Fitzhugh-Nagumo Denkleminin Trigonometrik B-Spline Kollokasyon Yöntemiyle Simülasyonu

Kübra Kaymak

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Ocak 2026

Simulation of the Fitzhugh-Nagumo Equation via Trigonometric B-Spline Collocation Method

Kübra Kaymak

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics-Computer

January 2026

Fitzhugh-Nagumo Denkleminin Trigonometrik B-Spline Kollokasyon Yöntemiyle Simülasyonu

Kübra Kaymak

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği Uyarınca
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. Özlem Ersoy Hepson

Ocak 2026

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi **Kübra Kaymak**'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "**Fitzhugh-Nagumo Denkleminin Trigonometrik B-Spline Kollokasyon Yöntemiyle Simülasyonu**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Özlem Ersoy Hepson

İkinci Danışman :

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Doç. Dr. Özlem Ersoy Hepson

Üye : Prof. Dr. Bülent Saka

Üye : Prof. Dr. Sait San

Üye : Doç. Dr. Emrah Karaman

Üye : Dr. Öğr Üyesi Aysun Tok Onarcan

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Fatma TÜMSEK
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Özlem Ersoy Hepson danışmanlığında hazırlamış olduğum "**Fitzhugh-Nagumo Denkleminin Trigonometrik B-Spline Kollokasyon Yöntemiyle Simülasyonu**" başlıklı Yüksek Lisans tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim.
12/01/2026

Kübra Kaymak

T.C.
ESKİŞEHİR OSMANGAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ÜRETKEN YAPAY ZEKÂ KULLANIMI BEYAN FORMU

Bu tezi/projeyi hazırlarken aşağıdaki Üretken Yapay Zekâ (ÜYZ) araçlarından destek almadığımı beyan ederim:

Aşağıdaki ÜYZ araçlarını kullandım. (Birden fazla seçenek işaretlenebilir)

☐Claude
☐ChatGPT
☐DeepSeek
☐Gemini
☐Copilot
☐Diğer (Belirtiniz): .....

ÜYZ araçlarını tezimin/projemin aşağıdaki aşamalarında ilgili amaçlar için kullandım. (Birden fazla seçenek işaretlenebilir):

☐Metin oluşturma
☐Literatür tarama
☐Çeviri
☐Düzenleme/dil kontrolü
☐Veri işleme ve analizi
☐Veri görselleştirme
☐Görüntü üretme
☐Kaynakça düzenleme
☐Diğer (Belirtiniz): .....

Bu çalışmada ÜYZ kullanımı ***Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Faaliyetlerinde Üretken Yapay Zekâ Kullanımına Dair Etik Rehber***'e ve akademik dürüstlük ilkelerine uygun şekilde gerçekleştirilmiş olup ÜYZ araçlarından alınan destek etik kurallar ve kaynak gösterme esaslarına uygun biçimde belirtilmiştir.

ÜYZ araçlarının sağladığı bilgilerin doğruluğunu kontrol ettiğimi, yanlış veya eksik bilgi bulunması halinde tüm sorumluluğun tarafıma ait olduğunu; ayrıca çalışmamla ilgili bu beyana aykırı bir durumun herhangi bir zamanda tespit edilmesi durumunda ortaya çıkabilecek akademik ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi beyan ederim.

Kübra Kaymak

23/02/2026

İmza

ÖZET

Bu yüksek lisans tezinde, Fitzhugh-Nagumo denkleminin sayısal çözümü trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemi kullanılarak araştırılmıştır. Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde, farklı disiplinlerde karşılaşılan problemlerin matematiksel modelleme yoluyla ifade edilişi ele alınmıştır. Analitik çözümün her zaman mümkün olmaması nedeniyle, bu tür problemlerde kullanılan sayısal/yaklaşık çözüm yöntemlerine kısaca değinilmiştir. Ayrıca çalışmanın kapsamı, amacı ve izlenen yaklaşım bu bölümde özetlenmiştir. İkinci bölümde ise Fitzhugh-Nagumo denklemi tanıtılmıştır. Ayrıca ilgili literatür çalışmaları incelenmiştir. Üçüncü bölümde çalışmada kullanılan sonlu farklar yaklaşımı, Crank Nicolson yöntemi ve sonlu elemanlar yöntemi hakkında bilgi verilmiştir. Ayrıca spline fonksiyonları da ileri bölümlerde kullanılmak üzere tanıtılmıştır. Dördüncü bölümde, B-spline fonksiyonların yapısı ve temel özellikleri tanıtılmıştır. Öncelikle düğüm noktaları, taban fonksiyonların oluşumu ve süreklilik koşulları verilerek B-spline yaklaşımı ele alınmıştır. Devamında, bu tezde kullanılacak trigonometrik B-spline taban fonksiyonları ve trigonometrik B-spline gerilim (tension) taban fonksiyonları derecelerine (Kuadratik, Kübik, kuartik, kuintik) göre incelenmiştir. Beşinci bölümde ise Fitzhugh-Nagumo denklemine ait test problemleri ve denklemin Crank Nicolson yöntemi ile lineerleştirilmesi gösterilmiştir. Lineerleştirilen bu denklem Trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemi ile çözülmüştür. Tezin son bölümünde ise elde edilen çözümlere ilişkin değerlendirmeler tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sonlu Elemanlar Yöntemi, Fitzhugh-Nagumo Denklemi, Trigonometrik B-spline Fonksiyonlar, Kollokasyon Yöntemi.

SUMMARY

In this thesis, the numerical solution of the FitzHugh–Nagumo equation was investigated using the trigonometric B-spline collocation method. This thesis consists of six chapters. The introduction chapter discusses the expression of problems encountered in different disciplines through mathematical modeling. Since analytical solutions are not always possible, numerical/approximate solution methods used in such problems are briefly mentioned. Furthermore, the scope, purpose, and approach of the study are summarized in this section. The second chapter introduces the FitzHugh-Nagumo equation. Relevant literature studies are also reviewed. The third chapter provides information about the finite difference approach, the Crank–Nicolson method, and the finite element method used in the study. Spline functions are also introduced for use in later chapters. The fourth chapter introduces the structure and basic properties of B-spline functions. The B-spline approach is addressed by first presenting the knot points, the formation of basis functions, and continuity conditions. Subsequently, the trigonometric B-spline basis functions and trigonometric B-spline tension basis functions to be used in this thesis are examined according to their degrees (quadratic, cubic, quartic, quintic). The fifth chapter presents test problems related to the FitzHugh-Nagumo equation and the linearization of the equation using the Crank-Nicolson method. This linearized equation is solved using the trigonometric B-spline collocation method. The final chapter of the thesis discusses the evaluations of the obtained solutions.

Keywords : Finite Elements, Fitzhugh-Nagumo Equation, Trigonometric B-spline Functions, Collocation Method

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının ortaya çıkmasında emeği ve desteği bulunan herkese içtenlikle teşekkür ederim. Öncelikle, çalışmamın her aşamasında yol gösteren, sabırla rehberlik eden ve değerli görüşleriyle beni yönlendiren danışmanım Sayın Doç. Dr. Özlem Ersoy Hepson'a teşekkürlerimi sunarım.

Tez yazım sürecindeki değerli katkıları ve aynı zamanda savunma jürimdeki kıymetli geri bildirimleri için Sayın Dr. Öğr Üyesi Aysun Tok Onarcan'a, savunma jürimde yer alarak değerli görüş ve önerilerini benimle paylaşan Sayın Prof. Dr. Bülent Saka, Sayın Prof. Dr. Sait San ve Sayın Doç. Dr. Emrah Karaman'a içtenlikle teşekkür ederim.

Bu süreçte yardımlarını esirgemeyen kıymetli arkadaşım Berke Tekergül'e ve eğitim hayatım boyunca büyük fedakarlıklar yaparak maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen değerli aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET . . . . . **vi**

SUMMARY . . . . . **vii**

TEŞEKKÜR . . . . . **viii**

İÇİNDEKİLER . . . . . **ix**

ŞEKİLLER DİZİNİ . . . . . **xi**

ÇİZELGELER DİZİNİ . . . . . **xii**

KISALTMALAR DİZİNİ . . . . . **xiii**

1. GİRİŞ VE AMAÇ **1**

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI **2**

3. TEMEL KAVRAMLAR **5**

3.1. Sonlu Farklar Yaklaşımı 5

3.2. Crank Nicolson Yöntemi 6

3.3. Sonlu Elemanlar Yöntemi 7

3.3.1. Ağırlıklı rezidü yöntemi 7

3.3.2. Kollokasyon yöntemi 8

3.3.3. Galerkin yöntemi 9

3.3.4. Subdomain Galerkin yöntemi 9

3.3.5. Spline fonksiyonlar 10

4. B-SPLINE FONKSİYONLAR **12**

4.1. Polinom B-spline Taban Fonksiyonlar 13

4.2. Trigonometrik B-spline Taban Fonksiyonlar 14

4.2.1. Lineer trigonometrik B-spline taban fonksiyonu 14

4.3.1. Kübik trigonometrik B-spline taban fonksiyonu 16

4.3.2. Kübik trigonometrik gerilim B-spline taban fonksiyonu 18

4.4.1. Kuartik trigonometrik B-spline taban fonksiyonu 19

4.4.2. Kuartik trigonometrik gerilim B-spline taban fonksiyonu . . . 21

4.5.1. Kuintik trigonometrik B-spline taban fonksiyonu 23

4.5.2. Kuintik trigonometrik gerilim B-spline taban fonksiyonu . . . 27

5. SAYISAL ÇÖZÜMLER 30
5.1. Test Problemleri 30
5.1.1. Test 1 30
5.1.2. Test 2 30
5.1.3. Test 3 31
5.2. Yöntemin Uygulanışı 31
5.3. FHN Denkleminin Kübik Trigonometrik B-Spline ve Kübik Trigonomerik Gerilim B-Spline Kollokasyon Yöntemleri ile Sayısal Çözümü 32
5.3.1. Kübik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemi 33
5.3.2. Kübik trigonometrik gerilim B-spline kollokasyon yöntemi . . 37
5.3.3. Nümerik sonuçlar 38
5.4. FHN Denkleminin Kuartik Trigonometrik B-Spline ve Kuartik Trigonomerik Gerilim B-Spline Kollokasyon Yöntemleri ile Sayısal Çözümü 42
5.4.1. Kuartik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemi 43
5.4.2. Kuartik trigonometrik gerilim B-spline kollokasyon yöntemi . 44
5.4.3. Nümerik sonuçlar 45
5.5. FHN Denkleminin Kuintik Trigonometrik B-Spline ve Kuintik Trigonomerik Gerilim B-Spline Kollokasyon Yöntemleri ile Sayısal Çözümü 49
5.5.1. Kuintik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemi 50
5.5.2. Kuintik trigonometrik gerilim B-spline kollokasyon yöntemi . 51
5.5.3. Nümerik sonuçlar 52

6. SONUÇ VE ÖNERİLER 57

KAYNAKLAR DİZİNİ 59

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil		Sayfa
4.1	Polinom Lineer B-spline Taban Fonksiyonu	13
4.2	Lineer trigonometrik B-spline taban fonksiyonunun grafiği	15
4.3	Lineer trigonometrik B-spline şekil fonksiyonlarının temsili	15
4.4	CT^3 B-spline taban fonksiyonu	16
4.5	CT^3 B-spline şekil fonksiyonları	16
4.6	QT^4 B-spline taban fonksiyonu	20
4.7	QT^4 B-spline şekil fonksiyonları	20
4.8	QT^5 B-spline taban fonksiyonu	25
4.9	QT^5 B-spline şekil fonksiyonları	25
5.1	Test 1'in CT^3 ve CTT^3 B-spline ile nümerik similasyonu	40
5.2	Test-1 için $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ seçimiyle $t = 5$ anındaki hata grafikleri	40
5.3	Test 2'nin CT^3 ve CTT^3 B-spline ile nümerik similasyonu	40
5.4	Test-2 için $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ seçimiyle $t = 5$ anındaki hata grafikleri	41
5.5	Test 3'ün CT^3 ve CTT^3 B-spline ile nümerik similasyonu	41
5.6	Test-3 için $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ seçimiyle $t = 5$ anındaki hata grafikleri	41
5.7	Test 1'in QT^4 ve QTT^4 B-spline ile nümerik similasyonu	47
5.8	Test-1 için $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ seçimiyle $t = 5$ anındaki hata grafikleri	47
5.9	Test 2'nin QT^4 ve QTT^4 B-spline ile nümerik similasyonu	47
5.10	Test-2 için $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ seçimiyle $t = 5$ anındaki hata grafikleri	48
5.11	Test 3'ün QT^4 ve QTT^4 B-spline ile nümerik similasyonu	48
5.12	Test-3 için $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ seçimiyle $t = 5$ anındaki hata grafikleri	48
5.13	Test 1'in QT^5 ve QTT^5 B-spline ile nümerik similasyonu	54
5.14	Test-1 için $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ seçimiyle $t = 5$ anındaki hata grafikleri	54
5.15	Test 2'nin QT^5 ve QTT^5 B-spline ile nümerik similasyonu	55
5.16	Test-2 için $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ seçimiyle $t = 5$ anındaki hata grafikleri	55
5.17	Test 3'ün QT^5 ve QTT^5 B-spline ile nümerik similasyonu	56
5.18	Test-3 için $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ seçimiyle $t = 5$ anındaki hata grafikleri	56

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge **Sayfa**

4.1 Düğüm noktalarında hesaplanan $CT_m^3(x)$ ve türev değerleri 17
4.2 Düğüm noktalarında hesaplanan $CTT_m^3(x)$ ve türev değerleri 19
4.3 Düğüm noktalarında hesaplanan $QT_m^4(x)$ ve türev değerleri 21
4.4 Düğüm noktalarında hesaplanan $QTT_m^4(x)$ ve türev değerleri 23
4.5 Düğüm noktalarında hesaplanan $QT_m^5(x)$ ve türev değerleri 26
4.6 Düğüm noktalarında hesaplanan $QTT_m^5(x)$ ve türev değerleri 29

5.1 Test-1 için CT^3 ve CTT^3 B-Spline $-15 \leq x \leq 30$ ve $t = 5$ anında hata normları 38
5.2 Test-2 için CT^3 ve CTT^3 B-Spline $-25 \leq x \leq 25$ ve $t = 5$ anında hata normları 38
5.3 Test-3 için CT^3 ve CTT^3 B-Spline $-35 \leq x \leq 30$ ve $t = 5$ anında hata normları 39
5.4 Test-1 için QT^4 ve QTT^4 B-Spline $-15 \leq x \leq 30$ ve $t = 5$ anında hata normları 45
5.5 Test-2 için QT^4 ve QTT^4 B-Spline $-25 \leq x \leq 25$ ve $t = 5$ anında hata normları 46
5.6 Test-3 için QT^4 ve QTT^4 B-Spline $-35 \leq x \leq 30$ ve $t = 5$ anında hata normları 46
5.7 Test-1 için QT^5 ve QTT^5 B-Spline $-15 \leq x \leq 30$ ve $t = 5$ anında hata normları 52
5.8 Test-2 için QT^5 ve QTT^5 B-Spline $-25 \leq x \leq 25$ ve $t = 5$ anında hata normları 53
5.9 Test-3 için QT^5 ve QTT^5 B-Spline $-35 \leq x \leq 30$ ve $t = 5$ anında hata normları 53

KISALTMALAR DİZİNİ

Kısaltmalar	**Açıklama**
CN	Crank Nicolson
RD	Reaksiyon - Difüzyon
FHN	Fitzhugh Nagumo
CT^3	Kübik Trigonometrik
CTT^3	Kübik Trigonometrik Gerilim
QT^4	Kuartik Trigonometrik
QTT^4	Kuartik Trigonometrik Gerilim
QT^5	Kuintik Trigonometrik
QTT^5	Kuintik Trigonometrik Gerilim
UE	Birleşik ve Genişletilmiş Spline

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Doğada görülen fiziksel ve biyolojik olayları anlamak ve bu olayların zaman içinde nasıl değiştiğini gözlemlemek için matematiksel modellere ihtiyaç duyarız. Kısmi diferansiyel denklemler bu olayların hem zamana bağlı değişimini hem de uzayda yayılımını birlikte gözlemlememize olanak sağlar. Reaksiyon–difüzyon (RD) denklemleri de bu sınıfta yer alır. Bu tür denklemler fizik, kimya, biyoloji ve tıp alanlarında yaygın olarak kullanılır. Tezde kullanılan FitzHugh–Nagumo (FHN) modeli, sinir hücrelerinde uyarının zamana bağlı değişimini açıklamak için kullanılan temel modeller arasındadır. Denkleme difüzyon terimi eklendiğinde uyarının yayılımı modellenebilir. Bu nedenle FHN denklemi, sayısal yöntemlerin doğruluğunu incelemek için uygun bir denklemdir.

Doğrusal olmayan RD tipi denklemlerin analitik çözümlerinin elde edilmesi mümkün olmadığı durumlarda çözüm için sayısal yöntemlere ihtiyaç duyulur. Bir sayısal yöntemin yalnızca çözüm üretebilmesi yeterli değildir. Yöntemin doğru sonuçlar vermesinin yanı sıra kararlı çalışması ve hesaplama maliyeti açısından da uygun olması gereklidir. Bu nedenle, geliştirilen ya da kullanılan sayısal yaklaşımların hem doğruluk hem de verimlilik açısından test edilmesi ve uygun parametrelerin seçilmesi gerekmektedir.

FHN denklemi gibi doğrusal olmayan benzer RD denklemleri için literatürde sonlu farklar yöntemi, sonlu elemanlar yaklaşımı ve B-spline tabanlı kollokasyon yöntemleri gibi çeşitli sayısal yöntemler önerilmiştir. Bu yöntemlerde amaç, karmaşık denklemlerde güvenilir çözümler elde etmek ve yöntemin kararlı çalıştığını göstermektir. Yöntemlerin hızı, doğruluğu ve işlem maliyetleri birbirinden farklı olabilir. Bu nedenle yeni bir yaklaşımı test ederken, analitik çözümü bilinen problemler üzerinden değerlendirme yapılır.

Tez çalışmasında FHN denkleminin sayısal çözümü, farklı derecelere sahip trigonometrik ve trigonometrik gerilim B-spline taban fonksiyonları kullanılarak kollokasyon yöntemi ile incelenecektir. Denklemin farklı h, Δt, τ parametre değerleri ile sayısal çözümleri elde edilecektir. Yöntemin doğruluğu ise analitik çözümü bilinen test problemlerinde, sayısal çözüm ile analitik çözüm arasındaki farktan hesaplanan L_∞ hata normu kullanılarak değerlendirilecektir. Elde edilen çözümler çizelgeler ve şekiller ile desteklecektir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

RD sistemleri, fizik, kimya, biyoloji gibi temel bilimlerde ve mühendislik, ekoloji gibi uygulamalı alanlarda, süreklilik sergileyen olayları modellemek için kullanılan doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerdir. Bu sistemler, difüzyon (maddelerin yayılımı) ve reaksiyon (etkileşim) süreçlerini birleştirerek desen oluşumu gibi karmaşık fenomenleri açıklar. Literatür taraması, RD sistemlerinin genel yapısını, analitik çözümlerinin sınırlı olması nedeniyle sayısal yöntemlerin önemini ve bu yöntemlerin çeşitli test problemleri üzerindeki uygulamalarını ele almaktadır. Özellikle FHN denklemi üzerine odaklanarak denklemin sayısal çözümleri için yenilikçi yaklaşımlar sunulmaktadır.

FHN denklemi, Hodgkin-Huxley modelinin basitleştirilmiş bir versiyonu olarak, sinir impulslarının yayılımını ve kalp kası hücrelerindeki aksiyon potansiyellerini modellemek için kullanılan, sinirsel ve biyolojik sistemlerin dinamiklerini modellemek için geliştirilmiştir. Güncel literatürde kullanılan FHN denlemi:

$$u_t = u_{xx} + u(u-p)(1-u). \tag{2.1}$$

Rufai vd., 2023, FHN model denkleminin sayısal çözümü için iki adımlı melez blok bir yöntem önermişlerdir. Önerilen yöntemde, çözümün zaman içinde blok halinde ve birden çok noktada birlikte yaklaştırılmasıyla doğruluğun artırılması ve hesaplamanın verimli kılınması sağlanmıştır. Çeşitli örnekler üzerinde yapılan karşılaştırmalarda yöntemin mevcut tekniklere göre daha küçük hatalar ve daha dengeli sayısal davranış sergilediği gösterilmiştir. Elde edilen sonuçlar; yöntemin FHN temelli RD problemleri için güvenilir ve pratik bir alternatif olduğunu ortaya koymuştur.

Hamadneh vd., 2023, FHN modeli kesirli fark denklemleri çerçevesinde ayrık-zamanlı bir RD sistemi olarak yeniden formüle edilerek kararlılık analizine bütüncül bir yaklaşım sunmuştur. Çalışmalarında, yerel ve küresel asimptotik kararlılık için yeterli koşullar türetilmiş. Özellikle Lyapunov fonksiyonelleri aracılığıyla denge noktasının uzun dönem davranışı değerlendirilmiş ve kesirli mertebenin sistem dinamikleri üzerindeki etkisi tartışılmıştır. Sunulan sayısal simülasyonlarla, kuramsal bulguların niteliksel izleri açık biçimde doğrulanarak,

FHN dinamiklerinin ayrık kesirli modellerle temsilinde yöntemin açıklayıcılığı gösterilmiştir.

Zamana bağlı doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler için geliştirilen üç adımlı ikinci türev blok zaman şeması, uzayda dördüncü mertebe kompakt sonlu farklarla birleştirilerek verimli bir çözüm çerçevesi sunulmuştur (Mehta vd., 2023). Önerilen blok kompakt sonlu fark şemaları kararlı ve tutarlı olacak biçimde tasarlanmış. Yarı ayrıklaştırma sonrası elde edilen sistemlerin kararlılığı incelenmiş ve FHN denklemi için tutarlı ve güvenilir sonuçlar elde edilmiştir. FHN ve Burgers' denklemlerinin test problemlerinde yapılan karşılaştırmalar ile daha az zaman adımıyla daha küçük hata ve daha düşük hesaplama maliyeti sağlandığı gösterilmiştir. Elde edilen bulgular; blok yöntem ve kompakt sonlu fark yaklaşımının birlikte kullanımının, FHN tipi RD modellerinde ölçeklenebilir ve pratik bir çözüm sunduğunu göstermektedir.

Zhang vd., 2023, FHN nöron modeline dış elektrik alanı dahil edilerek, modelin sergilediği dinamik davranışlar daha kapsamlı bir şekilde analiz edilmektedir. Geliştirilen yöntem, yalnızca kararlı salınımları değil, yakalanması zor olan kararsız periyodik örüntüleri de izleyebilmektedir. Sonuçlar donanımsal devre deneyleriyle doğrulanarak modelin öngörülerinin pratikte de karşılık bulduğu kanıtlanmaktadır. Yapılan çalışma ile elektrik alanın nöral dinamikler üzerindeki etkisi somutlaştırılmakta ve FHN tabanlı analizler için güçlü ve uygulanabilir bir yaklaşım sunulmaktadır.

Al-Juaifri ve Harfash, 2023, FHN denkleminin Robin sınır koşulları altındaki çözümünü sonlu elemanlar yöntemiyle incelemiş, önerdikleri yarı-ayrık ve tam-ayrık yaklaşımların özelliklerini, hata analizlerini ve sayısal deneyleri ortaya koymuşlardır.

Nörobiyoloji modellerinde ortaya çıkan stokastik FHN kısmi diferansiyel denkleminin çözümü için kaydırılmış Legendre polinomlarına dayalı spektral bir yaklaşım (Uma vd., 2024) geliştirilmiştir. Yapılan çalışmada iki boyutlu kaydırılmış Legendre polinomları kullanılarak operasyonel matrisler tanımlanmış, bu sayede stokastik uyarım altında FHN türü RD sistemleri için yaklaşık çözümler elde edilmiştir. Önerilen yöntem, beyaz gürültü süreçleri ve stokastik entegrasyon tekniklerini dikkate alarak iyi tanımlanmış ve hata analizi incelenmiştir. Stokastik terimlerin doğurduğu düzenlilik ve kararlılık güçlükleri ise polinomsal baz ve yerleştirme stratejisiyle yönetilebilir hale getirilmiştir. Böylece, stokastik FHN

modelleri için hem kuramsal gerekçelerle desteklenen hem de pratik hesaplamalara uygulanabilir nitelikte bütüncül bir çözüm sunulmuştur.

Sinir bilimi alanında sinir impulslarının yayılımını modellemede yaygın olarak kullanılan zaman-kesirli FHN diferansiyel denkleminin sayısal çözümüne yönelik yenilikçi bir spektral yöntem (Abd-Elhameed, Alqubori ve Atta, 2024) önerilmiştir. Yapılan çalışmada temel fonksiyonlar olarak kaydırılmış Lucas polinomları kullanılarak bir kollokasyon yaklaşımı geliştirilmiş. Bu doğrultuda, Lucas tabanı için tam ve kesirli türevlerin operasyonel matrisleri kapalı biçimde türetilmiştir. Böylece denklemin kesirli türev içeren kısmı doğrusal cebir adımlarına indirgenmiş ve kollokasyon yöntemi aracılığıyla model bir cebirsel sisteme dönüştürülmüştür. Yakınsaklık kuramı, Lucas açılımlarının yapısal özelliklerine dayandırılarak yöntemin kuramsal sağlamlığı gösterilmiş ve bu sayede kesirli FHN modellemesi için hem kuramsal hem de hesaplama açısından bütüncül bir çözüm şeması ortaya koyulmuştur.

Abd-Elhameed, Al-Harbi ve Atta, 2024 tarafından diğer bir çalışmada, sinir impulslarının yayılımını modelleyen doğrusal olmayan FHN denkleminin spektral çözümü için, temel fonksiyonlar olarak Fibonacci polinomlarının kullanıldığı bir kollokasyon yaklaşımı önerilmektedir. Fibonacci polinomlarını genelleyen bu non-ortogonal polinom ailesiyle çözüm, zaman ve konum değişkenleri üzerinde iki değişkenli bir seri açılım biçiminde ifade edilmektedir. Polinomların türevlerine karşılık gelen operasyonel matrisleri kapalı biçimde türetilerek sayısal şema kurulmaktadır. Böylece, FHN denkleminin sayısal çözümüne yönelik literatürde daha önce kullanılmamış bir polinom ailesi tanıtılmış ve bu aile üzerinden spektral kollokasyon yöntemi uygulanmıştır.

Polinomların seri gösterimleri, türev formülleri ve ortogonallik özellikleri, Abd-Elhameed, Alqubori ve Atta, 2025 tarafından ayrıntılı biçimde türetilmiştir. Yakınsaklık analizi aracılığıyla yöntemin kuramsal sağlamlığı ortaya koyulmuş, böylece FHN denkleminin doğrusal olmayan dinamiklerini yüksek çözünürlükle yakalayabilen etkin bir spektral algoritma elde edilmiştir. Bu doğrultuda, klasik Chebyshev tabanlarının ötesine geçen kapalı biçimli operasyonel araçlar çalışma tarafından sunularak FHN denkleminin sayısal çözümüne yönelik literatürde önemli bir katkı sağlanmıştır.

3. TEMEL KAVRAMLAR

3.1 Sonlu Farklar Yaklaşımı

Bilimsel alanların birçoğunda adi ve kısmi türevli diferansiyel denklemler ve denklem sistemleriyle karşılaşılır. Diferansiyel denklemlerin analitik bir çözümü bulunmadığında Sonlu Farklar Yaklaşımı kullanılan yöntemlerden biridir. Bu yaklaşımda çözüm uzayı, eşit veya eşit olmayan adımlarla tanımlanan düğüm noktalarına bölünür. Düğüm noktalarındaki türevler, Taylor seri açılımından türetilen ileri, geri veya merkezi sonlu fark formülleriyle yaklaşık olarak ifade edilir. Böylece diferansiyel denklem, cebirsel bir denklem sistemine indirgenir. Ortaya çıkan cebirsel sistem, çeşitli bilgisayar programlarıyla çözülebilir hale gelir. Tek değişkenli diferansiyel denklemler için Taylor serisi yardımıyla sonlu fark yaklaşımları aşağıda verilmiştir. $[x_a, x_b]$ tanım aralığında, N pozitif bir tam sayı, $\Delta x = \frac{x_b - x_a}{N}$ olmak üzere bölünme noktaları

$$x_i = x_a + i\Delta x, \;\; i = 0, 1, \ldots, N$$

şeklinde tanımlansın. $v(x)$ fonksiyonu ve türevleri $[x_a, x_b]$ aralığında sürekli olmak üzere, $v(x)$ fonksiyonu $v(x_i + \Delta x)$, $v(x_i - \Delta x)$ civarında Taylor serisi açılımları:

$$v(x_i + \Delta x) = v(x_i) + (\Delta x)v_x(x_i) + \frac{(\Delta x)^2}{2!}v_{xx}(x_i) + \frac{(\Delta x)^3}{3!}v_{xxx}(x_i) + \cdots, \tag{3.1}$$

$$v(x_i - \Delta x) = v(x_i) - (\Delta x)v_x(x_i) + \frac{(\Delta x)^2}{2!}v_{xx}(x_i) - \frac{(\Delta x)^3}{3!}v_{xxx}(x_i) + \cdots \tag{3.2}$$

Denklem (3.1) ve (3.2) kullanılarak $v_x(x_i)$ çözülürse aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$v_x(x_i) = \frac{v(x_i + \Delta x) - v(x_i)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2!}v_{xx}(x_i) - \frac{(\Delta x)^2}{3!}v_{xxx}(x_i) - \cdots, \tag{3.3}$$

$$v_x(x_i) = \frac{v(x_i) - v(x_i - \Delta x)}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2!}v_{xx}(x_i) - \frac{(\Delta x)^2}{3!}v_{xxx}(x_i) + \cdots \tag{3.4}$$

Denklem (3.3) ve (3.4) düzenlendiğinde, v fonksiyonunun x_i noktasındaki birinci türevi yaklaşık olarak

$$v_x(x_i) = \frac{v(x_i + \Delta x) - v(x_i)}{\Delta x} + O(\Delta x) = \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{3.5}$$

ve

$$v_x(x_i) = \frac{v(x_i) - v(x_i - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x) = \frac{v_i - v_{i+1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{3.6}$$

bulunabilir. Sırasıyla denklem (3.5) ve (3.6) ileri ve geri fark yaklaşımları olarak gösterilir. Denklemlerde görüldüğü gibi Taylor serisinin sadece belirli terimleri

yaklaşım için kullanılırken diğer terimler yaklaşıma dahil edilmemiştir. Dahil edilmeyen bu terimler hataya sebep olacaktır. Serinin dahil edilmeyen ilk terimin mertebesi hatanın mertebesini verir. Burada serinin kesildiği terimden sonraki terime bakılarak $O(\Delta x)$ mertebeden olduğu görülür. (3.1) denkleminden (3.2) denklemi taraf tarafa çıkartılıp düzenlendiğinde

$$v_x(x_i) = \frac{v(x_i + \Delta x) - v(x_i - \Delta x)}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) \tag{3.7}$$

birinci türev için merkezi fark yaklaşımı bulunabilir. Bulunan hata ise 2. derecedendir ve $O((\Delta x)^2)$ ile gösterilir. Denklem (3.1) ve (3.2) taraf tarafa toplanıp, v_{xx} denklemden çekildiğinde

$$v_{xx}(x_i) = \frac{v(x_i + \Delta x) - 2v(x_i) + v(x_i - \Delta x)}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2),$$

$$v_{xx}(x_i) = \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{\Delta x} + O((\Delta x)^2) \tag{3.8}$$

ikinci türev için sonlu fark yaklaşımı elde edilir. Daha ayrıntılı bilgi için (Smith, 1978) referanslar incelenebilir.

3.2 Crank Nicolson Yöntemi

Crank Nicolson (CN) yöntemi, diferansiyel denklemleri nümerik olarak çözmek için kullanılan ikinci mertebeden ve kapalı bir yöntemdir. John Crank ve Phyllis Nicolson tarafından geliştirilmiş bir yöntemdir (Crank ve Nicolson, 1947). Geliştirilen bu yöntem, iki bilinmeyenli $v(x,t)$ diferansiyel denkleminin sayısal çözümünde, konum–zaman ayrıştırmalarında türevleri kullanarak aşağıdaki yaklaşımları önermektedir.

$$v_t \simeq \frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t}$$

$$v \simeq \frac{v^{n+1} + v^n}{2}$$

$$v_x \simeq \frac{v_x^{n+1} + v_x^n}{2}$$

Önerilen denklemlerde de görüldüğü gibi Δt zaman parametresini ifade eder. Zamana göre türev genellikle ileri sonlu fark yaklaşımı ile ayrıklaştırılmaktadır ancak gerekli durumlarda geri veya merkezi fark yaklaşımları da tercih edilebilmektedir. Kalan diğer terimlerde ise ardışık iki ayrık zamanlardaki ortalamaları kullanılmaktadır. Bu tezde kullanılacak CN yaklaşımları aşağıdaki gibidir:

$$u_t = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, \tag{3.9}$$

$$u_{xx} = \frac{u_{xx}^{n+1} + u_{xx}^{n}}{2}, \tag{3.10}$$

$$u = \frac{u^{n+1} + u^{n}}{2}, \tag{3.11}$$

$$u^2 = \frac{(u^2)^{n+1} + (u^2)^{n}}{2}, \tag{3.12}$$

$$u^3 = \frac{(u^3)^{n+1} + (u^3)^{n}}{2}. \tag{3.13}$$

3.3 Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sonlu elemanlar yöntemi, çeşitli bilim dallarında kullanılmaktadır. Özellikle gelişmiş ve karmaşık mühendislik sistemlerin modellenmesini basite indirgeyerek çözüm sunan sayısal bir yöntemdir. Bu yöntemde, çözüm bölgesi belirli alt aralıklara bölünerek bu alt aralıklara eleman adı verilir. Her alt bölge ise düğüm noktalarıyla birleştirilir. Bu ayrıklaşma işlemi sonunda yaklaşım için her düğüm noktasında bir fonksiyon belirlenir. Genel çözüme ulaşmak amacıyla problem doğrudan çözülmez, eleman denklemleri oluşturulur ve birleştirilerek denklem sistemi elde edilir. Bilgisayar destekli programlar aracılığıyla geliştirilen yöntemler, sonlu elemanlar için hızlı ve yüksek duyarlıklı sonuçlar vermektedir. Sonlu elemanlar yönteminin bazı özellikleri şunlardır:

- Karmaşık ve düzgün olmayan yapıların kolayca modellenmesi,
- Farklı materyallerden oluşan yapıların modellenmesi,
- Çeşitli sınır koşullarının birlikte modellenmesi,
- Yüksek doğruluk ve hassasiyet için eleman sayısı artırılıp daha fazla alt bölgelere bölünebilir.

3.3.1 Ağırlıklı rezidü yöntemi

Ağırlıklı rezidü yönteminde,

$$Lv(x) = g(x) \tag{3.14}$$

şeklindeki diferansiyel denklemde; L diferansiyel operatör, $g(x)$ bilinen bir fonksiyon, $v(x)$ ise aranan çözüm olsun. İstenen $v(x)$ fonksiyonu yerine

$$v(x) \approx \widetilde{v}(x) = \sum_{j}^{N} a_j \phi_j(x) \tag{3.15}$$

sonlu yaklaşım serisi kullanılır. Sonlu elemanlar yönteminde, $\widetilde{v}(x)$ ile ifade edilen ve denklem (3.15) ile belirtilen formda bir sonlu yaklaşım serisi kullanılmaktadır. $\phi_j(x)$ fonksiyonları ($j = 1, \ldots, N$), uzay ve zaman alanları içerisinde tanımlanmış bir küme oluşturur. Burada, a_j ($j = 1, \ldots, N$) değerleri bilinmeyen katsayılar olarak yer alır. Bu yöntemde $\phi_j(x)$ fonksiyonları, probleme özgü sınır koşullarını karşılayacak şekilde seçilir ancak genellikle diferansiyel denklemi doğrudan sağlamazlar. Ağırlıklı rezidü yönteminin amacı, $\widetilde{v}(x)$ sayısal çözüm ve tam çözüm arasındaki farkı azaltmaktır. Fark miktarı rezidü olarak tanımlanır

$$R(x) = L\widetilde{v}(x) - g(x) = L\widetilde{v}(x) - Lv(x). \tag{3.16}$$

Rezidüyü azaltmak için W_j olarak belirtilen ağırlık fonksiyonları, aşağıda yer alan integralin en küçük değere ulaşmasını sağlayacak şekilde özel olarak seçilmiş fonksiyonlardır. Denklem (3.15) ile tanımlanan rezidü ifadesi, $W_j(x)$ ağırlık fonksiyonlarıyla çarpılır ve böylece problemin Ω tanım bölgesinde hesaplanan ağırlıklı integralin değeri sıfıra eşitlenir.

$$\int_\Omega W_j(x)R(x)dx = 0, j = 1, ..., N \tag{3.17}$$

Bu şekilde oluşturulan denklem sistemi, N bilinmeyen ve N denklemden oluşur. Elde edilen denklem sistemi üzerinden $\widetilde{v}(x)$ sayısal çözümüne ulaşmak için a_j bilinmeyenleri bulunur ve (3.15) denkleminde yerine yazılırak yaklaşık çözüm hesaplanır (**Reddy1993**). Ağırlıklı rezidü yönteminin; Galerkin, En Küçük Kareler, Kollokasyon yöntemlerinde uygulamaları bulunmaktadır.

3.3.2 Kollokasyon yöntemi

Kollokasyon yöntemi, ağırlıklı rezidü yönteminin uygulamalarından biridir. Çözüm bölgesi Ω içerisinden seçilen x_j ($j = 1, \ldots, N$) kollokasyon noktalarında, yaklaşık çözümün denklemi ne ölçüde sağladığını gösteren rezidü $R(x)$ ($j = 1, \ldots, N$) aralığında sıfırlanır; başka bir söylemle $R(x_j) = 0$ koşulu sağlanır. Bu yöntemde kullanılan W_j ağırlık fonksiyonun bulunmasında

$$W_j = \delta(x - x_j) = \begin{cases} 1, & x = x_j \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{3.18}$$

dirac delta fonksiyonları kullanılır. Dirac delta fonksiyonu (3.17) integralinde yerine yazıldığında verilen noktaların dışında $R(x)$ rezidüsünün sonucu sıfır olacaktır. Problemin tanım aralığındaki x_j, $j = 1, ..., N$ kollokasyon noktaları (3.15) eşitliğinde yerine yazılmasıyla aşağıdaki denklem oluşturulur:

$$L(\sum_{j=1}^{N} a_j\phi_j(x)) - g(x). \tag{3.19}$$

a_j bilinmeyenlerini bulmak için denklemin sınır koşulları uygulanarak $\widetilde{v}(x)$'in sayısal çözümleri elde edilir.(Lapidus ve Pinder, 1982)

3.3.3 Galerkin yöntemi

Galerkin yöntemi, ağırlıklı rezidü yaklaşımı içerisinde yer alan ve başlangıç, sınır koşullarıyla tanımlı diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünde kullanılan bir yöntemdir. Eşitlik (3.17)deki ağırlık fonksiyonları W_j, yaklaşım fonksiyonunda kullanılan ϕ_j ile aynı seçildiğinde Galerkin yöntemi olarak adlandırılır. Ω bölgesi üzerinde tanımlı (3.17) denkleminden elde edilen A_{ij} ve F_i aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i L(\phi_j) dx,$$

$$F_i = \int_{\Omega} \phi_i g dx$$

ve böylece

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij} a_j = F_i \tag{3.20}$$

ifadesi ile N bilinmeyenli lineer sistem oluşturulur. Bu sistemin çözülmesiyle a_j, $j = 1, ..., N$ bilinmeyenleri bulunur ve (3.15) denklemi kullanılarak sayısal çözüme ulaşılır. (Reddy, 1993)

3.3.4 Subdomain Galerkin yöntemi

Galerkin yönteminde, tanım bölgesi Ω olan problemi çözmek için W_i ağırlık fonksiyonu:

$$W_i = \begin{cases} 1, & x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{3.21}$$

şeklinde seçildiğinde subdomain Galerkin yöntemine dönüşür. Bu yönteminin cebirsel denklemleri:

$$A_{ij} = \int_{\Omega} L(\phi_j) dx,$$

$$F_i = \int_{\Omega} g dx$$

olarak tanımlanır ve

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij} a_j = F_i \tag{3.22}$$

biçiminde denklem sistemi oluşturulur. (Karakoç, 2011)

3.3.5 Spline fonksiyonlar

Spline fonksiyonları, matematikte özellikle sayısal analizde, bilgisayar grafikleri ve interpolasyon problemlerinde kullanımları yönünden önemlidir. Sinyallerin ve görüntülerin interpolasyonu (sinyal ve görüntü işleme), gürültülü verilerin düzenlenmesi (veri yumuşatma), eğri ve yüzey modellenmesi (bilgisayar grafikleri), veri noktaları arasında geçişler ve diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü gibi çok çeşitli kullanımları vardır. Spline yaklaşım yöntemi, her alt aralıkta düşük dereceli polinomlar kullanıp türev sürekliliğini koruduğundan, tek bir yüksek dereceli polinom yaklaşımına kıyasla daha kararlı ve esnek bir yapı sunar. Newton ve Langrange interpolasyonları gibi polinom yaklaşımlarında, polinomun derecesi ve nokta sayısı doğru orantılıdır. Yüksek dereceli polinomlarda ise nokta sayısının artmasıyla birlikte yapılacak işlemler zorlaşabilir ve doğru sonuçlar elde edilemeyebilir. Böyle durumlarda, tek bir yüksek dereceli polinom kullanmak yerine ardışık veri noktaları arasında düşük dereceli polinomlarla yaklaşım yapmak daha uygun olduğundan spline interpolasyonu önerilir. Spline interpolasyonunda tanım aralığı, birbiriyle örtüşmeyen alt aralıklara ayrılır ve her alt aralık için uygun bir düşük dereceli polinomun elde edilmesi hedeflenir (Schoenberg, 1946).
Reel sayılardan oluşan monoton artan bir düğüm dizisi:

$$-\infty = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = \infty \tag{3.23}$$

olsun. Bu düğüm noktaları üzerinde tanımlı $m.$ dereceden $s(x)$ spline fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar (Dag, 1994):

1. Her $[x_i, x_{i+1}]$ alt aralığında $s(x)$, derecesi en fazla m olan bir polinom ile ifade edilir ($x_0 = -\infty$ ve $x_{N+1} = \infty$).
2. $s(x)$ ve bu fonksiyonun $1, 2, \ldots, m-1$ mertebeden türevleri, tanımlı oldukları tüm alt aralıklarda ve düğüm noktalarında (x_i, $i = 1, 2, \ldots, N$) süreklidir.

Parçalı polinom fonksiyonların kendisi ve türevleri bu iki koşulu sağlamaları durumunda spline fonksiyonlar oluşur. $m = 0$ için ikinci koşul aranmaz ve elde edilen $0.$ dereceden spline bir adım fonksiyonudur. $m = 1$ olduğunda spline, kırık doğrulardan oluşan parçalı doğrusal bir fonksiyondur. $m > 0$ için $m.$ derceden bir spline fonksiyonunun $m.$ türevi bir adım fonksiyonudur. Tersine bir adım fonksiyonunun m kez alınan belirsiz integrali $m.$ dereceden bir spline fonksiyonu verir. Spline fonksiyonlar; interpolasyon, yaklaşım, adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünde (sonlu elemanlar, Galerkin ve kollokasyon

yöntemi) yaygın biçimde kullanılır. Spline fonksiyonlar aşağıdaki özelliklere sahip parçalı polinom fonksiyonlardır.

- Spline fonksiyonlar, düzgün fonksiyonlardır.
- Uygun taban fonksiyonları ile ifade edilebilen sonlu boyutlu lineer uzaylar oluştururlar.
- Türevleri ve integralleri spline fonksiyondur.
- Çeşitli bilgisayar yazılımları ile hesaplama ve uygulama pratikliği kazandıran fonksiyonlardır.
- Düşük dereceli spline fonksiyonlar oldukça esnektir ve polinomlarda görüldüğü gibi keskin salınımlar yapmazlar.
- Çözüm bölgesinde süreklilik sağlayan her fonksiyon, bir spline fonksiyon cinsinden ifade edilebilir.

4. B-SPLINE FONKSİYONLAR

B-spline fonksiyonlar, düzgünlük ve polinom derecesi ile tanım aralığının düğüm noktaları üzerinden nasıl bölündüğüne bağlı olarak farklı biçimlerde tanımlanabilir. Belli bir dereceye ve düzgünlüğe sahip bir spline, aynı özelliklere sahip B-spline fonksiyonların lineer kombinasyonu biçiminde yazılabilir. Dolayısıyla B-spline'lar, spline fonksiyonları için taban oluşturur. Ayrıca B-spline fonksiyonları, Bezier eğrilerinin genelleştirilmiş biçimi olarak da bilinir. "B-spline" terimi ise ilk kez Schoenberg tarafından "basis spline" ifadesinin kısaltması olarak literatüre kazandırılmıştır. Sıfırıncı dereceden B-spline fonksiyon:

$$B_m^0 = \begin{cases} 1, & x_m \leq x < x_{m+1} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlanır (de Boor, 1978). B_m^0, B-spline bölünme noktalarında süreksizdir ve yüksek dereceden B-spline fonksiyonlar ise

$$B_m^k(x) = \frac{x - x_m}{x_{m+k} - x_m} B_m^{k-1}(x) + \frac{x_{m+k+1} - x}{x_{m+k+1} - x_{m+1}} B_{m+1}^{k-1}(x) \tag{4.2}$$

$$k = 1, 2, \ldots \; m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

bağıntısı yardımıyla hesaplanır. Prenter (Prenter, 1975), B-spline fonksiyonların $[a, b]$ aralığında tanımlanan spline uzayı için doğrusal bağımsız bir taban oluşturduğunu ifade etmiştir. Bu doğrultuda B-spline fonksiyonlar, düğümlerin eşit aralıklarla yerleştirildiği alt aralıklar üzerinde kolayca tanımlanabilir. Bunun yanı sıra düğümlerin eşit aralıklı olmadığı, alt aralık uzunluklarının geometrik olarak değiştiği bölünmeler içinde B-spline tanımı geçerlidir. Bu tür düzensiz düğüm dizileri için (Dag, 1994) incelenebilir. B-spline fonksiyonlarının sahip olduğu çeşitli nitelikler, onları diferansiyel denklemlerin çözümlerinde tercih edilen bir yöntem haline getirmiştir. $k.$ dereceden bir B^k B-spline fonksiyonunun niteliklerinden bazıları şunlardır:

- B^k fonksiyonu $k + 1$ ardışık alt aralıkta pozitif olup bu aralıkların dışında değeri sıfırdır.
- B^k fonksiyonunun $(k - 1)$. türevine kadar olan tüm türevleri süreklidir ancak $k.$ mertebeden türevinde düğüm noktalarında süreksizdir.
- Her B^k fonksiyonu, $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında parçalı polinom şeklindedir.

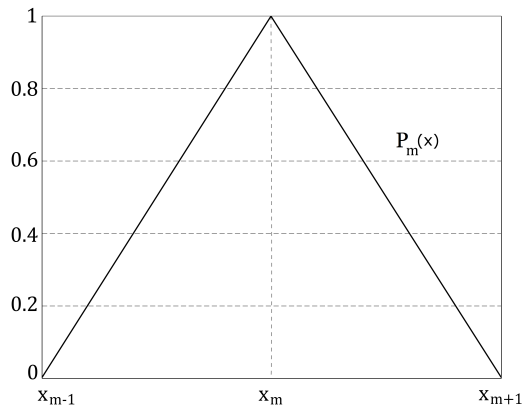
- B^k fonksiyonu simetrik bir yapıya sahiptir.
- B^k fonksiyonunun davranışı, tanımlı olduğu aralığın bir bölümünde monoton artış, diğer bölümünde ise monoton azalış gösterir.

4.1 Polinom B-spline Taban Fonksiyonlar

Belirli dereceden B-spline fonksiyonları tanımlanırken, $[a, b]$ çözüm aralığı h uzunlukta alt aralıklara ayrılır. Burada $h = x_{m+1} - x_m$, $m = 0, 1, .., N$ olmak üzere $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_m < ... < x_N = b$ şeklinde düğüm noktaları oluşturulur. Her x_m noktası bu alt aralıkların sınırı olarak düğüm noktası kabul edilir. Bu düğüm noktaları, (4.2) bağıntısı yardımıyla $B^1_m(x)$ şeklinde:

$$B^1_m(x) = \frac{1}{h} \begin{cases} (x_{m+1} - x) - 2(x_m - x), & x \in [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+1} - x), & x \in [x_m, x_{m+1}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{4.3}$$

lineer B-spline fonksiyonu tanımlanır(Prenter, 1975). Fonksiyonlar kümesi $B^1_0(x), B^1_1(x), \ldots, B^1_N(x)$, $[a, b]$ üzerinde tanımlanan spline fonksiyonları için bir taban oluşturur. Her bir $B^1_m(x)$ fonksiyonu, yalnızca $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ aralığında sıfırdan farklı bir değer alır ve bu aralık dışında sıfır değerini alır. Ayrıca, $B^1_m(x)$ ve $B^1_{m+1}(x)$ fonksiyonları, $[a, b]$ için aralığı örten fonksiyonlar olarak tanımlanır. Örneğin, $h = 1$ alındığında $[a, b]$ aralığı $[0, 2]$ seçildiğinde, bu aralık üzerinde örten lineer B-spline fonksiyonu Şekil 4.1'de gösterildiği gibi elde edilir. Kuadratik, kübik, kuartik ve kuintik B-spline taban fonksiyonlarını tanımlamak için tekrarlamalı (4.2) bağıntısı kullanılabilir (Şahin, 2009).



Şekil 4.1 Polinom Lineer B-spline Taban Fonksiyonu

4.2 Trigonometrik B-spline Taban Fonksiyonlar

Sonlu elemanlar yöntemi, genellikle polinom fonksiyonlar kullanılarak uygulansa da trigonometrik B-spline fonksiyonlarında kullanılması mümkündür. Trigonometrik B-spline fonksiyonlar, genellikle sınır koşulları ve fiziksel problemlerle ilgili daha uygun ve esnek çözümler sunabilirler. Trigonometrik B-spline fonksiyonların sıfırıncı derecesi, $T_i^0(x)$ ile ifade edilir:

$$T_i^0(x) = \begin{cases} 1, & x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0, & \text{diğer durumlar için} \end{cases} \tag{4.4}$$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyon, $[x_i, x_{i+1}]$ aralığında 1 değerini alırken, diğer aralıklarda sıfır olur ve B-spline fonksiyonların tabanı oluşturulur. Trigonometrik B-spline fonksiyonlar daha yüksek derecelere genişletilebilir. Daha yüksek dereceler, $k = 1, 2, 3, \ldots$ için aşağıdaki tekrarlamalı bağıntı ile elde edilir (Walz, 1997, Onarcan, 2020, Yıldırım, 2020).

$$T_i^k(x) = \frac{\sin\left(\dfrac{x - x_i}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{x_{i+k-1} - x_i}{2}\right)} T_i^{k-1}(x) + \frac{\sin\left(\dfrac{x_{i+k} - x}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{x_{i+k} - x_{i+1}}{2}\right)} T_{i+1}^{k-1}(x), \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.5}$$

Bu bağıntı trigonometrik B-spline fonksiyonların her bir derecesi için genişletilebilir. Özellikle yüksek dereceli fonksiyonlar daha hassas çözümlemeler gerektiren ve daha karmaşık sınır koşullarına sahip problemlerde kullanılabilir. Çözüm bölgesinin eşit aralıklara bölündüğü $[a, b]$ aralığında $h = x_{i+1} - x_i$ olarak tanımlanmışsa (4.5) bağıntısı aşağıdaki gibi sadeleştirilebilir ve her bir fonksiyon çözüm alanındaki her bir bölgeyi etkili bir şekilde modelleyebilir.

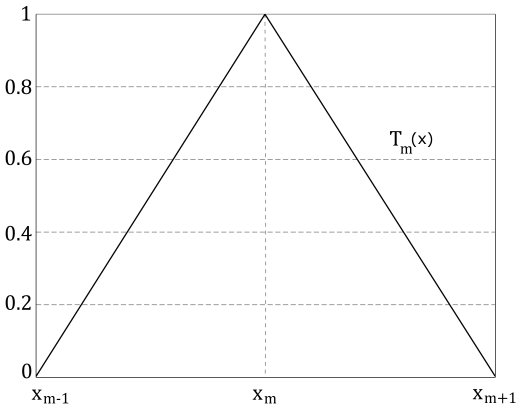
$$T_i^k(x) = \frac{\sin\left(\dfrac{x - x_i}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{kh}{2}\right)} T_i^{k-1}(x) + \frac{\sin\left(\dfrac{x_{i+k+1} - x}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{kh}{2}\right)} T_{i+1}^{k-1}(x), \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.6}$$

Bu şekilde trigonometrik B-spline fonksiyonları hem basitleştirilmiş bir hesaplama süreci sunar hem de daha yüksek doğrulukla çözümleme yapılmasına olanak sağlar.

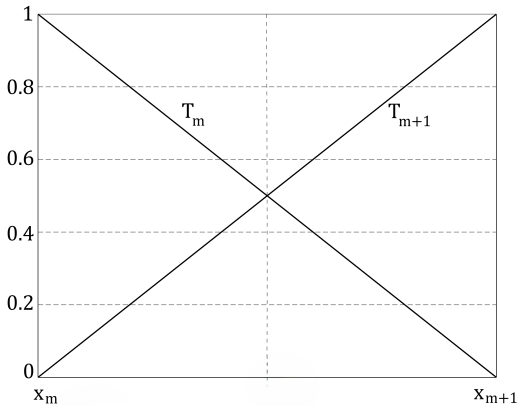
4.2.1 Lineer trigonometrik B-spline taban fonksiyonu

Çözüm aralığı $[a, b]$ üzerinde, x_m düğüm noktaları ile tanımlı bir konum parçalanması aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m < \cdots < x_N = b \tag{4.7}$$



Şekil 4.2 Lineer trigonometrik B-spline taban fonksiyonunun grafiği



Şekil 4.3 Lineer trigonometrik B-spline şekil fonksiyonlarının temsili

Burada her bir aralık $h = x_{m+1} - x_m$ uzunluğunda olup, $m = 0, \ldots, N-1$ aralığında yer almaktadır. Bu konum parçalanmasında $T_m^1(x)$ trigonometrik lineer B-spline fonksiyonlarını elde etmek için (4.6) bağıntısı kullanılır. $k = 1$ değeri seçilir ve

$$\rho(x_m) = \sin\left(\frac{x - x_m}{2}\right), \quad \theta = \sin\left(\frac{h}{2}\right) \tag{4.8}$$

olmak üzere trigonometrik lineer B-spline fonksiyonu $T_m^1(x)$, aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$T_m^1(x) = \frac{\rho(x_m)}{\theta} T_m^0(x) - \frac{\rho(x_{m+2})}{\theta} T_{m+1}^0(x) \tag{4.9}$$

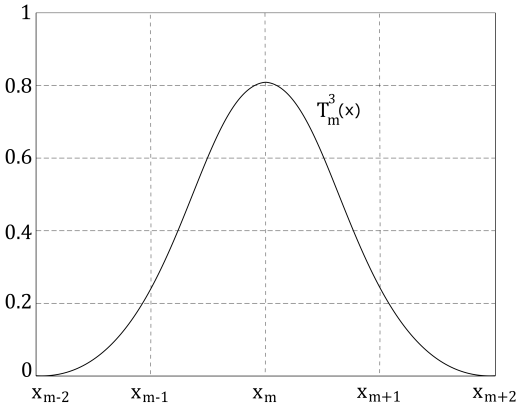
Eşitlik parçalı fonksiyon formunda düzenlendiğinde:

$$T_m^1(x) = \frac{1}{\theta} \begin{cases} \rho(x_m), & x \in [x_{m-1}, x_m] \\ -\rho(x_{m+2}), & x \in [x_m, x_{m+1}] \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases} \tag{4.10}$$

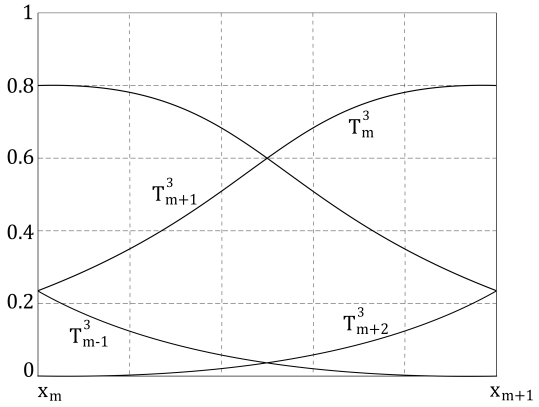
Bu ifadeyle $T_m^1(x)$ fonksiyonunun parçalı yapısı net bir şekilde görülmektedir. Şekil 4.2'de trigonometrik lineer B-spline fonksiyonunun nasıl davrandığı daha ayrıntılı bir şekilde gösterilmiştir. Her bir $T_m^1(x)$ fonksiyonu, ardışık iki aralıkta sıfırdan farklı bir değere sahiptir ve bu nedenle her $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı iki farklı trigonometrik lineer B-spline fonksiyonu tarafından örtülür. Bu özellik çözümleme sürecinin doğruluğunu artırmak için önemlidir. Ayrıca $T_m^1(x)$ trigonometrik lineer B-spline fonksiyonları için

$$\lim_{x \to x_m^+} T_m^1(x) = \lim_{x \to x_m^-} T_m^1(x)$$

olduğundan, $T_m^1(x)$ fonksiyonunun x_m noktalarında sürekli olduğunu ve türevlenebilir olduğunu gösterir.



Şekil 4.4 CT^3 B-spline taban fonksiyonu



Şekil 4.5 CT^3 B-spline şekil fonksiyonları

4.3.1 Kübik trigonometrik B-spline taban fonksiyonu

Trigonometrik lineer B-spline fonksiyonlarından farklı olarak, kübik trigonometrik (CT^3) B-spline fonksiyonları daha karmaşık yapılara sahip problemlerde kullanılır. Konum parçalanması (4.7) ile verilen her biri x_m düğüm noktası olmak üzere, her aralığın uzunluğu $h = x_{m+1} - x_m$ olacak şekilde alt aralıklara bölünür ve $m = -1, 0, \ldots, N+1$ olarak kabul edilir. Bu durumda, CT^3 B-spline fonksiyonunu hesaplamak için (4.6) bağıntısı kullanılarak $k = 3$ seçilir. Aşağıdaki gibi parçalı fonksiyonlar şeklinde tanımlanır:

$$CT_m^3(x) = \frac{1}{\theta}\begin{cases} \rho^3(x_{m-2}), & x \in [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ -\rho^2(x_{m-2})\rho(x_m) - \rho(x_{m-2})\rho(x_{m+1})\rho(x_{m-1}) & \\ -\rho(x_{m+2})\rho^2(x_{m-1}), & x \in [x_{m-1}, x_m] \\ \rho(x_{m-2})\rho^2(x_{m+1}) + \rho(x_{m+2})(\rho(x_{m-1})\rho(x_{m+1}) & \\ +\rho^2(x_{m+2})\rho(x_m)), & x \in [x_m, x_{m+1}] \\ -\rho^3(x_{m+2}), & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{4.11}$$

ve burada

$$\rho(x_m) = \sin\left(\frac{x - x_m}{2}\right), \quad \theta = \sin\left(\frac{h}{2}\right)\sin(h)\sin\left(\frac{3h}{2}\right) \tag{4.12}$$

olur. CT^3 B-spline fonksiyonu ardışık dört aralıkta sıfırdan farklı değerler alır. Bu nedenle her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı ardışık dört $CT_{m-2}^3, CT_{m-1}^3, CT_m^3, CT_{m+1}^3$ fonksiyon tarafından örtülür. CT^3 B-spline fonksiyonu Şekil 4.4 ve Şekil 4.5 ile sunulmuştur. Burada $i = m, m+1$ olmak üzere:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_i^+} CT_m^3(x) &= \lim_{x\to x_i^-} CT_m^3(x),\\
\lim_{x\to x_i^+} \left(\frac{\partial}{\partial x} CT_m^3(x)\right) &= \lim_{x\to x_i^-} \left(\frac{\partial}{\partial x} CT_m^3(x)\right),\\
\lim_{x\to x_i^+} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} CT_m^3(x)\right) &= \lim_{x\to x_i^-} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} CT_m^3(x)\right).
\end{aligned}$$

Böylece x_{m-1}, x_m ve x_{m+1} düğüm noktalarında, hem $CT_m^3(x)$ fonksiyonun hem de birinci ve ikinci türevlerin süreklilik şartlarını sağladığı görülmüştür. CT^3 B-spline fonksiyonun ve türevlerin düğüm noktalarındaki değerleri (4.11) bağıntısından hesaplanabilir. Bu değerler Çizelge 4.1 ile verilmiştir.

Çizelge 4.1 Düğüm noktalarında hesaplanan $CT_m^3(x)$ ve türev değerleri

	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
$CT_m^3(x)$	0	α_1	α_2	α_1	0
$\frac{\partial}{\partial x} CT_m^3(x)$	0	α_3	0	$-\alpha_3$	0
$\frac{\partial^2}{\partial x^2} CT_m^3(x)$	0	α_4	α_5	α_4	0

$$\alpha_1 = \sin^2\left(\frac{h}{2}\right)\csc(h)\csc\left(\frac{3h}{2}\right),$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{1+2\cos(h)},$$

$$\alpha_3 = -\frac{3}{4}\csc\left(\frac{3h}{2}\right),$$

$$\alpha_4 = \frac{3(1+3\cos(h))\csc^2\left(\frac{h}{2}\right)}{16\left[2\cos\left(\frac{h}{2}\right)+\cos\left(\frac{3h}{2}\right)\right]},$$

$$\alpha_5 = \frac{-3\cot^2\left(\frac{3h}{2}\right)}{2+4\cos(h)}.$$

4.3.2 Kübik trigonometrik gerilim B-spline taban fonksiyonu

$[a, b]$ çözüm bölgesi x_m $(m = 0, 1, \ldots, N)$ düğümleri tarafından h eşit uzunluğunda alt aralıklara bölünür. Bu konum parçalanması (4.7) ile verilmiştir. Trigonometrik gerilim B-spline taban fonksiyonları (Q_m^k) $k \geq 2$ için aşağıda verilen bağıntı ile türetilebilir (Wang ve Fang, 2008).

$$Q_m^k(x) = \int_{-\infty}^{x} (\delta_{m,k-1} Q_{m,k-1}(s) - \delta_{m+1,k-1} Q_{m+1,k-1}(s)) ds. \tag{4.13}$$

Burada $\delta_{m,k} = (\int_{-\infty}^{\infty} Q_{m,k}(s) ds)^{-1}$, $m = 0, \pm 1, \ldots$
$k = 2$ mertebesindeki birleşik ve genişletilmiş (UE) spline temel fonksiyonları:

$$Q_m^k(x) = \begin{cases} \dfrac{sin\tau(x - x_{m-2})}{sin\tau(x_m - x)} & x \in [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ \dfrac{sin\tau(x_m - x)}{sin\tau h} & x \in [x_{m-1}, x_m] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{4.14}$$

olarak tanımlanır. τ gerilim parametresidir. (4.14) denkleminde $\tau < \frac{\Pi}{h}$ ise $\tau > 0$. Uzay $\{\cos \tau x, sin\tau x, x^{k-3}, \ldots, x, 1\}$ üzerinde trigonometrik gerilim B-spline fonksiyonları tanımlanır. Kübik trigonometrik gerilim (CTT^3) B-spline fonksiyonları denklem (4.13) ve (4.14) kullanılarak aşağıdaki gibi parçalı fonksiyon şeklinde tanımlanır:

$$CTT_m^3(x) = r \times \begin{cases} (x - x_{m-2}) + \frac{sin(\tau(x_{m-2} - x))}{\tau}, & x \in [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x_m - x) + 2(x_{m-1} - x)\cos(\tau h)) & \\ -\frac{2sin(\tau(x_{m-1} - x)) + sin(\tau(x_m - x))}{\tau}, & x \in [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_m) - 2(x_{m+1} - x)\cos(\tau h)) & \\ +\frac{sin(\tau(x_m - x)) + 2sin(\tau(x_{m+1} - x))}{\tau}, & x \in [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x) - \frac{sin(\tau(x_{m+2} - x))}{\tau}, & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{4.15}$$

burada $r = \frac{1}{2h(1 - \cos(\tau h))}$. Gerilim parametresi τ ise $0 < \tau < \lambda$ $(\lambda = \frac{\Pi}{h})$. CTT^3 B-spline fonksiyonunun ve türevlerinin $x_m, (m = -2, \ldots, +2)$ düğüm noktalarındaki değerleri (4.15) bağıntısından hesaplanabilir. Bu değerler Çizelge 4.2 ile verilmiştir.

Çizelge 4.2 Düğüm noktalarında hesaplanan $CTT_m^3(x)$ ve türev değerleri

	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
$CTT_m^3(x)$	0	β_1	β_2	β_1	0
$\frac{\partial}{\partial x}CTT_m^3(x)$	0	β_3	0	$-\beta_3$	0
$\frac{\partial^2}{\partial x^2}CTT_m^3(x)$	0	β_4	β_5	β_4	0

$$\beta_1 = r\left(h - \tfrac{\sin(\tau h)}{\tau}\right), \quad \beta_2 = r\left(-2h\cos(\tau h) + 2\tfrac{\sin(\tau h)}{\tau}\right),$$
$$\beta_3 = r(\cos(\tau h) - 1),$$
$$\beta_4 = r\tau\sin(\tau h), \quad \beta_5 = -2r\tau\sin(\tau h).$$

4.4.1 Kuartik trigonometrik B-spline taban fonksiyonu

Trigonometrik B-spline fonksiyonları, matematiksel modelleme ve sayısal çözümleme yöntemlerinde önemli bir yere sahiptir. Kuartik trigonometrik (QT^4) B-spline fonksiyonları, özellikle daha karmaşık sistemlerde yüksek doğruluk gerektiren problemlerin çözümünde kullanılır. Çözüm aralığı $[a, b]$ üzerinde, her biri x_m düğüm noktası olan (4.7) konum parçalanması ile yapılır. Her bir aralık uzunluğu $h = x_{m+1} - x_m$ olacak şekilde, $m = -2, -1, \ldots, N + 1$ aralığında QT^4 B-spline taban fonksiyonlarını hesaplamak için (4.6) bağıntısında $k = 4$ seçilir. Aşağıdaki gibi parçalı fonksiyonlar şeklinde tanımlanır:

$$QT_m^4(x) = \frac{1}{\theta}\begin{cases} p^4(x_{m-2}), & x \in [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ -p^3(x_{m-2})p(x_m) - p^2(x_{m-2})p(x_{m+1})p(x_{m-1}) & \\ -p(x_{m-2})p(x_{m+2})p^2(x_{m-1}) - p^3(x_{m-1})p(x_{m+3}), & x \in [x_{m-1}, x_m] \\ p^2(x_{m-2})p^2(x_{m+1}) + p(x_{m-2})p(x_{m+2})p(x_{m+1})p(x_{m-1}) & \\ +p(x_{m-2})p^2(x_{m+2})p(x_m) + p^2(x_{m-1})p(x_{m+3})p(x_{m+1}) & \\ +p(x_{m+3})p(x_{m-1})p(x_{m+2})p(x_m) + p^2(x_{m+3})p^2(x_m), & x \in [x_m, x_{m+1}] \\ p(x_m)q^3(x_{m+2}) + q^2(x_{m+3})(p(x_{m+2})q(x_{m+4}) & \\ +p(x_{m+3})q(x_{m+3})) + p(x_{m+1})q^2(x_{m+2})q(x_{m+1}), & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ q^4(x_{m+3}), & x \in [x_{m+2}, x_{m+3}] \end{cases} \tag{4.16}$$

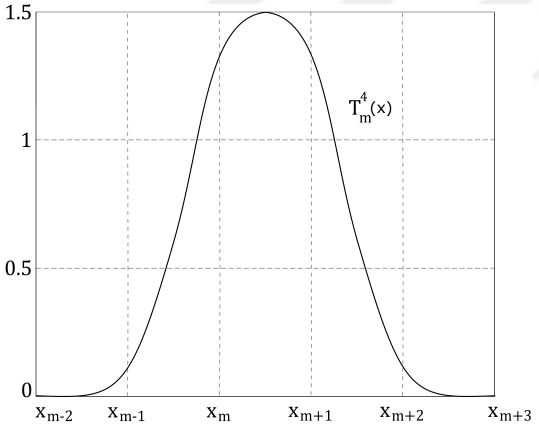
ve burada

$$p(x_m) = \sin\left(\frac{x - x_m}{2}\right), \quad \theta = \sin\left(\frac{h}{2}\right)\sin(h)\sin\left(\frac{3h}{2}\right)\sin(2h)$$

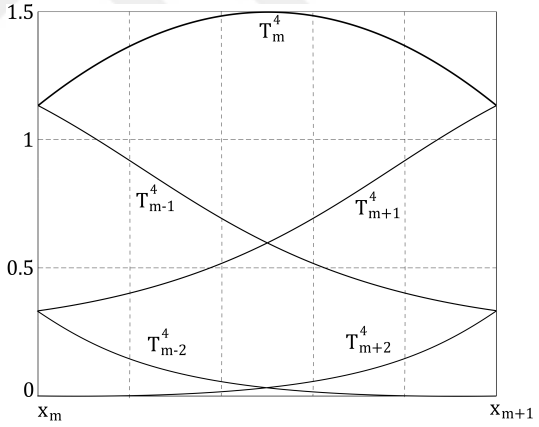
olur. Her bir $QT_m^4(x)$ fonksiyonu ardışık beş aralıkta sıfırdan farklı değerlere sahiptir. Yani $QT_m^4(x)$ fonksiyonu $[x_{m-2}, x_{m+3}]$ aralığında sıfır olmayan değerler alır. Her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı, ardışık beş QT^4 B-spline fonksiyonu olan QT_{m-2}^4, QT_{m-1}^4, QT_m^4, QT_{m+1}^4 ve QT_{m+2}^4 tarafından örtülür. Böylece çözüm alanındaki her bir bölgeyi daha hassas bir şekilde modellemeyi sağlar. QT^4 B-spline fonksiyonu Şekil 4.6 ve Şekil 4.7 ile sunulmuştur. Burada $i = m-1, m, m+1, m+2$ olmak üzere:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_i^+}(QT_m^4(x)) &= \lim_{x\to x_i^-}(QT_m^4(x)) \\
\lim_{x\to x_i^+}\left(\frac{\partial}{\partial x}QT_m^4(x)\right) &= \lim_{x\to x_i^-}\left(\frac{\partial}{\partial x}QT_m^4(x)\right) \\
\lim_{x\to x_i^+}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}QT_m^4(x)\right) &= \lim_{x\to x_i^-}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}QT_m^4(x)\right) \\
\lim_{x\to x_i^+}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}QT_m^4(x)\right) &= \lim_{x\to x_i^-}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}QT_m^4(x)\right)
\end{aligned}$$

Bu doğrultuda $QT_m^4(x)$ fonksiyonu ve türevleri $x_{m-1}, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}$ düğüm noktalarında süreklidir. Fonksiyonun ve türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri (4.16) tanımından hesaplanabilir. Bu değerler Çizelge (4.3) ile verilmiştir.



Şekil 4.6 QT^4 B-spline taban fonksiyonu



Şekil 4.7 QT^4 B-spline şekil fonksiyonları

Çizelge 4.3 Düğüm noktalarında hesaplanan $QT_m^4(x)$ ve türev değerleri

	x_{m-3}	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
$QT_m^4(x)$	0	α_6	α_7	α_7	α_6	0
$\frac{\partial}{\partial x}QT_m^4(x)$	0	α_8	α_9	$-\alpha_9$	$-\alpha_8$	0
$\frac{\partial^2}{\partial x^2}QT_m^4(x)$	0	α_{10}	$-\alpha_{10}$	$-\alpha_{10}$	α_{10}	0
$\frac{\partial^3}{\partial x^3}QT_m^4(x)$	0	α_{11}	α_{12}	$-\alpha_{12}$	$-\alpha_{11}$	0

$$\alpha_6 = \sin^3\left(\frac{h}{2}\right)\csc(h)\csc\left(\frac{3h}{2}\right)\csc(2h),$$

$$\alpha_7 = \sin^2\left(\frac{h}{2}\right)\csc(h)\csc(2h) + 2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\sin(h)\csc\left(\frac{3h}{2}\right)\csc(2h),$$

$$\alpha_8 = -\frac{\csc(h)\sec(h)}{2+4\cos(h)},$$

$$\alpha_9 = -\csc(2h),$$

$$\alpha_{10} = \csc(h)\csc(2h),$$

$$\alpha_{11} = \cos\left(\frac{h}{2}\right)[-4\cot(h)+\csc(h)]\csc\left(\frac{3h}{2}\right)\csc(2h),$$

$$\alpha_{12} = \frac{\csc(h)+\csc(2h)}{1-\cos(h)}.$$

4.4.2 Kuartik trigonometrik gerilim B-spline taban fonksiyonu

$[a,b]$ çözüm aralığında, x_m $(m = 0,1,\ldots,N)$ düğümleri tarafından h eşit uzunluğunda alt aralıklara bölünür. Bu konum parçalanması (4.7) ile verilmiştir. Burada $h = x_{m+1} - x_m$ ve $x_m = a + ih$. Denklem (4.13) ve (4.14) kullanılarak kuartik trigonometrik gerilim (QTT^4) B-spline fonksiyonu elde edilir ve parçalı fonksiyon şeklinde tanımlanır.

$$QTT_m^4(x) = \frac{r}{2\tau^2}\begin{cases} \tau^2(q_{m-2})^2 + 2\hat{q}_{m-2} - 2, & [x_{m-2}, x_{m-1}], \\ \begin{array}{l} -\tau^2(3h^2 + 6hq_{m-2} + 2(q_{m-2})^2) \\ -2K_1(\tau^2(q_{m-1})^2 - 2) \\ +6\hat{q}_{m-1} + 2\hat{q}_m - 4 \end{array} & , \quad [x_{m-1}, x_m], \\ \begin{array}{l} \tau^2\left(13h^2 + 10hq_{m-2} + 2(q_{m-2})^2\right) \\ +K_1(2\tau^2(11h^2 + 10hq(m-2))) \\ +4K_1\tau^2(q_{m-2})^2 - 8K_1 + 6\hat{q}_{m+1} - 4 \end{array} & , \quad [x_m, x_{m+1}], \\ \begin{array}{l} -\tau^2(23h^2 + 14hq_{m-2} + 2(q_{m-2})^2) \\ -2K_1(\tau^2(q_{m+2})^2 - 2) \\ +2\hat{q}_{m+1} + 6\hat{q}_{m+2} - 4), \end{array} & [x_{m+1}, x_{m+2}], \\ \tau^2(q_{m+3})^2 + 2\hat{q}_{m+3} - 2, & [x_{m+2}, x_{m+3}], \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases} \tag{4.17}$$

Burada $r = \frac{1}{2h^2(1-K_1)}$, $\hat{q}_{m+j} = \cos(\tau(x_{m+j} - x))$, $q_{m+j} = x_{m+j} - x$, $K_1 = \cos(\tau h)$, $K_2 = \sin(\tau h)$, $\tau \leq \sqrt{\lambda}$, $\lambda = \frac{\pi}{h}(\lambda \in \Re)$. Wang ve Fang, 2008 tarafından UE-Spline'ların bir çeşidi olarak sunulan bu yaklaşım, $k = 2$ için UE temel spline fonksiyonları (4.14) eşitliğinde, $k \geq 2$ durumunda ise yüksek dereceli UE-Spline'ları (4.13) bağıntısında tanımlanmıştır. QTT^4 B-spline fonksiyonunun ve türevlerinin düğüm noktasındaki değerleri Çizelge 4.4 ile verilmiştir.

Çizelge 4.4 Düğüm noktalarında hesaplanan $QTT_m^4(x)$ ve türev değerleri

	x_{m-3}	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
$QTT_m^4(x)$	0	β_7	β_8	β_8	β_7	0
$\frac{\partial}{\partial x}QTT_m^4(x)$	0	β_9	β_{10}	$-\beta_{10}$	$-\beta_9$	0
$\frac{\partial^2}{\partial x^2}QTT_m^4(x)$	0	β_{11}	β_{12}	β_{12}	β_{11}	0
$\frac{\partial^3}{\partial x^3}QTT_m^4(x)$	0	β_{13}	β_{14}	$-\beta_{14}$	$-\beta_{13}$	0

$\beta_7 = r\left(\frac{h^2\tau^2+2K_1-2}{2\tau^2}\right), \quad \beta_8 = r\left(\frac{h^2\tau^2-2K_1\left(h^2\tau^2+1\right)+2}{2\tau^2}\right),$

$\beta_9 = r\left(\frac{h\tau-K_2}{\tau}\right), \quad \beta_{10} = r\left(\frac{h\tau-3K_2+2K_1h\tau}{\tau}\right),$

$\beta_{11} = r(1-K_1), \quad \beta_{12} = r(K_1-1),$

$\beta_{13} = r\tau K_2, \quad \beta_{14} = -3r\tau K_2.$

4.5.1 Kuintik trigonometrik B-spline taban fonksiyonu

Yüksek dereceli çözümler gerektiren uygulamalarda, kuintik trigonometrik (QT^5) B-spline fonksiyonları, çözüm doğruluğunu artırmak için etkili bir yöntem sunar. Konum parçalanması, $[a,b]$ çözüm aralığında (4.7) ile verilmiştir. Ardışık düğümler arasındaki uzaklık $h = x_{m+1} - x_m$ olarak kabul edilir $(m = -2, 0, \ldots, N+2)$. Bu konum parçalanmasında QT^5 B-spline taban fonksiyonunu hesaplamak için (4.6) bağıntısı kullanılır ve $k = 5$ seçilir. Aşağıdaki gibi parçalı fonksiyon şeklinde tanımlanır:

$$QT_m^5(x) = \frac{1}{\theta}\begin{cases} p^5(x_{m-3}), & x \in [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ \\ -p^4(x_{m-3})p(x_{m-1}) \\ -p^3(x_{m-3})p(x_m)p(x_{m-3}) \\ -p^2(x_{m-3})p(x_{m+1})p^2(x_{m-2}) \\ -p(x_{m-3})p(x_{m+2})p^3(x_{m-2}) \\ -p(x_{m+3})p^4(x_{m-2}), & x \in [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ \\ p^3(x_{m-3})p^2(x_m) \\ +p^2(x_{m-3})p(x_{m+1})p(x_{m-2})p(x_m) \\ +p^2(x_{m-3})p^2(x_{m+1})p(x_{m-1}) \\ +p(x_{m+3})p(x_{m+2})p^2(x_{m-2})p(x_m) \\ +p(x_{m-3})p(x_{m+2})p(x_{m-2})p(x_{m+1})p(x_{m-1}) \\ +p(x_{m-3})p^2(x_{m+2})p^2(x_{m-1}) \\ +p(x_{m+3})p^3(x_{m-2})p(x_m) \\ +p(x_{m+3})p^2(x_{m-2})p(x_{m+1})p(x_{m-1}) \\ +p(x_{m+3})p(x_{m-2})p(x_{m+2})p^2(x_{m-1}) \\ +p^2(x_{m+3})p^3(x_{m-1}), & x \in [x_{m-1}, x_m] \\ \\ -p^2(x_{m-3})p^3(x_{m+1}) \\ -p(x_{m-3})p(x_{m+2})p(x_{m-2})p^2(x_{m+1}) \\ -p(x_{m-3})p^2(x_{m+2})p(x_{m-1})p(x_{m+1}) \\ -p(x_{m-3})p^3(x_{m+2})p(x_m) \\ -p(x_{m+3})p^2(x_{m-2})p^2(x_m) \\ -p(x_{m+3})p(x_{m-2})p(x_{m+2})p(x_{m-1})p(x_{m+1}) \\ -p(x_{m+3})p(x_{m-2})p^2(x_{m+2})p(x_m) \\ -p^2(x_{m+3})p^2(x_{m-3}) \\ -p^2(x_{m+3})p(x_{m-1})p(x_{m+2})p(x_m) \\ -p^3(x_{m+3})p^2(x_m), & x \in [x_m, x_{m+1}] \\ \\ p(x_{m-3})p^4(x_{m+2}) + p(x_{m+3})p(x_{m-2})p^3(x_{m+2}) \\ +p^2(x_{m+3})p(x_{m-1})p^2(x_{m+2}) \\ +p^3(x_{m+3})p(x_m)p(x_{m+2}) + p^4(x_{m+3})p(x_{m+1}), & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ \\ -p^5(x_{m+3}), & x \in [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ \\ 0, & d.d. \end{cases} \tag{4.18}$$

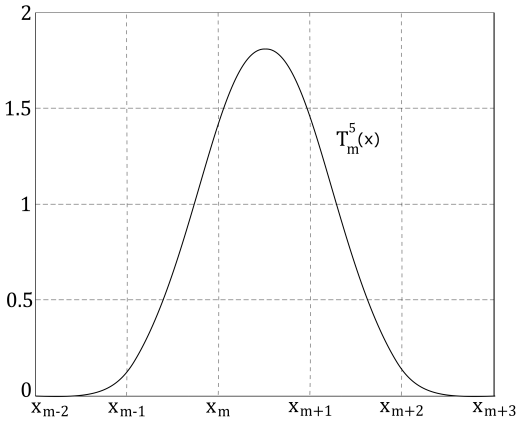
ve burada

$$p(x_m) = \sin\left(\frac{x - x_m}{2}\right), \quad \theta = \sin\left(\frac{5h}{2}\right)\sin(h)\sin\left(\frac{3h}{2}\right)\sin(2h)\sin\left(\frac{h}{2}\right)$$

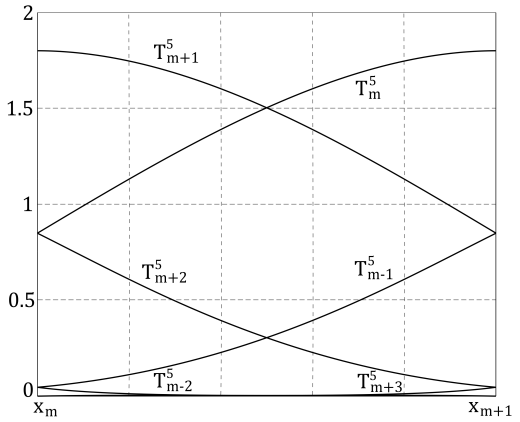
olur. QT^5 B-spline fonksiyonu, $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığında sıfırdan farklı değerler alırken her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı ardışık altı $QT^5_{m-2}, QT^5_{m-1}, QT^5_m, QT^5_{m+1}$, QT^5_{m+2}, QT^5_{m+3}, B-spline fonksiyonu tarafından örtülür. QT^5 B-spline fonksiyonu Şekil 4.8 ve Şekil 4.9 ile sunulmuştur. Burada $i = m-2, m-1, m, m+1, m+2$ olmak üzere:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_i^+} QT^5_m(x) &= \lim_{x\to x_i^-} QT^5_m(x) \\
\lim_{x\to x_i^+} \left(\frac{\partial}{\partial x} QT^5_m(x)\right) &= \lim_{x\to x_i^-} \left(\frac{\partial}{\partial x} QT^5_m(x)\right) \\
\lim_{x\to x_i^+} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} QT^5_m(x)\right) &= \lim_{x\to x_i^-} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} QT^5_m(x)\right) \\
\lim_{x\to x_i^+} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} QT^5_m(x)\right) &= \lim_{x\to x_i^-} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} QT^5_m(x)\right) \\
\lim_{x\to x_i^+} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} QT^5_m(x)\right) &= \lim_{x\to x_i^-} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} QT^5_m(x)\right)
\end{aligned}$$

Böylece $x_{m-2}, x_{m-1}, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}$ düğüm noktalarında, hem QT^5 B-spline fonksiyonunun hem de türevlerinin süreklilik şartlarını sağladığı görülmüştür. Fonksiyonun ve türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri, (4.18) tanımından hesaplanabilir. Bu değerler Çizelge 4.5 ile verilmiştir.



Şekil 4.8 QT^5 B-spline taban fonksiyonu



Şekil 4.9 QT^5 B-spline şekil fonksiyonları

Çizelge 4.5 Düğüm noktalarında hesaplanan $QT_m^5(x)$ ve türev değerleri

		x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	
$QT_m^5(x)$	0	α_{13}	α_{14}	α_{15}	α_{14}	α_{13}	0
$\frac{\partial}{\partial x}QT_m^5(x)$	0	α_{16}	α_{17}	0	$-\alpha_{17}$	$-\alpha_{16}$	0
$\frac{\partial^2}{\partial x^2}QT_m^5(x)$	0	α_{18}	α_{19}	α_{20}	α_{19}	α_{18}	0
$\frac{\partial^3}{\partial x^3}QT_m^5(x)$	0	α_{21}	α_{22}	0	$-\alpha_{22}$	$-\alpha_{21}$	0
$\frac{\partial^4}{\partial x^4}QT_m^5(x)$	0	α_{23}	α_{24}	α_{25}	α_{24}	α_{23}	0

$$\alpha_{13} = \frac{\sin^5(\frac{h}{2})}{\theta}$$

$$\alpha_{14} = \frac{2\sin^5(\frac{h}{2})\cos(\frac{h}{2})(16\cos^2(\frac{h}{2}) - 3)}{\theta}$$

$$\alpha_{15} = \frac{2(1 + 48\cos^4(\frac{h}{2}) - 16\cos^2(\frac{h}{2}))\sin^5(\frac{h}{2})}{\theta}$$

$$\alpha_{16} = -\frac{\frac{5}{2}\sin^4(\frac{h}{2})\cos(\frac{h}{2})}{\theta}$$

$$\alpha_{17} = -\frac{5\sin^4(\frac{h}{2})\cos^2(\frac{h}{2})(8\cos^2(\frac{h}{2}) - 3)}{\theta}$$

$$\alpha_{18} = \frac{\frac{5}{4}\sin^3(\frac{h}{2})(5\cos^2(\frac{h}{2}) - 1)}{\theta}$$

$$\alpha_{19} = \frac{\frac{5}{2}\sin^3(\frac{h}{2})(\cos(\frac{h}{2})(-15\cos^2(\frac{h}{2}) + 3 + 16\cos^4(\frac{h}{2}))}{\theta}$$

$$\alpha_{20} = \frac{-\frac{5}{2}\sin^3(\frac{h}{2})(16\cos^6(\frac{h}{2}) - 5\cos^6(\frac{h}{2}) + 1)}{\theta}$$

$$\alpha_{21} = -\frac{\frac{5}{8}\sin^2(\frac{h}{2})\cos(\frac{h}{2})(25\cos^2(\frac{h}{2}) - 13)}{\theta}$$

$$\alpha_{22} = -\frac{\frac{5}{4}\sin^2(\frac{h}{2})(\cos^2(\frac{h}{2})(8\cos^4(\frac{h}{2}) - 35\cos^2(\frac{h}{2}) + 15)}{\theta}$$

$$\alpha_{23} = \frac{\frac{5}{16}(125\cos^4(\frac{h}{2}) - 114\cos^2(\frac{h}{2}) + 13)\sin(\frac{h}{2})}{\theta}$$

$$\alpha_{24} = \frac{-\frac{5}{8}\sin(\frac{h}{2})\cos(\frac{h}{2})(176\cos^6(\frac{h}{2}) - 137\cos^4(\frac{h}{2}) - 6\cos^2(\frac{h}{2}) + 15)}{\theta}$$

$$\alpha_{25} = \frac{\frac{5}{8}(92\cos^6(\frac{h}{2}) - 117\cos^4(\frac{h}{2}) + 62\cos^2(\frac{h}{2}) - 13)(-1 + 4\cos^2(\frac{h}{2}))\sin(\frac{h}{2})}{\theta}$$

4.5.2 Kuintik trigonometrik gerilim B-spline taban fonksiyonu

Kuintik trigonometrik gerilim (QTT^5) B-spline fonksiyonları çözüm hassasiyetini artırmada etkili bir yöntem sunar. Konum parçalanması, çözüm aralığı $[a, b]$ üzerinde (4.7) doğrultusunda gerçekleştirilir. Ardışık düğümler arasındaki uzaklık $h = x_{m+1} - x_m$ olacak şekilde ve $m = -2, 0, \ldots, N + 2$ kabul edilir. Bu konum parçalanmasına göre QTT^5 B-spline fonksiyonunu hesaplamak için (4.14) bağıntısı kullanılır ve $k = 5$ seçilerek hesaplanır. Fonksiyonun parçalı fonksiyon tanımı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$QTT_m^5(x) = \frac{1}{r}\begin{cases} 6K_{m-3} - 6\tau\, P_{m-3} + \tau^3 P_{m-3}^3, & x \in [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ \Big(\tau^3h^3 - 6\tau h - 6K_{m-1} - 24K_{m-2}\Big) & \\ +\Big(3\tau^3h^2 + 12\tau B + 18\tau\Big)P_{m-2} & \\ +3\tau^3 h\, P_{m-2}^2 & \\ -(3+2B)\tau^3 P_{m-2}^3, & x \in [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ \Big(\tau^3h^3(5-2B) + 12\tau h(B+1) + 24K_m + 36K_{m-1}\Big) & \\ +\tau^3 P_m^3 & \\ +\Big(-3\tau^3h^2(1+2B) - 36\tau B - 24\tau\Big)P_{m-1} & \\ -3\tau^3h(1+2B)\, P_{m-1}^2 & \\ +3\tau^3(1+2B)\, P_{m-1}^3, & x \in [x_{m-1}, x_m] \\ \Big(-\tau^3h^3(1+8B) - 12\tau h(2B+1) - 36K_{m+1} - 24K_m\Big) & \\ -3\tau^3 P_{m+1}^3 & \\ +\Big(3\tau^3h^2(4B-1) + 36\tau B + 24\tau\Big)P_m & \\ +3\tau^3h(4B-1)\, P_m^2 & \\ +\tau^3\Big((12h-1) - 6B(1+2h)\Big)P_m^3, & x \in [x_m, x_{m+1}] \\ \Big(\tau^3h^3(7-2B) + 6\tau h(1+2B) + 24K_{m+2} + 6K_{m+1}\Big) & \\ +3\tau^3 P_{m+2}^3 - 6\tau P_{m+2} & \\ +\Big(3\tau^3\big((1-2B)h^2 - 4(1-B)h\big) - 12\tau(B+1)\Big)P_{m+1} & \\ +3\tau^3h(1-2B)\, P_{m+1}^2 & \\ +2\tau^3 B\, P_{m+1}^3, & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ -6K_{m+3} + 6\tau\, P_{m+3} - \tau^3 P_{m+3}^3, & x \in [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 0, & d.d. \end{cases} \tag{4.19}$$

burada $P_{m+j} = (x - x_{m+j})$, $K_{m+j} = \sin(\tau(x - x_{m+j}))$, $B = \cos(\tau h)$, $r = 12\tau^3h^3(1-B)$. Gerilim parametresi $\tau \leq \sqrt{\lambda}$ ($\lambda = \frac{\pi}{h}, \lambda \in \Re$). QTT^5 B-spline fonksiyonunun ve türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri Çizelge 4.6 ile verilmiştir.

Çizelge 4.6 Düğüm noktalarında hesaplanan $QTT_m^5(x)$ ve türev değerleri

	x_{m-3}	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}
$Q_m^5(x)$	0	β_{15}	β_{16}	β_{17}	β_{16}	β_{15}	0
$\frac{\partial}{\partial x}Q_m^5(x)$	0	β_{18}	β_{19}	0	$-\beta_{19}$	$-\beta_{18}$	0
$\frac{\partial^2}{\partial x^2}Q_m^5(x)$	0	β_{20}	β_{21}	β_{22}	β_{21}	β_{20}	0

$$\beta_{15} = \frac{\tau^3h^3 - 6\tau h + 6\sin(\tau h)}{12\tau^3(1-\cos(\tau h))h^3},$$

$$\beta_{16} = \frac{2\tau^3h^3 + 12\tau h\cos(\tau h) + 12\tau h - 24\sin(\tau h)}{12\tau^3(1-\cos(\tau h))h^3} + \tfrac{1}{6},$$

$$\beta_{17} = \frac{-6\tau^3h^3 - 24\tau h\cos(\tau h) - 12\tau h + 36\sin(\tau h)}{12\tau^3(1-\cos(\tau h))h^3} + \tfrac{2}{3},$$

$$\beta_{18} = \frac{6\tau\cos(\tau h) - 6\tau + 3h^2\tau^3}{12\tau^3(1-\cos(\tau h))h^3},$$

$$\beta_{19} = \frac{-12\tau\cos(\tau h) + 12\tau - 6h^2\tau^3}{12\tau^3(1-\cos(\tau h))h^3} + \tfrac{1}{2h},$$

$$\beta_{20} = \frac{-6\tau^2\sin(\tau h) + 6\tau^3h}{12\tau^3(1-\cos(\tau h))h^3},$$

$$\beta_{21} = \frac{24\tau^2\sin(\tau h) - 24\tau^3h}{12\tau^3(1-\cos(\tau h))h^3} + \tfrac{1}{h^2},$$

$$\beta_{22} = \frac{-36\tau^2\sin(\tau h) + 36\tau^3h}{12\tau^3(1-\cos(\tau h))h^3} - \tfrac{2}{h^2},$$

5. SAYISAL ÇÖZÜMLER

Önerilen yöntemin doğruluğunun ve etkinliğinin saptanabilmesi için analitik çözümü bilinen problemler üzerinde hata normu hesaplanır. Hata normu, t anındaki analitik çözüm $u(x,t)$ ve nümerik çözüm $U(x,t)$ olmak üzere aralarındaki farkın hesaplanması ile bulunur.

$$L_\infty = |u(x,t) - U(x,t)|_\infty = \max_m |u(x_m,t) - U(x_m,t)| \tag{5.1}$$

5.1 Test Problemleri

Önerilen sayısal yöntemin FHN denklemi üzerindeki doğruluk ve güvenilirliğini değerlendirebilmek için analitik çözümü bilinen üç test problemi tercih edilmiştir. Yöntemin doğruluğu ise analitik ve sayısal çözümler arasındaki farkın en büyük değerini veren L_∞ hata normu kullanılarak değerlendirilmiştir. Seçilen test problemleri, çözümün zamanla nasıl değiştiğini gözlemlemeye uygun olduğundan, yöntemin davranışını grafikler üzerinden değerlendirmek mümkün olmuştur. Sonuç olarak testler, yöntemin doğruluğunu tam çözüme göre değerlendirmek ve literatürdeki doğrulama yaklaşımıyla tutarlı bir değerlendirme yapmak için tercih edilmiştir.

5.1.1 Test 1

Eşitlik (2.1) ile verilen FHN denkleminde $p = -1$ olduğunda denklem:

$$u_t - u_{xx} - u + u^3 = 0 \tag{5.2}$$

formundadır. Denklemin analitik çözümü (Inan vd., 2019):

$$u(x,t) = -0.5 + 0.5tanh(0.3536x - 0.75t) \tag{5.3}$$

olarak ifade edilir. Başlangıç koşulu:

$$u(x,0) = -0.5 + 0.5tanh(0.3536x). \tag{5.4}$$

5.1.2 Test 2

FHN denkleminde $p = -1$ olduğu diğer bir analitik çözüm:

$$u(x,t) = \frac{1}{1 + e^{\frac{-s}{\sqrt{2}}}} \tag{5.5}$$

olarak ifade edilir. Burada dalga hızı $s = x + ct$, $c = \sqrt{2}(\frac{1}{2} - \alpha)$. Başlangıç koşulu (İnan vd., 2020):

$$u(x,0) = \frac{1}{1 + e^{\frac{-x}{\sqrt{2}}}}. \tag{5.6}$$

Sınır koşulları ise

$$u(0,t) = \frac{1}{1 + e^{\frac{-ct}{\sqrt{2}}}} \tag{5.7}$$

ve

$$u(1,t) = \frac{1}{1 + e^{\frac{-(1+ct)}{\sqrt{2}}}} \tag{5.8}$$

şeklinde ifade edilir.

5.1.3 Test 3

FHN denkleminde $p = -1$ olduğunda (5.2) denklemi elde edilir. Analitik çözümü (Pathak vd., 2024):

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}tanh[k(x - yt)] \tag{5.9}$$

olarak ifade edilir. Burada $k = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $y = \frac{2z-1}{\sqrt{2}}$. Başlangıç koşulu:

$$u(x,0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}tanh(\frac{x}{2\sqrt{2}}), \tag{5.10}$$

sınır koşulları:

$$u(-1,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}tanh[k(-1 - yt)] \tag{5.11}$$

ve

$$u(1,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}tanh[k(1 - yt)]. \tag{5.12}$$

5.2 Yöntemin Uygulanışı

Bu bölümde (2.1) ile tanımlanan FHN denklemine CN yöntemi uygulanmıştır. Denklemde lineer olmayan U^2 ve U^3 terimleri yerine:

$$U^2 = 2U^nU^{n+1} - (U^n)^2$$

$$U^3 = 3(U^n)^2U^{n+1} - 2(U^n)^3$$

yazılır. u_t yerine zaman yönünden ileri fark yaklaşımı yapılır. U ve U_{xx} için CN yöntemine uygun olacak şekilde zaman ortalaması kullanılır. CN yaklaşımı başlığı altında burada kullanılan denklemler verilmiştir. Bu yaklaşımlar kullanılarak denklemde yerine yazıldığında

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} - \frac{U_{xx}^{n+1} + U_{xx}^n}{2} + \frac{3(U^n)^2U^{n+1} - (U^n)^3}{2} - (p+1)U^nU^{n+1} + p\frac{U^{n+1} + U^n}{2} = 0. \tag{5.13}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$-\frac{\Delta t}{2}U_{xx}^{n+1}+U^{n+1}(1+\frac{\Delta t}{2}3(U^n)^2-(1+p)\Delta tU^n+p\frac{\Delta t}{2}) = \frac{\Delta t}{2}U_{xx}^{n}+U^{n}(1+\frac{\Delta t}{2}(U^n)-p\frac{\Delta t}{2}) \tag{5.14}$$

bağıntısı elde edilir.

5.3 FHN Denkleminin Kübik Trigonometrik B-Spline ve Kübik Trigonomerik Gerilim B-Spline Kollokasyon Yöntemleri ile Sayısal Çözümü

FHN denklemi, QT^3 ve QTT^3 B-spline tabanlarıyla kollokasyon yöntemi uygulanarak yaklaşık olarak çözülmüştür. $U(x,t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümü $U_N(x,t)$ ile ifade edilmiştir. (4.11) ve (4.15)'te verilen trigonometrik B-spline tabanları kullanılarak $[x_0, x_N]$ aralığında tanımlı bu fonksiyon için aşağıdaki yaklaşım kurulmuştur:

$$U(x,t) \approx U_N(x,t) = \sum_{m=-1}^{N+1} Q_m^3(x)\delta_m(t) \tag{5.15}$$

Burada $Q_m^3(x)$ hem kübik trigonometrik hem de kübik trigonometrik gerilim B-spline taban fonksiyonları, δ_m katsayıları ise zamana bağlı değişkenleri temsil etmektedir. $U_N(x,t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümü açık olarak

$$U_N(x,t) = Q_{m-1}^3(x)\delta_{m-1}(t) + Q_m^3(x)\delta_m(t) + Q_{m+1}^3(x)\delta_{m+1}(t) \tag{5.16}$$

şeklinde ifade edilir. Kollokasyon yöntemi uygulanırken, $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında yer alan her bir x_m düğüm noktası için $U_N(x,t)$ yaklaşık çözümü, bu ardışık dört farklı taban fonksiyonunun katkısıyla açık biçimde ifade edilir. Bu yapı sayesinde, $[x_0, x_N]$ çözüm aralığında tanımlı yaklaşık çözümler, ilgili $Q_m^3(x)$ B-spline fonksiyonlarının oluşturduğu taban üzerinden elde edilir. $Q_m^3(x)$ B-spline fonksiyonları kullanılarak x_m düğüm noktasındaki $U_N(x,t)$ fonksiyonunun birinci ve ikinci türevlerine yapılan yaklaşımlar:

$$\frac{\partial}{\partial x}U_N(x,t) = \sum_{m=-1}^{N} \frac{\partial Q_m^3(x)}{\partial x}\delta_m(t), \tag{5.17}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_N(x,t) = \sum_{m=-1}^{N} \frac{\partial^2 Q_m^3(x)}{\partial x^2}\delta_m(t)$$

olarak yazılır. İlerleyen aşamalarda CT^3 ve CTT^3 fonksiyonlarının katsayıları farklı olduğu için bu iki durum ayrı ele alınacaktır.

5.3.1 Kübik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemi

CT^3 B-spline fonksiyonun katsayıları Çizelge 4.1 ile verilmiştir. Bu katsayılar kullanılarak her düğüm noktası için U fonksiyonu, birinci ve ikinci türevleri:

$$\begin{aligned} U(x_m,t) &= \alpha_1\delta_{m-1}(t) + \alpha_2\delta_m(t) + \alpha_1\delta_{m+1}(t), \\ U'(x_m,t) &= \alpha_3\delta_{m-1}(t) - \alpha_3\delta_{m+1}(t), \\ U''(x_m,t) &= \alpha_4\delta_{m-1}(t) + \alpha_5\delta_m(t) + \alpha_4\delta_{m+1}(t) \end{aligned} \tag{5.18}$$

eşitlikleri elde edilir. Kollokasyon yöntemi, diferansiyel denklem çözümünde kullanılan yaklaşım fonksiyonunun, belirlenen düğüm noktalarında yerine yazılması ile sayısal sonuçlar elde edilir. Lineerleştirilmiş FHN (5.14) denklemine eşitlik (5.18) yaklaşık çözümleri yerleştirilerek aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\eta_1\delta_{m-1}^{n+1} + \eta_2\delta_m^{n+1} + \eta_1\delta_{m+1}^{n+1} = \eta_3\delta_{m-1}^{n} + \eta_4\delta_m^{n} + \eta_3\delta_{m+1}^{n}. \tag{5.19}$$

Burada η_k, $k = 1, ..., 4$ katsayıları

$$\begin{aligned} \eta_1 &= (1 + 3\tfrac{\Delta t}{2}K_1^2 - (p+1)\Delta t K_1 + p\tfrac{\Delta t}{2})\alpha_1 - \tfrac{\Delta t}{2}\alpha_4 \\ \eta_2 &= (1 + 3\tfrac{\Delta t}{2}K_1^2 - (p+1)\Delta t K_1 + p\tfrac{\Delta t}{2})\alpha_2 - \tfrac{\Delta t}{2}\alpha_5 \\ \eta_3 &= (1 + \tfrac{\Delta t}{2}K_1^2 - p\tfrac{\Delta t}{2})\alpha_1 + \tfrac{\Delta t}{2}\alpha_4 \\ \eta_4 &= (1 + \tfrac{\Delta t}{2}K_1^2 - p\tfrac{\Delta t}{2})\alpha_2 + \tfrac{\Delta t}{2}\alpha_5 \end{aligned} \tag{5.20}$$

olarak ifade edilir ve $(K_1)_m$ ise

$$(K_1)_m = \alpha_1\delta_{m-1}^{n}(t) + \alpha_2\delta_m^{n}(t) + \alpha_1\delta_{m+1}^{n}(t) \tag{5.21}$$

şeklinde olur. Eşitlik (5.19) için matris formunda gösterimi

$$A_3X^{n+1} = B_3X^n \tag{5.22}$$

şeklinde ifade edilir. Matris gösterimi:

$$\begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_1 & & & & \\ & \eta_1 & \eta_2 & \eta_1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & \\ & & & & \eta_1 & \eta_2 & \eta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-1}^{n+1} \\ \delta_0^{n+1} \\ \vdots \\ \\ \delta_{N+1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_3 & \eta_4 & \eta_3 & & & & \\ & \eta_3 & \eta_4 & \eta_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & \\ & & & & \eta_3 & \eta_4 & \eta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-1}^{n} \\ \delta_0^{n} \\ \vdots \\ \\ \delta_{N+1}^{n} \end{bmatrix} \tag{5.23}$$

şeklindedir. $(N+3)$ bilinmeyen, $(N+1)$ denklem bulunmaktadır. Sınır koşulları uygulanarak δ_{-1} ve δ_{N+1} parametreleri elimine edilir. Burada $x = x_m$ kollokasyon noktası seçilerek

$$U(x_m,t) = \alpha_1\delta_{m-1} + \alpha_2\delta_m + \alpha_1\delta_{m+1}$$

yaklaşımı kullanılır ve δ_{-1}, δ_{N+1} parametreleri:

$$\delta_{m-1} = \frac{U(x_m,t)-\alpha_2\delta_m-\alpha_1\delta_{m+1}}{\alpha_1}$$
$$m = 0 \longrightarrow \delta_{-1} = \frac{U(a,t)-\alpha_2\delta_0-\alpha_1\delta_1}{\alpha_1}$$

ve

$$\delta_{m+1} = \frac{U(x_m,t)-\alpha_1\delta_{m-1}-\alpha_2\delta_m}{\alpha_1}$$
$$m = N \longrightarrow \delta_{N+1} = \frac{U(b,t)-\alpha_2\delta_N-\alpha_1\delta_{N-1}}{\alpha_1}.$$

şeklinde ifade edilir. $m = 0$ için δ_{-1} değeri (5.19) eşitliğinde yerine yazılırsa:

$$\eta_1(\frac{U^{n+1}(a,t)-\alpha_2\delta_0^{n+1}-\alpha_1\delta_1^{n+1}}{\alpha_1}) + \eta_2\delta_0^{n+1} + \eta_1\delta_1^{n+1}$$
$$= \eta_3(\frac{U^n(a,t)-\alpha_2\delta_0^n-\alpha_1\delta_1^n}{\alpha_1}) + \eta_4\delta_0^n + \eta_3\delta_1^n$$

eşitliği elde edilir ve düzenlendiğinde

$$\frac{U^{N+1}(a,t)}{\alpha_1}\eta_1 + \delta_0^{n+1}(\frac{-\alpha_2}{\alpha_1}\eta_1+\eta_2) + \delta_1^{n+1}(\frac{-\alpha_1}{\alpha_1}\eta_1+\eta_1)$$
$$= \frac{U^n(a,t)}{\alpha_1}\eta_3 + \delta_0^n(\frac{-\alpha_2}{\alpha_1}\eta_3+\eta_4) + \delta_1^n(\frac{-\alpha_1}{\alpha_1}\eta_3+\eta_3)$$

ifadesi bulunmuş olur. $m = N$ için δ_{N+1} değeri (5.19) eşitliğinde yerine yazılırsa:

$$\delta_{N-1}^{n+1}\eta_1 + \delta_N^{n+1}\eta_2 + (\frac{U^{n+1}(b,t)-\alpha_2\delta_N^{n+1}-\alpha_1\delta_{N-1}^{n+1}}{\alpha_1})\eta_1$$
$$= \delta_{N-1}^n\eta_3 + \delta_N^n\eta_4 + (\frac{U^n(b,t)-\alpha_2\delta_N^n-\alpha_1\delta_{N-1}^n}{\alpha_1})\eta_3$$

eşitliği elde edilir ve düzenlendiğinde

$$\delta_{N-1}^{n+1}(\eta_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_1}\eta_1) + \delta_N^{n+1}(\eta_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\eta_1) + \frac{U^{n+1}(b,t)}{\alpha_1}\eta_1$$
$$= \delta_{N-1}^n(\eta_3 - \frac{\alpha_1}{\alpha_1}\eta_3) + \delta_N^n(\eta_4 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\eta_3) + \frac{U^n(b,t)}{\alpha_1}\eta_3$$

ifadesi bulunmuş olur. Denklem sisteminden elde edilen sonuçlar matris formunda yazıldığında

$$c_1 = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1}\eta_1 + \eta_2$$
$$c_2 = \frac{-\alpha_1}{\alpha_1}\eta_1 + \eta_1$$
$$c_3 = \eta_1 - \frac{-\alpha_1}{\alpha_1}\eta_1$$
$$c_4 = \eta_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$
$$a_1 = \eta_1$$
$$a_2 = \eta_2$$

ve

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \eta_3 \\
b_2 &= \eta_4 \\
d_1 &= \tfrac{-\alpha_2}{\alpha_1}\eta_3 + \eta_4 \\
d_2 &= \tfrac{-\alpha_1}{\alpha_1}\eta_3 + \eta_3 \\
d_3 &= \tfrac{-\alpha_1}{\alpha_1}\eta_3 + \eta_3 \\
d_4 &= \tfrac{-\alpha_2}{\alpha_1}\eta_3 + \eta_4
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \tfrac{U^{n+1}(a,t)}{\alpha_1}\eta_1 \\
e_2 &= \tfrac{U^{n+1}(b,t)}{\alpha_1}\eta_1 \\
f_1 &= \tfrac{U^{n}(a,t)}{\alpha_1}\eta_3 \\
f_2 &= \tfrac{U^{n}(b,t)}{\alpha_1}\eta_3
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$
\begin{bmatrix}
c_1 & c_2 & & & & \\
 & a_1 & a_2 & a_1 & & \\
 & & \ddots & \ddots & & \\
 & & & a_1 & a_2 & a_1 \\
 & & & & c_3 & c_4
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\delta_0^{n+1} \\ \delta_1^{n+1} \\ \vdots \\ \delta_{N-1}^{n+1} \\ \delta_N^{n+1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
d_1 & d_2 & & & & \\
 & b_1 & b_2 & b_1 & & \\
 & & \ddots & \ddots & & \\
 & & & b_1 & b_2 & b_1 \\
 & & & & d_3 & d_4
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\delta_0^{n} \\ \delta_1^{n} \\ \vdots \\ \delta_{N-1}^{n} \\ \delta_N^{n}
\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
f_1 - e_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_2 - e_2
\end{bmatrix}
\tag{5.24}
$$

elde edilir. Oluşan $(N+1) \times (N+1)$ boyutlu denklem sisteminde δ^{n+1} parametrelerini hesaplayabilmek için öncelikle δ^0 değerlerinin belirlenmesi gereklidir. Bu değerler ise problemin başlangıç ve sınır koşulları kullanılarak $t = 0$ anı için aşağıda sunulmuştur:

$$U_N(x,0) = \sum_{m=-1}^{N+1} \delta_m^0 T_m^3(x)$$

Başlangıç koşullarının x_m düğüm noktalarındaki değerleri ise

$$U_N(x_m,0) = U(x_m,0) = U_m$$

şeklinde ifade edilir. Bu doğrultuda δ_m^0 paramatreleri

$$
\begin{aligned}
U_0 &= \alpha_1\delta_{-1} + \alpha_2\delta_0 + \alpha_1\delta_1 \\
U_1 &= \alpha_1\delta_0 + \alpha_2\delta_1 + \alpha_1\delta_2 \\
&\vdots \\
U_N &= \alpha_1\delta_{N-1} + \alpha_2\delta_N + \alpha_1\delta_{N+1}
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & & & & \\ & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & \\ & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-1} \\ \delta_0 \\ \vdots \\ \delta_N \\ \delta_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{bmatrix} \tag{5.25}$$

matris formunda gösterilir. $(N+1)\times(N+3)$ boyutundaki matris sistemini $(N+1)\times(N+1)$ boyutuna indirgemek amacıyla, U fonksiyonunun birinci türevi kullanılarak δ_{-1} ve δ_{N+1} parametreleri elimine edilir. Burada $x = x_m$ kollokasyon noktasındaki

$$U'_m = \alpha_3\delta_{m-1} - \alpha_3\delta_{m+1}$$

yaklaşımı ile δ_{-1} ve δ_{N+1} parametreleri:
$m = 0$ için

$$U'_0 = \alpha_3\delta_{-1} - \alpha_3\delta_1 \longrightarrow \delta_{-1} = \frac{U'_0 + \alpha_3\delta_1}{\alpha_3}$$

$$\alpha_1\frac{U'_0 + \alpha_3\delta_1}{\alpha_3} + \alpha_2\delta_0 + \alpha_1\delta_1 = U'_0\frac{\alpha_1}{\alpha_3} + \alpha_2\delta_0 + (2\alpha_1)\delta_1$$

$m = N$ için

$$U'_N = \alpha_3\delta_{N-1} - \alpha_3\delta_{N+1} \longrightarrow \delta_{N+1} = \frac{\alpha_3\delta_{N-1} - U'_N}{\alpha_3}$$

$$\alpha_1\delta_{N-1} + \alpha_2\delta_N + \alpha_1\frac{\alpha_3\delta_{N-1} - U'_N}{\alpha_3} = 2\alpha_1\delta_{N-1} + \alpha_2\delta_N - U'_N\frac{\alpha_1}{\alpha_3}$$

bulunur. Bu ifadeler ile (5.25) numaralı denklem sistemi yeniden düzenlendiğinde

$$\begin{bmatrix} \alpha_2 & 2\alpha_1 & & & & & \\ & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & \\ & & & & & 2\alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{N-1} \\ \delta_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1}{\alpha_3}U'_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{-\alpha_1}{\alpha_3}U'_N \end{bmatrix}$$

$(N+1)\times(N+1)$ boyutlu çözülebilir denklem sistemine ulaşılır. Denklem sisteminin çözümüyle elde edilen başlangıç parametreleri, (5.24)'de verilen sisteme yerleştirilir ve t anındaki yaklaşık çözümler iteratif bir şekilde elde edilir.

5.3.2 Kübik trigonometrik gerilim B-spline kollokasyon yöntemi

CTT^3 B-spline fonksiyonun Çizelge 4.2'de verilen katsayıları kullanılarak her düğüm noktası için U fonksiyonun kendisi, birinci ve ikinci türevleri:

$$\begin{aligned} U(x_m,t_n) &= \beta_1\delta_{m-1}+\beta_2\delta_m+\beta_1\delta_{m+1},\\ U_x(x_m,t_n) &= \beta_3\delta_{m-1}-\beta_3\delta_{m+1},\\ U_{xx}(x_m,t_n) &= \beta_4\delta_{m-1}+\beta_5\delta_m+\beta_4\delta_{m+1} \end{aligned} \tag{5.26}$$

elde edilir. Lineerleştirilmiş (5.14) FHN denklemine (5.26) yaklaşık çözümleri yerleştirilerek elde edilen denklem aşağıda verilmiştir:

$$\eta_1\delta_{m-1}^{n+1}+\eta_2\delta_m^{n+1}+\eta_1\delta_{m+1}^{n+1}=\eta_3\delta_{m-1}^{n}+\eta_4\delta_m^{n}+\eta_3\delta_{m+1}^{n} \tag{5.27}$$

Burada η_k, $k=1,\ldots,4$

$$\begin{aligned} \eta_1 &= (1+3\tfrac{\Delta t}{2}K_2^2-(p+1)\Delta tK_2+p\tfrac{\Delta t}{2})\beta_1-\tfrac{\Delta t}{2}\beta_4,\\ \eta_2 &= (1+3\tfrac{\Delta t}{2}K_2^2-(p+1)\Delta tK_2+p\tfrac{\Delta t}{2})\beta_2-\tfrac{\Delta t}{2}\beta_5,\\ \eta_3 &= (1+\tfrac{\Delta t}{2}K_2^2-p\tfrac{\Delta t}{2})\beta_1+\tfrac{\Delta t}{2}\beta_4,\\ \eta_4 &= (1+\tfrac{\Delta t}{2}K_2^2-p\tfrac{\Delta t}{2})\beta_2+\tfrac{\Delta t}{2}\beta_5 \end{aligned} \tag{5.28}$$

olarak ifade edilir. $(K_2)_m$ ise

$$(K_2)_m=\beta_1\delta_{m-1}^n(t)+\beta_2\delta_m^n(t)+\beta_1\delta_{m+1}^n(t).$$

Eşitlik (5.27) için matris formunda gösterimi:

$$C_3X^{n+1}=D_3X^n \tag{5.29}$$

şeklinde olur. Matris gösterimi:

$$\begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_1 & & & & \\ & \eta_1 & \eta_2 & \eta_1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & \\ & & & & \eta_1 & \eta_2 & \eta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-1}^{n+1} \\ \delta_0^{n+1} \\ \\ \\ \\ \delta_{N+1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_3 & \eta_4 & \eta_3 & & & & \\ & \eta_3 & \eta_4 & \eta_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & \\ & & & & \eta_3 & \eta_4 & \eta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-1}^{n} \\ \delta_0^{n} \\ \\ \\ \\ \delta_{N+1}^{n} \end{bmatrix} \tag{5.30}$$

şeklindedir. C_3 ve D_3 ile ifade edilen matrisler her satırda 3 eleman bulunduran bant matrislerdir. Elde edilen bu matris sistemi $(N+3)$ bilinmeyen ve $(N+1)$ denklemden oluşmaktadır. Bir önceki bölümde gösterildiği gibi sınır koşulları uygulanarak δ_{-1} ve δ_{N+1} bilinmeyeleri elimine edilir. δ^{n+1} değerlerini hesaplamaya geçmeden önce, başlangıç koşullarından yararlanılarak δ^0 parametreleri belirlenir. $(N+1)\times(N+1)$ boyutlu çözülebilir bir sistem oluşturulur.

5.3.3 Nümerik sonuçlar

Bu bölümde, CT^3 B-spline kollokasyon ve CTT^3 B-spline kollokasyon yöntemleri kullanılarak çeşitli test problemleri için sayısal çıktılar üretilmiştir. Yöntemin bu problemler üzerindeki etkinliğini nesnel biçimde değerlendirebilmek amacıyla hata normu hesaplanmıştır. Elde edilen bulgular çizelgeler ve şekiller ile sunulmuştur.

Çizelge 5.1 Test-1 için CT^3 ve CTT^3 B-Spline $-15 \leq x \leq 30$ ve $t = 5$ anında hata normları

h	Δt	CT^3	$CTT^3(\tau = \sqrt{\lambda})$	$CTT^3(\tau = \frac{\sqrt{\lambda}}{2})$	$CTT^3(\tau = \frac{\sqrt{\lambda}}{5})$	$CTT^3(\tau = \frac{\sqrt{\lambda}}{10})$
$0,1$	$0,01$	$1,5099 \times 10^{-3}$	$1,1481 \times 10^{-2}$	$2,7619 \times 10^{-3}$	$3,4936 \times 10^{-4}$	$3,5464 \times 10^{-5}$
	$0,05$	$9,2406 \times 10^{-4}$	$1,0920 \times 10^{-2}$	$2,1997 \times 10^{-3}$	$3,0887 \times 10^{-4}$	$6,0048 \times 10^{-4}$
$0,2$	$0,01$	$6,4617 \times 10^{-3}$	$2,3459 \times 10^{-2}$	$5,7329 \times 10^{-3}$	$9,0012 \times 10^{-4}$	$2,5851 \times 10^{-4}$
	$0,05$	$5,8799 \times 10^{-3}$	$2,2898 \times 10^{-2}$	$5,1766 \times 10^{-3}$	$3,9897 \times 10^{-4}$	$4,3001 \times 10^{-4}$
$0,5$	$0,01$	$4,1458 \times 10^{-2}$	$6,1597 \times 10^{-2}$	$1,5134 \times 10^{-2}$	$2,9717 \times 10^{-3}$	$1,5062 \times 10^{-3}$
	$0,05$	$4,0894 \times 10^{-2}$	$6,1064 \times 10^{-2}$	$1,4566 \times 10^{-2}$	$2,5046 \times 10^{-3}$	$1,1702 \times 10^{-3}$

Çizelge 5.1'de Test-1 için CT^3 ve CTT^3 B-spline kollokasyon yöntemleriyle elde edilen L_∞ hata normları, farklı h, Δt ve τ değerleriyle karşılaştırılmıştır. Her iki yöntem için Δt sabit tutulduğunda, h azaldıkça hata normunun da azaldığı görülmektedir. CTT^3 yönteminde ise τ gerilim parametreleri karşılaştırıldığında τ değeri azaldığında hata normunda iyileşme fark edilmiştir. Gerilim parametresinin etkisi açık bir şekilde gözlemlenmiştir. Bu test problemi için CTT^3 B-spline kollokasyon yöntemi ile daha iyi sonuçlar elde edilmiştir. Test-1 için yöntemin nümerik simülasyonu Şekil 5.1'de sunulmuştur. $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ değerleri ile $t = 5$ anında elde edilen hata normu grafikleri ise Şekil 5.2'de sunulmuştur.

Çizelge 5.2 Test-2 için CT^3 ve CTT^3 B-Spline $-25 \leq x \leq 25$ ve $t = 5$ anında hata normları

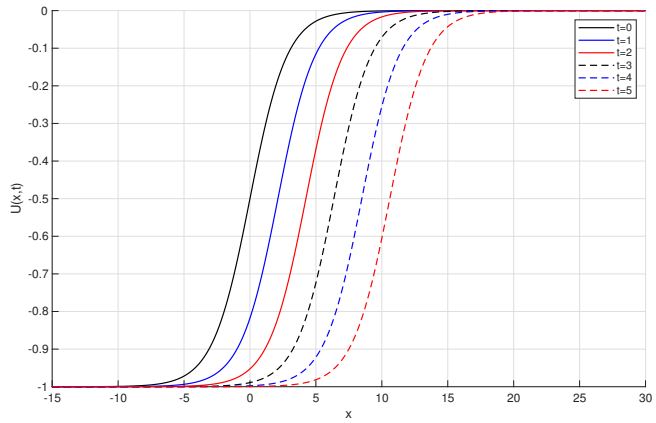
h	Δt	CT^3	$CTT^3(\tau = \sqrt{\lambda})$	$CTT^3(\tau = \frac{\sqrt{\lambda}}{2})$	$CTT^3(\tau = \frac{\sqrt{\lambda}}{5})$	$CTT^3(\tau = \frac{\sqrt{\lambda}}{10})$
$0,1$	$0,01$	$1,9984 \times 10^{-3}$	$4,0510 \times 10^{-3}$	$9,6651 \times 10^{-4}$	$1,1829 \times 10^{-4}$	$1,7079 \times 10^{-5}$
	$0,05$	$1,9973 \times 10^{-3}$	$4,0530 \times 10^{-3}$	$9,6856 \times 10^{-4}$	$1,2040 \times 10^{-4}$	$1,7888 \times 10^{-5}$
$0,2$	$0,01$	$8,0040 \times 10^{-3}$	$8,1341 \times 10^{-3}$	$1,8500 \times 10^{-3}$	$1,7496 \times 10^{-4}$	$1,1341 \times 10^{-4}$
	$0,05$	$8,0028 \times 10^{-3}$	$8,1361 \times 10^{-3}$	$1,8520 \times 10^{-3}$	$1,7662 \times 10^{-4}$	$1,1194 \times 10^{-4}$
$0,5$	$0,01$	$5,0313 \times 10^{-2}$	$2,0515 \times 10^{-2}$	$4,0034 \times 10^{-3}$	$4,0855 \times 10^{-4}$	$9,8781 \times 10^{-4}$
	$0,05$	$5,0311 \times 10^{-2}$	$2,0517 \times 10^{-2}$	$4,0054 \times 10^{-3}$	$4,0767 \times 10^{-4}$	$9,8608 \times 10^{-4}$

Çizelge 5.2'de Test-2 için CT^3 ve CTT^3 B-spline kollokasyon yöntemleriyle elde edilen L_∞ hata normları, farklı h, Δt ve τ değerleriyle karşılaştırılmıştır. Uygulanan yöntemler için Δt sabit tutulduğunda, h azaldıkça hata normunun da azaldığı görülmektedir. CT^3 ve CTT^3 yöntemleri karşılaştırıldığında $\tau = \sqrt{\lambda}$ seçildiğinde sonuçların yakın olduğu gözlemlenmiştir. Ancak τ değeri azaldıkça sonuçlarında orantılı bir şekilde iyileştiği görülmüştür. Test-2 için yöntemin nümerik simülasyonu Şekil 5.3'te sunulmuştur. $h = 0.1, \Delta t = 0.01$ değerleri ile $t = 5$ anında elde edilen hata normu grafikleri ise Şekil 5.4'te verilmiştir.

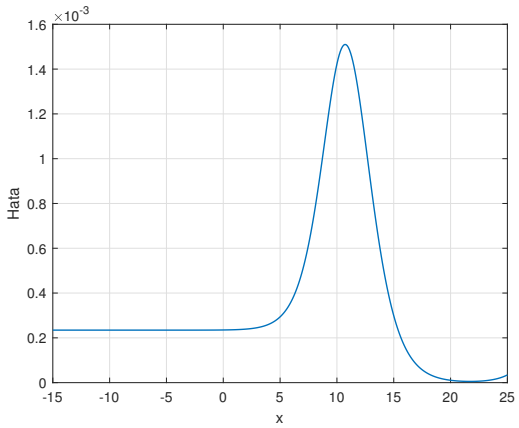
Çizelge 5.3 Test-3 için CT^3 ve CTT^3 B-Spline $-35 \leq x \leq 30$ ve $t = 5$ anında hata normları

h	Δt	CT^3	$CTT^3(\tau = \sqrt{\lambda})$	$CTT^3(\tau = \frac{\sqrt{\lambda}}{2})$	$CTT^3(\tau = \frac{\sqrt{\lambda}}{5})$	$CTT^3(\tau = \frac{\sqrt{\lambda}}{10})$
$0,1$	$0,01$	$1,6231 \times 10^{-3}$	$1,1595 \times 10^{-2}$	$2,8769 \times 10^{-3}$	$4,6428 \times 10^{-4}$	$1,2488 \times 10^{-4}$
	$0,05$	$1,0387 \times 10^{-3}$	$1,1034 \times 10^{-2}$	$2,3144 \times 10^{-3}$	$2,3452 \times 10^{-4}$	$4,9538 \times 10^{-4}$
$0,2$	$0,01$	$6,5754 \times 10^{-3}$	$2,3571 \times 10^{-2}$	$5,8474 \times 10^{-3}$	$1,0137 \times 10^{-3}$	$3,5155 \times 10^{-4}$
	$0,05$	$5,9936 \times 10^{-3}$	$2,3010 \times 10^{-2}$	$5,2911 \times 10^{-3}$	$4,9967 \times 10^{-4}$	$3,3403 \times 10^{-4}$
$0,5$	$0,01$	$4,1564 \times 10^{-2}$	$6,1706 \times 10^{-2}$	$1,5247 \times 10^{-2}$	$3,0822 \times 10^{-3}$	$1,5956 \times 10^{-3}$
	$0,05$	$4,1000 \times 10^{-2}$	$6,1172 \times 10^{-2}$	$1,4679 \times 10^{-2}$	$2,6076 \times 10^{-3}$	$1,2442 \times 10^{-3}$

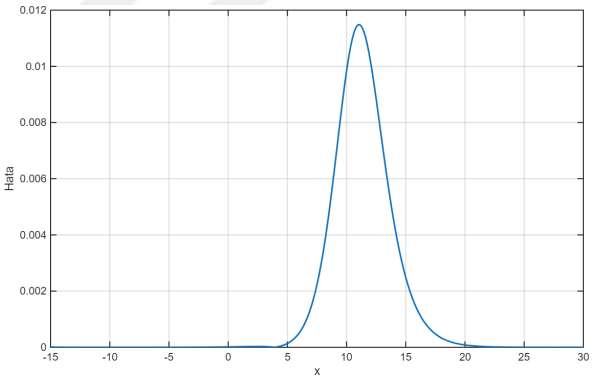
Çizelge 5.3'te Test-3 için CT^3 ve CTT^3 B-spline kollokasyon yöntemleriyle elde edilen L_∞ hata normları, farklı h, Δt ve τ değerleriyle karşılaştırılmıştır. Her iki yöntem için Δt değeri sabit ise h azaldıkça hata normunun da azaldığı görülmektedir. Uygulanan yöntemler karşılaştırıldığında $\tau = \frac{\sqrt{\lambda}}{2}$ seçildiğinde yakın sonuçlar elde edildiği gözlemlenmiştir. Bu test probleminde gerilim parametresindeki değişimin hata normu ile doğru orantılı olduğu görülmüştür. Test-3 için yöntemin nümerik simülasyonu Şekil 5.5'te sunulmuştur. $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ seçimiyle $t = 5$ anındaki hata normu grafikleri ise Şekil 5.6'da verilmiştir.



Şekil 5.1 Test 1'in CT^3 ve CTT^3 B-spline ile nümerik similasyonu

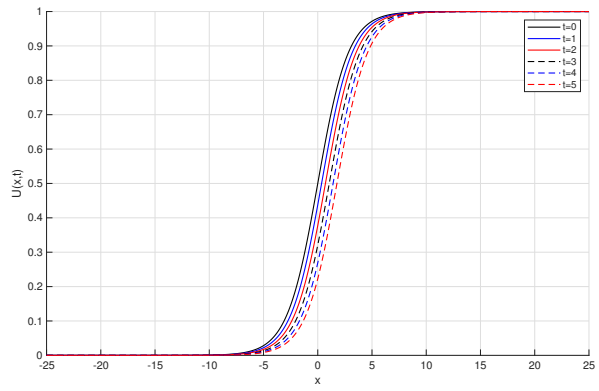


CT^3 B-spline kollokasyon

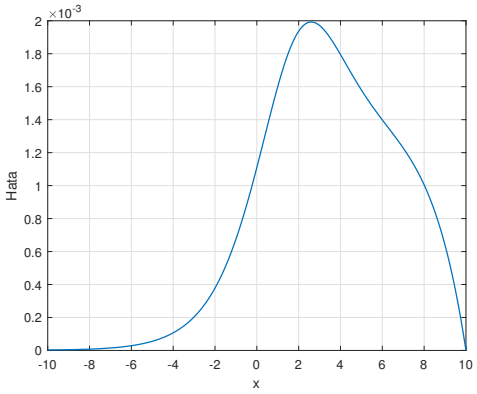


CTT^3 B-spline kollokasyon

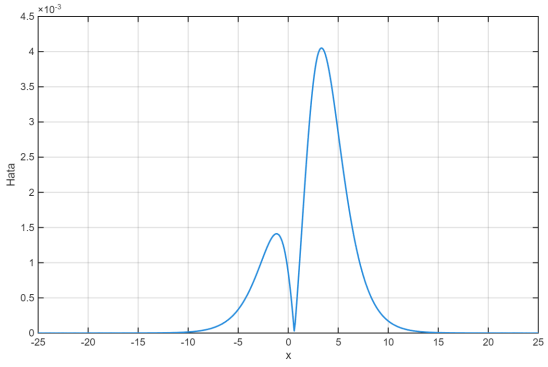
Şekil 5.2 Test-1 için $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ seçimiyle $t = 5$ anındaki hata grafikleri



Şekil 5.3 Test 2'nin CT^3 ve CTT^3 B-spline ile nümerik similasyonu

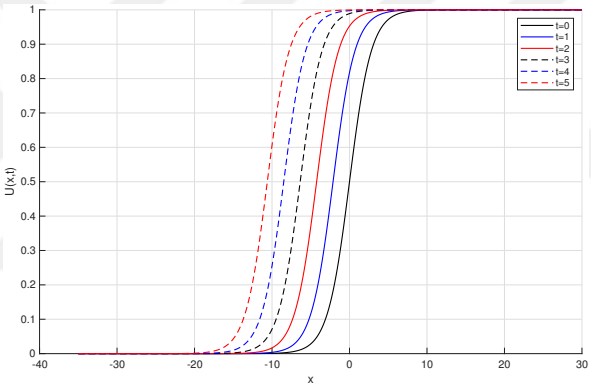


CT^3 B-spline kollokasyon

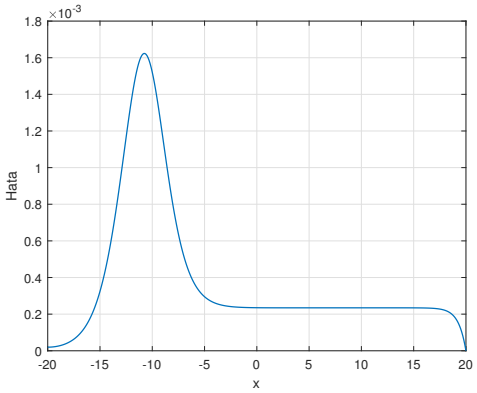


CTT^3 B-spline kollokasyon

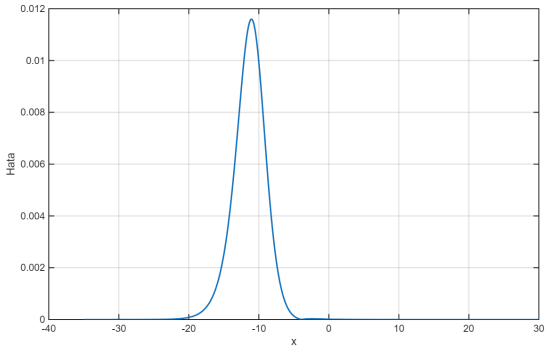
Şekil 5.4 Test-2 için $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ seçimiyle $t = 5$ anındaki hata grafikleri



Şekil 5.5 Test 3'ün CT^3 ve CTT^3 B-spline ile nümerik similasyonu



CT^3 B-spline kollokasyon



CTT^3 B-spline kollokasyon

Şekil 5.6 Test-3 için $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ seçimiyle $t = 5$ anındaki hata grafikleri

5.4 FHN Denkleminin Kuartik Trigonometrik B-Spline ve Kuartik Trigonomerik Gerilim B-Spline Kollokasyon Yöntemleri ile Sayısal Çözümü

Bu bölümde FHN denklemi, QT^4 ve QTT^4 B-spline ile kollokasyon yöntemi uygulanarak yaklaşık olarak çözülmüştür. $U(x,t)$ fonksiyonun yaklaşık çözümü $U_N(x,t)$ ile ifade edilmiştir. (4.16) ve (4.17)'de verilen trigonometrik B-spline $Q_m^4(x)$ tabanları kullanılarak $[x_0, x_N]$ aralığında tanımlı bu fonksiyon için aşağıdaki yaklaşım kurulmuştur:

$$U(x,t) \approx U_N(x,t) = \sum_{m=-2}^{N+1} Q_m^4(x)\delta_m(t) \tag{5.31}$$

Burada $Q_m^4(x)$ hem kuartik trigonometrik hem de kuartik trigonometrik gerilim B-spline fonksiyonları, δ_m parametreleri ise zamana bağlı değişkenleri temsil etmektedir. $U_N(x,t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümü açık olarak:

$$U_N(x,t) \approx Q_{m-2}^4(x)\delta_{m-2}(t) + Q_{m-1}^4(x)\delta_{m-1}(t) + Q_m^4(x)\delta_m(t) + Q_{m+1}^4(x)\delta_{m+1}(t) \tag{5.32}$$

şeklinde ifade edilir. Kollokasyon yöntemi uygulanırken $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında yer alan her bir x_m düğüm noktası için $U_N(x,t)$ yaklaşık çözümü, bu ardışık beş farklı taban fonksiyonunun katkısıyla açık biçimde ifade edilir. Bu yapı sayesinde, $[x_0, x_N]$ çözüm aralığında tanımlı yaklaşık çözümler, ilgili $Q_m^4(x)$ B-spline fonksiyonlarının oluşturduğu taban üzerinden elde edilir. $Q_m^4(x)$ B-spline fonksiyonları kullanılarak x_m düğüm noktasındaki $U_N(x,t)$ fonksiyonu, birinci ve ikinci türevlerine yapılan yaklaşımlar:

$$\begin{aligned} U_N(x,t) &= \sum_{m=-2}^{N} Q_m^4(x)\delta_m(t) \\ \frac{\partial}{\partial x}U_N(x,t) &= \sum_{m=-2}^{N} \frac{\partial Q_m^4(x)}{\partial x}\delta_m(t) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}U_N(x,t) &= \sum_{m=-2}^{N} \frac{\partial^2 Q_m^4(x)}{\partial x^2}\delta_m(t). \end{aligned} \tag{5.33}$$

İlerleyen aşamalarda QT^4 ve QTT^4 fonksiyonlarının katsayıları farklı olduğu için bu iki durum ayrı ele alınacaktır.

5.4.1 Kuartik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemi

QT^4 B-spline fonksiyonun Çizelge 4.4'te verilen katsayılar kullanılarak, her düğüm noktası için U fonksiyonu, birinci, ikinci ve üçüncü türevleri:

$$\begin{aligned} U(x_m,t_n) &= \alpha_6\delta_{m-2}+\alpha_7\delta_{m-1}+\alpha_7\delta_m+\alpha_6\delta_{m+1},\\ U_x(x_m,t_n) &= \alpha_8\delta_{m-2}+\alpha_9\delta_{m-1}-\alpha_9\delta_m-\alpha_8\delta_{m+1},\\ U_{xx}(x_m,t_n) &= \alpha_{10}\delta_{m-2}-\alpha_{10}\delta_{m-1}-\alpha_{10}\delta_m+\alpha_{10}\delta_{m+1},\\ U_{xxx}(x_m,t_n) &= \alpha_{11}\delta_{m-2}+\alpha_{12}\delta_{m-1}-\alpha_{12}\delta_m-\alpha_{11}\delta_{m+1}, \end{aligned} \tag{5.34}$$

elde edilir. Lineerleştirilmiş (5.14) FHN denklemine (5.34) yaklaşık çözümleri yerleştirilerek elde edilen denklem aşağıda verilmiştir.

$$\eta_1\delta_{m-2}^{n+1}+\eta_2\delta_{m-1}^{n+1}+\eta_2\delta_m^{n+1}+\eta_1\delta_{m+1}^{n+1}=\eta_3\delta_{m-2}^{n}+\eta_4\delta_{m-1}^{n}+\eta_4\delta_m^{n}+\eta_3\delta_{m+1}^{n} \tag{5.35}$$

Burada η_k, $k=1,\ldots,4$

$$\begin{aligned} \eta_1 &= (1+3\tfrac{\Delta t}{2}K_3^2-(p+1)\Delta tK_3+p\tfrac{\Delta t}{2})\alpha_6-\tfrac{\Delta t}{2}\alpha_{10}\\ \eta_2 &= (1+3\tfrac{\Delta t}{2}K_3^2-(p+1)\Delta tK_3+p\tfrac{\Delta t}{2})\alpha_7-\tfrac{\Delta t}{2}\alpha_{10}\\ \eta_3 &= (1+\tfrac{\Delta t}{2}K_3^2-p\tfrac{\Delta t}{2})\alpha_6+\tfrac{\Delta t}{2}\alpha_{10}\\ \eta_4 &= (1+\tfrac{\Delta t}{2}K_3^2-p\tfrac{\Delta t}{2})\alpha_7+\tfrac{\Delta t}{2}\alpha_{10} \end{aligned} \tag{5.36}$$

olarak ifade edilir. $(K_3)_m$ ise

$$(K_3)_m=\alpha_6\delta_{m-2}^n(t)+\alpha_7\delta_{m-1}^n(t)+\alpha_7\delta_m^n(t)+\alpha_6\delta_{m+1}^n(t). \tag{5.37}$$

Eşitlik (5.35) matris formunda gösterimi

$$A_4X^{n+1}=B_4X^n \tag{5.38}$$

şeklinde olur. Matris gösterimi:

$$\begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_2 & \eta_1 & & & & \\ & \eta_1 & \eta_2 & \eta_2 & \eta_1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & \eta_1 & \eta_2 & \eta_2 & \eta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-2}^{n+1}\\ \delta_{-1}^{n+1}\\ \vdots\\ \\ \delta_{N+1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_3 & \eta_4 & \eta_4 & \eta_3 & & & & \\ & \eta_3 & \eta_4 & \eta_4 & \eta_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & \eta_3 & \eta_4 & \eta_4 & \eta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-2}^{n}\\ \delta_{-1}^{n}\\ \vdots\\ \\ \delta_{N+1}^{n} \end{bmatrix} \tag{5.39}$$

şeklindedir. Elde edilen bu matris sisteminde $(N+1)$ denklem, $(N+4)$ bilinmeyen bulunmaktadır. Önceki bölümde gösterildiği gibi sınır koşulları uygulanarak sol taraftan δ_{-2} ve δ_{-1}, sağ taraftan δ_{N+1} bilinmeyenleri elimine edilir.

$(N+1)\times(N+1)$ boyutta çözülebilir bir denklem sistemi oluşur. δ^{n+1} parametrelerini hesaplayabilmek amacıyla, ilk adımda başlangıç koşulları kullanılarak δ^0 parametreleri belirlenir. Bu sayede sistemin çözümü kolayca elde edilebilir.

5.4.2 Kuartik trigonometrik gerilim B-spline kollokasyon yöntemi

QTT^4 B-spline fonksiyonun Çizelge 4.4'te verilen katsayıları kullanılarak x_m düğüm noktası için U fonksiyonun kendisi, birinci, ikinci ve üçüncü türevleri:

$$\begin{aligned} U(x_m,t_n) &= \beta_7\delta_{m-2}+\beta_8\delta_{m-1}+\beta_8\delta_m+\beta_7\delta_{m+1},\\ U_x(x_m,t_n) &= \beta_9\delta_{m-2}+\beta_{10}\delta_{m-1}-\beta_{10}\delta_m-\beta_9\delta_{m+1}\\ U_{xx}(x_m,t_n) &= \beta_{11}\delta_{m-2}+\beta_{12}\delta_{m-1}+\beta_{12}\delta_m+\beta_{11}\delta_{m+1},\\ U_{xxx}(x_m,t_n) &= \beta_{13}\delta_{m-2}+\beta_{14}\delta_{m-1}-\beta_{14}\delta_m-\beta_{13}\delta_{m+1} \end{aligned} \tag{5.40}$$

elde edilir. Lineerleştirilmiş (5.14) FHN denklemine (5.40) yaklaşık çözümleri yerleştirilerek elde edilen denklem aşağıda verilmiştir:

$$\eta_1\delta_{m-2}^{n+1}+\eta_2\delta_{m-1}^{n+1}+\eta_2\delta_m^{n+1}+\eta_1\delta_{m+1}^{n+1}=\eta_3\delta_{m-2}^{n}+\eta_4\delta_{m-1}^{n}+\eta_4\delta_m^{n}+\eta_3\delta_{m+1}^{n} \tag{5.41}$$

Burada η_k, $k=1,\ldots,4$

$$\begin{aligned} \eta_1 &= (1+3\tfrac{\Delta t}{2}K_4^2-(p+1)\Delta tK_4+p\tfrac{\Delta t}{2})\beta_7-\tfrac{\Delta t}{2}\beta_{11}\\ \eta_2 &= (1+3\tfrac{\Delta t}{2}K_4^2-(p+1)\Delta tK_4+p\tfrac{\Delta t}{2})\beta_8-\tfrac{\Delta t}{2}\beta_{12}\\ \eta_3 &= (1+\tfrac{\Delta t}{2}K_4^2-p\tfrac{\Delta t}{2})\beta_7+\tfrac{\Delta t}{2}\beta_{11}\\ \eta_4 &= (1+\tfrac{\Delta t}{2}K_4^2-p\tfrac{\Delta t}{2})\beta_8+\tfrac{\Delta t}{2}\beta_{12} \end{aligned} \tag{5.42}$$

olarak ifade edilir. $(K_4)_m$ ise

$$(K_4)_m=\beta_7\delta_{m-2}+\beta_8\delta_{m-1}+\beta_8\delta_m+\beta_7\delta_{m+1}.$$

Eşitlik (5.41) için matris formunda gösterimi:

$$C_4X^{n+1}=D_4X^n \tag{5.43}$$

şeklinde olur. Matris gösterimi:

$$\begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_2 & \eta_1 & & & & \\ & \eta_1 & \eta_2 & \eta_2 & \eta_1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & \eta_1 & \eta_2 & \eta_2 & \eta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-2}^{n+1} \\ \delta_{-1}^{n+1} \\ \vdots \\ \\ \delta_{N+1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_3 & \eta_4 & \eta_4 & \eta_3 & & & & \\ & \eta_3 & \eta_4 & \eta_4 & \eta_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & \eta_3 & \eta_4 & \eta_4 & \eta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-2}^{n} \\ \delta_{-1}^{n} \\ \vdots \\ \\ \delta_{N+1}^{n} \end{bmatrix} \tag{5.44}$$

şeklindedir. C_4 ve D_4 ile ifade edilen matrisler her satırda dört eleman bulunduran bant matrislerdir. $(N+4)$ bilinmeyen ve $(N+1)$ denklemden oluşan matris sisteminin çözülebilmesi için sol taraftan δ_{-2} ve δ_{-1}, sağ taraftan δ_{N+1} bilinmeyenleri elimine edilir. Bu sayede denklem sayısı ve bilinmeyen sayısı eşitlenir. δ^{n+1} parametrelerinin hesaplanabilmesi için öncelikle başlangıç koşulları kullanarak δ^0 parametreleri belirlenir ve böylece $(N+1)\times(N+1)$ boyutlu sistemin çözümü kolayca elde edilir.

5.4.3 Nümerik sonuçlar

Bu bölümde, QT^4 B-spline kollokasyon ve QTT^4 B-spline kollokasyon yöntemleri farklı test problemlerine uygulanmış ve bu problemlere ilişkin hata normları hesaplanmıştır. Bulgular çizelge ve şekiller üzerinden karşılaştırmalı olarak sunulmuştur.

Çizelge 5.4 Test-1 için QT^4 ve QTT^4 B-Spline $-15 \le x \le 30$ ve $t = 5$ anında hata normları

h	Δt	QT^4	$QTT^4(\tau=\sqrt{\lambda})$	$QTT^4(\tau=\frac{\sqrt{\lambda}}{2})$	$QTT^4(\tau=\frac{\sqrt{\lambda}}{5})$	$QTT^4(\tau=\frac{\sqrt{\lambda}}{10})$
$0,1$	$0,01$	$1,3846\times10^{-4}$	$1,3882\times10^{-4}$	$1,3915\times10^{-4}$	$1,3925\times10^{-4}$	$1,3926\times10^{-4}$
	$0,05$	$7,3141\times10^{-4}$	$7,3179\times10^{-4}$	$7,3207\times10^{-4}$	$7,3215\times10^{-4}$	$7,3216\times10^{-4}$
$0,2$	$0,01$	$1,2637\times10^{-4}$	$1,3565\times10^{-4}$	$1,3836\times10^{-4}$	$1,3910\times10^{-4}$	$1,3921\times10^{-4}$
	$0,05$	$7,1945\times10^{-4}$	$7,2868\times10^{-4}$	$7,3105\times10^{-4}$	$7,3170\times10^{-4}$	$7,3179\times10^{-4}$
$0,5$	$0,01$	$3,8923\times10^{-4}$	$8,5479\times10^{-5}$	$1,2440\times10^{-4}$	$1,3611\times10^{-4}$	$1,3776\times10^{-4}$
	$0,05$	$2,8570\times10^{-4}$	$6,8272\times10^{-4}$	$7,2045\times10^{-4}$	$7,3039\times10^{-4}$	$7,3179\times10^{-4}$

Çizelge 5.4'te Test-1 için QT^4 ve QTT^4 B-spline kollokasyon yöntemleriyle hesaplanan L_∞ hata normları verilmiştir. Bu değerler, farklı h, Δt ve τ parametreleri için karşılaştırılmıştır. Her iki yöntemde de benzer sonuçlar görülse de QT^4 sonuçlarının daha iyi olduğu görülmüştür. QTT^4 B-spline kollokasyon yönteminde gerilim parametresi değişiminin bu test problemi için sonuçları etkilemediği görülmüştür. Test-1 için yöntemin nümerik simülasyonu Şekil 5.7'de sunulmuştur. $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ seçimiyle $t = 5$ anındaki hata normu grafikleri ise Şekil 5.8'de verilmiştir.

Çizelge 5.5'te Test-2 için QT^4 ve QTT^4 B-spline kollokasyon yöntemleriyle hesaplanan L_∞ hata normları verilmiştir. Bu değerler, farklı h, Δt ve τ parametreleri için karşılaştırılmaktadır. Sonuçlarda genel olarak h ve Δt azaldıkça hatanın azaldığını görülmektedir. QT^4 ve QTT^4 sonuçlarının bazı değerleri

birbirine yakın görülse de gerilim parametresi değişimiyle daha iyi sonuçlar elde edilmiştir. Bu test problemi için $\tau = \frac{\sqrt{\lambda}}{5}$ seçildiğinde en küçük hata normu gözlenmiştir. Test-2 için yöntemin nümerik simülasyonu Şekil 5.9'da sunulmuştur. $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ seçimiyle $t = 5$ anındaki hata normu grafikleri ise Şekil 5.10'da verilmiştir.

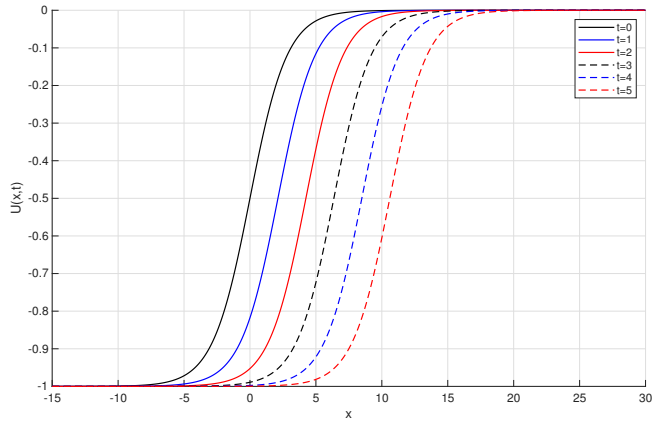
Çizelge 5.5 Test-2 için QT^4 ve QTT^4 B-Spline $-25 \leq x \leq 25$ ve $t = 5$ anında hata normları

h	Δt	QT^4	$QTT^4(\tau = \sqrt{\lambda})$	$QTT^4(\tau = \frac{\sqrt{\lambda}}{2})$	$QTT^4(\tau = \frac{\sqrt{\lambda}}{5})$	$QTT^4(\tau = \frac{\sqrt{\lambda}}{10})$
0,1	0,01	$2,5008 \times 10^{-7}$	$6,7624 \times 10^{-7}$	$1,4128 \times 10^{-7}$	$1,6456 \times 10^{-7}$	$1,7142 \times 10^{-7}$
	0,05	$4,1769 \times 10^{-6}$	$3,9246 \times 10^{-6}$	$4,1003 \times 10^{-6}$	$4,1508 \times 10^{-6}$	$4,1579 \times 10^{-6}$
0,2	0,01	$2,7125 \times 10^{-6}$	$5,7831 \times 10^{-6}$	$1,1417 \times 10^{-6}$	$2,2412 \times 10^{-7}$	$3,1174 \times 10^{-7}$
	0,05	$4,8057 \times 10^{-6}$	$4,5790 \times 10^{-6}$	$3,8109 \times 10^{-6}$	$4,1861 \times 10^{-6}$	$4,2436 \times 10^{-6}$
0,5	0,01	$1,0709 \times 10^{-4}$	$8,8190 \times 10^{-5}$	$1,3149 \times 10^{-5}$	$8,6726 \times 10^{-6}$	$1,1320 \times 10^{-5}$
	0,05	$1,0912 \times 10^{-4}$	$8,6441 \times 10^{-5}$	$1,1058 \times 10^{-5}$	$9,6966 \times 10^{-6}$	$1,2516 \times 10^{-5}$

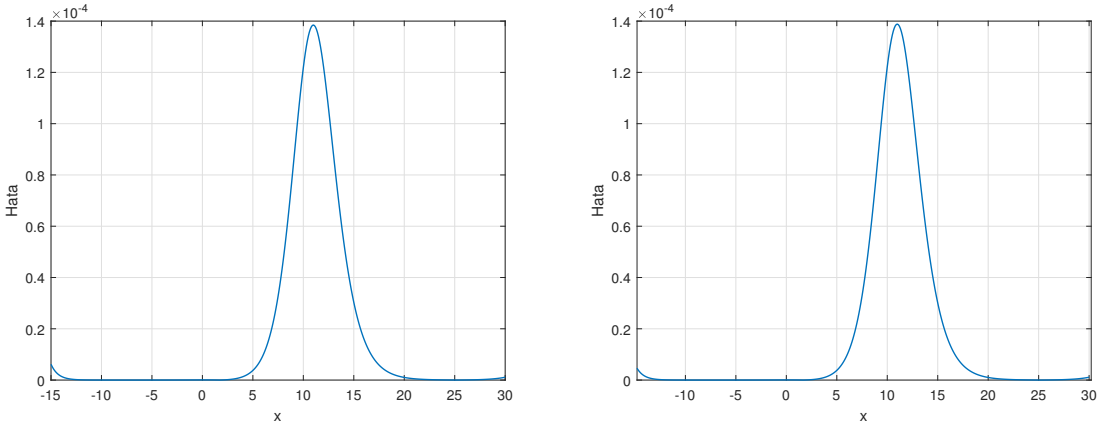
Çizelge 5.6 Test-3 için QT^4 ve QTT^4 B-Spline $-35 \leq x \leq 30$ ve $t = 5$ anında hata normları

h	Δt	QT^4	$QTT^4(\tau = \sqrt{\lambda})$	$QTT^4(\tau = \frac{\sqrt{\lambda}}{2})$	$QTT^4(\tau = \frac{\sqrt{\lambda}}{5})$	$QTT^4(\tau = \frac{\sqrt{\lambda}}{10})$
0,1	0,01	$2,4239 \times 10^{-5}$	$2,4614 \times 10^{-5}$	$2,4890 \times 10^{-5}$	$2,4967 \times 10^{-5}$	$2,4978 \times 10^{-5}$
	0,05	$6,2210 \times 10^{-4}$	$6,2248 \times 10^{-4}$	$6,2275 \times 10^{-4}$	$6,2283 \times 10^{-4}$	$6,2284 \times 10^{-4}$
0,2	0,01	$1,3959 \times 10^{-5}$	$2,2062 \times 10^{-5}$	$2,4264 \times 10^{-5}$	$2,4878 \times 10^{-5}$	$2,4965 \times 10^{-5}$
	0,05	$6,1091 \times 10^{-4}$	$6,1988 \times 10^{-4}$	$6,2213 \times 10^{-4}$	$6,2274 \times 10^{-4}$	$6,2283 \times 10^{-4}$
0,5	0,01	$5,0187 \times 10^{-4}$	$8,3999 \times 10^{-5}$	$1,7146 \times 10^{-5}$	$2,5451 \times 10^{-5}$	$2,6620 \times 10^{-5}$
	0,05	$2,1622 \times 10^{-4}$	$5,7273 \times 10^{-4}$	$6,1045 \times 10^{-4}$	$6,2038 \times 10^{-4}$	$6,2178 \times 10^{-4}$

Çizelge 5.6'da Test-3 için QT^4 ve QTT^4 B-spline kollokasyon yöntemleriyle hesaplanan L_∞ hata normları verilmiştir. Bu değerler, farklı h, Δt ve τ parametreleri için karşılaştırılmaktadır. $h = 0,5$ ve $\Delta t = 0,01$ değerlerindeki sonuçlara bakıldığında QTT^4 sonuçlarının daha iyi olduğu görülse de bu değerler dışında QT^4 sonuçlarının genel olarak daha iyi olduğu görülmüştür. Test-3 için yöntemin nümerik simülasyonu Şekil 5.11'de sunulmuştur. $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ seçimiyle $t = 5$ anındaki hata normu grafikleri ise Şekil 5.12'de verilmiştir.

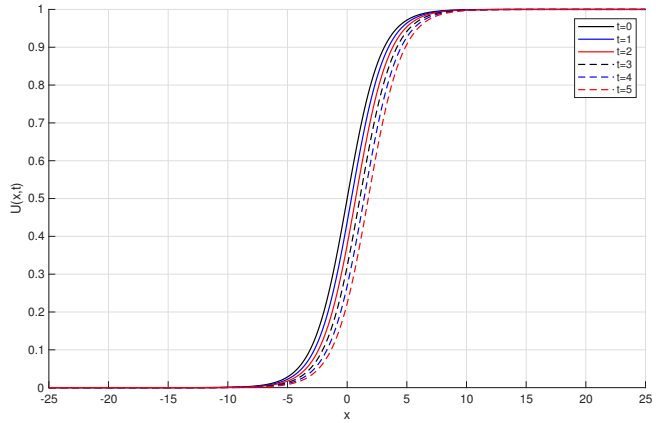


Şekil 5.7 Test 1'in QT^4 ve QTT^4 B-spline ile nümerik similasyonu

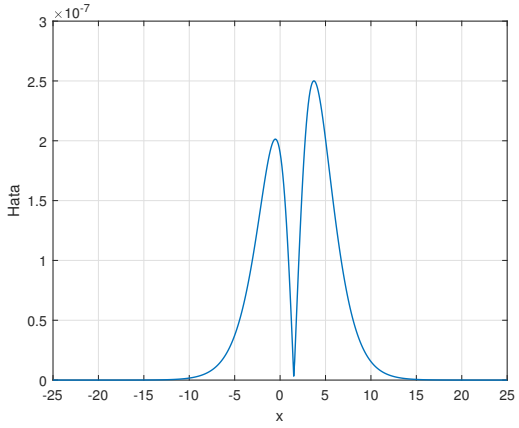


QT^4 B-spline kollokasyon QTT^4 B-spline kollokasyon

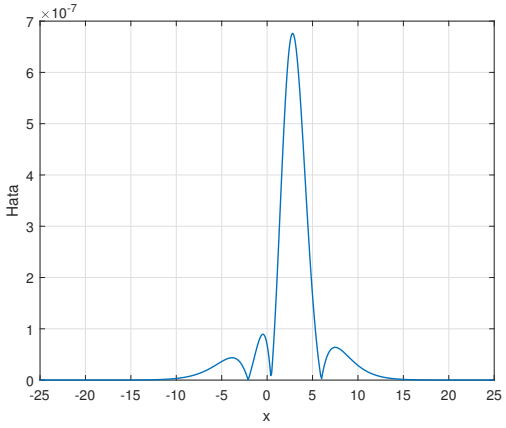
Şekil 5.8 Test-1 için $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ seçimiyle $t = 5$ anındaki hata grafikleri



Şekil 5.9 Test 2'nin QT^4 ve QTT^4 B-spline ile nümerik similasyonu

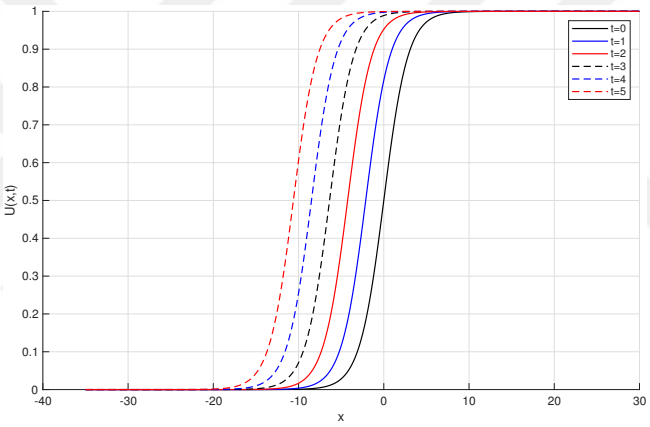


QT^4 B-spline kollokasyon

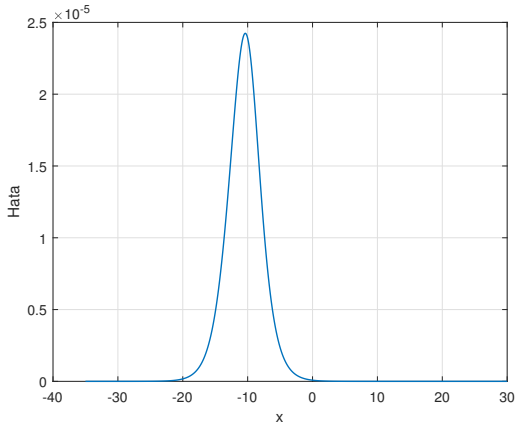


QTT^4 B-spline kollokasyon

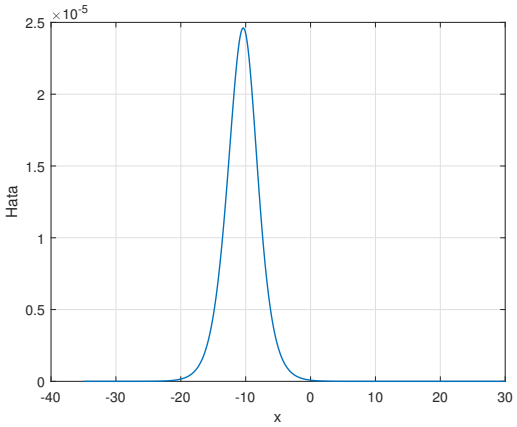
Şekil 5.10 Test-2 için $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ seçimiyle $t = 5$ anındaki hata grafikleri



Şekil 5.11 Test 3'ün QT^4 ve QTT^4 B-spline ile nümerik similasyonu



QT^4 B-spline kollokasyon



QTT^4 B-spline kollokasyon

Şekil 5.12 Test-3 için $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ seçimiyle $t = 5$ anındaki hata grafikleri

5.5 FHN Denkleminin Kuintik Trigonometrik B-Spline ve Kuintik Trigonomerik Gerilim B-Spline Kollokasyon Yöntemleri ile Sayısal Çözümü

FHN denklemi, QT^5 ve QTT^5 B-spline tabanlarıyla kollokasyon yöntemi uygulanarak yaklaşık olarak çözülmüştür. $U(x,t)$ fonksiyonun yaklaşık çözümü $U_N(x,t)$ ile ifade edilmiştir. (4.18) ve (4.19)'da verilen trigonometrik B-spline $Q_m^5(x)$ tabanları kullanılarak $[x_0, x_N]$ aralığında tanımlı bu fonksiyon için aşağıdaki yaklaşım kurulmuştur:

$$U(x,t) \approx U_N(x,t) = \sum_{m=-2}^{N+1} Q_m^5(x)\delta_m(t) \tag{5.45}$$

Burada $Q_m^5(x)$ hem kuintik trigonometrik hem de kuintik trigonometrik gerilim B-spline fonksiyonları, δ_m katsayıları ise zamana bağlı değişkenleri temsil etmektedir. $U_N(x,t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümü açık olarak:

$$\begin{aligned} U_N(x,t) \approx\ & Q_{m-2}^5(x)\delta_{m-2}(t) + Q_{m-1}^5(x)\delta_{m-1}(t) \\ & + Q_m^5(x)\delta_m(t) + Q_{m+1}^5(x)\delta_{m+1}(t) + Q_{m+2}^5(x)\delta_{m+2}(t) \end{aligned} \tag{5.46}$$

şeklinde ifade edilir. Kollokasyon yöntemi uygulanırken, $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında yer alan her bir x_m düğüm noktası için $U_N(x,t)$ yaklaşık çözümü, bu ardışık altı farklı taban fonksiyonunun kullanımıyla açık biçimde ifade edilir. Böylelikle, $[x_0, x_N]$ çözüm aralığında tanımlı yaklaşık çözümler, ilgili $Q_m^5(x)$ B-spline fonksiyonlarının oluşturduğu taban üzerinden elde edilir. $Q_m^5(x)$ B-spline fonksiyonları kullanılarak x_m düğüm noktasındaki $U_N(x,t)$, birinci ve ikinci türevlerine yapılan yaklaşımlar:

$$\begin{aligned} U_N(x,t) &= \sum_{m=-2}^{N} Q_m^5(x)\delta_m(t) \\ \frac{\partial}{\partial x}U_N(x,t) &= \sum_{m=-2}^{N} \frac{\partial(Q_m^5(x))}{\partial x}\delta_m(t) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}U_N(x,t) &= \sum_{m=-2}^{N} \frac{\partial^2(Q_m^5(x))}{\partial x^2}\delta_m(t) \end{aligned} \tag{5.47}$$

olarak yazılır. İlerleyen aşamalarda QT^5 ve QTT^5 fonksiyonlarının katsayıları farklı olduğu için bu iki durum ayrı ele alınacaktır.

5.5.1 Kuintik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemi

QT^5 B-spline fonksiyonun katsayıları Çizelge 4.5'te verilmiştir. Bu katsayılar kullanılarak her düğüm noktası için U fonksiyonun, birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü türevleri:

$$\begin{aligned}
&U(x_m,t) = \alpha_{13}\delta_{m-2}(t) + \alpha_{14}\delta_{m-1}(t) + \alpha_{15}\delta_m(t) + \alpha_{14}\delta_{m+1}(t) + \alpha_{13}\delta_{m+2}(t),\\
&U'(x_m,t) = \alpha_{16}\delta_{m-2}(t) + \alpha_{17}\delta_{m-1}(t) - \alpha_{17}\delta_{m+1}(t) - \alpha_{16}\delta_{m+2}(t),\\
&U''(x_m,t) = \alpha_{18}\delta_{m-2}(t) + \alpha_{19}\delta_{m-1}(t) + \alpha_{20}\delta_m(t) + \alpha_{19}\delta_{m+1}(t) + \alpha_{18}\delta_{m+2}(t),\\
&U'''(x_m,t) = \alpha_{21}\delta_{m-2}(t) + \alpha_{22}\delta_{m-1}(t) - \alpha_{22}\delta_{m+1}(t) - \alpha_{21}\delta_{m+2}(t),\\
&U''''(x_m,t) = \alpha_{23}\delta_{m-2}(t) + \alpha_{24}\delta_{m-1}(t) + \alpha_{25}\delta_m(t) + \alpha_{24}\delta_{m+1}(t) + \alpha_{23}\delta_{m+2}(t).
\end{aligned} \tag{5.48}$$

elde edilir. Kollokasyon yöntemi, diferansiyel denklem çözümünde kullanılan yaklaşım fonksiyonunun, belirlenen düğüm noktalarında yerine yazılması ile sayısal sonuçlar elde edilir. Lineerleştirilmiş FHN (5.14) denklemine eşitlik (5.48) yaklaşık çözümleri yerleştirilerek aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned}
&\eta_1\delta_{m-2}^{n+1} + \eta_2\delta_{m-1}^{n+1} + \eta_3\delta_m^{n+1} + \eta_2\delta_{m+1}^{n+1} + \eta_1\delta_{m+2}^{n+1}\\
&\qquad = \eta_4\delta_{m-2}^{n} + \eta_5\delta_{m-1}^{n} + \eta_6\delta_m^{n} + \eta_5\delta_{m+1}^{n} + \eta_4\delta_{m+2}^{n}
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Burada η_k, $k = 1, ..., 6$ katsayıları

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= (1 + 3\tfrac{\Delta t}{2}K_5^2 - (p+1)\Delta t K_5 + p\tfrac{\Delta t}{2})\alpha_{13} - \tfrac{\Delta t}{2}\alpha_{18},\\
\eta_2 &= (1 + 3\tfrac{\Delta t}{2}K_5^2 - (p+1)\Delta t K_5 + p\tfrac{\Delta t}{2})\alpha_{14} - \tfrac{\Delta t}{2}\alpha_{19},\\
\eta_3 &= (1 + 3\tfrac{\Delta t}{2}K_5^2 - (p+1)\Delta t K_5 + p\tfrac{\Delta t}{2})\alpha_{15} - \tfrac{\Delta t}{2}\alpha_{20},\\
\eta_4 &= (1 + \tfrac{\Delta t}{2}K_5^2 - p\tfrac{\Delta t}{2})\alpha_{13} + \tfrac{\Delta t}{2}\alpha_{18},\\
\eta_5 &= (1 + \tfrac{\Delta t}{2}K_5^2 - p\tfrac{\Delta t}{2})\alpha_{14} + \tfrac{\Delta t}{2}\alpha_{19}\\
\eta_6 &= (1 + \tfrac{\Delta t}{2}K_5^2 - p\tfrac{\Delta t}{2})\alpha_{15} + \tfrac{\Delta t}{2}\alpha_{20}
\end{aligned} \tag{5.50}$$

olarak ifade edilir ve $(K_5)_m$ ise

$$(K_5)_m = \alpha_{13}\delta_{m-2}(t) + \alpha_{14}\delta_{m-1}(t) + \alpha_{15}\delta_m(t) + \alpha_{14}\delta_{m+1}(t) + \alpha_{13}\delta_{m+2}(t). \tag{5.51}$$

Eşitlik (5.49) için matris formunda gösterimi

$$A_5 X^{n+1} = B_5 X^n \tag{5.52}$$

şeklinde olur. Matris gösterimi:

$$\begin{bmatrix}
\eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_2 & \eta_1 & & & \\
 & \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_2 & \eta_1 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & & & & & \\
 & & & \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_2 & \eta_1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \delta_{-2}^{n+1} \\ \delta_{-1}^{n+1} \\ \vdots \\ \\ \delta_{N+1}^{n+1} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\eta_4 & \eta_5 & \eta_6 & \eta_5 & \eta_4 & & & \\
 & \eta_4 & \eta_5 & \eta_6 & \eta_5 & \eta_4 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & & & & & \\
 & & & \eta_4 & \eta_5 & \eta_6 & \eta_5 & \eta_4
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \delta_{-2}^{n} \\ \delta_{-1}^{n} \\ \vdots \\ \\ \delta_{N+1}^{n} \end{bmatrix} \tag{5.53}$$

şeklinde beş bant matris olarak gösterilir. Her satırda sıfırdan farklı beş eleman bulunur. Sistem başlangıçta $(N+5)$ bilinmeyen ve $(N+1)$ denklemden oluştuğu için bilinmeyen sayısının denklem sayısından fazla olması nedeniyle doğrudan çözülememektedir. Sistemin çözülebilir hale gelmesi için sol taraftan δ_{-2} ve δ_{-1} sağ taraftan δ_N ve δ_{N+1} bilinmeyenleri elimine edilmelidir. Böylece $(N+1)$ bilinmeyen ve $(N+1)$ denklemden oluşan kare bir matris elde edilir. δ^0 başlangıç koşulu kullanılarak δ^{n+1} parametrelerinin hesaplanması gerekir ve bu sayede (5.52) denklem sisteminin çözümü kolaylıkla elde edilebilir.

5.5.2 Kuintik trigonometrik gerilim B-spline kollokasyon yöntemi

QTT^5 B-spline fonksiyonun Çizelge 4.6'da verilen katsayıları kullanılarak her düğüm noktası için U fonksiyonun kendisi, birinci ve ikinci türevleri:

$$\begin{aligned} U(x_m,t_n) &= \beta_{15}\delta_{m-2}+\beta_{16}\delta_{m-1}+\beta_{17}\delta_m+\beta_{16}\delta_{m+1}+\beta_{15}\delta_{m+2},\\ U_x(x_m,t_n) &= \beta_{18}\delta_{m-2}+\beta_{19}\delta_{m-1}-\beta_{19}\delta_{m+1}-\beta_{18}\delta_{m+2},\\ U_{xx}(x_m,t_n) &= \beta_{20}\delta_{m-2}+\beta_{21}\delta_{m-1}+\beta_{22}\delta_m+\beta_{21}\delta_{m+1}+\beta_{20}\delta_{m+2}, \end{aligned} \tag{5.54}$$

elde edilir. Lineer hale getirilen (5.14) FHN denklemi, (5.54) ile verilen yaklaşık çözümler yerleştirildiğinde aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} \eta_1\delta_{m-2}^{n+1}+\eta_2\delta_{m-1}^{n+1}+\eta_3\delta_m^{n+1}+\eta_2\delta_{m+1}^{n+1}+\eta_1\delta_{m+2}^{n+1}&\\ =\eta_4\delta_{m-2}^{n}+\eta_5\delta_{m-1}^{n}+\eta_6\delta_m^{n}+\eta_5\delta_{m+1}^{n}+\eta_4\delta_{m+2}^{n}& \end{aligned} \tag{5.55}$$

Burada η_k, $k=1,...,6$ katsayıları

$$\begin{aligned} \eta_1 &= (1+3\tfrac{\Delta t}{2}K_6^2-(p+1)\Delta tK_6+p\tfrac{\Delta t}{2})\beta_{15}-\tfrac{\Delta t}{2}\beta_{20},\\ \eta_2 &= (1+3\tfrac{\Delta t}{2}K_6^2-(p+1)\Delta tK_6+p\tfrac{\Delta t}{2})\beta_{16}-\tfrac{\Delta t}{2}\beta_{21},\\ \eta_3 &= (1+3\tfrac{\Delta t}{2}K_6^2-(p+1)\Delta tK_6+p\tfrac{\Delta t}{2})\beta_{17}-\tfrac{\Delta t}{2}\beta_{22},\\ \eta_4 &= (1+\tfrac{\Delta t}{2}K_6^2-p\tfrac{\Delta t}{2})\beta_{15}+\tfrac{\Delta t}{2}\beta_{20},\\ \eta_5 &= (1+\tfrac{\Delta t}{2}K_6^2-p\tfrac{\Delta t}{2})\beta_{16}+\tfrac{\Delta t}{2}\beta_{21}\\ \eta_6 &= (1+\tfrac{\Delta t}{2}K_6^2-p\tfrac{\Delta t}{2})\beta_{17}+\tfrac{\Delta t}{2}\beta_{22} \end{aligned} \tag{5.56}$$

olarak ifade edilir ve $(K_6)_m$ ise

$$(K_6)_m=\beta_{20}\delta_{m-2}+\beta_{21}\delta_{m-1}+\beta_{22}\delta_m+\beta_{21}\delta_{m+1}+\beta_{20}\delta_{m+2}.$$

Eşitlik (5.55) için matris formunda gösterimi:

$$C_5X^{n+1}=D_5X^n \tag{5.57}$$

şeklinde olur. Matris gösterimi:

$$\begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_2 & \eta_1 & & & \\ & \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_2 & \eta_1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & & & \\ & & & \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_2 & \eta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-2}^{n+1} \\ \delta_{-1}^{n+1} \\ \vdots \\ \\ \delta_{N+1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_4 & \eta_5 & \eta_6 & \eta_5 & \eta_4 & & & \\ & \eta_4 & \eta_5 & \eta_6 & \eta_5 & \eta_4 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & & & \\ & & & \eta_4 & \eta_5 & \eta_6 & \eta_5 & \eta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-2}^{n} \\ \delta_{-1}^{n} \\ \vdots \\ \\ \delta_{N+1}^{n} \end{bmatrix} \tag{5.58}$$

şeklindedir. C_5 ve D_5 ile gösterilen matrisler, her satırında beş eleman içeren bant yapısındadır. Elde edilen sistemde $(N+5)$ bilinmeyen ve $(N+1)$ denklem bulunur. Matris sistemini çözebilmek için sol taraftan δ_{-2} ve δ_{-1} sağ taraftan δ_N ve δ_{N+1} bilinmeyenleri elimine edilerek sistem $(N+1)\times(N+1)$ boyuta dönüştürülür. δ^{n+1} parametrelerinin hesaplanabilmesi için öncelikle başlangıç koşulları kullanarak δ^0 parametrelerinin belirlenmesi gerekir ve bu sayede (5.57) denklem sisteminin çözümü kolaylıkla elde edilebilir.

5.5.3 Nümerik sonuçlar

Bu bölümde QT^5 ve QTT^5 B-spline kollokasyon yöntemleri kullanılarak seçilen test problemlerinin sayısal çözümleri elde edilmiştir. Yöntemin performansını değerlendirmek üzere hata normları hesaplanmıştır. Sonuçlar çizelgeler ve şekiller eşliğinde birbiriyle karşılaştırılarak verilmiştir.

Çizelge 5.7 Test-1 için QT^5 ve QTT^5 B-Spline $-15 \leq x \leq 30$ ve $t = 5$ anında hata normları

h	Δt	QT^5	$QTT^5(\tau=\sqrt{\lambda})$	$QTT^5(\tau=\frac{\sqrt{\lambda}}{2})$	$QTT^5(\tau=\frac{\sqrt{\lambda}}{5})$	$QTT^5(\tau=\frac{\sqrt{\lambda}}{10})$
$0,1$	$0,01$	$1,4102\times10^{-4}$	$1,3941\times10^{-4}$	$1,3930\times10^{-4}$	$1,3927\times10^{-4}$	$1,3927\times10^{-4}$
	$0,05$	$7,3392\times10^{-4}$	$7,3229\times10^{-4}$	$7,3220\times10^{-4}$	$7,3217\times10^{-4}$	$7,3217\times10^{-4}$
$0,2$	$0,01$	$1,6747\times10^{-4}$	$1,4046\times10^{-4}$	$1,3957\times10^{-4}$	$1,3932\times10^{-4}$	$1,3928\times10^{-4}$
	$0,05$	$7,6011\times10^{-4}$	$7,3286\times10^{-4}$	$7,3208\times10^{-4}$	$7,3187\times10^{-4}$	$7,3184\times10^{-4}$
$0,5$	$0,01$	$1,2820\times10^{-3}$	$1,5857\times10^{-4}$	$1,4429\times10^{-4}$	$1,4043\times10^{-4}$	$1,3989\times10^{-4}$
	$0,05$	$1,8729\times10^{-3}$	$7,4832\times10^{-4}$	$7,3613\times10^{-4}$	$7,3283\times10^{-4}$	$7,3237\times10^{-4}$

Çizelge 5.7'de Test-1 için QT^5 ve QTT^5 B-spline kollokasyon yöntemleriyle hesaplanan L_∞ hata normları verilmiştir. Bu değerler, farklı h, Δt ve τ parametreleri için karşılaştırılmaktadır. İki yöntemin sonuçları birbirine yakın olmasına rağmen QTT^5 yönteminin daha başarılı sonuçlar verdiği tespit edilmiştir. Bu test probleminde, gerilim parametresi ile hata normu arasında doğru orantılı bir değişim gözlemlenmiş olup, aradaki farklılıkların oldukça küçük olduğu

saptanmıştır. Test-1 için yöntemin nümerik simülasyonu Şekil 5.13'te sunulmuştur. $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ seçimiyle $t = 5$ anındaki hata normu grafikleri ise Şekil 5.14'de verilmiştir.

Çizelge 5.8 Test-2 için QT^5 ve QTT^5 B-Spline $-25 \leq x \leq 25$ ve $t = 5$ anında hata normları

h	Δt	QT^5	$QTT^5(\tau = \sqrt{\lambda})$	$QTT^5(\tau = \frac{\sqrt{\lambda}}{2})$	$QTT^5(\tau = \frac{\sqrt{\lambda}}{5})$	$QTT^5(\tau = \frac{\sqrt{\lambda}}{10})$
$0,1$	$0,01$	$2,1428 \times 10^{-6}$	$3,2137 \times 10^{-7}$	$1,8460 \times 10^{-7}$	$1,6762 \times 10^{-7}$	$1,6518 \times 10^{-7}$
	$0,05$	$4,1713 \times 10^{-6}$	$4,2318 \times 10^{-6}$	$4,1713 \times 10^{-6}$	$4,1544 \times 10^{-6}$	$4,1520 \times 10^{-6}$
$0,2$	$0,01$	$3,3647 \times 10^{-5}$	$2,0147 \times 10^{-6}$	$4,8404 \times 10^{-7}$	$1,6153 \times 10^{-7}$	$1,4132 \times 10^{-7}$
	$0,05$	$3,5096 \times 10^{-5}$	$4,7694 \times 10^{-6}$	$4,2782 \times 10^{-6}$	$4,1426 \times 10^{-6}$	$4,1233 \times 10^{-6}$
$0,5$	$0,01$	$1,3709 \times 10^{-3}$	$2,9697 \times 10^{-5}$	$4,5799 \times 10^{-6}$	$3,0715 \times 10^{-6}$	$3,9882 \times 10^{-6}$
	$0,05$	$1,3718 \times 10^{-3}$	$3,1447 \times 10^{-5}$	$6,6715 \times 10^{-6}$	$3,4675 \times 10^{-6}$	$3,2732 \times 10^{-6}$

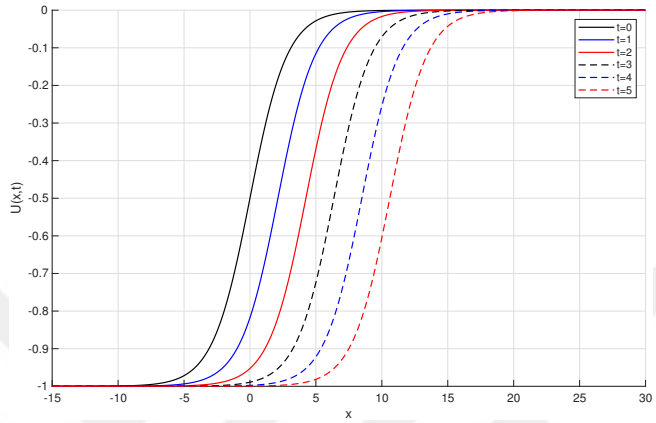
Çizelge 5.8'de Test-2 için QT^5 ve QTT^5 B-spline kollokasyon yöntemleriyle hesaplanan L_∞ hata normları verilmiştir. Bu değerler, farklı h, Δt ve τ parametreleri için karşılaştırılmaktadır. İki yöntem karşılaştırıldığında, QTT^5 sonuçlarının daha başarılı olduğu açıkça görülmektedir. Gerilim parametresindeki değişim incelendiğinde, $\tau = \sqrt{\lambda}$ ile $\tau = \frac{\sqrt{\lambda}}{2}$ arasında belirgin bir fark bulunurken, daha küçük parametre değerlerinde iyileşme devam etse de sonuçların birbirine giderek yaklaştığı tespit edilmiştir. Test-2 için yöntemin nümerik simülasyonu Şekil 5.15'te sunulmuştur. $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ seçimiyle $t = 5$ anındaki hata normu grafikleri ise Şekil 5.16'da verilmiştir.

Çizelge 5.9 Test-3 için QT^5 ve QTT^5 B-Spline $-35 \leq x \leq 30$ ve $t = 5$ anında hata normları

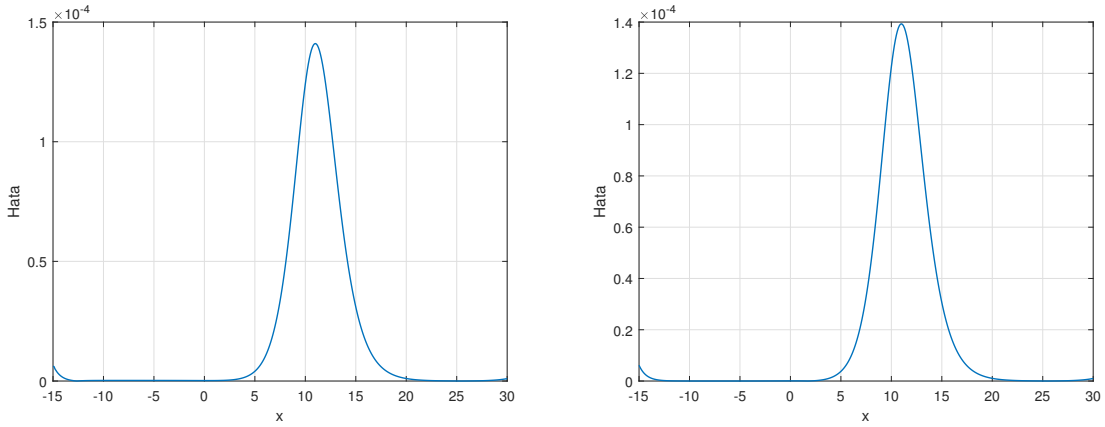
h	Δt	QT^5	$QTT^5(\tau = \sqrt{\lambda})$	$QTT^5(\tau = \frac{\sqrt{\lambda}}{2})$	$QTT^5(\tau = \frac{\sqrt{\lambda}}{5})$	$QTT^5(\tau = \frac{\sqrt{\lambda}}{10})$
$0,1$	$0,01$	$2,6716 \times 10^{-5}$	$2,5102 \times 10^{-5}$	$2,5011 \times 10^{-5}$	$2,4985 \times 10^{-5}$	$2,4982 \times 10^{-5}$
	$0,05$	$6,2458 \times 10^{-4}$	$6,2296 \times 10^{-4}$	$6,2287 \times 10^{-4}$	$6,2285 \times 10^{-4}$	$6,2284 \times 10^{-4}$
$0,2$	$0,01$	$5,3136 \times 10^{-5}$	$2,5959 \times 10^{-5}$	$2,5219 \times 10^{-5}$	$2,5015 \times 10^{-5}$	$2,4986 \times 10^{-5}$
	$0,05$	$6,5077 \times 10^{-4}$	$6,2382 \times 10^{-4}$	$6,2308 \times 10^{-4}$	$6,2288 \times 10^{-4}$	$6,2285 \times 10^{-4}$
$0,5$	$0,01$	$1,1668 \times 10^{-3}$	$4,7349 \times 10^{-5}$	$2,9081 \times 10^{-5}$	$2,5617 \times 10^{-5}$	$2,5151 \times 10^{-5}$
	$0,05$	$1,7627 \times 10^{-3}$	$6,3830 \times 10^{-4}$	$6,2611 \times 10^{-4}$	$6,2282 \times 10^{-4}$	$6,2235 \times 10^{-4}$

Çizelge 5.9'da Test-3 için QT^5 ve QTT^5 B-spline kollokasyon yöntemleriyle hesaplanan L_∞ hata normları verilmiştir. Bu değerler, farklı h, Δt ve τ parametreleri için karşılaştırılmaktadır. $h = 0.5$ değerinde gözlemlenen iyileşme

haricinde, iki yöntemin hata normları arasında belirgin bir farklılık bulunmamaktadır. Ancak aradaki farklar küçük olsa da gerilim parametresi azaldıkça hata normunun da düştüğü tespit edilmiştir. Test-3 için yöntemin nümerik simülasyonu Şekil 5.17'de sunulmuştur. $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ seçimiyle $t = 5$ anındaki hata normu grafikleri ise Şekil 5.18'de verilmiştir.

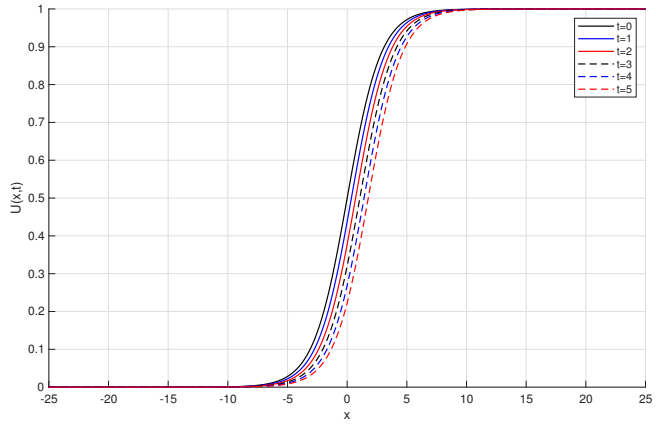


Şekil 5.13 Test 1'in QT^5 ve QTT^5 B-spline ile nümerik similasyonu

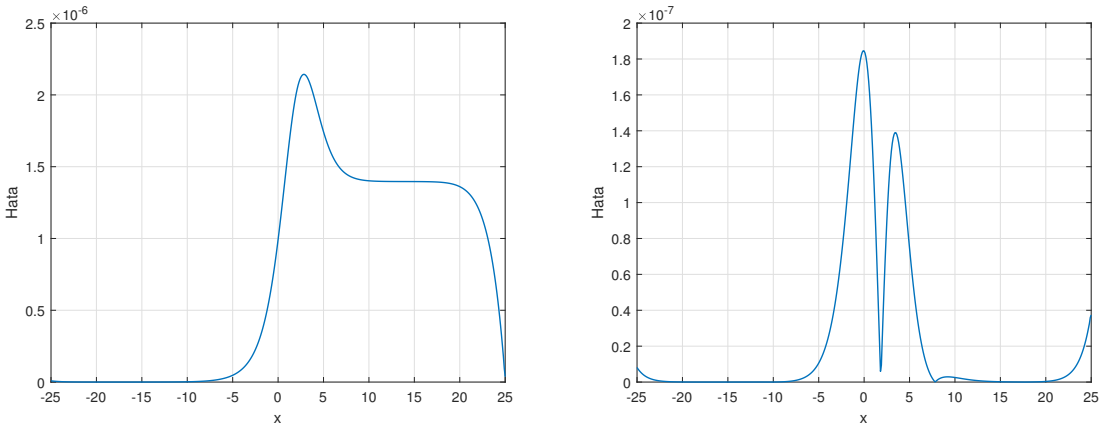


QT^5 B-spline kollokasyon QTT^5 B-spline kollokasyon

Şekil 5.14 Test-1 için $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ seçimiyle $t = 5$ anındaki hata grafikleri

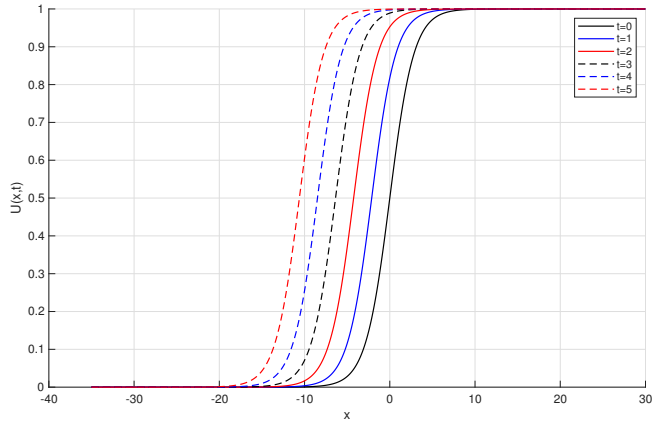


Şekil 5.15 Test 2'nin QT^5 ve QTT^5 B-spline ile nümerik similasyonu

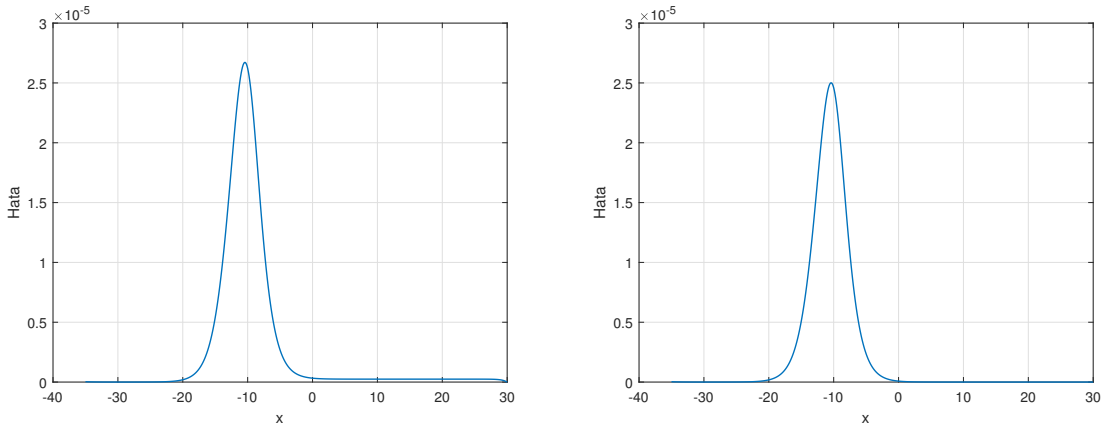


QT^5 B-spline kollokasyon QTT^5 B-spline kollokasyon

Şekil 5.16 Test-2 için $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ seçimiyle $t = 5$ anındaki hata grafikleri



Şekil 5.17 Test 3'ün QT^5 ve QTT^5 B-spline ile nümerik similasyonu



QT^5 B-spline kollokasyon

QTT^5 B-spline kollokasyon

Şekil 5.18 Test-3 için $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ seçimiyle $t = 5$ anındaki hata grafikleri

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında FitzHugh–Nagumo denkleminin sayısal çözümleri için trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemi önerilmiştir. Çözüm sürecinde trigonometrik kübik, kuartik, kuintik ve gerilim B-spline temel fonksiyonları ayrı ayrı uygulanmıştır. Her B-spline fonksiyon üç farklı test problemi ile çözülmüştür. Test problemlerinde her B-spline için aynı h ve Δt değerleri kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar L_∞ hata normu ile değerlendirilmiş çizelgeler olarak sunulmuştur. Böylece hem B-spline derecesinin hem de gerilim (tension) parametresinin çözüm doğruluğu ve çözüm davranışı üzerindeki etkisi karşılaştırmalı olarak değerlendirilmiştir. Üç test problemi için aynı h ve Δt değerlerindeki hata normlarının grafikleri verilmiştir.

Elde edilen sonuçlar, trigonometrik B-spline kolokasyon yaklaşımının FHN denkleminin çözümünde etkin ve güvenilir sonuçlar üretebildiğini göstermektedir. Test-1 ve Test-3 sonuçları incelendiğinde, kübik ve kuartik B-spline çözümleri arasında belirgin bir iyileşme olduğu görülmüştür. Kuartik ve kuintik B-spline çözümleri arasında ise kuartik B-spline çözümler için bazı noktalarda belirgin iyileşmeler gözlemlense de genel olarak sonuçların benzer olduğu görülmüştür. Bu test problemleri için kuartik B-spline yaklaşımı, kuintik B-spline ile benzer sonuçlar vermesine karşın işlem pratikliği ve hesaplama maliyeti bakımından daha avantajlı görünmektedir. Benzer bir durum trigonometrik gerilim B-spline için de saptanmıştır.

Test-2 sonuçları değerlendirildiğinde, trigonometrik gerilim B-spline kullanımı durumunda beklendiği üzere spline derecesi arttıkça sonuçların iyileştiği görülmüştür. Bununla birlikte trigonometrik B-spline kullanıldığında, diğer test problemlerinde olduğu gibi kuartik ve kuintik B-spline çözümlerin benzer olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca kuartik B-spline çözümlerin kuintik B-spline çözümlere göre kısmen daha iyi çözümler ürettiği gözlemlenmiştir. Dolayısıyla, bu test problemi için trigonometrik B-spline kullanılacaksa kuartik B-spline çözümün, trigonometrik gerilim B-spline tercih edilecekse kuintik B-spline çözümün hesaplama açısından daha verimli olacağı sonucuna varılmıştır.

Uygulanan farklı test problemleri için aynı koşullar altında gerilim parametresinin çözümler üzerindeki etkisi karşılaştırmalı olarak incelenmiştir.

Bulgular, kübik ve kuintik B-spline çözümler için $\frac{\sqrt{\lambda}}{10}$ gerilim parametresi seçiminin daha iyi sonuçlar verdiğini göstermektedir. Kuartik B-spline çözümler için ise genel olarak $\sqrt{\lambda}$ gerilim parametresi seçiminin daha başarılı sonuçlar ürettiği gözlemlenmiştir. Tüm çözüm yöntemleri için gerilim parametresinin kullanımı ile sonuçların iyileştirilebildiği tespit edilmiştir.

Trigonometrik ve trigonometrik gerilim B-spline kollokasyon yöntemleri, FHN denklemi ve benzer yapıdaki kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünde uygulanabilir bir alternatif yöntem olarak önerilmektedir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Abd-Elhameed, W. M., Al-Harbi, M. S., & Atta, A. G. (2024). New convolved Fibonacci collocation procedure for the Fitzhugh–Nagumo non-linear equation. *Nonlinear Engineering*, *13*(1). https://doi.org/10.1515/nleng-2022-0332

Abd-Elhameed, W. M., Alqubori, O. M., & Atta, A. G. (2024). A Collocation Procedure for Treating the Time-Fractional FitzHugh–Nagumo Differential Equation Using Shifted Lucas Polynomials. *Mathematics*, *12*(23), 3672. https://doi.org/10.3390/math12233672

Abd-Elhameed, W. M., Alqubori, O. M., & Atta, A. G. (2025). A collocation procedure for the numerical treatment of FitzHugh–Nagumo equation using a kind of Chebyshev polynomials. *AIMS Mathematics*, *10*(1), 1201–1223. https://doi.org/10.3934/math.2025057

Al-Juaifri, G. A., & Harfash, A. J. (2023). Finite element analysis of nonlinear reaction–diffusion system of Fitzhugh–Nagumo type with Robin boundary conditions. *Mathematics and Computers in Simulation*, *203*, 486–517. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2022.07.005

Crank, J., & Nicolson, P. (1947). A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, *43*(1), 50–67. https://doi.org/10.1017/s0305004100023197

Dag, I. (1994). *Studies of B-spline finite elements* [Doctoral dissertation, University of Wales, Bangor].

de Boor, C. (1978). *A practical guide to splines*. Springer.

Hamadneh, T., Hioual, A., Alsayyed, O., Al-Khassawneh, Y. A., Al-Husban, A., & Ouannas, A. (2023). The FitzHugh–Nagumo Model Described by Fractional Difference Equations: Stability and Numerical Simulation. *Axioms*, *12*(9), 806. https://doi.org/10.3390/axioms12090806

Inan, B., Osman, M. S., Ak, T., & Baleanu, D. (2019). Analytical and numerical solutions of mathematical biology models: The Newell-Whitehead-Segel and Allen-Cahn equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, *43*(5), 2588–2600. https://doi.org/10.1002/mma.6067

İnan, B., Ali, K. K., Saha, A., & Ak, T. (2020). Analytical and numerical solutions of the Fitzhugh–Nagumo equation and their multistability behavior. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, *37*(1), 7–23. https://doi.org/10.1002/num.22516

Karakoç, S. B. G. (2011). *Sonlu elemanlar yöntemi ile modifiye edilmiş eşit genişlikli dalga denklemlerinin sayısal çözümleri* [Doctoral dissertation, İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü].

Lapidus, L., & Pinder, G. F. (1982). *Numerical solution of partial differential equations in science and engineering*. John Wiley; Sons.

Mehta, A., Singh, G., & Ramos, H. (2023). Numerical solution of time dependent nonlinear partial differential equations using a novel block method coupled with compact finite difference schemes. *Computational and Applied Mathematics*, *42*(4). https://doi.org/10.1007/s40314-023-02345-3

Onarcan, A. T. (2020). *Reaksiyon-difüzyon denklem sistemlerinin çözümleri için trigonometrik B-spline kolokasyon algoritmaları* [Doctoral dissertation, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi].

Pathak, M., Bhatia, R., Joshi, P., & Mittal, R. C. (2024). A Numerical Study of Newell-Whitehead-Segel Type Equations Using Fourth Order Cubic B-spline Collocation Method. *Mathematics and Statistics*, *12*(3), 270–282. https://doi.org/10.13189/ms.2024.120307

Prenter, P. M. (1975). *Splines and variational methods*. Wiley.

Reddy, J. N. (1993). *An introduction to the finite element method*. McGraw-Hill Book Company.

Rufai, M. A., Kosti, A. A., Anastassi, Z. A., & Carpentieri, B. (2023). A New Two-Step Hybrid Block Method for the FitzHugh–Nagumo Model Equation. *Mathematics*, *12*(1), 51. https://doi.org/10.3390/math12010051

Schoenberg, I. J. (1946). Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part B. On the problem of osculatory interpolation. A second class of analytic approximation formulae. *Quarterly of Applied Mathematics*, *4*(2), 112–141. https://doi.org/10.1090/qam/16705

Smith, G. D. (1978). *Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods*. Oxford University Press.

Şahin, A. (2009). *Reaksiyon-difüzyon denklem sistemlerinin B-spline sonlu elemanlar yöntemi ile nümerik çözümleri* [Doctoral dissertation, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü].

Uma, D., Jafari, H., Raja Balachandar, S., Venkatesh, S. G., & Vaidyanathan, S. (2024). An approximate solution for stochastic Fitzhugh–Nagumo partial differential equations arising in neurobiology models. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, *48*(3), 2980–2998. https://doi.org/10.1002/mma.10471

Walz, G. (1997). Identities for trigonometric B-splines with an application to curve design. *BIT Numerical Mathematics*, *37*(1), 189–201. https://doi.org/10.1007/bf02510180

Wang, G., & Fang, M. (2008). Unified and extended form of three types of splines. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *216*(2), 498–508. https://doi.org/10.1016/j.cam.2007.05.031

Yıldırım, H. (2020). *Trigonometrik B-Spline Kollokasyon Sonlu Eleman Yöntemiyle Düzenli Uzun Dalga (RLW) Denkleminin Nümerik Çözümleri* [Master's thesis, Inönü University].

Zhang, X., Min, F., Dou, Y., & Xu, Y. (2023). Bifurcation analysis of a modified FitzHugh-Nagumo neuron with electric field. *Chaos, Solitons & Fractals*, *170*, 113415. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2023.113415