# Çembersel İnversiyonlar ve Fraktallar Üzerine

Seyit Ali Aydın

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Ocak 2023

# On Circular Inversions and Fractals

Seyit Ali Aydın

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics-Computer

January 2023

# Çembersel İnversiyonlar ve Fraktallar Üzerine

Seyit Ali Aydın

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak hazırlanmıştır.

Danışman: Prof. Dr. Ayşe BAYAR

Ocak 2023

## ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Ayşe Bayar danışmanlığında hazırlamış olduğum "**Çembersel İnversiyonlar ve Fraktallar Üzerine**" başlıklı YÜKSEK LİSANS tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 05.01.2023

Seyit Ali Aydın

# ÖZET

Bu tez çalışmasında taksi çemberine göre inversiyon dönüşümü altında doğruların ve taksi çemberlerin inversleri analitik olarak incelenerek sınıflandırılmıştır. Ayrıca $p-$ çember inversiyonu ve $p-$ çember fraktal örnekleri çalışılmıştır.

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde tezin giriş ve amacı bulunmaktadır. İkinci bölümünde tezin konusu ile ilgili literatür araştırmasına yer verilmiştir. Üçüncü bölümde taksi düzlem geometrisindeki temel tanım ve kavramlar sunulmuştur. Tezin dördüncü bölümünde taksi düzlemde, taksi çemberine göre inversiyon dönüşümü altında doğruların, tezin beşinci bölümünde ise taksi çemberlerinin inversleri analitik olarak incelenmiş ve sınıflandırılmıştır. Tezin altıncı bölümünde $p-$ çember inversiyonları incelenerek $p-$ çember fraktal örnekleri sunulmuştur. Son bölümünde ise çalışmanın sonuç ve önerilerine yer verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:**
İnversiyon, Taksi Çember İnversiyonu, Taksi Uzaklık, p-çember inversiyon, Fraktal

# SUMMARY

In this thesis, the inverses of the lines and of the taxicab circles under the inversion transformation with respect to the taxicab circle has been analyzed and classified analytically. In addition, $p$ −circle inversion and $p$ −circle fractal examples are studied.

This thesis consists of seven chapters. The first chapter contains the introduction and purpose of the thesis. In the second part, the literature research on the subject of the thesis is given. In the third chapter, basic definitions and concepts in the taxicab plane geometry are presented. In the fourth part of the thesis, the inverses of the lines under the inversion transformation with respect to the taxicab circle in the taxicab plane, and in the fifth part of the thesis, the inverses of the taxicab circles are analyzed and classified analytically. In the sixth chapter of the thesis, $p$ −circle fractal examples are presented by examining $p$ −circle inversions. In the last part, the conclusions and recommendations of the study are given.

**Keywords:**
Inversion, Taxicab Circle Inversion, Taxicab Distance, Taxicab Plane, Fractal, Sierpinski

# İÇİNDEKİLER

**Sayfa**

**ÖZET** ..... **vi**

**SUMMARY** ..... **vii**

**TEŞEKKÜR** ..... **viii**

**İÇİNDEKİLER** ..... **ix**

**ŞEKİLLER DİZİNİ** ..... **xi**

**1.GİRİŞ VE AMAÇ** ..... **1**

**2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI** ..... **3**

**3. TEMEL KAVRAMLAR** ..... **6**

**4. DOĞRULARIN TAKSİ İNVERSİYON ALTINDA İNVERSLERİ** ..... **11**

4.1. Yatay Doğruların İnversiyonları ..... 15

4.1.1. Merkezil birim inversiyon çemberine göre $\mathbf{y = k}$ tipindeki doğruların inversleri ..... 23

4.1.2. Merkezi $(\boldsymbol{m, n})$ yarıçapı $\mathbf{r}$ olan çembere göre $\boldsymbol{y = k}$ tipindeki doğruların inversleri ..... 25

4.1.3. Yatay paralel doğru demetinin inversiyonu ..... 30

4.2. Dikey Doğruların Taksi İnversleri ..... 31

4.2.1. Merkezil inversiyon çemberine göre $\mathbf{y = k}$ tipindeki doğruların inversleri ..... 37

4.2.2. Merkezi $(\boldsymbol{m, n})$ yarıçapı $\mathbf{r}$ olan çembere göre $\boldsymbol{x = k}$ tipindeki doğruların inversleri ..... 40

4.2.3. Dikey paralel doğru demetinin taksi inversi ..... 42

4.3. Dikeysel ve Yataysal Doğruların İnversleri ..... 43

4.4. Ayraç Doğruların Taksi İnversleri ..... 55

4.4.1. İnversiyon çemberinin kenar doğrularının taksi inversleri ..... 55

4.4.2. İnversiyon çemberinin kenarına paralel doğrularının taksi inversleri ..... 59

4.5. İnversiyon Çemberinin Ayırdığı Bölgelere Göre Doğru Parçalarının İnversleri ..... 61

**5. TAKSİ ÇEMBERLERİN TAKSİ ÇEMBER İNVERSİYONUNA GÖRE İNVERSLERİ** ..... **63**

5.1 Taksi İnversiyon Çemberinin Sadece Bir Bölgesindeki Taksi Çemberlerin İnversiyonu ..... 63

5.2 Taksi İnversiyon Çemberinin İki Bölgesinde Yer Alan Taksi Çemberlerin İnversiyonu ..... 65

5.2.1. İki kenarı inversiyon merkezinden geçen ayraç doğruları üzerinde olan taksi çemberin inversi .. 66

5.2.2. Merkezi inversiyon çemberinin eksenleri üzerinde olan ve köşeleri inversiyon merkezi olmayan taksi çemberlerin inversiyonu ..... 67

# İÇİNDEKİLER

**Sayfa**

5.2.3. Merkezi inversiyon çemberinin eksenleri ve merkezden geçen ayraç doğrular üzerinde olmayan taksi çemberlerin inversiyonu ..... 68

5.3. Üç Bölgeden Geçen Taksi Çemberlerin İnversiyonu ..... 69

5.3.1. Bir kenarı inversiyon çemberi merkezinden geçen çemberlerin inversleri ..... 69

5.3.2. Herhangi bir kenarı inversiyon çemberi merkezinden geçmeyen çemberlerin inversleri ..... **70**

5.4. İnversiyon Çemberinin Dört Bölgesinden Geçen Taksi Çemberlerin İnversleri ..... 71

5.4.1. İnversiyon çemberi ile aynı merkezli taksi çemberin inversi ..... 71

5.4.2. İnversiyon çemberi ile aynı merkezli olmayan taksi çemberin inversi ..... 72

**6. TAKSİ ÇEMBER İNVERSİYONU ve FRAKTALLAR ..... 74**

6.1. **p** −Çember İnversiyonu ..... 75

6.2 Bazı Eğrilerin $\boldsymbol{p}-$ İnversiyonu ..... 80

6.3 p-Çember İnversiyonundan Elde Edilen Bazı Fraktal Modeller ..... 84

**7. SONUÇ VE ÖNERİLER ..... 90**

**KAYNAKLAR DİZİNİ ..... 92**

# ŞEKİLLER DİZİNİ

**Şekil** **Sayfa**

3.1 Öklidyen düzlemde iki nokta arasındaki uzaklık ..... 7
3.2 Taksi Düzleminde İki Nokta Arasındaki Taksi Uzaklık ..... 7
3.3 Orijin merkezli r yarıçaplı taksi çemberi ..... 8
3.4 Taksi düzleminde merkezden geçen doğruların sınıflandırılması ..... 9
4.1 $y = -x$ doğrusunun inversiyonu ..... 12
4.2 İki boyutlu kartezyen koordinat düzlemi ..... 13
4.3 Öklidyen düzlemde $y = -x + 1$ doğrusunun birim çembere göre inversi ..... 14
4.4 $x + y = 1$ doğrusunun inversi ..... 15
4.5 $y = -1$ doğrusunun inversi ($x < 0$ , $y < 0$ iken) ..... 18
4.6 $y = -1$ doğrusunun inversi ($x > 0$ , $y < 0$ iken) ..... 19
4.7 $y = -1$ doğrusunun inversi ..... 20
4.8 $y = 1$ doğrusunun inversi ($x > 0$ $ve$ $y > 0$ $iken$) ..... 21
4.9 $y = 1$ doğrusunun inversi ($x < 0$ ve $y > 0$ iken) ..... 22
4.10 $y = 1$ doğrusunun inversi ..... 23
4. 11 (2,4) merkezli 4 yarıçaplı taksi çemberine göre y=6 doğrusunun taksi inversi ..... 30
4.12 $y = -c$ tipindeki doğruların oluşturduğu demetin görüntüsü ..... 30
4.13 $x = -1$ doğrusunun inversi ($x < 0$ ve $y < 0$ iken) ..... 32
4.14 $x = -1$ doğrusunun inversi ($x < 0$ ve $y > 0$ iken) ..... 33
4.15 $x = -1$ doğrusunun inversi ..... 34
4.16 $x = 1$ doğrusunun inversi ($x > 0$ , $y > 0$ iken) ..... 35
4.17 $x = 1$ doğrusunun inversi ($x > 0$ , $y < 0$ iken) ..... 36
4.18 $x = 1$ doğrusunun inversi ..... 37
4.19 $x = -c$ tipindeki doğru demetinin inversinin görüntüleri ..... 43
4.20 $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ yataysal doğrusunun inversi ..... 53
4.21 $x + y = 1$ doğrusunun inversiyonu ..... 56
4.22 – $x - y = 1$ doğrusunun inversiyonu ..... 57
4.23 – $x + y = 1$ doğrusunun inversiyonu ..... 58
4.24 İnversiyon çemberi kenarlarını oluşturan doğruların inversiyonu ..... 59
4.25 $x + y = 2$ doğrusunun inversiyonu ..... 60
4.26 $y = -x + \frac{1}{2} (0 < x < \infty$ ve $0 < y < \infty)$ doğru parçasının birim inversi ..... 62
4. 27 $y = x + \frac{1}{2} (0 < x < \infty$ ve $0 < y < \infty)$ doğru parçasının birim inversi ..... 62
5.1 $|x - \frac{3}{4}| + |y - 1| = \frac{1}{2}$ taksi çemberinin birim taksi çembersel inversiyonu ..... 64

## ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

**Şekil** **Sayfa**

5.2 $|x-\frac{1}{2}|+|y-\frac{1}{4}|=\frac{1}{4}$ çemberinin birim taksi çemberi altındaki inversiyonu ..... 65
5.3 $|x-1|+|y|=1$ çemberinin birim taksi çemberi altındaki inversiyonu..... 67
5.4 $|x-1|+|y|=\frac{1}{2}$ çemberinin birim taksi çemberi altındaki inversiyonu ..... 67
5.5 $|x-1|+|y-\frac{1}{4}|=\frac{1}{2}$ çemberinin birim taksi çemberi altındaki inversiyonu ..... 68
5. 6 $|x-\frac{3}{4}|+|y-\frac{3}{4}|=\frac{3}{2}$ çemberinin birim taksi çemberi altındaki inversiyonu ..... 70
5. 7 $|x-\frac{1}{2}|+|y-\frac{5}{4}|=\frac{3}{2}$ çemberinin birim taksi çemberi altındaki inversiyonu ..... 71
5.8 $|x|+|y|=\frac{1}{2}$ çemberinin birim taksi çemberi altındaki inversiyonu..... 72
5.9 $|x-\frac{1}{2}|+|y+\frac{1}{2}|=1$ çemberinin birim taksi çemberi altındaki inversiyonu..... 73
6.1 p −birim çemberlerinin grafikleri (p=1, 2, 3 ve 100)..... 76
6.2 de sırasıyla p nin $1, 2$ ve 3 değerleri için alınan bir nokta ve $p-$ çember inversi görülmektedir. ..... 77
6.3 Noktanın p- çemberler altındaki inversi ($p=1,2$ ve 3)..... 78
6.4 Öklidyen çemberin inversi (p=2,3 için) ..... 78
6.5 $\frac{1}{2}$ yarıçaplı (1,0) merkezli p-çemberlerin $p-1,2$ ve 3-inversiyonu..... 80
6.6 p=1,2 ve 3 için yarıçapı $\frac{1}{2}$ olan ve merkezil p −çemberlerinin inversiyonları ..... 81
6.7 p = 1, 2,3 ve 100 için $x=\frac{1}{3}y^2-1$ parabolünün p-çember inversiyonları..... 82
6.8 p = 1, 2,3 ve 100 için $y=x^2+\frac{1}{2}$ parabolünün p-çember inversiyonu..... 83
6.9 $p=1,2,3$ ve 100 için bir hiperbolün $p-$inversiyonu..... 84
6.10 Sierpinski üçgenin 2-çember inversiyonu (Ramirez, 2015)..... 87
6. 11 Koch Eğrisinin 1-çember inversiyonu (Ramirez, 2015)..... 88
6. 12 Hilbert Eğrisinin 2-çember inversiyonu (Ramirez, 2015) ..... 89
6. 13 Hilbert Eğrisinin 100-çember inversiyonu (Ramirez, 2015)..... 89

# 1. GİRİŞ VE AMAÇ

Çemberin inversiyonu, düzlemdeki en ilginç dönüşümlerden biridir. Pergalı Apollonius tarafından son kitabı Plane Loci'de tanıtılmış ve 1830'larda Steiner tarafından sistematik olarak uygulanmıştır. Bu dönüşüm kullanılarak geometrideki çeşitli teoremler ve problemler incelenmektedir. Pappus zinciri, Miquel teoremi, Feuerbach teoremi, Ptolemy teoremi, Steiner porizmi, Apollonius çemberi bunlara örnektir.

İyi biliniyor ki Öklidyen düzlemde çembere göre inversiyon açıları korur ve genel olarak doğruları doğrulara veya çemberlere, çemberleri de doğrulara veya çemberlere dönüştürürler. Bu dönüşüm altında bir doğrunun çembere dönüşmesi dairesel inversiyonun en temel özelliklerinden biridir.

İnversiyon teorisi zaman içinde çok büyük gelişmeler kaydetmiştir. Geometrideki birçok zorlu problem, inversiyonlarla daha kolay çözülebilir hale gelmektedir. Litaratürde son zamanlarda çembere göre inversiyonlarla fraktal desenler oluşturulma yöntemlerine rastlanmaktadır. Frame ve Cogevina, çember inversiyon fraktalları adı verilen bir yöntemi tanıtmışlardır. Bundan farklı yöntemi Zhang çalışmış ve bu yöntemi küresel inversiyonlara He Leys genelleştirmiştir (Ramirez vd., 2015).

Günümüzde gelişen teknoloji ile makine öğrenme modellerinde iki veri arasındaki uzaklığı ölçmede Öklidyen olmayan metrikler önemli bir yere sahiptir. Bugün Minkowski düzlemlerindeki uzaklıklar farklı bilim dallarında yer almaktadır. Örneğin, Amerika'daki New York şehri, Manhattan bölgesi taksi metriğine uygun yapılan bir şehir planlamasına sahiptir.

Farklı metrik düzlemlerindeki inversiyonların tanımlanması ve incelenmesi bilimin farklı alanlarındaki uygulama alanı oluşturmaktadır (Bayar ve Ekmekçi, 2014; Pekzorlu, 2019; Pekzorlu ve Bayar, 2020 a, 2020b, 2022; Cırık, 2022; Ramirez vd., 2015).

Bu çalışmada Taksi düzlemde sırasıyla Taksi çemberine göre inversiyon dönüşümü altında doğruların ve taksi çemberlerin inverslerinin analitik olarak incelenmesi ile elde

edilen sonuçların sistematik biçimde sunulması amaçlanmıştır. L.Ramirez, G. Rubiano ve B. J. Zlobec tarafından verilen p-çember inversiyonları ve p–çember fraktalları incelenerek farklı fraktal modeller ve inversiyonlar arasındaki ilişkinin görülmesi hedeflenmiştir.

# 2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

19. yüzyıldan itibaren matematikçiler, noktalar arasındaki mesafeyi ölçmek için farklı yollara dayanan, farklı geometrileri keşfetmeye başladılar. Hermann Minkowski (1864-1909) Öklid geometrisindeki uzaklık kavramını değiştirerek Taksi ve Öklidyen uzaklıkların bir genellemesi olan bir uzaklık ailesi tanımladı. 1952 yılında Avusturyalı matematikçi Karl Menger tarafından Chicago Bilim ve Endüstri Müzesi'nde açılan sergide, "Taxicab Geometri" terimi, ilk kez "Geometriyi Seveceksiniz" başlıklı bir kitapçıkta kullanmıştır (Menger, 1952).

1975'e yılına kadar, taksi metriğine dayanan geometri geliştirme çalışmaları yapılmamıştı, Eugene Krause'nin 1975'te yayınlanan "Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry" adlı kitabı, geometriye standart giriş niteliğindedir (Krause, 1975).

Taksi geometrisindeki modern araştırmalar ilk olarak 1980'lerin başında başladı. 1997 yılına kadar ciddi çalışmalar ortaya çıkmadı. Oregon Eyalet Üniversitesi'nden Kevin Thompson ve ayrıca Türkiye'den Rüstem Kaya'nın taksi açıları ve trigonometri üzerine neredeyse eşzamanlı, bağımsız çalışmasıyla başlamıştır. Thompson'ın araştırması 1996'da Tevian Dray ile lisansüstü okulda yapılmış ve 2000'de yayınlanmış, Kaya'nın araştırması 1997'de yayınlanmıştır. 1997'den 2010'a kadar Rüstem Kaya geometrinin en ciddi çalışmaları ortaya çıkarmıştır.

Akça (1995), "Taksi Trigonometri ve Uzay Taksi Geometrisinin Geliştirilmesi Üzerine" adlı doktora çalışmasının başında Taksi düzlemde kosinüs, sinüs, tanjant ve cotanjant fonksiyonlarını, toplam fark formülünü ayrıntılı bir şekilde incelemiştir. Çalışmanın devamında ise Uzay Taksi geometrisine giriş yapmış tanım teorem ve ispatlarını vermiştir. Bu çalışmanın sonunda ise n- boyutlu Taksi geometrisine giriş yapıp çalışmasını tamamlamıştır.

Ekmekçi (2001), "Taksi Çemberiyle İlgili Özellikler" adlı doktora çalışmasında Taksi çemberi ile ilgili temel kavramları verdikten sonra çalışmasının ikinci bölümünde Taksi çemberinde kiriş ve teğet kavramını ayrıntılı bir şekilde incelemiştir. Çalışmanın devamında ise bir üçgenin Taksi çemberlerini, Taksi çemberinin noktalarıyla belirtilmesini ve Taksi daire dilimin alanı ile Taksi yay uzunluğu arasındaki ilişkiyi verip çalışmasını tamamlamıştır.

Davis (2011), "Inversion in a Circle" adlı çalışmasında inversiyonun temel tanımını verdikten sonra sonsuzluk noktası, çemberlerin inversiyonu, geometrik yapılar incelemiştir. Ayrıca bu çalışmasında Ptolemy Teoremi, Miquel Teoremi, Peaucellier Bağlantısı, Steiner Porizmi, Pappus Arbelosu, Dört Çember Problemi, Descartes Teoremi gibi başlıkları incelemiş ve çalışmasını tamamlamıştır.

Ramirez (2014), "Inversions in an Ellipse" adlı çalışmasına elipse göre inversiyon tanımını vermiş ve bazı özelliklerini incelemiştir. Ayrıca çalışmasının son bölümünde Pappus zincirinin elipse göre incelemesi yapılmıştır.

Ramirez ve Gustavo (2014), "Elliptic Inversion Of Two-Dimensional Objects" adlı makalelerinde bir daireye göre klasik inversiyonu genelleştiren bir elipsteki inversiyonun temel özelliklerini hesaplamalı bir bakış açısıyla araştırmışlardır. Ayrıca yer alan konular, çdoğruların, dairelerin, elipslerin ve bazı parametrik eğrilerin eliptik inversidir.

Bayar ve Ekmekçi (2014), "On circular inversions in taxicab plane" çalışmalarında Taksi düzleminde inversiyon tanımı vermişler ve noktaların ve doğruların inversiyonlarını incelemişlerdir. Ayrıca çifte oran, harmonik eşlenik ve Taksi koniklerin inverslerini inceleyerek çalışmalarını tamamlamışlardır.

Sezgin (2014), "Öklidyen Düzlemde ve Taksi Düzlemde Evritim Üzerine" yüksek lisans tez çalışmasında öncelikle Öklidyen düzlemde evritim tanımını yapmış ve noktaların, doğruların, açıların ve çemberlerin evritimini incelemiştir. Tezin ilerleyen bölümünde taksi düzlemde evritimin tanımını yapmış ve taksi düzlemde noktaların, doğruların evritimini incelemiş ve tezini tamamlamıştır.

Ramirez vd. (2015), "Generatıng Fractal Patterns by Usıng p−cırcle Inversıon" makalesinde bir daireye göre klasik inversiyonu ($p = 2$) ve taksi inversiyonunu ($p = 1$) genelleştiren p−dairesel inversini tanıtmışlardır. Bazı temel özellikleri incelemiş ve bazı temel eğrilerin inversiyon görüntülerini de göstermişlerdir. Bu yeni dönüşümü diğerleri arasında Sierpinski üçgeni, Koch eğrisi, ejderha eğrisi, Fibonacci fraktalı gibi iyi bilinen fraktallara uygulamışlardır. Ayrıca, dairesel inversiyon çözüm fraktalı adı verilen yöntemi p−dairesel inversiyon çözüm aracı olarak genelleştirmişlerdir.

Pekzorlu (2019), "Bazı Öklidyen Olmayan Geometrilerde İnversiyonlar Üzerine" başlıklı tez çalışmasında Çin Dama düzleminde çembere göre inversiyonu tanımlayarak özellikleri incelemiştir. Daha sonra 3-boyutlu taksicap uzayında küresel inversiyon tanımını yapmış ve Çin Dama uzayında küresel inversiyonları tanımlayarak, özelliklerini vermiştir.

Pekzorlu ve Bayar (2020), "On the Spherical taxicab inversion" adlı çalışmalarında üç boyutlu taksi uzayında bir taksi küresine göre inversiyonu tanımlamışlar ve bu inversiyonun özelliklerini ispatlamışlardır. Daha sonra üç boyutlu taksi uzayında çifte oran, harmonik eşlenikler ve doğruların, düzlemlerin ve taksi kürelerinin inversiyon görüntülerini inceleyip çalışmalarını tamamlamışlardır.

Pekzorlu ve Bayar (2020), "On The Chinese Checkers Spherical Inversions In Three Dimensional Chinese Checker Space" adlı çalışmada 3-boyutlu Çin Dama uzayında Çin Dama küresine göre inversiyonları ve bu inversiyon altında harmonik eşlenik, çifte oranların özelliklerini incelediler. Yine, Pekzorlu ve Bayar (2022) "On The Chinese Checkers Circular Inversions In Three Dimensional Chinese Checker Plane" adlı çalışmalarında Çin Dama düzleminde Çin Dama çemberine göre inversiyonlarını ve özelliklerini incelediler.

Cırık (2022), "Maksimum Metrik ile Donatılmış Düzlemde ve Uzayda İnversiyonlar" adlı yüksek lisans tez çalışmasında maksimum düzlemde çembere göre inversiyonların tanım, teorem ve sonuçlarını vererek incelemiştir. Cırık ve Ekmekçi (2022) de üç boyutlu maksimum uzayında maksimum küresel inversiyonların tanım, teorem ve sonuçlarını vermişlerdir.

# 3. TEMEL KAVRAMLAR

Taksi Geometri, iki nokta arasındaki uzaklığı, yatay ve dikey çizgilerin uzunlukları ile ölçen Öklid dışı bir geometridir. $\mathbb{R}^n$, n – boyutlu bir Öklidyen uzay olmak üzere $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ve $Y = (y_1, y, \ldots, y_n)$ gibi iki nokta arasındaki mesafe

$$d_E(X,Y) = \|X - Y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

ve Minkowski uzaklığı da $p \geq 1$olmak üzere herhangi p tamsayıları için

$$d_M(X,Y) = \|X - Y\|_p = \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

şekilde tanımlanır. Minkowski metrik $p = 2$ iken Öklidyen metriği ve p=1 için taksi metriğini verir. Taksi metriği ($\mathcal{L}^1 -$ norm) dır. Literatürde taksi uzaklık yerine şehir bloğu mesafesi, Manhattan mesafesi, yılan mesafesi gibi ifadelerde kullanılmaktadır. Taksi geometri bir Öklidyen olmayan geometridir. Noktalar ve doğrular, Öklidyen uzayın noktaları ve doğruları, açılarda Öklidyen uzayın açı ölçümüdür. Sadece uzaklık fonksiyonu farklıdır.

**Tanım 3.1.** Kartezyen düzlem $\mathbb{R}^2$ deki $X = (x_1, y_1)$ ve $Y = (x_2, y_2)$ noktaları arasındaki taksi uzaklık H. Minkowski tarafından tanımlanan $d_T$ taksi uzaklık fonksiyonu

$$d_T: \mathbb{R}^2 x \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$$

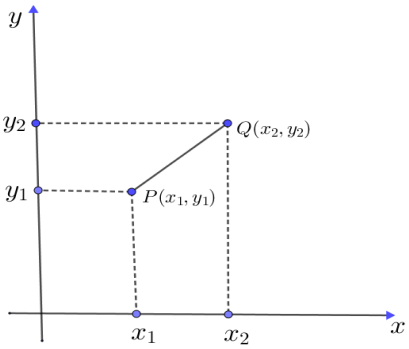
$$d_T(P,Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

şeklinde ifade edilmiştir. $\mathbb{R}_T^2$'deki birim çember, düzlemde $|x| + |y| = 1$ denklemini sağlayan $(x, y)$ noktaları kümesidir (Minkowski,1967).

Analitik düzlemde herhangi bir $P = (x_1, y_1)$ ve bir $Q = (x_2, y_2)$ noktaları arasındaki Öklidyen uzaklık için

$$d_E(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

şeklinde tanımlanmış idi (Şekil 3.1).



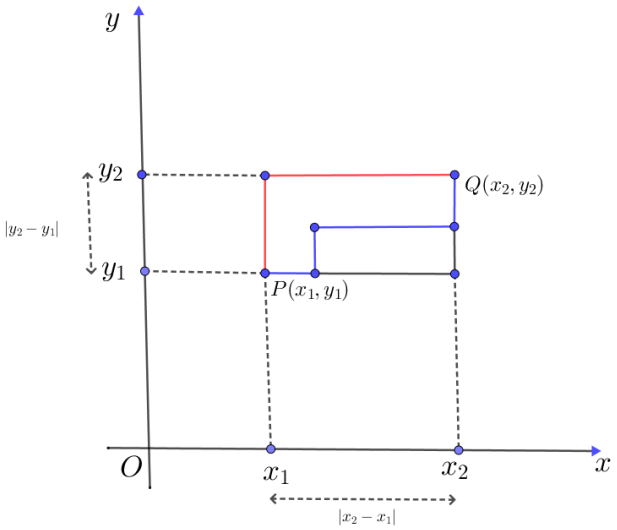

Şekil 3.1 Öklidyen düzlemde iki nokta arasındaki uzaklık

H. Minkowski tarafından tanımlanan $d_T$ taksi uzaklık fonksiyonu

$$d_T: \mathbb{R}^2 x \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$$

$$d_T(P, Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

şeklinde ifade edilmiştir. K. Menger ve E.F. Krause uzaklık fonksiyonunu kullanarak Taksi Geometriyi geliştirmişlerdir (Şekil 3.2), (Krause, 1975).




Şekil 3.2 Taksi düzleminde iki nokta arasındaki taksi uzaklık

Analitik düzlemde $d_T$ taksi uzaklık fonksiyonu bir metrik belirtir. $P = (x_1, y_1)$ ve $Q = (x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğruların eğimi m ise $d_E$ ve $d_T$ arasında

$$d_T(P,Q) = \frac{1+|m|}{\sqrt{1+m^2}} d_E(P,Q)$$

eşitliği vardır (Kaya, 2006).

$\mathrm{m} = \frac{\mathrm{y_2}-\mathrm{y_1}}{\mathrm{x_2}-\mathrm{x_1}}$ olduğundan burada eğer $\mathrm{x_1} = \mathrm{x_2}$ veya $\mathrm{y_1} = \mathrm{y_2}$ ise $\mathrm{d_T(P,Q)} = \mathrm{d_E(P,Q)}$ olduğu açıktır. Ayrıca $\mathrm{m} = 1$ veya $\mathrm{m} = -1$ için de Öklidyen ve Taksi uzaklıklar birbirine eşittir.

**Sonuç 3.4.** $A, B, X$, $\mathbb{R}^2$' deki birbirinden farklı eşdoğrusal noktalar ise, o zaman

$$\frac{d_T(X,A)}{d_T(X,B)} = \frac{d_E(X,A)}{d_E(X,B)}$$

dir. Yani, bir doğru boyunca Öklid ve $\mathrm{d_T}$ −mesafelerinin oranları aynıdır (Kaya, 2006).

**Tanım 3.2. (Taksi Çemberi)** Taksi düzleminde, sabit bir noktaya eşit taksi uzaklığındaki noktaların oluşturduğu geometrik yere *taksi çemberi* denir. Taksi düzleminde çemberin seçilen sabit nokta $O$ taksi çemberinin merkezini, sabit uzaklık $r$ ise taksi çemberinin yarıçapını ifade eder.

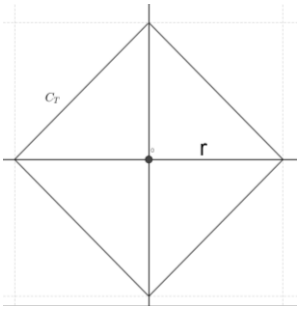
Merkezi $M = (m_1, m_2)$ ve yarıçapı $r \in \mathbb{R}$ ve $r > 0$ olan taksi çemberi

$$C_T = \{P |\, d_T\ (P,M) = r, r > 0\} = \{(x,y) |\, |x - m_1| + |y - m_2| = r, r > 0, r \in \mathbb{R}\}$$

şeklinde tanımlanır. Özel olarak merkez orijin olan r yarıçaplı

$$|x| + |y| = r$$

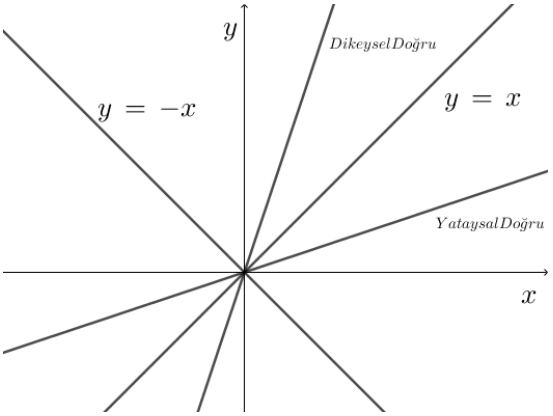
Denklemli taksi çemberine *merkezil taksi çember* denir. $O = (0,0)$ merkezli ve r yarıçaplı bir taksi çemberi Şekil 3.3 de gösterilmektedir.




Şekil 3.3 Orijin merkezli r yarıçaplı (merkezil) taksi çemberi

**Tanım 3.3.** Taksi düzlemde bir $I \ldots ax + by + c = 0$ doğrusu verilsin. Doğrunun eğimi $m = -\frac{a}{b}$ olmak üzere

- $|m| = 0$ ise yatay doğru
- $|m| = \infty$ ise dikey doğru
- $|m| > 1$ ise dikeysel doğru
- $|m| < 1$ ise yataysal doğru
- $|m| = 1$ ayraç doğru denir (Şekil 3.4) (Krause,1975; Ekmekçi, 2001).




Şekil 3.4 Taksi düzleminde merkezden geçen doğruların sınıflandırılması

**Sonuç 3.4.** Eğer $A, B, X$, $\mathbb{R}^2$ deki herhangi üç doğrusal nokta ise, o zaman

$$\mathrm{d_T}(X, A) = \mathrm{d_T}(X, B)$$

ise

$$d_E(X, A) = d_E(X, B)$$

dir (Ekmekçi, vd., 2015).

Öklidyen düzlemde öteleme, dönme, yansıma ve kayma yansımaları Öklidyen uzaklıkları koruyan dönüşümlerdir. Öklidyen düzlemin her dönmesi veya her yansıması Taksi uzaklığını korumaz.

**Önerme 3.5** Öklidyen düzlemin

$$\delta = \left\{ f \,\middle|\, f = \begin{pmatrix} cos\frac{k\pi}{2} & sin\frac{k\pi}{2} \\ sin\frac{k\pi}{2} & -cos\frac{k\pi}{2} \end{pmatrix},\ k \in \{1,2,3,4\} \right\}$$

biçiminde tanımlı yansıma dönüşümleri $R_T^2$'nin bir izometrisidir (Ekmekçi vd., 2015).

**Önerme 3.6.** Öklidyen düzlemin $\mathbb{R} = \left\{ r_\theta | r_\theta , \theta = \frac{k\pi}{2} \text{ açılı dönme}, \ k \in \{1,2,3,4\} \right\}$ biçiminde tanımlı $r_\theta$ dönmeleri Taksi uzaklıklarını korur (Ekmekçi vd., 2015).

**Tanım 3.7.** $\mathbb{R}_T^2$ de $A = (a_1, a_2)$ ve $B = (b_1, b_2)$ iki nokta olmak üzere $A, B$ noktalarına minimum uzaklıktaki noktalar kümesi başka bir deyişle minimum uzaklık kümesi

$$\{X | d_T(A,X) + d_T(B,X) = d_T(A,B)\}$$

dir ve $\overset{\square}{AB}$ şeklinde gösterilir (Ekmekçi vd., 2015).

**Önerme 3.8.** $\mathbb{R}_T^2$ Taksi düzleminde $\varphi : \mathbb{R}_T^2 \to \mathbb{R}_T^2$, $\varphi(O) = O$ özelliğini sağlayan bir izometri ise $\varphi \in \mathbb{R}$ veya $\varphi \in S$ dir (Ekmekçi vd., 2015).

**Teorem 3.9.** $R_T^2$ Taksi düzleminde $\varphi : R_T^2 \to R_T^2$ izometri olsun. O halde $f = T_a \circ \varphi$ olacak şekilde bir tek $T_a \in T(2)$ ve $\varphi \in OT(2)$ vardır (Ekmekçi vd., 2015).

**Notasyon 3.10.** O merkezli $r_T$ yarıçaplı taksi çemberi $C_T = C_T(O, r_T)$ Taksi düzlemde inversiyon çemberini göstermektedir.(Sezgin, 2004)

**Tanım 3.11.** Taksi düzlemde O merkezli $r_T$ yarıçaplı $C_T$ çemberine göre Taksi inversiyon çemberi olmak üzere taksi düzlemde inversiyon $I_{T(O,r_T)}$ ile gösterilir ve $\forall P \neq P'$ noktaları için

i) $O, P$ ve $P'$ doğrudaş ve $P'$ noktası $OP$ ışını üzerinde,

ii) $d_{T(O,P)} . d_{T(O,P')} = (r_T)^2$

şartlarını sağlayan $I_{T(O,r_T)}: \mathbb{R}_T^2 - \{O\} \to \mathbb{R}_T^2 - \{O\}$ ye tanımlı dönüşüme $C_T$ çemberine göre Taksi inversiyon denir. $C_T$ ye T-inversiyon çemberi, O noktasına da Taksi inversiyon çemberinin merkezi, $r_T$ yarıçapına T- inversiyon yarıçapı, $(r_T)^2$ sayısına da T-inversiyon kuvveti denir (Bayar ve Ekmekçi, 2014).

# 4. DOĞRULARIN TAKSİ İNVERSİYON ALTINDA İNVERSLERİ

Taksi düzleminde inversiyon kavramı ve temel özellikleri Bayar ve Ekmekçi tarafından "On circular inversions in taxicab plane" çalışmasında sunulmuştur (Bayar ve Ekmekçi, 2014). Öklidyen olmayan geometrilerde inversiyonla ilgili (Pekzorlu, 2019; Pekzorlu ve Bayar, 2020(a),(b); Ramirez vd., 2015); Cırık, 2022) çalışmaları inversiyon teorisinin gelişmesine katkı sağlamaktadır.

Bu bölümde Taksi düzlemde doğruların inversiyonları incelenmektedir. Taksi düzlemde merkezden geçmeyen doğrular, doğrunun eğimine göre sınıflandırılacaktır. Taksi ve Öklidyen düzlemde inversiyon çemberinin merkezinden geçen doğruların inversiyonu kendisi olduğundan eğimden bağımsızdır.

Taksi düzlemde merkezden geçmeyen doğruların inverslerinin, merkezden geçen eğrilerin birleşiminden oluşan kapalı şekil oluşturduğunu, eğrilerin tiplerini belirleyerek incelenmektedir.

**Teorem 4.1.** Taksi düzlemde inversiyon çemberinin merkezinden geçen doğrular invaryant kalır (Bayar ve Ekmekçi, 2014).

**İspat:** $R_T^2$ de Öklidyen ötelemeler altında taksi uzaklıklar korunduğundan taksi inversiyon çemberinin merkezini orijin almak genelliği bozmaz. $\mathbb{R}_T^2$ taksi düzleminde inversiyon çemberi $C_T$ nin merkezi O=(0,0) yarıçapı $r$ ve $ax + by = 0$ denklemli doğru $l$ olsun. $l$ nin $I_{(O,r)}$ taksi çembersel inversiyonu altında görüntüsü

$$a\frac{r^2x}{(|x| + |y|)^2} + b\frac{r^2y}{(|x| + |y|)^2} = 0$$

denkleminden

$$axr^2 + byr^2 = 0$$

ve $r > 0$ olduğundan

$$ax + by = 0$$

olur. Böylece $l$ doğrusu $I_{(O,r)}$ taksi inversiyonu altında invaryant kalır.

Öklidyen düzlemde de inversiyon çemberinin merkezinden geçen doğrular invaryant kaldığı bilinmektedir. Böylece bu durumun Taksi düzlemde de geçerliliği korumaktadır.

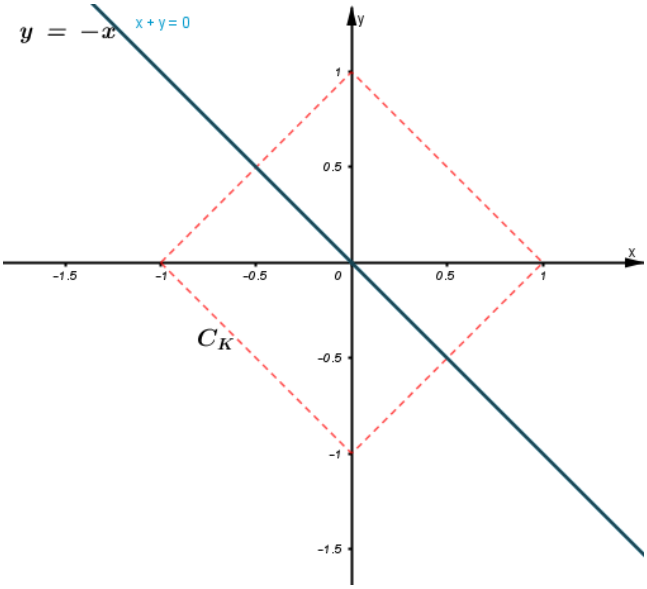
**Örnek 4.2.** Merkezi orijin yarıçapı 1 olan taksi çembere göre $x + y = 0$ doğrusunun inversi

$$\frac{x}{(|x| + |y|)^2} + \frac{y}{(|x| + |y|)^2} = 0$$

den,

$$x + y = 0$$

olarak elde edilir (Şekil 4.1).




Şekil 4.1 y = −x doğrusunun inversiyonu

$d \ldots ax + by + c = 0$ doğrusu inversiyon merkezinden geçmiyor ise doğrunun inversiyonu eğime göre farklılıklar gösterecektir. Bu yüzden merkezden geçmeyen doğrular incelenirken, doğrunun tipine göre bir sınıflandırma yapılacaktır. Doğrular yatay, dikey, yataysal, dikeysel ve ayraç doğru tiplerine göre sınıflandırılmaktadır. Genel olarak $ax + by + c = 0$ doğrusu üzerindeki $(x, y)$ noktasının merkezi orijin yarıçapı r olan taksi çembere göre inversiyonu

$$\left(\frac{r^2 x}{(|x| + |y|)^2}, \frac{r^2 y}{(|x| + |y|)^2}\right) = (x', y')$$

olduğundan doğru denkleminde yerine konulursa bu doğrunun görüntüsü

$$a\left(\frac{r^2x}{(|x|+|y|)^2}\right)+b\left(\frac{r^2y}{(|x|+|y|)^2}\right)+c=0$$

den

$$ar^2x+br^2y+c(|x|+|y|)^2=0$$

olarak elde edilir. a ve b nin durumlarına göre doğrunun eğimi değişeceğinden bu durum doğru tiplerinin inverslerinde etkili olacaktır.

**Tanım 4.3.** Merkezi (a,b) olan taksi inversiyon çemberi $x=a$ ve $y=b$ doğrularına göre düzlemi 4 bölgeye ayırır.

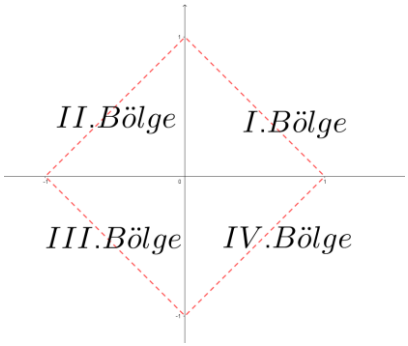
I. Bölge= $\{(x,y)\in R^2|x\geq a, y\geq b\}$,

II. Bölge= $\{(x,y)\in R^2|x\leq a, y\geq b\}$,

III. Bölge= $\{(x,y)\in R^2|x\leq a, y\leq b\}$,

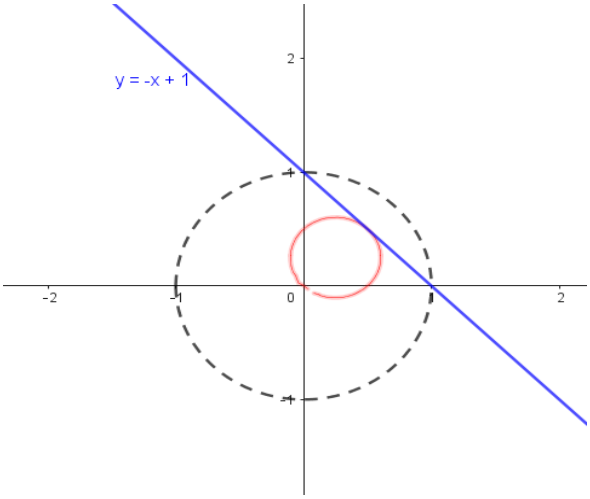
IV. Bölge= $\{(x,y)\in R^2|x\geq a, y\leq b\}$.

Ötelemeler altında taksi uzaklıklar korunduğu için inversiyon çemberinin merkezi orijin ve yarıçapını r olarak düşünülebilir (Şekil 4.2).




Şekil 4.2 İki boyutlu kartezyen koordinat düzlemi

$y=-x+1$ doğrusu inversiyon merkezinden geçmediği için Öklidyen birim çembersel inversiyonuna göre, inversiyon merkezinden geçen çemberlere dönüşmektedir (Şekil 4.3).




Şekil 4.3 Öklidyen düzlemde y = −x + 1 doğrusunun birim çembere göre inversi

**Teorem 4.4.** Taksi inversiyon çemberinin merkezinden geçmeyen doğrular inversiyon altında çemberlere dönüşmez.

**İspat:** $R_T^2$ de Öklidyen ötelemeler altında taksi uzaklıklar korunduğundan taksi inversiyon çemberinin merkezini orijin almak genelliği bozmaz (Schattschneider, 1984). $R_T^2$ taksi düzleminde inversiyon çemberi $C_T$ nin merkezi O=(0,0) yarıçapı $r$ ve $ax + by + c = 0$ denklemli doğru $l$ olsun. $l$ nin $I_{(O,r)}$ inversiyonu altında görüntüsü

$$a\frac{r^2x}{(|x| + |y|)^2} + b\frac{r^2y}{(|x| + |y|)^2} + c = 0$$

denkleminden

$$ar^2x + br^2y + c(|x| + |y|)^2 = 0$$

olup, $c \neq 0$ için bu denklem doğru belirtmez. Bu durumda Taksi düzlemde inversiyon çemberinin merkezinden geçmeyen doğrular invaryant kalmaz.

**Örnek 4.5.** Merkezi orijin yarıçapı 1 olan taksi çemberine göre inversiyon altında $x + y = 1$ doğrusunun inversi

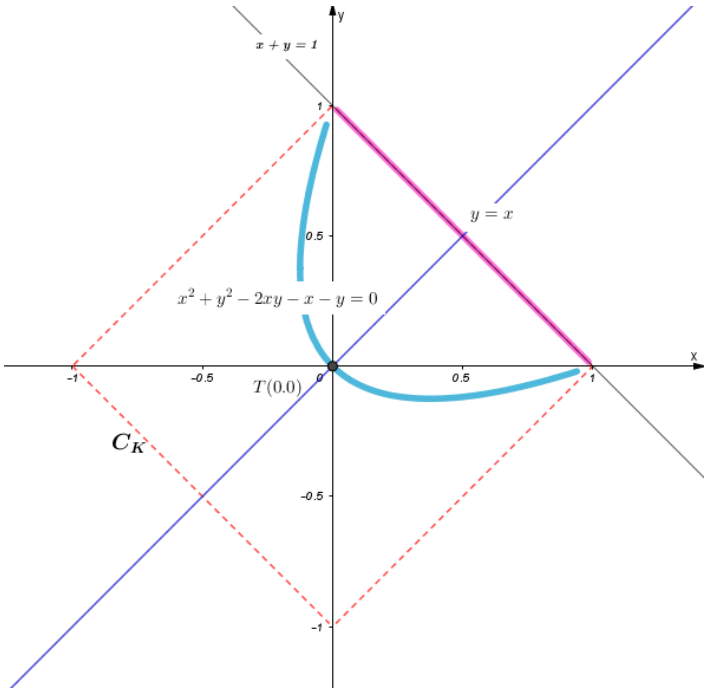
$$\frac{x}{(|x| + |y|)^2} + \frac{y}{(|x| + |y|)^2} = 1$$

den,

$$x + y = (|x| + |y|)^2,$$

$$x^2 + y^2 + 2|xy| - x - y = 0$$

olarak elde edilir. Bu doğru inversiyon çemberin bir kenarına teğet olduğundan kenarla çakışan doğru parçası invaryant kalır. Doğrunun diğer kısımları üzerindeki noktalar, inversiyon dönüşümü altında tepe noktası orijin olan ve doğru parçasının iki uç noktası ve inversiyon çemberinin iki köşe noktasından geçen parabol paçasından oluşmaktadır. Böylece bu doğrunun birim taksi çembere göre inversi bir doğru parçası ve merkezden geçen parabol parçasının birleşiminden oluşan kapalı şekildir (Şekil 5.4).




Şekil 4.4 $x + y = 1$ doğrusunun inversi

Doğruların inversiyonu incelenirken doğrunun eğimine göre bir sınıflandırma yapılacaktır. Bu sebeple ilk olarak yatay doğruların inversiyonunun analitik incelemesi yapılmaktadır.

### 4.1. Yatay Doğruların İnversiyonları

Taksi düzleminde $d \ldots ax + by + c = 0$ doğrusu için doğru denkleminde

**i.** $\boldsymbol{a = 0, b \neq 0}$ **ve** $\boldsymbol{c > 0}$ alınırsa

$$by + c = 0$$

ve buradan

$$y = \frac{-c}{b}$$

denklemi elde edilir.

Bu denklemde $b = 1$ alınırsa genelliği bozmadığından x eksenine paralel $y = -c$ doğrusunun inversi doğru denkleminde y yerine $\frac{y}{(|x|+|y|)^2}$ alınarak

$$\frac{y}{(|x|+|y|)^2} = -c$$

den

$$c(|x| + |y|)^2 + y = 0$$

şeklinde bulunur. Bu denklemin sonucu olarak, mutlak değerin durumlarına göre iki durum ortaya çıkar.

1. **$x < 0$ ve $y < 0$ iken,**

$-c(|x| + |y|)^2 - y = 0$ denklemi mutlak değer dışına

$$cx^2 + 2cxy' + cy^2 + y = 0$$

şeklinde çıkar. Bu denklem $c \neq 0$ olduğundan c ye bölünürse

$$x^2 + 2xy + y^2 + \frac{y}{c} = 0$$

şeklinde parabol denklemi elde edilir. Bu parabolün simetri ekseni

$$y = -\frac{1}{4c} - x$$

ve tepe noktası

$$\left(\frac{-3}{16c}, \frac{-1}{16c}\right)$$

şeklindedir.

2. **$x > 0$ ve $y < 0$ iken**,

$$cx^2 - 2cxy + cy^2 + y = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklem $c \neq 0$ olduğunda c ye bölünürse

$$x^2 - 2xy + y^2 + \frac{y}{c} = 0$$

denklemli parabol parçası elde edilir. Bu parabol parçasının simetri ekseni

$$y = -\frac{1}{4c} + x$$

tepe noktası

$$\left(\frac{3}{16c}, \frac{-1}{16c}\right)$$

şeklindedir.

Sonuç olarak $y = -c$ tipindeki x eksenine paralel olan doğruların inversiyonları iki parabol parçasının birleşimi ile oluşan $\mathrm{y} + \mathrm{c}((|x| + |y|)^2) = 0$ denklemli kapalı eğridir. Parabollerin tepe noktaları y-eksenine göre simetrik ve eksenleri $(0,-\frac{1}{4c})$ noktasında dik kesişmektedir.

**Örnek 4.1.1.** $y = -1$ yatay doğrusunun inversi, $x$ ve $y$ değerleri negatif iken

$$x^2 + 2xy + y^2 + \frac{y}{c} = 0$$

invers denkleminde $c = 1$ alınarak elde edilen

$$x^2 + 2xy + y^2 + \frac{y}{1} = 0$$

denklemli parabol parçasıdır. Bu parabolün tepe noktası

$$\left(\frac{-3}{16}, \frac{-1}{16}\right),$$

simetri ekseni

$$y = -\frac{1}{4} - x,$$

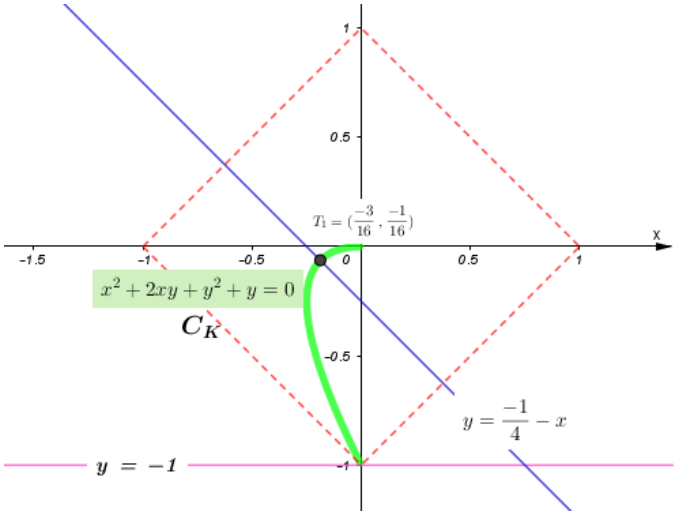
odağı

$$(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{8})$$

ve doğrultmanı

$$y = x + \frac{1}{4}$$

doğrusudur. Bu parabol parçasının uç noktaları orijin ve $(0,-1)$ dir. $(0,-1)$ noktası inversiyon çemberinin üzerinde olduğundan invaryant kalmaktadır (Şekil 4.5). Bu parabolün ekseni ve doğrultmanı birbirine diktir.




Şekil 4.5 y = − 1 doğrusunun inversi (x < 0 , y < 0 iken)

Şimdi $y = -1$ yatay doğrusunun inversi $x$ pozitif ve $y$ negatif bölgesinde kalan kısmının inversi $x^2 - 2xy + y^2 + \frac{y}{c} = 0$ invers denkleminde c=1 alınarak

$$x^2 - 2xy + y^2 + \frac{y}{1} = 0$$

denklemli parabol parçası elde edilir. Bu parabolün tepe noktası

$$\left(\frac{3}{16}, \frac{-1}{16}\right)$$

simetri ekseni

$$y = x - \frac{1}{4}$$

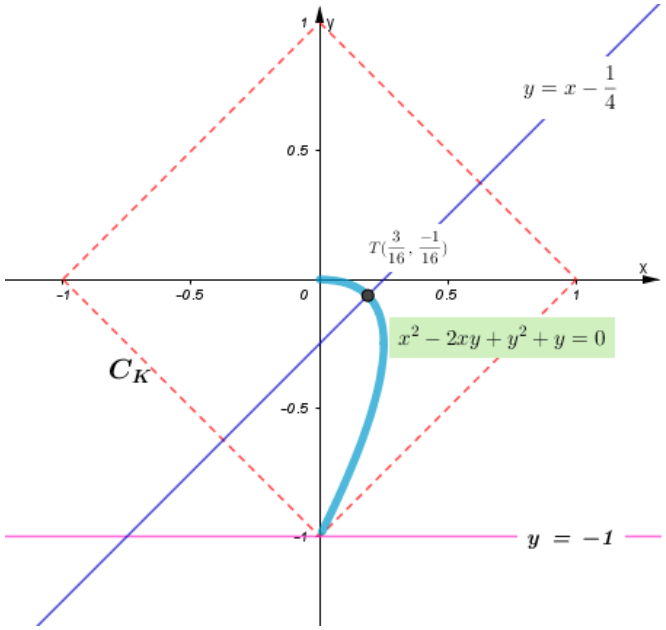
doğrusu, odağı

$$\left(\frac{1}{8}, \frac{-1}{8}\right)$$

ve doğrultmanı

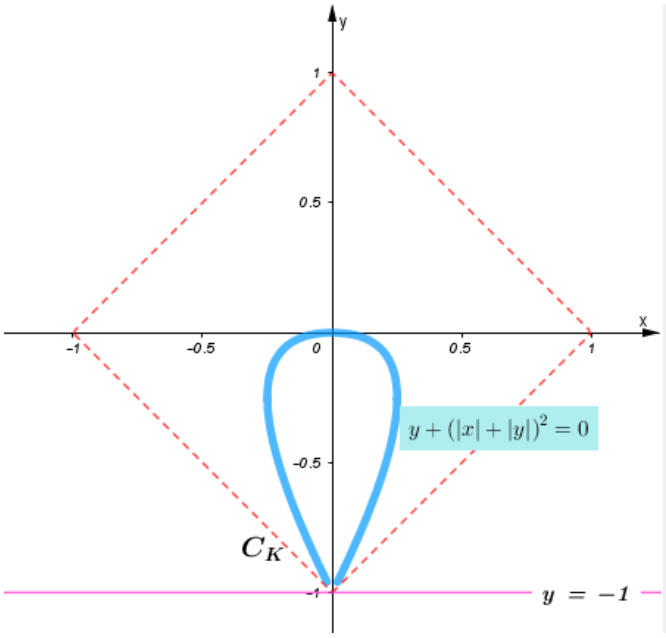
$$y = -x + \frac{1}{4}$$

doğrusudur (Şekil 4.6). Bu parabol parçasının uç noktaları orijin ve $(0,-1)$ dir. $(0,-1)$ noktası inversiyon çemberinin üzerinde olduğundan invaryant kalmaktadır. Bu parabolün ekseni ve doğrultmanı birbirine diktir.




Şekil 4.6 y = − 1 doğrusunun inversi (x > 0 , y < 0 iken)

Şekil 4.5 ve Şekil 4.6 daki $x$ −eksenine paralel doğruların inversiyonunda $y = -1$ doğrusunun inversi $x^2 - 2xy + y^2 + y$=0 ve $x^2 + 2xy + y^2 + y$=0 parabol parçalarının birleşimi ile oluşan $y - (|x| + |y|)^2 = 0$ kapalı eğrisidir (Şekil 4.7). Bu parabol parçaları orijinde ve $(0,-1)$ noktasında kesişmektedir. Parabol parçaları ve tepe noktaları y eksenine göre simetrik olup simetri eksenleri ve doğrultmanları $\mp 1$ eğimli ve birbirlerine diktir.




Şekil 4.7 y = − 1 doğrusunun inversi

**ii.** $\boldsymbol{a = 0, b \neq 0\ ve\ c < 0}$ iken

$$by - c = 0,$$

$$y = \frac{c}{b}$$

Bu denklemde b = 1 alınırsa genelliği bozmadığından x eksenine paralel y = c doğrusunun birim taksi çemberine göre inversi doğru denkleminde y yerine $\frac{y}{(|x|+|y|)^2}$ alınarak

$$\frac{y}{(|x| + |y|)^2} = c$$

$$c(|x| + |y|)^2 - y = 0$$

şeklinde bulunur. Bu denklem mutlak değerin durumlarına göre iki durumda incelenebilir:

**1.** x > 0 ve y > 0 iken

$$c(|x| + |y|)^2 - y = 0$$

denklemi mutlak değer dışına

$$cx^2 + 2cxy + cy^2 - y = 0$$

şeklinde çıkar. Bu denklem $c \neq 0$ olduğundan c ye bölünürse

$$x^2 + 2xy + y^2 - \frac{y}{c} = 0$$

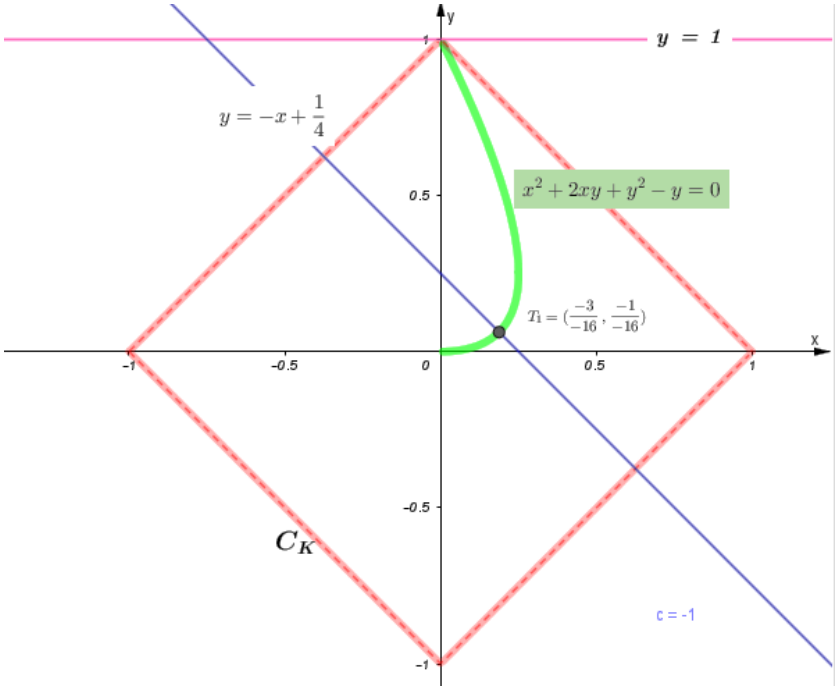
şeklinde parabol denklemi elde edilir. Bu parabolün simetri ekseni

$$y = \frac{1}{4c} - x$$

tepe noktası

$$\left(\frac{3}{16c}, \frac{1}{16c}\right)$$

şeklindedir. $y = 1$ doğrusunun inversi x>0 ve y>0 için Şekil 4.8 de verilmektedir.




Şekil 4.8 $y = 1$ doğrusunun inversi ($x > 0$ $ve$ $y > 0$ $iken$)

**2.** x < 0 ve y > 0 iken

$$cx^2 - 2cxy + cy^2 - y = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklem $c \neq 0$ olduğunda c ye bölünürse

$$x^2 - 2xy + y^2 - \frac{y}{c} = 0$$

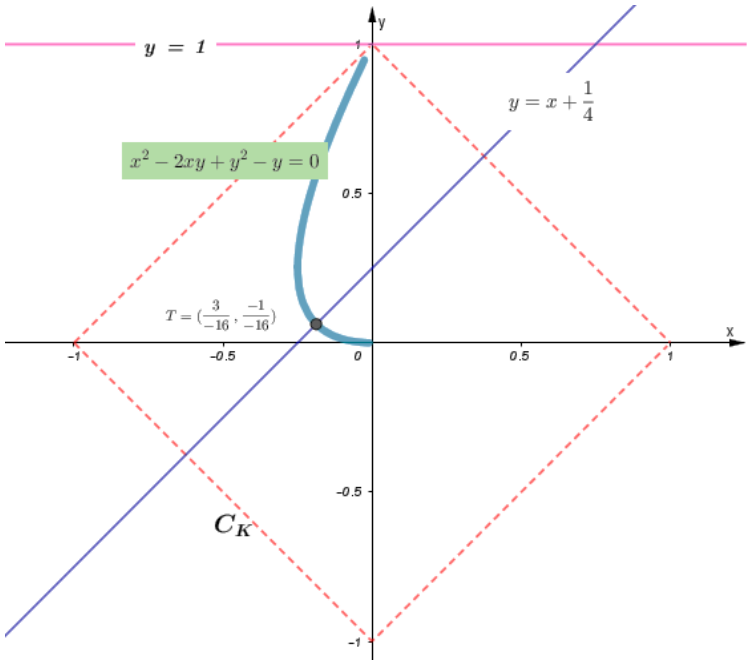
denklemli parabol parçası elde edilir. Bu parabol parçasının simetri ekseni

$$y = \frac{1}{4c} + x$$

tepe noktası

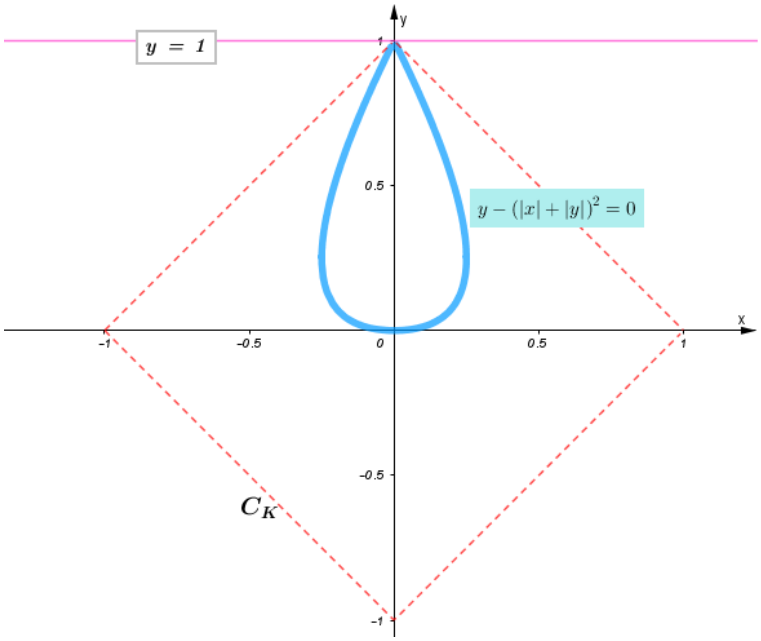
$$\left(\frac{-3}{16c}, \frac{1}{16c}\right)$$

elde edilir (Şekil 4.9).




Şekil 4.9 $y = 1$ doğrusunun inversi ($x < 0$ ve $y > 0$ iken)

Şekil 4.8 ve Şekil 4.9 daki $x$ −eksenine paralel doğruların inversiyonunda $y = 1$ doğrusunun inversi $x^2 - 2xy + y^2 - y$=0 ve $x^2 + 2xy + y^2 - y$=0 parabol parçalarının birleşimi ile oluşan $y - (|x| + |y|)^2 = 0$ kapalı eğrisidir (Şekil 4.10). Bu parabol parçaları orijinde ve (0,1) noktasında kesişmektedir. Parabol parçaları ve tepe noktaları y eksenine göre simetrik olup simetri eksenleri $\mp 1$ eğimli ve birbirlerine diktir.




Şekil 4.10 y = 1 doğrusunun inversi

### 4.1.1. Merkezil birim inversiyon çemberine göre y = k tipindeki doğruların inversleri

**Teorem 4.1.1.1.** Yatay doğruların birim taksi çemberine göre inversleri, orijinden geçen y-eksenine göre simetrik, simetri eksenleri ve doğrultmanları birbirine dik olan iki parabol parçasının birleşiminden oluşan kapalı eğridir.

**İspat:** $y = k$ tipindeki doğruların birim inversiyon altındaki inversi $y = k(|x| + |y|)^2$ denklemli kapalı eğrisidir. Bu kapalı eğriyi oluşturan parabol parçalarının simetri eksenleri

$$y = \frac{1}{4k} - |x|$$

ve doğrultmanları

$$y = -\frac{1}{4k} + |x|$$

dir. Ayrıca simetri ekseninin eğimi $-1$ iken

$$T_1 = \left(\frac{3}{16k}, \frac{1}{16k}\right)$$

odağı

$$O_1 = \left(\frac{1}{8k}, \frac{1}{8k}\right)$$

ve simetri ekseninin eğimi $+1$ iken

$$T_2 = \left(\frac{-3}{16k}, \frac{1}{16k}\right)$$

odağı

$$O_2 = \left(-\frac{1}{8k}, \frac{1}{8k}\right)$$

dir. Böylece inversiyon çemberinin merkezinden geçen iki parabol parçasının birleşimidir.

**Teorem 4.1.1.2.** Yatay doğruların merkezil taksi çemberine göre inversleri orijinden geçen y- eksenine göre simetrik, simetri eksenleri ve doğrultmanları birbirine dik olan iki parabol parçasının birleşiminden oluşan kapalı eğridir.

**İspat:** $y = k$ tipindeki doğruların**,** merkezi orijin yarıçapı r olan inversiyon çemberine göre inversi $r^2\mathrm{y} = \mathrm{k}(|x| + |y|)^2$ denklemli kapalı eğrisidir. Bu kapalı eğri simetri eksenleri

$$y = \frac{r^2}{4k} - |x|$$

ve doğrultman denklemleri

$$y = -\frac{r^2}{4k} + |x|$$

olan iki parabol belirtir. Simetri ekseninin eğimi $-1$ olan parabolün tepe noktası

$$T_1 = \left(\frac{3r^2}{16k}, \frac{r^2}{16k}\right)$$

odağı ve simetri ekseninin eğimi 1 olan parabolün tepe noktası

$$T_2 = \left(\frac{-3r^2}{16k}, \frac{r^2}{16k}\right)$$

dır. Bu parabol parçaları inversiyon çemberinin merkezinden geçer ve y-eksenine göre simetriktir. Ayrıca eksenler 1 ve -1 eğimli olup birbirine diktir.

**Sonuç 4.1.1.3.** Yatay doğruların merkezil taksi çemberine göre inversleri iki parabol parçasının birleşiminden oluşur ve bu parabollerin eksenleri ve doğrultmanları merkezi orijin olan ve köşe noktaları eksen ve doğrultmanların arakesit noktalarından oluşan merkezil taksi çemberi belirtir.

**İspat:** $y = k$ tipindeki doğruların**,** merkezi orijin yarıçapı r olan inversiyon çemberine göre inversi $r^2$y = k$(|x| + |y|)^2$ denklemli kapalı eğrisidir. Bu kapalı eğri simetri eksenleri

$$y = \frac{r^2}{4k} - |x|$$

ve doğrultmanları

$$y = -\frac{r^2}{4k} + |x|$$

olan iki parabol belirtir. Eksen ve doğrultmanlar y-ekseni üzerinde $\left(0, \frac{r^2}{4k}\right) ve\ (0, -\frac{r^2}{4k})$ noktalarında, x-ekseni üzerinde $\left(\frac{r^2}{4k}, 0\right) ve\ (-\frac{r^2}{4k}, 0)$ noktalarında kesişir. Bu noktaları köşeler ve eksen ve doğrultmanları kenarlar olan $|x| + |y| = \frac{r^2}{4k}$ olan merkezil taksi çemberi oluşur.

### 4.1.2. Merkezi $(m, n)$ yarıçapı $r$ olan çembere göre $y = k$ tipindeki doğruların inversleri

**Teorem 4.1.2.1.** Yatay doğruların merkezi orijinden farklı taksi çemberine göre inversleri merkezden geçen dik doğruya göre simetrik ve simetri eksenleri ve doğrultmanları ayraç doğrulara paralel ve birbirine dik olan inversiyon merkezinden geçen iki parabol parçasının birleşiminden oluşan kapalı eğridir.

**İspat:** $|x - m| + |y - n| = r$ inversiyon çemberine göre $P = (x, y)$ noktasının görüntüsü
$P' = (x', y')$ olsun. Burada

$$\begin{cases} x' = m + \dfrac{r^2(x-m)}{(|x-m|+|y-n|)^2} \\ y' = n + \dfrac{r^2(y-n)}{(|x-m|+|y-n|)^2} \end{cases}$$

dir (Bayar A., Ekmekçi S. (2014). $y = k$ doğrusunun bu taksi çembere göre inversi

$$(k-n)(|x-m|+|y-n|)^2 = r^2(y-n)$$

denklemine sahip iki parabol parçasından oluşan kapalı eğridir.

**$x > m$ ve $y > n$ veya $x < m$ ve $y < n$** iken;

simetri ekseni

$$y = -x + m + n + \frac{r^2}{4(k-n)}$$

,

doğrultmanı

$$y = x + n - m - \frac{r^2}{4(k-n)}$$

tepe noktası

$$T_1 = \left(\frac{3r^2}{16(k-n)} + m, \frac{r^2}{16(k-n)} + n\right)$$

ve odağı

$$O_1 = \left(\frac{r^2}{8(k-n)} + m, \frac{r^2}{8(k-n)} + n\right)$$

olan paraboldür.

**$x > m$ ve $y < n$ veya $x < m$ ve $y > n$** iken;

simetri ekseni

$$y = \mathrm{x} + n - m + \frac{r^2}{4(k-n)}$$

doğrultmanı

$$y = -x + m + n - \frac{r^2}{4(k-n)}$$

,

tepe noktası

$$T_2 = \left(-\frac{3r^2}{16(k-n)} + m, \frac{r^2}{16(k-n)} + n\right)$$

ve odağı

$$O_2 = \left(-\frac{r^2}{8(k-n)} + m, \frac{r^2}{8(k-n)} + n\right)$$

olan iki parabol parçasının birleşiminden oluşan kapalı figürdür.

**Sonuç 4.1.2.2.** Yatay doğruların merkezil olmayan taksi çemberine göre inversleri iki parabol parçasının birleşiminden oluşur ve bu parabollerin eksenleri ve doğrultmanları merkezi inversiyon çemberinin merkezi olan ve köşe noktaları eksen ve doğrultmanların arakesit noktalarından oluşan taksi çemberi belirtir.

**İspat:** $y = k$ tipindeki doğruların merkezi (m,n) yarıçapı r olan inversiyon çemberine göre inversi

$$(k-n)(|x-m| + |y-n|)^2 = r^2(y-n)$$

denklemli kapalı eğridir. Bu kapalı eğri simetri ekseni

$$y = -x + m + n + \frac{r^2}{4(k-n)}$$

ve doğrultmanı

$$y = x + n - m - \frac{r^2}{4(k-n)}$$

olan parabol ile simetri ekseni

$$y = x + n - m + \frac{r^2}{4(k-n)}$$

ve doğrultmanı $y = -x + n + m - \frac{r^2}{4(k-n)}$ olan parabol parçalarının birleşimidir. Eksen ve doğrultmanlar $x = m$ doğrusu üzerinde

$$\left(m, n + \frac{r^2}{4(k-n)}\right), \left(m, n - \frac{r^2}{4(k-n)}\right)$$

noktalarında, $y = n$ doğrusu üzerinde

$$\left(m + \frac{r^2}{4(k-n)}, n\right) ve \left(m - \frac{r^2}{4(k-n)}, n\right)$$

noktalarında kesişir. Bu noktaları köşeler, eksen ve doğrultmanları kenarlar ve merkezi (m,n) olan

$$|x - m| + |y - n| = \frac{r^2}{4(k-n)}$$

denklemli taksi çemberi belirtir.

İnvers paraboller $x = m$ doğrusuna göre simetriktir. $y = k$ doğrusu $x = k$ doğrusu ile iki parçalaya bölünür. Her parçanın inversi, $|x - m| + |y - n| = \frac{r^2}{4(k-n)}$ taksi çemberinin kendisine komşu olan kenarını eksen ve diğer kenarını doğrultman kabul eden ve inversiyon merkezinden geçen parabol parçasıdır.

**Örnek 4.1.2.3.** Merkezi (2,4) yarıçapı 3 olan taksi çemberine göre $y = 6$ doğrusunun inversini oluşturan parabol parçalarının denklemi, simetri eksenleri, doğrultmanları, tepe noktaları ve odaklarını bulalım.

$m = 2, n = 4, r = 3, k = 6$

$$(k-n)(|x-m| + |y-n|)^2 = r^2(y-n)$$

kapalı eğri denkleminde mutlak değeri incelerken

$x < 2$ ve $y > 4$ için

$$(k - n)(x - m + y - n)^2 - r^2y + r^2n = 0$$

elde edilir. Buradan ilk parabolün denklemi

$$2x^2 - 4xy + 2y^2 + 8x - 17y + 44 = 0$$

simetri ekseni

$$y = \frac{25}{8} + x$$

doğrultmanı

$$y = \frac{39}{8} - x$$

tepe noktası

$$T_1 = \left(\frac{37}{32}, \frac{137}{32}\right)$$

odağı

$$O_1 = \left(\frac{23}{16}, \frac{73}{16}\right)$$

olarak bulunur

$x > 2$ ve $y > 4$ için

$$2x^2 + 4xy + 2y^2 - 24x - 33y + 108 = 0$$

parabolü elde edilir. Bu parabolün

Simetri ekseni

$$y = \frac{57}{8} - x$$

doğrultmanı

$$y = \frac{7}{8} + x$$

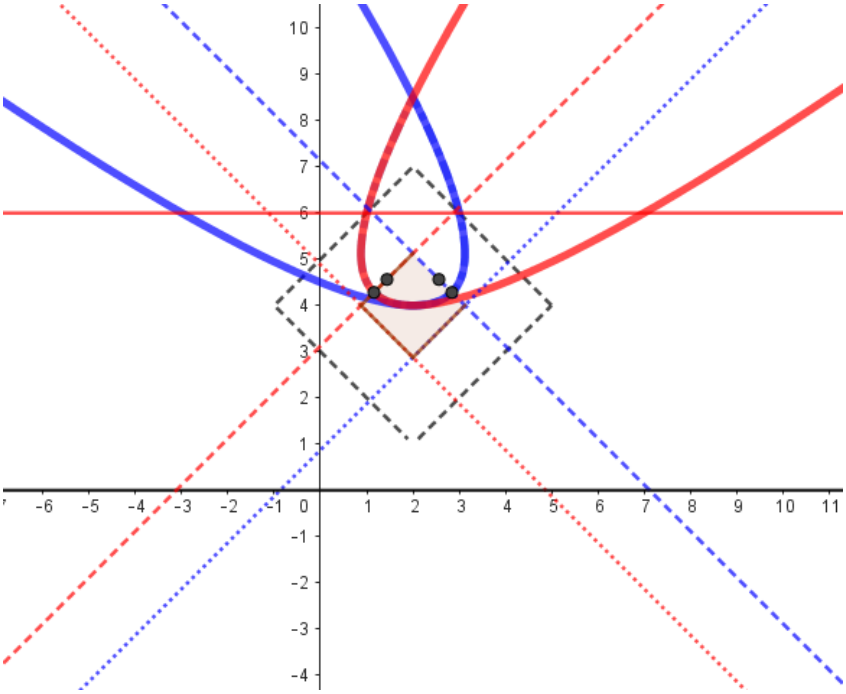
tepe noktası

$$T_1 = \left(\frac{91}{32}, \frac{137}{32}\right)$$

odağı

$$O_1 = \left(\frac{41}{16}, \frac{73}{16}\right)$$

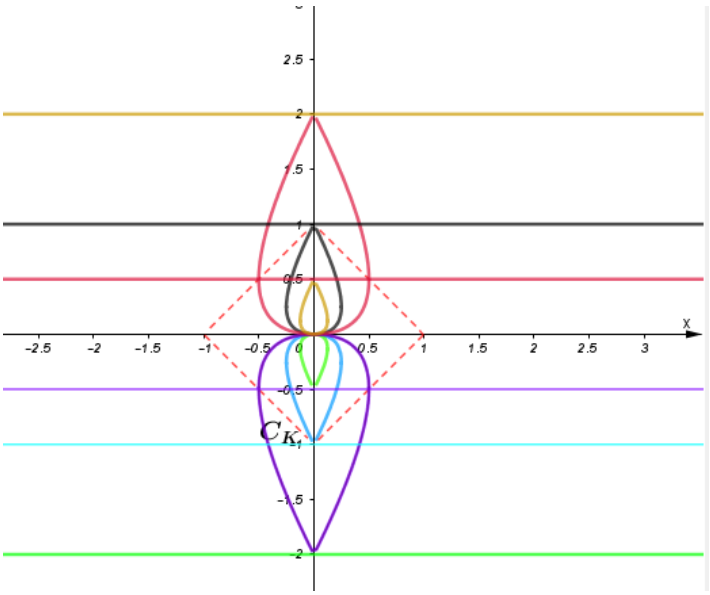
olarak bulunur (Şekil 4.11).



Şekil 4. 11 (2,4) merkezli 4 yarıçaplı taksi çemberine göre y=6 doğrusunun taksi inversi

### 4.1.3. Yatay paralel doğru demetinin inversiyonu

$y = -c$ tipindeki doğruların oluşturduğu demetin birim taksi çemberine göre inversleri, c nin her değeri için inversiyon çemberinin merkezinden geçen, $y -$ eksenine göre simetrik parabol parçalarından oluşan kapalı figürlerin oluşturduğu demetidir (Şekil 4.12).




Şekil 4.12 $y = -c$ tipindeki doğruların oluşturduğu demetin görüntüsü

**Teorem 4.1.3.1.** Yatay paralel doğru demetinin merkezi orijinden farklı taksi çemberine göre inversleri merkezden geçen ve merkezden geçen dik doğruya göre simetrik ve simetri eksenleri ayraç doğrulara paralel ve birbirine dik olan iki parabol parçasının birleşiminden olan kapalı eğrilerden oluşur.

**İspat:** Teorem 4.1.2.1 den aşikardır.

### 4.2. Dikey Doğruların Taksi İnversleri

Taksi düzlemde d ... $ax + by + c = 0$ doğrusu için doğru denkleminde

**i.** $a \neq 0, b = 0 \; ve \; c > 0$ alınırsa

$$ax + c = 0,$$

$$x = \frac{-c}{a}$$

denklemli dikey doğru elde edilir. $a = 1$ almak genelliği bozmaz. Elde edilen bu doğru denklemi y eksenine paralel $x = -c$ doğrusudur. Böylece doğrunun inversini $x = -c$ doğru denkleminde x yerine $\frac{x}{(|x|+|y|)^2}$ konularak

$$\frac{x}{(|x|+|y|)^2} = -c,$$

$$c(|x| + |y|)^2 + x = 0$$

şekilinde elde edilir. Bu denklemin belirttiği eğrileri x ve y nin işaretine göre incelenebilir:

**a)** $x < 0$ ve $y < 0$ iken,

$$cx^2 + 2cxy + cy^2 + x = 0$$

denklemi c ye bölünürse

$$x^2 + 2xy + y^2 + \frac{x}{c} = 0$$

parabol denklemi elde edilir. Parabolün simetri ekseni

$$y = -x - \frac{1}{4c},$$

tepe noktası

$$\left(\frac{-1}{16c}, \frac{-3}{16c}\right)$$

olarak bulunur.

Şekil 4.13. de $x = -1$ doğrusunun düzlemin 3. bölgesinde kalan kısmındaki noktaların inverslerinin

$$x^2 + 2xy + y^2 + x = 0$$

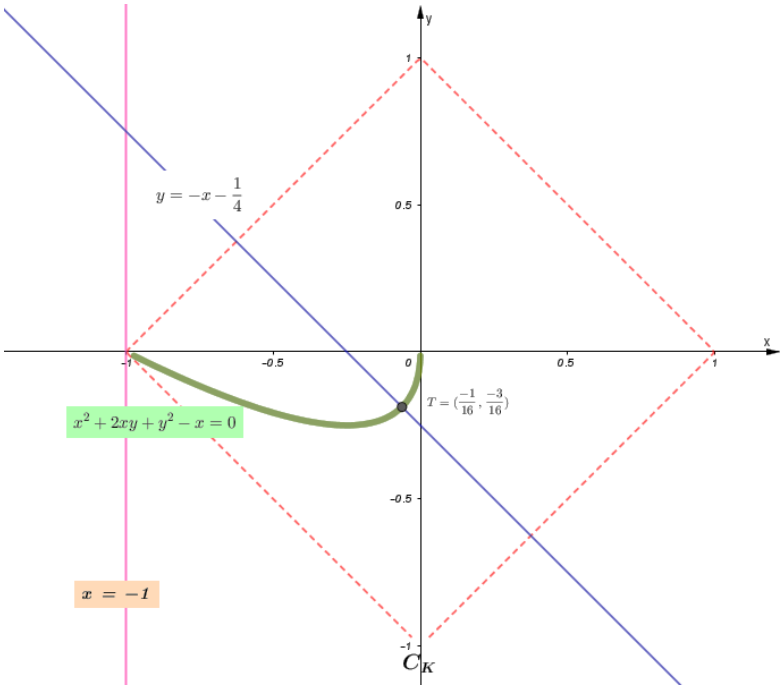
parabolü üzerinde olduğunu bu parabolün tepe noktasının

$$\left(\frac{-1}{16}, \frac{-3}{16}\right)$$

ve simetri ekseninin

$$y = -x - \frac{1}{4}$$

olduğu görülmektedir.




Şekil 4.13 $x = -1$ doğrusunun inversi ($x < 0$ ve $y < 0$ iken)

**b)** $x < 0$ ve $y > 0$ alınırsa

$$cx^2 - 2cxy + cy^2 + x = 0$$

denklemi elde edilir. Burada denklem c ye bölünürse

$$x^2 - 2xy + y^2 + \frac{x}{c} = 0$$

parabol denklemi elde edilir. Parabolün simetri ekseni

$$x = \frac{1}{4c} - y$$

tepe noktası

$$\left(\frac{-1}{16c}, \frac{-3}{16c}\right)$$

elde edilir.

Şekil 4.14'de $x = -1$ doğrusunun, düzlemin 2. bölgesinde kalan kısmındaki noktaların inverslerinin

$$x^2 - 2xy + y^2 + x = 0$$

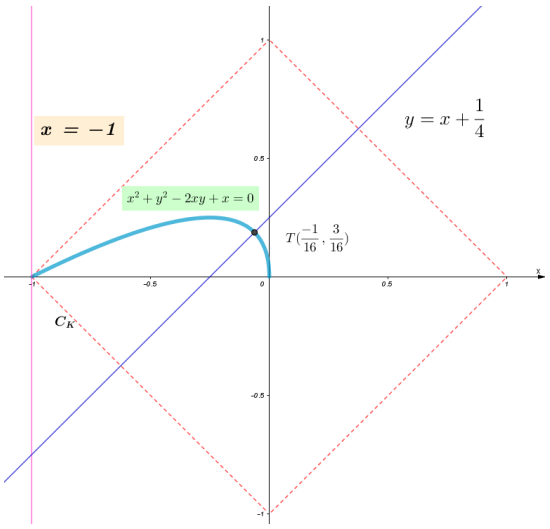
parabolü üzerinde olduğunu bu parabolün tepe noktasının

$$\left(\frac{-1}{16}, \frac{3}{16}\right)$$

ve simetri ekseninin

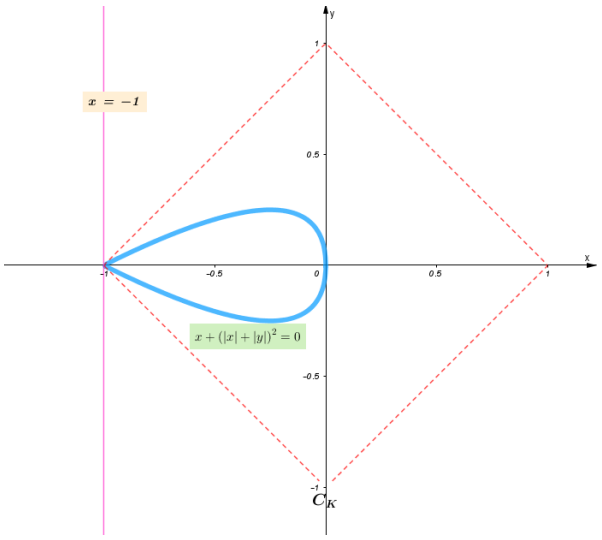
$$y = x + \frac{1}{4}$$

olduğu görülmektedir.




Şekil 4.14 $x = -1$ doğrusunun inversi ($x < 0$ ve $y > 0$ iken)

Sonuç olarak $x = -c$ tipindeki y eksenine paralel olan doğruların inversiyonları iki parabolün birleşimi ile oluşan $x + c((|x| + |y|)^2) = 0$ denklemli kapalı eğridir. Bu eğriyi oluşturan parabollerin eksenleri $\mp 1$ eğimli olup birbirine diktir. Tepe noktaları da $x$ −eksenine göre simetriktir (Şekil 4.15).




Şekil 4.15 $x = -1$ doğrusunun inversi

$y$ −eksenine paralel doğruların inversiyonunda $x = -1$ doğrusunun birim çembere göre taksi inversi $x^2 - 2xy + y^2 - x$=0 ve $x^2 + 2xy + y^2 - x$=0 parabollerinin birleşimi olan $x - (|x| + |y|)^2 = 0$ denklemine sahip kapalı eğridir. Bu paraboller orijin ve $(-1,0)$ noktalarında kesişmektedir. Paraboller x-eksenine göre simetrik olup simetri eksenleri birbirlerine diktir.

**ii.** $a \neq 0, b = 0$ ve $c < 0$ alınırsa

$$ax - c = 0,$$

$$x = \frac{c}{a}$$

denklemi elde edilir. a = 1 almak genelliği bozmaz. Elde edilen bu doğru denklemi $y$ −eksenine paralel x = c doğrusudur. Böylece doğrunun inversini x = c doğru denkleminde x yerine $\frac{x}{(|x|+|y|)^2}$ alınırsa

$$\frac{x}{(|x| + |y|)^2} = c$$

$$c(|x| + |y|)^2 - x = 0$$

denklemi elde edilir.

**a)** x > 0 ve y > 0 alınırsa

$$cx^2 + 2cxy + cy^2 - x = 0$$

denklemi elde edilir. Burada denklem c ye bölünürse

$$x^2 + 2xy + y^2 - \frac{x}{c} = 0$$

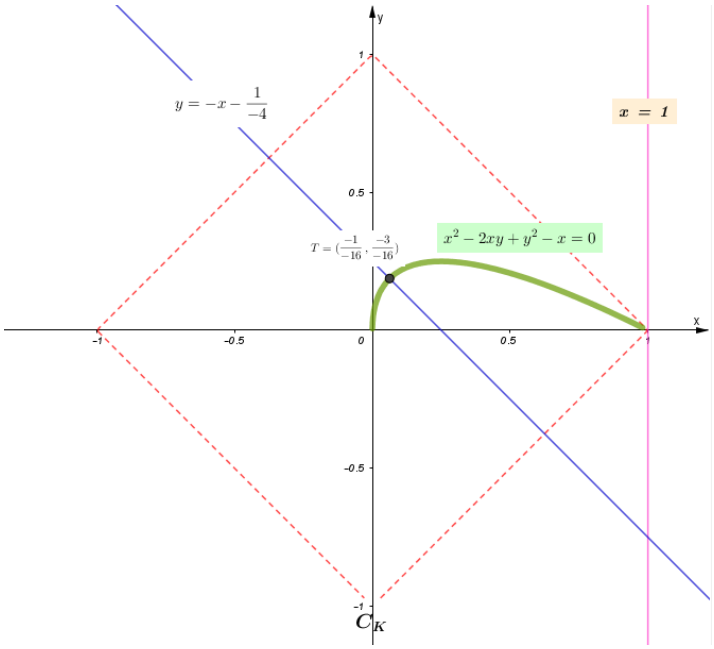
parabol denklemi elde edilir. Parabolün simetri ekseni

$$y = \frac{-1}{4c} - x$$

tepe noktası

$$\left(\frac{-1}{16c}, \frac{-3}{16c}\right)$$

elde edilir (Şekil 4.16).




Şekil 4.16 x = 1 doğrusunun inversi (x > 0 , y > 0 iken)

**b)** $x > 0$ ve $y < 0$ alınırsa

$$cx^2 - 2cxy + cy^2 - x = 0$$

denklemi elde edilir. Burada denklem c ye bölünürse

$$x^2 - 2xy + y^2 - \frac{x}{c} = 0$$

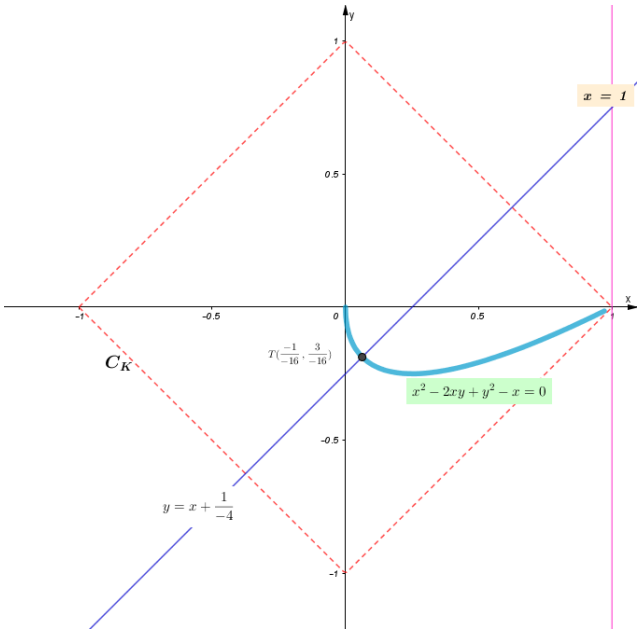
parabol denklemi elde edilir. Parabolün simetri ekseni

$$y = \frac{1}{4c} - x$$

tepe noktası

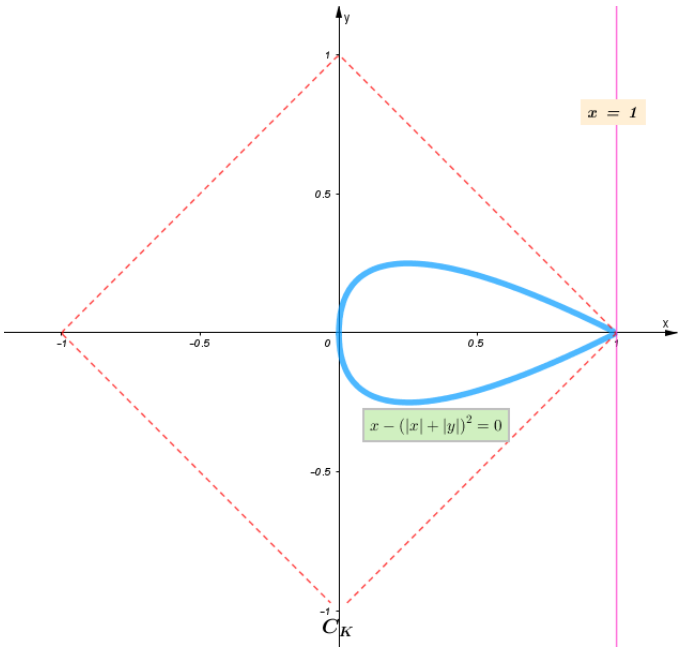
$$\left(\frac{3}{16c}, \frac{-1}{16c}\right)$$

elde edilir (Şekil 4.17).




Şekil 4.17 $x = 1$ doğrusunun inversi ($x > 0$ , $y < 0$ iken)

Sonuç olarak $y = c$ tipindeki x eksenine paralel olan doğruların inversiyonları iki parabolün birleşimi ile oluşan $y - c((|x| + |y|)^2) = 0$ denklemli kapalı eğridir. Bu eğriyi oluşturan parabollerin eksenleri $\mp 1$ eğimli olup birbirine diktir. Tepe noktaları da $y$ −eksenine göre simetriktir (Şekil 4.18).




Şekil 4.18 x = 1 doğrusunun inversi

$y$ −eksenine paralel doğruların inversiyonunda $x = -1$ doğrusunun inversi $x^2 - 2xy + y^2 + x$=0 ve $x^2 + 2xy + y^2 + x$ parabollerinin birleşimi olan $x + (|x| + |y|)^2$ kapalı eğrisidir. Bu paraboller orjin ve (1,0) noktalarında kesişmektedir. Paraboller $x$ −eksenine göre simetrik olup simetri eksenleri birbirlerine diktir.

### 4.2.1. Merkezil inversiyon çemberine göre y = k tipindeki doğruların inversleri

**Teorem 4.2.1.1.** Dikey doğruların birim taksi çemberine göre inversleri orijinden geçen x-eksenine göre simetrik, simetri eksenleri ve doğrultmanları birbirine dik olan iki parabol parçasının birleşiminden oluşan kapalı eğridir.

**İspat:** $x = k$ tipindeki doğruların birim inversiyon altındaki inversi x = k$(|x| + |y|)^2$ denklemli kapalı eğrisidir. Bu kapalı eğriyi oluşturan parabol parçalarının simetri eksenleri

$$x = \frac{1}{4k} - |y|$$

ve doğrultmanları

$$x = -\frac{1}{4k} + |y|$$

dir. Ayrıca simetri ekseninin eğimi $-1$ iken

$$T_1 = (\frac{1}{16k}, \frac{3}{16k})$$

odağı

$$O_1 = (\frac{1}{8k}, \frac{1}{8k})$$

ve simetri ekseninin eğimi $+1$ iken

$$T_2 = (\frac{1}{16k}, \frac{-3}{16k})$$

odağı

$$O_2 = (\frac{1}{8k}, -\frac{1}{8k})$$

dir. Böylece inversiyon çemberinin merkezinden geçen iki parabol parçasının birleşimidir.

**Teorem 4.2.1.2.** Dikey doğruların merkezil taksi çemberine göre inversleri orijinden geçen x- eksenine göre simetrik, simetri eksenleri ve doğrultmanları birbirine dik olan iki parabol parçasının birleşiminden oluşan kapalı eğridir.

**İspat:** $x = k$ tipindeki doğruların**,** merkezi orijin yarıçapı r olan inversiyon çemberine göre inversi $r^2$x = k$(|x| + |y|)^2$ denklemli kapalı eğrisidir. Bu kapalı eğri simetri eksenleri

$$x = \frac{r^2}{4k} - |y|$$

ve doğrultman denklemleri

$$x = -\frac{r^2}{4k} + |y|$$

olan iki parabol belirtir. Simetri ekseninin eğimi $-1$ olan parabolün tepe noktası

$$T_1 = (\frac{r^2}{16k}, \frac{3r^2}{16k})$$

odağı

$$O_1 = (\frac{r^2}{8k}, \frac{r^2}{8k})$$

ve simetri ekseninin eğimi 1 olan parabolün tepe noktası

$$T_2 = (\frac{-3r^2}{16k}, \frac{r^2}{16k})$$

ve odağı

$$O_2 = (\frac{r^2}{8k}, \frac{-r^2}{8k})$$

dır. Bu parabol parçaları inversiyon çemberinin merkezinden geçer ve y-eksenine göre simetriktir. Ayrıca eksenler ve doğrultmanlar 1 ve -1 eğimli olup birbirine diktir.

**Sonuç 4.2.1.3.** Dikey doğruların merkezil taksi çemberine göre inversleri iki parabol parçasının birleşiminden oluşur ve bu parabollerin eksenleri ve doğrultmanları merkezi orijin olan ve köşe noktaları eksen ve doğrultmanların arakesit noktalarından oluşan merkezil taksi çemberi belirtir.

**İspat:** $x = k$ tipindeki doğruların**,** merkezi orijin yarıçapı r olan inversiyon çemberine göre inversi $r^2x = k(|x| + |y|)^2$ denklemli kapalı eğridir. Bu kapalı eğri simetri eksenleri

$$x = \frac{r^2}{4k} - |y|$$

ve doğrultmanları

$$x = -\frac{r^2}{4k} + |y|$$

olan iki parabol belirtir. Eksen ve doğrultmanlar x-ekseni üzerinde

$$\left(\frac{r^2}{4k}, 0\right) ve\ (-\frac{r^2}{4k}, 0)$$

noktalarında, x-ekseni üzerinde

$$\left(0, \frac{r^2}{4k}\right) ve\ \left(0, -\frac{r^2}{4k}\right)$$

noktalarında kesişir. Bu noktaları köşeler ve eksen ve doğrultmanları kenarlar olan

$$|x| + |y| = \frac{r^2}{4k}$$

olan merkezil taksi çemberi oluşur.

### 4.2.2. Merkezi $(m, n)$ yarıçapı $r$ olan çembere göre $x = k$ tipindeki doğruların inversleri

**Teorem 4.1.2.1.** Dikey doğruların merkezi orijinden farklı taksi çemberine göre inversleri merkezden geçen dik doğruya göre simetrik ve simetri eksenleri ve doğrultmanları ayraç doğrulara paralel ve birbirine dik olan inversiyon merkezinden geçen iki parabol parçasının birleşiminden oluşan kapalı eğridir.

**İspat:** $|x-m|+|y-n| = r$ inversiyon çemberine göre $P=(x,y)$ noktasının görüntüsü
$P' = (x', y')$ olsun. Burada

$$\begin{cases} x' = m + \dfrac{r^2(x-m)}{(|x-m|+|y-n|)^2} \\ y' = n + \dfrac{r^2(y-n)}{(|x-m|+|y-n|)^2} \end{cases}$$

dir (Bayar A ve Ekmekçi S. (2014). x = k doğrusunun bu taksi çembere göre inversi

$$(k-m)(|x-m|+|y-n|)^2 = r^2(x-m)$$

denklemine sahip iki parabol parçasından oluşan kapalı eğridir.

$\boldsymbol{x > m}$ **ve** $\boldsymbol{y > n}$ **veya** $\boldsymbol{x < m}$ **ve** $\boldsymbol{y < n}$ iken;

simetri ekseni

$$x = -\mathrm{y} + m + n + \frac{r^2}{4(k-m)}$$

,

doğrultmanı

$$x = y + m - n - \frac{r^2}{4(k-m)}$$

tepe noktası

$$T_1 = \left(\frac{r^2}{16(k-m)} + m, \frac{3r^2}{16(k-m)} + n\right)$$

ve odağı

$$O_1 = (\frac{r^2}{8(k-m)} + m, \frac{r^2}{8(k-m)} + n)$$

olan paraboldür.

$\boldsymbol{x > m}$ **ve** $\boldsymbol{y < n}$ **veya** $\boldsymbol{x < m}$ **ve** $\boldsymbol{y > n}$ iken;

simetri ekseni

$$x = \mathrm{y} + m - n + \frac{r^2}{4(k-m)}$$

doğrultmanı

$$x = -y + m + n - \frac{r^2}{4(k-m)},$$

tepe noktası

$$T_2 = (\frac{r^2}{16(k-m)} + m, -\frac{3r^2}{16(k-m)} + n)$$

ve odağı

$$O_2 = (\frac{r^2}{8(k-m)} + m, -\frac{r^2}{8(k-n)} + n)$$

olan iki parabol parçasının birleşiminden oluşan kapalı figürdür.

**Sonuç 4.2.2.2.** Dikey doğruların merkezil olmayan taksi çemberine göre inversleri iki parabol parçasının birleşiminden oluşur ve bu parabollerin eksenleri ve doğrultmanları merkezi inversiyon çemberinin merkezi olan ve köşe noktaları eksen ve doğrultmanların arakesit noktalarından oluşan taksi çemberi belirtir.

**İspat:** $x = k$ tipindeki doğruların merkezi $(m,n)$ yarıçapı yarıçapı $r$ olan inversiyon çemberine göre inversi

$$(k-m)(|x-m| + |y-n|)^2 = r^2(x-m)$$

denklemli kapalı eğridir. Bu kapalı eğri simetri ekseni

$$x = -y + m + n + \frac{r^2}{4(k-m)}$$

ve doğrultmanı

$$x = y + m - n - \frac{r^2}{4(k-m)}$$

olan parabol ile simetri ekseni

$$x = y + m - n + \frac{r^2}{4(k-m)}$$

ve doğrultmanı

$$x = -y + m + n - \frac{r^2}{4(k-m)}$$

olan parabol parçalarının birleşimidir. Eksen ve doğrultmanlar $y = n$ doğrusu üzerinde

$$\left(\mathrm{m} + \frac{\mathrm{r}^2}{4(\mathrm{k}-\mathrm{m})}, \mathrm{n}\right), \left(\mathrm{m} - \frac{\mathrm{r}^2}{4(\mathrm{k}-\mathrm{m})}, \mathrm{n}\right)$$

noktalarında, $x = m$ doğrusu üzerinde

$$\left(m, n + \frac{r^2}{4(k-m)}\right) ve \left(m, n - \frac{r^2}{4(k-m)}\right)$$

noktalarında kesişir. Bu noktaları köşeler, eksen ve doğrultmanları kenarlar ve merkezi (m,n) noktası olan

$$|x-m| + |y-n| = \frac{r^2}{4(k-m)}$$

denklemli taksi çemberi oluşur.

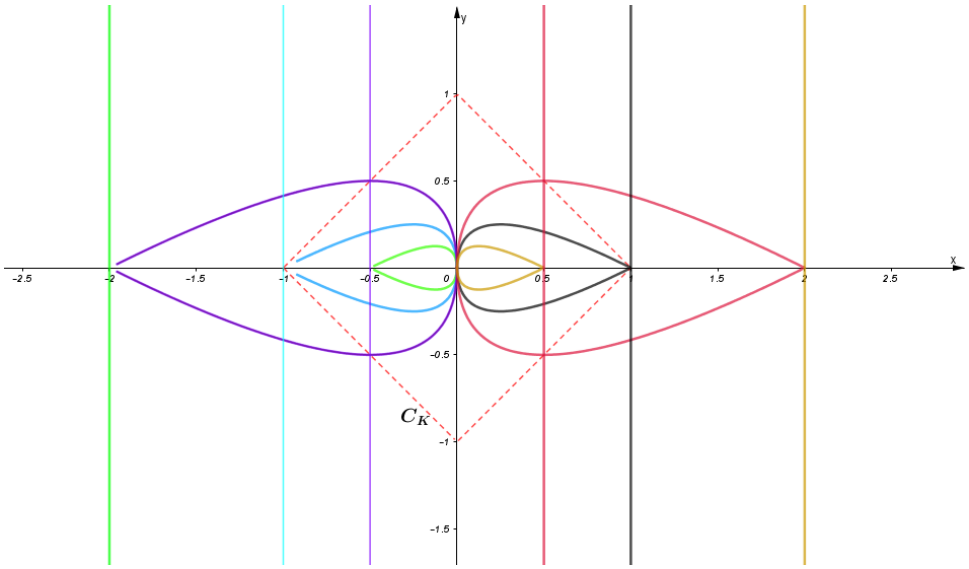
İnvers paraboller y=n doğrusuna göre simetriktir. $x = k$ doğrusu $x = m$ doğrusu ile iki parçalaya bölünür. Böylece her parçanın inversi,

$$|x-m| + |y-n| = \frac{r^2}{4(k-m)}$$

taksi çemberinin kendisine komşu olan kenarını eksen ve diğer kenarını doğrultman kabul eden ve inversiyon merkezinden geçen parabol parçasıdır.

### 4.2.3. Dikey paralel doğru demetinin taksi inversi

$\mathrm{x} = -\mathrm{c}$ tipindeki doğruların oluşturduğu demetin görüntüsü, c nin her değeri için inversiyon çemberinin merkezinden geçen, x −eksenine göre simetrik parabol parçalarından oluşan kapalı figürlerin oluşturduğu demetidir (Şekil 4.19).




Şekil 4.19 x = −c tipindeki doğru demetinin inversinin görüntüleri

### 4.3. Dikeysel ve Yataysal Doğruların İnversleri

Bu bölümde y = mx + n, $(m \neq 1)$ tipindeki doğruların inversleri incelenecektir. Bu tip doğrular orijinden geçmediğinden koordinat düzleminin üç bölgesinden geçerler. Koordinat düzleminin bir bölgesinde doğru parçası diğer iki bölgesinde ışına sahiptirler.

**Teorem 4.3.1.** Yataysal veya dikeysel orijinden geçmeyen doğruların birim taksi çemberine göre inversleri doğrunun koordinat düzleminin bölgelerinde ışın belirten kısımları orijinden geçen ve eğimi ile ters işaretli ayraç doğrusuna paralel eksenli uç noktaları doğrunun eksenleri kestiği noktaların inversleri olan bir parabol parçası ile doğrunun koordinat düzleminin bölgelerinde doğru parçası belirten kısmı yine aynı uç noktalarda sonlanan ve simetri ekseni diğer parabol parçasına dik olan parabol parçasının birleşiminden oluşan kapalı figürdür.

**İspat:** y = mx + n $(m \neq 1)$ doğrusunun, taksi birim çembere göre inversiyon altındaki görüntüsü, bu doğru denkleminde de x yerine $\frac{x}{(|x|+|y|)^2}$ ve y yerine $\frac{y}{(|x|+|y|)^2}$ alındığında

$$m\frac{x}{(|x|+|y|)^2}-\frac{y}{(|x|+|y|)^2}+n=0$$

olup

$$mx-y+n(|x|+|y|)^2=0$$

denklemi elde edilir.

Bu tip doğruların taksi birim çember inversiyon altındaki görüntüsü, çemberin üst köşesi ve orijinden geçen, simetri eksenleri birbirlerine dik ve eğimleri $\mp 1$ olan iki parabol parçasının oluşturduğu kapalı şekildir

İyi bilinmektedir ki

$$(AX+CY)^2+DX+EY+F=0$$

koniğinin simetri ekseni

$$AX+CY+\frac{AD+CE}{2(A^2+C^2)}=0\ *$$

denklemli doğrudur.

$$mx-y+n(|x|+|y|)^2=0$$

denklemi $x$ ve $y$ nin işaretine göre incelenebilir:

**a)** $x$ ve $y$ aynı işaretli iken yani I. ve IV. bölgelerde

$$n(x+y)^2+mx-y=0$$

parabolü

$$(x+y)^2+\frac{m}{n}x-\frac{1}{n}y=0 \qquad (1)$$

şeklinde yazılabilir. Bu parabolün simetri ekseni

$$(AX+CY)^2+DX+EY+F=0$$

denkleminde $A=1, C=1,\ D=\frac{m}{n}$ ve $E=-\frac{1}{n}$ alınarak

$$x+y+\frac{1.\left(\frac{m}{n}\right)+1(-\frac{1}{n})}{2(1^2+1^2)}=0$$

den

$$x + y + \frac{m-1}{4n} = 0 \quad (2)$$

denklemine sahip doğru olarak bulunur.

Simetri ekseni ile parabolün arakesit noktası tepe noktasıdır. Simetri ekseni ile parabolün denklemlerini ortak çözerek tepe noktasını elde ederiz. (1) ve (2) denkleminin ortak çözümü

$$\begin{cases} (x+y)^2 + \frac{m}{n}x - \frac{1}{n}y = 0 \\ x + y + \frac{m-1}{4n} = 0 \end{cases},$$

$$n\left(\frac{1-m}{4n}\right)^2 + mx + x + \frac{m-1}{4n} = 0,$$

$$\frac{(1-m)^2}{16n} + (m+1)x = \frac{1-m}{4n},$$

$$(m+1)x = \frac{1-m}{4n} - \frac{(1-m)^2}{16n},$$

$$(m+1)x = \frac{4(1-m) - (1-m)^2}{16n}$$

den

$$x = \frac{(1-m)(4-(1-m))}{16n(m+1)}$$

ve buradan

$$x = \frac{(1-m)(3+m)}{16n(m+1)}$$

olur, x değeri simetri ekseni denklemi

$$y = -x + \frac{(1-m)}{4n}$$

yerine yazılarak ve gerekli düzenlemeler yapılarak

$$y = \frac{(m-1)(3+m)}{16n(m+1)} + \frac{1-m}{4n},$$

$$y = \frac{(m-1)(3+m) + 4(1-m)(1+m)}{16n(m+1)},$$

$$y = \frac{(m-1)(3+m) + (-4)(1+m)}{16n(m+1)},$$

$$y = \frac{(m-1)(-3m-1)}{16n(m+1)} = \frac{(1-m)(3m+1)}{16n(m+1)}$$

olarak elde edilir. Böylece tepe noktası

$$T_1 = (x,y) = \left(\frac{(1-m)(3+m)}{(1+m)16n}, \frac{(1-m)(1+3m)}{(1+m)16n}\right),$$

$$T_1 = (x,y) == \left(-\frac{(m-1)(m+3)}{(m+1)16n}, -\frac{(m-1)(3m+1)}{(m+1)16n}\right)$$

olarak bulunur.

**b)** x ve $y$ zıt işaretli iken yani II. ve IV. Bölgelerde

$$n(x-y)^2 + mx - y = 0, n \neq 0$$

$$(x-y)^2 + \frac{m}{n}x - \frac{1}{n}y = 0 \qquad (3)$$

parabolü elde edilir. Bu parabolün simetri ekseni 1. duruma benzer olarak

$$x - y + \frac{1\frac{m}{n} + (-1).\left(\frac{-1}{n}\right)}{2(1^2 + (-1)^2)} = 0 \qquad (4)$$

den

$$x - y + \frac{m+1}{4n} = 0$$

olarak bulunur. (3) ve (4) denklemleri ortak çözülerek

$$n\left(\frac{m+1}{4n}\right)^2 + mx - (x + \frac{m+1}{4n}) = 0$$

,

$$\frac{(m+1)^2}{16n} + (m-1)x = (\frac{m+1}{4n})$$

,

$$(m-1)x = \frac{4(m+1) - (m+1)^2}{16n}$$

,

$$x = \frac{(m+1)(4-(m+1))}{(m-1)16n},$$

$$x = \frac{(m+1)(3-m)}{(m-1)16n},$$

$$y = x + \frac{(m+1)}{4n} = \frac{(m+1)(3-m)}{(m-1)16n} + \frac{(m+1)}{4n}$$

$$= \frac{(m+1)(3-m)+4(m+1)(m-1)}{(m-1)16n}$$

,

$$= \frac{(m+1)(3-m+4m-4)}{(m-1)16n}$$

,

$$= \frac{(m+1)(3m-1)}{(m-1)16n}$$

,

olur. Buradan tepe noktası

$$T_2 = \left(\frac{(m+1)(3-m)}{(m-1)16n}, \frac{(m+1)(3m-1)}{(m-1)16n}\right)$$

olarak elde edilir.

Bu parabollerin simetri eksenleri

$$\left(\frac{-m}{4n}, \frac{1}{4n}\right)$$

noktasında kesişmektedir.

Yataysal veya dikeysel orijinden geçmeyen doğruların birim taksi çemberine göre inversleri doğrunun koordinat düzleminin bölgelerinde ışın belirten kısımları orijinden geçen ve eğimi ile ters işaretli ayraç doğrusuna paralel eksenli uç noktaları doğrunun eksenleri kestiği noktaların inversleri olan bir parabol parçası ile doğrunun koordinat düzleminin bölgelerinde doğru parçası belirten kısmı yine aynı uç noktalarda sonlanan ve simetri ekseni diğer parabol parçasına dik olan parabol parçasının birleşiminden oluşur.

**Örnek 4.3.1**. $y = \frac{1}{3}x + 5$ doğrusunun birim taksi çemberine göre inversini

$$m = \frac{1}{3}, n = 5$$

için

$$x - 3y + 15(x + y)^2 = 0$$

denklemli parabol olur. Bu parabolün simetri ekseni

$$y = -x + \frac{m-1}{4n}$$

den

$$y = -x - \frac{1}{30}$$

olarak bulunur. Aynı zamanda tepe noktası

$$T_1 = (x, y) = \left(\frac{(1-m)(3+m)}{(1+m)16n}, \frac{(1-m)(1+3m)}{(1+m)16n}\right)$$

den m ve n yerine konularak

$$T_1 = \left(\frac{\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(3+\frac{1}{3}\right)}{\left(1+\frac{1}{3}\right)16.5}, \frac{\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+3\frac{1}{3}\right)}{\left(1+\frac{1}{3}\right)16.5}\right)$$

,

$$T_1 = (\frac{1}{48}, \frac{1}{80})$$

olur.

$$-3y + 15(x - y)^2 = 0$$

denklemine sahip ikinci parabolün simetri ekseni

$$y = x + \frac{\frac{1}{3}+1}{4.5},$$

,

$$y = x + \frac{1}{15}$$

ve tepe noktası

$$T_2 = \left( \frac{(m+1)(3-m)}{(m-1)16n}, \frac{(m+1)(3m-1)}{(m-1)16n} \right)$$

den

$$T_2 = \left( \frac{\left(\frac{1}{3}+1\right)\left(3-\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{3}-1\right)16.5}, \frac{\left(\frac{1}{3}+1\right)\left(3\frac{1}{3}-1\right)}{\left(\frac{1}{3}-1\right)16.5} \right)$$

den

$$T_2 = \left( \frac{-1}{15}, 0 \right)$$

olarak elde edilir.

$y = mx + n$ doğrusunun, merkezi $(0,0)$ yarıçapı r olan merkezil çember inversiyonuna göre dönüşümü altında inversi

x yerine $\frac{r^2 x}{(|x|+|y|)^2}$ ve y yerine $\frac{r^2 y}{(|x|+|y|)^2}$ yazılarak

$$\frac{mr^2 x}{(|x|+|y|)^2} + n = \frac{r^2 y}{(|x|+|y|)^2},$$

$$mr^2 x + n(|x| + |y|)^2 - r^2 y = 0$$

olan x ve y nin işaretine göre iki parabol denklemi elde edilir.
x ve y aynı işaretli iken

$$n(x+y)^2 + mr^2 x - r^2 y = 0 \qquad (5)$$

parabolü ve zıt işaretli iken

$$n(x-y)^2 + mr^2 x - r^2 y = 0 \qquad (6)$$

parabolü elde edilir. (5) parabolü

$$(x+y)^2 + \frac{mr^2}{n} x - \frac{r^2}{n} y = 0$$

şeklinde düzenlerek genel eksen

$$Ax + Cy + \frac{A.D + C.E}{2(A^2 + C^2)} = 0$$

denkleminde $A = 1, C = 1$, D $= \frac{mr^2}{n}$, E$= -\frac{r^2}{n}$, $F = D$ alınarak düzenleme ile

$$x + y + \frac{(\frac{mr^2}{n} - \frac{r^2}{n})}{2(1^2 + 1^2)} = 0,$$

$$x + y + \frac{(m-1)r^2}{4n} = 0,$$

$$y = -x + \frac{(1-m)r^2}{4n}$$

şeklinde bulunur. Tepe noktası parabol ile simetri ekseninin kesim noktası olduğundan denklemleri ortak çözülerek elde edilir.

$$n(x + y)^2 + mr^2x - r^2y = 0$$

da x + y yerine $\frac{(1-\mathrm{m})\mathrm{r}^2}{4\mathrm{n}}$ ve y yerine $\mathrm{y} = -\mathrm{x} + \frac{(1-\mathrm{m})\mathrm{r}^2}{4\mathrm{n}}$ yazılırsa

$$n\left(\frac{(1-m)r^2}{4n}\right)^2 + mr^2x - r^2\left(x - \frac{(1-m)r^2}{4n}\right) = 0,$$

$$\frac{(1-m)^2r^4}{16n} + (m+1)x = \frac{(1-m)r^2}{4n},$$

$$(m+1)x = \frac{\left(4(1-m)-(1-m)^2\right)r^2}{16n},$$

$$x = \frac{(1-m)(3+m)r^2}{16n(m+1)},$$

ve

$$y = -x + \frac{(1-m)r^2}{4n}$$

den

$$y = -\frac{(1-m)(3+m)r^2}{16n(m+1)} + \frac{(1-m)r^2}{4n}$$

ve

$$y = \frac{(1-m)(1+3m)r^2}{16n(m+1)}$$

olarak bulunur. Böylece tepe noktası

$$T_1 = \left( \frac{(1-m)(3+m)r^2}{16n(m+1)}, \frac{(1-m)(1+3m)r^2}{16n(m+1)} \right)$$

dır.

İkinci parabol

$$n(x-y)^2 + mr^2x - r^2y = 0,$$

$$(x-y)^2 + \frac{m}{n}r^2x - \frac{r^2}{n}y = 0$$

denklemine sahiptir.

$$A = 1, C = -1, D = \frac{m}{n}r^2, E = -\frac{r^2}{n}, F = 0$$

alınarak simetri ekseni

$$x - y + \frac{\frac{m}{n}r^2 + (-1)\left(-\frac{r^2}{n}\right)}{2(1^2 + (-1)^2)} = 0$$

dan

$$x - y + \frac{\left(\frac{m}{n}+\frac{1}{n}\right)r^2}{4} = 0\ ,$$

$$y = x + \frac{(m+1)r^2}{4n}$$

denklemine sahiptir. Tepe noktası, parabol denklemi ve simetri eksen denkleminin ortak çözümünden elde edilir.

$$\left[\frac{(m+1)r^2}{4n}\right]^2 + mr^2x - r^2\left(x + \frac{(m+1)r^2}{4n}\right) = 0$$

$$\frac{(m+1)^2r^2}{16n} + (m-1)x = \frac{(m+1)r^2}{4n}$$

$$(m-1)x = \frac{(m+1)r^2}{4n} - \frac{(m+1)^2r^2}{16n}$$

$$(m-1)x = (m+1)r^2 - \frac{(4-(m+1))}{16n}$$

$$x = \frac{(m+1)(3-m)}{(m-1)16n} r^2$$

ve

$$y = x + \frac{(m+1)r^2}{4n}$$

den

$$y = \frac{(m+1)(3-m)}{(m-1)16n} + \frac{(m+1)r^2}{4n}$$

ve gerekli sadeleştirmeler yapılarak

$$y = \frac{(m+1)(3m-1)}{(m-1)16n} r^2$$

elde edilir. Böylece

$$T_2 = \left( \frac{(m+1)(3-m)}{(m-1)16n} r^2, \frac{(m+1)(3m-1)}{16n(m-1)} r^2 \right)$$

olarak bulunur.

Sonuç olarak yataysal ve dikeysel $y = mx + n$ tipindeki doğruların merkezi $(0,0)$ ve yarıçapı r olan $|x| + |y| = r^2$ çemberine göre inversleri tepe noktası

$$T_1 = \left( \frac{(1-m)(3+m)}{16n(m+1)} r^2, \frac{(1-m)(1+3m)}{16n(m+1)} r^2 \right)$$

simetri ekseni

$$y = -x + \frac{(1-m)}{4n} r^2$$

olan

$$n(x+y)^2 + mr^2 x - r^2 y = 0$$

parabolü ile tepe noktası

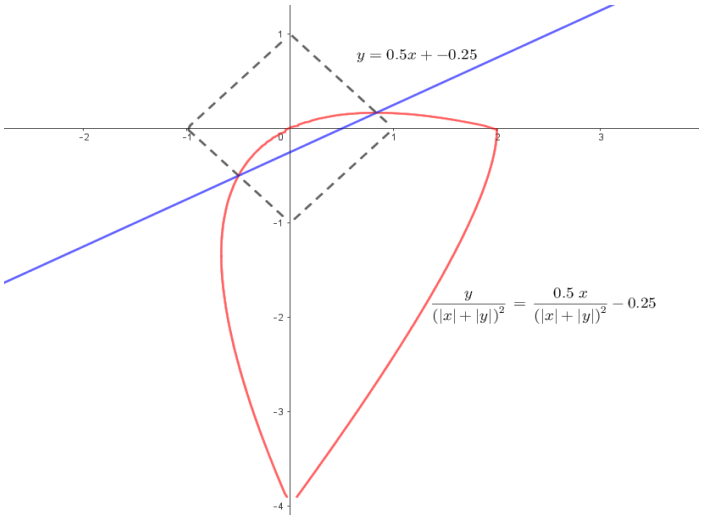
$$T_2 = \left( \frac{(m+1)(3-m)}{(m-1)16n} r^2, \frac{(m+1)(3m-1)}{16n(m-1)} r^2 \right)$$

ve simetri ekseni

$$y = x + \frac{(m+1)r^2}{4n}$$

olan Öklidyen parabol parçalarının oluşturduğu kapalı eğridir.

Şekil 4.20 y=$\frac{1}{2}x -$ 14 yataysal doğrusunun inversi verilmiştir.




Şekil 4.20 y $= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ yataysal doğrusunun inversi

**Örnek 4.3.2.** $3x + 5 = y$ doğrusunun inversinin tepe noktası

$$T_1 = \left(\frac{-3}{80}, \frac{-1}{16}\right)$$

simetri ekseni

$$y = -\frac{1}{10} - x$$

olan

$$3x - y + 5(x + y)^2 = 0$$

parabolü ile tepe noktası

$$T_2(0, \tfrac{1}{5})$$

ve simetri ekseni

$$y = x + \frac{1}{5}$$

olan

$$3x - y + 5(x - y)^2 = 0$$

parabolünün oluşturduğu kapalı eğridir. Bu parabol parçalarının uç noktalarından biri orijindir. Diğer uç noktada doğrunun y eksenini kestiği noktanın inversidir.

**Örnek 4.3.3.** $\frac{1}{3}$x + 7 = y doğrusunun inversinin tepe noktası

$$T_1 = \left(\frac{1}{112}, \frac{5}{336}\right)$$

simetri ekseni

$$y = \frac{1}{42} - x$$

olan

$$x - 3y + 21(x + y)^2 = 0$$

parabolü ile

$$T_2 = \left(\frac{-1}{21}, 0\right)$$

simetri ekseni

$$y = x + \frac{1}{21}$$

olan

$$x - 3y + 21(x - y)^2 = 0$$

parabolünün oluşturduğu kapalı eğridir. Bu parabol parçalarının uç noktaları orijin, diğer uç noktada doğrunun y eksenini kestiği noktanın inversidir.

**Örnek 4.3.4** $\frac{1}{5}x + 7 = y$ doğrusunun inversinin tepe noktası

$$T_1 = \left(\frac{1}{105}, \frac{2}{105}\right)$$

simetri ekseni

$$y = \frac{1}{35} - x$$

olan

$$x - 5y + 21(x + y)^2 = 0$$

Parabolü ile

$$T_2 = \left(\frac{-3}{80}, \frac{3}{560}\right)$$

Simetri ekseni

$$y = x + \frac{3}{70}$$

olan

$$x - 5y + 21(x - y)^2 = 0$$

parabolünün oluşturduğu kapalı eğridir. Bu parabol parçalarının uç noktalarından biri orijin diğer uç noktada doğrunun y eksenini kestiği noktanın inversidir.

### 4.4. Ayraç Doğruların Taksi İnversleri

Ayraç doğrularını iki durumda inceleyebiliriz:

#### 4.4.1. İnversiyon çemberinin kenar doğrularının taksi inversleri

**Teorem 4.4.1.1.** İnversiyon çemberinin kenar doğrularının inversleri; o kenarla, kenarın köşe noktalarından ve orijinden geçen ve tepe noktası orijin olan parabol parçasının birleşiminden oluşan kapalı eğridir.

**İspat:** Birim çembere göre inversiyon almak genelliği bozmaz. Birim çemberin kenar doğruları
$x + y = 1$ , $x - y = 1, -x + y = 1$ ve $-x - y = 1$ dir. Sırayla bu kenar doğrularının birim inversiyonlarını inceleyelim:

**a)** $x + y = 1$ doğru denklemlerinde x yerine $\frac{x}{(|x|+|y|)^2}$ ve $y$ yerine $\frac{y}{(|x|+|y|)^2}$ alınarak

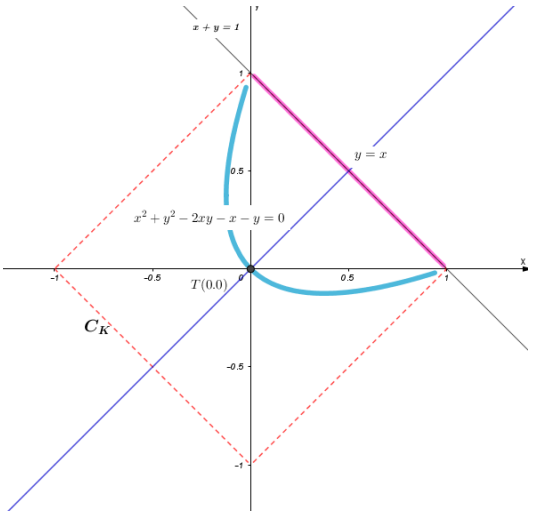
$$\frac{x}{(|x| + |y|)^2} + \frac{y}{(|x| + |y|)^2} = 1$$

den

$$x + y - (|x| + |y|)^2 = 0$$

invers denklemi elde edilir. Bu denklem $x > 0\ ve\ y > 0\ iken$ $x + y = 1$ doğru parçası elde edilir. Bu birim çemberin doğru ile çakışan kenarıdır.

$x > 0$ ve $y < 0$ veya $x < 0$ ve $y > 0\ iken$ $-x^2 - y^2 - 2xy + x + y = 0$ parabolü elde edilir. Bu parabolün tepe noktası orjin, simetri ekseni $y = x$ doğrusudur. Böylece birim çemberin kenarı ile simetri ekseni y=x doğrusu, tepe noktası orijin olan parabolün birleşiminden oluşan kapalı figür inversi oluşturur (Şekil 4.21).




Şekil 4.21 $x + y = 1$ doğrusunun inversiyonu

**ii)** $x - y = 1$ bu doğru denklemlerinde x yerine $\frac{x}{(|x|+|y|)^2}$ ve y yerine $\frac{y}{(|x|+|y|)^2}$ alınarak

$$\frac{x}{(|x| + |y|)^2} - \frac{y}{(|x| + |y|)^2} = 1$$

olup

$$x - y - (|x| + |y|)^2 = 0$$

denklemi elde edilir. $x > 0$ ve $y < 0$ iken $x - y = 1$ doğru parçası elde edilir. Bu birim çemberin doğru ile çakışan kenarıdır.

$x > 0$ ve $y > 0$ veya $x < 0$ ve $y < 0$ iken

$$x^2 + y^2 + 2xy - x + y = 0$$

parabolü elde edilir. Bu parabolün tepe noktası orjin ve simetri ekseni $y = -x$ doğrusudur.

Böylece birim çemberin kenarı ile simetri ekseni $y = -x$ doğrusu, tepe noktası orijin olan parabolün birleşiminden oluşan kapalı figür inversi oluşturur.

**iii)** $x + y = -1$ bu doğru denklemlerinde $x$ yerine $\frac{x}{(|x|+|y|)^2}$ ve y yerine $\frac{y}{(|x|+|y|)^2}$ alınarak

$$\frac{x}{(|x|+|y|)^2} + \frac{y}{(|x|+|y|)^2} = -1$$

den

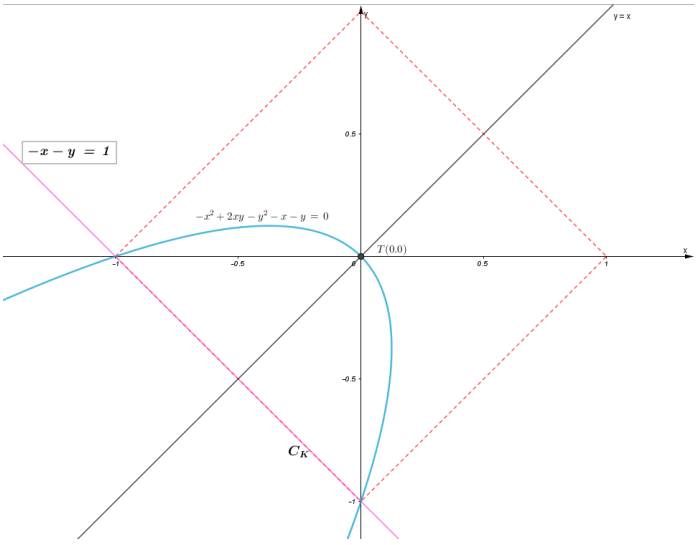
$$x + y + (|x| + |y|)^2 = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklem $x < 0$ ve $y < 0$ $iken$ $x + y = -1$ doğru parçasını belirtir. Bu birim çemberin doğru ile çakışan kenarıdır (Şekil 4.26).

$x > 0$ ve $y < 0$ veya $x < 0$ ve $y > 0$ iken de

$$x^2 + y^2 - 2xy + x + y = 0$$

parabolü elde edilir. Bu parabolün tepe noktası orijin, simetri ekseni $y = x$ doğrusudur (Şekil 4.22).




Şekil 4.22 – x − y = 1 doğrusunun inversiyonu

**iv)** $-x + y = 1$ kenar doğrusunda x yerine $\frac{x}{(|x|+|y|)^2}$ ve y yerine $\frac{y}{(|x|+|y|)^2}$ alınarak

$$-\frac{x}{(|x| + |y|)^2} + \frac{y}{(|x| + |y|)^2} = 1$$

denkleminden

$$-x + y - (|x| + |y|)^2 = 0$$

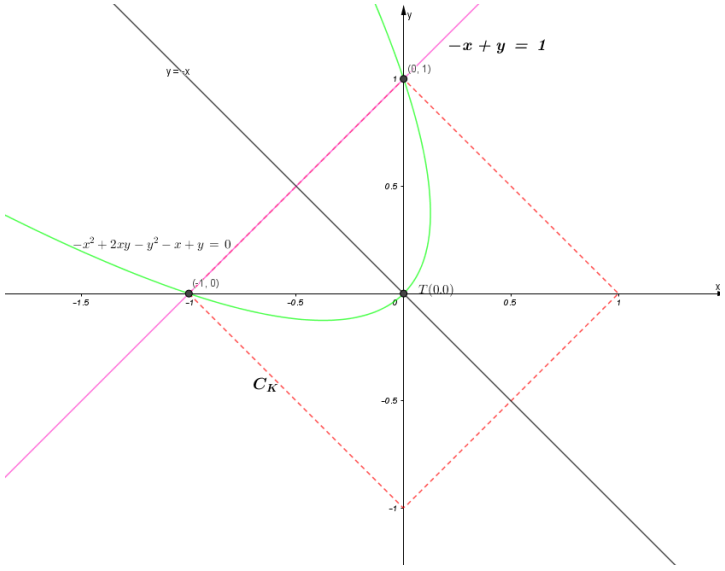
elde edilir. Bu denklem x ve y nin işaretine göre incelenebilir:

$x < 0\ ve\ y > 0\ iken - x + y = 1$ doğru parçası elde edilir. Bu birim çemberin doğru ile çakışan kenarıdır.

$x > 0\ ve\ y > 0$ veya $x < 0\ ve\ y < 0\ iken$

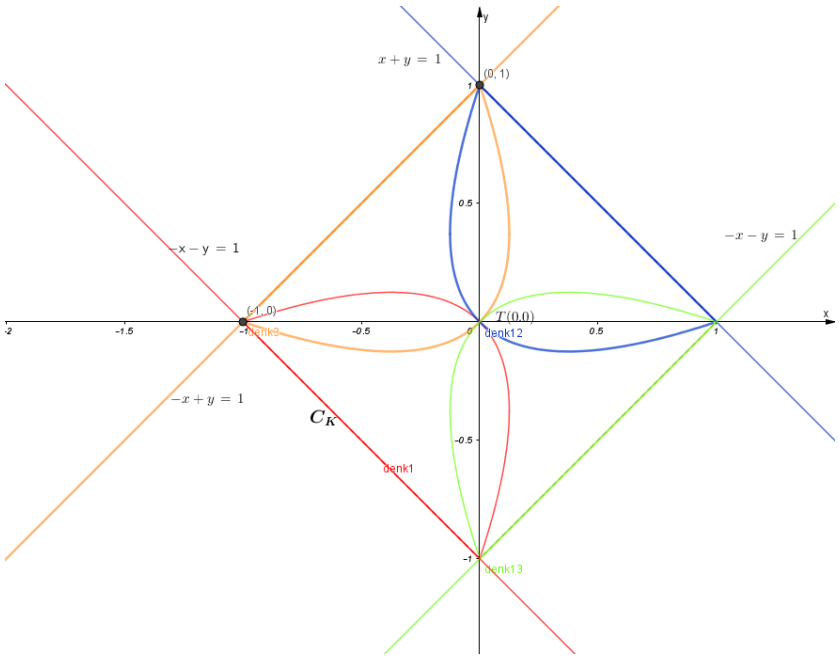
$$-x^2 - y^2 + 2xy - x + y = 0$$

parabolü elde edilir. Bu parabolün tepe noktası orjin ve simetri ekseni y=-x doğrusudur (Şekil 4.22).




Şekil 4.23 – x + y = 1 doğrusunun inversiyonu

Sonuç olarak her kenarı içeren doğrunun inversi, o kenarla, kenarın köşe noktalarından ve orijinden geçen ve tepe noktası orijin olan parabol parçasıyla birleşiminden oluşan kapalı eğridir (Şekil 4.24).




Şekil 4.24 İnversiyon çemberi kenarlarını oluşturan doğruların inversiyonu

### 4.4.2. İnversiyon çemberinin kenarına paralel doğrularının taksi inversleri

İnversiyon çemberinin kenarlarına paralel doğruların inversleri doğru parçası ve parabol parçasının birleşiminden oluşur.

**Teorem 4.4.2.1.** İnversiyon çemberinin kenarlarına paralel doğruların inversi kenara paralel doğru parçası ve tepe inversiyon merkezi olan parabol parçasının birleşiminden oluşur.

**İspat:** Birim çembere göre inversiyon almak genelliği bozmaz. $x + y = 1$ kenarına paralel $\mathrm{x} + \mathrm{y} = \mathrm{k}\ (k \neq 1)$ tipindeki doğrunun inversi

$$\frac{x}{(|x| + |y|)^2} + \frac{y}{(|x| + |y|)^2} = k$$

denkleminden

$$x + y - k(|x| + |y|)^2 = 0$$

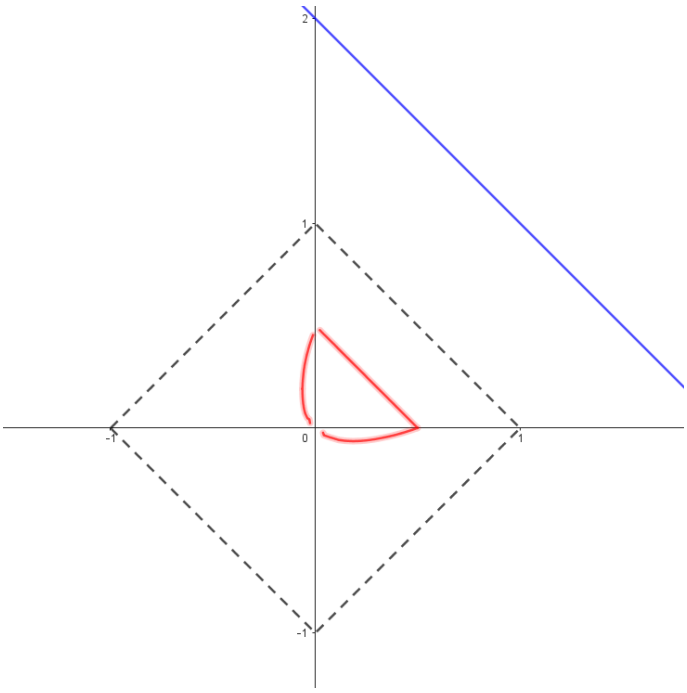
denklemine sahiptir. Bu denklemden $x > 0$ ve $y > 0$ $iken$ $\mathrm{x} + \mathrm{y} = \frac{1}{k}$ doğru parçası elde edilir. Bu birim çemberin kenarına paralel doğru parçasıdır. Bu doğru parçasının uç noktaları $\mathrm{x} + \mathrm{y} = \mathrm{k}$ doğrusunun eksenleri kestiği noktaların inversleridir.

$x > 0$ $ve$ $y < 0$ veya $x < 0$ $ve$ $y > 0$ iken

$$kx^2 + ky^2 - 2kxy - x - y = 0$$

parabolü elde edilir. Bu parabolün tepe noktası orijin ve simetri ekseni $y = x$ doğrusudur.

Bu durumda doğrunun eksenleri kestiği noktaların inverslerini birleştiren doğru parçası ile bu noktalardan geçen ve tepe noktası orjin olan parabol parçasının birleşiminde oluşan kapalı eğri, kenara paralel olan doğrunun inversidir (Şekil 4.25).




Şekil 4.25 $x + y = 2$ doğrusunun inversiyonu

İnversiyon çemberinin diğer kenarlarına paralel doğruların inversleri de doğrunun eksenleri kestiği noktaların inverslerini birleştiren doğru parçası ile bu noktalardan geçen ve tepe noktası orjin olan parabol parçasının birleşiminde oluşan kapalı eğridir.

Sonuç olarak inversiyon çemberinin kenarlarına paralel doğruların inversleri doğrunun inversiyon merkezinden geçen koordinat eksenlerine paralel doğruları kestiği noktaların inverslerini birleştiren doğru parçası ile bu noktalardan geçen ve tepe noktası inversiyon merkezi olan parabol parçasının birleşiminde oluşan kapalı eğridir.

## 4.5. İnversiyon Çemberinin Ayırdığı Bölgelere Göre Doğru Parçalarının İnversleri

**Teorem 4.5.1.**Taksi inversiyon çemberinin ayırdığı bölgelerden sadece birinde kapsanan doğru parçasının inversi: doğru parçası ulunduğu bölgedeki inversiyon çemberinin kenarına paralel ise kendisine paralel doğru parçasıdır, paralel değilse bir parabol parçasıdır.

**İspat:** Taksi inversiyon çemberinin merkezini orijin yarıçapını r alabiliriz. I. Bölgede alınan

$$y = -x + b \ (0 < x < \infty \text{ ve } 0 < y < \infty)$$

denklemli doğru parçası, inversiyon çemberi kenarına paraleldir. Bu doğru parçasının taksi inversi

$$\frac{x'}{(|x'| + |y'|)^2} + \frac{y'}{(|x'| + |y'|)^2} = b$$

$$x' + y' = b((|x| + |y|)^2)$$

denklemin

$$y = -x + \frac{r}{b} \ (0 < x < \infty \ ve \ 0 < y < \infty)$$

denklemli doğru parçasıdır (Şekil 4.26). Aynı bölgedeki

$$y = x + b \ (0 < x < \infty \ ve \ 0 < y < \infty)$$

denklemli doğru parçası, inversiyon çemberi kenarına paralel değildir. Bu doğru parçasının taksi inversi

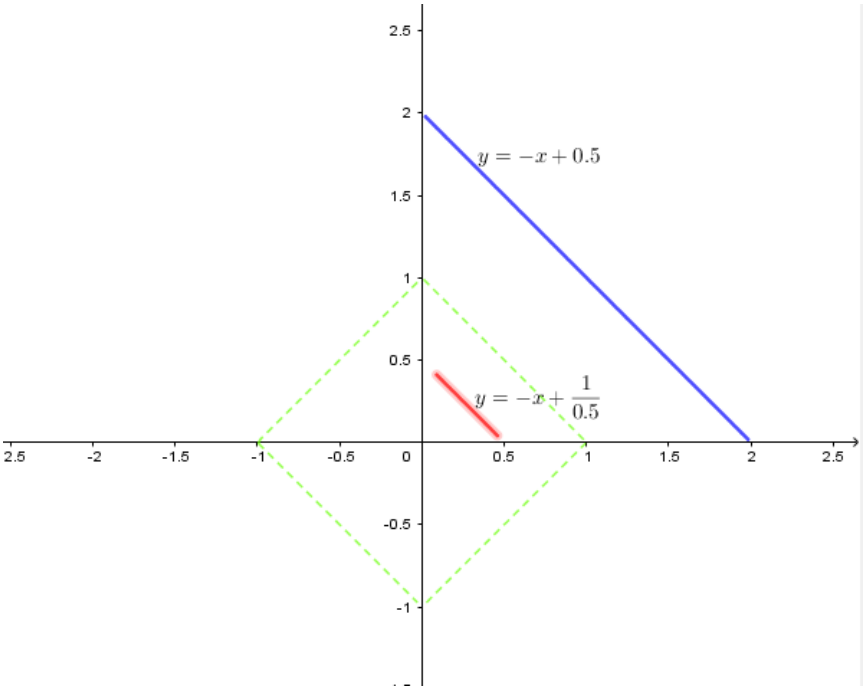
$$\frac{y'}{(|x'| + |y'|)^2} - \frac{x'}{(|x'| + |y'|)^2} = b$$

$$y' - x' - b \ ((|x'| + |y'|)^2) = 0 \ (0 < x' < \infty \ ve \ 0 < y' < \infty)$$

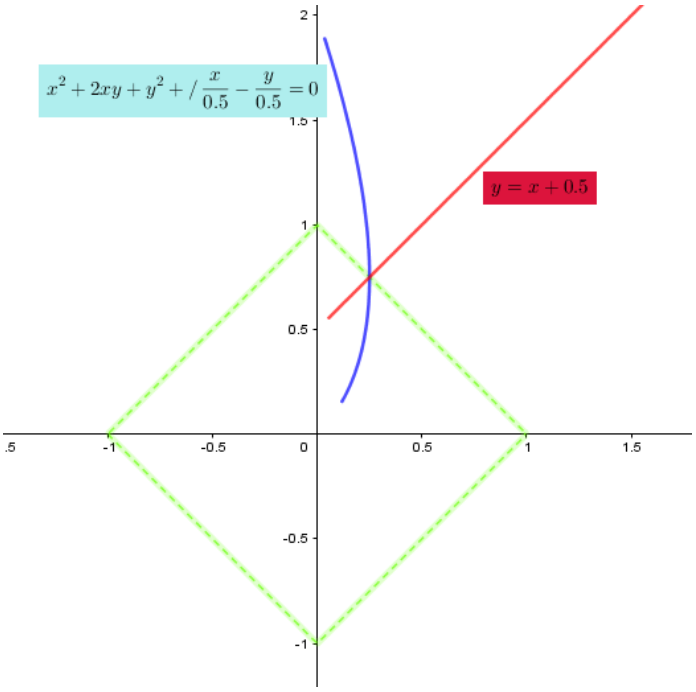
$$bx'^2 + 2bx'y' + by'^2 + x' - y' = 0$$

$$x'^2 + 2x'y' + y'^2 + \frac{x'}{b} - \frac{y'}{b} = 0$$

denklemine sahip parabol parçasıdır (Şekil 4.27).




Şekil 4.26 $y = -x + \frac{1}{2}$ $(0 < x < \infty$ ve $0 < y < \infty)$ doğru parçasının birim inversi




Şekil 4. 27 $y = x + \frac{1}{2}$ $(0 < x < \infty$ ve $0 < y < \infty)$ doğru parçasının birim inversi

# 5. TAKSİ ÇEMBERLERİN TAKSİ ÇEMBER İNVERSİYONUNA GÖRE İNVERSLERİ

Bu bölümde taksi çemberlerin taksi çembersel inversleri, inversiyon çemberinin ayırdığı düzlemsel bölgelerde kalan parçalarının durumlarına göre incelenmiştir.

## 5.1 Taksi İnversiyon Çemberinin Sadece Bir Bölgesindeki Taksi Çemberlerin İnversiyonu

**Teorem 5.1.1.** İnversiyon çemberinin ayırdığı bölgelerin sadece birinde kapsanan ve herhangi bir kenarı merkezden geçen ayraç doğrular üzerinde olmayan taksi çemberinin inversiyonu çemberin bulunduğu bölgede iki paralel doğru parçası ve 2 parabol parçasının birleşimi ile oluşan kapalı şekildir.

**İspat:** İnversiyon çemberinin ayırdığı bölgelerin sadece birinde kapsanan taksi çemberinin iki kenarı inversiyon çemberin kenarına paralel diğer iki kenarı paralel değildir. Teorem 4.5.1 den kenara paralel paralel doğru parçalarına ve paralel olmayan kenarlarda parabol parçalarına dönüşürler. Böylece inversiyon çemberinin ayırdığı bölgelerin sadece birinde kapsanan taksi çemberinin inversiyonu, iki paralel doğru parçası ve 2 parabol parçasının birleşimi ile oluşan kapalı şekildir.

**Örnek 5.1.1** Merkezi $(\frac{3}{4}, 1)$ yarıçapı $\frac{1}{2}$ olan

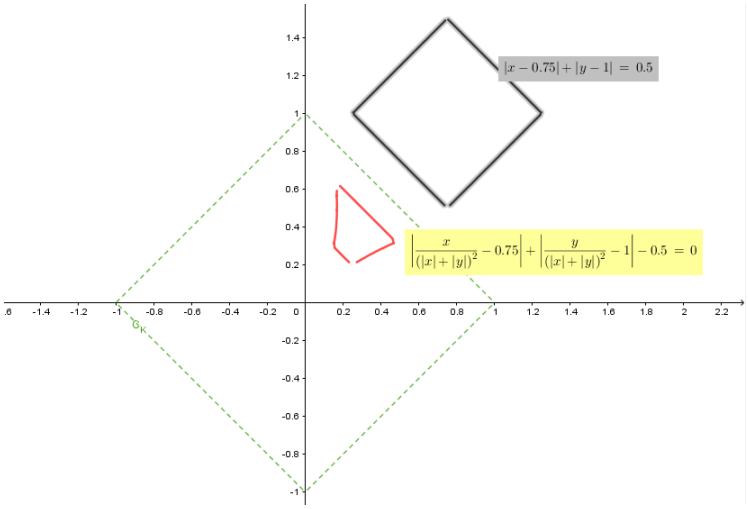
$$|x - \frac{3}{4}| + |y - 1| = \frac{1}{2}$$

taksi çemberinin merkezil birim taksi çember altındaki inversiyonu

$$\left|\frac{x'}{(|x'| + |y'|)^2} - \frac{3}{4}\right| + \left|\frac{y'}{(|x'| + |y'|)^2} - 1\right| - \frac{1}{2} = 0$$

denklemli iki parabol ve iki doğru parçasından oluşur (Şekil 5.1).

İnversiyonu alınacak çemberin kenarlarından herhangi birisinin uzantısı merkezden geçmiyorsa 2 doğru parçası ve 2 parabolün birleşimi ile oluşan kapalı şekildir.




Şekil 5.1 $|x-\frac{3}{4}|+|y-1|=\frac{1}{2}$ taksi çemberinin birim taksi çembersel inversiyonu

**Teorem 5.1.2.** İnversiyon çemberinin ayırdığı bölgelerin sadece birinde kapsanan ve herhangi bir kenarı merkezden geçen ayraç doğrular üzerinde olan taksi çemberinin inversiyonu çemberin bulunduğu bölgede üç doğru parçası ve bir parabol parçasının birleşiminden oluşan kapalı şekildir.

**İspat:** İnversiyon çemberinin ayırdığı bölgelerin sadece birinde kapsanan taksi çemberinin iki kenarı inversiyon çemberin kenarına paralel, diğer iki kenardan biri merkezden geçen ayraç doğru üzerinde ve diğeri de ona paralel doğru üzerindedir. Teorem 4.5.1 den kenara paralel olan kenarlar paralel doğru parçalarına ve paralel olmayan kenarlardan merkezden geçen ayraç doğru üzerinde olan kenar merkezden geçen doğru üzerinde doğru parçasına ve diğer kenar parabol parçasına dönüşür. Yani, üç doğru parçası ve bir parabol parçasının birleşimi ile oluşan kapalı şekildir.

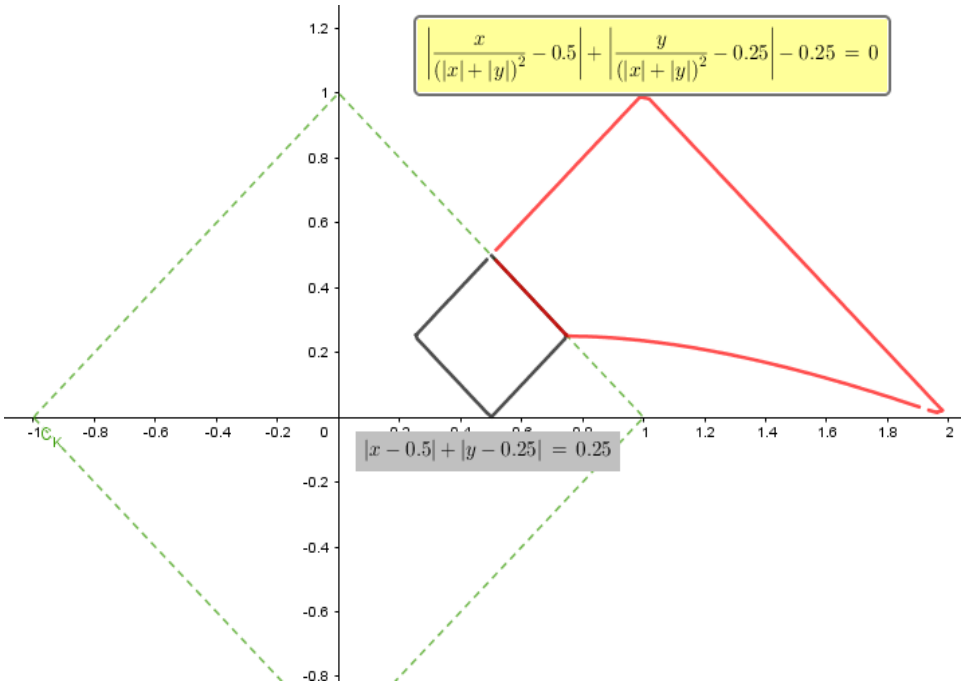
**Örnek 5.1.3.** Merkezi $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ yarıçapı $\frac{1}{4}$ olan

$$|x-\frac{1}{2}|+|y-\frac{1}{4}|=\frac{1}{4}$$

taksi çemberinin bir kenarı $y=x$ doğrusu üzerindedir. Bu taksi çemberinin birim taksi çemberi altındaki inversiyonu

$$\left|\frac{x'}{(|x'|+|y'|)^2}-\frac{1}{2}\right|+\left|\frac{y'}{(|x'|+|y'|)^2}-\frac{1}{4}\right|-\frac{1}{4}=0$$

denklemine sahiptir ve 3 doğru parçası ve 1 parabol parçasının birleşimi ile oluşan kapalı şekildir (Şekil 5.2).




Şekil 5.2 $|x-\frac{1}{2}|+|y-\frac{1}{4}|=\frac{1}{4}$ çemberinin birim taksi çemberi altındaki inversiyonu

## 5.2 Taksi İnversiyon Çemberinin İki Bölgesinde Yer Alan Taksi Çemberlerin İnversiyonu

Taksi inversiyon çemberinin ayırdığı bölgelerin ikisinde yer alan taksi çemberin inversiyonu taksi çemberin kenar doğrularının durumuna göre incelenebilir.

### 5.2.1. İki kenarı inversiyon merkezinden geçen ayraç doğruları üzerinde olan taksi çemberin inversi

İki kenarı inversiyon merkezinden geçen ayraç doğruları üzerinde olan taksi çemberin inversiyonu Teorem 4.5.1 den 2 ışın ve 2 doğru parçasından oluşan şekildir.

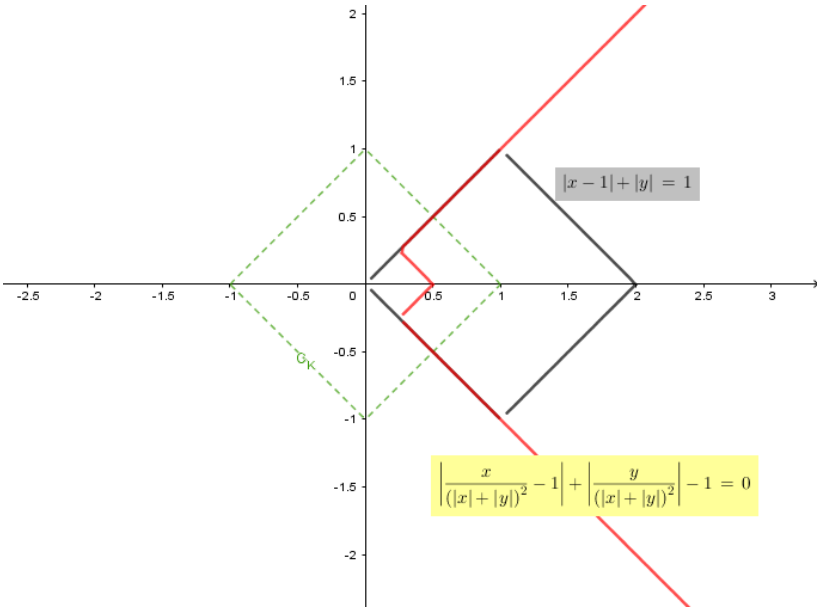
**Teorem 5.2.1.1.** Bir köşesi inversiyon çemberinin merkezinde olan taksi çemberin inversiyonu 2 ışın ve 2 doğru parçasından oluşur.

**İspat:** Bir köşesi inversiyon çemberinin merkezinde olan çemberin iki kenarı merkezden geçen ayıraç doğruların üzerinde olduklarından ve merkezden geçen doğrular invaryant kaldığından bu iki kenar ışına dönüşür, çemberin diğer iki kenarı inversiyon çemberinin bulundukları bölgelerdeki kenarlarına paraleldir olduğundan Teorem 4.5.1 den inversleri doğru parçalarıdır.

**Örnek 5.2.1.2.** Merkezi (1,0) yarıçapı 1 olan $|x-1|+|y|=1$ taksi çemberinin birim taksi çemberi altındaki inversiyonu

$$\left|\frac{x'}{(|x'|+|y'|)^2}-1\right|+\left|\frac{y'}{(|x'|+|y'|)^2}\right|-1=0$$

denklemli iki ışın ve iki doğru parçasından oluşan şekildir (Şekil 5.3).



Şekil 5.3 $|x-1|+|y|=1$ çemberinin birim taksi çemberi altındaki inversiyonu

### 5.2.2. Merkezi inversiyon çemberinin eksenleri üzerinde olan ve köşeleri inversiyon merkezi olmayan taksi çemberlerin inversiyonu

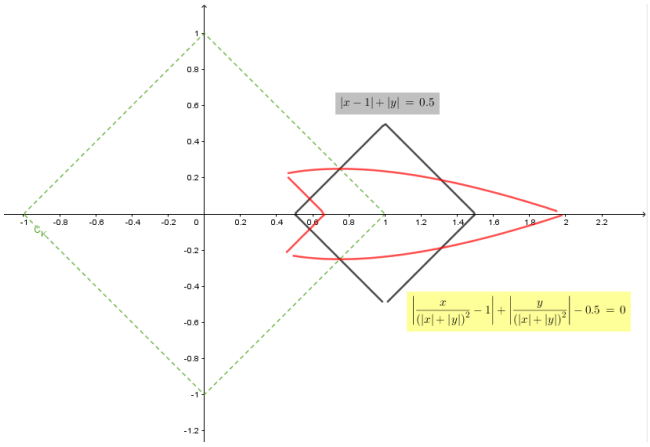
**Teorem 5.2.2.1.** Bir köşesi inversiyon çemberinin merkezinde olmayan ve merkezi inversiyon çemberinin eksenleri üzerinde olan taksi çemberin inversiyonu 2 doğru parçası ve parabol parçasının birleşimi ile oluşan kapalı şekildir.

**İspat:** Teorem 4.5.1 den merkezi inversiyon çemberinin eksenleri üzerinde ve köşesi inversiyon merkezinde olmayan taksi çemberinin inversiyon çemberinin kenarlarına paralel olan iki kenarı kenarlara paralel doğru parçalarına ve diğer iki kenar inversiyon çemberinin kenarlarına paralel olmadığından ve uzantıları merkezden geçmediğinden inversiyonları parabol parçalarıdır. Böylece invers merkezinin bulunduğu eksene göre simetrik 2 doğru parçası ve parabol parçasının birleşimi ile oluşan kapalı şekildir.

**Örnek 5.2.2.1** Merkezi $(1,0)$ yarıçapı $\frac{1}{2}$ olan $|x-1|+|y|=\frac{1}{2}$ çemberin merkezil taksi birim çember altındaki inversiyonu

$$\left|\frac{x'}{(|x'|+|y'|)^2}-1\right|+\left|\frac{y'}{(|x'|+|y'|)^2}\right|-\frac{1}{2}=0$$

denklemine sahiptir. Merkezin bulunduğu eksene göre simetrik 2 doğru parçası ve 2 parabol parçasının birleşimi ile oluşan kapalı şekildir (Şekil 5.4).




Şekil 5.4 $|x-1|+|y|=\frac{1}{2}$ çemberinin birim taksi çemberi altındaki inversiyonu

### 5.2.3. Merkezi inversiyon çemberinin eksenleri ve merkezden geçen ayraç doğrular üzerinde olmayan taksi çemberlerin inversiyonu

**Teorem 5.2.3.1.** Merkezi inversiyon çemberinin eksenleri ve merkezden geçen ayraç doğrular üzerinde taksi çemberlerin inversiyonu 3 doğru ve 3 parabol parçasının birleşimi ile oluşan kapalı şekildir.

**İspat:** Merkezi inversiyon çemberinin eksenleri ve merkezden geçen ayraç doğrular üzerinde olmayan taksi çemberi inversiyon çemberinin iki komşu bölgesinde yer alır. Bir bölgede taksi çemberin iki doğru parçası ve iki dik doğru parçası varken diğer komşu bölgede taksi çemberin birbirine dik iki doğru parçası bulunur. Bulundukları bölgelere göre bu doğru parçaları Teorem 4.5.1den inversiyon 3 doğru ve 3 parabol parçasının birleşimi ile oluşan kapalı şekildir.

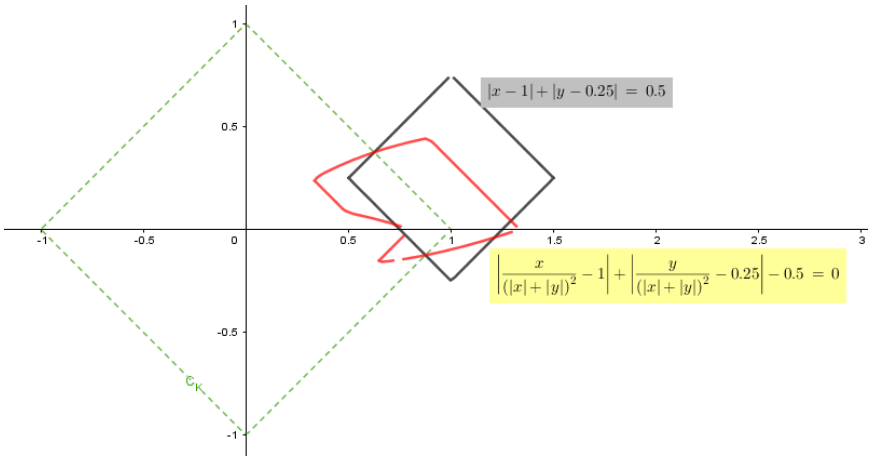
**Örnek 5.2.3.2** Merkezi (1,4) yarıçapı $\frac{1}{2}$ olan

$$|x-1|+|y-\frac{1}{4}|=\frac{1}{2}$$

taksi çemberinin birim taksi çemberi altındaki inversiyonu

$$\left|\frac{x'}{(|x'|+|y'|)^2}-1\right|+\left|\frac{y'}{(|x'|+|y'|)^2}-\frac{1}{4}\right|-\frac{1}{2}=0$$

denklemli 3 doğru parçası ve 3 parabol parçasının birleşimi ile oluşan kapalı şekildir. (Şekil 5.5)




Şekil 5.5 $|x-1|+|y-\frac{1}{4}|=\frac{1}{2}$ çemberinin birim taksi çemberi altındaki inversiyonu

## 5.3. Üç Bölgeden Geçen Taksi Çemberlerin İnversiyonu

### 5.3.1. Bir kenarı inversiyon çemberi merkezinden geçen çemberlerin inversleri

**Teorem 5.3.1.1.** Bir kenarı merkezden geçen çemberlerin inversiyonu 3 doğru parçası, 2 ışından ve 2 parabol parçasının birleşimi ile oluşan kapalı şekildir.

**İspat:** Çemberin bir kenarı inversiyon merkezinden geçiyorsa, çember inversiyon çemberinin ayırdığı bölgelerin üçünden geçer. Merkezden geçen kenarlar simetrik iki bölgede yer aldığından simetrik iki ışına dönüşür. Bu iki simetrik bölgede yer alan diğer iki kenara ait doğru parçaları, Teorem 4.5.1 den bu bölgedeki inversiyon çemberinin kenarlarına paralel doğru parçalarına dönüşür. Bu iki simetrik bölgenin arasında kalan bölgede taksi çemberinin bir kenarı inversiyon çemberinin kenarına paralel, diğer iki kenarı o bölgedeki kenara diktir. Teorem 4.5.1 den inversiyon çemberinin kenarına paralel olan parçanın inversi yine paralel olan doğru parçasıdır. Bu bölgedeki diğer kenar parçanın inversleri merkezleri birleştiren doğruya göre simetrik iki parabol parçasıdır.

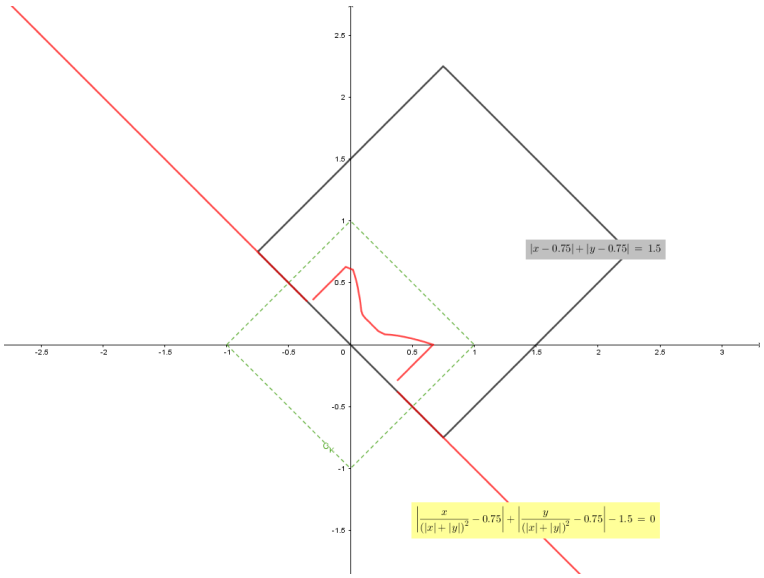
**Örnek 5.3.1.2.** Merkezi $(\frac{3}{4},\frac{3}{4})$ yarıçapı $\frac{3}{2}$ olan

$$|x-\frac{3}{4}|+|y-\frac{3}{4}|=\frac{3}{2}$$

taksi çemberinin birim taksi çemberi altındaki inversiyonu

$$\left|\frac{x'}{(|x'|+|y'|)^2}-\frac{3}{4}\right|+\left|\frac{y'}{(|x'|+|y'|)^2}-\frac{3}{4}\right|-\frac{3}{2}=0$$

denklemli ve 2 ışın, 3 doğru ve 2 parabol parçasının birleşimi ile oluşan şekildir.(Şekil 5.6)




Şekil 5. 6 $|x-\frac{3}{4}|+|y-\frac{3}{4}|=\frac{3}{2}$ çemberinin birim taksi çemberi altındaki inversiyonu

### 5.3.2. Herhangi bir kenarı inversiyon çemberi merkezinden geçmeyen çemberlerin inversleri

**Teorem 5.3.2.1.** Herhangi bir kenarı inversiyon çemberi merkezinden geçmeyen ve üç bölgede bulunan taksi çemberin inversi doğru parçası ve 4 parabol parçasının birleşimi ile oluşan kapalı şekildir.

**İspat:** Herhangi bir kenarı inversiyon çemberi merkezinden geçmeyen ve üç bölgeden geçen taksi çemberin inversiyon çemberinin ayırdığı komşu üç bölgede sırayla kenarlara paralel ve dik, iki paralel ve bir dik, bir paralel ve bir dik olan doğru parçaları yer alır. Bunların inverslerinin birleşimi Teorem 4.5.1 den 4 doğru parçası ve 4 parabol parçasının birleşimi ile oluşan kapalı şekildir.

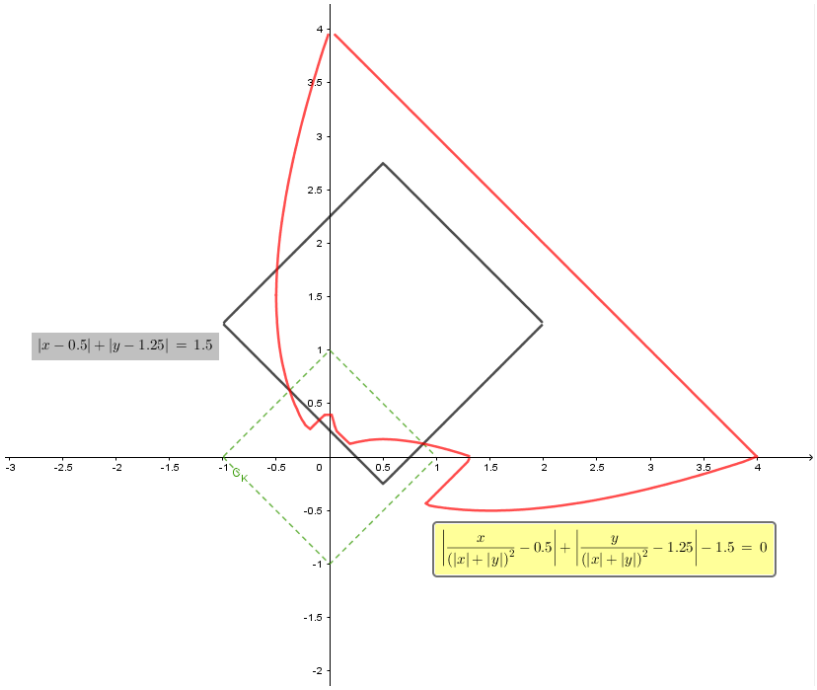
**Örnek 5.3.2.2.** Merkezi $(\frac{1}{2},\frac{5}{4})$ yarıçapı $\frac{3}{2}$ olan

$$|x-\frac{1}{2}|+|y-1|=\frac{3}{2}$$

taksi çemberinin birim taksi çemberi altındaki inversiyonu

$$\left|\frac{x'}{(|x'|+|y'|)^2}-\frac{1}{2}\right|+\left|\frac{y'}{(|x'|+|y'|)^2}-\frac{5}{4}\right|-\frac{3}{2}=0$$

denklemli 4 doğru parçası ve 4 parabol parçasının birleşimi ile oluşan kapalı şekildir (Şekil 5.7).




Şekil 5. 7 $|x-\frac{1}{2}|+|y-\frac{5}{4}|=\frac{3}{2}$ çemberinin birim taksi çemberi altındaki inversiyonu

### 5.4. İnversiyon Çemberinin Dört Bölgesinden Geçen Taksi Çemberlerin İnversleri

İnversiyon çemberinin ayırdığı dört bölgeden geçen taksi çemberin merkezi inversiyon çemberi ile aynı veya farklı olabilir.

#### 5.4.1. İnversiyon çemberi ile aynı merkezli taksi çemberin inversi

Merkezi inversiyon çemberi ile aynı olan çemberlerin inversiyonu 4 doğru parçasından oluşan taksi çemberidir (Bayar ve Ekmekçi, 2014).

**Örnek 5.4.1.1.** Merkezi $(0\ ,0)$ yarıçapı $\frac{1}{2}$ olan

$$|x\ |+|y|=\frac{1}{2}$$

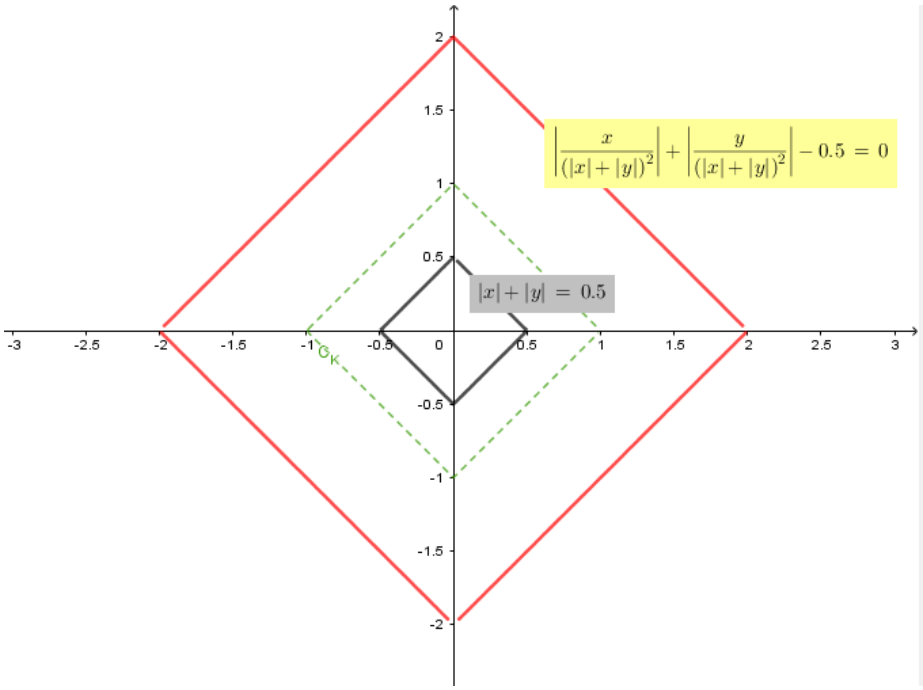
taksi çemberinin birim taksi çemberi altındaki inversiyonu

$$\left|\frac{x\prime}{(|x'|+|y\prime|)^2}\right|+\left|\frac{y\prime}{(|x'|+|y\prime|)^2}\right|-\frac{1}{2}=0$$

den

$$|x\,| + |y| = 2$$

denklemli merkezil taksi çemberidir (Şekil 5.8). Yani taksi çember taksi çembere dönüşür.




Şekil 5.8 $|x| + |y| = \frac{1}{2}$ çemberinin birim taksi çemberi altındaki inversiyonu

### 5.4.2. İnversiyon çemberi ile aynı merkezli olmayan taksi çemberin inversi

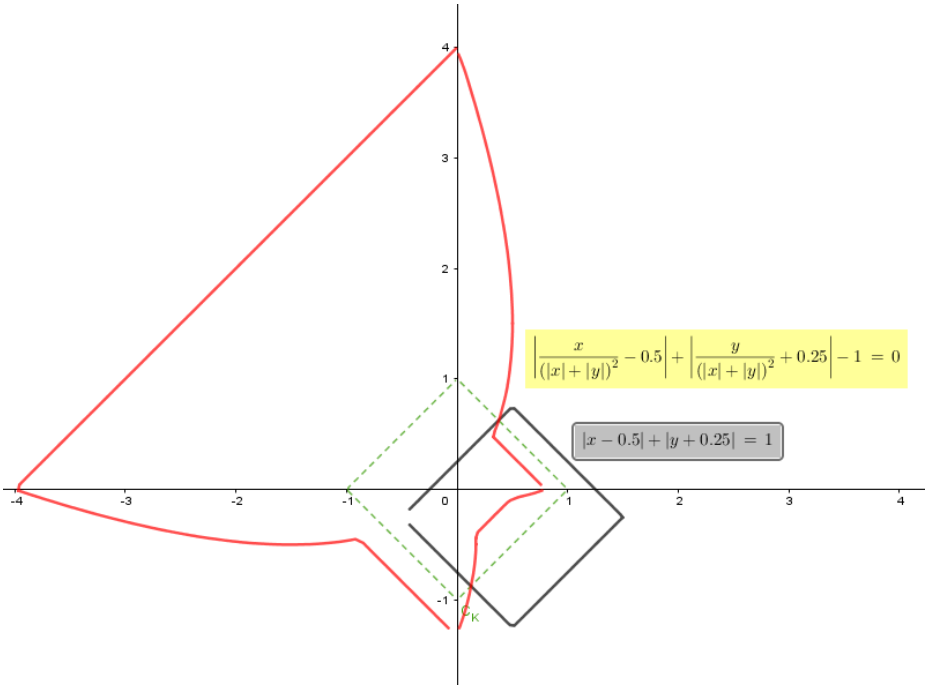
**Teorem 5.4.2.1.** İnversiyon çemberi ile farklı merkezli ve inversiyon çemberinin ayırdığı dört bölgeden geçen taksi çemberinin inversi 4 doğru parçası ve 4 parabol parçasının birleşimi ile oluşan kapalı şekildir.

**İspat:** İnversiyon çemberi ile farklı merkezli ve inversiyon çemberinin ayırdığı dört bölgeden geçen taksi çemberi her bölgede inversiyon çemberinin kenarına paralel bir doğru parçası, iki bölgede paralel olmayan bir doğru parçası ve bir bölgede de paralel olmayan iki birbirine paralel doğru parçasına sahiptir. Böylece invers Teorem 4.5.1 den 4 doğru parçası ve 4 parabol parçasının birleşimi ile oluşan kapalı şekildir.

**Örnek 5.4.2.1.** Merkezi $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ yarıçapı 1 olan $|x - \frac{1}{2}| + |y - \frac{1}{4}| = 1$ taksi çemberinin birim taksi çemberi altındaki inversiyonu

$$\left|\frac{x'}{(|x'| + |y'|)^2} - \frac{1}{2}\right| + \left|\frac{y'}{(|x'| + |y'|)^2} - \frac{1}{4}\right| - 1 = 0$$

denklemli doğru parçası ve 4 parabol parçasının birleşimi ile oluşan kapalı şekildir (Şekil 5.9).




Şekil 5.9 $|x - \frac{1}{2}| + |y + \frac{1}{4}| = 1$çemberinin birim taksi çemberi altındaki inversiyonu

# 6. TAKSİ ÇEMBER İNVERSİYONU ve FRAKTALLAR

Bu bölüm Ramirez'in "GENERATING FRACTAL PATTERNS BY USING p-CIRCLE INVERSION" adlı makalesi incelenerek oluşturulmuştur.

Çemberin inversiyonu, düzlemdeki en ilginç dönüşümlerden biridir. Pergalı Apollonius tarafından son kitabı Plane Loci'de tanıtılmış ve 1830'larda Steiner tarafından sistematik olarak uygulanmıştır. Bu dönüşüm kullanılarak geometrideki çeşitli teoremler ve problemler incelenebilir. Pappus zinciri, Miquel teoremi, Feuerbach teoremi, Ptolemy teoremi, Steiner porizmi, Apollonius çemberi bunlara örnektir.

Geometrideki birçok zorlu problem, inversiyonlarla daha kolay çözülebilir hale gelmektedir. Litaratürde son zamanlarda çembere göre inversiyonlarla fraktal desenler oluşturulma yöntemlerine rastlanmaktadır. Özellikle Frame ve Cogevina, çember inversiyon fraktalları adı verilen bir yöntem tanıttı. Benzer bir yöntem Zhang tarafından da çalışıldı ve He Leys bu yöntemi küresel inversiyonlara genelleştirdi (M. Frame ve T. Cogevina, 2000), (Zhang ve X. He, 1990), (Leys, 2005). Gdawiec, daire çember inversiyonun yıldız şeklindeki kümelere genelleştirilmesini kullanarak çember inversiyon fraktalları yöntemini genişletti(K. Gdawiec, 2014).

Merkezil koniklere göre inversiyon N. Chidres tarafından 1965 yılında tanımlamıştır (N. Chidres, 1965). 2014 yılında da elipse göre inversiyon Ramirez tarafından yine aynı yıl bu inversiyona göre invers noktaların geometrik oluşumu J. Ramirez ve G. Rubiano tarafından verilmiştir (Ramirez, 2014), (Ramirez ve Rubiano, 2014).

Öklidyen düzlemdeki dairesel inversiyon yerine taksi çemberine göre inversiyon kavramı Bayar ve Ekmekçi tarafından incelenmiştir (Bayar ve Ekmekçi, 2014).

J.L.Ramirez, G. Rubiano ve B.J.Zlobec tarafından p- uzaklığına göre çember inversiyonunun genelleştirilmiş ve bu dönüşümü Sierpinski üçgeni, Koch eğrisi, ejderha eğrisi, Fibonacci fraktalı gibi iyi bilinen fraktal eğrilere uygulanarak yeni fraktal desenler elde edilmiştir(Ramirez vd., 2015).

## 6.1. p −Çember İnversiyonu

Bu bölümde, J.L.Ramirez, G. Rubiano ve B.J.Zlobec (2015) tarafından verilen p-çember inversiyonu inceleniyor.

Öklidyen düzlemde. herhangi bir O noktası ve herhangi bir gerçek pozitif sayı r verildiğinde, bir P noktasının inversi, $d(O,P)$ ve $d(O,P')$ uzaklıkları için $d(O,P).d(O,P') = r^2$ şartını sağlayan $\overrightarrow{OP}$ ışınından alınan $P'$ noktasıdır. Burada $d(A,B)$ Öklid mesafesidir. Bu durumda, r yarıçaplı inversiyon çemberi bu geometrik dönüşüm altında değişmezdir ve inversiyon çemberinin içinde kalan bölgedeki noktaların dışarıdaki noktalara taşınır ve dışındakiler de içindeki noktalara taşınır.

Öklidyen düzlemde $(x,y)$ noktasının, merkezi $Q = (a,b)$ ve yarıçapı r olan bir C çemberine göre inversi

$$P' = \left(a + \frac{(x-a)r^2}{(x-a)^2 + (y-b)^2}, b + \frac{(y-b)r^2}{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right)$$

noktasıdır. $P'$ noktasına C çemberine göre P noktasının inversi olduğu söylenir. C ye inversiyon çemberi, Q ya inversiyon merkezi ve r ye inversiyon yarıçapı denir.

Öklidyen çembersel inversiyonlar açıları korur ve genel olarak doğruları doğrulara veya çemberlere, çemberleri de doğrulara veya çemberlere dönüştürürler. Bu dönüşümler altında bir doğrunun çembere dönüşmesi çembere göre inversiyonların en temel özelliklerinden biridir.

p- çember inversiyonunda p = 2 için klasik çember inversiyonunu ve p=1 için taksi çember inversiyonu elde edilmektedir. Çember inversiyonunun klasik tanımı, p=2 için Öklidyen normu kullanırken Taksi çember inversiyonu p=1 normunu kullanır. Genel olarak p- Çembersel inversiyon aşağıdaki tanımda verilen p- norma göre tanımlanabilir.

**Tanım 6.1.1.** $X = (x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $p \geq 1$ olmak üzere X in p −normu

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}$$

olarak tanımlanır.

p-norm aşağıdaki özelliklere sahiptir:

Her $X, Y \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, $\alpha \in \mathbb{R}$ için

- $\|X\|_p \geq 0$ ve $\|X\|_p = 0 \Leftrightarrow X = 0$ dir.
- $\|\alpha X\|_p = |\alpha|\|X\|_p$ dir.
- $\|X + Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p$ (üçgen eşitsizliği).

Her norm bir metrik indirger. p- normun indirgediği metrik tanım 6.1.2 de verilmektedir.

**Tanım 6.1.2.** Her $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $p \geq 1$ olmak üzere $p-$normun indirgediği metrik

$$d_p(x,y) := \|x-y\|_p = \left(\sum_{i=0}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}$$

biçiminde tanımlanır.

**Örnek 6.1.3.** p- metriğine göre birim çemberin denklemi $\mathbb{R}^n$ de

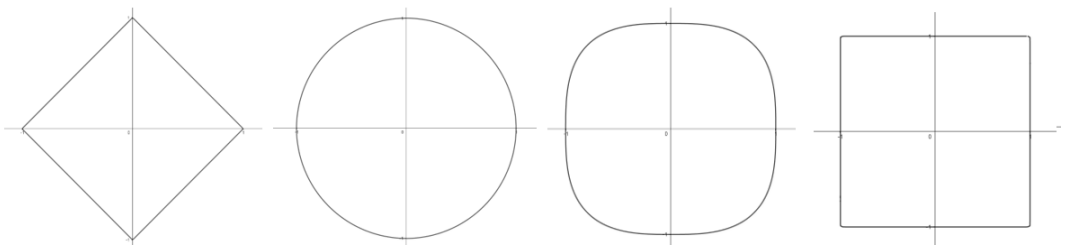
$$\|X\|_P = \left(\sum_{i=0}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p} = 1$$

dir.

$\left(\mathbb{R}^2, \|x\|_p\right)$ düzleminde merkezi $M = (a,b)$ ve yarıçapı r olan $p-$çember, $d_p(M,P) = r$ özelliğini sağlayan tüm $P = (x,y)$ noktalarının geometrik yeridir. Yani

$$(|x-a|^p + |y-b|^p)^{1/p} = r$$

denklemine sahiptir. Bu denklemde, merkezi orijin ve yarıçapı 1 alırsak p- birim çemberlerini elde ederiz. Şekil 6.1 de sırasıyla $p = 1$, $p = 2$, $p = 3$ ve $p = 100$ için $p-$birim çemberlerinin grafiklerini görüyoruz (Şekil 6.1).



Şekil 6.1 $p-$birim çemberlerinin grafikleri (p=1, 2, 3 ve 100)

**Tanım 6.1.4.** $C_p$, merkezi $Q = (a, b)$ noktası ve yarıçap r olan bir p − çember olsun. $C_p$'ye göre bir p −çemberin inversiyonu veya p −inversiyonu

$$\varphi_p : \mathbb{R}^2 \backslash \{Q\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \backslash \{Q\}$$

$$\varphi_p(P) = P'$$

şeklinde tanımlanır ve burada P′, $\overrightarrow{OP}$ ışını üzerindedir ve

$$d_p(Q,P).\, d_p(Q,P') = r^2$$

ve şartı sağlanır.

Bir $S$ eğrisi üzerindeki herhangi bir P noktasının $p-$ inversi $P'$ noktası, $S$ Eğrisinin $p$ −inversi olan $S'$ eğrisinin üzerindedir.

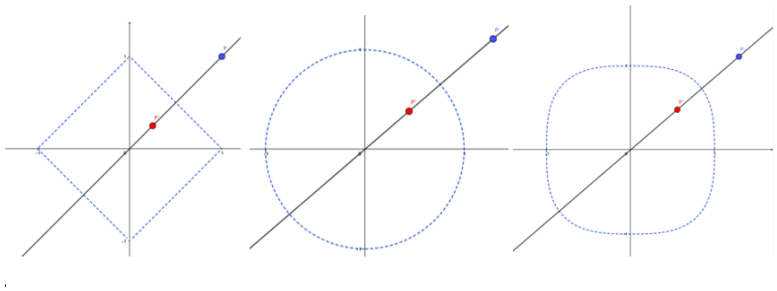
$p = 2$ için çember inversiyonun Öklidyen düzlemdeki tanımı elde edilir. $p = 1$ içinde taksi çember inversiyonu elde edilir.

**Önerme 6.1.5.** p- inversiyona göre çemberin içinde kalan noktaların inversleri çemberin dışında, çemberin dışında kalan noktaların inversleri çemberin içinde ve çember üzerindeki noktalar invaryant kalır.

**İspat:** P noktası $C_p$ çemberinin içinde bir nokta olsun. O zaman $d_p(Q,P) < r$ dir. $d_p(Q,P).\, d_p(Q,P') = r^2$ şartının sağlanması için $d_p(Q,P') > r$ olmalıdır. Bu yüzden p-inversiyon çemberinin içindeki noktaların görüntüsü dışında kalan bölgededir. Benzer şekilde p-inversiyon çemberinin dışında kalan bölgedeki noktaların görüntüsü içinde kalan bölgededir.

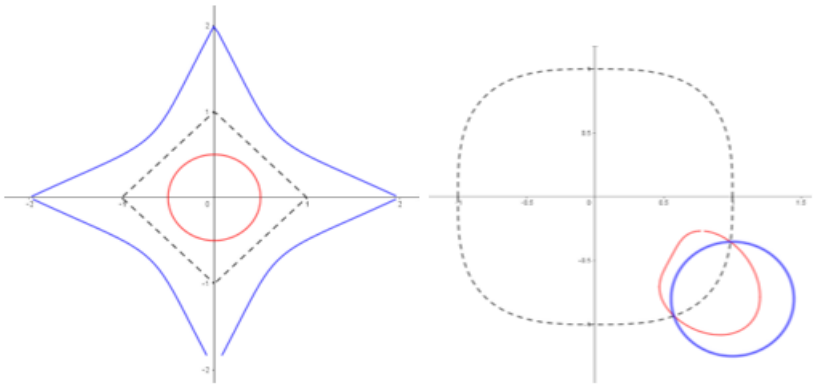
Eğer P noktası $C_p$ çemberinin üzerinde ise $d_p(Q,P) = r$ dir. İnversiyon şartı olan $d_p(Q,P).\, d_p(Q,P') = r^2$ denkleminin sağlanması için $d_p(Q,P') = r$ olmalıdır. Böylece $P = P'$ olur. Tersine $P = P'$ iken $d_p(Q,P).\, d_p(Q,P) = r^2$ ve $d_p(Q,P) = r$ elde edilir. Bu eşitlik de P noktasının $C_p$ p-inversiyon çemberi üzerinde olduğunu gösterir.

Şekil 6.2 de sırasıyla p nin $1, 2$ ve 3 değerleri için alınan bir nokta ve $p-$ çember inversi görülmektedir.



Şekil 6.2 Noktanın p −çemberler altındaki inversi (p=1, 2 ve 3)

**Örnek 6.1.6.** Orijin merkezli $\frac{1}{4}$ yarıçaplı 2 −çemberinin merkezi orijin ve yarıçapı 1 birim olan taksi çembere göre inversiyonu Şekil 6.4' de solda, 3 −çemberine göre inversi de Şekil 6.4'de sağda gösterilmektedir.



Şekil 6.3 Öklidyen çemberin inversi (p=2,3 için)

**Sonuç 6.1.7.** p −çember inversiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i. İnvolüttür. Yani, $\varphi_p\left(\varphi_p(P)\right) = P$ dir.

ii. p −çember inversiyonunu altında p −çemberi $C_p$ üzerindeki noktalar invaryanttır.

iii. Bir P noktasının $C_p$ çemberinin içinde olması için gerek ve yeter koşul inversinin $C_p$ nin dışında olmasıdır.

**İspat:** p-çember inversiyonu tanımından ve Önerme 6.2.3' den kolayca bu özellikler ispatlanabilir.

**Teorem 6.1.8.** $C_p$, merkezi $M = (a, b)$ noktası ve yarıçapı r birim olan p −çember olsun. O zaman $C_p$ çemberine göre P = (x, y) noktasının p −inversi

$$P' = \left( a + \frac{(x-a)r^2}{(|x-a|^p + |y-b|^p)^{2/p}}, b + \frac{(y-b)r^2}{(|x-a|^p + |y-b|^p)^{2/p}} \right) \qquad (1)$$

noktasıdır.

Özel olarak, $C_p$ çemberinin merkezi orijin ise P = (x, y) noktasının p −inversi

$$P' = \left( \frac{r^2 x}{(|x|^p + |y|^p)^{2/p}}, \frac{r^2 y}{(|x|^p + |y|^p)^{2/p}} \right) \qquad (2)$$

noktasıdır.

**İspat:** $P = (x, y)$ ve $P = (x', y')$ nin orijin merkezli ve r yarıçaplı p −çemberine göre invers noktalar olduğunu varsayalım. $P, P'$ ve O doğrusal olduğundan ve $\overrightarrow{OP}$ ile $\overrightarrow{OP'}$ ışınları aynı yönde olduğundan

$$(x', y') = k(x, y), \qquad k \in \mathbb{R}^+$$

dir. Ayrıca, p −çember inversiyonunun tanımından şunu elde ederiz:

$$d_p(O, P).\, d_p(O, P') = r^2,$$

$$(|x|^p + |y|^p)^{1/p}.\left((|x'|^p + |y'|^p)^{1/p}\right) = r^2,$$

$$k(|x|^p + |y|^p)^{2/p} = r^2$$

ve buradan

$$k = \frac{r^2}{(|x|^p + |y|^p)^{2/p}}$$

olur. k değeri $(x', y') = k(x, y)$, $k \in \mathbb{R}^+$ eşitliğinde yerine konularak

$$P' = \left( \frac{xr^2}{(|x|^p + |y|^p)^{2/p}}, \frac{yr^2}{(|x|^p + |y|^p)^{2/p}} \right)$$

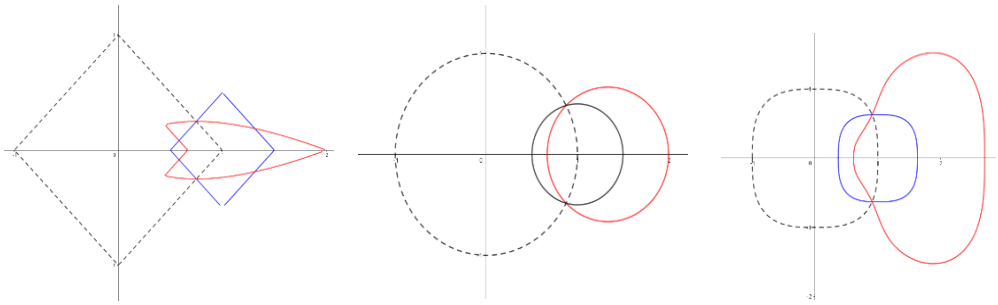
olarak elde edilir. Ötelemeler uzaklıkları koruduğu için orijin noktasını (a,b) noktasına dönüştüren öteleme kullanılarak (1) denklemi elde edilir.

## 6.2 Bazı Eğrilerin $p-$ İnversiyonu

Bu bölümde, doğruların ve $p-$çemberlerin ve pararabol ve hiperbol gibi bazı eğrilerin p-çemberlere göre inversiyonunu incelenmektedir. Ötelemeler uzaklıkları koruduğu için inversiyon merkezini orijin olarak kabul etmek işlem kolaylığı sağlamaktadır.

Çemberlerin klasik $2-$inversiyona göre davranışı iyi bilinmektedir. $2-$inversiyona göre inversiyon merkezinden geçen çember merkezden geçmeyen bir doğruya veya merkezden geçmeyen bir doğru merkezden geçen bir çembere dönüşür. Merkezden geçmeyen çemberlerde merkezden geçmeyen çemberlere dönüşüyordu. Dolayısıyla bu durumda $p = 2$ çember ve doğrularını genelleştirilmiş çemberler olarak adlandırmak uygundur.

1-inversiyonuna göre 1-çemberlerin davranışları önceki bölümde incelendi. Bir köşesi inversiyon çemberinin merkezinde olan taksi çemberin inversinin 2 ışın ve 2 doğru parçasından oluştuğu ve bir kenarı merkezden geçen taksi çemberlerin inversiyonunun merkezden geçmeyen 3 doğru parçası, 2 ışından ve 2 parabol parçasının birleşimi ile oluştuğu görüldü. Ayrıca inversiyon merkezinden geçmeyen çemberlerin inversiyon merkezinden geçmeyen parabol ve doğru parçalarından oluşan kapalı figür olduğu gösterildi. Şekil 6.5' de yarıçapı $\frac{1}{2}$, merkezi $(1,0)$ olan $p-$ çemberlerinin sırasıyla p nin 1,2 ve 3 değerleri için için p- inversiyonları gösterilmektedir.



Şekil 6.4 $\frac{1}{2}$ yarıçaplı (1,0) merkezli p-çemberlerin $p-1,2$ ve 3-inversiyonu

**Teorem 6.2.1.** $C_p$, orijin merkezli bir $p-$ çemberi olsun. O zaman $C_p$ ye göre aynı merkezli $p-$ çemberinin inversiyonu aynı merkezli $p-$ çemberidir.

**İspat:** $C_p$, denklemi$(|x|^p + |y|^p)^{1/p} = r$ olan bir inversiyon çemberi olsun. Ç de merkezi orijin ve yarıçapı $k$ olan herhangi bir p- çember olsun. $C_p$ ye göre Ç nin inversiyonu

$$\left(\left|\frac{r^2 x}{(|x|^p + |y|^p)^{2/p}}\right|^p + \left|\frac{r^2 y}{(|x|^p + |y|^p)^{2/p}}\right|^p\right)^{1/p} = k$$

den

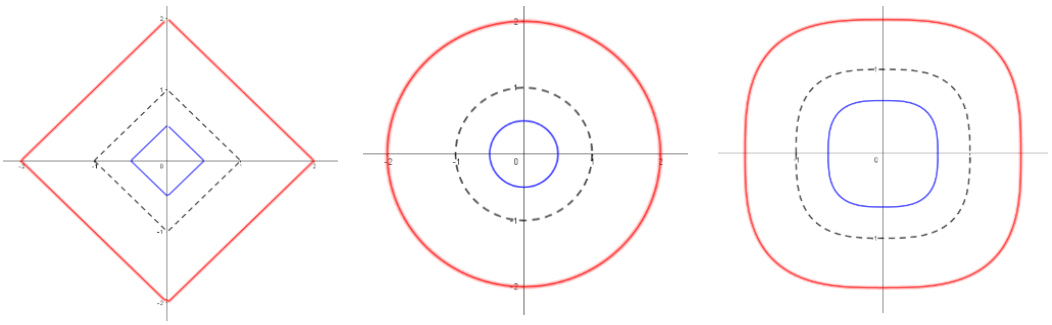
$$k = \frac{r^2}{(|x|^p + |y|^p)^{1/p}}$$

olup p-inversiyon

$$(|x|^p + |y|^p)^{1/p} = \frac{r^2}{k}$$

denklemli orijin merkezli ve yarıçapı $\frac{r^2}{k}$ olan p- çemberdir.

**Örnek 6.2.2.** Yarıçapı $1/2$ olan ve orijinde merkezlenmiş $p-$ çemberlerinin inversiyonları yine orijinde merkezlenmiş p- çemberidir. Şekil 6.6 da p=1,2 ve 3 için yarıçapı $1/2$ olan ve merkezil p $-$çemberlerinin inversleri gösterilmektedir.



Şekil 6.5 p=1,2 ve 3 için yarıçapı $1/2$ olan ve merkezil p $-$çemberlerinin inversiyonları

**Örnek 6.2.3.** Yarıçapı $1/2$ olan ve orijinde merkezlenmiş $p$ $-$çemberinin inversiyonu birim p-çemberine göre inversiyonları:

p=1 için

$$|x| + |y| = 2,$$

p=2 için

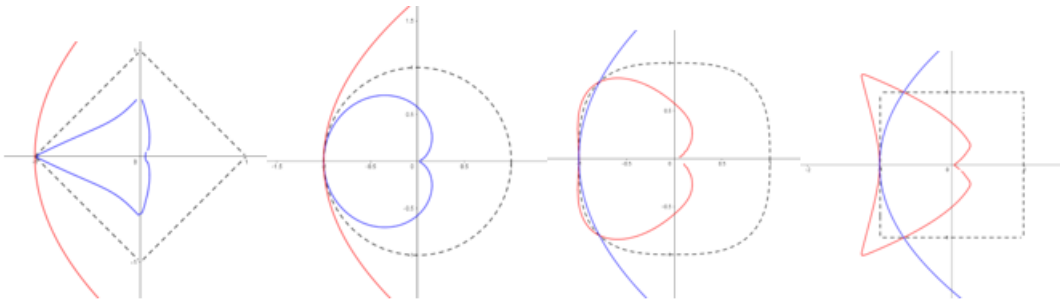
$$x^2 + y^2 = 2,$$

p=10 için

$$|x|^{10} + |y|^{10} = 2^{10}$$

denklemine sahip merkezil p-çemberleridir.

Diocles, lemniskat, limacon, kardioid ve kıssoid gibi birçok klasik eğri, hiperbol ve parabollerin $2-$inversiyonundan elde edilebilir. Ancak $p-$inversiyonu altında ikinci dereceden eğrilerin inversiyonlarından, yeni şekiller ortaya çıkar. Bu yeni eğrilerin denklemleri Teorem 6.1.8. kullanılarak elde edilebilir (Şekil 6.7).



Şekil 6.6 p = 1, 2,3 ve 100 için $x = \frac{1}{3}y^2 - 1$ parabolünün p-çember inversiyonları

**Örnek 6.2.4** $y = x^2 + \frac{1}{2}$ parabolünün, orijin merkezli ve 1 yarıçaplı p-çemberine göre inversiyonu için

$$y = x^2 + \frac{1}{2}$$

parabol denkleminde x yerine $\frac{x}{(|x|^p+|y|^p)^{2/p}}$ ve y yerine $\frac{y}{(|x|^p+|y|^p)^{2/p}}$ alınırsa

$$\frac{x}{(|x|^p + |y|^p)^{2/p}} = \left(\frac{y}{(|x|^p + |y|^p)^{2/p}}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

invers denklemi elde edilir. $p = 1$ için Taksi çemberine göre inversiyonu için

$$\left(\frac{y}{(|x| + |y|)^2}\right) = \left(\frac{x}{(|x| + |y|)^2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

denklemine sahip kapalı figür elde edilir. p=2 için invers denklemi

$$\frac{x}{x^2+y^2}=\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

olarak bulunur. p=3 için

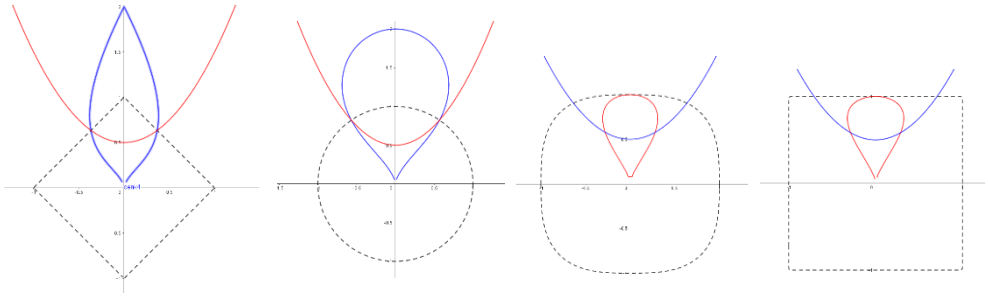
$$\frac{x}{(|x|^3+|y|^3)^{2/3}}=\left(\frac{y}{(|x|^3+|y|^3)^{2/3}}\right)^2+\frac{1}{2}$$

ve $p=100$ için

$$\frac{x}{(|x|^{100}+|y|^{100})^{2/100}}=\left(\frac{y}{(|x|^{100}+|y|^{100})^{2/100}}\right)^2+\frac{1}{2}$$

invers denklemleri elde edilir. Şekil 6.8 de $p = 1, 2, 3$ ve 100 için $y = x^2 + \frac{1}{2}$ parabolünün p-çember inversiyonu görülmektedir.

.



Şekil 6.7 p = 1, 2,3 ve 100 için $y = x^2 + \frac{1}{2}$ parabolünün p-çember inversiyonu

**Örnek 6.2.5.** $x^2-y^2=1$ hiperbolünün orijin merkezli ve 1 yarıçaplı $p=1$ (taksi) çemberine göre inversiyonunu için

$$x^2-y^2=1$$

hiperbol denkleminde x yerine $\left(\frac{x}{(|x|+|y|)^2}\right)^2$ ve y yerine $\left(\frac{x}{(|x|+|y|)^2}\right)^2$ alınırsa

$$\left(\frac{x}{(|x|+|y|)^2}\right)^2-\left(\frac{y}{(|x|+|y|)^2}\right)^2=1$$

denklemine sahip kapalı figür elde edilir (Şekil 6.8).

$x^2-y^2=1$ hiperbolünün orijin merkezli ve 1 yarıçaplı $p=2$ çemberine göre inversiyonunu için

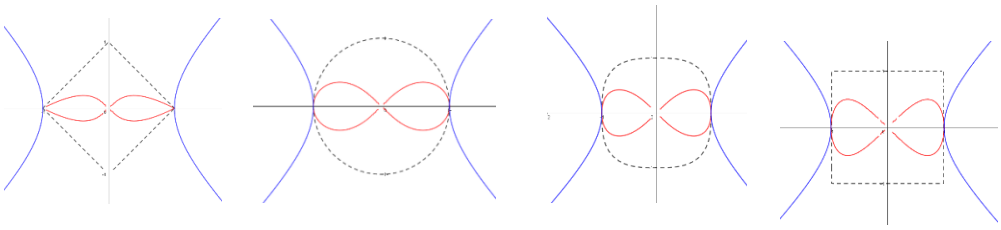
$$x^2 - y^2 = 1$$

hiperbol denkleminde x yerine $\frac{x}{x^2+y^2}$ ve y yerine $\frac{y}{x^2+y^2}$ alınırsa

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 - \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2 = 1$$

denklemine sahip kapalı figür elde edilir. Diğer p-çember inversiyonlarına göre invers denklemleri benzer biçimde bulunabilir.

Şekil 6.9' de $p = 1, 2, 3$ ve 100 için $x^2 - y^2 = 1$ hiperbolün birim $p$ −çemberlerine göre inversiyonları görülmektedir.



Şekil 6.8 $p = 1, 2, 3$ ve 100 için bir hiperbolün $p$ −inversiyonu

## 6.3 p-Çember İnversiyonundan Elde Edilen Bazı Fraktal Modeller

Bu bölümde, iyi bilinen fraktallardan Sierpinski Üçgeni, Koch kar tanesi ve Hilbert eğrisinin $p$ −çember inversiyonu incelenmiştir (Ramirez, 2015). Fraktallar, titiz matematiksel tanımının ötesinde, karmaşıklık ve güzel desenlerle dolu formlar sunar (Barnsley, 1988).

Fraktallar, iyi bilinen Lindenmayer sistemleri veya L-sistemleri ile verilebilir. Fraktal üretmenin her adımında, her sembolün yeniden yazılması gerekir. Bu sistem, 1968'de biyolog Aristid Lindenmayer (1925–1989) tarafından geliştirilmiştir. Bunlar gerçekte grafiksel olarak temsil edilebilen sembolik dinamik sistemlerdir.

Spesifik olarak, bir L sistemi L = (V, ω,P) üçlüsü olarak tanımlanır, burada V sistemin bir alfabesidir. Ayrıca, V ∗, V V + V üzerindeki tüm boş olmayan kelimelerin kümesi. ω ∈ V + birdir aksiyom olarak adlandırılan boş olmayan sözcük ve P ⊂ V ×V ∗

sonlu bir dizi üretim. A üretimi (K,G) ∈ P F → W şeklinde yazılır. F harfi ve kelime W, selefi ve halefi olarak adlandırılır.

Özel olarak, bir L-sistemi $\mathcal{L}$ , $\mathcal{L} = (V, \omega, P)$ üçlüsü olarak tanımlanır. Burada $V$ is sistemin alfabesidir. $V^*$, $V$ üzerindeki tüm kelimelerin kümesidir ve $V^+$ da $V$ üzerindeki boştan faklı bütün kelimelerin kümesidir. $\omega \in V^+$ boştan farklı bir kelime bir aksiyom olarak adlandırılır ve $P \subset V \times V^*$ çarpımların sonlu bir kümesidir. $(F, W) \in P$ çarpımı $F \to W$ olarak yazılır. $F$ kelimesi üretimde öncül, $W$ kelimesi ondan sonra gelendir. $A = F_1 \cdots F_n$, $V$ bir keyfi bir kelime olsun. $A \Rightarrow W$ ile gösterilen $W = W_1 \cdots W_n \in V^*$ kelimesi $A$ ile üretilmesi için gerek ve yeter koşul her $i = 1, \dots, n$ için $F_i \to W_i$ olmasıdır. Eğer $A_0, A_1, \dots, A_n$ kelimelerinin $A_0 = \omega$, $A_n = W$ ve $A_0 \Rightarrow A_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_n$ olacak şekilde bir dizisi varsa $W$ kelimesi n uzunluğunda türetmede $\mathcal{L}$ tarafından üretilir.

L-sistem alfabesinin sembolleri, kaplumbağa geometrisine dayalı bazı çizim kurallarından grafiksel olarak temsil edilebilir. Bu yorumlama fraktal görüntüler üretmek için kullanılabilir. Kaplumbağanın cevap verebileceği temel komutlar

F: Düz bir çizgi çiz

F: düz çizgi çizmeden ileri bir adım at

+: θ açısı kadar sola dön

−: θ açısı kadar sağa dön

şeklindedir.

**Örnek 6.3.1** Sierpinski üçgeni

Sierpinski üçgeni, Sierpinski tarafından 1915'te tanımlanan ve 13. yüzyıldan itibaren İtalyan sanatında görülen bir fraktaldır. Sierpinski üçgeni, başlangıç dizesi

$$FXF - -FF - -FF$$

ve yeniden yazma kuralları

$F \to FF, X \to - - FXF + +FXF + +FXF -$, açı 60 derece

olan bir Lindenmayer sistemi ile yazılabilir.

Bilindiği gibi köşe noktaları (0,0), (1,0), $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ olan eşkenar üçgenden elde edilen klasik Sierpinski Üçgeni (S)

$$f_1(x,y) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$$

,

$$f_2(x,y) = (\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y}{2})$$

,

$$f_3(x,y) = (\frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4})$$

olmak üzere

$$f_i: R^2 \to R^2 \ (i = 1,2,3)$$

Yinelemeli Fonksiyon Sistemi (YFS) $\{R^2 | f_1, f_2, f_3\}$ nin çekicisidir. Yani limit görüntü Sierpinski üçgeni S

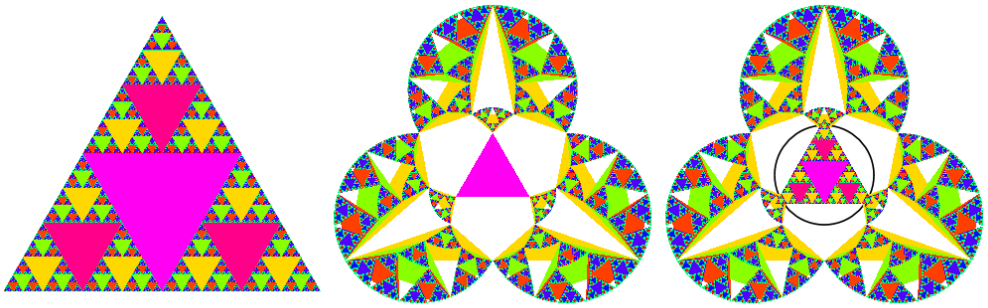
$$S=F(S)=\cup_{i=1}^{3} f_i(S)$$

olarak ifade edilebilir.

Sierpinski üçgeninin, Öklidyen düzlemde çevrel çemberine göre, yani p=2 için inversiyonunun Wolfram Mathematica programındaki kodları aşağıda verilmektedir (Trott, 2004).

```
f[{a_,b_,c_}]:=With[{r={a,b,c}},Map[Function[x,(x+#)/2],r]&/@r]
sg[n_,{a_,b_,c_}]:=NestList[Join@@(f/@#)&,{{a,b,c}},n]
tr[{x_,y_}]:={Cos[ArcTan[x,y]],Sin[ArcTan[x,y]]}/Norm[{x,y}]
pts={{-1,0},{1,0},{0,Sqrt[3.]}};
g1=Graphics[MapIndexed[{Hue[Sin[#2[[1]]]],Polygon[#1]}&,sg[8,pts]],ImageSize->200];
tsg[n_]:=sg[n,pts]/. {x_,y_}:>tr[{x,y}-{0,Sqrt[3.]/3}]
g2=Graphics[MapIndexed[{Hue[Sin[#2[[1]]]],Polygon[#1]}&,tsg[8]],ImageSize->200];
g3=Show[Graphics[Circle[]],g2,Graphics[Translate[MapIndexed[{Hue[Sin[#2[[1]]]],Poly
gon[#1]}&,sg[8,pts]],{0,-Sqrt[3]/3}]],ImageSize->200];
Row[{g1,g2,g3}]
```

En popüler fraktallardan biri olan Sierpinski üçgeninin Öklidyen düzlemde üçgenin çevrel çembere 2-çember inversiyonu altında grafiği Şekil 6.10 da görülmektedir (Ramirez, 2015).



Şekil 6.9 Sierpinski üçgenin 2-çember inversiyonu (Ramirez, 2015)

**Örnek 6.3.2** Koch Kar tanesi

1904'de Helge Von Koch tarafından, hiçbir noktada teğeti olmayan sürekli bir eğri örneği olarak verildi. Kar tanesi denilen kapalı eğri sonlu bir alana sahip, sonsuz bir çevresi olan ilk fraktal örneklerinden bir tanesidir. Sonlu bir alanı sınırlayan sonsuz uzunluklu eğri olarak da bilinir. Fraktal ailesinin en iyi bilinen üyelerinden biri olan Koch eğrisi kendine benzer ½ ölçekli dört kopyadan oluşur.

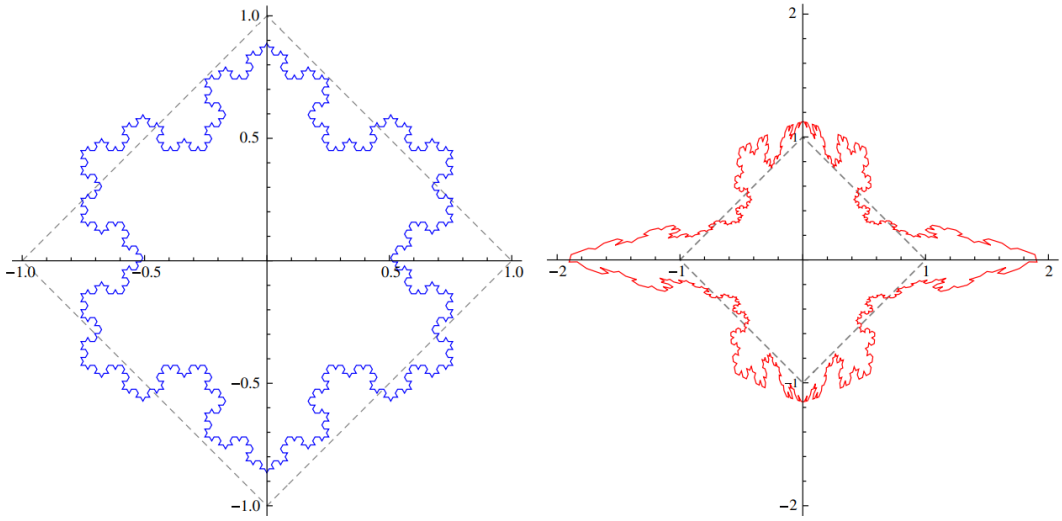
Koch Kar Tanesi, bir eşkenar üçgen oluşturacak şekilde düzenlenmiş üç ayrı Koch eğrisinden oluşur. Her bir Koch eğrisi, önce bir düz çizgi parçasını üç eşit parçaya bölerek ve ardından tabanı çizginin orta parçası olan bir eşkenar üçgen oluşturarak ve son olarak üçgenin tabanını çıkararak oluşturulur.

Koch kar tanesi fraktalı

$$\mathcal{K} = (V = \{F, +, -\}, \omega = F + +F + +F,$$
$$P = \{p_1 : F \to F - F + +F - F\})$$

biçiminde ifade edilen L-sistemi ile elde edilebilir. Burada $\theta = \frac{\pi}{3}$ tür.

Şekil 6.11 da Koch kar tanesi fraktalının 1-çember inversiyonu sağda görülmektedir (Ramirez, 2015).




Şekil 6. 10 Koch Eğrisinin 1-çember inversiyonu (Ramirez, 2015)

**Örnek 6.3.3**. Hilbert Eğrisi

Hilbert eğrisi adını Alman matematikçi David Hilbert' den almıştır. İlk olarak 1891'de tanımlanan Hilbert eğrisi, sürekli bir boşluk doldurma eğrisidir. Ayrıca fraktaldır ve kendine benzerdir. Eğrinin bir bölümüne yakından bakarsanız, baktığınız patern eğrinin kendisinin bir kopyasıdır.

Hilbert eğrisi, L-sistemi tarafından üretilen dizileri yorumlayarak elde edilebilir. Hilbert eğrisinin L-sistemi ile ifadesi

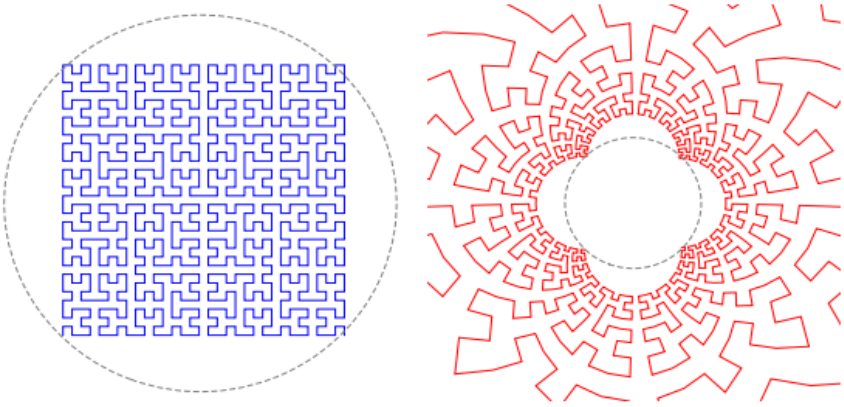
$$\mathcal{H} = (V = \{F, +, -, A, B\},$$
$$\omega = A, P = \{p_1, p_2\})$$

ve

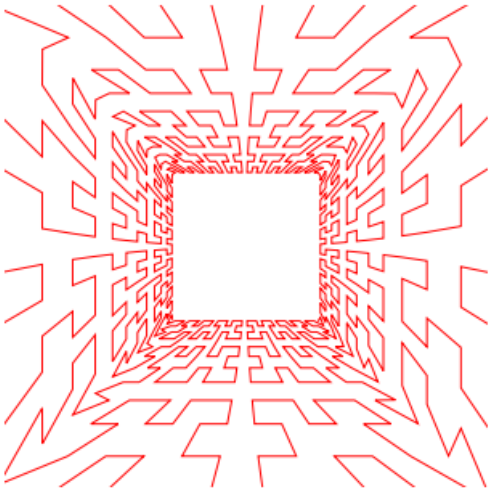
$$p_1 : A \rightarrow -\mathrm{B}F + \mathrm{AFA} + \mathrm{FB} -$$

$$p_2 : B \rightarrow +\mathrm{AF} - \mathrm{BFB} - \mathrm{FA} +$$

dir. Bu durumda, açı artışı θ = π/2' ye eşittir ve çizim sırasında A ve B sembolleri dikkate alınmaz. Şekil 6.12'de solda Hilbert eğrisini ve sağda Hilbert eğrisinin 2-çember inversiyonunu ve Şekil 6.13'de de 100-çember inversiyonu görülmektedir (Ramirez, 2015).



Şekil 6. 11 Hilbert Eğrisinin 2-çember inversiyonu (Ramirez, 2015)



Şekil 6. 12 Hilbert Eğrisinin 100- çember inversiyonu (Ramirez, 2015)

# 7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında taksi çemberine göre inversiyon dönüşümü altında doğruların ve taksi çemberlerin inversiyonları analitik incelenerek sınıflandırılması yapılmıştır. Ayrıca p - çember inversiyonu ve p- çember fraktal örnekleri çalışılmıştır.

Çemberin inversiyonu kullanılarak geometrideki çeşitli teoremler ve problemler incelenebilir. İyi biliniyor ki Öklidyen düzlemde çembere göre inversiyon açıları korur ve genel olarak doğruları doğrulara veya çemberlere, çemberleri de doğrulara veya çemberlere dönüştürürler. Bu dönüşüm altında bir doğrunun çembere dönüşmesi çembere göre inversiyonun en temel özelliklerinden biridir. Bu özellik Geometrideki pek çok zorlu problemin çözümünü kolaylaştırmıştır.

Taksi çembere göre inversiyon altında ayraç doğrulardan farklı ve inversiyon merkezinden geçmeyen doğruların inverslerinin iki parabol parçasından oluşan kapalı eğriler, ayraç doğruların inversinin de inversiyon çemberinin kenarına paralel bir doğru parçası ve bir parabol parçasından oluşan kapalı eğriler olduğu görülmüştür.

Tezde taksi çembere göre taksi çemberlerin inversiyonu inversiyon çemberinin düzlemde ayırdığı bölgelerdeki bulunduğu konuma göre incelenmiştir. Bir köşesi inversiyon merkezi olan taksi çemberin taksi inversinin iki ışın ve iki doğru parçasının birleşiminden oluşan şekil olduğu, bir kenarı inversiyon merkezinden geçen taksi çemberinin taksi inversinin iki ışın, iki doğru parçası ve iki parabol parçasının birleşiminden oluştuğu gösterilmiştir. İnversiyon merkezinden geçmeyen sadece bir bölgede bulunan taksi çemberlerin taksi çember inversiyonunun iki doğru parçası ve iki parabol parçasından oluşan kapalı şekil, iki bölgede bulunan ve inversiyon merkezinden geçmeyen taksi çemberinin taksi çember inversiyonunun üç doğru parçası ve üç parabol parçasından oluşan kapalı şekil, üç bölgede yer alan ve inversiyon merkezinden geçmeyen taksi çemberinin taksi çember inversiyonunun dört doğru parçası ve dört parabol parçasından oluşan kapalı şekil olduğu sonucuna varılmıştır.

Çalışmada da görüldüğü gibi farklı metrik düzlemlerinde tanımlanan çember inversiyonları Öklidyen çembere göre inversiyondan farklı özelliklere sahiptir. Öklidyen düzlemden farklı p-metrik düzlemlerinde merkezden geçmeyen doğruların p-inversleri p-çemberler değildir.

Farklı metrik düzlemlerdeki çembere göre inversiyon fraktalları asıllarından farklı, ilginç ve estetik yeni desenler oluşturmayı sağlamaktadır.

Böylece p- çember inversiyonlarının incelenmesi geometrinin ve diğer bütün bilim dallarının gelişimine önemli bir katkı sağlayacaktır.

.

# KAYNAKLAR DİZİNİ

Akça, Z. (1995). Taksi trigonometri ve uzay taksi geometrisinin geliştirilmesi üzerine [Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü]. YÖK Ulusal Tez Merkezi.https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/TezGoster?key=DPTy-uy3wRPq_qvCPSqUB6_WiNE3bBzUIcfVqnAr6eR24ze4pwKCQHgPwTvxHSVX7

Barnsley, M. (1988), *A review of: "FRACTALS EVERYWHERE"* https://doi.org/10.1080/03081079208945042.

Bayar A.,Ekmekçi S. (2014), On circular inversions in taxicab plane, Journal of Advanced Research in Pure Mathematics, Vol. 6, Issue 4, 33-39.

Cırık, Y. (2022), Maksimum metrik ile donatılmış düzlemde ve uzayda inversiyonlar [Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü]. YÖK Ulusal Tez Merkezi.https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/TezGoster?key=5XiSE4yCP_gmnukpMEp65QMjUjGBCeYvMYfebnHm6JsutS5u4PqnXIbj1_CKvXa

Cırık, Y., Ekmekçi, S. (2022), On The Maximum Spherical Inversions, Erzincan University Journal of Science and Technology, 15(1), 360-37.

Childress, N. (1965), *Inversion with respect to the central conics*, https://doi.org/10.2307/2688775.

Davis, T. (2011), *Inversion in a circle*, https://www.geometer.org/mathcircles.

Ekmekçi, S. (2001). Taksi çemberleriyle ilgili özellikler [Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü]. YÖK Ulusal Tez Merkezi. https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/TezGoster?key=7VkJg65xt2nwp1k6o1EsA2ezkg9ycpXy2Rjis4qwkCSy-zOeKmrLOgYiIqt2kAEc..

# KAYNAKLAR DİZİNİ

Ekmekçi, S., Bayar, A., Altıntaş, A.K(2015), On the Group of Isometries of the Generalized Taxicab Plane, International Journal of Contemporary Mathematical Sciences Vol. 10, 2015, no. 4, 159 – 166. http://dx.doi.org/10.12988/ijcms.2015.5213.

Frame, M.,Cogevina, T. (2000), An infinite circle inversion limit set fractal, Comput. Graph. 24(5) 797–804. https://doi.org/10.1016/S0097-8493(00)00080-7

Gdawiec, K.(2014). Star-shaped set inversion fractals, Fractals, 22(4). https://doi.org/10.1142/S0218348X14500091

Kaya, R., Çolakoglu, H. B. (2006). Taxicab Versions of Some Euclidean Theorems, İnternational Journal of Pure and Applied Mathematical (IJPAM), 26, 1, 69-81.

Krause, E. F. (1975). *Taxicab Geometry*, Addison-Weley, Menlo Park, California.

Leys, J. (2005). Sphere inversion fractals, Comput. Graph. , 29(3),463–466. https://doi.org/10.1016/j.cag.2005.03.011

Menger, K. (1952). You Will Like Geometry, Guildbook of Illinois Institute of Technology Geometry Exhibit, Museum of Science & Industry, Chicago, Illinois. https://doi.org/10.1119/1.1933312

Minkowski, H. (1967). *Gasammelte Abhandlungen*, Chelsea Publishing Co, New York.

Pekzorlu, A. (2019). Bazı Öklidyen Olmayan Geometrilerde İnversiyonlar üzerine [Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü]. YÖK Ulusal Tez Merkezi.https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/TezGoster?key=npGs9H39x7G6401x51yqpNiJ10Z7UlAlsTDGXvm2dWekPzEQkQhMTq03VtZ4mOtr

# KAYNAKLAR DİZİNİ

Pekzorlu, A., Bayar, A. (2020) (a), *Taxicab Spherical Inversions In Taxicab Space*, Journal of Mahani Math. Research Center, Vol:9, no 1-2, 45-54. https://doi.org/10.22103/jmmrc.2020.14232.1095.

Pekzorlu, A., Bayar, A. (2020) (b), *On The Chinese Checkers Spherical Inversions In Three Dimensional Chinese Checker Space*, Com. Fac. of Sci. Univ. of Ank. Ser. A1 Math. and Stat., 69, 2, 1498-1507. https://doi.org/10.31801/cfsuasmas.567533

Pekzorlu, A., Bayar, A. (2022) , *On the Chinese Checkers Circular Inversions in the Chinese Checkers Plane*, Hagia Sophia Journal of Geometry, Vol. 4, No. 2, 28-34.

Ramirez, J.L. Rubiano G.N. (2014), *Elliptic Inversion Of Two-Dimensional Objects*, International Journal of Geometry, Vol. 3 (2014), No. 1, 12 – 27.

Ramirez, J.L., Rubiano G.N., Jurcic-Zlobec B. (2015), *A Generating fractal patterns by Using p-circle inversion*, Fractals, 23(4), 1-13. https://doi.org/10.1142/S0218348X15500474

Schattschneider, D. J. (1984), *The Taxicab Group, American Mathematical Monthly*, Vol.91, 423-428. https://doi.org/10.1080/00029890.1984.11971453.

Sezgin, N. (2014). *Öklidyen düzlemde ve taksi düzlemde evritim üzerine* [Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü]. YÖK Ulusal Tez Merkezi.https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/TezGoster?key=iTkOhwevEenJZ3onUvs52iA5tL1da_-PiBN5FRu_aY-lMsxbPpP-WrWj7THaq0xj.

Trott, M. (2004). *The Mathematica Guide Book for Graphics*, https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8576-7.

# KAYNAKLAR DİZİNİ

Zhang Y.,He, X. (1990*), Fractal geometry derived from geometric inversion*, Appl. Math. Mech. 11(11), 1075–1079. http://dx.doi.org/10.1007/BF02015691.