}	A_{13}	A_{16}	A_{32}	A_{19}	A_{29}	A_{14}	A_{35}	A_{66}	A_{44}	A_{56}	A_{31}	A_{50}	A_{15}	A_{37}	A_{64}	A_{63}	A_{53}	A_{26}	A_{42}	A_{18}	A_{40}	A_{57}	A_{69}
A_{25}	A_{26}	A_{20}	A_{23}	A_{34}	A_{15}	A_{18}	A_{28}	A_{17}	A_{33}	A_{12}	A_{31}	A_{30}	A_{57}	A_{44}	A_{67}	A_{14}	A_{51}	A_{65}	A_{36}	A_{27}	A_{43}	A_{62}	A_{52}	A_{54}	A_{50}	A_{21}	A_{37}
A_{26}	A_{25}	A_{23}	A_{20}	A_{31}	A_{17}	A_{12}	A_{33}	A_{15}	A_{28}	A_{18}	A_{34}	A_{58}	A_{29}	A_{64}	A_{45}	A_{66}	A_{39}	A_{13}	A_{48}	A_{55}	A_{61}	A_{42}	A_{24}	A_{38}	A_{22}	A_{49}	A_{53}
A_{27}	A_{24}	A_{22}	A_{21}	A_{35}	A_{19}	A_{14}	A_{29}	A_{13}	A_{32}	A_{16}	A_{30}	A_{45}	A_{65}	A_{28}	A_{59}	A_{38}	A_{67}	A_{49}	A_{12}	A_{43}	A_{25}	A_{54}	A_{60}	A_{70}	A_{45}	A_{41}	A_{17}
A_{28}	A_{31}	A_{33}	A_{34}	A_{12}	A_{20}	A_{25}	A_{18}	A_{26}	A_{15}	A_{23}	A_{17}	A_{42}	A_{50}	A_{59}	A_{27}	A_{44}	A_{29}	A_{60}	A_{69}	A_{38}	A_{51}	A_{19}	A_{66}	A_{32}	A_{68}	A_{36}	A_{64}
A_{29}	A_{30}	A_{32}	A_{35}	A_{16}	A_{22}	A_{27}	A_{14}	A_{24}	A_{19}	A_{21}	A_{13}	A_{26}	A_{58}	A_{51}	A_{43}	A_{28}	A_{44}	A_{68}	A_{61}	A_{18}	A_{67}	A_{39}	A_{50}	A_{46}	A_{52}	A_{12}	A_{56}
A_{30}	A_{29}	A_{35}	A_{32}	A_{13}	A_{24}	A_{21}	A_{19}	A_{22}	A_{14}	A_{27}	A_{16}	A_{57}	A_{25}	A_{42}	A_{48}	A_{71}	A_{62}	A_{31}	A_{45}	A_{49}	A_{36}	A_{64}	A_{17}	A_{59}	A_{15}	A_{55}	A_{47}
A_{31}	A_{28}	A_{34}	A_{33}	A_{17}	A_{26}	A_{23}	A_{15}	A_{20}	A_{18}	A_{25}	A_{12}	A_{49}	A_{43}	A_{24}	A_{56}	A_{63}	A_{70}	A_{45}	A_{30}	A_{65}	A_{16}	A_{48}	A_{37}	A_{67}	A_{39}	A_{71}	A_{35}
A_{32}	A_{35}	A_{29}	A_{30}	A_{14}	A_{21}	A_{24}	A_{16}	A_{27}	A_{13}	A_{22}	A_{19}	A_{54}	A_{40}	A_{23}	A_{63}	A_{56}	A_{65}	A_{46}	A_{33}	A_{70}	A_{15}	A_{38}	A_{68}	A_{36}	A_{64}	A_{48}	A_{38}
A_{33}	A_{34}	A_{28}	A_{31}	A_{18}	A_{23}	A_{26}	A_{12}	A_{25}	A_{17}	A_{20}	A_{15}	A_{62}	A_{22}	A_{41}	A_{55}	A_{64}	A_{57}	A_{32}	A_{46}	A_{54}	A_{39}	A_{71}	A_{14}	A_{60}	A_{16}	A_{48}	A_{44}
A_{34}	A_{33}	A_{31}	A_{28}	A_{15}	A_{25}	A_{20}	A_{17}	A_{23}	A_{12}	A_{26}	A_{18}	A_{21}	A_{61}	A_{52}	A_{40}	A_{35}	A_{47}	A_{67}	A_{58}	A_{13}	A_{68}	A_{36}	A_{53}	A_{45}	A_{51}	A_{19}	A_{63}
A_{35}	A_{32}	A_{30}	A_{29}	A_{19}	A_{27}	A_{22}	A_{13}	A_{21}	A_{16}	A_{24}	A_{14}	A_{41}	A_{53}	A_{60}	A_{20}	A_{47}	A_{34}	A_{59}	A_{66}	A_{37}	A_{52}	A_{12}	A_{69}	A_{31}	A_{67}	A_{39}	A_{71}
A_{36}	A_{39}	A_{37}	A_{38}	A_{40}	A_{44}	A_{46}	A_{42}	A_{47}	A_{41}	A_{45}	A_{43}	A_{16}	A_{12}	A_{58}	A_{62}	A_{21}	A_{69}	A_{25}	A_{65}	A_{30}	A_{49}	A_{53}	A_{34}	A_{64}	A_{28}	A_{32}	A_{68}
A_{37}	A_{38}	A_{36}	A_{39}	A_{42}	A_{45}	A_{47}	A_{40}	A_{46}	A_{43}	A_{44}	A_{41}	A_{63}	A_{59}	A_{13}	A_{17}	A_{68}	A_{20}	A_{64}	A_{24}	A_{52}	A_{35}	A_{31}	A_{48}	A_{25}	A_{54}	A_{50}	A_{21}
A_{38}	A_{37}	A_{39}	A_{36}	A_{41}	A_{46}	A_{44}	A_{43}	A_{45}	A_{40}	A_{47}	A_{42}	A_{56}	A_{60}	A_{18}	A_{14}	A_{67}	A_{27}	A_{71}	A_{23}	A_{51}	A_{28}	A_{32}	A_{65}	A_{22}	A_{49}	A_{53}	A_{26}
A_{39}	A_{36}	A_{38}	A_{37}	A_{43}	A_{47}	A_{45}	A_{41}	A_{44}	A_{42}	A_{46}	A_{40}	A_{15}	A_{19}	A_{61}	A_{57}	A_{26}	A_{66}	A_{22}	A_{70}	A_{33}	A_{54}	A_{50}	A_{29}	A_{71}	A_{35}	A_{31}	A_{67}
A_{40}	A_{41}	A_{43}	A_{42}	A_{44}	A_{36}	A_{37}	A_{47}	A_{38}	A_{45}	A_{39}	A_{46}	A_{32}	A_{54}	A_{34}	A_{52}	A_{13}	A_{60}	A_{62}	A_{15}	A_{22}	A_{20}	A_{65}	A_{67}	A_{57}	A_{69}	A_{24}	A_{18}
A_{41}	A_{40}	A_{42}	A_{43}	A_{46}	A_{38}	A_{39}	A_{45}	A_{36}	A_{47}	A_{37}	A_{44}	A_{53}	A_{35}	A_{55}	A_{33}	A_{61}	A_{12}	A_{14}	A_{63}	A_{64}	A_{66}	A_{23}	A_{31}	A_{17}	A_{27}	A_{70}	A_{58}
A_{42}	A_{43}	A_{41}	A_{40}	A_{45}	A_{37}	A_{36}	A_{46}	A_{39}	A_{44}	A_{38}	A_{47}	A_{50}	A_{28}	A_{48}	A_{30}	A_{58}	A_{19}	A_{17}	A_{56}	A_{71}	A_{69}	A_{24}	A_{26}	A_{14}	A_{20}	A_{65}	A_{61}
A_{43}	A_{42}	A_{40}	A_{41}	A_{47}	A_{39}	A_{38}	A_{44}	A_{37}	A_{46}	A_{36}	A_{45}	A_{31}	A_{49}	A_{29}	A_{51}	A_{18}	A_{59}	A_{57}	A_{16}	A_{25}	A_{27}	A_{70}	A_{68}	A_{62}	A_{66}	A_{33}	A_{13}
A_{44}	A_{45}	A_{46}	A_{47}	A_{36}	A_{40}	A_{43}	A_{38}	A_{42}	A_{39}	A_{41}	A_{37}	A_{24}	A_{66}	A_{67}	A_{25}	A_{29}	A_{28}	A_{52}	A_{53}	A_{14}	A_{59}	A_{15}	A_{58}	A_{33}	A_{60}	A_{16}	A_{48}
A_{45}	A_{44}	A_{47}	A_{46}	A_{37}	A_{42}	A_{41}	A_{39}	A_{40}	A_{38}	A_{43}	A_{36}	A_{65}	A_{27}	A_{26}	A_{64}	A_{55}	A_{54}	A_{30}	A_{31}	A_{57}	A_{12}	A_{56}	A_{13}	A_{51}	A_{19}	A_{63}	A_{34}
A_{46}	A_{47}	A_{44}	A_{45}	A_{38}	A_{41}	A_{42}	A_{36}	A_{43}	A_{37}	A_{40}	A_{39}	A_{70}	A_{20}	A_{21}	A_{71}	A_{48}	A_{49}	A_{33}	A_{32}	A_{62}	A_{19}	A_{63}	A_{18}	A_{52}	A_{12}	A_{56}	A_{29}
A_{47}	A_{46}	A_{45}	A_{44}	A_{39}	A_{43}	A_{40}	A_{37}	A_{41}	A_{36}	A_{42}	A_{38}	A_{23}	A_{69}	A_{68}	A_{22}	A_{34}	A_{35}	A_{51}	A_{50}	A_{17}	A_{60}	A_{16}	A_{61}	A_{30}	A_{59}	A_{15}	A_{55}
A_{48}	A_{51}	A_{53}	A_{54}	A_{56}	A_{64}	A_{69}	A_{62}	A_{70}	A_{39}	A_{67}	A_{61}	A_{68}	A_{18}	A_{30}	A_{42}	A_{49}	A_{46}	A_{26}	A_{13}	A_{58}	A_{21}	A_{37}	A_{31}	A_{44}	A_{33}	A_{60}	A_{16}
A_{49}	A_{50}	A_{52}	A_{55}	A_{60}	A_{66}	A_{71}	A_{58}	A_{68}	A_{63}	A_{65}	A_{57}	A_{43}	A_{31}	A_{19}	A_{69}	A_{46}	A_{48}	A_{12}	A_{27}	A_{56}	A_{30}	A_{59}	A_{20}	A_{53}	A_{26}	A_{38}	A_{22}
A_{50}	A_{49}	A_{55}	A_{52}	A_{57}	A_{68}	A_{65}	A_{63}	A_{66}	A_{58}	A_{71}	A_{60}	A_{28}	A_{42}	A_{70}	A_{16}	A_{15}	A_{24}	A_{47}	A_{51}	A_{23}	A_{56}	A_{29}	A_{39}	A_{21}	A_{37}	A_{25}	A_{34}
A_{51}	A_{48}	A_{54}	A_{53}	A_{61}	A_{70}	A_{67}	A_{59}	A_{64}	A_{62}	A_{69}	A_{56}	A_{17}	A_{71}	A_{43}	A_{29}	A_{25}	A_{14}	A_{50}	A_{47}	A_{28}	A_{38}	A_{22}	A_{57}	A_{19}	A_{63}	A_{34}	A_{45}
A_{52}	A_{55}	A_{49}	A_{50}	A_{58}	A_{65}	A_{68}	A_{60}	A_{71}	A_{57}	A_{66}	A_{63}	A_{14}	A_{64}	A_{40}	A_{34}	A_{22}	A_{17}	A_{53}	A_{44}	A_{35}	A_{37}	A_{25}	A_{62}	A_{12}	A_{56}	A_{29}	A_{46}
A_{53}	A_{54}	A_{48}	A_{51}	A_{62}	A_{67}	A_{70}	A_{56}	A_{69}	A_{61}	A_{64}	A_{59}	A_{35}	A_{41}	A_{65}	A_{15}	A_{16}	A_{23}	A_{44}	A_{52}	A_{24}	A_{63}	A_{34}	A_{36}	A_{26}	A_{38}	A_{22}	A_{49}
A_{54}	A_{53}	A_{51}	A_{48}	A_{59}	A_{69}	A_{64}	A_{61}	A_{67}	A_{55}	A_{70}	A_{62}	A_{40}	A_{32}	A_{12}	A_{66}	A_{45}	A_{55}	A_{19}	A_{20}	A_{39}	A_{33}	A_{60}	A_{27}	A_{10}	A_{21}	A_{37}	A_{25}
A_{55}	A_{52}	A_{50}	A_{49}	A_{63}	A_{71}	A_{66}	A_{57}	A_{65}	A_{60}	A_{68}	A_{58}	A_{67}	A_{13}	A_{33}	A_{41}	A_{54}	A_{45}	A_{21}	A_{18}	A_{61}	A_{26}	A_{38}	A_{32}	A_{47}	A_{30}	A_{59}	A_{15}
A_{56}	A_{59}	A_{61}	A_{62}	A_{64}	A_{48}	A_{53}	A_{70}	A_{54}	A_{67}	A_{51}	A_{69}	A_{60}	A_{38}	A_{31}	A_{24}	A_{65}	A_{32}	A_{42}	A_{17}	A_{50}	A_{23}	A_{13}	A_{45}	A_{29}	A_{46}	A_{52}	A_{12}
A_{57}	A_{58}	A_{60}	A_{63}	A_{68}	A_{50}	A_{55}	A_{66}	A_{52}	A_{71}	A_{49}	A_{65}	A_{25}	A_{30}	A_{39}	A_{61}	A_{33}	A_{64}	A_{16}	A_{43}	A_{12}	A_{45}	A_{51}	A_{22}	A_{69}	A_{24}	A_{18}	A_{40}
A_{58}	A_{57}	A_{63}	A_{60}	A_{65}	A_{52}	A_{49}	A_{71}	A_{50}	A_{66}	A_{55}	A_{68}	A_{29}	A_{26}	A_{62}	A_{36}	A_{19}	A_{42}	A_{34}	A_{67}	A_{21}	A_{48}	A_{44}	A_{15}	A_{41}	A_{17}	A_{27}	A_{70}
A_{59}	A_{56}	A_{62}	A_{61}	A_{69}	A_{54}	A_{51}	A_{67}	A_{48}	A_{70}	A_{53}	A_{64}	A_{37}	A_{63}	A_{27}	A_{28}	A_{43}	A_{18}	A_{66}	A_{35}	A_{44}	A_{14}	A_{30}	A_{69}	A_{15}	A_{55}	A_{47}	A_{30}
A_{60}	A_{63}	A_{57}	A_{58}	A_{66}	A_{49}	A_{52}	A_{68}	A_{55}	A_{65}	A_{50}	A_{71}	A_{38}	A_{56}	A_{20}	A_{35}	A_{40}	A_{13}	A_{69}	A_{28}	A_{47}	A_{17}	A_{57}	A_{54}	A_{16}	A_{48}	A_{44}	A_{33}
A_{61}	A_{62}	A_{56}	A_{59}	A_{70}	A_{51}	A_{54}	A_{64}	A_{53}	A_{69}	A_{48}	A_{67}	A_{34}	A_{21}	A_{57}	A_{39}	A_{12}	A_{41}	A_{29}	A_{68}	A_{26}	A_{55}	A_{47}	A_{16}	A_{42}	A_{14}	A_{20}	A_{65}
A_{62}	A_{61}	A_{59}	A_{56}	A_{67}	A_{53}	A_{48}	A_{69}	A_{51}	A_{64}	A_{54}	A_{70}	A_{22}	A_{33}	A_{36}	A_{58}	A_{30}	A_{71}	A_{15}	A_{40}	A_{19}	A_{46}	A_{52}	A_{25}	A_{66}	A_{23}	A_{13}	A_{43}
A_{63}	A_{60}	A_{58}	A_{57}	A_{71}	A_{55}	A_{50}	A_{65}	A_{49}	A_{68}	A_{52}	A_{66}	A_{59}	$A_

	(0,1,-(1-φ))				((1-φ),0,1)				(-(1-φ),0,1)				((1-φ),1,0)				(-(1-φ),1,0)				[1,φ,(1-φ)]	[1,φ,-(1-φ)]	[1,-φ,(1-φ)]	[1,-φ,-(1-φ)]	[(1-φ),1,φ]	[(1-φ),1,-φ]	[-(1-φ),1,φ]	[-(1-φ),1,-φ]	[(1-φ),φ,1]	[(1-φ),-φ,1]	[-(1-φ),φ,1]	[-(1-φ),-φ,1]
	2π/5	4π/5	6π/5	8π/5	2π/5	4π/5	6π/5	8π/5	2π/5	4π/5	6π/5	8π/5	2π/5	4π/5	6π/5	8π/5	2π/5	4π/5	6π/5	8π/5	π	π	π	π	π	π	π	π	π	π	π	π
A_0	A_5	A_{11}	A_7	A_2	A_0	A_0	A_0	A_0	A_{10}	A_7	A_6	A_8	A_5	A_1	A_9	A_8	A_{10}	A_{11}	A_1	A_4	A_8	A_7	A_{10}	A_6	A_9	A_{11}	A_3	A_3	A_4	A_3	A_3	A_5
A_1	A_3	A_6	A_8	A_4	A_9	A_6	A_7	A_{11}	A_1	A_1	A_1	A_1	A_9	A_8	A_0	A_5	A_4	A_0	A_{10}	A_{11}	A_7	A_9	A_6	A_{11}	A_2	A_2	A_{10}	A_8	A_2	A_4	A_5	A_2
A_2	A_0	A_5	A_{11}	A_7	A_{10}	A_5	A_4	A_8	A_2	A_2	A_2	A_2	A_{10}	A_{11}	A_3	A_6	A_7	A_3	A_9	A_8	A_4	A_{10}	A_5	A_8	A_1	A_1	A_9	A_{11}	A_1	A_7	A_6	A_1
A_3	A_6	A_8	A_4	A_1	A_3	A_3	A_3	A_3	A_9	A_4	A_5	A_{11}	A_6	A_2	A_{10}	A_{11}	A_9	A_8	A_2	A_7	A_{11}	A_4	A_9	A_5	A_{10}	A_8	A_0	A_0	A_7	A_0	A_0	A_6
A_4	A_1	A_3	A_6	A_8	A_8	A_2	A_{10}	A_5	A_3	A_{11}	A_3	A_9	A_4	A_4	A_4	A_4	A_0	A_{10}	A_{11}	A_1	A_2	A_3	A_7	A_7	A_8	A_7	A_7	A_9	A_0	A_1	A_{11}	A_{10}
A_5	A_{11}	A_7	A_2	A_0	A_4	A_8	A_5	A_{10}	A_{11}	A_5	A_9	A_4	A_1	A_9	A_8	A_0	A_5	A_5	A_5	A_5	A_6	A_8	A_2	A_3	A_6	A_{10}	A_{11}	A_6	A_8	A_9	A_1	A_0
A_6	A_8	A_4	A_1	A_3	A_7	A_{11}	A_1	A_9	A_8	A_0	A_{10}	A_7	A_2	A_{10}	A_{11}	A_3	A_6	A_6	A_6	A_6	A_5	A_5	A_1	A_0	A_5	A_9	A_8	A_5	A_{11}	A_{10}	A_2	A_3
A_7	A_2	A_0	A_5	A_{11}	A_{11}	A_1	A_9	A_6	A_6	A_8	A_0	A_{10}	A_7	A_7	A_7	A_7	A_3	A_9	A_8	A_3	A_1	A_0	A_4	A_4	A_{11}	A_4	A_4	A_{10}	A_3	A_2	A_8	A_9
A_8	A_4	A_1	A_3	A_6	A_2	A_{10}	A_5	A_4	A_0	A_{10}	A_7	A_6	A_0	A_5	A_1	A_9	A_2	A_7	A_3	A_9	A_0	A_{11}	A_{11}	A_2	A_4	A_3	A_6	A_1	A_5	A_{11}	A_7	A_{11}
A_9	A_9	A_9	A_9	A_9	A_6	A_7	A_{11}	A_1	A_4	A_2	A_{11}	A_3	A_8	A_0	A_2	A_1	A_8	A_2	A_7	A_2	A_1	A_2	A_3	A_{10}	A_0	A_6	A_2	A_4	A_{10}	A_5	A_{10}	A_7
A_{10}	A_{10}	A_{10}	A_{10}	A_{10}	A_5	A_4	A_8	A_2	A_7	A_6	A_8	A_0	A_{11}	A_3	A_6	A_2	A_{11}	A_1	A_4	A_0	A_9	A_2	A_0	A_9	A_3	A_4	A_1	A_5	A_9	A_6	A_9	A_4
A_{11}	A_7	A_2	A_0	A_5	A_1	A_9	A_6	A_7	A_3	A_9	A_4	A_5	A_3	A_6	A_2	A_{10}	A_1	A_4	A_0	A_{10}	A_3	A_8	A_8	A_1	A_7	A_0	A_5	A_2	A_6	A_8	A_4	A_8
A_{12}	A_{22}	A_{67}	A_{63}	A_{42}	A_{14}	A_{30}	A_{40}	A_{48}	A_{38}	A_{62}	A_{24}	A_{68}	A_{58}	A_{51}	A_{37}	A_{32}	A_{10}	A_{71}	A_{13}	A_{44}	A_{64}	A_{47}	A_{30}	A_{60}	A_{65}	A_{39}	A_{53}	A_{19}	A_{21}	A_{55}	A_{43}	A_{59}
A_{13}	A_{53}	A_{46}	A_{28}	A_{57}	A_{69}	A_{25}	A_{63}	A_{39}	A_{49}	A_{41}	A_{51}	A_{15}	A_{33}	A_{36}	A_{50}	A_{19}	A_{44}	A_{12}	A_{70}	A_{71}	A_{47}	A_{65}	A_{61}	A_{31}	A_{18}	A_{52}	A_{58}	A_{64}	A_{54}	A_{20}	A_{58}	A_{42}
A_{14}	A_{58}	A_{31}	A_{47}	A_{54}	A_{50}	A_{40}	A_{48}	A_{12}	A_{70}	A_{26}	A_{60}	A_{36}	A_{45}	A_{15}	A_{69}	A_{68}	A_{34}	A_{39}	A_{49}	A_{56}	A_{28}	A_{62}	A_{66}	A_{46}	A_{37}	A_{67}	A_{17}	A_{55}	A_{57}	A_{43}	A_{53}	A_{23}
A_{15}	A_{43}	A_{60}	A_{64}	A_{21}	A_{37}	A_{61}	A_{27}	A_{71}	A_{13}	A_{49}	A_{41}	A_{51}	A_{69}	A_{68}	A_{14}	A_{45}	A_{37}	A_{48}	A_{38}	A_{35}	A_{63}	A_{29}	A_{46}	A_{67}	A_{44}	A_{16}	A_{66}	A_{36}	A_{42}	A_{16}	A_{22}	A_{52}
A_{16}	A_{40}	A_{59}	A_{71}	A_{26}	A_{38}	A_{58}	A_{20}	A_{64}	A_{18}	A_{54}	A_{42}	A_{52}	A_{66}	A_{67}	A_{17}	A_{46}	A_{62}	A_{55}	A_{37}	A_{28}	A_{56}	A_{34}	A_{45}	A_{68}	A_{49}	A_{15}	A_{69}	A_{41}	A_{63}	A_{25}	A_{51}
A_{17}	A_{61}	A_{32}	A_{44}	A_{49}	A_{53}	A_{43}	A_{55}	A_{19}	A_{65}	A_{21}	A_{59}	A_{39}	A_{46}	A_{16}	A_{66}	A_{67}	A_{29}	A_{56}	A_{54}	A_{63}	A_{35}	A_{57}	A_{69}	A_{45}	A_{38}	A_{68}	A_{14}	A_{48}	A_{62}	A_{40}	A_{50}	A_{24}
A_{18}	A_{50}	A_{45}	A_{35}	A_{62}	A_{66}	A_{22}	A_{56}	A_{36}	A_{54}	A_{42}	A_{52}	A_{16}	A_{30}	A_{59}	A_{53}	A_{60}	A_{47}	A_{19}	A_{65}	A_{64}	A_{44}	A_{10}	A_{58}	A_{32}	A_{13}	A_{51}	A_{37}	A_{71}	A_{49}	A_{27}	A_{61}	A_{41}
A_{19}	A_{25}	A_{68}	A_{56}	A_{41}	A_{17}	A_{33}	A_{43}	A_{55}	A_{37}	A_{17}	A_{23}	A_{67}	A_{61}	A_{52}	A_{38}	A_{31}	A_{65}	A_{64}	A_{18}	A_{47}	A_{71}	A_{14}	A_{33}	A_{59}	A_{70}	A_{56}	A_{50}	A_{12}	A_{26}	A_{48}	A_{40}	A_{60}
A_{20}	A_{51}	A_{55}	A_{24}	A_{36}	A_{64}	A_{16}	A_{38}	A_{58}	A_{45}	A_{71}	A_{53}	A_{29}	A_{21}	A_{57}	A_{44}	A_{56}	A_{20}	A_{30}	A_{67}	A_{41}	A_{52}	A_{43}	A_{62}	A_{27}	A_{32}	A_{47}	A_{63}	A_{69}	A_{48}	A_{13}	A_{39}	A_{66}
A_{21}	A_{15}	A_{43}	A_{60}	A_{64}	A_{28}	A_{52}	A_{70}	A_{45}	A_{39}	A_{39}	A_{17}	A_{65}	A_{57}	A_{44}	A_{56}	A_{20}	A_{40}	A_{66}	A_{31}	A_{51}	A_{42}	A_{53}	A_{26}	A_{63}	A_{68}	A_{62}	A_{47}	A_{33}	A_{12}	A_{49}	A_{67}	A_{38}
A_{22}	A_{67}	A_{63}	A_{42}	A_{12}	A_{56}	A_{36}	A_{18}	A_{66}	A_{31}	A_{55}	A_{69}	A_{44}	A_{41}	A_{65}	A_{28}	A_{48}	A_{18}	A_{45}	A_{59}	A_{43}	A_{60}	A_{25}	A_{54}	A_{43}	A_{46}	A_{24}	A_{71}	A_{61}	A_{64}	A_{37}	A_{15}	A_{50}
A_{23}	A_{39}	A_{27}	A_{52}	A_{48}	A_{44}	A_{68}	A_{54}	A_{30}	A_{67}	A_{19}	A_{37}	A_{57}	A_{49}	A_{29}	A_{64}	A_{40}	A_{22}	A_{58}	A_{45}	A_{59}	A_{24}	A_{61}	A_{42}	A_{55}	A_{60}	A_{70}	A_{35}	A_{46}	A_{26}	A_{65}	A_{51}	A_{14}
A_{24}	A_{16}	A_{20}	A_{51}	A_{55}	A_{47}	A_{67}	A_{19}	A_{33}	A_{68}	A_{12}	A_{38}	A_{62}	A_{54}	A_{34}	A_{71}	A_{43}	A_{25}	A_{61}	A_{46}	A_{60}	A_{23}	A_{38}	A_{41}	A_{48}	A_{39}	A_{65}	A_{28}	A_{45}	A_{39}	A_{70}	A_{52}	A_{17}
A_{25}	A_{68}	A_{56}	A_{41}	A_{19}	A_{63}	A_{39}	A_{13}	A_{69}	A_{52}	A_{48}	A_{66}	A_{47}	A_{42}	A_{70}	A_{35}	A_{55}	A_{61}	A_{46}	A_{60}	A_{24}	A_{59}	A_{22}	A_{49}	A_{40}	A_{45}	A_{29}	A_{64}	A_{58}	A_{71}	A_{38}	A_{16}	A_{53}
A_{26}	A_{16}	A_{40}	A_{59}	A_{71}	A_{35}	A_{51}	A_{65}	A_{46}	A_{60}	A_{56}	A_{14}	A_{70}	A_{62}	A_{47}	A_{63}	A_{27}	A_{43}	A_{69}	A_{32}	A_{52}	A_{41}	A_{50}	A_{21}	A_{56}	A_{67}	A_{57}	A_{44}	A_{30}	A_{19}	A_{54}	A_{68}	A_{37}
A_{27}	A_{52}	A_{48}	A_{23}	A_{39}	A_{71}	A_{15}	A_{27}	A_{61}	A_{46}	A_{64}	A_{50}	A_{34}	A_{26}	A_{62}	A_{47}	A_{63}	A_{33}	A_{33}	A_{68}	A_{32}	A_{51}	A_{40}	A_{57}	A_{20}	A_{31}	A_{44}	A_{56}	A_{66}	A_{55}	A_{18}	A_{36}	A_{69}
A_{28}	A_{57}	A_{13}	A_{53}	A_{46}	A_{52}	A_{70}	A_{45}	A_{21}	A_{40}	A_{30}	A_{63}	A_{61}	A_{48}	A_{22}	A_{41}	A_{65}	A_{16}	A_{62}	A_{55}	A_{37}	A_{14}	A_{39}	A_{71}	A_{54}	A_{56}	A_{43}	A_{24}	A_{49}	A_{58}	A_{67}	A_{47}	A_{35}
A_{29}	A_{65}	A_{37}	A_{69}	A_{33}	A_{60}	A_{62}	A_{31}	A_{41}	A_{20}	A_{45}	A_{71}	A_{53}	A_{64}	A_{40}	A_{23}	A_{49}	A_{36}	A_{54}	A_{63}	A_{17}	A_{38}	A_{15}	A_{25}	A_{70}	A_{48}	A_{26}	A_{42}	A_{57}	A_{66}	A_{34}	A_{47}
A_{30}	A_{34}	A_{70}	A_{38}	A_{66}	A_{23}	A_{44}	A_{68}	A_{54}	A_{63}	A_{61}	A_{28}	A_{40}	A_{39}	A_{53}	A_{60}	A_{18}	A_{67}	A_{41}	A_{20}	A_{50}	A_{69}	A_{52}	A_{12}	A_{37}	A_{43}	A_{58}	A_{51}	A_{26}	A_{33}	A_{46}	A_{65}	A_{56}
A_{31}	A_{47}	A_{54}	A_{14}	A_{58}	A_{41}	A_{29}	A_{60}	A_{62}	A_{55}	A_{69}	A_{44}	A_{22}	A_{19}	A_{61}	A_{52}	A_{38}	A_{51}	A_{21}	A_{40}	A_{66}	A_{53}	A_{68}	A_{56}	A_{13}	A_{27}	A_{50}	A_{59}	A_{42}	A_{46}	A_{32}	A_{57}	A_{64}
A_{32}	A_{44}	A_{49}	A_{17}	A_{61}	A_{42}	A_{34}	A_{59}	A_{57}	A_{48}	A_{66}	A_{47}	A_{55}	A_{12}	A_{58}	A_{51}	A_{37}	A_{32}	A_{56}	A_{43}	A_{69}	A_{50}	A_{67}	A_{59}	A_{18}	A_{60}	A_{41}	A_{45}	A_{31}	A_{62}	A_{71}	A_{63}	A_{61}
A_{33}	A_{29}	A_{65}	A_{37}	A_{69}	A_{24}	A_{47}	A_{67}	A_{49}	A_{56}	A_{58}	A_{35}	A_{43}	A_{36}	A_{50}	A_{59}	A_{13}	A_{68}	A_{42}	A_{27}	A_{53}	A_{66}	A_{51}	A_{19}	A_{38}	A_{40}	A_{61}	A_{52}	A_{21}	A_{30}	A_{45}	A_{70}	A_{63}
A_{34}	A_{70}	A_{38}	A_{66}	A_{30}	A_{59}	A_{57}	A_{32}	A_{42}	A_{27}	A_{46}	A_{64}	A_{50}	A_{71}	A_{43}	A_{24}	A_{54}	A_{39}	A_{49}	A_{56}	A_{14}	A_{37}	A_{16}	A_{48}	A_{65}	A_{55}	A_{22}	A_{41}	A_{62}	A_{69}	A_{60}	A_{29}	A_{44}
A_{35}	A_{62}	A_{18}	A_{50}	A_{45}	A_{51}	A_{65}	A_{46}	A_{26}	A_{43}	A_{33}	A_{56}	A_{58}	A_{55}	A_{25}	A_{42}	A_{70}	A_{15}	A_{57}	A_{48}	A_{38}	A_{17}	A_{36}	A_{64}	A_{49}	A_{63}	A_{40}	A_{23}	A_{54}	A_{61}	A_{68}	A_{44}	A_{28}
A_{36}	A_{20}	A_{51}	A_{55}	A_{24}	A_{18}	A_{66}	A_{22}	A_{56}	A_{14}	A_{70}	A_{26}	A_{60}	A_{50}	A_{59}	A_{13}	A_{33}	A_{54}	A_{63}	A_{17}	A_{29}	A_{48}	A_{35}	A_{21}	A_{52}	A_{47}	A_{19}	A_{61}	A_{15}	A_{23}	A_{71}	A_{27}	A_{67}
A_{37}	A_{69}	A_{33}	A_{29}	A_{65}	A_{61}	A_{27}	A_{31}	A_{15}	A_{37}	A_{23}	A_{67}	A_{19}	A_{32}	A_{12}	A_{58}	A_{51}	A_{28}	A_{16}	A_{62}	A_{45}	A_{34}	A_{49}	A_{53}	A_{30}	A_{14}	A_{60}	A_{18}	A_{46}	A_{70}	A_{22}	A_{66}	A_{26}
A_{38}	A_{66}	A_{30}	A_{34}	A_{70}	A_{58}	A_{20}	A_{64}	A_{16}	A_{62}	A_{24}	A_{68}	A_{12}	A_{31}	A_{19}	A_{61}	A_{52}	A_{35}	A_{15}	A_{57}	A_{48}	A_{29}	A_{54}	A_{50}	A_{33}	A_{17}	A_{59}	A_{13}	A_{63}	A_{65}	A_{25}	A_{69}	A_{21}
A_{39}	A_{27}	A_{52}	A_{48}	A_{23}	A_{13}	A_{69}	A_{25}	A_{63}	A_{17}	A_{65}	A_{21}	A_{59}	A_{53}	A_{60}	A_{18}	A_{30}	A_{49}	A_{56}	A_{14}	A_{34}	A_{55}	A_{28}	A_{22}	A_{51}	A_{62}	A_{12}	A_{58}	A_{16}	A_{24}	A_{64}	A_{20}	A_{68}
A_{40}	A_{59}	A_{71}	A_{26}	A_{16}	A_{48}	A_{12}	A_{14}	A_{50}	A_{30}	A_{63}	A_{61}	A_{28}	A_{23}	A_{49}	A_{29}	A_{64}	A_{66}	A_{31}	A_{51}	A_{21}	A_{68}	A_{27}	A_{70}	A_{25}	A_{33}	A_{35}	A_{55}	A_{53}	A_{56}	A_{17}	A_{19}	A_{58}
A_{41}	A_{19}	A_{25}	A_{68}	A_{56}	A_{29}	A_{60}	A_{62}	A_{31}	A_{31}	A_{15}	A_{13}	A_{49}	A_{65}	A_{28}	A_{48}	A_{22}	A_{20}	A_{50}	A_{30}	A_{67}	A_{26}	A_{69}	A_{24}	A_{71}	A_{42}	A_{54}	A_{34}	A_{32}	A_{16}	A_{57}	A_{59}	A_{18}
A_{42}	A_{12}	A_{22}	A_{67}	A_{63}	A_{34}	A_{59}	A_{17}	A_{32}	A_{32}	A_{18}	A_{54}	A_{70}	A_{35}	A_{55}	A_{25}	A_{27}	A_{33}	A_{33}	A_{68}	A_{31}	A_{66}	A_{33}	A_{64}	A_{31}	A_{39}	A_{29}	A_{31}	A_{15}	A_{62}	A_{60}	A_{13}
A_{43}	A_{60}	A_{64}	A_{21}	A_{15}	A_{55}	A_{19}	A_{17}	A_{53}	A_{33}	A_{56}	A_{58}	A_{35}	A_{24}	A_{54}	A_{34}	A_{71}	A_{69}	A_{32}	A_{52}	A_{26}	A_{67}	A_{20}	A_{65}	A_{22}	A_{30}	A_{28}	A_{48}	A_{50}	A_{63}	A_{14}	A_{12}	A_{61}
A_{44}	A_{49}	A_{17}	A_{61}	A_{32}	A_{68}	A_{54}	A_{30}	A_{23}	A_{22}	A_{31}	A_{55}	A_{69}	A_{56}	A_{20}	A_{21}	A_{57}	A_{12}	A_{70}	A_{71}	A_{13}	A_{18}	A_{19}	A_{63}	A_{62}	A_{64}	A_{27}	A_{26}	A_{65}	A_{50}	A_{51}	A_{35}	A_{34}
A_{45}	A_{35}	A_{62}	A_{18}	A_{50}	A_{21}	A_{28}	A_{52}	A_{70}	A_{71}	A_{53}	A_{29}	A_{20}	A_{15}	A_{69}	A_{68}	A_{14}	A_{59}	A_{23}	A_{22}	A_{58}	A_{61}	A_{60}	A_{16}	A_{17}	A_{25}	A_{66}	A_{67}	A_{24}	A_{32}	A_{33}	A_{49}	A_{48}
A_{46}	A_{28}	A_{57}	A_{13}	A_{53}	A_{26}	A_{35}	A_{21}	A_{65}	A_{64}	A_{50}	A_{34}	A_{27}	A_{16}	A_{66}	A_{67}	A_{17}	A_{60}	A_{24}	A_{25}	A_{61}	A_{58}	A_{59}	A_{15}	A_{14}	A_{22}	A_{69}	A_{68}	A_{23}	A_{31}	A_{30}	A_{54}	A_{55}
A_{47}	A_{54}	A_{14}	A_{58}	A_{31}	A_{67}	A_{49}	A_{33}	A_{24}	A_{25}	A_{32}	A_{48}	A_{66}	A_{63}	A_{27}	A_{26}	A_{62}	A_{19}	A_{65}	A_{64}	A_{18}	A_{13}	A_{12}	A_{56}	A_{57}	A_{71}	A_{20}	A_{21}	A_{70}	A_{53}	A_{52}	A_{38}	A_{29}
A_{48}	A_{23}	A_{39}	A_{27}	A_{52}	A_{12}	A_{14}	A_{50}	A_{40}	A_{46}	A_{27}	A_{25}	A_{32}	A_{22}	A_{41}	A_{65}	A_{28}	A_{38}	A_{35}	A_{15}	A_{57}	A_{36}	A_{63}	A_{34}	A_{24}	A_{39}	A_{71}	A_{43}	A_{17}	A_{20}	A_{19}	A_{55}	A_{45}
A_{49}	A_{17}	A_{61}	A_{32}	A_{44}	A_{33}	A_{24}	A_{47}	A_{67}	A_{41}	A_{51}	A_{15}	A_{13}	A_{29}	A_{64}	A_{40}	A_{23}	A_{56}	A_{14}	A_{34}	A_{59}	A_{62}	A_{37}	A_{25}	A_{35}	A_{16}	A_{42}	A_{70}	A_{28}	A_{18}	A_{21}	A_{65}	A_{54}
A_{50}	A_{45}	A_{35}	A_{62}	A_{18}	A_{40}	A_{48}	A_{12}	A_{14}	A_{34}	A_{27}	A_{46}	A_{64}	A_{59}	A_{13}	A_{33}	A_{36}	A_{30}	A_{67}	A_{41}	A_{20}	A_{32}	A_{26}	A_{38}	A_{61}	A_{69}	A_{31}	A_{19}	A_{43}	A_{44}	A_{53}	A_{17}	A_{22}
A_{51}	A_{15}	A_{24}	A_{36}	A_{70}	A_{65}	A_{46}	A_{26}	A_{35}	A_{15}	A_{13}	A_{49}	A_{41}	A_{37}	A_{32}	A_{12}	A_{58}	A_{21}	A_{40}	A_{66}	A_{31}	A_{27}	A_{33}	A_{60}	A_{39}	A_{42}	A_{18}	A_{30}	A_{68}	A_{52}	A_{44}	A_{23}	A_{16}
A_{52}	A_{48}	A_{23}	A_{39}	A_{37}	A_{70}	A_{45}	A_{31}	A_{28}	A_{16}	A_{18}	A_{54}	A_{42}	A_{38}	A_{31}	A_{19}	A_{61}	A_{26}	A_{43}	A_{69}	A_{32}	A_{20}	A_{30}	A_{59}	A_{36}	A_{41}	A_{13}	A_{33}	A_{67}	A_{51}	A_{47}	A_{24}	A_{15}
A_{53}	A_{46}	A_{28}	A_{57}	A_{13}	A_{43}	A_{55}	A_{19}	A_{17}	A_{29}	A_{20}	A_{45}	A_{71}	A_{60}	A_{18}	A_{30}	A_{39}	A_{33}	A_{68}	A_{42}	A_{27}	A_{31}	A_{21}	A_{37}	A_{58}	A_{66}	A_{32}	A_{12}	A_{40}	A_{47}	A_{50}	A_{14}	A_{25}
A_{54}	A_{14}

Şekil7.7 deki tablolarda inversiyon dönüşümü altında birim kürenin köşe noktalarının görüntüleri verilmektedir.

A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}	A_{17}	A_{18}	A_{19}	A_{20}	A_{21}	A_{22}	A_{23}
A_3	A_2	A_1	A_0	A_7	A_6	A_5	A_4	A_{11}	A_{10}	A_9	A_8	A_{19}	A_{18}	A_{17}	A_{16}	A_{15}	A_{14}	A_{13}	A_{12}	A_{27}	A_{26}	A_{25}	A_{24}
A_{24}	A_{25}	A_{26}	A_{27}	A_{28}	A_{29}	A_{30}	A_{31}	A_{32}	A_{33}	A_{34}	A_{35}	A_{36}	A_{37}	A_{38}	A_{39}	A_{40}	A_{41}	A_{42}	A_{43}	A_{44}	A_{45}	A_{46}	A_{47}
A_{23}	A_{22}	A_{21}	A_{20}	A_{35}	A_{34}	A_{33}	A_{32}	A_{31}	A_{30}	A_{29}	A_{28}	A_{39}	A_{38}	A_{37}	A_{36}	A_{43}	A_{42}	A_{41}	A_{40}	A_{47}	A_{46}	A_{45}	A_{44}
A_{48}	A_{49}	A_{50}	A_{51}	A_{52}	A_{53}	A_{54}	A_{55}	A_{56}	A_{57}	A_{58}	A_{59}	A_{60}	A_{61}	A_{62}	A_{63}	A_{64}	A_{65}	A_{66}	A_{67}	A_{68}	A_{69}	A_{70}	A_{71}
A_{55}	A_{54}	A_{53}	A_{52}	A_{51}	A_{50}	A_{49}	A_{48}	A_{63}	A_{62}	A_{61}	A_{60}	A_{59}	A_{58}	A_{57}	A_{56}	A_{71}	A_{70}	A_{69}	A_{68}	A_{67}	A_{66}	A_{65}	A_{64}

Şekil 7.7 $\mathbb{R}^3_{CI}$ de σ_O İnversiyonu Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

Önerme 7.6 *d_{CI} uzaklığını invaryant bırakan orijine göre dönme yansımaların hepsi orijine göre inversiyon dönüşümüne eşittir.*

İspat *$r_\theta \in R_{DH}$, Γ, Δ ve Π düzlemine dik olan düzlemler olmak üzere bir dönme yansıma $\rho = \sigma_\Pi \sigma_\Delta \sigma_\Gamma = \sigma_\Pi r_\theta$ bileşkesi olarak yazılabilir. O halde dönme ekseni yansıma düzlemine dik olmak zorundadır. D_1 ve D_3 de verilen dönme eksenlerinden hiçbiri sonuç 7.4 de verilen yansıma düzlemlerine dik olmadığından dolayı önerme 7.5 den Π d üzlemi için otuz bir dönme ekseninden on beş durum incelenmelidir. Π düzlemi olarak $x = 0$ düzlemini alalım. Bu durumda r_θ nın birim doğrultu vektörü $(1,0,0)$ olmak üzere*

$$\rho : \sigma_\Pi r_\theta(x,y,z) = (-x, ycos\theta - zsin\theta, ysin\theta + zcos\theta)$$

olarak tanımlıdır. Buradan $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ altın oran ve $t = \frac{(11\sqrt{5}-25)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$ olmak üzere A_4=$\left(1, \frac{1}{\varphi}, 0\right)$, A_{20}=$\left(1, \frac{15-7\sqrt{5}}{2}\text{-}t, 14-6\sqrt{5}+\frac{1}{\varphi}t\right)$, A_{56}=$\left(6\sqrt{5}\text{-}13\text{-}\frac{1}{\varphi}t, \frac{1}{\varphi}, 4\sqrt{5}\text{-}8\text{+}t\right)$ noktaları için, $d_{CI}(\rho(A_0), \rho(A_{20}))$=$d_{CI}(A_0, A_{20})$ ve $d_{CI}(\rho(A_4), \rho(A_{56}))$=$d_{CI}(A_4, A_{56})$ olmak zorunda olduğundan, $X_1 = 14 - 6\sqrt{5} - \frac{1}{\varphi}t$, $Y_1 = \left(4\sqrt{5}-8+t\right)|\sin\theta|$, Z_1=$\left(4\sqrt{5}-8+t\right)|\cos\theta|$, X_2=0, Y_2=$\left|\left(8-4\sqrt{5}-t\right)\cos\theta + \left(6\sqrt{5}-14-\frac{1}{\varphi}t\right)\sin\theta\right|$ ve $Z_2 = \left|\left(8-4\sqrt{5}-t\right)\sin\theta - \left(6\sqrt{5}-14-\frac{1}{\varphi}t\right)\cos\theta\right|$ olmak üzere ve de $i = 1,2$ için u_i=max $\{X_i, Y_i, Z_i\}$, ayrıca φ=$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ altın oran ve α=$\frac{307+293\sqrt{5}}{1882} + \frac{(540-208\sqrt{5})\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{9410}$ denilirse

$$\max\left\{\frac{\varphi}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_1^- + \frac{1}{2\varphi}u_1^+, u_1, \alpha\left(u_1 + u_1^+ + u_1^-\right), \varphi\alpha u_1 + \frac{1}{\varphi}\alpha u_1^-\right\} = 4\sqrt{5} - 8 + t$$

$$\max\left\{\frac{\varphi}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_2^- + \frac{1}{2\varphi}u_2^+, u_2, \alpha\left(u_2 + u_2^+ + u_2^-\right), \varphi\alpha u_2 + \frac{1}{\varphi}\alpha u_2^-\right\} = 4\sqrt{5} - 8 + t$$

denklemleri ortaya çıkar. Bu denklemler çözülürse $\theta = \{0, \pi\}$ elde edilir. Buradan açıkça $\sigma_\Pi r_\pi$ dönüşümünün O orijin etrafında σ_O inversiyonuna karşılık geldiği görülebilir. Bu

durumda yeni bir dönme-yansıma yoktur. Benzer şekilde dönme eksenleri bir yansıma düzlemi normali olan $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,\pm\varphi,\pm(1-\varphi))$, $(\pm(1-\varphi),1,\pm\varphi)$, $(\pm\varphi,\pm(1-\varphi),1)$ *vektörleri içinde aynı sonuç elde edilir.*

Şekil7.8 deki tablolar birim kürenin köşe noktalarının ilgili dönme-yansıma dönüşümleri altındaki görüntülerini vermektedir.

	(1,0,0)	(0,1,0)	(0,0,1)	((φ-1),1,φ)	((φ-1),1,-φ)	((φ-1),-1,φ)	((φ-1),-1,-φ)	(1,φ,(φ-1))	(1,-φ,(φ-1))	(-1,φ,(φ-1))	(-1,-φ,(φ-1))	(φ,(φ-1),1)	(φ,(φ-1),-1)	(-φ,(φ-1),1)	(-φ,(φ-1),-1)
A_0	A_3	A_3	A_3	A_3	A_3	A_3	A_3	A_3	A_3	A_3	A_3	A_3	A_3	A_3	A_3
A_1	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2
A_2	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1
A_3	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0
A_4	A_7	A_7	A_7	A_7	A_7	A_7	A_7	A_7	A_7	A_7	A_7	A_7	A_7	A_7	A_7
A_5	A_6	A_6	A_6	A_6	A_6	A_6	A_6	A_6	A_6	A_6	A_6	A_6	A_6	A_6	A_6
A_6	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5	A_5
A_7	A_4	A_4	A_4	A_4	A_4	A_4	A_4	A_4	A_4	A_4	A_4	A_4	A_4	A_4	A_4
A_8	A_{11}	A_{11}	A_{11}	A_{11}	A_{11}	A_{11}	A_{11}	A_{11}	A_{11}	A_{11}	A_{11}	A_{11}	A_{11}	A_{11}	A_{11}
A_9	A_{10}	A_{10}	A_{10}	A_{10}	A_{10}	A_{10}	A_{10}	A_{10}	A_{10}	A_{10}	A_{10}	A_{10}	A_{10}	A_{10}	A_{10}
A_{10}	A_9	A_9	A_9	A_9	A_9	A_9	A_9	A_9	A_9	A_9	A_9	A_9	A_9	A_9	A_9
A_{11}	A_8	A_8	A_8	A_8	A_8	A_8	A_8	A_8	A_8	A_8	A_8	A_8	A_8	A_8	A_8
A_{12}	A_{19}	A_{19}	A_{19}	A_{19}	A_{19}	A_{19}	A_{19}	A_{19}	A_{19}	A_{19}	A_{19}	A_{19}	A_{19}	A_{19}	A_{19}
A_{13}	A_{18}	A_{18}	A_{18}	A_{18}	A_{18}	A_{18}	A_{18}	A_{18}	A_{18}	A_{18}	A_{18}	A_{18}	A_{18}	A_{18}	A_{18}
A_{14}	A_{17}	A_{17}	A_{17}	A_{17}	A_{17}	A_{17}	A_{17}	A_{17}	A_{17}	A_{17}	A_{17}	A_{17}	A_{17}	A_{17}	A_{17}
A_{15}	A_{16}	A_{16}	A_{16}	A_{16}	A_{16}	A_{16}	A_{16}	A_{16}	A_{16}	A_{16}	A_{16}	A_{16}	A_{16}	A_{16}	A_{16}
A_{16}	A_{15}	A_{15}	A_{15}	A_{15}	A_{15}	A_{15}	A_{15}	A_{15}	A_{15}	A_{15}	A_{15}	A_{15}	A_{15}	A_{15}	A_{15}
A_{17}	A_{14}	A_{14}	A_{14}	A_{14}	A_{14}	A_{14}	A_{14}	A_{14}	A_{14}	A_{14}	A_{14}	A_{14}	A_{14}	A_{14}	A_{14}
A_{18}	A_{13}	A_{13}	A_{13}	A_{13}	A_{13}	A_{13}	A_{13}	A_{13}	A_{13}	A_{13}	A_{13}	A_{13}	A_{13}	A_{13}	A_{13}
A_{19}	A_{12}	A_{12}	A_{12}	A_{12}	A_{12}	A_{12}	A_{12}	A_{12}	A_{12}	A_{12}	A_{12}	A_{12}	A_{12}	A_{12}	A_{12}
A_{20}	A_{27}	A_{27}	A_{27}	A_{27}	A_{27}	A_{27}	A_{27}	A_{27}	A_{27}	A_{27}	A_{27}	A_{27}	A_{27}	A_{27}	A_{27}
A_{21}	A_{26}	A_{26}	A_{26}	A_{26}	A_{26}	A_{26}	A_{26}	A_{26}	A_{26}	A_{26}	A_{26}	A_{26}	A_{26}	A_{26}	A_{26}
A_{22}	A_{25}	A_{25}	A_{25}	A_{25}	A_{25}	A_{25}	A_{25}	A_{25}	A_{25}	A_{25}	A_{25}	A_{25}	A_{25}	A_{25}	A_{25}
A_{23}	A_{24}	A_{24}	A_{24}	A_{24}	A_{24}	A_{24}	A_{24}	A_{24}	A_{24}	A_{24}	A_{24}	A_{24}	A_{24}	A_{24}	A_{24}
A_{24}	A_{23}	A_{23}	A_{23}	A_{23}	A_{23}	A_{23}	A_{23}	A_{23}	A_{23}	A_{23}	A_{23}	A_{23}	A_{23}	A_{23}	A_{23}
A_{25}	A_{22}	A_{22}	A_{22}	A_{22}	A_{22}	A_{22}	A_{22}	A_{22}	A_{22}	A_{22}	A_{22}	A_{22}	A_{22}	A_{22}	A_{22}
A_{26}	A_{21}	A_{21}	A_{21}	A_{21}	A_{21}	A_{21}	A_{21}	A_{21}	A_{21}	A_{21}	A_{21}	A_{21}	A_{21}	A_{21}	A_{21}
A_{27}	A_{20}	A_{20}	A_{20}	A_{20}	A_{20}	A_{20}	A_{20}	A_{20}	A_{20}	A_{20}	A_{20}	A_{20}	A_{20}	A_{20}	A_{20}
A_{28}	A_{35}	A_{35}	A_{35}	A_{35}	A_{35}	A_{35}	A_{35}	A_{35}	A_{35}	A_{35}	A_{35}	A_{35}	A_{35}	A_{35}	A_{35}
A_{29}	A_{34}	A_{34}	A_{34}	A_{34}	A_{34}	A_{34}	A_{34}	A_{34}	A_{34}	A_{34}	A_{34}	A_{34}	A_{34}	A_{34}	A_{34}
A_{30}	A_{33}	A_{33}	A_{33}	A_{33}	A_{33}	A_{33}	A_{33}	A_{33}	A_{33}	A_{33}	A_{33}	A_{33}	A_{33}	A_{33}	A_{33}
A_{31}	A_{32}	A_{32}	A_{32}	A_{32}	A_{32}	A_{32}	A_{32}	A_{32}	A_{32}	A_{32}	A_{32}	A_{32}	A_{32}	A_{32}	A_{32}
A_{32}	A_{31}	A_{31}	A_{31}	A_{31}	A_{31}	A_{31}	A_{31}	A_{31}	A_{31}	A_{31}	A_{31}	A_{31}	A_{31}	A_{31}	A_{31}
A_{33}	A_{30}	A_{30}	A_{30}	A_{30}	A_{30}	A_{30}	A_{30}	A_{30}	A_{30}	A_{30}	A_{30}	A_{30}	A_{30}	A_{30}	A_{30}
A_{34}	A_{29}	A_{29}	A_{29}	A_{29}	A_{29}	A_{29}	A_{29}	A_{29}	A_{29}	A_{29}	A_{29}	A_{29}	A_{29}	A_{29}	A_{29}
A_{35}	A_{28}	A_{28}	A_{28}	A_{28}	A_{28}	A_{28}	A_{28}	A_{28}	A_{28}	A_{28}	A_{28}	A_{28}	A_{28}	A_{28}	A_{28}
A_{36}	A_{39}	A_{39}	A_{39}	A_{39}	A_{39}	A_{39}	A_{39}	A_{39}	A_{39}	A_{39}	A_{39}	A_{39}	A_{39}	A_{39}	A_{39}
A_{37}	A_{38}	A_{38}	A_{38}	A_{38}	A_{38}	A_{38}	A_{38}	A_{38}	A_{38}	A_{38}	A_{38}	A_{38}	A_{38}	A_{38}	A_{38}
A_{38}	A_{37}	A_{37}	A_{37}	A_{37}	A_{37}	A_{37}	A_{37}	A_{37}	A_{37}	A_{37}	A_{37}	A_{37}	A_{37}	A_{37}	A_{37}
A_{39}	A_{36}	A_{36}	A_{36}	A_{36}	A_{36}	A_{36}	A_{36}	A_{36}	A_{36}	A_{36}	A_{36}	A_{36}	A_{36}	A_{36}	A_{36}
A_{40}	A_{43}	A_{43}	A_{43}	A_{43}	A_{43}	A_{43}	A_{43}	A_{43}	A_{43}	A_{43}	A_{43}	A_{43}	A_{43}	A_{43}	A_{43}
A_{41}	A_{42}	A_{42}	A_{42}	A_{42}	A_{42}	A_{42}	A_{42}	A_{42}	A_{42}	A_{42}	A_{42}	A_{42}	A_{42}	A_{42}	A_{42}
A_{42}	A_{41}	A_{41}	A_{41}	A_{41}	A_{41}	A_{41}	A_{41}	A_{41}	A_{41}	A_{41}	A_{41}	A_{41}	A_{41}	A_{41}	A_{41}
A_{43}	A_{40}	A_{40}	A_{40}	A_{40}	A_{40}	A_{40}	A_{40}	A_{40}	A_{40}	A_{40}	A_{40}	A_{40}	A_{40}	A_{40}	A_{40}
A_{44}	A_{47}	A_{47}	A_{47}	A_{47}	A_{47}	A_{47}	A_{47}	A_{47}	A_{47}	A_{47}	A_{47}	A_{47}	A_{47}	A_{47}	A_{47}
A_{45}	A_{46}	A_{46}	A_{46}	A_{46}	A_{46}	A_{46}	A_{46}	A_{46}	A_{46}	A_{46}	A_{46}	A_{46}	A_{46}	A_{46}	A_{46}
A_{46}	A_{45}	A_{45}	A_{45}	A_{45}	A_{45}	A_{45}	A_{45}	A_{45}	A_{45}	A_{45}	A_{45}	A_{45}	A_{45}	A_{45}	A_{45}
A_{47}	A_{44}	A_{44}	A_{44}	A_{44}	A_{44}	A_{44}	A_{44}	A_{44}	A_{44}	A_{44}	A_{44}	A_{44}	A_{44}	A_{44}	A_{44}
A_{48}	A_{55}	A_{55}	A_{55}	A_{55}	A_{55}	A_{55}	A_{55}	A_{55}	A_{55}	A_{55}	A_{55}	A_{55}	A_{55}	A_{55}	A_{55}
A_{49}	A_{54}	A_{54}	A_{54}	A_{54}	A_{54}	A_{54}	A_{54}	A_{54}	A_{54}	A_{54}	A_{54}	A_{54}	A_{54}	A_{54}	A_{54}
A_{50}	A_{53}	A_{53}	A_{53}	A_{53}	A_{53}	A_{53}	A_{53}	A_{53}	A_{53}	A_{53}	A_{53}	A_{53}	A_{53}	A_{53}	A_{53}
A_{51}	A_{52}	A_{52}	A_{52}	A_{52}	A_{52}	A_{52}	A_{52}	A_{52}	A_{52}	A_{52}	A_{52}	A_{52}	A_{52}	A_{52}	A_{52}
A_{52}	A_{51}	A_{51}	A_{51}	A_{51}	A_{51}	A_{51}	A_{51}	A_{51}	A_{51}	A_{51}	A_{51}	A_{51}	A_{51}	A_{51}	A_{51}
A_{53}	A_{50}	A_{50}	A_{50}	A_{50}	A_{50}	A_{50}	A_{50}	A_{50}	A_{50}	A_{50}	A_{50}	A_{50}	A_{50}	A_{50}	A_{50}
A_{54}	A_{49}	A_{49}	A_{49}	A_{49}	A_{49}	A_{49}	A_{49}	A_{49}	A_{49}	A_{49}	A_{49}	A_{49}	A_{49}	A_{49}	A_{49}
A_{55}	A_{48}	A_{48}	A_{48}	A_{48}	A_{48}	A_{48}	A_{48}	A_{48}	A_{48}	A_{48}	A_{48}	A_{48}	A_{48}	A_{48}	A_{48}
A_{56}	A_{63}	A_{63}	A_{63}	A_{63}	A_{63}	A_{63}	A_{63}	A_{63}	A_{63}	A_{63}	A_{63}	A_{63}	A_{63}	A_{63}	A_{63}
A_{57}	A_{62}	A_{62}	A_{62}	A_{62}	A_{62}	A_{62}	A_{62}	A_{62}	A_{62}	A_{62}	A_{62}	A_{62}	A_{62}	A_{62}	A_{62}
A_{58}	A_{61}	A_{61}	A_{61}	A_{61}	A_{61}	A_{61}	A_{61}	A_{61}	A_{61}	A_{61}	A_{61}	A_{61}	A_{61}	A_{61}	A_{61}
A_{59}	A_{60}	A_{60}	A_{60}	A_{60}	A_{60}	A_{60}	A_{60}	A_{60}	A_{60}	A_{60}	A_{60}	A_{60}	A_{60}	A_{60}	A_{60}
A_{60}	A_{59}	A_{59}	A_{59}	A_{59}	A_{59}	A_{59}	A_{59}	A_{59}	A_{59}	A_{59}	A_{59}	A_{59}	A_{59}	A_{59}	A_{59}
A_{61}	A_{58}	A_{58}	A_{58}	A_{58}	A_{58}	A_{58}	A_{58}	A_{58}	A_{58}	A_{58}	A_{58}	A_{58}	A_{58}	A_{58}	A_{58}
A_{62}	A_{57}	A_{57}	A_{57}	A_{57}	A_{57}	A_{57}	A_{57}	A_{57}	A_{57}	A_{57}	A_{57}	A_{57}	A_{57}	A_{57}	A_{57}
A_{63}	A_{56}	A_{56}	A_{56}	A_{56}	A_{56}	A_{56}	A_{56}	A_{56}	A_{56}	A_{56}	A_{56}	A_{56}	A_{56}	A_{56}	A_{56}
A_{64}	A_{71}	A_{71}	A_{71}	A_{71}	A_{71}	A_{71}	A_{71}	A_{71}	A_{71}	A_{71}	A_{71}	A_{71}	A_{71}	A_{71}	A_{71}
A_{65}	A_{70}	A_{70}	A_{70}	A_{70}	A_{70}	A_{70}	A_{70}	A_{70}	A_{70}	A_{70}	A_{70}	A_{70}	A_{70}	A_{70}	A_{70}
A_{66}	A_{69}	A_{69}	A_{69}	A_{69}	A_{69}	A_{69}	A_{69}	A_{69}	A_{69}	A_{69}	A_{69}	A_{69}	A_{69}	A_{69}	A_{69}
A_{67}	A_{68}	A_{68}	A_{68}	A_{68}	A_{68}	A_{68}	A_{68}	A_{68}	A_{68}	A_{68}	A_{68}	A_{68}	A_{68}	A_{68}	A_{68}
A_{68}	A_{67}	A_{67}	A_{67}	A_{67}	A_{67}	A_{67}	A_{67}	A_{67}	A_{67}	A_{67}	A_{67}	A_{67}	A_{67}	A_{67}	A_{67}
A_{69}	A_{66}	A_{66}	A_{66}	A_{66}	A_{66}	A_{66}	A_{66}	A_{66}	A_{66}	A_{66}	A_{66}	A_{66}	A_{66}	A_{66}	A_{66}
A_{70}	A_{65}	A_{65}	A_{65}	A_{65}	A_{65}	A_{65}	A_{65}	A_{65}	A_{65}	A_{65}	A_{65}	A_{65}	A_{65}	A_{65}	A_{65}
A_{71}	A_{64}	A_{64}	A_{64}	A_{64}	A_{64}	A_{64}	A_{64}	A_{64}	A_{64}	A_{64}	A_{64}	A_{64}	A_{64}	A_{64}	A_{64}

Şekil 7.8 $\mathbb{R}^3_{CI}$ de Dönme Yansıma Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

Önerme 7.7 *d_{CI}- uzaklığını koruyan orijine göre kırk dört dönme inversiyon vardır.*

İspat *$r_\theta \in R_{CI}$ olmak üzere, bir dönme inversiyon $\rho = \sigma_O\sigma_\Delta\sigma_\Gamma = \sigma_O r_\theta$ bileşkesi olarak yazılabilir. Böylece önerme 7.5 deki otuz bir dönme ekseni için ispat verilmelidir.*
r_θ, dönme ekseni $(1,(1\text{-}\varphi),0)$ dönme eksenine paralel ise $\left(\frac{1}{\sqrt{2-2\varphi+\varphi^2}}, \frac{1-\varphi}{\sqrt{2-2\varphi+\varphi^2}}, 0\right)$ birim normal yön vektörü olur. Bu durumda

$$\rho(x,y,z)=\sigma_O r_\theta=\begin{pmatrix} -\cos\theta x+\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\sin\theta y-\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\sin\theta z, \\ -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\sin\theta x-(\cos\theta+\frac{50+10\sqrt{5}}{100}(1-\cos\theta))y-\frac{\sqrt{5}}{5}(1-\cos\theta))z, \\ \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\sin\theta x-\frac{\sqrt{5}}{5}(1-\cos\theta)y-(\cos\theta+\frac{50-10\sqrt{5}}{100}(1-\cos\theta))z \end{pmatrix}$$

$\rho(A_4), \rho(A_{20})$ ve $\rho(A_{56})$ hesaplanıp $t = \frac{\left(11\sqrt{5}-25\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$ olmak üzere $d_{CI}(r_\theta(A_4), r_\theta(A_{20})) = 4\sqrt{5}-8+t$ ve $d_{CI}(r_\theta(A_4), r_\theta(A_{56})) = 4\sqrt{5}-8+t$ ifadelerinde yerine yazılırsa,

$X_1=\left|\left(\frac{50-22\sqrt{5}}{5}+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}t\right)\cos\theta+\left(\frac{4-2\sqrt{5}}{5}-\frac{t}{10}\right)\sin\theta+\frac{145-117\sqrt{5}}{10}+\frac{\sqrt{5}}{5}t\right|,$
$Y_1=\left|\frac{1300-599\sqrt{5}}{5}+\left(10\sqrt{5}\text{-}10\right)t+\left(120\sqrt{5}\text{-}280+\left(10\text{-}10\sqrt{5}\right)t\right)\cos\theta+\left(\frac{2\sqrt{5}-4}{5}+\frac{t}{10}\right)\sqrt{50+10\sqrt{5}}\sin\theta\right|,$
$Z_1=\left|\left(8\text{-}4\sqrt{5}\text{-}t\right)\cos\theta+\left(\left(\frac{6\sqrt{5}-13}{10}+\frac{1-\sqrt{5}}{20}t\right)\sqrt{50\text{-}10\sqrt{5}}+\frac{1-\sqrt{5}}{20}\sqrt{50\text{-}10\sqrt{5}}\right)\sin\theta\right|,$
$X_2=\left|\frac{20-8\sqrt{5}}{5}+\frac{\sqrt{5}}{5}t+\left(160\text{-}80\sqrt{5}\text{-}20t\right)\cos\theta+\left(\frac{3\sqrt{5}-7}{5}+\frac{1-\sqrt{5}}{20}t\right)\sqrt{50\text{-}10\sqrt{5}}\sin\theta\right|,$
$Y_2=\left|\frac{14\sqrt{5}-6}{5}+\frac{5-\sqrt{5}}{10}t+\left(\frac{6\sqrt{5}-10}{5}+\frac{5+\sqrt{5}}{10}t\right)\cos\theta+\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{5}+\frac{\sqrt{5}-1}{20}t\right)\sqrt{50+10\sqrt{5}}\sin\theta\right|$ *ve*
$Z_2=\left|\left(\frac{7\sqrt{5}-15}{20}+\frac{1}{2}t\right)\sqrt{50+10\sqrt{5}}\sin\theta+\frac{1}{10}\sqrt{50\text{-}10\sqrt{5}}\sin\theta+\left(6\sqrt{5}\text{-}14\text{-}\frac{1}{\varphi}\right)\cos\theta\right|$ *olmak üzere ve de i=1, 2 için u_i=max $\{X_i, Y_i, Z_i\}$, ayrıca $\varphi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ altın oran ve $\alpha=\frac{307+293\sqrt{5}}{1882}+\frac{\left(540-208\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{9410}$ denilirse*

$$\max\left\{\frac{\varphi}{2}u_1+\frac{1}{2}u_1^-+\frac{1}{2\varphi}u_1^+, u_1, \alpha\left(u_1+u_1^++u_1^-\right), \varphi\alpha u_1+\frac{1}{\varphi}\alpha u_1^-\right\} = 4\sqrt{5}-8+t$$
$$\max\left\{\frac{\varphi}{2}u_2+\frac{1}{2}u_2^-+\frac{1}{2\varphi}u_2^+, u_2, \alpha\left(u_2+u_2^++u_2^-\right), \varphi\alpha u_2+\frac{1}{\varphi}\alpha u_2^-\right\} = 4\sqrt{5}-8+t$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülürse $\theta = 2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5$ sonuçları bulunur. Benzer şekilde, eğer l doğrusunun yön vektörü;

$$(\pm(1-\varphi), 0, 1), (1, \pm(1-\varphi), 0), (0, 1, \pm(1-\varphi))$$

olarak alınır ise

$$\theta = 2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5$$

olur.

r_θ, *dönme ekseni* $(1,1,1)$ *dönme eksenine paralel ise* r_θ *nın birim normal yön vektörü* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olur. Bu durumda*

$$\rho(x,y,z)=\sigma_O r_\theta=\begin{pmatrix} -x\left[\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\theta\right]-y\left[\frac{(1-\cos\theta)}{3}-\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right]-z\left[\frac{(1-\cos\theta)}{3}+\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right], \\ -x\left[\frac{(1-\cos\theta)}{3}+\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right]-y\left[\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\theta\right]-z\left[\frac{(1-\cos\theta)}{3}-\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right], \\ -x\left[\frac{(1-\cos\theta)}{3}-\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right]-y\left[\frac{(1-\cos\theta)}{3}+\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right]-z\left[\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\theta\right] \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan $\rho(A_4)$, $\rho(A_{20})$ *ve* $\rho(A_{56})$ *hesaplanıp* $t=\frac{\left(11\sqrt{5}-25\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$ *olmak üzere* $d_{CI}(r_\theta(A_4),r_\theta(A_{20}))=4\sqrt{5}-8+t$ *ve* $d_{CI}(r_\theta(A_4),r_\theta(A_{56}))=4\sqrt{5}-8+t$ *bağıntılarında yerine yazılırsa,*

$X_1=\left|\frac{22-10\sqrt{5}}{3}+\frac{\sqrt{5}-3}{6}t+\left(\frac{20-8\sqrt{5}}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}t\right)\cos\theta+\left(\frac{8\sqrt{3}-4\sqrt{15}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)\sin\theta\right|$,

$Y_1=\left|\frac{10\sqrt{5}+22}{3}+\frac{3-\sqrt{5}}{6}t+\left(\frac{10\sqrt{5}-22}{3}+\frac{3-\sqrt{5}}{6}t\right)\cos\theta+\left(\frac{6\sqrt{3}-2\sqrt{15}}{3}-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}t\right)\sin\theta\right|$,

$Z_1=\left|\frac{22-10\sqrt{5}}{3}+\frac{\sqrt{5}-3}{6}t+\left(\frac{2-2\sqrt{5}}{3}-\frac{\sqrt{5}+3}{6}t\right)\cos\theta+\left(\frac{6\sqrt{15}-14\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{15}}{6}t\right)\sin\theta\right|$,

$X_2=\left|\frac{10\sqrt{5}-22}{3}+\frac{3-\sqrt{5}}{6}t+\left(\frac{22-10\sqrt{5}}{3}+\frac{\sqrt{5}-3}{6}t\right)\cos\theta+\left(\frac{2\sqrt{15}-6\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}t\right)\sin\theta\right|$,

$Y_2=\left|\frac{10\sqrt{5}-22}{3}+\frac{3-\sqrt{5}}{6}t+\left(\frac{2\sqrt{5}-2}{3}+\frac{\sqrt{5}+3}{6}t\right)\cos\theta+\left(\frac{14\sqrt{3}-6\sqrt{15}}{3}+\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}t\right)\sin\theta\right|$ *ve*

$Z_2=\left|\frac{10\sqrt{5}-22}{3}+\frac{3-\sqrt{5}}{6}t+\left(\frac{8\sqrt{5}-20}{3}-\frac{\sqrt{5}}{3}t\right)\cos\theta+\left(\frac{4\sqrt{15}-8\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)\sin\theta\right|$ *olmak üzere ve de* i=1,2 *için* u_i=max$\{X_i,Y_i,Z_i\}$, *ayrıca* $\varphi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ *altın oran ve* $\alpha=\frac{307+293\sqrt{5}}{1882}+\frac{\left(540-208\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{9410}$ *denilirse*

$$\begin{aligned}\max\left\{\frac{\varphi}{2}u_1+\frac{1}{2}u_1^-+\frac{1}{2\varphi}u_1^+,u_1,\alpha\left(u_1+u_1^++u_1^-\right),\varphi\alpha u_1+\frac{1}{\varphi}\alpha u_1^-\right\} &= 4\sqrt{5}-8+t\\ \max\left\{\frac{\varphi}{2}u_2+\frac{1}{2}u_2^-+\frac{1}{2\varphi}u_2^+,u_2,\alpha\left(u_2+u_2^++u_2^-\right),\varphi\alpha u_2+\frac{1}{\varphi}\alpha u_2^-\right\} &= 4\sqrt{5}-8+t\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülür ise

$$\theta=\{\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\}$$

elde edilir. Benzer şekilde, eğer l nin yön vektörü

$$(-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1),(\pm(2-\varphi),1,0),(0,\pm(2-\varphi),1),(1,0,\pm(2-\varphi))$$

ise

$$\theta=\{\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\}$$

elde edilir.

r_θ, *dönme ekseni* $(1,0,0)$ *doğrultulu doğru ise birim normal yön vektörü* $(1,0,0)$ *olur. Bu durumda*

$$\rho(x,y,z)=\sigma_O r_\theta(x,y,z)=(-x,-y\cos\theta+z\sin\theta,-y\sin\theta-z\cos\theta)$$

şeklinde tanımlanır. Buradan $\rho(A_4), \rho(A_{20})$ *ve* $\rho(A_{56})$ *hesaplanıp* $t = \frac{\left(11\sqrt{5}-25\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$ *olmak üzere* $d_{CI}(r_\theta(A_4), r_\theta(A_{20})) = 4\sqrt{5} - 8 + t$ *ve* $d_{CI}(r_\theta(A_4), r_\theta(A_{56})) = 4\sqrt{5} - 8 + t$ *bağıntılarında yerine yazılırsa,* $X_1 = 14 - 6\sqrt{5} + \frac{1}{\varphi}t$, $Y_1 = \left(4\sqrt{5} - 8 + t\right)|\sin\theta|$, $Z_1 = \left(4\sqrt{5} - 8 + t\right)|\cos\theta|$, $X_2 = 0$, $Y_2 = \left|\left(4\sqrt{5} - 8 + t\right)\cos\theta + \left(14 - 6\sqrt{5} + \frac{1}{\varphi}t\right)\sin\theta\right|$ *ve* $Z_2 = \left|\left(4\sqrt{5} - 8 + t\right)\sin\theta + \left(6\sqrt{5} - 14 - \frac{1}{\varphi}t\right)\cos\theta\right|$ *olmak üzere ve de* $i = 1, 2$ *için* $u_i = \max\{X_i, Y_i, Z_i\}$, *ayrıca* $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ *altın oran ve* $\alpha = \frac{307+293\sqrt{5}}{1882} + \frac{\left(540-208\sqrt{5}\right)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{9410}$ *denilirse*

$$\max\left\{\frac{\varphi}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_1^- + \frac{1}{2\varphi}u_1^+, u_1, \alpha\left(u_1 + u_1^+ + u_1^-\right), \varphi\alpha u_1 + \frac{1}{\varphi}\alpha u_1^-\right\} = 4\sqrt{5} - 8 + t$$

$$\max\left\{\frac{\varphi}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_2^- + \frac{1}{2\varphi}u_2^+, u_2, \alpha\left(u_2 + u_2^+ + u_2^-\right), \varphi\alpha u_2 + \frac{1}{\varphi}\alpha u_2^-\right\} = 4\sqrt{5} - 8 + t$$

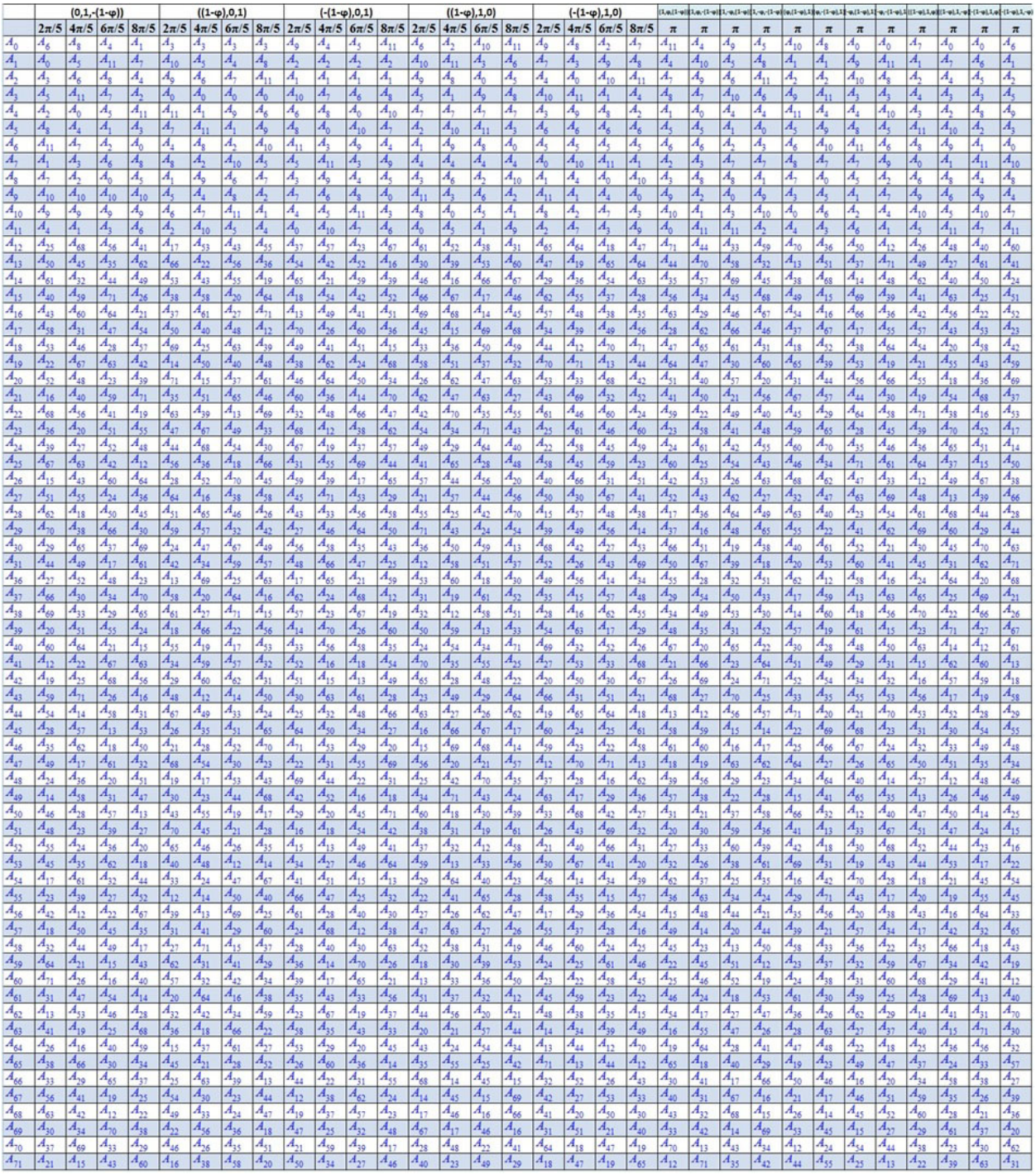
denklemlerine ulaşılır. Bu denklemler çözülür ise $\theta = \{0, \pi\}$ *elde edilir. Fakat* $\theta = \pi$ *için hesaplamalar yapıldığında* $\sigma_o r_\pi$ *dönüşümünün* $x = 0$ *düzlemine göre yansıma hareketine karşılık geldiği görülmektedir. Benzer şekilde, eğer l doğrusunun yön vektörü*

$$(0,1,0), (0,0,1), (1, \pm\varphi, \pm(1-\varphi)), (\pm(1-\varphi), 1, \pm\varphi), (\pm\varphi, \pm(1-\varphi), 1)$$

ise $\theta = \{0, \pi\}$ *bulunur. Eğer* $\theta = \pi$ *için dönme ekseni doğrultu vektörü bu vektöre paralel olacak şekilde alınır ve dönme -inversiyon hareketi yapılırsa benzer şekilde önerme 7.4 de tespit edilen bir düzleme göre yansıma hareketleri bulunur. Yani bu durumlarda yeni bir hareket olacak şekilde dönme-inversiyon yoktur.*

Şekil7.9 ve Şekil7.10 daki tablolar birim kürenin köşe noktalarının ilgili dönme-inversiyon dönüşümü altındaki görüntülerini verir.

	(1,0,0)	(0,1,0)	(0,0,1)	(1,1,1)		(-1,1,1)		(1,-1,1)		(1,1,-1)		(0,(2-φ),1)		(0,-(2-φ),1)		((2-φ),1,0)		(-(2-φ),1,0)		(1,0,(2-φ))		(1,0,-(2-φ))		(0,1,(1-φ))			
	π	π	π	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/5	4π/5	6π/5	8π/5
A_0	A_2	A_0	A_1	A_7	A_{11}	A_{10}	A_4	A_9	A_6	A_8	A_5	A_{11}	A_1	A_9	A_1	A_2	A_3	A_4	A_2	A_6	A_7	A_{10}	A_8	A_7	A_{10}	A_5	A_1
A_1	A_3	A_1	A_0	A_5	A_9	A_8	A_6	A_{11}	A_4	A_{10}	A_7	A_0	A_8	A_0	A_{10}	A_5	A_2	A_3	A_4	A_{11}	A_9	A_6	A_7	A_0	A_4	A_9	A_6
A_2	A_0	A_2	A_3	A_6	A_{10}	A_{11}	A_5	A_8	A_7	A_9	A_4	A_3	A_{11}	A_3	A_9	A_6	A_0	A_0	A_7	A_8	A_{10}	A_5	A_4	A_3	A_7	A_{10}	A_5
A_3	A_1	A_3	A_2	A_4	A_8	A_9	A_7	A_{10}	A_5	A_{11}	A_6	A_8	A_2	A_{10}	A_2	A_1	A_6	A_7	A_1	A_5	A_4	A_9	A_{11}	A_4	A_9	A_6	A_2
A_4	A_6	A_5	A_4	A_{11}	A_3	A_0	A_9	A_1	A_8	A_2	A_{10}	A_5	A_9	A_8	A_5	A_{10}	A_{11}	A_1	A_0	A_3	A_6	A_2	A_6	A_{10}	A_5	A_1	A_3
A_5	A_7	A_4	A_5	A_{10}	A_1	A_2	A_8	A_3	A_9	A_0	A_{11}	A_{10}	A_4	A_4	A_{11}	A_0	A_1	A_9	A_8	A_7	A_3	A_7	A_2	A_2	A_0	A_4	A_9
A_6	A_4	A_7	A_6	A_9	A_2	A_1	A_{11}	A_0	A_{10}	A_3	A_8	A_9	A_7	A_7	A_8	A_2	A_2	A_{10}	A_{11}	A_4	A_0	A_4	A_1	A_1	A_3	A_7	A_{10}
A_7	A_5	A_6	A_7	A_8	A_0	A_3	A_{10}	A_2	A_{11}	A_1	A_9	A_6	A_{10}	A_{11}	A_6	A_9	A_8	A_2	A_3	A_0	A_5	A_1	A_5	A_9	A_6	A_2	A_0
A_8	A_8	A_{10}	A_9	A_3	A_7	A_5	A_1	A_4	A_2	A_6	A_0	A_1	A_3	A_6	A_4	A_7	A_{10}	A_5	A_{10}	A_9	A_2	A_0	A_9	A_{11}	A_{11}	A_{11}	A_{11}
A_9	A_9	A_{11}	A_8	A_1	A_6	A_4	A_3	A_5	A_0	A_7	A_2	A_4	A_6	A_2	A_0	A_{11}	A_7	A_{11}	A_5	A_1	A_8	A_8	A_3	A_5	A_1	A_3	A_7
A_{10}	A_{10}	A_8	A_{11}	A_2	A_5	A_7	A_0	A_6	A_3	A_4	A_1	A_7	A_5	A_1	A_3	A_8	A_4	A_8	A_6	A_2	A_{11}	A_{11}	A_0	A_6	A_2	A_0	A_4
A_{11}	A_{11}	A_9	A_{10}	A_0	A_4	A_6	A_2	A_7	A_1	A_5	A_3	A_2	A_0	A_5	A_7	A_4	A_9	A_6	A_9	A_{10}	A_1	A_3	A_{10}	A_8	A_8	A_8	A_8
A_{12}	A_{16}	A_{14}	A_{13}	A_{27}	A_{35}	A_{30}	A_{21}	A_{29}	A_{24}	A_{32}	A_{22}	A_{39}	A_{15}	A_{69}	A_{49}	A_{42}	A_{58}	A_{20}	A_{54}	A_{46}	A_{62}	A_{66}	A_{28}	A_{63}	A_{34}	A_{45}	A_{51}
A_{13}	A_{17}	A_{15}	A_{12}	A_{23}	A_{33}	A_{28}	A_{25}	A_{31}	A_{20}	A_{34}	A_{26}	A_{38}	A_{68}	A_{14}	A_{38}	A_{59}	A_{43}	A_{55}	A_{21}	A_{67}	A_{29}	A_{46}	A_{63}	A_{40}	A_{47}	A_{69}	A_{24}
A_{14}	A_{18}	A_{12}	A_{15}	A_{26}	A_{31}	A_{34}	A_{20}	A_{33}	A_{25}	A_{28}	A_{23}	A_{71}	A_{51}	A_{37}	A_{13}	A_{52}	A_{22}	A_{56}	A_{42}	A_{60}	A_{47}	A_{30}	A_{64}	A_{27}	A_{70}	A_{58}	A_{41}
A_{15}	A_{19}	A_{13}	A_{14}	A_{22}	A_{29}	A_{32}	A_{24}	A_{35}	A_{21}	A_{30}	A_{27}	A_{12}	A_{36}	A_{50}	A_{70}	A_{23}	A_{53}	A_{43}	A_{57}	A_{31}	A_{65}	A_{61}	A_{47}	A_{48}	A_{44}	A_{33}	A_{60}
A_{16}	A_{12}	A_{18}	A_{17}	A_{25}	A_{34}	A_{31}	A_{23}	A_{18}	A_{26}	A_{33}	A_{20}	A_{19}	A_{39}	A_{43}	A_{65}	A_{24}	A_{50}	A_{40}	A_{62}	A_{32}	A_{70}	A_{58}	A_{44}	A_{55}	A_{47}	A_{30}	A_{59}
A_{17}	A_{13}	A_{19}	A_{16}	A_{21}	A_{32}	A_{29}	A_{27}	A_{30}	A_{22}	A_{35}	A_{24}	A_{64}	A_{52}	A_{38}	A_{18}	A_{51}	A_{25}	A_{63}	A_{41}	A_{59}	A_{44}	A_{33}	A_{71}	A_{20}	A_{65}	A_{61}	A_{42}
A_{18}	A_{14}	A_{16}	A_{19}	A_{24}	A_{30}	A_{35}	A_{22}	A_{32}	A_{27}	A_{29}	A_{31}	A_{55}	A_{67}	A_{17}	A_{37}	A_{60}	A_{40}	A_{48}	A_{26}	A_{68}	A_{34}	A_{56}	A_{43}	A_{62}	A_{66}	A_{23}
A_{19}	A_{15}	A_{17}	A_{18}	A_{20}	A_{28}	A_{33}	A_{26}	A_{34}	A_{23}	A_{31}	A_{25}	A_{36}	A_{16}	A_{66}	A_{54}	A_{41}	A_{61}	A_{27}	A_{49}	A_{45}	A_{57}	A_{69}	A_{35}	A_{46}	A_{29}	A_{46}	A_{52}
A_{20}	A_{24}	A_{22}	A_{21}	A_{35}	A_{19}	A_{14}	A_{29}	A_{13}	A_{32}	A_{16}	A_{30}	A_{45}	A_{65}	A_{28}	A_{59}	A_{38}	A_{67}	A_{49}	A_{12}	A_{43}	A_{25}	A_{54}	A_{60}	A_{70}	A_{58}	A_{41}	A_{17}
A_{21}	A_{25}	A_{23}	A_{20}	A_{31}	A_{17}	A_{12}	A_{33}	A_{15}	A_{28}	A_{18}	A_{34}	A_{58}	A_{29}	A_{64}	A_{45}	A_{66}	A_{39}	A_{13}	A_{48}	A_{55}	A_{61}	A_{42}	A_{24}	A_{38}	A_{22}	A_{49}	A_{53}
A_{22}	A_{26}	A_{20}	A_{23}	A_{34}	A_{15}	A_{18}	A_{28}	A_{17}	A_{33}	A_{12}	A_{31}	A_{30}	A_{57}	A_{44}	A_{67}	A_{14}	A_{51}	A_{65}	A_{36}	A_{27}	A_{43}	A_{62}	A_{32}	A_{54}	A_{30}	A_{21}	A_{37}
A_{23}	A_{27}	A_{21}	A_{22}	A_{30}	A_{13}	A_{16}	A_{32}	A_{19}	A_{29}	A_{14}	A_{35}	A_{66}	A_{44}	A_{56}	A_{31}	A_{50}	A_{15}	A_{37}	A_{64}	A_{63}	A_{33}	A_{26}	A_{42}	A_{18}	A_{40}	A_{57}	A_{69}
A_{24}	A_{20}	A_{26}	A_{25}	A_{33}	A_{18}	A_{15}	A_{31}	A_{12}	A_{34}	A_{17}	A_{28}	A_{69}	A_{47}	A_{63}	A_{32}	A_{53}	A_{16}	A_{38}	A_{71}	A_{56}	A_{50}	A_{21}	A_{41}	A_{13}	A_{43}	A_{62}	A_{66}
A_{25}	A_{21}	A_{27}	A_{24}	A_{29}	A_{16}	A_{13}	A_{25}	A_{14}	A_{30}	A_{19}	A_{32}	A_{33}	A_{62}	A_{47}	A_{68}	A_{17}	A_{52}	A_{70}	A_{39}	A_{20}	A_{40}	A_{67}	A_{51}	A_{49}	A_{53}	A_{26}	A_{58}
A_{26}	A_{22}	A_{24}	A_{27}	A_{32}	A_{14}	A_{19}	A_{30}	A_{16}	A_{35}	A_{13}	A_{29}	A_{61}	A_{34}	A_{71}	A_{46}	A_{69}	A_{36}	A_{18}	A_{55}	A_{48}	A_{58}	A_{41}	A_{23}	A_{37}	A_{25}	A_{54}	A_{50}
A_{27}	A_{23}	A_{25}	A_{26}	A_{28}	A_{12}	A_{17}	A_{34}	A_{18}	A_{31}	A_{15}	A_{33}	A_{46}	A_{70}	A_{35}	A_{60}	A_{37}	A_{68}	A_{54}	A_{19}	A_{40}	A_{22}	A_{39}	A_{59}	A_{65}	A_{61}	A_{42}	A_{14}
A_{28}	A_{32}	A_{30}	A_{29}	A_{19}	A_{27}	A_{22}	A_{13}	A_{21}	A_{16}	A_{24}	A_{14}	A_{41}	A_{53}	A_{60}	A_{20}	A_{47}	A_{34}	A_{59}	A_{66}	A_{37}	A_{52}	A_{12}	A_{49}	A_{31}	A_{67}	A_{39}	A_{71}
A_{29}	A_{33}	A_{31}	A_{28}	A_{15}	A_{25}	A_{20}	A_{17}	A_{23}	A_{12}	A_{26}	A_{18}	A_{21}	A_{61}	A_{52}	A_{40}	A_{35}	A_{47}	A_{67}	A_{58}	A_{13}	A_{68}	A_{36}	A_{53}	A_{45}	A_{51}	A_{19}	A_{63}
A_{30}	A_{34}	A_{28}	A_{31}	A_{18}	A_{23}	A_{26}	A_{12}	A_{25}	A_{17}	A_{20}	A_{15}	A_{62}	A_{22}	A_{41}	A_{65}	A_{64}	A_{67}	A_{32}	A_{46}	A_{14}	A_{39}	A_{71}	A_{14}	A_{60}	A_{16}	A_{48}	A_{44}
A_{31}	A_{35}	A_{29}	A_{30}	A_{14}	A_{21}	A_{24}	A_{16}	A_{27}	A_{13}	A_{22}	A_{19}	A_{54}	A_{40}	A_{23}	A_{63}	A_{56}	A_{65}	A_{46}	A_{33}	A_{70}	A_{15}	A_{55}	A_{38}	A_{68}	A_{36}	A_{64}	A_{28}
A_{32}	A_{28}	A_{34}	A_{33}	A_{17}	A_{26}	A_{30}	A_{15}	A_{20}	A_{18}	A_{25}	A_{12}	A_{39}	A_{43}	A_{24}	A_{66}	A_{63}	A_{70}	A_{45}	A_{30}	A_{65}	A_{16}	A_{48}	A_{37}	A_{67}	A_{39}	A_{71}	A_{35}
A_{33}	A_{29}	A_{35}	A_{32}	A_{13}	A_{24}	A_{21}	A_{19}	A_{22}	A_{14}	A_{27}	A_{16}	A_{57}	A_{25}	A_{42}	A_{48}	A_{71}	A_{62}	A_{31}	A_{45}	A_{49}	A_{26}	A_{64}	A_{17}	A_{59}	A_{15}	A_{55}	A_{47}
A_{34}	A_{30}	A_{32}	A_{35}	A_{16}	A_{22}	A_{27}	A_{14}	A_{24}	A_{19}	A_{21}	A_{13}	A_{26}	A_{58}	A_{51}	A_{43}	A_{28}	A_{44}	A_{68}	A_{61}	A_{18}	A_{67}	A_{39}	A_{50}	A_{46}	A_{52}	A_{12}	A_{56}
A_{35}	A_{31}	A_{33}	A_{34}	A_{12}	A_{20}	A_{25}	A_{18}	A_{26}	A_{15}	A_{23}	A_{17}	A_{42}	A_{60}	A_{59}	A_{27}	A_{44}	A_{29}	A_{60}	A_{69}	A_{38}	A_{51}	A_{19}	A_{66}	A_{32}	A_{68}	A_{36}	A_{64}
A_{36}	A_{36}	A_{38}	A_{37}	A_{43}	A_{47}	A_{45}	A_{41}	A_{44}	A_{42}	A_{46}	A_{40}	A_{15}	A_{19}	A_{61}	A_{57}	A_{26}	A_{66}	A_{22}	A_{70}	A_{33}	A_{54}	A_{50}	A_{29}	A_{71}	A_{35}	A_{31}	A_{67}
A_{37}	A_{37}	A_{39}	A_{36}	A_{41}	A_{46}	A_{44}	A_{43}	A_{45}	A_{40}	A_{47}	A_{42}	A_{16}	A_{60}	A_{18}	A_{14}	A_{67}	A_{27}	A_{71}	A_{23}	A_{31}	A_{28}	A_{52}	A_{55}	A_{22}	A_{49}	A_{63}	A_{26}
A_{38}	A_{38}	A_{36}	A_{39}	A_{42}	A_{45}	A_{47}	A_{40}	A_{46}	A_{43}	A_{44}	A_{41}	A_{63}	A_{59}	A_{13}	A_{17}	A_{68}	A_{20}	A_{64}	A_{24}	A_{32}	A_{35}	A_{31}	A_{48}	A_{25}	A_{54}	A_{50}	A_{21}
A_{39}	A_{39}	A_{37}	A_{38}	A_{40}	A_{44}	A_{46}	A_{42}	A_{47}	A_{41}	A_{45}	A_{43}	A_{16}	A_{12}	A_{58}	A_{62}	A_{21}	A_{69}	A_{25}	A_{65}	A_{30}	A_{49}	A_{33}	A_{34}	A_{64}	A_{28}	A_{52}	A_{68}
A_{40}	A_{42}	A_{40}	A_{41}	A_{47}	A_{39}	A_{38}	A_{44}	A_{37}	A_{46}	A_{36}	A_{45}	A_{31}	A_{49}	A_{29}	A_{51}	A_{18}	A_{59}	A_{57}	A_{16}	A_{25}	A_{27}	A_{70}	A_{68}	A_{62}	A_{66}	A_{23}	A_{13}
A_{41}	A_{43}	A_{41}	A_{40}	A_{45}	A_{37}	A_{36}	A_{46}	A_{39}	A_{44}	A_{38}	A_{47}	A_{50}	A_{28}	A_{48}	A_{30}	A_{58}	A_{19}	A_{17}	A_{56}	A_{71}	A_{69}	A_{24}	A_{26}	A_{14}	A_{20}	A_{65}	A_{61}
A_{42}	A_{40}	A_{42}	A_{43}	A_{46}	A_{38}	A_{39}	A_{45}	A_{36}	A_{47}	A_{37}	A_{44}	A_{53}	A_{35}	A_{55}	A_{33}	A_{61}	A_{12}	A_{14}	A_{63}	A_{64}	A_{66}	A_{23}	A_{21}	A_{17}	A_{27}	A_{70}	A_{58}
A_{43}	A_{41}	A_{43}	A_{42}	A_{44}	A_{36}	A_{37}	A_{47}	A_{38}	A_{45}	A_{39}	A_{46}	A_{32}	A_{54}	A_{34}	A_{52}	A_{13}	A_{60}	A_{62}	A_{15}	A_{22}	A_{20}	A_{65}	A_{67}	A_{57}	A_{69}	A_{24}	A_{18}
A_{44}	A_{46}	A_{45}	A_{44}	A_{39}	A_{43}	A_{40}	A_{37}	A_{41}	A_{36}	A_{42}	A_{38}	A_{23}	A_{69}	A_{68}	A_{22}	A_{24}	A_{25}	A_{51}	A_{50}	A_{17}	A_{60}	A_{16}	A_{61}	A_{30}	A_{59}	A_{15}	A_{55}
A_{45}	A_{47}	A_{44}	A_{45}	A_{38}	A_{41}	A_{42}	A_{36}	A_{43}	A_{37}	A_{40}	A_{39}	A_{70}	A_{20}	A_{21}	A_{71}	A_{48}	A_{49}	A_{33}	A_{32}	A_{62}	A_{19}	A_{63}	A_{18}	A_{52}	A_{12}	A_{56}	A_{29}
A_{46}	A_{44}	A_{47}	A_{46}	A_{37}	A_{42}	A_{41}	A_{39}	A_{40}	A_{38}	A_{43}	A_{36}	A_{65}	A_{27}	A_{26}	A_{64}	A_{55}	A_{54}	A_{30}	A_{31}	A_{57}	A_{12}	A_{56}	A_{13}	A_{51}	A_{19}	A_{63}	A_{34}
A_{47}	A_{45}	A_{46}	A_{47}	A_{36}	A_{40}	A_{43}	A_{38}	A_{42}	A_{39}	A_{41}	A_{37}	A_{24}	A_{66}	A_{67}	A_{25}	A_{29}	A_{28}	A_{62}	A_{53}	A_{14}	A_{59}	A_{15}	A_{58}	A_{33}	A_{60}	A_{16}	A_{48}
A_{48}	A_{52}	A_{50}	A_{49}	A_{63}	A_{71}	A_{66}	A_{57}	A_{65}	A_{60}	A_{68}	A_{58}	A_{67}	A_{13}	A_{33}	A_{41}	A_{34}	A_{45}	A_{21}	A_{18}	A_{61}	A_{26}	A_{38}	A_{32}	A_{47}	A_{30}	A_{59}	A_{15}
A_{49}	A_{53}	A_{51}	A_{48}	A_{59}	A_{69}	A_{64}	A_{61}	A_{67}	A_{56}	A_{70}	A_{62}	A_{40}	A_{32}	A_{12}	A_{66}	A_{35}	A_{55}	A_{19}	A_{20}	A_{39}	A_{33}	A_{80}	A_{27}	A_{50}	A_{21}	A_{37}	A_{25}
A_{50}	A_{54}	A_{48}	A_{51}	A_{62}	A_{67}	A_{70}	A_{56}	A_{69}	A_{61}	A_{64}	A_{59}	A_{35}	A_{41}	A_{65}	A_{15}	A_{16}	A_{23}	A_{44}	A_{62}	A_{24}	A_{63}	A_{34}	A_{36}	A_{26}	A_{38}	A_{22}	A_{39}
A_{51}	A_{55}	A_{49}	A_{50}	A_{58}	A_{65}	A_{68}	A_{60}	A_{71}	A_{67}	A_{66}	A_{63}	A_{14}	A_{64}	A_{40}	A_{34}	A_{22}	A_{17}	A_{43}	A_{44}	A_{35}	A_{37}	A_{25}	A_{62}	A_{12}	A_{36}	A_{29}	A_{46}
A_{52}	A_{48}	A_{54}	A_{53}	A_{61}	A_{70}	A_{67}	A_{59}	A_{64}	A_{62}	A_{69}	A_{56}	A_{17}	A_{71}	A_{43}	A_{29}	A_{25}	A_{14}	A_{50}	A_{47}	A_{28}	A_{38}	A_{22}	A_{57}	A_{19}	A_{63}	A_{34}	A_{45}
A_{53}	A_{49}	A_{55}	A_{52}	A_{57}	A_{68}	A_{65}	A_{63}	A_{66}	A_{58}	A_{71}	A_{60}	A_{28}	A_{42}	A_{70}	A_{16}	A_{15}	A_{24}	A_{47}	A_{51}	A_{23}	A_{56}	A_{29}	A_{39}	A_{21}	A_{37}	A_{25}	A_{54}
A_{54}	A_{50}	A_{52}	A_{55}	A_{60}	A_{66}	A_{71}	A_{58}	A_{68}	A_{63}	A_{65}	A_{57}	A_{43}	A_{31}	A_{19}	A_{69}	A_{26}	A_{48}	A_{12}	A_{27}	A_{36}	A_{30}	A_{39}	A_{20}	A_{53}	A_{26}	A_{38}	A_{22}
A_{55}	A_{51}	A_{53}	A_{54}	A_{56}	A_{64}	A_{69}	A_{62}	A_{70}	A_{59}	A_{67}	A_{61}	A_{68}	A_{18}	A_{30}	A_{42}	A_{49}	A_{46}	A_{26}	A_{13}	A_{58}	A_{21}	A_{37}	A_{31}	A_{44}	A_{33}	A_{60}	A_{16}
A_{56}	A_{60}	A_{58}	A_{57}	A_{71}	A_{55}	A_{60}	A_{65}	A_{49}	A_{68}	A_{22}	A_{66}	A_{59}	A_{37}	A_{32}	A_{53}	A_{20}	A_{31}	A_{41}	A_{14}	A_{33}	A_{24}	A_{18}	A_{46}	A_{34}	A_{45}	A_{51}	A_{19}
A_{57}	A_{61}	A_{59}	A_{56}	A_{67}	A_{53}	A_{48}	A_{69}	A_{51}	A_{64}	A_{54}	A_{70}	A_{22}	A_{33}	A_{36}	A_{58}	A_{30}	A_{21}	A_{15}	A_{40}	A_{19}	A_{46}	A_{32}	A_{25}	A_{66}	A_{23}	A_{13}	A_{43}
A_{58}	A_{62}	A_{56}	A_{59}	A_{70}	A_{51}	A_{54}	A_{64}	A_{53}	A_{69}	A_{48}	A_{67}	A_{34}	A_{21}	A_{57}	A_{39}	A_{12}	A_{41}	A_{29}	A_{68}	A_{26}	A_{55}	A_{47}	A_{16}	A_{42}	A_{14}	A_{20}	A_{65}
A_{59}	A_{63}	A_{57}	A_{58}	A_{66}	A_{49}	A_{52}	A_{68}	A_{55}	A_{65}	A_{50}	A_{71}	A_{38}	A_{56}	A_{20}	A_{25}	A_{40}	A_{13}	A_{69}	A_{28}	A_{47}	A_{17}	A_{17}	A_{54}	A_{16}	A_{48}	A_{44}	A_{33}
A_{60}	A_{56}	A_{62}	A_{61}	A_{69}	A_{54}	A_{31}	A_{67}	A_{48}	A_{70}	A_{53}	A_{64}	A_{37}	A_{63}	A_{27}	A_{28}	A_{43}	A_{18}	A_{66}	A_{35}	A_{44}	A_{14}	A_{20}	A_{49}	A_{15}	A_{55}	A_{47}	A_{30}
A_{61}	A_{57}	A_{63}	A_{60}	A_{65}	A_{52}	A_{49}	A_{71}	A_{50}	A_{66}	A_{25}	A_{68}	A_{39}	A_{26}	A_{62}	A_{26}	A_{19}	A_{42}	A_{34}	A_{67}	A_{21}	A_{48}	A_{44}	A_{15}	A_{41}	A_{17}	A_{27}	A_{70}
A_{62}	A_{58}	A_{60}	A_{63}	A_{68}	A_{50}	A_{55}	A_{66}	A_{52}	A_{71}	A_{49}	A_{65}	A_{25}	A_{50}	A_{39}	A_{61}	A_{33}	A_{64}	A_{16}	A_{43}	A_{12}	A_{45}	A_{51}	A_{22}	A_{69}	A_{24}	A_{18}	A_{40}
A_{63}	A_{59}	A_{61}	A_{62}	A_{64}	A_{48}	A_{53}	A_{70}	A_{54}	A_{67}	A_{51}	A_{69}	A_{60}	A_{38}	$A_



Şekil 7.10 $\mathbb{R}^3_{CI}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

Buraya kadar olan kısımda Öklidyen 3-uzayın izometrilerinden hangilerinin d_{CI} metriğini koruduğu bulunmuştur. Daha açıkça Öklidyen 3-uzayın izometrilerinden 15 yansıma, 60 dönme, 44 dönme-inversiyon ve bir inversiyonun d_{CI} metriğini koruduğu

gösterilmiştir. Bu tespit edilen elemanlar chamfered icosahedronun Öklidyen simetri grubu olan I_h (Icosahedral grup) elemanlarıdır. Bu gruba chamfered icosahedron grup denilsin ve $G(CI)$ ile gösterilsin. Açıkça $G(CI)$, I_h grubuna izomorftur. Bundan sonraki kısımda bu dönüşümlerden başka d_{CI} metriğini koruyan izometrinin olmadığı gösterilecektir. Yani $\mathbb{R}^3_{CI}$ nin tüm izometrilerinin $T(3).G(CI)$ olduğu gösterilecektir.

Tanım 7.3 *$A = (a_1, a_2, a_3)$ ve $B = (b_1, b_2, b_3)$ $\mathbb{R}^3_{CI}$ uzayında iki farklı nokta olsun. Bu taktirde*

$$\{X \mid d_{CI}(A, X) + d_{CI}(B, X) = d_{CI}(A, B)\}$$

kümesine A, B noktalarının minimum uzaklık kümesi denir ve $[AB]$ ile gösterilir.

Genel olarak, $[AB]$ kümesi AB köşegenli oniki yüzlü oluşturur. Bakınız Şekil7.11.



Şekil 7.11 $\mathbb{R}^3_{CI}$ da Minimum Uzaklık Kümesi

Önerme 7.8 *$\phi : \mathbb{R}^3_{CI} \to \mathbb{R}^3_{CI}$ bir izometri ve $[AB]$ bir oniki yüzlü olsun. O halde*

$$\phi([AB]) = [\phi(A)\phi(B)]$$

olur.

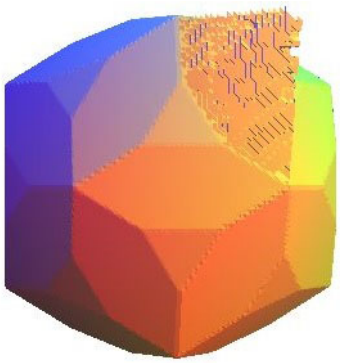
İspat *$Y \in \phi([AB])$ olsun.*

$$\begin{aligned} Y \in \phi([AB]) &\iff \exists X \in [AB] \ni Y = \phi(X) \\ &\iff d_{CI}(A, X) + d_{CI}(B, X) = d_{CI}(A, B) \\ &\iff d_{CI}(\phi(A), \phi(X)) + d_{CI}(\phi(B), \phi(X)) = d_{CI}(\phi(A), \phi(B)) \\ &\Leftrightarrow \quad Y = \phi(X) \in [\phi(A)\phi(B)]\,. \end{aligned}$$

Sonuç 7.6 *$\phi : \mathbb{R}^3_{CI} \to \mathbb{R}^3_{CI}$ bir izometri ve $[AB]$ bir onikiyüzlü olsun. Bu durumda ϕ, $[AB]$ nin köşelerini köşelere dönüştürür ve kenar uzunluklarını korur.*

Önerme 7.9 *$f : \mathbb{R}^3_{CI} \to \mathbb{R}^3_{CI}$ dönüşümü $f(O) = O$ olacak şekilde bir izometri olsun. Bu taktirde $f \in G(CI)$ olur.*

İspat *$O = (0,0,0)$ ve $D = (\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1)$ olmak üzere $[OD]$ oniki yüzlüsünü gözönüne alalım. Bu oniki yüzlünün köşe noktalarından altısı A_0, A_4, A_{20}, A_{40}, A_{48} ve A_{56} olup bu noktalar aynı zamanda merkezil birim chamfered icosahedron birim küresinin köşe noktalarıdır. Dahası bu altı nokta chamfered icosahedronun her biri aynı altıgen yüzünün köşe noktalarıdır.*



Şekil 7.12 $\mathbb{R}^3_{CI}$ de Birim Küre Ve Minimum Uzaklık Kümesi

f izometrisi $[OD]$ oniki yüzlüsünün köşe noktalarını köşe noktalara dönüştürüp, kenar uzaklıklarını koruduğundan ve $f(O) = O$ olduğundan dolayı A_0, A_{12}, A_{36}, A_{52}, A_{60} ve A_{72} noktalarını chamfered icosahedronun yine bir altıgen yüzünün köşe noktalarına dönüştürür. Ayrıca bu dönüştürme işlemi gerçekleşirken kenar uzunlukları korunacağından dolayı bir kenarı oluşturan noktalar yine kenar oluşturacak şekilde konuşlanır. Açıkça ifade edilirse f izometrisi, chamfered icosahedron bir altıgen yüzünün köşe noktalarını yine bir altıgen yüzünün köşe noktalarına dönüştürür. O halde chamfered icosahedron 30 altıgen yüze sahip olduğundan bir altıgen yüzün dönüşebileceği 30 altıgen yüz ihtimali vardır. Ayrıca kenar uzunlukları korunmak zorunda olduğundan A_0, A_4, A_{20}, A_{40}, A_{48} ve A_{56} noktalarının yüz üzerinde konumlandırılması için dört farklı ihtimal vardır. Bu taktirde chamfered icosahedron her bir altıgen yüzü için 4 ihtimal olduğundan dolayı bu noktaların dönüşebileceği 120 ihtimal vardır. Bu ihtimaller ise aşağıda tek tek sıralanmış ve her bir dönüşümün önceden tespit edilen hareketlerden hangisine karşılık geldiği ifade edilmiştir.

1. $f(A_0) = A_2$, $f(A_4) = A_6$, $f(A_{20}) = A_{24}$, $f(A_{40}) = A_{42}$, $f(A_{48}) = A_{52}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{60}$ *ise* $\Delta : x = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

2.$f(A_0) = A_0$, $f(A_4) = A_5$, $f(A_{20}) = A_{22}$, $f(A_{40}) = A_{40}$, $f(A_{48}) = A_{50}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{58}$ *ise* $\Delta : y = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

3.$f(A_0) = A_1$, $f(A_4) = A_4$, $f(A_{20}) = A_{21}$, $f(A_{40}) = A_{41}$, $f(A_{48}) = A_{49}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{57}$ *ise* $\Delta : z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

4. $f(A_0) = A_0$, $f(A_4) = A_{10}$, $f(A_{20}) = A_{66}$, $f(A_{40}) = A_{50}$, $f(A_{48}) = A_{14}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{38}$ *ise* $\Delta : x + \varphi y + (1 - \varphi)z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

5. $f(A_0) = A_8$, $f(A_4) = A_4$, $f(A_{20}) = A_{44}$, $f(A_{40}) = A_{28}$, $f(A_{48}) = A_{64}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{56}$ *ise* $\Delta : -x + \varphi y + (1 - \varphi)z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

6. $f(A_0) = A_{10}$, $f(A_4) = A_{11}$, $f(A_{20}) = A_{31}$, $f(A_{40}) = A_{30}$, $f(A_{48}) = A_{34}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{35}$ *ise* $\Delta : x + \varphi y - (1 - \varphi)z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

7. $f(A_0) = A_0$, $f(A_4) = A_4$, $f(A_{20}) = A_{56}$, $f(A_{40}) = A_{48}$, $f(A_{48}) = A_{40}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{20}$ *ise* $\Delta : -x + \varphi y - (1 - \varphi)z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

8. $f(A_0) = A_5$, $f(A_4) = A_4$, $f(A_{20}) = A_{20}$, $f(A_{40}) = A_{22}$, $f(A_{48}) = A_{23}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{21}$ *ise* $\Delta : (1-\varphi)x+y+\varphi z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

9. $f(A_0) = A_{11}$, $f(A_4) = A_1$, $f(A_{20}) = A_{51}$, $f(A_{40}) = A_{67}$, $f(A_{48}) = A_{39}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{15}$ *ise* $\Delta : -(1 - \varphi)x + y + \varphi z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

10. $f(A_0) = A_4$, $f(A_4) = A_0$, $f(A_{20}) = A_{40}$, $f(A_{40}) = A_{20}$, $f(A_{48}) = A_{56}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{48}$ *ise* $\Delta : (1 - \varphi)x - y + \varphi z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

11. $f(A_0) = A_9$, $f(A_4) = A_4$, $f(A_{20}) = A_{57}$, $f(A_{40}) = A_{65}$, $f(A_{48}) = A_{29}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{44}$ *ise* $\Delta : -(1 - \varphi)x - y + \varphi z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

12. $f(A_0) = A_6$, $f(A_4) = A_9$, $f(A_{20}) = A_{69}$, $f(A_{40}) = A_{61}$, $f(A_{48}) = A_{46}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{33}$ *ise* $\Delta : \varphi x + (1-\varphi)y + z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

13. $f(A_0) = A_7$, $f(A_4) = A_3$, $f(A_{20}) = A_{55}$, $f(A_{40}) = A_{63}$, $f(A_{48}) = A_{27}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{43}$ *ise* $\Delta : \varphi x - (1-\varphi)y + z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

14. $f(A_0) = A_0$, $f(A_4) = A_8$, $f(A_{20}) = A_{36}$, $f(A_{40}) = A_{12}$, $f(A_{48}) = A_{48}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{64}$ *ise* $\Delta : \varphi x + (1-\varphi)y - z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

15. $f(A_0) = A_0$, $f(A_4) = A_2$, $f(A_{20}) = A_{18}$, $f(A_{40}) = A_{14}$, $f(A_{48}) = A_{12}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{16}$ *ise* $\Delta : \varphi x - (1-\varphi)y - z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

16. $f(A_0) = A_1$, $f(A_4) = A_5$, $f(A_{20}) = A_{23}$, $f(A_{40}) = A_{41}$, $f(A_{48}) = A_{51}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{59}$ *ise dönme ekseni* $(1,0,0)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

17. $f(A_0) = A_3$, $f(A_4) = A_6$, $f(A_{20}) = A_{25}$, $f(A_{40}) = A_{43}$, $f(A_{48}) = A_{53}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{61}$ *ise dönme ekseni* $(0,1,0)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

18. $f(A_0) = A_2$, $f(A_4) = A_7$, $f(A_{20}) = A_{26}$, $f(A_{40}) = A_{42}$, $f(A_{48}) = A_{54}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{62}$ *ise dönme ekseni* $(0,0,1)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

19. $f(A_0) = A_4$, $f(A_4) = A_8$, $f(A_{20}) = A_{28}$, $f(A_{40}) = A_{44}$, $f(A_{48}) = A_{56}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{64}$ *ise dönme ekseni* $(1,1,1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

20. $f(A_0) = A_8$, $f(A_4) = A_0$, $f(A_{20}) = A_{12}$, $f(A_{40}) = A_{36}$, $f(A_{48}) = A_{64}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{48}$ *ise dönme ekseni* $(1,1,1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

21. $f(A_0) = A_9$, $f(A_4) = A_3$, $f(A_{20}) = A_{17}$, $f(A_{40}) = A_{37}$, $f(A_{48}) = A_{69}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{53}$ *ise dönme ekseni* $(-1,1,1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

22. $f(A_0) = A_7$, $f(A_4) = A_{10}$, $f(A_{20}) = A_{34}$, $f(A_{40}) = A_{47}$, $f(A_{48}) = A_{62}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{70}$ *ise dönme ekseni* $(-1,1,1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

23. $f(A_0) = A_{10}$, $f(A_4) = A_2$, $f(A_{20}) = A_{18}$, $f(A_{40}) = A_{38}$, $f(A_{48}) = A_{70}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{54}$ *ise dönme eksen* $(1, -1, 1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

24. $f(A_0) = A_5$, $f(A_4) = A_{11}$, $f(A_{20}) = A_{31}$, $f(A_{40}) = A_{45}$, $f(A_{48}) = A_{59}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{67}$ *ise dönme ekseni* $(1, -1, 1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

25. $f(A_0) = A_{11}$, $f(A_4) = A_1$, $f(A_{20}) = A_{15}$, $f(A_{40}) = A_{39}$, $f(A_{48}) = A_{67}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{51}$ *ise dönme ekseni* $(1, 1, -1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

26. $f(A_0) = A_6$, $f(A_4) = A_9$, $f(A_{20}) = A_{33}$, $f(A_{40}) = A_{46}$, $f(A_{48}) = A_{61}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{69}$ *ise dönme ekseni* $(1, 1, -1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

27. $f(A_0) = A_8$, $f(A_4) = A_6$, $f(A_{20}) = A_{46}$, $f(A_{40}) = A_{32}$, $f(A_{48}) = A_{68}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{60}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

28. $f(A_0) = A_2$, $f(A_4) = A_{10}$, $f(A_{20}) = A_{70}$, $f(A_{40}) = A_{54}$, $f(A_{48}) = A_{18}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{38}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

29. $f(A_0) = A_{10}$, $f(A_4) = A_{11}$, $f(A_{20}) = A_{35}$, $f(A_{40}) = A_{34}$, $f(A_{48}) = A_{30}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{31}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

30. $f(A_0) = A_2$, $f(A_4) = A_6$, $f(A_{20}) = A_{60}$, $f(A_{40}) = A_{42}$, $f(A_{48}) = A_{42}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{24}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

31. $f(A_0) = A_1$, $f(A_4) = A_9$, $f(A_{20}) = A_{37}$, $f(A_{40}) = A_{13}$, $f(A_{48}) = A_{49}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{65}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

32. $f(A_0) = A_6$, $f(A_4) = A_8$, $f(A_{20}) = A_{68}$, $f(A_{40}) = A_{60}$, $f(A_{48}) = A_{46}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{32}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

33. $f(A_0) = A_7$, $f(A_4) = A_2$, $f(A_{20}) = A_{54}$, $f(A_{40}) = A_{62}$, $f(A_{48}) = A_{26}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{42}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

34. $f(A_0) = A_1$, $f(A_4) = A_3$, $f(A_{20}) = A_{19}$, $f(A_{40}) = A_{15}$, $f(A_{48}) = A_{13}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{17}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

35. $f(A_0) = A_5$, $f(A_4) = A_0$, $f(A_{20}) = A_{40}$, $f(A_{40}) = A_{22}$, $f(A_{48}) = A_{58}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{50}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

36. $f(A_0) = A_4$, $f(A_4) = A_5$, $f(A_{20}) = A_{22}$, $f(A_{40}) = A_{20}$, $f(A_{48}) = A_{21}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{23}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

37. $f(A_0) = A_9$, $f(A_4) = A_1$, $f(A_{20}) = A_{49}$, $f(A_{40}) = A_{65}$, $f(A_{48}) = A_{37}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{13}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{\sqrt{5}+-1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

38. $f(A_0) = A_{11}$, $f(A_4) = A_5$, $f(A_{20}) = A_{59}$, $f(A_{40}) = A_{67}$, $f(A_{48}) = A_{31}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{45}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

39. $f(A_0) = A_4$, $f(A_4) = A_9$, $f(A_{20}) = A_{65}$, $f(A_{40}) = A_{57}$, $f(A_{48}) = A_{44}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{29}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

40. $f(A_0) = A_9$, $f(A_4) = A_6$, $f(A_{20}) = A_{61}$, $f(A_{40}) = A_{69}$, $f(A_{48}) = A_{33}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{46}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

41. $f(A_0) = A_6$, $f(A_4) = A_2$, $f(A_{20}) = A_{42}$, $f(A_{40}) = A_{24}$, $f(A_{48}) = A_{60}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{52}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

42. $f(A_0) = A_2$, $f(A_4) = A_0$, $f(A_{20}) = A_{14}$, $f(A_{40}) = A_{18}$, $f(A_{48}) = A_{16}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{12}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

43. $f(A_0) = A_5$, $f(A_4) = A_1$, $f(A_{20}) = A_{51}$, $f(A_{40}) = A_{59}$, $f(A_{48}) = A_{23}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{41}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

44. $f(A_0) = A_{11}$, $f(A_4) = A_3$, $f(A_{20}) = A_{55}$, $f(A_{40}) = A_{71}$, $f(A_{48}) = A_{39}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{19}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

45. $f(A_0) = A_7$, $f(A_4) = A_6$, $f(A_{20}) = A_{24}$, $f(A_{40}) = A_{26}$, $f(A_{48}) = A_{27}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{25}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

46. $f(A_0) = A_2$, $f(A_4) = A_8$, $f(A_{20}) = A_{36}$, $f(A_{40}) = A_{16}$, $f(A_{48}) = A_{52}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{68}$ *ise dönme ekseni*$(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

47. $f(A_0) = A_0$, $f(A_4) = A_8$, $f(A_{20}) = A_{64}$, $f(A_{40}) = A_{48}$, $f(A_{48}) = A_{12}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{36}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

48. $f(A_0) = A_0$, $f(A_4) = A_2$, $f(A_{20}) = A_{16}$, $f(A_{40}) = A_{12}$, $f(A_{48}) = A_{14}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{18}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

49. $f(A_0) = A_0$, $f(A_4) = A_{10}$, $f(A_{20}) = A_{38}$, $f(A_{40}) = A_{14}$, $f(A_{48}) = A_{50}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{66}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

50. $f(A_0) = A_0$, $f(A_4) = A_5$, $f(A_{20}) = A_{58}$, $f(A_{40}) = A_{50}$, $f(A_{48}) = A_{40}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{22}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

51. $f(A_0) = A_{10}$, $f(A_4) = A_5$, $f(A_{20}) = A_{45}$, $f(A_{40}) = A_{30}$, $f(A_{48}) = A_{66}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{58}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

52. $f(A_0) = A_7$, $f(A_4) = A_{11}$, $f(A_{20}) = A_{71}$, $f(A_{40}) = A_{63}$, $f(A_{48}) = A_{47}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{35}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\Pi}{5}}$ *dönmedir.*

53. $f(A_0) = A_6$, $f(A_4) = A_3$, $f(A_{20}) = A_{53}$, $f(A_{40}) = A_{61}$, $f(A_{48}) = A_{25}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{43}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

54. $f(A_0) = A_8$, $f(A_4) = A_9$, $f(A_{20}) = A_{29}$, $f(A_{40}) = A_{28}$, $f(A_{48}) = A_{32}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{33}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

55. $f(A_0) = A_5$, $f(A_4) = A_4$, $f(A_{20}) = A_{21}$, $f(A_{40}) = A_{23}$, $f(A_{48}) = A_{22}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{20}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

56. $f(A_0) = A_1$, $f(A_4) = A_4$, $f(A_{20}) = A_{57}$, $f(A_{40}) = A_{49}$, $f(A_{48}) = A_{41}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{21}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

57. $f(A_0) = A_9$, $f(A_4) = A_4$, $f(A_{20}) = A_{44}$, $f(A_{40}) = A_{29}$, $f(A_{48}) = A_{65}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{57}$ *ise dönme ekseni*$(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

58. $f(A_0) = A_8$, $f(A_4) = A_4$, $f(A_{20}) = A_{56}$, $f(A_{40}) = A_{64}$, $f(A_{48}) = A_{28}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{44}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

59. $f(A_0) = A_{10}$, $f(A_4) = A_0$, $f(A_{20}) = A_{50}$, $f(A_{40}) = A_{66}$, $f(A_{48}) = A_{38}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{14}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

60. $f(A_0) = A_{11}$, $f(A_4) = A_{10}$, $f(A_{20}) = A_{30}$, $f(A_{40}) = A_{31}$, $f(A_{48}) = A_{35}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{34}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

61. $f(A_0) = A_1$, $f(A_4) = A_{11}$, $f(A_{20}) = A_{67}$, $f(A_{40}) = A_{51}$, $f(A_{48}) = A_{15}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{39}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

62.. $f(A_0) = A_4$, $f(A_4) = A_1$, $f(A_{20}) = A_{41}$, $f(A_{40}) = A_{21}$, $f(A_{48}) = A_{57}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{49}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

63. $f(A_0) = A_8$, $f(A_4) = A_2$, $f(A_{20}) = A_{52}$, $f(A_{40}) = A_{68}$, $f(A_{48}) = A_{36}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{16}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

64. $f(A_0) = A_7$, $f(A_4) = A_3$, $f(A_{20}) = A_{43}$, $f(A_{40}) = A_{27}$, $f(A_{48}) = A_{63}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{55}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}+1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

65. $f(A_0) = A_{10}$, $f(A_4) = A_7$, $f(A_{20}) = A_{62}$, $f(A_{40}) = A_{70}$, $f(A_{48}) = A_{34}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{47}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

66. $f(A_0) = A_6$, $f(A_4) = A_7$, $f(A_{20}) = A_{27}$, $f(A_{40}) = A_{25}$, $f(A_{48}) = A_{24}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{26}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}+1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

67. $f(A_0) = A_9$, $f(A_4) = A_8$, $f(A_{20}) = A_{32}$, $f(A_{40}) = A_{33}$, $f(A_{48}) = A_{29}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{28}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

68. $f(A_0) = A_{11}$, $f(A_4) = A_7$, $f(A_{20}) = A_{47}$, $f(A_{40}) = A_{35}$, $f(A_{48}) = A_{71}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{63}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

69. $f(A_0) = A_3$, $f(A_4) = A_7$, $f(A_{20}) = A_{63}$, $f(A_{40}) = A_{55}$, $f(A_{48}) = A_{43}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{27}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

70. $f(A_0) = A_3$, $f(A_4) = A_9$, $f(A_{20}) = A_{69}$, $f(A_{40}) = A_{53}$, $f(A_{48}) = A_{17}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{37}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

71. $f(A_0) = A_4$, $f(A_4) = A_0$, $f(A_{20}) = A_{48}$, $f(A_{40}) = A_{56}$, $f(A_{48}) = A_{20}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{40}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{1}{2})$*olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

72. $f(A_0) = A_3$, $f(A_4) = A_1$, $f(A_{20}) = A_{13}$, $f(A_{40}) = A_{17}$, $f(A_{48}) = A_{19}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{15}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4}, -\frac{1}{2})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

73. $f(A_0) = A_3$, $f(A_4) = A_{11}$, $f(A_{20}) = A_{39}$, $f(A_{40}) = A_{19}$, $f(A_{48}) = A_{55}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{71}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{1}{2})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

74. $f(A_0) = A_5$, $f(A_4) = A_{10}$, $f(A_{20}) = A_{66}$, $f(A_{40}) = A_{58}$, $f(A_{48}) = A_{45}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{30}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4}, -\frac{1}{2})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

75. $f(A_0) = A_7$, $f(A_4) = A_{11}$, $f(A_{20}) = A_{35}$, $f(A_{40}) = A_{47}$, $f(A_{48}) = A_{63}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{71}$ *ise dönme ekseni* $(1, 1, 1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

76. $f(A_0) = A_{11}$, $f(A_4) = A_3$, $f(A_{20}) = A_{19}$, $f(A_{40}) = A_{39}$, $f(A_{48}) = A_{71}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{55}$ *ise dönme ekseni* $(1, 1, 1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

77. $f(A_0) = A_{10}$, $f(A_4) = A_0$, $f(A_{20}) = A_{14}$, $f(A_{40}) = A_{38}$, $f(A_{48}) = A_{66}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{50}$ *ise dönme ekseni* $(-1, 1, 1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

78. $f(A_0) = A_4$, $f(A_4) = A_9$, $f(A_{20}) = A_{29}$, $f(A_{40}) = A_{44}$, $f(A_{48}) = A_{57}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{65}$ *ise dönme ekseni* $(-1, 1, 1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

79. $f(A_0) = A_9$, $f(A_4) = A_1$, $f(A_{20}) = A_{13}$, $f(A_{40}) = A_{37}$, $f(A_{48}) = A_{65}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{49}$ *ise dönme ekseni* $(1, -1, 1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

80. $f(A_0) = A_6$, $f(A_4) = A_8$, $f(A_{20}) = A_{32}$, $f(A_{40}) = A_{46}$, $f(A_{48}) = A_{60}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{68}$ *ise dönme ekseni* $(1, -1, 1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

81. $f(A_0) = A_8$, $f(A_4) = A_2$, $f(A_{20}) = A_{16}$, $f(A_{40}) = A_{36}$, $f(A_{48}) = A_{68}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{52}$ *ise dönme ekseni* $(1, 1, -1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

82. $f(A_0) = A_5$, $f(A_4) = A_{10}$, $f(A_{20}) = A_{30}$, $f(A_{40}) = A_{45}$, $f(A_{48}) = A_{58}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{66}$ *ise dönme ekseni*$(1, 1, -1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

83. $f(A_0) = A_{11}$, $f(A_4) = A_5$, $f(A_{20}) = A_{45}$, $f(A_{40}) = A_{31}$, $f(A_{48}) = A_{67}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{59}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

84. $f(A_0) = A_1$, $f(A_4) = A_9$, $f(A_{20}) = A_{65}$, $f(A_{40}) = A_{49}$, $f(A_{48}) = A_{13}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{37}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

85. $f(A_0) = A_9$, $f(A_4) = A_8$, $f(A_{20}) = A_{28}$, $f(A_{40}) = A_{29}$, $f(A_{48}) = A_{33}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{32}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

86. $f(A_0) = A_1$, $f(A_4) = A_5$, $f(A_{20}) = A_{59}$, $f(A_{40}) = A_{51}$, $f(A_{48}) = A_{41}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{23}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

87. $f(A_0) = A_2$, $f(A_4) = A_{10}$, $f(A_{20}) = A_{38}$, $f(A_{40}) = A_{18}$, $f(A_{48}) = A_{54}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{70}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

88. $f(A_0) = A_5$, $f(A_4) = A_{11}$, $f(A_{20}) = A_{67}$, $f(A_{40}) = A_{59}$, $f(A_{48}) = A_{45}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{31}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

89. $f(A_0) = A_4$, $f(A_4) = A_1$, $f(A_{20}) = A_{49}$, $f(A_{40}) = A_{57}$, $f(A_{48}) = A_{21}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{41}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

90. $f(A_0) = A_2$, $f(A_4) = A_0$, $f(A_{20}) = A_{12}$, $f(A_{40}) = A_{16}$, $f(A_{48}) = A_{18}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{14}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

91. $f(A_0) = A_6$, $f(A_4) = A_3$, $f(A_{20}) = A_{43}$, $f(A_{40}) = A_{25}$, $f(A_{48}) = A_{61}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{53}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

92. $f(A_0) = A_7$, $f(A_4) = A_6$, $f(A_{20}) = A_{25}$, $f(A_{40}) = A_{27}$, $f(A_{48}) = A_{26}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{24}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

93. $f(A_0) = A_{10}$, $f(A_4) = A_2$, $f(A_{20}) = A_{54}$, $f(A_{40}) = A_{70}$, $f(A_{48}) = A_{38}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{18}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{\sqrt{5}+-1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

94. $f(A_0) = A_8$, $f(A_4) = A_6$, $f(A_{20}) = A_{60}$, $f(A_{40}) = A_{68}$, $f(A_{48}) = A_{32}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{46}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

95. $f(A_0) = A_7$, $f(A_4) = A_{10}$, $f(A_{20}) = A_{70}$, $f(A_{40}) = A_{62}$, $f(A_{48}) = A_{47}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{34}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$*e olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

96. $f(A_0) = A_{10}$, $f(A_4) = A_5$, $f(A_{20}) = A_{58}$, $f(A_{40}) = A_{66}$, $f(A_{48}) = A_{30}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{45}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

97. $f(A_0) = A_5$, $f(A_4) = A_1$, $f(A_{20}) = A_{41}$, $f(A_{40}) = A_{23}$, $f(A_{48}) = A_{59}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{51}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

98. $f(A_0) = A_1$, $f(A_4) = A_3$, $f(A_{20}) = A_{17}$, $f(A_{40}) = A_{13}$, $f(A_{48}) = A_{15}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{19}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmk üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

99. $f(A_0) = A_6$, $f(A_4) = A_2$, $f(A_{20}) = A_{52}$, $f(A_{40}) = A_{60}$, $f(A_{48}) = A_{24}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{42}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

100. $f(A_0) = A_8$, $f(A_4) = A_0$, $f(A_{20}) = A_{48}$, $f(A_{40}) = A_{64}$, $f(A_{48}) = A_{36}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{12}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

101. $f(A_0) = A_4$, $f(A_4) = A_5$, $f(A_{20}) = A_{23}$, $f(A_{40}) = A_{21}$, $f(A_{48}) = A_{20}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{22}$ *ise dönme ekseni*$(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

102. $f(A_0) = A_1$, $f(A_4) = A_{11}$, $f(A_{20}) = A_{39}$, $f(A_{40}) = A_{15}$, $f(A_{48}) = A_{51}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{67}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

103. $f(A_0) = A_3$, $f(A_4) = A_{11}$, $f(A_{20}) = A_{71}$, $f(A_{40}) = A_{55}$, $f(A_{48}) = A_{19}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{39}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

104. $f(A_0) = A_3$, $f(A_4) = A_1$, $f(A_{20}) = A_{15}$, $f(A_{40}) = A_{19}$, $f(A_{48}) = A_{17}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{13}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

105. $f(A_0) = A_3$, $f(A_4) = A_9$, $f(A_{20}) = A_{37}$, $f(A_{40}) = A_{17}$, $f(A_{48}) = A_{53}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{69}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

106. $f(A_0) = A_3$, $f(A_4) = A_6$, $f(A_{20}) = A_{61}$, $f(A_{40}) = A_{53}$, $f(A_{48}) = A_{43}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{25}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

107. $f(A_0) = A_9$, $f(A_4) = A_6$, $f(A_{20}) = A_{46}$, $f(A_{40}) = A_{33}$, $f(A_{48}) = A_{69}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{61}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

108. $f(A_0) = A_4$, $f(A_4) = A_8$, $f(A_{20}) = A_{64}$, $f(A_{40}) = A_{56}$, $f(A_{48}) = A_{44}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{28}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

109. $f(A_0) = A_5$, $f(A_4) = A_0$, $f(A_{20}) = A_{50}$, $f(A_{40}) = A_{58}$, $f(A_{48}) = A_{22}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{40}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

110. $f(A_0) = A_{11}$, $f(A_4) = A_{10}$, $f(A_{20}) = A_{37}$, $f(A_{40}) = A_{35}$, $f(A_{48}) = A_{31}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{30}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

111. $f(A_0) = A_6$, $f(A_4) = A_7$, $f(A_{20}) = A_{26}$, $f(A_{40}) = A_{24}$, $f(A_{48}) = A_{25}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{27}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

112. $f(A_0) = A_2$, $f(A_4) = A_7$, $f(A_{20}) = A_{62}$, $f(A_{40}) = A_{54}$, $f(A_{48}) = A_{42}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{26}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

113. $f(A_0) = A_{10}$, $f(A_4) = A_7$, $f(A_{20}) = A_{47}$, $f(A_{40}) = A_{34}$, $f(A_{48}) = A_{70}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{62}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

114. $f(A_0) = A_{11}$, $f(A_4) = A_7$, $f(A_{20}) = A_{63}$, $f(A_{40}) = A_{71}$, $f(A_{48}) = A_{35}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{47}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

115. $f(A_0) = A_9$, $f(A_4) = A_3$, $f(A_{20}) = A_{53}$, $f(A_{40}) = A_{69}$, $f(A_{48}) = A_{37}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{17}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

116. $f(A_0) = A_8$, $f(A_4) = A_9$, $f(A_{20}) = A_{33}$, $f(A_{40}) = A_{32}$, $f(A_{48}) = A_{28}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{29}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

117. $f(A_0) = A_2$, $f(A_4) = A_8$, $f(A_{20}) = A_{68}$, $f(A_{40}) = A_{52}$, $f(A_{48}) = A_{16}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{36}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

118. $f(A_0) = A_7$, $f(A_4) = A_2$, $f(A_{20}) = A_{42}$, $f(A_{40}) = A_{26}$, $f(A_{48}) = A_{62}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{54}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

119. $f(A_0) = A_0$, $f(A_4) = A_4$, $f(A_{20}) = A_{20}$, $f(A_{40}) = A_{40}$, $f(A_{48}) = A_{48}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{56}$ *ise* f *birim dönüşümdür.*

120. $f(A_0) = A_3$, $f(A_4) = A_7$, $f(A_{20}) = A_{27}$, $f(A_{40}) = A_{43}$, $f(A_{48}) = A_{55}$ *ve* $f(A_{56}) = A_{63}$ *ise* f *inversiyondur.*

Buna göre orijini koruyan f *izometrisi* $G(D)$ *nin bir elemanıdır. Bir başka deyişle deltoiadl hexacontahedron uzaklığını koruyan Öklidyen izometriler dışında bir izometri yoktur.*

Teorem 7.1 $f : \mathbb{R}^3_{CI} \to \mathbb{R}^3_{CI}$ *dönüşümü bir izometri olsun.* $f = T_A \circ g$ *olacak şekilde bir tek* $T_A \in T(3)$ *ve* $g \in G(CI)$ *vardır.*

İspat *$A = (a_1, a_2, a_3)$ olmak üzere $f(O) = A$ olsun. Bu taktirde $g = T_{-A} \circ f$ olacak şekilde tanımlı g dönü şümü bir izometridir ve $g(O) = O$ olur. Böylece önerme 7.9 dan dolayı $g \in G(CI)$ ve $f = T_A \circ g$ olur. İspatın tekliği aşikardır.*

Buna göre chamfered icosahedron metriği ile donatılmış analitik 3-uzayın izometrilerinin grubu chamfered icosahedronun (Öklidyen) simetri grubu olan I_h ile 3-boyutlu analitik uzayın tüm ötelemelerinin grubu olan $T(3)$ ün yarı-direkt çarpımıdır. Yani $\mathbb{R}^3_{CI}$ nın tüm izometrilerinin kümesi $T(3).G(CI)$ dır.

8. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölüme kadar, $\mathbb{R}^3$ te chamfered cisimler olarak adlandırdığımız çokyüzlülerden bahsederek, bu cisimlerin matematiksel yapısını, çeşitli bilim dallarındaki rolleri ve geçmişten günümüze kullanım alanları ve uygulamalarından bahsedilmiştir. Böylece de $\mathbb{R}^3$ te chamfered çokyüzlüler hakkında detaylı bir inceleme yapılmıştır.

Daha önce yapılan metrik geometri çalışmaları incelendiğinde, maksimum ve taksi metriklerine göre birim kürelerin sırasıyla düzgün altı yüzlü ve sekiz yüzlü olduğu görülmektedir. Ayrıca bazı Arşimed ve Katalan cisimleri içinde bu cisimleri küre alan metrikler ve bu metrikler yardımıyla metrik uzayların oluşturulduğu görülmüştür. Bu çalışmada da varlıkları bilinen ancak nasıl bir yapıda oldukları bilinmeyen daha önce de tanımlanmamış birim küreleri chamfered küp, chamfered octahedron, chamfered dodecahedron ve chamfered icosahedron olan metrikler bulunmuştur. Sahip oldukları simetri özelliğinden dolayı chamfered cisimler, matematiksel olarak ilgi görmesinin yanında, diğer bilim dalları içinde ilgi odağı olmuştur. Bu tezle, bulunan metriklerin kartezyen formları sayesinde chamfered cisimler üzerinde, matematiksel ve diğer bilim dalları açısından daha kolay bir şekilde çalışılması öngörülmektedir.

Son olarak da bulunan bu metrikle döşenmiş analitik 3-uzayının izometri gruplarının ilgili uzayın birim küresi olan chamfered cismin Öklidyen Simetri grubu ile Öklidyen tüm ötelemelerin grubu olan $T(3)$ ün yarı direkt çarpımı olduğu gösterilmiştir.

9. SONUÇ VE ÖNERİLER

Sonuç olarak bu tezde tetrahedron (dörtyüzlü) hariç diğer Platonik cisimlere chamfer işlemi uygularak elde edilen chafered küp, chamfered octahedron, chamfered dodecahedron ve chamfered icosahedron cisimlerini küre olarak veren metrikler ilk kez verilmiştir.
Sonrasında bu metrikler ile döşenmiş 3-boyutlu analitik uzayın yani ilgili metrik uzayın bazı özellikleri verilmiştir. Daha sonra geometrinin en önemli ve temel problemlerinden biri olan verilen bir metrik uzayın izometrilerinin bulunması problemi ele alınmıştır. Ele alınan bu problem sonucunda ilgili metrik uzayın izometri grubunun ele alınan metrik uzayın küresinin Öklidyen simetri grubu ile Öklidyen ötelemeler grubunun yarı-direkt çarpımı olduğu gösterilmiştir.

Özetlemek gerekirse, bu tezde beş Platonik cisimden dört tanesine chamfer işlemi kullanılarak elde edilen dört cismin metrikleri ve bu metriklerle donatılmış 3-boyutlu uzayın izometri grupları belirlenmiştir. Ancak diğer çokyüzlülerede chamfer işlemi uygulabilir. Dolayısıyla elde edilen diğer chamfered çokyüzlüler için sorular açık problemdir ve bu konuda çalışmalarımız devam etmektedir.
Ayrıca bu çokyüzlülerin kullanıldığı diğer bilim alanlarında burada elde edilen matematiksel altyapı kullanılabilir. Örneğin chamfered dodecahedrona dair bulgular bu cisimle ilgili olan fullurene C_{80} yapısında kullanılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Alexandrov, A. D., 2000, Convex Polyhedra, Springer, 7-16p.

Atiyah, M. ve Sutcliffe, P., 2003, Polyhedra in Physics, Chemistry and Geometry, Milan Journal of Mathematics, 71:33-58.

Bozkurt, G., 2016, $\mathbb{R}^3$ de "Öklidyen, Taksi ve Çin Dama Metrikleri Ayrdımıyla oluşan Metrikler" Üzerine, PhD Thesis, Eskişehir Osmangazi University.

Bulgarean, V., 2013, The Group Isodp(Rn) with p 6 =2, Automation Computers Applied Mathematics Scientific Journal, 22-1:69-74.

Can, Z., Çolak, Z., Gelişgen, Ö., 2015, A Note On The Metrics Induced By Triakis Icosahedron And Disdyakis Triacontahedron, Eurasian Academy of Sciences Eurasian Life Sciences Journal / Avrasya Fen Bilimleri Dergisi Vol.1, 1-11.

Catalan, Eugène, 1865, Memoriè sur la Thèorie des Polyèdres. J. I'Ecole Polytechnique, Paris, 41, 1-71.

Coxeter, H. S. M., 1961, Introduction to Geometry, John Wiley&Sons Inst., 443p.

Cromwell, Peter R., 1997, Polyhedra, Cambridege Universıty Press,1-7p.

Çolak, Z., Gelişgen, Ö., 2015, New Metrics for Deltoidal Hexacontahedron and Pentakis Dodecahedron, SAU Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, Vol.19, No.3, 353-360.

Çolakoğlu, H., B., 2009, Taksi, Maksimum, Çin Dama ve Alfa Düzlemlerinin Bazı Özellikleri ve Genelleştirilmesi, ESOGÜ , PhD Thesis.

Çolakoğlu, H., B. ve Kaya R., 2011, A generalization of some well-known distances and related isometries, Mathematical Communications, 16, 21-35.

Colakoğlu, H.B., Gelisgen, O. ve Kaya, R., 2013, Area formulas for triangle in alpha plane, Mathematical Communications, 18-1:123-132.

Erçınar, G.Z., 2015, Birim küresi Rhombic Dodecahedron Olan Metriğin Araştırılması, Master Thesis, Eskişehir Osmangazi University.

Ermiş, T., Gelisgen, O. ve Kaya, R., 2012, On Taxicab Incircle and Circumcircle of a Triangle, Scientific and Professional Journal of the Croatian Society for Geometry and Graphics (KoG), 16:3-12.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Ermiş, T., 2014, Düzgün Çokyüzlülerin Metrik Geometriler İle İlişkileri Üzerine , ESOGÜ , PhD Thesis.

Ermiş, T. ve Kaya, R., On the Isometries of 3-Dimensional Maximum Space, Konuralp Journal Of Mathematics, Vol.3, No.1, pp.103-114, 2015.

Field, J.V., 1997, Rediscovering the Archimedean Polyhedra: Piero della Francesca,Luca Pacioli, Leonardo da Vinci, Albrecht Dürer, Daniele Barbaro, and Johannes Kepler, Archive for History of Exact Sciences, 18. VI. 1997, Volume 50,Issue 3-4, pp 241-289)

Gelişgen,Ö., Kaya,R. ve Özcan,M., 2006, Distance Formulae in the Chinese Checker Space, International Journal of Pure and Applied Mathematical (IJPAM), 26, 1, 35-44.

Gelişgen, Ö. ve Kaya, R., 2006, On $\alpha-$Distance in Three Dimensional Space, Applied Sciences,8, 65-69.

Gelişgen, Ö., ve Kaya, R., 2015, The Isometry Group of Chinese Checker Space, International Electronic Journal of Geometry, Vol.8, No:2, 82-96.

Gelişgen Ö. , Kaya R., 2009, The Taxicab Space Group, Acta Mathematica Hungarica, Acta Mathematica Hungarica, Vol. 122, No.1 - 2, 187 - 200.

Gelişgen Ö., Çolak Z., 2015, A Family of Metrics for Some Polyhedra, Automation Computers Applied Mathematics Scientific Journal, Vol.24, No.1, 3-1.

Kaya, R., 2002, Analitik Geometri, Bilim ve Teknik Yayınevi, 439p.

Kaya, R., Gelişgen, Ö., Ekmekçi, S. ve Bayar, A., Group of Isometries of the CC-Plane, Missouri Journal of Mathematical Sciences, 01/2006, 18(3):221-233.

Kaya, R., Gelişgen, Ö., Ekmekçi, S. ve Bayar, A., On the Group of Isometries of the Plane with Generalized Absolute Value Metric, Rocky Mountain Journal of Mathematics, Volume 39, Number 2, 2009.

Koca, M., Koca N. ve Koç, R., 2010, Catalan solids derived from three-dimensional-root systems and quarternions, Journal of Mathematical Physics, 51:043501.

Milmann, R. S. ve Parker, G. D., 1991, Geometry a Metric Approach with Models, Springer, 370p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Martin, G. E. , Transformation Geometry, Springer-Verlag, 1997.

Martin, G. E., 1998, The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane, Springer, 509p.

Milmann, R. S. and Parker, G. D., 1991, Geometry a Metric Approach with Models, Springer, 370p.

Minkowski, H., 1967, Gesammelte Abhandlungen, Chelsa Publishing Co. New York, 836p.

Minkowski, H., 1896 sur les proprie'te's des nombers entiers qui sont de'rive'es de I'ntuition de I'espace, Nouvelles Annales de Mathe 'matiques, 3e Se'rie 15 (1896); aso in: Gesammelte Abhandlungen 1, Band XII, pp. 271:277.

Riemann, B., 1868, U" ber die Hypothensen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, Abh. ko¨nigl. Ges. Wiss. Go¨ttingen 13.

Salihova, S. , Maksimum Metrik Geometri Üzerine , ESOGÜ, PhD Thesis, 2006.

Schattschneider, D. J., 1984, The Taxicab Group, Amer. Math. Monthly 91, 423-428.

Schein, S ve Gayed J. M. , Feb. 25, 2014, Fourth Class Of Convex Equilateral Polyhedron With Polyhedral Symmetry Related To Fullerenes And Viruses , Proceeding Of The National Academy Of The Sciences Of The United States Of America , Vol. 111, No. 8, 2923

Stanley J. Schein, James Maurice Gayed, 2014, Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. 185 No. 6.

Thompson, A. C., 1996, Minkowski Geometry, Cambridge University Press, 346p

http://anlamak.com/eski/anasayfa

http://anlamak.com/platon'un-beş-katı-cismi.html

https://en.wikipedia.org/wiki/Chamfer(geometry)