Burgers Denkleminin Yüksek Doğruluklu Sayısal Çözümü

Hacı Ahmet Bektaş

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Mayıs 2018

Higher Order Accurate Numerical Solution of Burgers' Equation

Hacı Ahmet Bektaş

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics-Computer

May 2018

Burgers Denkleminin Yüksek Doğruluklu Sayısal Çözümü

Hacı Ahmet Bektaş

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. Dursun Irk

Mayıs 2018

ONAY

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Hacı Ahmet Bektaş'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Burgers Denkleminin Yüksek Doğruluklu Sayısal Çözümü " başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman **:** Doç. Dr. Dursun Irk

İkinci Danışman **:** -

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Doç. Dr. Dursun Irk

Üye : Prof. Dr. İdiris Dağ

Üye : Prof. Dr. Bülent Saka

Üye : Prof. Dr. Özcan Gelişgen

Üye : Doç. Dr. Yılmaz Dereli

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Doç. Dr. Dursun Irk danışmanlığında hazırlamış olduğum "Burgers Denkleminin Yüksek Doğruluklu Sayısal Çözümü" başlıklı YÜKSEK LİSANS tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 17/05/2018

Hacı Ahmet Bektaş

İmza

ÖZET

Bu tezde, Burgers denklemi zaman ve konum parçalanması için yüksek mertebeden sonlu farklar metodu kullanılarak sayısal olarak çözülecektir.

İlk bölümde tezin amacı açıklanmıştır. Burgers denkleminin sayısal çözümü için yapılan çalışmalardan ikinci bölümde bahsedilmiştir. Bir sonraki bölümde sonlu farklar yaklaşımı, başlangıç ve sınır şartıyla birlikte verilen Burgers denklemini içeren bazı tanımlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde Burgers denklemi dört önerilen metot kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür. Önerilen metotların etkinliği ν küçük viskozite parametresi kullanılarak kontrol edilmiştir.

Son iki bölümde, önerilen yöntemler kıyaslanmış ve metotlar hakkında kısa bir tartışma yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sonlu farklar metodu, Burgers denklemi, viskozite parametresi

SUMMARY

In this thesis, the Burgers' equation will be solved numerically using higher accurate finite difference method for time-space discretization.

In the first chapters, the scope and purpose of the thesis is explained. Some earlier studies are mentioned about the numerical solution of the Burgers' equation in the second chapter. In the following chapter, some definitions including finite difference approximations, Burgers' equation together with initial and boundary conditions are given.

In the next chapters, the Burgers' equations are solved numerically by using the four proposed methods. The efficiency of the present methods is demonstrated for the small values of viscosity parameter ν for the test problem.

In the last two chapter, results are compared with that of propesed methods and a discussion about the methods is given.

Keywords: Finite difference methods, Burgers' equation, viscosity parameter.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarımın her aşamasında rehberlik eden, tüm desteği ve yardımları için değerli danışmanım Doç. Dr. Dursun IRK' a; eğitim hayatım boyunca maddi manevi desteklerini esirgemeyen aileme ve eşime destekleri için teşekkürlerimi sunarım.

Hacı Ahmet Bektaş

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET vi
SUMMARY vii
TEŞEKKÜR viii
İÇİNDEKİLER ix
ŞEKİLLER DİZİNİ xii
ÇİZELGELER DİZİNİ xiv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ xv
1. GİRİŞ VE AMAÇ 1
2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI 2
3. TEMEL KAVRAMLAR 4
3.1. Sonlu Farklar Yöntemi 4
3.2. Crank-Nicolson Yöntemi ve Yüksek Doğruluklu Yaklaşım 17
3.3. Burgers Denklemi ve Test Problemi 19
4. METOTLARIN UYGULANMASI 23
4.1. Zamana ve Konuma Göre 2. Mertebeden Metot (Metot 1) 23
4.2. Zamana Göre 2 ve Konuma Göre 4. Mertebeden Metot (Metot 2) 24
4.3. Zamana Göre 4 ve Konuma Göre 2. Mertebeden Metot (Metot 3) 26
4.4. Zamana Göre ve Konuma Göre 4. Mertebeden Metot (Metot 4) 29
4.5. Test Problemi 35
5. BULGULAR VE TARTIŞMA 54
6. SONUÇ VE ÖNERİLER 55
KAYNAKLAR DİZİNİ 56

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil **Sayfa**

3.1. $\nu = 0.1$ için $t = 1$ ve $t = 3$ anındaki tam çözümlerin grafikleri 21
3.2. $\nu = 0.05$ için $t = 1$ ve $t = 3$ anındaki tam çözümlerin grafikler 21
3.3. $\nu = 0.01$ için $t = 1$ ve $t = 3$ anındaki tam çözümlerin grafikler 21
3.4. $\nu = 0.005$ için $t = 1$ ve $t = 3$ anındaki tam çözümlerin grafikler 22
3.5. $\nu = 0.001$ için $t = 1$ ve $t = 3$ anındaki tam çözümlerin grafikler 22
3.6. $\nu = 0.0005$ için $t = 1$ ve $t = 3$ anındaki tam çözümlerin grafikler ı 22
4.1. $\nu = 0.1$ ve Metot 1 için $t = 3$ anındaki mutlak hata $(h = \Delta t = 0.002)$ 37
4.2: $\nu = 0.1$ ve Metot 2 için $t = 3$ anındaki mutlak hata $(h = \Delta t = 0.002)$ 37
4.3. $\nu = 0.1$ ve Metot 3 için $t = 3$ anındaki mutlak hata $(h = \Delta t = 0.002)$ 38
4.4. $\nu = 0.1$ ve Metot 4 için $t = 3$ anındaki mutlak hata $(h = \Delta t = 0.002)$ 38
4.5. $\nu = 0.05$ ve Metot 1 için $t = 3$ anındaki mutlak hata $(h = \Delta t = 0.002)$ 40
4.6. $\nu = 0.05$ ve Metot 2 için $t = 3$ anındaki mutlak hata $(h = \Delta t = 0.002)$ 40
4.7. $\nu = 0.05$ ve Metot 3 için $t = 3$ anındaki mutlak hata $(h = \Delta t = 0.002)$ 41
4.8. $\nu = 0.05$ ve Metot 4 için $t = 3$ anındaki mutlak hata $(h = \Delta t = 0.002)$ 41
4.9. $\nu = 0.01$ ve Metot 1 için $t = 3$ anındaki mutlak hata $(h = \Delta t = 0.002)$ 43
4.10. $\nu = 0.01$ ve Metot 2 için $t = 3$ anındaki mutlak hata $(h = \Delta t = 0.002)$ 43
4.11. $\nu = 0.01$ ve Metot 3 için $t = 3$ anındaki mutlak hata $(h = \Delta t = 0.002)$ 44
4.12. $\nu = 0.01$ ve Metot 4 için $t = 3$ anındaki mutlak hata $(h = \Delta t = 0.002)$ 44
4.13. $\nu = 0.005$ ve Metot 1 için $t = 3$ anındaki mutlak hata $(h = \Delta t = 0.002)$ 46
4.14. $\nu = 0.005$ ve Metot 2 için $t = 3$ anındaki mutlak hata $(h = \Delta t = 0.002)$ 46
4.15. $\nu = 0.005$ ve Metot 3 için $t = 3$ anındaki mutlak hata $(h = \Delta t = 0.002)$ 47
4.16. $\nu = 0.005$ ve Metot 4 için $t = 3$ anındaki mutlak hata $(h = \Delta t = 0.002)$ 47
4.17. $\nu = 0.001$ ve Metot 1 için $t = 3$ anındaki mutlak hata $(h = \Delta t = 0.002)$ 49
4.18. $\nu = 0.001$ ve Metot 2 için $t = 3$ anındaki mutlak hata $(h = \Delta t = 0.002)$ 49
4.19. $\nu = 0.001$ ve Metot 3 için $t = 3$ anındaki mutlak hata $(h = \Delta t = 0.002)$ 50

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

Şekil **Sayfa**

4.20. $\nu = 0.001$ ve Metot 4 için $t = 3$ anındaki mutlak hata $(h = \Delta t = 0.002)$ 50
4.21. $\nu = 0.0005$ ve Metot 1 için $t = 3$ anındaki mutlak hata $(h = \Delta t = 0.002)$ 52
4.22. $\nu = 0.0005$ ve Metot 2 için $t = 3$ anındaki mutlak hata $(h = \Delta t = 0.002)$ 52
4.23. $\nu = 0.0005$ ve Metot 3 için $t = 3$ anındaki mutlak hata $(h = \Delta t = 0.002)$ 53
4.24. $\nu = 0.0005$ ve Metot 4 için $t = 3$ anındaki mutlak hata $(h = \Delta t = 0.002)$ 53

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge **Sayfa**

4.1. $\nu = 0.1$ için hata normları ve yakınsama oranları 36
4.2. $\nu = 0.05$ için hata normları ve yakınsama oranları 39
4.3. $\nu = 0.01$ için hata normları ve yakınsama oranları 42
4.4. $\nu = 0.005$ için hata normları ve yakınsama oranları 45
4.5. $\nu = 0.001$ için hata normları ve yakınsama oranları 48
4.6. $\nu = 0.0005$ için hata normları ve yakınsama oranları 51

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
h	Konum adımı
Δt	Zaman adımı
u_m^n	$x = x_m$ noktasında ve $t = t_n$ zamanındaki tam çözüm
U_m^n	$x = x_m$ noktasında ve $t = t_n$ zamanındaki yaklaşık çözüm

Kısaltmalar	**Açıklama**
Metot 1	Zamana ve Konuma Göre 2. Mertebeden Metot
Metot 2	Zamana Göre 2 ve Konuma Göre 4. Mertebeden Metot
Metot 3	Zamana Göre 4 ve Konuma Göre 2. Mertebeden Metot
Metot 4	Zamana Göre ve Konuma Göre 4. Mertebeden Metot

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Bilim adamları ve mühendisler için en önemli konulardan birisi fiziksel olayların modellenmesidir. Doğadaki hemen hemen her olay cebirsel, diferensiyel veya integral denklemlerin ilgili alandaki uygulamaları ile tanımlanabilir. Kısmi diferensiyel denklemler ise uygulamalı matematik, finansal matematik, fizik, mühendislik ve matematiksel fizik bilimlerinde üzerinde çalışılan oldukça fazla problemin matematiksel analizinde kullanılmaktadır. Bu problemler, çoğunlukla başlangıç değer problemleri, sınır değer problemleri ya da başlangıç-sınır değer problemleri olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu tip denklemlerin büyük bölümü sadece belirli sınır ve başlangıç koşulları altında çözülebilmektedir. Bu sebeple de bu tip problemlerin çözümleri için birçok sayısal yöntemler geliştirilmiştir. Genellikle sayısal yöntemlerde zaman ve konum parçalanması yapılmakta ve önerilen yöntemlerin doğruluğuna göre de sonuçlar elde edilmektedir.

Bu çalışmada ikinci mertebeden lineer olmayan bir kısmi diferensiyel denklem olan Burgers denkleminin sayısal çözümü araştırılacaktır. Sayısal çözüm araştırılırken zaman parçalanması için Crank-Nicolson zaman ayrıştırması yerine doğruluğu daha yüksek olan bir yaklaşım kullanılacaktır. Konum parçalanması için ise farklı doğruluğa sahip sonlu fark yaklaşımları kullanılacaktır. Crank-Nicolson zaman ayrıştırması ikinci mertebeden bir doğruluğa sahiptir. Önerilen zaman ayrıştırması ise dördüncü mertebeden bir doğruluğa sahip olacaktır. Konum ayrıştırması için ise konuma göre türevlerin yerine ikinci ve dördüncü mertebeden konum ayrıştırmaları kullanılacaktır. Böylece

Metot 1: Zamana göre ikinci mertebeden, konuma göre ikinci mertebeden,

Metot 2: Zamana göre ikinci mertebeden, konuma göre dördüncü mertebeden,

Metot 3: Zamana göre dördüncü mertebeden, konuma göre ikinci mertebeden,

Metot 4: Zamana göre dördüncü mertebeden, konuma göre dördüncü mertebeden,

olmak üzere dört farklı metot önerilecektir. Bu sayede zaman ve konum parçalanması için yüksek doğruluklu yaklaşımlar yapılarak yüksek doğruluklu sonuçlar elde edilmeye çalışılacaktır.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

İlk olarak Bateman (1915) tarafından tanımlanan Burgers denklemi, Burgers tarafından denklem üzerinde yapılan çalışmalar sebebiyle Burgers denklemi olarak bilinmektedir (Burgers, 1948). Burgers denklemi difüzyon terimi ile lineer olmayan bir terim içeren en eski model denklemlerden biri olarak bilinmektedir. Navier-Stokes denklemi için de basit bir form olarak bilinmesi yanında bağımsız türbülans, gaz dinamiği, ısı aktarımı, elastisite, trafik akışı, şok dalga ve akustik yayılımı gibi birçok olayın modellenmesinde de karşımıza çıkmaktadır. Hopf (1950) ve Cole (1951) birbirlerinden bağımsız olarak Burgers denklemini bir dönüşümle lineer ısı denklemine dönüştürmüşler ve keyfi başlangıç koşulları için tam çözümünü araştırmışlardır. Burgers denkleminin bazı tam çözümleri sonsuz seriler içerdiğinden ve küçük viskozite değerlerinde seri çözümlerinin yakınsamasının yavaş olmasından dolayı pratik değildir. Bu sebeple birçok sayısal yöntem geliştirilmesinde model denklem olarak kullanılmıştır. Rubin ve Khosla 1976 yılında kübik spline kullanarak kolokasyon metoduyla Burgers denkleminin sayısal çözümünü Crank-Nicolson zaman ayrıştırması yaparak araştırmıştır (Rubin ve Khosla, 1976). Burgers denkleminin sayısal çözümü ağırlıklı rezidü metodunun kullanılmasıyla Varoğlu ve Finn tarafından incelenmiştir (Varoğlu ve Finn, 1980). Christie ve arkadaşları (1981), kuadratik şekil fonksiyonları kullanarak Burgers denkleminin sayısal çözümünü Petrov-Galerkin metoduyla elde etmişlerdir. Bir ve iki boyutlu Burger denkleminin sayısal çözümü üç, beş ve yedi noktalı sonlu farklar metoduyla ve lineer, kuadratik, kübik şekil fonksiyonları kullanılarak sonlu elemanlar metoduyla araştırılmış ve bulunan sonuçları birbirleriyle kıyaslamıştır(Fletcher, 1983). Iskandar ve Mohsen (1992) Burgers denklemini ikiye parçaladıktan sonra sonlu farklar metodu kullanarak denklemin sayısal çözümü üzerinde çalışmışlardır. Jain ve arkadaşları (1995), Burgers denklemini üçe parçaladıktan zamana göre türev için ileri fark yaklaşımını ve konum ayrıştırması için ise kübik spline fonksiyonlarını kullanmışlardır. Burgers denklemine Hopf-Cole dönüşümü yaparak denklemi lineer hale getirdikten sonra açık sonlu farklar yöntemini kullanarak denklemin yaklaşık çözümü Kutluay ve arkadaşları tarafından araştırılmıştır (Kutluay vd, 1999). Kuadratik B-spline en küçük kareler yöntemini kullanarak 2004 yılında Burgers denkleminin

sayısal çözümü (Kutluay vd., 2004) adlı çalışmada incelenmiştir. Dağ ve arkadaşları (2005a), Crank-Nicolson zaman ayrıştırmasını kullanarak Burgers denkleminin sayısal çözümünü kübik B-spline kolokasyon metoduyla araştırmışlardır. 2005 yılında Burgers denkleminin sayısal çözümü için kuadratik ve kübik B-spline kolokasyon metodunu kullanmışlardır (Dağ vd., 2005b). Saka ve Dağ tarafından 2007 yılında Burgers denkleminin sayısal çözümü için kuartik B-spline kolokasyon metodu önerilmiştir (Saka ve Dağ, 2007). 2009 yılında Zhu ve Wang kübik B-spline kuasi interpolasyon yöntemiyle Burgers denkleminin sayısal çözümü üzerinde araştırma yapmışlardır (Zhu ve Wang, 2009). Jiang ve Wang (2010), Burgers denkleminin sayısal çözümü için kübik B-spline kuasi interpolasyon ve kompakt sonlu farklar yöntemlerini önermişlerdir. Dağ ve arkadaşları (2011), kübik B-spline Taylor kolokasyon ve kuadratik B-spline Taylor Galerkin yöntemlerini kullanarak Burgers denkleminin sayısal çözümü üzerinde çalışmışlardır. 2012 yılında, Burgers denkleminin sayısal çözümü için modifiye edilmiş kübik B-spline kolokasyon metodu önerilmiştir (Mittal ve Jain,2012). Arora ve Singh (2013), Burgers denkleminin sayısal çözümü için modified kübik B-spline kuadratur metodunu önermişlerdir. Tamsir ve arkadaşları (2016), genişletilmiş modifiye edilmiş kübik B-spline kuadratur metodunu kullanarak Burgers denkleminin sayısal çözümünü araştırmışlardır.

3. TEMEL KAVRAMLAR

3.1 Sonlu Farklar Yöntemi

Sonlu farklar metodunun temeli, bir diferensiyel denklemin tanım aralığı, sonlu sayıda bölünme noktalarına ayrılarak, her bir bölünme noktasındaki türev değerleri yerine, sonlu fark yaklaşımlarının yazılması olarak özetlenebilir. Böylece diferensiyel denklem bir cebirsel denkleme dönüşür. Bir değişken içeren ifadeler için sonlu fark yaklaşımları, Taylor serisi yardımıyla elde edilir.

$[a,b]$ tanım aralığı için, N bir pozitif tamsayı, $h = \dfrac{b-a}{N}$ ve parçalanma noktaları

$$x_m = a + mh,\ m = 0, 1, \ldots, N$$

olarak verilsin. Bu durumda, $U(x)$ fonksiyonu ve türevleri tanım aralığı üzerinde sürekli olmak üzere, $U(x_m + h) = U_{m+1}$ ve $U(x_m - h) = U_{m-1}$ ifadelerinin x_m noktasındaki Taylor seri açılımları

$$U_{m+1} = U_m + h\frac{dU_m}{dx} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2U_m}{dx^2} + \frac{h^3}{3!}\frac{d^3U_m}{dx^3} + \frac{h^4}{4!}\frac{d^4U_m}{dx^4} + \ldots, \tag{3.1}$$

$$U_{m-1} = U_m + (-h)\frac{dU_m}{dx} + \frac{(-h)^2}{2!}\frac{d^2U_m}{dx^2} + \frac{(-h)^3}{3!}\frac{d^3U_m}{dx^3} + \frac{(-h)^4}{4!}\frac{d^4U_m}{dx^4} + \ldots \tag{3.2}$$

olarak bulunabilir. Sırasıyla, (3.1-3.2) eşitlikleri

$$\frac{dU_m}{dx} = \frac{U_{m+1} - U_m}{h} - \frac{h}{2!}\frac{d^2U_m}{dx^2} - \frac{h^2}{3!}\frac{d^3U_m}{dx^3} - \ldots, \tag{3.3}$$

$$\frac{dU_m}{dx} = \frac{U_m - U_{m-1}}{h} + \frac{h}{2!}\frac{d^2U_m}{dx^2} - \frac{h^2}{3!}\frac{d^3U_m}{dx^3} + \ldots \tag{3.4}$$

olarak yazılabileceğinden U ifadesinin x_m noktasındaki birinci türevi için sırasıyla ileri ve geri fark yaklaşımları olarak adlandırılan

$$\frac{dU_m}{dx} = \frac{U_{m+1} - U_m}{h} + \mathcal{O}(h), \tag{3.5}$$

$$\frac{dU_m}{dx} = \frac{U_m - U_{m-1}}{h} + \mathcal{O}(h) \tag{3.6}$$

formundaki yaklaşımlar elde edilebilir. Her iki yaklaşımda da görüldüğü gibi, seri belli bir yerden kesildiğinden dolayı hata oluşacaktır. Oluşan bu hatalar kesme hatası olarak adlandırılır ve serinin kesildiği yerden sonraki ilk terime göre değerlendirilerek $\mathcal{O}(.)$ ile

gösterilir. Bu yaklaşım $\mathcal{O}(h)$ hatasından dolayı birinci mertebeden doğruluğa sahiptir denir.

Birinci türev için ikinci mertebeden doğruluğa sahip yaklaşım elde etmek için (3.2) eşitliği, (3.1) eşitliğinden çıkarılır ve düzenlenirse

$$\frac{dU_m}{dx} = \frac{U_{m+1} - U_{m-1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \tag{3.7}$$

formunda birinci türev için merkezi fark yaklaşımı da bulunabilir. Ayrıca, (3.1) ve (3.2) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\frac{d^2U_m}{dx^2} = \frac{U_{m+1} - 2U_m + U_{m-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2), \tag{3.8}$$

formunda ikinci türev için ikinci mertebeden sonlu fark yaklaşımı da bulunabilir.

İkinci mertebeden daha yüksek doğruluğa sahip sonlu fark yaklaşımları da elde edilebilir. Daha yüksek mertebeden doğruluğa sahip sonlu fark yaklaşımlarını bulmak için $x = x_m$ noktası civarındaki

$$U_{m+5} = U_m + 5h\frac{dU_m}{dx} + \frac{(5h)^2}{2!}\frac{d^2U_m}{dx^2} + \frac{(5h)^3}{3!}\frac{d^3U_m}{dx^3} + \frac{(5h)^4}{4!}\frac{d^4U_m}{dx^4} + \ldots, \tag{3.9}$$

$$U_{m+4} = U_m + 4h\frac{dU_m}{dx} + \frac{(4h)^2}{2!}\frac{d^2U_m}{dx^2} + \frac{(4h)^3}{3!}\frac{d^3U_m}{dx^3} + \frac{(4h)^4}{4!}\frac{d^4U_m}{dx^4} + \ldots, \tag{3.10}$$

$$U_{m+3} = U_m + 3h\frac{dU_m}{dx} + \frac{(3h)^2}{2!}\frac{d^2U_m}{dx^2} + \frac{(3h)^3}{3!}\frac{d^3U_m}{dx^3} + \frac{(3h)^4}{4!}\frac{d^4U_m}{dx^4} + \ldots, \tag{3.11}$$

$$U_{m+2} = U_m + 2h\frac{dU_m}{dx} + \frac{(2h)^2}{2!}\frac{d^2U_m}{dx^2} + \frac{(2h)^3}{3!}\frac{d^3U_m}{dx^3} + \frac{(2h)^4}{4!}\frac{d^4U_m}{dx^4} + \ldots, \tag{3.12}$$

$$U_{m-2} = U_m + (-2h)\frac{dU_m}{dx} + \frac{(-2h)^2}{2!}\frac{d^2U_m}{dx^2} + \frac{(-2h)^3}{3!}\frac{d^3U_m}{dx^3} + \frac{(-2h)^4}{4!}\frac{d^4U_m}{dx^4} + \ldots, \tag{3.13}$$

$$U_{m-3} = U_m + (-3h)\frac{dU_m}{dx} + \frac{(-3h)^2}{2!}\frac{d^2U_m}{dx^2} + \frac{(-3h)^3}{3!}\frac{d^3U_m}{dx^3} + \frac{(-3h)^4}{4!}\frac{d^4U_m}{dx^4} + \ldots, \tag{3.14}$$

$$U_{m-4} = U_m + (-4h)\frac{dU_m}{dx} + \frac{(-4h)^2}{2!}\frac{d^2U_m}{dx^2} + \frac{(-4h)^3}{3!}\frac{d^3U_m}{dx^3} + \frac{(-4h)^4}{4!}\frac{d^4U_m}{dx^4} + \ldots, \tag{3.15}$$

$$U_{m-5} = U_m + (-5h)\frac{dU_m}{dx} + \frac{(-5h)^2}{2!}\frac{d^2U_m}{dx^2} + \frac{(-5h)^3}{3!}\frac{d^3U_m}{dx^3} + \frac{(-5h)^4}{4!}\frac{d^4U_m}{dx^4} + \ldots, \tag{3.16}$$

seri açılımlarından yararlanılabilir.

$\frac{dU_m}{dx}$ için 3 noktalı merkezi fark yaklaşımı kullanıldığında doğruluk 2 olmuştu. $\frac{dU_m}{dx}$ için 5 noktalı sonlu fark yaklaşımı kullanılmak istenirse yaklaşım

$$\frac{dU_m}{dx} = aU_{m-2} + bU_{m-1} + cU_m + dU_{m+1} + eU_{m+2} \tag{3.17}$$

formunda olacaktır. (3.17) eşitliğinin sağ tarafındaki U_{m-2}, U_{m-1}, U_{m+1} ve U_{m+2} terimlerinin yerine seri açılımları yazılır, düzenlenir ve eşitliğin sol tarafına eşitlenirse

$$\begin{aligned} a + b + c + d + e &= 0 \\ -2a - b + d + 2e &= \frac{1}{h} \\ 4a + b + d + 4e &= 0 \\ -8a - b + d + 8e &= 0 \\ 16a + b + d + 16e &= 0 \end{aligned}$$

olarak 5 denklem 5 bilinmeyenden oluşan bir denklem sistemi bulunur. Denklem sisteminin çözülmesi sonucunda

$$a = \frac{1}{12h}, b = -\frac{8}{12h}, c = 0, d = \frac{8}{12h}, e = -\frac{1}{12h}$$

elde edilir. Böylece birinci türev için 5 noktalı ve dördüncü mertebeden doğruluğa sahip sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{dU_m}{dx} = \frac{1}{12h}\left(U_{m-2} - 8U_{m-1} + 8U_{m+1} - U_{m+2}\right) + \mathcal{O}(h^4) \tag{3.18}$$

olarak bulunabilir.

$\frac{d^2U_m}{dx^2}$ için 3 noktalı merkezi fark yaklaşımı kullanıldığında doğruluk 2 olmuştu. $\frac{d^2U_m}{dx^2}$ için 5 noktalı sonlu fark yaklaşımı kullanılmak istenirse yaklaşım

$$\frac{d^2U_m}{dx^2} = aU_{m-2} + bU_{m-1} + cU_m + dU_{m+1} + eU_{m+2} \tag{3.19}$$

formunda olacaktır. (3.19) eşitliğinin sağ tarafındaki U_{m-2}, U_{m-1}, U_{m+1} ve U_{m+2} terimlerinin yerine seri açılımları yazılır, düzenlenir ve eşitliğin sol tarafına eşitlenirse

$$\begin{aligned} a+b+c+d+e &= 0 \\ -2a-b+d+2e &= 0 \\ 4a+b+d+4e &= \frac{2}{h^2} \\ -8a-b+d+8e &= 0 \\ 16a+b+d+16e &= 0 \end{aligned}$$

denklem sistemi bulunur. Elde edilen 5 bilinmeyen ve 5 denklemden oluşan sisteminin çözülmesi sonucunda

$$a=-\frac{1}{12h^2}, b=\frac{16}{12h^2}, c=\frac{1}{12h^2}, d=\frac{16}{12h^2}, e=-\frac{1}{12h^2}$$

elde edilir. Böylece ikinci türev için 5 noktalı ve dördüncü mertebeden doğruluğa sahip sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{d^2U_m}{dx^2}=\frac{1}{12h^2}\left(-U_{m-2}+16U_{m-1}-30U_m+16U_{m+1}-U_{m+2}\right)+\mathcal{O}(h^4) \tag{3.20}$$

olarak bulunabilir.

$\frac{d^3U_m}{dx^3}$ için 3 noktalı merkezi fark yaklaşımı bulunamaz. $\frac{d^3U_m}{dx^3}$ için 5 noktalı sonlu fark yaklaşımı kullanılmak istenirse yaklaşım

$$\frac{d^3U_m}{dx^3}=aU_{m-2}+bU_{m-1}+cU_m+dU_{m+1}+eU_{m+2} \tag{3.21}$$

formunda olacaktır. $\frac{d^3U_m}{dx^3}$ için 5 noktalı sonlu fark yaklaşımı eşitliğinin sağ tarafındaki U_{m-2}, U_{m-1}, U_{m+1} ve U_{m+2} terimlerinin yerine seri açılımları yazılır, düzenlenir ve eşitliğin sol tarafına eşitlenirse

$$\begin{aligned} a+b+c+d+e &= 0 \\ -2a-b+d+2e &= 0 \\ 4a+b+d+4e &= 0 \\ -8a-b+d+8e &= \frac{6}{h^3} \\ 16a+b+d+16e &= 0 \end{aligned}$$

denklem sistemi bulunur. 5 denklem ve 5 bilinmeyen olarak elde edilen denklem sisteminin çözülmesi sonucunda

$$a = \frac{1}{2h^3}, b = \frac{1}{h^3}, c = 0, d = \frac{1}{h^3}, e = \frac{1}{2h^3}$$

bulunur Böylece üçüncü türev için 5 noktalı ve ikinci mertebeden doğruluğa sahip sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{d^3U_m}{dx^3} = \frac{1}{2h^3}\left(U_{m-2} + 2U_{m-1} - 2U_{m+1} + U_{m+2}\right) + \mathcal{O}(h^2) \tag{3.22}$$

olarak elde edilir.

$\frac{d^4U_m}{dx^4}$ için $\frac{d^3U_m}{dx^3}$ yaklaşımında olduğu gibi 3 noktalı noktalı merkezi fark yaklaşımı bulunamaz. $\frac{d^4U_m}{dx^4}$ için 5 noktalı sonlu fark yaklaşımı kullanılmak istenirse yaklaşım

$$\frac{d^4U_m}{dx^4} = aU_{m-2} + bU_{m-1} + cU_m + dU_{m+1} + eU_{m+2} \tag{3.23}$$

formunda olacaktır. Eşitliğin sağ tarafındaki U_{m-2}, U_{m-1}, U_{m+1} ve U_{m+2} terimlerinin yerine seri açılımları yazılır, düzenlenir ve eşitliğin sol tarafına eşitlenirse

$$\begin{aligned}
a + b + c + d + e &= 0 \\
-2a - b + d + 2e &= 0 \\
4a + b + d + 4e &= 0 \\
-8a - b + d + 8e &= 0 \\
16a + b + d + 16e &= \frac{24}{h^4}
\end{aligned}$$

denklem sistemi bulunur. Ulaşılan denklem sistemi 5 bilinmeyen 5 denklemden oluşmaktadır. Denklem sisteminin a, b, c, d ve e bilinmeyenlerine göre çözülmesi sonucunda

$$a = \frac{1}{4h^4}, b = -\frac{1}{h^4}, c = \frac{3}{2h^4}, d = -\frac{1}{h^4}, e = \frac{1}{4h^4}$$

elde edilir. Böylece dördüncü türev için 5 noktalı ve ikinci mertebeden doğruluğa sahip sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{d^4U_m}{dx^4} = \frac{1}{4h^4}\left(U_{m-2} - 4U_{m-1} + 6U_m - 4U_{m+1} + U_{m+2}\right) + \mathcal{O}(h^2) \tag{3.24}$$

olarak bulunabilir.

$\frac{d^3U_m}{dx^3}$ için 7 noktalı sonlu fark yaklaşımı kullanılarak doğruluk yükseltilebilir. Bu durumda yaklaşım

$$\frac{d^3U_m}{dx^3} = aU_{m-3} + bU_{m-2} + cU_{m-1} + dU_m + eU_{m+1} + fU_{m+2} + gU_{m+3} \tag{3.25}$$

formunda olacaktır. 7 noktalı sonlu fark yaklaşımı eşitliğinin sağ tarafındaki U_{m-3}, U_{m-2}, U_{m-1}, U_{m+1} U_{m+2} ve U_{m+3} terimlerinin yerine seri açılımları yazılır, düzenlenir ve eşitliğin sol tarafına eşitlenirse

$$\begin{aligned}
a+b+c+d+e+f+g &= 0\\
3a+2b+c-e-2f-3g &= 0\\
9a+4b+c+e+9g+4f &= 0\\
27a+8b+c-27g-e-8f &= \frac{6}{h^3}\\
-81a-16b-e-16f-c-81g &= 0\\
243a+32b+c-e-32f-243g &= 0\\
-729a-64b-c-e-64f-729g &= 0
\end{aligned}$$

denklem sistemi bulunur. Elde edilen denklem sisteminin $a, b, c, d,\ e,\ f$ ve g bilinmeyenlerine göre çözülmesi sonucunda

$$a = \frac{1}{8h^3}, b = -\frac{1}{h^3}, c = \frac{13}{8h^3}, d = 0, e = -\frac{13}{8h^3}, f = \frac{1}{h^3}, g = -\frac{1}{8h^3}$$

elde edilir. Böylece üçüncü türev için 7 noktalı ve dördüncü mertebeden doğruluğa sahip sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{d^3U_m}{dx^3} = \frac{1}{8h^3}\left(U_{m-3} - 8U_{m-2} + 13U_{m-1} - 13U_{m+1} + 8U_{m+2} - U_{m+3}\right) + \mathcal{O}(h^4), \tag{3.26}$$

olarak bulunabilir.

$\frac{d^4U_m}{dx^4}$ için 7 noktalı sonlu fark yaklaşımı kullanılmak istenirse yaklaşım

$$\frac{d^4U_m}{dx^4} = aU_{m-3} + bU_{m-2} + cU_{m-1} + dU_m + eU_{m+1} + fU_{m+2} + gU_{m+2} \tag{3.27}$$

formunda olacaktır. (3.26) sonlu fark yaklaşımı eşitliğinin sağ tarafındaki U_{m-3}, U_{m-2}, U_{m-1}, U_{m+1} U_{m+2} ve U_{m+3} terimlerinin yerine seri açılımları yazılır, düzenlenir ve

eşitliğin sol tarafına eşitlenirse

$$\begin{aligned}
a+b+c+d+e+f+g &= 0\\
3a+2b+c-e-2f-3g) &= 0\\
9a+4b+c+e+9g+4f) &= 0\\
27a+8b+c-27g-e-8f) &= 0\\
-81a-16b-e-16f-c-81g) &= \frac{24}{h^4}\\
243a+32b+c-e-32f-243g &= 0\\
729a+64b+c+e+64f+729g &= 0
\end{aligned}$$

denklem sistemi bulunur. Denklem sisteminin $a, b, c, d,\ e,\ f$ ve g bilinmeyenlerine göre çözülmesi sonucunda

$$a=-\frac{1}{6h^4}, b=\frac{2}{h^4}, c=-\frac{13}{2h^4}, d=\frac{28}{3h^4}, e=-\frac{13}{2h^4}, f=\frac{2}{h^4}, g=-\frac{1}{6h^4}$$

elde edilir. Böylece dördüncü türev için de üçüncü türev gibi 7 noktalı ve dördüncü mertebeden doğruluğa sahip sonlu fark yaklaşımı

$$\begin{aligned}
\frac{d^4U_m}{dx^4} = \frac{1}{6h^4}\,(&-U_{m-3}+12U_{m-2}-39U_{m-1}+56U_m-39U_{m+1}\\
&+12U_{m+2}-U_{m+3})+\mathcal{O}(h^4),
\end{aligned} \tag{3.28}$$

olarak bulunabilir.

Sayısal çözüm aranırken merkezi fark haricinde sonlu fark yaklaşımlarıda yapılacaktır. Bu yaklaşımların elde edilirken $x=x_0$ noktası civarındaki U fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
U_1 &= U_0+h\frac{dU_0}{dx}+\frac{h^2}{2!}\frac{d^2U_0}{dx^2}+\frac{h^3}{3!}\frac{d^3U_0}{dx^3}+\frac{h^4}{4!}\frac{d^4U_0}{dx^4}+\ldots,\\
U_2 &= U_0+(2h)\frac{dU_0}{dx}+\frac{(2h)^2}{2!}\frac{d^2U_0}{dx^2}+\frac{(2h)^3}{3!}\frac{d^3U_0}{dx^3}+\frac{(2h)^4}{4!}\frac{d^4U_0}{dx^4}+\ldots,\\
U_3 &= U_0+(3h)\frac{dU_0}{dx}+\frac{(3h)^2}{2!}\frac{d^2U_0}{dx^2}+\frac{(3h)^3}{3!}\frac{d^3U_0}{dx^3}+\frac{(3h)^4}{4!}\frac{d^4U_0}{dx^4}+\ldots,\\
U_4 &= U_0+(4h)\frac{dU_0}{dx}+\frac{(4h)^2}{2!}\frac{d^2U_0}{dx^2}+\frac{(4h)^3}{3!}\frac{d^3U_0}{dx^3}+\frac{(4h)^4}{4!}\frac{d^4U_0}{dx^4}+\ldots,
\end{aligned}$$

seri açılımları, $x = x_2$ noktası civarındaki U fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
U_0 &= U_2 + (-2h)\frac{dU_2}{dx} + \frac{(-2h)^2}{2!}\frac{d^2U_2}{dx^2} + \frac{(-2h)^3}{3!}\frac{d^3U_2}{dx^3} + \frac{(-2h)^4}{4!}\frac{d^4U_2}{dx^4} + \ldots, \\
U_1 &= U_2 + (-h)\frac{dU_2}{dx} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2U_2}{dx^2} + \frac{(-h)^3}{3!}\frac{d^3U_2}{dx^3} + \frac{h^4}{4!}\frac{d^4U_2}{dx^4} + \ldots, \\
U_3 &= U_2 + h\frac{dU_2}{dx} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2U_2}{dx^2} + \frac{h^3}{3!}\frac{d^3U_2}{dx^3} + \frac{h^4}{4!}\frac{d^4U_2}{dx^4} + \ldots, \\
U_4 &= U_2 + (2h)\frac{dU_2}{dx} + \frac{(2h)^2}{2!}\frac{d^2U_2}{dx^2} + \frac{(2h)^3}{3!}\frac{d^3U_2}{dx^3} + \frac{(2h)^4}{4!}\frac{d^4U_2}{dx^4} + \ldots, \\
U_5 &= U_2 + (3h)\frac{dU_2}{dx} + \frac{(3h)^2}{2!}\frac{d^2U_2}{dx^2} + \frac{(3h)^3}{3!}\frac{d^3U_2}{dx^3} + \frac{(3h)^4}{4!}\frac{d^4U_2}{dx^4} + \ldots, \\
U_6 &= U_2 + (4h)\frac{dU_2}{dx} + \frac{(4h)^2}{2!}\frac{d^2U_2}{dx^2} + \frac{(4h)^3}{3!}\frac{d^3U_2}{dx^3} + \frac{(4h)^4}{4!}\frac{d^4U_2}{dx^4} + \ldots, \\
U_7 &= U_2 + (5h)\frac{dU_2}{dx} + \frac{(5h)^2}{2!}\frac{d^2U_2}{dx^2} + \frac{(5h)^3}{3!}\frac{d^3U_2}{dx^3} + \frac{(5h)^4}{4!}\frac{d^4U_2}{dx^4} + \ldots,
\end{aligned}$$

seri açılımları $x = x_N$ noktası civarındaki U fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
U_{N-1} &= U_N - h\frac{dU_N}{dx} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2U_N}{dx^2} - \frac{h^3}{3!}\frac{d^3U_N}{dx^3} + \frac{h^4}{4!}\frac{d^4U_N}{dx^4} + \ldots, \\
U_{N-2} &= U_N + (-2h)\frac{dU_N}{dx} + \frac{(2h)^2}{2!}\frac{d^2U_N}{dx^2} + \frac{(-2h)^3}{3!}\frac{d^3U_N}{dx^3} + \frac{(2h)^4}{4!}\frac{d^4U_N}{dx^4} + \ldots, \\
U_{N-3} &= U_N + (-3h)\frac{dU_N}{dx} + \frac{(3h)^2}{2!}\frac{d^2U_N}{dx^2} + \frac{(-3h)^3}{3!}\frac{d^3U_N}{dx^3} + \frac{(3h)^4}{4!}\frac{d^4U_N}{dx^4} + \ldots, \\
U_{N-4} &= U_N + (-4h)\frac{dU_N}{dx} + \frac{(4h)^2}{2!}\frac{d^2U_N}{dx^2} + \frac{(-4h)^3}{3!}\frac{d^3U_N}{dx^3} + \frac{(4h)^4}{4!}\frac{d^4U_N}{dx^4} + \ldots,
\end{aligned}$$

seri açılımları ve $x = x_{N-2}$ noktası civarındaki U fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
U_{N-7} &= U_{N-2} + (-5h)\frac{dU_{N-2}}{dx} + \frac{(-5h)^2}{2!}\frac{d^2U_{N-2}}{dx^2} + \frac{(-5h)^3}{3!}\frac{d^3U_{N-2}}{dx^3} \\
&\quad + \frac{(-5h)^4}{4!}\frac{d^4U_{N-2}}{dx^4} + \ldots, \\
U_{N-6} &= U_{N-2} + (-4h)\frac{dU_{N-2}}{dx} + \frac{(-4h)^2}{2!}\frac{d^2U_{N-2}}{dx^2} + \frac{(-4h)^3}{3!}\frac{d^3U_{N-2}}{dx^3} \\
&\quad + \frac{(-4h)^4}{4!}\frac{d^4U_{N-2}}{dx^4} + \ldots, \\
U_{N-5} &= U_{N-2} + (-3h)\frac{dU_{N-2}}{dx} + \frac{(-3h)^2}{2!}\frac{d^2U_{N-2}}{dx^2} + \frac{(-3h)^3}{3!}\frac{d^3U_{N-2}}{dx^3} \\
&\quad + \frac{(-3h)^4}{4!}\frac{d^4U_{N-2}}{dx^4} + \ldots, \\
U_{N-4} &= U_{N-2} + (-2h)\frac{dU_{N-2}}{dx} + \frac{(-2h)^2}{2!}\frac{d^2U_{N-2}}{dx^2} + \frac{(-2h)^3}{3!}\frac{d^3U_{N-2}}{dx^3} \\
&\quad + \frac{(-2h)^4}{4!}\frac{d^4U_{N-2}}{dx^4} + \ldots,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
U_{N-3} &= U_{N-2} + (-h)\frac{dU_{N-2}}{dx} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2U_{N-2}}{dx^2} + \frac{(-h)^3}{3!}\frac{d^3U_{N-2}}{dx^3} + \frac{h^4}{4!}\frac{d^4U_{N-2}}{dx^4} + \ldots, \\
U_{N-1} &= U_{N-2} + h\frac{dU_{N-2}}{dx} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2U_{N-2}}{dx^2} + \frac{h^3}{3!}\frac{d^3U_{N-2}}{dx^3} + \frac{h^4}{4!}\frac{d^4U_{N-2}}{dx^4} + \ldots, \\
U_N &= U_{N-2} + (2h)\frac{dU_{N-2}}{dx} + \frac{(2h)^2}{2!}\frac{d^2U_{N-2}}{dx^2} + \frac{(2h)^3}{3!}\frac{d^3U_{N-2}}{dx^3} + \frac{(2h)^4}{4!}\frac{d^4U_{N-2}}{dx^4} + \ldots,
\end{aligned}
$$

seri açılımları kullanılacaktır.

$\frac{dU_0}{dx}$ için 3 noktalı ileri sonlu fark yaklaşımı kullanılmak istenirse yaklaşım

$$\frac{dU_0}{dx} = aU_0 + bU_1 + cU_2 \tag{3.29}$$

formunda olacaktır. U_1 ve U_2 terimlerinin yerine seri açılımları yazılır, düzenlenir ve eşitliğin sol tarafına eşitlenirse

$$
\begin{aligned}
a + b + c &= 0 \\
2c + b &= \frac{1}{h} \\
4c + b &= 0
\end{aligned}
$$

denklem sistemi bulunur. Denklem sisteminin çözülmesi sonucunda

$$a = -\frac{3}{2h}, b = \frac{2}{h}, c = \frac{-1}{2h}$$

elde edilir. Böylece $\frac{dU_0}{dx}$ için 3 noktalı ileri sonlu fark yaklaşımı

$$(U_x)_0 = \frac{1}{2h}\left(-3U_0 + 4U_1 - U_2\right) + \mathcal{O}(h^2) \tag{3.30}$$

olarak bulunacaktır. Elde edilen yaklaşım ikinci mertebeden doğruluğa sahiptir.

$\frac{dU_0}{dx}$ için 5 noktalı ileri sonlu fark yaklaşımı kullanılmak istenirse yaklaşım

$$\frac{dU_0}{dx} = aU_0 + bU_1 + cU_2 + dU_3 + eU_4 \tag{3.31}$$

formunda olacaktır. U_1, U_2, U_3 ve U_4 terimlerinin yerine seri açılımları yazılır, düzenlenir ve eşitliğin sol tarafına eşitlenirse

$$
\begin{aligned}
a + b + c + d + e &= 0 \\
2c + 4e + b + 3d &= \frac{1}{h} \\
4c + 9d + 16e + b &= 0 \\
27d + 8c + b + 64e &= 0 \\
256e + 16c + 81d + b &= 0
\end{aligned}
$$

denklem sistemi bulunur. Denklem sisteminin çözülmesi sonucunda

$$a = -\frac{25}{12h}, b = \frac{48}{12h}, c = \frac{-36}{12h}, d = \frac{16}{12h}, e = -\frac{3}{12h}$$

elde edilir. Böylece $\frac{dU_0}{dx}$ için 5 noktalı ileri sonlu fark yaklaşımı

$$(U_x)_0 = \frac{1}{12h}\left(-25U_0 + 48U_1 - 36U_2 + 16U_3 - 3U_4\right) + \mathcal{O}(h^4) \tag{3.32}$$

olarak bulunacaktır.

$\frac{dU_N}{dx}$ için 3 noktalı geri sonlu fark yaklaşımı kullanılmak istenirse yaklaşım

$$\frac{dU_N}{dx} = aU_{N-2} + bU_{N-1} + cU_N \tag{3.33}$$

formunda olacaktır. 3 noktalı geri sonlu fark yaklaşımı eşitliğinin sağ tarafındaki U_{N-1} ve U_{N-2} terimlerinin yerine seri açılımları yazılır, düzenlenir ve eşitliğin sol tarafına eşitlenirse

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ b + 2a &= -\frac{1}{h} \\ b + 4a &= 0 \end{aligned}$$

denklem sistemi bulunur. Denklem sisteminin a, b ve c bilinmeyenlerine göre çözülmesi sonucunda

$$a = \frac{1}{2h}, b = \frac{-2}{h}, c = \frac{3}{2h},$$

elde edilir. Böylece $\frac{dU_N}{dx}$ için 3 noktalı geri sonlu fark yaklaşımı da

$$\frac{dU_N}{dx} = \frac{1}{2h}\left(U_{N-2} - 4U_{N-1} + 3U_N\right) + \mathcal{O}(h^2) \tag{3.34}$$

olarak bulunacaktır.

$\frac{dU_N}{dx}$ için 5 noktalı geri sonlu fark yaklaşımı kullanılmak istenirse yaklaşım

$$\frac{dU_N}{dx} = aU_{N-4} + bU_{N-3} + cU_{N-2} + dU_{N-1} + eU_N \tag{3.35}$$

formunda olacaktır. 5 noktalı geri sonlu fark yaklaşımı eşitliğinin sağ tarafındaki U_{N-1}, U_{N-2}, U_{N-3} ve U_{N-4} terimlerinin yerine seri açılımları yazılır, düzenlenir ve eşitliğin

sol tarafına eşitlenirse

$$\begin{aligned} a+b+c+d+e &= 0 \\ d+3b+4a+2e &= \frac{1}{h} \\ d+9b+4c+16a) &= 0 \\ 64a+d+8c+54b &= 0 \\ 81b+16c+256a &= 0 \end{aligned}$$

denklem sistemi bulunur. Denklem sisteminin a, b, c, d ve e bilinmeyenlerine göre çözülmesi sonucunda

$$a = \frac{3}{12h}, b = \frac{-16}{12h}, c = \frac{36}{12h}, d = \frac{-48}{12h}, e = \frac{25}{12h}$$

elde edilir. Böylece $\frac{dU_N}{dx}$ için 5 noktalı geri sonlu fark yaklaşımı da

$$\frac{dU_N}{dx} = \frac{1}{12h}\left(3U_{N-4} - 16U_{N-3} + 36U_{N-2} - 48U_{N-1} + 25U_N\right) + \mathcal{O}(h^4) \tag{3.36}$$

olarak bulunacaktır.

$x = x_2$ noktasındaki $\frac{d^3U_2}{dx^3}$ için 7 noktalı sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{d^3U_2}{dx^3} = aU_0 + bU_1 + cU_2 + dU_3 + eU_4 + fU_5 + gU_6 \tag{3.37}$$

formunda olsun. Eşitliğin sağ tarafındaki U_0, U_1, U_3, U_4, U_5 ve U_6 terimlerinin yerine seri açılımları yazılır, düzenlenir ve eşitliğin sol tarafına eşitlenirse

$$\begin{aligned} c+a+b+e+f+g+d &= 0 \\ b-4g-2e-3f-d+2a &= 0 \\ d+16g+b+9f+4a+4e &= 0 \\ -8a+64g+8e+d-b+27f &= \frac{6}{h^3} \\ d+b+16e+256g+16a+81f &= 0 \\ -243f-1024g-32e-d+32a+b &= 0 \\ 64e+729f+4096g+64a+b+d &= 0 \\ 128e-b+\breve{g}2187f+d+16384g-128a &= 0 \end{aligned}$$

denklem sistemi bulunur. Denklem sisteminin a, b, c, d, e, f ve g bilinmeyenlerine göre çözülmesi sonucunda

$$a = -\frac{1}{8h^3}, b = -\frac{1}{h^3}, c = \frac{35}{8h^3}, d = -\frac{6}{h^3}, e = \frac{29}{8h^3}, e = -\frac{1}{h^3}, f = \frac{1}{8h^3}$$

elde edilir. Böylece $\frac{d^3U_2}{dx^3}$ için 7 noktalı sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{d^3U_2}{dx^3} = \frac{1}{8h^3}\left(-U_0 - 8U_1 + 35U_2 - 48U_3 + 29U_4 - 8U_5 + U_6\right) + \mathcal{O}(h^4), \tag{3.38}$$

olarak bulunur.

$x = x_2$ noktasındaki $\frac{d^4U_2}{dx^4}$ için 7 noktalı dördüncü mertebeden noktalı sonlu fark yaklaşımı elde edilemez. $x = x_2$ noktasındaki $\frac{d^4U_2}{dx^4}$ için 8 noktalı sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{d^4U_2}{dx^4} = aU_0 + bU_1 + cU_2 + dU_3 + eU_4 + fU_5 + gU_6 + \breve{g}U_7 \tag{3.39}$$

formunda olsun. Eşitliğinin sağ tarafındaki U_0, U_1, U_3, U_4, U_5, U_6 ve U_7 için seri açılımı yazılır, düzenlenir ve eşitliğin sol tarafına eşitlenirse

$$\begin{aligned}
e + f + g + d + \breve{g} + c + a + b &= 0 \\
2a - 5\breve{g} - 3f - d - 4g - 2e + b &= 0 \\
b + d + 16g + 9f + 4a + 25\breve{g} + 4e &= 0 \\
b + 8a - 125\breve{g} - 64g - 8e - d - 27f &= 0 \\
625\breve{g} + 256g + 81f + 16a + d + 16e + b &= \frac{24}{h^4} \\
32a - 32e + b - d - 243f - 1024g - 3125\breve{g} &= 0 \\
729f + b + 64a + 64e + 4096g + 15625\breve{g} + d &= 0 \\
128e + 2187f + 78125\breve{g} + 16384g + d - 128a - b &= 0
\end{aligned}$$

denklem sistemi bulunur. Denklem sisteminin a, b, c, d, e, f ve g bilinmeyenlerine göre çözülmesi sonucunda

$$a = \frac{4}{6h^4}, b = \frac{-11}{6h^4}, c = 0, d = \frac{31}{6h^4}, e = \frac{-44}{6h^4}, f = \frac{27}{6h^4},\ g = \frac{-8}{6h^4}, \breve{g} = \frac{1}{6h^4}$$

elde edilir. Böylece $\frac{d^4U_2}{dx^4}$ için 8 noktalı sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{d^4U_2}{dx^4} = \frac{1}{6h^4}\left(4U_0 - 11U_1 + 31U_3 - 44U_4 + 27U_5 - 8U_6 + U_7\right) + \mathcal{O}(h^4), \tag{3.40}$$

olarak dördüncü mertebeden doğruluğa sahip olarak bulunur.

$x = x_{N-2}$ noktasındaki $\dfrac{d^3U_{N-2}}{dx^3}$ için 7 noktalı sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{d^3U_{N-2}}{dx^3} = aU_{N-6} + bU_{N-5} + cU_{N-4} + dU_{N-3} + eU_{N-2} + fU_{N-1} + gU_N \qquad (3.41)$$

formunda olsun. Eşitliğinin sağ tarafındaki U_{N-6}, U_{N-5}, U_{N-4}, U_{N-3}, U_{N-1} ve U_N terimlerinin yerine seri açılımları yazılır, düzenlenir ve eşitliğin sol tarafına eşitlenirse

$$\begin{aligned}
c + a + b + e + f + g + d &= 0 \\
-2g - f + 2c + d + 3b + 4a &= 0 \\
9b + 16a + d + f + 4g + 4c &= 0 \\
f - 8c + 8g - 64a - 27b - d &= \frac{6}{h^3} \\
d + 81b + 16g + f + 16c + 256a &= 0 \\
243b - 32g - f + 1024a + d + 32c &= 0 \\
64c + 729b + 4096a + f + 64g + d &= 0
\end{aligned}$$

denklem sistemi bulunur. Denklem sisteminin a, b, c, d, e, f ve g bilinmeyenlerine göre çözülmesi sonucunda

$$a = -\frac{1}{8h^3}, b = \frac{1}{h^3}, c = -\frac{29}{8h^3}, d = \frac{6}{h^3}, e = -\frac{35}{8h^3}, f = \frac{1}{h^3}, g = -\frac{1}{8h^3}$$

elde edilir. Böylece $\dfrac{d^3U_2}{dx^3}$ için 7 noktalı sonlu fark yaklaşımı

$$\begin{aligned}
\frac{d^3U_{N-2}}{dx^3} &= \frac{1}{8h^3}\left(-U_{N-6} + 8U_{N-5} - 29U_{N-4} + 48U_{N-3} - 35U_{N-2}\right. \\
&\quad \left. +8U_{N-1} - U_N\right) + \mathcal{O}(h^4),
\end{aligned} \qquad (3.42)$$

olarak bulunur.

$x = x_2$ noktasındaki $\dfrac{d^4U_{N-2}}{dx^4}$ için 7 noktalı dördüncü mertebeden noktalı sonlu fark yaklaşımı elde edilemez. $x = x_{N-2}$ noktasındaki $\dfrac{d^4U_{N-2}}{dx^4}$ için 8 noktalı sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{d^4U_{N-2}}{dx^4} = aU_{N-7} + bU_{N-6} + cU_{N-5} + dU_{N-4} + eU_{N-3} + fU_{N-2} + gU_{N-1} + \breve{g}U_N \qquad (3.43)$$

formunda olsun. Önerilen 8 noktalı sonlu fark yaklaşımı eşitliğinin sağ tarafındaki U_{N-7} U_{N-6}, U_{N-5}, U_{N-4}, U_{N-3}, U_{N-1} ve U_N terimlerinin yerine seri açılımları yazılır, düzenlenir ve eşitliğin sol tarafına eşitlenirse

$$\begin{aligned}
f+a+b+c+d+e+g+\breve{g} &= 0\\
4b+5a+3c+2d+e-g-2\breve{g} &= 0\\
16b+25a+9c+4d+e+g+4\breve{g} &= 0\\
-g-8\breve{g}+64b+e+27c+125*a+8d &= 0\\
81c+256b+625a+e+16d+16\breve{g}+g &= \frac{24}{h^4}\\
243c+3125a-32\breve{g}+1024b+e-g+32d &= 0\\
15625a+729c+64d+4096b+g+64\breve{g}+e &= 0\\
78125a+16384b+2187c+128d+e-g-128\breve{g} &= 0
\end{aligned}$$

denklem sistemi bulunur. Denklem sistemi çözülürse

$$a=\frac{1}{6h^4}, b=-\frac{8}{6h^4}, c=\frac{27}{6h^4}, d=-\frac{44}{6h^4}, e=\frac{31}{6h^4}, g=-\frac{11}{6h^4}, \breve{g}=\frac{1}{h^4}$$

elde edilir. Böylece $\frac{d^4U_2}{dx^4}$ için 7 noktalı sonlu fark yaklaşımı

$$\begin{aligned}
\frac{d^4U_{N-2}}{dx^4} = \frac{1}{6h^4}\,(&U_{N-7}-8U_{N-6}+27U_{N-5}-44U_{N-4}+31U_{N-3}\\
&-11U_{N-1}+6U_N+\mathcal{O}(h^4),
\end{aligned} \tag{3.44}$$

olarak bulunur.

3.2 Crank-Nicolson Yöntemi ve Yüksek Doğruluklu Yaklaşım

Crank ve Nicolson (1947) tarafından önerilen Crank-Nicolson yöntemi, kapalı ve ikinci mertebeden doğruluğa sahip bir sonlu farklar yöntemi olup diferensiyel denklemin çözümünde zamana göre türev için ileri sonlu fark yaklaşımı, diğer terimler için ise şimdiki zaman ve bir sonraki zamana ait fonksiyon değerlerinin ortalamalarının kullanılmasına dayanmaktadır. Bu durumda k zaman adımı olmak üzere

$$u_t = f(t,x,u,u_x,u_{xx},\ldots) = f\,(\cdot) \tag{3.45}$$

denklemine Crank-Nicolson yöntemi uygulanırsa

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{k} = \frac{f\,(\cdot)^{n+1}+f\,(\cdot)^n}{2} \tag{3.46}$$

elde edilir. Bu durumda (3.45) denkleminin Crank-Nicolson yöntemiyle zaman parçalanması yapılmış olur. Önerilen yöntemin doğruluğunu bulmak için u^{n+1} ve $f(\cdot)^{n+1}$ için Taylor seri açılımları olan

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= u^n + k\frac{\partial u^n}{\partial t} + \frac{k^2}{2!}\frac{\partial^2 u^n}{\partial t^2} + \frac{k^3}{3!}\frac{\partial^3 u^n}{\partial t^3} + \frac{k^4}{4!}\frac{\partial^4 u^n}{\partial t^4} + \ldots, \\ f(\cdot)^{n+1} &= f(\cdot)^n + k\frac{\partial f(\cdot)^n}{\partial t} + \frac{k^2}{2!}\frac{\partial^2 f(\cdot)^n}{\partial t^2} + \frac{k^3}{3!}\frac{\partial^3 f(\cdot)^n}{\partial t^3} + \frac{k^4}{4!}\frac{\partial^4 f(\cdot)^n}{\partial t^4} + \ldots, \end{aligned}$$

ve

$$\frac{\partial u^n}{\partial t} = f(\cdot)^n, \ \frac{\partial^2 u^n}{\partial t^2} = \frac{\partial f(\cdot)^n}{\partial t}, \ldots \tag{3.47}$$

eşitlikleri kullanılırsa (3.46) yöntemi

$$\begin{aligned} &\frac{1}{k}\left(u^n + k\tfrac{\partial u^n}{\partial t} + \tfrac{k^2}{2!}\tfrac{\partial^2 u^n}{\partial t^2} + \tfrac{k^3}{3!}\tfrac{\partial^3 u^n}{\partial t^3} + \tfrac{k^4}{4!}\tfrac{\partial^4 u^n}{\partial t^4} + \ldots - u^n\right) = \\ &\tfrac{1}{2}\left(f(\cdot)^n + k\tfrac{\partial f(\cdot)^n}{\partial t} + \tfrac{k^2}{2!}\tfrac{\partial^2 f(\cdot)^n}{\partial t^2} + \tfrac{k^3}{3!}\tfrac{\partial^3 f(\cdot)^n}{\partial t^3} + \tfrac{k^4}{4!}\tfrac{\partial^4 f(\cdot)^n}{\partial t^4} + \ldots + f(\cdot)^n\right) \end{aligned} \tag{3.48}$$

eşitliğine dönüşür. Gerekli düzenlemeler yapılır ve (3.47) eşitlikleri kullanılırsa

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{k} - \frac{f(\cdot)^{n+1} + f(\cdot)^n}{2} = \frac{k^2}{12}\frac{\partial u^n}{\partial t}\ldots \tag{3.49}$$

elde edileceğinden (3.46) yöntemi için diğer bir ifade ile Crank-Nicolson yöntemi için doğruluk 2 olur. (3.46) yöntemi düzenlenerek

$$u^{n+1} = u^n + \frac{k}{2}f(\cdot)^{n+1} + \frac{k}{2}f(\cdot)^n + \frac{k^3}{12}\frac{\partial u^n}{\partial t}\ldots \tag{3.50}$$

olarak yazılabilir. Bu durumda ilk gelen hata terimi $\frac{k^3}{12}\frac{\partial u^n}{\partial t}$ olmasına rağmen metodun doğruluğu yine 2 olacaktır.

Daha yüksek doğruluk elde etmek için zaman parçalanmasının

$$u^{n+1} = u^n + \theta_1 f(\cdot)^{n+1} + \theta_2 f(\cdot)^n + \theta_3 f_t(\cdot)^{n+1} + \theta_4 f_t(\cdot)^n \tag{3.51}$$

olduğunu kabul ederek doğruluğu en yüksek yapacak şekilde katsayılar belirlenebilir. Dikkatlice bakılırsa $\theta_3 = \theta_4 = 0$ ve $\theta_1 = \theta_2 = k/2$ alınırsa önerilen zaman parçalanması doğruluğun 2 olduğu Crank-Nicolson yöntemine dönüşür. (3.51) önerilen zaman parçalanmasında Taylor seri açılımları ve (3.47) eşitlikleri kullanılır

$$\begin{aligned} &u^n + k\tfrac{\partial u^n}{\partial t} + \tfrac{k^2}{2!}\tfrac{\partial^2 u^n}{\partial t^2} + \tfrac{k^3}{3!}\tfrac{\partial^3 u^n}{\partial t^3} + \tfrac{k^4}{4!}\tfrac{\partial^4 u^n}{\partial t^4} + \ldots = u^n + \\ &\theta_1\left(f(\cdot)^n + k\tfrac{\partial f(\cdot)^n}{\partial t} + \tfrac{k^2}{2!}\tfrac{\partial^2 f(\cdot)^n}{\partial t^2} + \tfrac{k^3}{3!}\tfrac{\partial^3 f(\cdot)^n}{\partial t^3} + \tfrac{k^4}{4!}\tfrac{\partial^4 f(\cdot)^n}{\partial t^4} + \ldots\right) \\ &+\theta_2 f(\cdot)^n + \theta_3\left(\tfrac{\partial f(\cdot)^n}{\partial t} + k\tfrac{\partial^2 f(\cdot)^n}{\partial t^2} + \tfrac{k^2}{2!}\tfrac{\partial^3 f(\cdot)^n}{\partial t^3} + \tfrac{k^3}{3!}\tfrac{\partial^4 f(\cdot)^n}{\partial t^4} + \tfrac{k^4}{4!}\tfrac{\partial^5 f(\cdot)^n}{\partial t^5} + \ldots\right) \\ &+\theta_4 f_t(\cdot)^n \end{aligned} \tag{3.52}$$

ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u^n}{\partial t}\left(k-\theta_1-\theta_2\right)+\frac{\partial^2 u^n}{\partial t^2}\left(\frac{k^2}{2!}-\theta_1 k-\theta_3-\theta_4\right)+\\&\frac{\partial^3 u^n}{\partial t^3}\left(\frac{k^3}{3!}-\frac{k^2}{2!}\theta_1-k\theta_3\right)+\frac{\partial^4 u^n}{\partial t^4}\left(\frac{k^4}{4!}-\frac{k^3}{3!}\theta_1-\frac{k^2}{2!}\theta_3\right)+\\&\frac{\partial^5 u^n}{\partial t^5}\left(\frac{k^5}{5!}-\frac{k^4}{4!}\theta_1-\frac{k^3}{3!}\theta_3\right)\ldots\end{aligned} \tag{3.53}$$

elde edilir. 4 bilinmeyen olan θ_1, θ_2, θ_3 θ_4 değerlerini doğruluğu maksimum yapacak şekilde bulabilmek için

$$k-\theta_1-\theta_2 = 0, \tag{3.54}$$

$$\frac{k^2}{2!}-\theta_1 k-\theta_3-\theta_4 = 0, \tag{3.55}$$

$$\frac{k^3}{3!}-\frac{k^2}{2!}\theta_1-k\theta_3 = 0, \tag{3.56}$$

$$\frac{k^4}{4!}-\frac{k^3}{3!}\theta_1-\frac{k^2}{2!}\theta_3 = 0 \tag{3.57}$$

denklemleri seçilir ve çözülürse

$$\theta_1=\theta_2=\frac{k}{2}, \theta_3=-\frac{k^2}{12}, \theta_4=\frac{k^2}{12} \tag{3.58}$$

elde edilir. Elde edilen çözümler (3.53) de yerine yazılırsa $\frac{k^5}{12}\frac{\partial^5 u^n}{\partial t^5}$ hata terimi geleceğinden önerilen yöntemin doğruluğu 4 olur.

3.3 Burgers Denklemi ve Test Problemi

$$u_t+uu_x-\nu u_{xx}=0, \tag{3.59}$$

Burgers denklemi ile birlikte

$$\begin{aligned}&u(a,t)=u(b,t)=0,\\&u_x(a,t)=u_x(b,t)=0\end{aligned} \tag{3.60}$$

sınır şartları ve t_b başlangıç zamanı olmak üzere

$$u(x,t_b)=f(x) \tag{3.61}$$

başlangıç şartı kullanılarak sayısal çözüm araştırılacaktır. Denklemdeki $\nu>0$ vizkozite katsayısına karşılık gelip küçük vizkozite katsayısı değerleri için sayısal çözümün iyi sonuçlar vermediği bilinmektedir.

Önerilen sayısal yöntemin doğruluğunun kontrolü

$$L_\infty = |u_{\text{tam}} - U_{\text{yaklaşık}}|_\infty = \max_m \left|(u_m)_{\text{tam}} - (U_m)_{\text{yaklaşık}}\right| \tag{3.62}$$

hata normu ve

$$\text{Yakınsama oranı}=\frac{\log\left|\dfrac{u-U_{k_i}}{u-U_{k_{i+1}}}\right|}{\log\left|\dfrac{k_i}{k_{i+1}}\right|}, \text{Yakınsama oranı}=\frac{\log\left|\dfrac{u-U_{h_i}}{u-U_{h_{i+1}}}\right|}{\log\left|\dfrac{h_i}{h_{i+1}}\right|} \tag{3.63}$$

hesaplanarak kontrol edilecektir. İlk yakınsama oranı formülünde konum zaman artımı çok küçük alınarak zaman doğruluğu için yakınsama oranı kontrol edilebilir. İkinci yakınsama oranı formülünde ise zaman artım uzunluğu çok küçük alınarak konuma göre yakınsama oranı kontrol edilebilir. Yakınsama oranında istenirse zaman ve konum artım uzunlukları aynı alınarak önerilen yöntemin yakınsama oranı kontrol edilebilir. Formülde L_∞ hata normları hatayı belirlemek için kullanılacaktır.

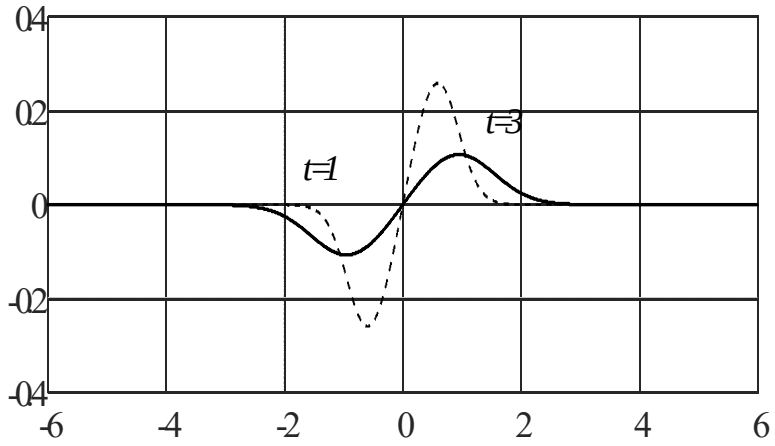
Problem için analitik çözüm ise $t_0 = \exp(1/(8\nu))$ olmak üzere

$$U(x,t) = \frac{x/t}{1+\sqrt{t/t_0}\exp(x^2/(4\nu t))}, \quad t \geq 1, \quad a \leq x \leq b,$$

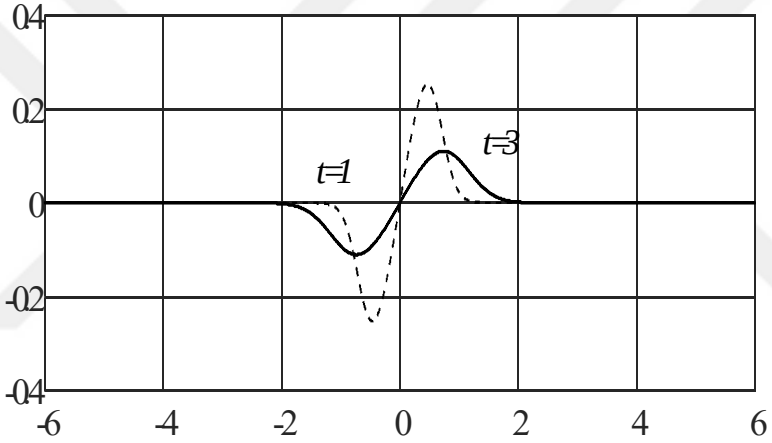
formundadır. Başlangıç şartı ise

$$U(x,1) = \frac{x}{1+\sqrt{1/t_0}\exp(x^2/(4\nu))}, \quad t \geq 1, \quad a \leq x \leq b, \tag{3.64}$$

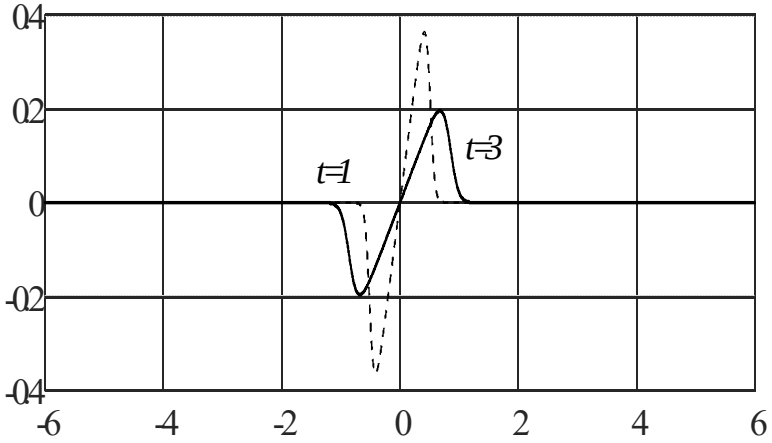
olacaktır. Bu çalışmada konum aralığı $[-6,6]$ seçilerek program $t = 3$ anına kadar çalıştırılacaktır. Şekillerde farklı vizkozite değerleri için tam çözümlerin başlangıç ve $t = 3$ anındaki grafikleri verilmiştir. Şekiller incelendiğinde vizkozite değerinin küçülmesi sonucunda dalganın keskinleştiği dolayısıyla sayısal modellemenin zorlaşacağı görülebilir.



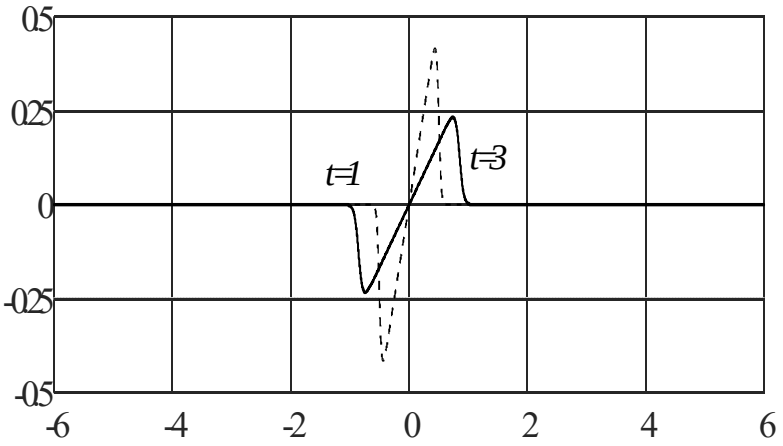
Şekil 3.1 : $\nu = 0.1$ için $t = 1$ ve $t = 3$ anındaki tam çözümlerin grafikleri



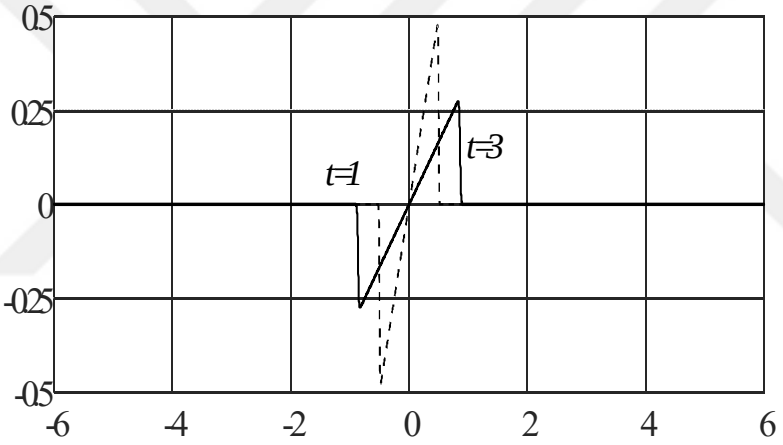
Şekil 3.2 : $\nu = 0.05$ için $t = 1$ ve $t = 3$ anındaki tam çözümlerin grafikleri



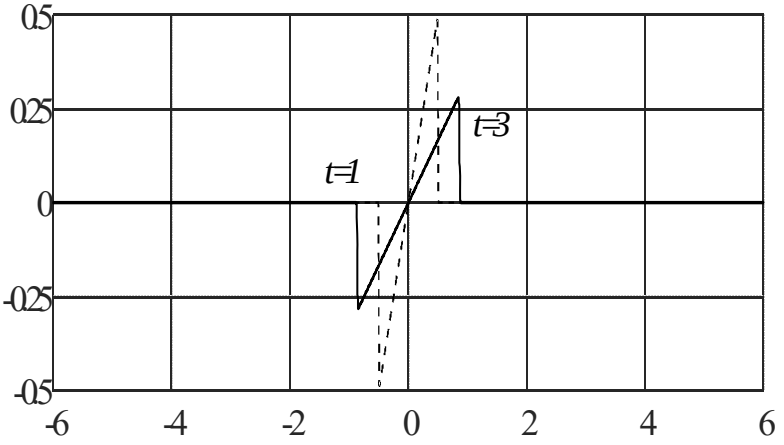
Şekil 3.3 : $\nu = 0.01$ için $t = 1$ ve $t = 3$ anındaki tam çözümlerin grafikleri



Şekil 3.4 : $\nu = 0.005$ için $t = 1$ ve $t = 3$ anındaki tam çözümlerin grafikleri



Şekil 3.5 : $\nu = 0.001$ için $t = 1$ ve $t = 3$ anındaki tam çözümlerin grafikleri



Şekil 3.6 : $\nu = 0.0005$ için $t = 1$ ve $t = 3$ anındaki tam çözümlerin grafikleri

4. METOTLARIN UYGULANMASI

Bu bölümde, Burgers denkleminin ikinci mertebeden konuma ve zamana göre doğruluğa sahip sonlu farklar yöntemi ile sayısal çözümü araştırılmıştır. Sayısal çözümün doğruluğu test problemi yardımıyla incelenmiştir.

4.1 Zamana ve Konuma Göre 2. Mertebeden Metot (Metot 1)

Burgers denklemi birinci bölümde

$$u_t + uu_x - \nu u_{xx} = 0,\ a < x < b,\ t > 0$$

formunda verilmişti.

$$u^{n+1} = u^n + \theta_1 f\left(\cdot\right)^{n+1} + \theta_2 f\left(\cdot\right)^n + \theta_3 f_t\left(\cdot\right)^{n+1} + \theta_4 f_t\left(\cdot\right)^n$$

olarak önerilen zaman parçalanmasında

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{k}{2}, \theta_3 = \theta_4 = 0$$

alınırsa Burgers denklemine Crank-Nicolson yönteminin uygulanması olarakta bilinen

$$u^{n+1} = u^n + \frac{k}{2}\left(\nu u_{xx} - uu_x\right)^{n+1} + \frac{k}{2}\left(\nu u_{xx} - uu_x\right)^n \tag{4.1}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik düzenlendiğinde

$$u^{n+1} + \frac{k}{2}\left(uu_x\right)^{n+1} - \frac{\nu k}{2}u_{xx}^{n+1} = u^n - \frac{k}{2}\left(uu_x\right)^n + \frac{\nu k}{2}u_{xx}^n \tag{4.2}$$

denklemine ulaşılır. Konuma göre parçalanma içinde $x_m,\ m = 1, 2, \ldots, N-1$ noktalarında ikinci mertebeden doğruluğa sahip olan

$$u_x(x_m, t_n) = (u_x)_m^n = \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \tag{4.3}$$

$$u_{xx}(x_m, t_n) = (u_{xx})_m^n = \frac{U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n}{h^2} + \mathcal{O}(h^2), \tag{4.4}$$

yaklaşımları kullanılırsa

$$\begin{gathered} U_{m-1}^{n+1}\left(-\frac{kU_m^{n+1}}{4h} - \frac{\nu k}{2h^2}\right) + U_m^{n+1}\left(1 + \frac{\nu k}{h^2}\right) + U_{m+1}^{n+1}\left(\frac{kU_m^{n+1}}{4h} - \frac{\nu k}{2h^2}\right) \\ = \\ U_{m-1}^n\left(\frac{kU_m^n}{4h} + \frac{\nu k}{2h^2}\right) + U_m^n\left(1 - \frac{\nu k}{h^2}\right) + U_{m+1}^n\left(-\frac{kU_m^n}{4h} + \frac{\nu k}{2h^2}\right) \end{gathered} \tag{4.5}$$

elde edilir. Denklem sistemi $N+1$ bilinmeyen $N-1$ denklemden oluşan bir sistemdir. Sınır şartlarından

$$U(a,t_{n+1}) = U(b,t_{n+1}) = 0$$

kullanılırsa

$$U_0^{n+1} = 0, \tag{4.6}$$

$$U_N^{n+1} = 0 \tag{4.7}$$

elde edilir. Böylece (4.5), (4.6) ve (4.7) denklemlerinden oluşan sistemi $N+1$ denklem $N+1$ bilinmeyenden oluşan bir sisteme dönüşür.

Denklem sisteminin çözülebilmesi için gerekli olan

$$U_0^0, U_1^0, \ldots, U_{N-1}^0, U_N^0 \tag{4.8}$$

değerleri başlangıç şartından hesaplanır. Bu değerlerin kullanılmasıyla denklem sistemi çözülerek öncelikle

$$U_0^1, U_1^1, U_2^1, \cdots, U_{N-2}^1, U_{N-1}^1, U_N^1 \tag{4.9}$$

bilinmeyenleri bulunur. Bundan sonraki adımlar iteratif olarak istenilen zamana kadar devam ettirilir.

Denklem sistemi lineer olmadığından her bir adımda iç iterasyon ile lineerleştirme yapılmıştır. Lineerleştirme için aşağıdaki adımlar takip edilmiştir.

Adım 1: Lineerliği bozan U_m^{n+1} yerine U_m^n al.

Adım 2: U_m^{n+1} değerlerini bul.

Adım 3: Hata=$\max_m \{|U_m^{n+1} - U_m^n|\}$ hesapla.

Adım 4: Hata$> 10^{-15}$ ise sadece lineerliği bozan terimleri güncelle ve Adım 1 e git.

Adım 5: Bir sonraki zaman adımına geç.

4.2 Zamana Göre 2 ve Konuma Göre 4. Mertebeden Metot (Metot 2)

M1 metodu verilirken Burgers denklemine Crank-Nicolson yöntemi uygulanmış ve

$$u^{n+1} + \frac{k}{2}(uu_x)^{n+1} - \frac{\nu k}{2}u_{xx}^{n+1} = u^n - \frac{k}{2}(uu_x)^n + \frac{\nu k}{2}u_{xx}^n$$

elde edilmişti. Bu bölümde geçen bölümden farklı olarak konuma göre ikinci mertebeden değil, dördüncü mertebeden yaklaşımlar kullanılacaktır. Bu durumda

konuma göre parçalanma için x_m, $m = 2, 3, \ldots, N-2$ noktalarında dördüncü mertebeden doğruluğa sahip olan

$$(u_x)_m^n = \frac{1}{12h}\left(U_{m-2}^n - 8U_{m-1}^n + 8U_{m+1}^n - U_{m+2}^n\right) + \mathcal{O}(h^4), \tag{4.10}$$

$$(u_{xx})_m^n = \frac{1}{12h^2}\left(-U_{m-2}^n + 16U_{m-1}^n - 30U_m^n + 16U_{m+1}^n - U_{m+2}^n\right) + \mathcal{O}(h^4), \tag{4.11}$$

yaklaşımları kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&U_{m-2}^{n+1}\left(\frac{kU_m^{n+1}}{24h} + \frac{\nu k}{12h^2}\right) + U_{m-1}^{n+1}\left(-\frac{kU_m^{n+1}}{3h} - \frac{4\nu k}{3h^2}\right) + U_m^{n+1}\left(1 + \frac{5\nu k}{2h^2}\right) \\
&+U_{m+1}^{n+1}\left(\frac{kU_m^{n+1}}{3h} - \frac{4\nu k}{3h^2}\right) + U_{m+2}^{n+1}\left(-\frac{kU_m^{n+1}}{24h} + \frac{\nu k}{12h^2}\right) = \\
&U_{m-2}^{n}\left(-\frac{kU_m^{n}}{24h} - \frac{\nu k}{12h^2}\right) + U_{m-1}^{n}\left(\frac{kU_m^{n}}{3h} + \frac{4\nu k}{3h^2}\right) + U_m^{n}\left(1 - \frac{5\nu k}{2h^2}\right) \\
&+U_{m+1}^{n}\left(-\frac{kU_m^{n}}{3h} + \frac{4\nu k}{3h^2}\right) + U_{m+2}^{n}\left(\frac{kU_m^{n}}{24h} - \frac{\nu k}{12h^2}\right)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

elde edilir. Denklem sistemi $N+1$ bilinmeyen $N-3$ denklemden oluşan bir sistemdir.

$$\begin{aligned}
U(a, t_{n+1}) &= U(b, t_{n+1}) = 0 \\
U_x(a, t_{n+1}) &= U_x(b, t_{n+1}) = 0
\end{aligned}$$

sınır şartlarından

$$U_0^{n+1} = 0, \tag{4.13}$$

$$U_N^{n+1} = 0, \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
(U_x)_0^{n+1} = \frac{1}{12h}\big\{&-25U_0^{n+1} + 48U_1^{n+1} - 36U_2^{n+1} \\
&+16U_3^{n+1} - 3U_4^{n+1}\big\} = 0
\end{aligned}, \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
(U_x)_N^{n+1} = \tfrac{1}{12h}\big\{&3U_{N-4}^{n+1} - 16U_{N-3}^{n+1} + 36U_{N-2}^{n+1} \\
&-48U_{N-1}^{n+1} + 25U_N^{n+1}\big\} = 0
\end{aligned} \tag{4.16}$$

yaklaşık sınır şartları bulunabilir. Burada konum aralığının başlangıç ve uç noktalarında birinci türev için bulunan yaklaşımlarda dördüncü mertebeden doğruluğa sahiptir. Bulunan 4 denklem (4.12) sistemine eklenirse $N+1$ denklem $N+1$ bilinmeyenden oluşan bir sistem bulunur.

Denklem sisteminin çözülebilmesi için gerekli olan

$$U_0^0, U_1^0, \ldots, U_{N-1}^0, U_N^0 \tag{4.17}$$

değerleri başlangıç şartından hesaplanır ve bu değerlerin kullanılmasıyla denklem sistemi çözülerek öncelikle

$$U_0^1, U_1^1, U_2^1, \cdots, U_{N-2}^1, U_{N-1}^1, U_N^1 \tag{4.18}$$

bilinmeyenlerinin tümü bulunur. Bundan sonraki adımlar iteratif olarak istenilen zamana kadar devam ettirilir.

Denklem sistemi lineer olmadığından her bir adımda iç iterasyon ile lineerleştirme yapılmıştır. Lineerleştirme için aşağıdaki adımlar takip edilmiştir.

Adım 1: Lineerliği bozan U_m^{n+1} yerine U_m^n al.

Adım 2: U_m^{n+1} değerlerini bul.

Adım 3: Hata=$\max_m \{|U_m^{n+1} - U_m^n|\}$ hesapla.

Adım 4: Hata> 10^{-15} ise sadece lineerliği bozan terimleri güncelle ve Adım 1 e git.

Adım 5: Bir sonraki zaman adımına geç.

4.3 Zamana Göre 4 ve Konuma Göre 2. Mertebeden Metot (Metot 3)

Burgers denklemi birinci bölümde

$$u_t + uu_x - \nu u_{xx} = 0,\ a < x < b,\ t > 0$$

formunda verilmişti. Burgers denklemi

$$u_t = f(\cdot) = \nu u_{xx} - uu_x$$

olarakta yazılabilir. Ayrıca bu eşitlikten

$$\begin{aligned} f_t(\cdot) &= (\nu u_{xx} - uu_x)_t \\ &= 2uu_x u_x + (-4\nu u_x + uu)\, u_{xx} \\ &\quad -2\nu uu_{xxx} + \nu^2 u_{xxxx} \end{aligned} \tag{4.19}$$

bulunabilir. Burgers denklemi için

$$u^{n+1} = u^n + \theta_1 f\,(\cdot)^{n+1} + \theta_2 f\,(\cdot)^n + \theta_3 f_t\,(\cdot)^{n+1} + \theta_4 f_t\,(\cdot)^n$$

olarak önerilen zaman parçalanmasında

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{k}{2},\ \theta_3 = -\frac{k^2}{12},\ \theta_4 = \frac{k^2}{12},$$

alınır ve önerilen yaklaşımda gerekli olan $f_t(\cdot)$ değeri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= u^n + \frac{k}{2}\left(\nu u_{xx} - u u_x\right)^{n+1} + \frac{k}{2}\left(\nu u_{xx} - u u_x\right)^n \\ &\quad -\frac{k^2}{12}\left(2uu_xu_x + \left(-4\nu u_x + uu\right)u_{xx} - 2\nu u u_{xxx} + \nu^2 u_{xxxx}\right)^{n+1} \\ &\quad +\frac{k^2}{12}\left(2uu_xu_x + \left(-4\nu u_x + uu\right)u_{xx} - 2\nu u u_{xxx} + \nu^2 u_{xxxx}\right)^{n} \end{aligned} \tag{4.20}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa Burgers denkleminin sayısal çözümü için zaman parçalanması yapıldıktan sonraki yaklaşım

$$\begin{aligned} &u^{n+1} + \left[\frac{k}{2}u^{n+1} + 2\frac{k^2}{12}u^{n+1}\left(u_x\right)^{n+1} - 4\nu\frac{k^2}{12}\right]\left(u_x\right)^{n+1} + \\ &\left[-\frac{k}{2}\nu + \frac{k^2}{12}u^{n+1}u^{n+1}\right]\left(u_{xx}\right)^{n+1} - 2\nu\frac{k^2}{12}u^{n+1}\left(u_{xxx}\right)^{n+1} \\ &+\frac{k^2}{12}\nu^2\left(u_{xxxx}\right)^{n+1} = u^n + \left[-\frac{k}{2}u^n + 2\frac{k^2}{12}u^n\left(u_x\right)^n - 4\nu\frac{k^2}{12}\right]\left(u_x\right)^n + \\ &\left[\frac{k}{2}\nu + \frac{k^2}{12}u^nu^n\right]\left(u_{xx}\right)^n - 2\nu\frac{k^2}{12}u^n\left(u_{xxx}\right)^n + \nu^2\frac{k^2}{12}\left(u_{xxxx}\right)^n \end{aligned} \tag{4.21}$$

olarak bulunur. Konuma göre parçalanma içinde x_m, $m = 2, \ldots, N-2$ noktalarında ikinci mertebeden doğruluğa sahip olan

$$\begin{aligned} u_x(x_m, t_n) &= \left(u_x\right)_m^n = \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \\ u_{xx}(x_m, t_n) &= \left(u_{xx}\right)_m^n = \frac{U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n}{h^2} + \mathcal{O}(h^2), \\ u_{xxx}(x_m, t_n) &= \left(u_{xxx}\right)_m^n = \frac{U_{m-2}^n + 2U_{m-1}^n - 2U_{m+1}^n + U_{m+2}^n}{2h^3} + \mathcal{O}(h^2), \\ u_{xxxx}(x_m, t_n) &= \left(u_{xxxx}\right)_m^n = \frac{U_{m-2}^n - 4U_{m-1}^n + 6U_m^n - 4U_{m+1}^n + U_{m+2}^n}{4h^4} + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

yaklaşımları kullanılırsa

$$\begin{aligned} \alpha_{m1} &= -2\nu\frac{k^2}{12}U_m^{n+1}\left(\frac{1}{2h^3}\right) + \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{1}{4h^4}\right), \\ \alpha_{m2} &= \left(\frac{k}{2}U_m^{n+1} + 2\frac{k^2}{12}U_m^{n+1}\left(U_x\right)_m^{n+1} - 4\nu\frac{k^2}{12}\right)\left(-\frac{1}{2h}\right) \\ &\quad + \left(-\frac{k}{2}\nu + \frac{k^2}{12}U_m^{n+1}U_m^{n+1}\right)\left(\frac{1}{h^2}\right) - 2\nu\frac{k^2}{12}U_m^{n+1}\left(\frac{-2}{2h^3}\right) + \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{-4}{4h^4}\right), \\ \alpha_{m3} &= 1 + \left(-\frac{k}{2}\nu + \frac{k^2}{12}U_m^{n+1}U_m^{n+1}\right)\left(-\frac{2}{h^2}\right) + \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{6}{4h^4}\right), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_{m4} &= \left(\frac{k}{2}U_m^{n+1} + 2\frac{k^2}{12}U_m^{n+1}\left(U_x\right)_m^{n+1} - 4\nu\frac{k^2}{12}\right)\left(\frac{1}{2h}\right) + \left(-\frac{k}{2}\nu + \frac{k^2}{12}U_m^{n+1}U_m^{n+1}\right)\left(\frac{2}{h^2}\right) \\
&\quad -2\nu\frac{k^2}{12}U_m^{n+1}\left(\frac{1}{2h^3}\right) + \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{-4}{4h^4}\right), \\
\alpha_{m5} &= -2\nu\frac{k^2}{12}U_m^{n+1}\left(\frac{1}{2h^3}\right) + \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{1}{4h^4}\right), \\
\beta_{m1} &= -2\nu\frac{k^2}{12}U_m^{n}\left(\frac{1}{2h^3}\right) + \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{1}{4h^4}\right), \\
\beta_{m2} &= \left(-\frac{k}{2}U_m^{n} + 2\frac{k^2}{12}U_m^{n}\left(u_x\right)^n - 4\nu\frac{k^2}{12}\right)\left(-\frac{1}{2h}\right) + \left(\frac{k}{2}\nu + \frac{k^2}{12}U_m^{n}U_m^{n}\right)\left(\frac{1}{h^2}\right) \\
&\quad -2\nu\frac{k^2}{12}U_m^{n}\left(\frac{-2}{2h^3}\right) + \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{-4}{4h^4}\right), \\
\beta_{m3} &= 1 + \left(\frac{k}{2}\nu + \frac{k^2}{12}U_m^{n}U_m^{n}\right)\left(-\frac{2}{h^2}\right) + \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{6}{4h^4}\right), \\
\beta_{m4} &= \left(-\frac{k}{2}U_m^{n} + 2\frac{k^2}{12}U_m^{n}\left(u_x\right)^n - 4\nu\frac{k^2}{12}\right)\left(\frac{1}{2h}\right) + \left(\frac{k}{2}\nu + \frac{k^2}{12}U_m^{n}U_m^{n}\right)\left(\frac{2}{h^2}\right) \\
&\quad -2\nu\frac{k^2}{12}U_m^{n}\left(\frac{1}{2h^3}\right) + \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{-4}{4h^4}\right), \\
\beta_{m5} &= -2\nu\frac{k^2}{12}U_m^{n}\left(\frac{1}{2h^3}\right) + \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{1}{4h^4}\right),
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$
\begin{gathered}
\alpha_{m1}U_{m-2}^{n+1} + \alpha_{m2}U_{m-1}^{n+1} + \alpha_{m3}U_m^{n+1} + \alpha_{m4}U_{m+1}^{n+1} + \alpha_{m5}U_{m+2}^{n+1} \\
= \\
\beta_{m1}U_{m-2}^{n} + \beta_{m2}U_{m-1}^{n} + \beta_{m3}U_m^{n} + \beta_{m4}U_{m+1}^{n} + \beta_{m5}U_{m+2}^{n}
\end{gathered}
\tag{4.22}
$$

elde edilir. Denklem sistemi $N+1$ bilinmeyen $N-3$ denklemden oluşan bir sistemdir. Sınır şartlarından

$$
\begin{aligned}
U(a,t_{n+1}) &= U(b,t_{n+1}) = 0 \\
U_x(a,t_{n+1}) &= U_x(b,t_{n+1}) = 0
\end{aligned}
$$

kullanıldığında

$$
U_0^{n+1} = 0, \tag{4.23}
$$

$$
U_N^{n+1} = 0, \tag{4.24}
$$

$$
\left(U_x\right)_0^{n+1} = \frac{1}{2h}\left(-3U_0^{n+1} + 4U_1^{n+1} - U_2^{n+1}\right) = 0, \tag{4.25}
$$

$$
\left(U_x\right)_N^{n+1} = \frac{1}{2h}\left(U_{N-2}^{n+1} - 4U_{N-1}^{n+1} + 3U_N^{n+1}\right) = 0 \tag{4.26}
$$

yaklaşık sınır şartları bulunacaktır. Bulunan 4 denklem (4.12) sistemine eklenirse $N+1$ denklem $N+1$ bilinmeyenden oluşan bir sistem bulunur.

Denklem sisteminin çözülebilmesi için gerekli olan

$$U_0^0, U_1^0, \ldots, U_{N-1}^0, U_N^0 \tag{4.27}$$

değerleri başlangıç şartından hesaplanır ve bu değerlerin kullanılmasıyla denklem sistemi çözülerek öncelikle

$$U_0^1, U_1^1, U_2^1, \cdots, U_{N-2}^1, U_{N-1}^1, U_N^1 \tag{4.28}$$

bilinmeyenlerinin tümü bulunur. Bundan sonraki adımlar iteratif olarak istenilen zamana kadar devam ettirilir.

Denklem sistemi lineer olmadığından her bir adımda iç iterasyon ile lineerleştirme yapılmıştır. Lineerleştirme için aşağıdaki adımlar takip edilmiştir.

Adım 1: Lineerliği bozan U_m^{n+1} ve $(U_x)_m^{n+1}$ yerine U_m^n ve $(U_x)_m^n$ al.

Adım 2: U_m^{n+1} ve $(U_x)_m^{n+1}$ değerlerini bul.

Adım 3: Hata=$\max_m \{|U_m^{n+1} - U_m^n|\}$ hesapla.

Adım 4: Hata> 10^{-15} ise sadece lineerliği bozan terimleri güncelle ve Adım 1 e git.

Adım 5: Bir sonraki zaman adımına geç.

4.4 Zamana Göre ve Konuma Göre 4. Mertebeden Metot (Metot 4)

M3 metodu verilirken Burgers denkleminin sayısal çözümü için zaman parçalanması yapıldıktan sonraki yaklaşım

$$\begin{aligned}
&u^{n+1} + \left[\frac{k}{2}u^{n+1} + 2\frac{k^2}{12}u^{n+1}\left(u_x\right)^{n+1} - 4\nu\frac{k^2}{12}\right]\left(u_x\right)^{n+1} + \\
&\left[-\frac{k}{2}\nu + \frac{k^2}{12}u^{n+1}u^{n+1}\right]\left(u_{xx}\right)^{n+1} - 2\nu\frac{k^2}{12}u^{n+1}\left(u_{xxx}\right)^{n+1} \\
&+\frac{k^2}{12}\nu^2\left(u_{xxxx}\right)^{n+1} = u^n + \left[-\frac{k}{2}u^n + 2\frac{k^2}{12}u^n\left(u_x\right)^n - 4\nu\frac{k^2}{12}\right]\left(u_x\right)^n + \\
&\left[\frac{k}{2}\nu + \frac{k^2}{12}u^n u^n\right]\left(u_{xx}\right)^n - 2\nu\frac{k^2}{12}u^n\left(u_{xxx}\right)^n + \nu^2\frac{k^2}{12}\left(u_{xxxx}\right)^n
\end{aligned}$$

olarak elde edilmişti. Bu yaklaşım dördüncü mertebeden bir doğruluğa sahipti. Bu bölümde geçen bölümden farklı olarak konuma göre ikinci mertebeden değil, dördüncü

mertebeden yaklaşımlar kullanılacaktır. Konuma göre parçalanma içinde x_2 noktasında dördüncü mertebeden doğruluğa sahip

$$\begin{aligned}
(u_x)_2^n &= \frac{1}{12h}\left(U_0^n - 8U_1^n + 8U_3^n - U_4^n\right) + \mathcal{O}(h^4),\\
(u_{xx})_2^n &= \frac{1}{12h^2}\left(-U_0^n + 16U_1^n - 30U_2^n + 16U_3^n - U_4^n\right) + \mathcal{O}(h^4),\\
(u_{xxx})_2^n &= \frac{1}{8h^3}\left(-U_0^n - 8U_1^n + 35U_2^n - 48U_3^n + 29U_4^n - 8U_5^n + U_6^n\right) + \mathcal{O}(h^4),\\
(u_{xxxx})_2^n &= \frac{1}{6h^4}\left(4U_0^n - 11U_1^n + 31U_3^n - 44U_4^n + 27U_5^n - 8U_6^n + U_7^n\right) + \mathcal{O}(h^4),
\end{aligned}$$

yaklaşımları kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\alpha_{m1} &= \left(\frac{k}{2}U_2^{n+1} + 2\frac{k^2}{12}U_2^{n+1}\left(U_x\right)_2^{n+1} - 4\nu\frac{k^2}{12}\right)\left(\frac{1}{12h}\right)\\
&\quad + \left(-\frac{k}{2}\nu + \frac{k^2}{12}U_2^{n+1}U_2^{n+1}\right)\left(\frac{-1}{12h^2}\right) - 2\nu\frac{k^2}{12}U_2^{n+1}\left(\frac{-1}{8h^3}\right) + \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{4}{6h^4}\right),\\
\alpha_{m2} &= \left(\frac{k}{2}U_2^{n+1} + 2\frac{k^2}{12}U_2^{n+1}\left(U_x\right)_2^{n+1} - 4\nu\frac{k^2}{12}\right)\left(\frac{-8}{12h}\right)\\
&\quad + \left(-\frac{k}{2}\nu + \frac{k^2}{12}U_2^{n+1}U_2^{n+1}\right)\left(\frac{16}{12h^2}\right) - 2\nu\frac{k^2}{12}U_2^{n+1}\left(\frac{-8}{8h^3}\right) + \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{-11}{6h^4}\right),\\
\alpha_{m3} &= 1 + \left(-\frac{k}{2}\nu + \frac{k^2}{12}U_2^{n+1}U_2^{n+1}\right)\left(\frac{-30}{12h^2}\right) - 2\nu\frac{k^2}{12}U_2^{n+1}\left(\frac{35}{8h^3}\right),\\
\alpha_{m4} &= \left(\frac{k}{2}U_2^{n+1} + 2\frac{k^2}{12}U_2^{n+1}\left(U_x\right)_2^{n+1} - 4\nu\frac{k^2}{12}\right)\left(\frac{8}{12h}\right)\\
&\quad + \left(-\frac{k}{2}\nu + \frac{k^2}{12}U_2^{n+1}U_2^{n+1}\right)\left(\frac{16}{12h^2}\right) - 2\nu\frac{k^2}{12}U_2^{n+1}\left(\frac{-48}{8h^3}\right) + \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{31}{6h^4}\right),\\
\alpha_{m5} &= \left(\frac{k}{2}U_2^{n+1} + 2\frac{k^2}{12}U_2^{n+1}\left(U_x\right)_2^{n+1} - 4\nu\frac{k^2}{12}\right)\left(\frac{-1}{12h}\right)\\
&\quad + \left(-\frac{k}{2}\nu + \frac{k^2}{12}U_2^{n+1}U_2^{n+1}\right)\left(\frac{-1}{12h^2}\right) - 2\nu\frac{k^2}{12}U_2^{n+1}\left(\frac{29}{8h^3}\right) + \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{-44}{6h^4}\right),\\
\alpha_{m6} &= -2\nu\frac{k^2}{12}U_2^{n+1}\left(\frac{-8}{8h^3}\right) + \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{27}{6h^4}\right),\\
\alpha_{m7} &= -2\nu\frac{k^2}{12}U_2^{n+1}\left(\frac{1}{8h^3}\right) + \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{-8}{6h^4}\right),\\
\alpha_{m8} &= \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{1}{6h^4}\right),\\
\beta_{m1} &= \left(-\frac{k}{2}U_2^{n} + 2\frac{k^2}{12}U_2^{n}\left(U_x\right)_2^{n} - 4\nu\frac{k^2}{12}\right)\left(\frac{1}{12h}\right) + \left(\frac{k}{2}\nu + \frac{k^2}{12}U_2^{n}U_2^{n}\right)\left(\frac{-1}{12h^2}\right)\\
&\quad -2\nu\frac{k^2}{12}U_2^{n}\left(\frac{-1}{8h^3}\right) + \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{4}{6h^4}\right),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\beta_{m2} &= \left(-\frac{k}{2}U_2^n + 2\frac{k^2}{12}U_2^n\left(U_x\right)_2^n - 4\nu\frac{k^2}{12}\right)\left(\frac{-8}{12h}\right) + \left(\frac{k}{2}\nu + \frac{k^2}{12}U_2^nU_2^n\right)\left(\frac{16}{12h^2}\right) \\
&\quad -2\nu\frac{k^2}{12}U_2^n\left(\frac{-8}{8h^3}\right) + \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{-11}{6h^4}\right), \\
\beta_{m3} &= 1 + \left(\frac{k}{2}\nu + \frac{k^2}{12}U_2^nU_2^n\right)\left(\frac{-30}{12h^2}\right) - 2\nu\frac{k^2}{12}U_2^n\left(\frac{35}{8h^3}\right) \\
\beta_{m4} &= \left(-\frac{k}{2}U_2^n + 2\frac{k^2}{12}U_2^n\left(U_x\right)_2^n - 4\nu\frac{k^2}{12}\right)\left(\frac{8}{12h}\right) + \left(\frac{k}{2}\nu + \frac{k^2}{12}U_2^nU_2^n\right)\left(\frac{16}{12h^2}\right) \\
&\quad -2\nu\frac{k^2}{12}U_2^n\left(\frac{-48}{8h^3}\right) + \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{31}{6h^4}\right), \\
\beta_{m5} &= \left(-\frac{k}{2}U_2^n + 2\frac{k^2}{12}U_2^n\left(U_x\right)_2^n - 4\nu\frac{k^2}{12}\right)\left(\frac{-1}{12h}\right) + \left(\frac{k}{2}\nu + \frac{k^2}{12}U_2^nU_2^n\right)\left(\frac{-1}{12h^2}\right) \\
&\quad -2\nu\frac{k^2}{12}U_2^n\left(\frac{29}{8h^3}\right) + \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{-44}{6h^4}\right), \\
\beta_{m6} &= -2\nu\frac{k^2}{12}U_2^n\left(\frac{-8}{8h^3}\right) + \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{27}{6h^4}\right), \\
\beta_{m7} &= -2\nu\frac{k^2}{12}U_2^n\left(\frac{1}{8h^3}\right) + \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{-8}{6h^4}\right), \\
\beta_{m8} &= \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{1}{6h^4}\right)
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{m1}U_0^{n+1} + \alpha_{m2}U_1^{n+1} + \alpha_{m3}U_2^{n+1} + \alpha_{m4}U_3^{n+1} + \alpha_{m5}U_4^{n+1} + \alpha_{m6}U_5^{n+1} \\
&+\alpha_{m7}U_6^{n+1} + \alpha_{m8}U_7^{n+1} = \beta_{m1}U_0^n + \beta_{m2}U_1^n \\
&+\beta_{m3}U_2^n + \beta_{m4}U_3^n + \beta_{m5}U_4^n + \beta_{m6}U_5^n + \beta_{m7}U_6^n + \beta_{m8}U_7^n
\end{aligned} \tag{4.29}
$$

denklemi elde edilir. x_m, $m = 3, \ldots, N-3$ noktalarında dördüncü mertebeden doğruluğa sahip olan

$$
\begin{aligned}
\left(u_x\right)_m^n &= \frac{1}{12h}\left(U_{m-2}^n - 8U_{m-1}^n + 8U_{m+1}^n - U_{m+2}^n\right) + \mathcal{O}(h^4), \\
\left(u_{xx}\right)_m^n &= \frac{1}{12h^2}\left(-U_{m-2}^n + 16U_{m-1}^n - 30U_m^n + 16U_{m+1}^n - U_{m+2}^n\right) + \mathcal{O}(h^4), \\
\left(u_{xxx}\right)_m^n &= \frac{1}{8h^3}\left(U_{m-3}^n - 8U_{m-2}^n + 13U_{m-1}^n - 13U_{m+1}^n + 8U_{m+2}^n - U_{m+3}^n\right) + \mathcal{O}(h^4), \\
\left(u_{xxxx}\right)_m^n &= \frac{1}{6h^4}\left(-U_{m-3}^n + 12U_{m-2}^n - 39U_{m-1}^n + 56U_m^n - 39U_{m+1}^n + 12U_{m+2}^n - U_{m+3}^n\right) \\
&\quad +\mathcal{O}(h^4),
\end{aligned}
$$

yaklaşımları kullanılırsa

$$
\alpha_{m1} = -2\nu\frac{k^2}{12}U_m^{n+1}\left(\frac{1}{8h^3}\right) + \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{-1}{6h^4}\right),
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_{m2} &= \left(\frac{k}{2}U_m^{n+1} + 2\frac{k^2}{12}U_m^{n+1}\left(U_x\right)_m^{n+1} - 4\nu\frac{k^2}{12}\right)\left(\frac{1}{12h}\right) \\
&\quad + \left(-\frac{k}{2}\nu + \frac{k^2}{12}U_m^{n+1}U_m^{n+1}\right)\left(\frac{-1}{12h^2}\right) - 2\nu\frac{k^2}{12}U_m^{n+1}\left(\frac{-8}{8h^3}\right) + \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{12}{6h^4}\right), \\
\alpha_{m3} &= \left(\frac{k}{2}U_m^{n+1} + 2\frac{k^2}{12}U_m^{n+1}\left(U_x\right)_m^{n+1} - 4\nu\frac{k^2}{12}\right)\left(\frac{-8}{12h}\right) \\
&\quad + \left(-\frac{k}{2}\nu + \frac{k^2}{12}U_m^{n+1}U_m^{n+1}\right)\left(\frac{16}{12h^2}\right) - 2\nu\frac{k^2}{12}U_m^{n+1}\left(\frac{13}{8h^3}\right) + \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{-39}{6h^4}\right), \\
\alpha_{m4} &= 1 + \left(-\frac{k}{2}\nu + \frac{k^2}{12}U_m^{n+1}U_m^{n+1}\right)\left(\frac{-30}{12h^2}\right) + \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{56}{6h^4}\right), \\
\alpha_{m5} &= \left(\frac{k}{2}U_m^{n+1} + 2\frac{k^2}{12}U_m^{n+1}\left(U_x\right)_m^{n+1} - 4\nu\frac{k^2}{12}\right)\left(\frac{8}{12h}\right) \\
&\quad + \left(-\frac{k}{2}\nu + \frac{k^2}{12}U_m^{n+1}U_m^{n+1}\right)\left(\frac{16}{12h^2}\right) - 2\nu\frac{k^2}{12}U_m^{n+1}\left(\frac{-13}{8h^3}\right) + \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{-39}{6h^4}\right), \\
\alpha_{m6} &= \left(\frac{k}{2}U_m^{n+1} + 2\frac{k^2}{12}U_m^{n+1}\left(U_x\right)_m^{n+1} - 4\nu\frac{k^2}{12}\right)\left(\frac{-1}{12h}\right) \\
&\quad + \left(-\frac{k}{2}\nu + \frac{k^2}{12}U_m^{n+1}U_m^{n+1}\right)\left(\frac{-1}{12h^2}\right) - 2\nu\frac{k^2}{12}U_m^{n+1}\left(\frac{8}{8h^3}\right) + \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{12}{6h^4}\right), \\
\alpha_{m7} &= -2\nu\frac{k^2}{12}U_m^{n+1}\left(\frac{-1}{8h^3}\right) + \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{-1}{6h^4}\right), \\
\beta_{m1} &= -2\nu\frac{k^2}{12}U_m^{n}\left(\frac{1}{8h^3}\right) + \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{-1}{6h^4}\right), \\
\beta_{m2} &= \left(-\frac{k}{2}U_m^{n} + 2\frac{k^2}{12}U_m^{n}\left(U_x\right)_m^{n} - 4\nu\frac{k^2}{12}\right)\left(\frac{1}{12h}\right) + \left(\frac{k}{2}\nu + \frac{k^2}{12}U_m^{n}U_m^{n}\right)\left(\frac{-1}{12h^2}\right) \\
&\quad -2\nu\frac{k^2}{12}U_m^{n}\left(\frac{-8}{8h^3}\right) + \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{12}{6h^4}\right), \\
\beta_{m3} &= \left(-\frac{k}{2}U_m^{n} + 2\frac{k^2}{12}U_m^{n}\left(U_x\right)_m^{n} - 4\nu\frac{k^2}{12}\right)\left(\frac{-8}{12h}\right) + \left(\frac{k}{2}\nu + \frac{k^2}{12}U_m^{n}U_m^{n}\right)\left(\frac{16}{12h^2}\right) \\
&\quad -2\nu\frac{k^2}{12}U_m^{n}\left(\frac{13}{8h^3}\right) + \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{-39}{6h^4}\right), \\
\beta_{m4} &= 1 + \left(\frac{k}{2}\nu + \frac{k^2}{12}U_m^{n}U_m^{n}\right)\left(\frac{-30}{12h^2}\right) + \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{56}{6h^4}\right), \\
\beta_{m5} &= \left(-\frac{k}{2}U_m^{n} + 2\frac{k^2}{12}U_m^{n}\left(U_x\right)_m^{n} - 4\nu\frac{k^2}{12}\right)\left(\frac{8}{12h}\right) + \left(\frac{k}{2}\nu + \frac{k^2}{12}U_m^{n}U_m^{n}\right)\left(\frac{16}{12h^2}\right) \\
&\quad -2\nu\frac{k^2}{12}U_m^{n}\left(\frac{-13}{8h^3}\right) + \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{-39}{6h^4}\right), \\
\beta_{m6} &= \left(-\frac{k}{2}U_m^{n} + 2\frac{k^2}{12}U_m^{n}\left(U_x\right)_m^{n} - 4\nu\frac{k^2}{12}\right)\left(\frac{-1}{12h}\right) + \left(\frac{k}{2}\nu + \frac{k^2}{12}U_m^{n}U_m^{n}\right)\left(\frac{-1}{12h^2}\right) \\
&\quad -2\nu\frac{k^2}{12}U_m^{n}\left(\frac{8}{8h^3}\right) + \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{12}{6h^4}\right), \\
\beta_{m7} &= -2\nu\frac{k^2}{12}U_m^{n}\left(\frac{-1}{8h^3}\right) + \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{-1}{6h^4}\right)
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}&\alpha_{m1}U_{m-3}^{n+1}+\alpha_{m2}U_{m-2}^{n+1}+\alpha_{m3}U_{m-1}^{n+1}+\alpha_{m4}U_{m}^{n+1}+\alpha_{m5}U_{m+1}^{n+1}\\&+\alpha_{m6}U_{m+2}^{n+1}+\alpha_{m7}U_{m+3}^{n+1}=\beta_{m1}U_{m-3}^{n}+\beta_{m2}U_{m-2}^{n}+\beta_{m3}U_{m-1}^{n}\\&+\beta_{m4}U_{m}^{n}+\beta_{m5}U_{m+1}^{n}+\beta_{m6}U_{m+2}^{n}+\beta_{m7}U_{m+3}^{n}\end{aligned}\tag{4.30}$$

denklemleri elde edilir. Benzer şekilde x_{N-2} noktasında dördüncü mertebeden doğruluğa sahip

$$\begin{aligned}(u_x)_{N-2}^{n}&=\frac{1}{12h}\left(U_{N-4}^{n}-8U_{N-3}^{n}+8U_{N-1}^{n}-U_{N}^{n}\right)+\mathcal{O}(h^4),\\(u_{xx})_{N-2}^{n}&=\frac{1}{12h^2}\left(-U_{N-4}^{n}+16U_{N-3}^{n}-30U_{N-2}^{n}+16U_{N-1}^{n}-U_{N}^{n}\right)+\mathcal{O}(h^4),\\(u_{xxx})_{N-2}^{n}&=\frac{1}{8h^3}\left(-U_{N-6}^{n}+8U_{N-5}^{n}-29U_{N-4}^{n}+48U_{N-3}^{n}-35U_{N-2}^{n}+8U_{N-1}^{n}-U_{N}^{n}\right)+\mathcal{O}(h^4),\\(u_{xxxx})_{N-2}^{n}&=\frac{1}{6h^4}\left(U_{N-7}^{n}-8U_{N-6}^{n}+27U_{N-5}^{n}-44U_{N-4}^{n}+31U_{N-3}^{n}-11U_{N-1}^{n}+6U_{N}^{n}\right)+\mathcal{O}(h^4),\end{aligned}$$

yaklaşımları kullanılırsa

$$\begin{aligned}\alpha_{m1}&=\frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{1}{6h^4}\right),\\\alpha_{m2}&=-2\nu\frac{k^2}{12}U_{N-2}^{n+1}\left(\frac{-1}{8h^3}\right)+\frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{-8}{6h^4}\right),\\\alpha_{m3}&=-2\nu\frac{k^2}{12}U_{N-2}^{n+1}\left(\frac{8}{8h^3}\right)+\frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{27}{6h^4}\right),\\\alpha_{m4}&=\left(\frac{k}{2}U_{N-2}^{n+1}+2\frac{k^2}{12}U_{N-2}^{n+1}\left(U_x\right)_{N-2}^{n+1}-4\nu\frac{k^2}{12}\right)\left(\frac{1}{12h}\right)\\&\quad+\left(-\frac{k}{2}\nu+\frac{k^2}{12}U_{N-2}^{n+1}U_{N-2}^{n+1}\right)\left(\frac{-1}{12h^2}\right)-2\nu\frac{k^2}{12}U_{N-2}^{n+1}\left(\frac{-29}{8h^3}\right)+\frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{-44}{6h^4}\right),\\\alpha_{m5}&=\left(\frac{k}{2}U_{N-2}^{n+1}+2\frac{k^2}{12}U_{N-2}^{n+1}\left(U_x\right)_{N-2}^{n+1}-4\nu\frac{k^2}{12}\right)\left(\frac{-8}{12h}\right)\\&\quad+\left(-\frac{k}{2}\nu+\frac{k^2}{12}U_{N-2}^{n+1}U_{N-2}^{n+1}\right)\left(\frac{16}{12h^2}\right)-2\nu\frac{k^2}{12}U_{N-2}^{n+1}\left(\frac{48}{8h^3}\right)+\frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{31}{6h^4}\right),\\\alpha_{m6}&=1+\left(-\frac{k}{2}\nu+\frac{k^2}{12}U_{N-2}^{n+1}U_{N-2}^{n+1}\right)\left(\frac{-30}{12h^2}\right)-2\nu\frac{k^2}{12}U_{N-2}^{n+1}\left(\frac{-35}{8h^3}\right),\\\alpha_{m7}&=\left(\frac{k}{2}U_{N-2}^{n+1}+2\frac{k^2}{12}U_{N-2}^{n+1}\left(U_x\right)_{N-2}^{n+1}-4\nu\frac{k^2}{12}\right)\left(\frac{8}{12h}\right)\\&\quad-+\left(-\frac{k}{2}\nu+\frac{k^2}{12}U_{N-2}^{n+1}U_{N-2}^{n+1}\right)\left(\frac{16}{12h^2}\right)2\nu\frac{k^2}{12}U_{N-2}^{n+1}\left(\frac{8}{8h^3}\right)+\frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{-11}{6h^4}\right),\\\alpha_{m8}&=\left(\frac{k}{2}U_{N-2}^{n+1}+2\frac{k^2}{12}U_{N-2}^{n+1}\left(U_x\right)_{N-2}^{n+1}-4\nu\frac{k^2}{12}\right)\left(\frac{-1}{12h}\right)\\&\quad-+\left(-\frac{k}{2}\nu+\frac{k^2}{12}U_{N-2}^{n+1}U_{N-2}^{n+1}\right)\left(\frac{-1}{12h^2}\right)2\nu\frac{k^2}{12}U_{N-2}^{n+1}\left(\frac{-1}{8h^3}\right)+\frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{6}{6h^4}\right),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\beta_{m1} &= \frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{1}{6h^4}\right),\\
\beta_{m2} &= -2\nu\frac{k^2}{12}U_{N-2}^n\left(\frac{-1}{8h^3}\right)+\frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{-8}{6h^4}\right),\\
\beta_{m3} &= -2\nu\frac{k^2}{12}U_{N-2}^n\left(\frac{8}{8h^3}\right)+\frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{27}{6h^4}\right),\\
\beta_{m4} &= \left(-\frac{k}{2}U_{N-2}^n+2\frac{k^2}{12}U_{N-2}^n\left(U_x\right)_{N-2}^n-4\nu\frac{k^2}{12}\right)\left(\frac{1}{12h}\right)\\
&\quad -+\left(\frac{k}{2}\nu+\frac{k^2}{12}U_{N-2}^nU_{N-2}^n\right)\left(\frac{-1}{12h^2}\right)2\nu\frac{k^2}{12}U_{N-2}^n\left(\frac{-29}{8h^3}\right)+\frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{-44}{6h^4}\right),\\
\beta_{m5} &= \left(-\frac{k}{2}U_{N-2}^n+2\frac{k^2}{12}U_{N-2}^n\left(U_x\right)_{N-2}^n-4\nu\frac{k^2}{12}\right)\left(\frac{-8}{12h}\right)\\
&\quad +\left(\frac{k}{2}\nu+\frac{k^2}{12}U_{N-2}^nU_{N-2}^n\right)\left(\frac{16}{12h^2}\right)-2\nu\frac{k^2}{12}U_{N-2}^n\left(\frac{48}{8h^3}\right)+\frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{31}{6h^4}\right),\\
\beta_{m6} &= 1+\left(\frac{k}{2}\nu+\frac{k^2}{12}U_{N-2}^nU_{N-2}^n\right)\left(\frac{-30}{12h^2}\right)-2\nu\frac{k^2}{12}U_{N-2}^n\left(\frac{-35}{8h^3}\right),\\
\beta_{m7} &= \left(-\frac{k}{2}U_{N-2}^n+2\frac{k^2}{12}U_{N-2}^{n+1}\left(U_x\right)_{N-2}^n-4\nu\frac{k^2}{12}\right)\left(\frac{8}{12h}\right)\\
&\quad +\left(\frac{k}{2}\nu+\frac{k^2}{12}U_{N-2}^nU_{N-2}^n\right)\left(\frac{16}{12h^2}\right)-2\nu\frac{k^2}{12}U_{N-2}^n\left(\frac{8}{8h^3}\right)+\frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{-11}{6h^4}\right),\\
\beta_{m8} &= \left(-\frac{k}{2}U_{N-2}^n+2\frac{k^2}{12}U_{N-2}^n\left(U_x\right)_{N-2}^n-4\nu\frac{k^2}{12}\right)\left(\frac{-1}{12h}\right)\\
&\quad +\left(\frac{k}{2}\nu+\frac{k^2}{12}U_{N-2}^nU_{N-2}^n\right)\left(\frac{-1}{12h^2}\right)-2\nu\frac{k^2}{12}U_{N-2}^n\left(\frac{-1}{8h^3}\right)+\frac{k^2}{12}\nu^2\left(\frac{6}{6h^4}\right),
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{m1}U_{N-7}^{n+1}+\alpha_{m2}U_{N-6}^{n+1}+\alpha_{m3}U_{N-5}^{n+1}+\alpha_{m4}U_{N-4}^{n+1}+\alpha_{m5}U_{N-3}^{n+1}+\alpha_{m6}U_{N-2}^{n+1}\\
&+\alpha_{m7}U_{N-1}^{n+1}+\alpha_{m8}U_N^{n+1}=\beta_{m1}U_{N-7}^n+\beta_{m2}U_{N-6}^n\\
&+\beta_{m3}U_{N-5}^n+\beta_{m4}U_{N-4}^n+\beta_{m5}U_{N-3}^n+\beta_{m6}U_{N-2}^n+\beta_{m7}U_{N-1}^n+\beta_{m8}U_N^n
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

denklemi elde edilir. (4.29), (4.30) ve (4.31) denklemlerinden oluşan sistem $N+1$ bilinmeyen $N-3$ denklemden oluşan bir sistemdir. Sınır şartlarından

$$
\begin{aligned}
U(a,t_{n+1}) &= U(b,t_{n+1})=0\\
U_x(a,t_{n+1}) &= U_x(b,t_{n+1})=0
\end{aligned}
$$

kullanılırsa sırasıyla

$$U_0^{n+1}=0, \tag{4.32}$$

$$U_N^{n+1}=0, \tag{4.33}$$

$$(U_x)_0^{n+1} = \frac{1}{12h}\left\{-25U_0^{n+1} + 48U_1^{n+1} - 36U_2^{n+1} + 16U_3^{n+1} - 3U_4^{n+1}\right\} = 0 \quad , \tag{4.34}$$

$$(U_x)_N^{n+1} = \frac{1}{12h}\left\{3U_{N-4}^{n+1} - 16U_{N-3}^{n+1} + 36U_{N-2}^{n+1} - 48U_{N-1}^{n+1} + 25U_N^{n+1}\right\} = 0 \tag{4.35}$$

yaklaşık sınır şartları bulunacaktır. Bulunan 4 denklem (4.29), (4.30) ve (4.31) denklemlerinden oluşan sisteme eklenirse $N+1$ denklem $N+1$ bilinmeyenden oluşan bir sistem bulunur.

Denklem sisteminin çözülebilmesi için gerekli olan

$$U_0^0, U_1^0, \ldots, U_{N-1}^0, U_N^0 \tag{4.36}$$

değerleri başlangıç şartından hesaplanır ve bu değerlerin kullanılmasıyla denklem sistemi çözülerek öncelikle

$$U_0^1, U_1^1, U_2^1, \cdots, U_{N-2}^1, U_{N-1}^1, U_N^1 \tag{4.37}$$

bilinmeyenlerinin tümü bulunur. Bundan sonraki adımlar iteratif olarak istenilen zamana kadar devam ettirilir.

Denklem sistemi lineer olmadığından her bir adımda iç iterasyon ile lineerleştirme yapılmıştır. Lineerleştirme için aşağıdaki adımlar takip edilmiştir.

Adım 1: Lineerliği bozan U_m^{n+1} ve $(U_x)_m^{n+1}$ yerine U_m^n ve $(U_x)_m^n$ al.

Adım 2: U_m^{n+1} ve $(U_x)_m^{n+1}$ değerlerini bul.

Adım 3: Hata=$\max_m \{|U_m^{n+1} - U_m^n|\}$ hesapla.

Adım 4: Hata$> 10^{-15}$ ise sadece lineerliği bozan terimleri güncelle ve Adım 1 e git.

Adım 5: Bir sonraki zaman adımına geç.

4.5. Test Problemi

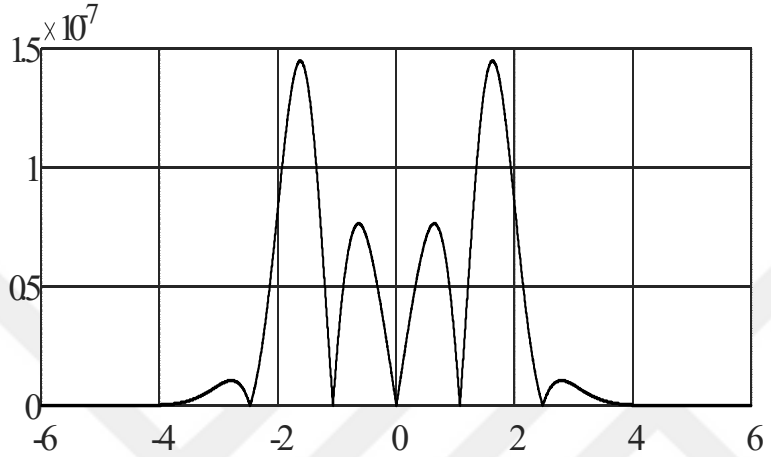
İlk olarak Burgers denklemi tanımlanırken verilen test problemi kullanılarak önerilen 4 yöntem için programlar çalıştırılmıştır. Programlar çalıştırılırken $\nu = 0.1$ viskozite değeri seçilmiş ve zaman ile konum artım uzunlukları 0.1 den azalarak 0.002 olacak şekilde eşit olarak alınmıştır. Elde edilen hata normları ve yakınsaklık oranları (Y.O) Çizelge 4.1 de verilmiştir. Çizelge 4.1 incelendiğinde en düşük hatayı Metot 4 ün verdiği görülebilir. Metot 4 diğer metotlara göre konum ve zaman doğruluğu

açısından en yüksek doğruluğa sahip yöntem olduğu için bu beklenen bir durumdur. 4. metodun yakınsama oranının hemen hemen 4, diğer yöntemlerin ise hemen hemen 2 olduğu söylenebilir. 4. metotta son adımda yakınsama oranın düşmesinin sebebi 10^{-11} hata gibi çok düşük bir hata gelmesinden kaynaklanmaktadır. Çünkü yuvarlama hataları, iç iterasyon yaparken kullanıdğımız hata sınırı gibi etkenlerden dolayı daha düşük bir hata bulmak zorlaşmaktadır.

Çizelge 4.1: $\nu = 0.1$ için hata normları ve yakınsama oranları

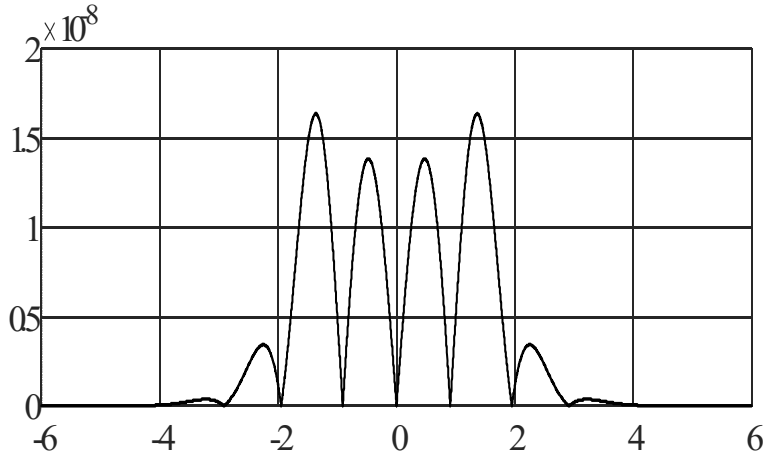
	Metot 1		Metot 2	
$h = \Delta t$	L_∞	Y.O	L_∞	Y.O
0.1	3.63×10^{-4}	2.006	3.36×10^{-5}	1.782
0.05	9.04×10^{-5}	1.999	9.76×10^{-6}	1.958
0.02	1.45×10^{-5}	2.000	1.62×10^{-6}	1.992
0.01	3.62×10^{-6}	2.000	4.08×10^{-7}	1.998
0.005	9.05×10^{-7}	2.000	1.02×10^{-7}	2.000
0.002	1.45×10^{-7}		1.63×10^{-8}	
	Metot 3		Metot 4	
$h = \Delta t$	L_∞	Y.O	L_∞	Y.O
0.1	3.91×10^{-4}	2.002	8.41×10^{-6}	3.975
0.05	9.78×10^{-5}	2.000	5.35×10^{-7}	3.992
0.02	1.56×10^{-5}	2.000	1.38×10^{-8}	3.999
0.01	3.90×10^{-6}	2.000	8.63×10^{-10}	3.989
0.005	9.76×10^{-7}	2.000	5.43×10^{-11}	1.180
0.002	1.56×10^{-7}		1.84×10^{-11}	

Şekil 4.1 de $\nu = 0.1$ viskozite değeri seçilerek Metot 1 için $t = 3$ anındaki mutlak hata grafiği konum ve zaman artım uzunlukları 0.002 alınarak çizilmiştir. Hatanın maksimum değerinin tabloda verilen değer ile uyuştuğu ve maksimum hatanın dalganın keskinleştiği yerler civarında geldiği görülebilir (Analitik çözümün grafiğinin çizildiği Şekil 3.1 e bakılabilir).



Şekil 4.1 : $\nu = 0.1$ ve Metot 1 için $t = 3$ anındaki mutlak hata ($h = \Delta t = 0.002$)

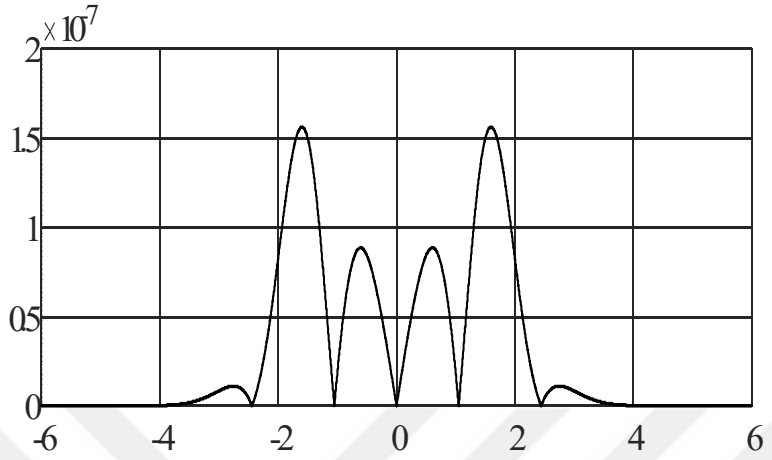
Şekil 4.2 de $\nu = 0.1$ viskozite değeri seçilerek Metot 2 için $t = 3$ anındaki mutlak hata grafiği konum ve zaman artım uzunlukları 0.002 alınarak çizilmiştir. Hatanın maksimum değerinin tabloda verilen değer ile uyuştuğu ve maksimum hatanın Şekil 4.1 de olduğu gibi dalganın keskinleştiği yerler civarında geldiği görülebilir.



Şekil 4.2 : $\nu = 0.1$ ve Metot 2 için $t = 3$ anındaki mutlak hata ($h = \Delta t = 0.002$)

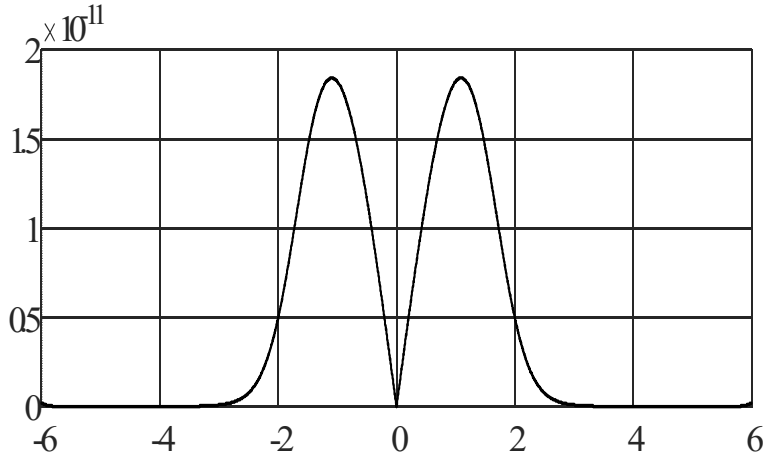
Şekil 4.3 de $\nu = 0.1$ viskozite değeri seçilerek Metot 3 için $t = 3$ anındaki mutlak hata grafiği konum ve zaman artım uzunlukları 0.002 alınarak çizilmiştir. Hatanın

maksimum değerinin tabloda verilen değer ile uyuştuğu ve maksimum hatanın Şekil 4.1 ve Şekil 4.2 de olduğu gibi dalganın keskinleştiği yerler civarında geldiği görülebilir.



Şekil 4.3 : $\nu = 0.1$ ve Metot 3 için $t = 3$ anındaki mutlak hata ($h = \Delta t = 0.002$)

Şekil 4.4 de $\nu = 0.1$ viskozite değeri seçilerek Metot 4 için $t = 3$ anındaki mutlak hata grafiği konum ve zaman artım uzunlukları 0.002 alınarak çizilmiştir. Hatanın maksimum değerinin tabloda verilen değer ile uyuştuğu ve maksimum hatanın Şekil 4.1, Şekil 4.2 ve Şekil 4.3 de olduğu gibi dalganın keskinleştiği yerler civarında geldiği görülebilir.



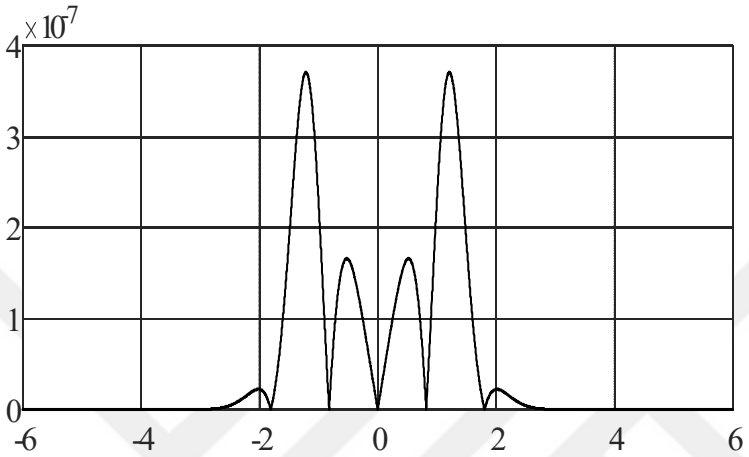
Şekil 4.4 : $\nu = 0.1$ ve Metot 4 için $t = 3$ anındaki mutlak hata ($h = \Delta t = 0.002$)

İkinci olarak Burgers denklemi tanımlanırken verilen test problemi kullanılarak önerilen 4 yöntem için programlar $\nu = 0.05$ viskozite değeri seçimiyle çalıştırılmıştır. Program çalıştırılırken zaman ile konum artım uzunlukları 0.1 den azalarak 0.002 olacak şekilde eşit olarak alınmıştır. Elde edilen hata normları ve yakınsaklık oranları (Y.O) Çizelge 4.2 de verilmiştir. Çizelge 4.2 incelendiğinde en düşük hatayı Metot 4 ün verdiği görülebilir. Metot 4 diğer metotlara göre konum ve zaman doğruluğu açısından en yüksek doğruluğa sahip yöntem olduğu için bu beklenen bir durumdur. 4. metodun yakınsama oranının hemen hemen 4, diğer yöntemlerin ise hemen hemen 2 olduğu söylenebilir.

Çizelge 4.2: $\nu = 0.05$ için hata normları ve yakınsama oranları

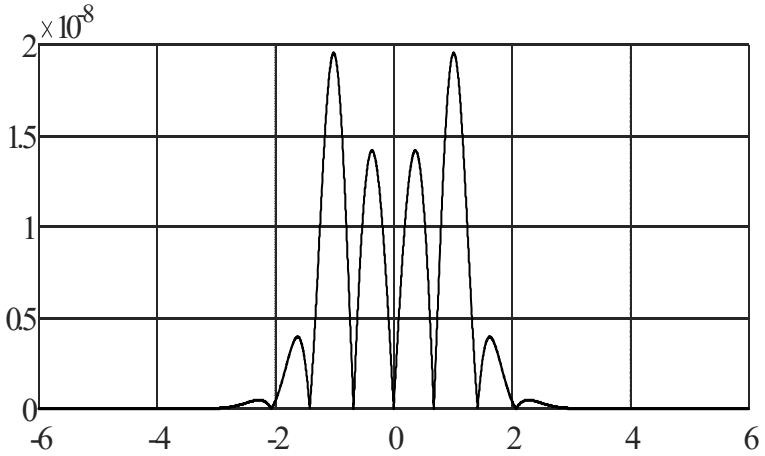
	Metot 1		Metot 2	
$h = \Delta t$	L_∞	Y.O	L_∞	Y.O
0.1	9.35×10^{-4}	2.011	3.12×10^{-5}	1.571
0.05	2.32×10^{-4}	2.002	1.05×10^{-5}	1.862
0.02	3.70×10^{-5}	1.999	1.91×10^{-6}	1.973
0.01	9.26×10^{-6}	2.000	4.86×10^{-7}	1.993
0.005	2.32×10^{-6}	2.000	1.22×10^{-7}	1.999
0.002	3.70×10^{-7}		1.95×10^{-8}	
	Metot 3		Metot 4	
$h = \Delta t$	L_∞	Y.O	L_∞	Y.O
0.1	9.63×10^{-4}	2.007	4.11×10^{-5}	3.953
0.05	2.40×10^{-4}	2.002	2.65×10^{-6}	3.982
0.02	3.83×10^{-5}	2.000	6.91×10^{-8}	3.998
0.01	9.57×10^{-6}	2.000	4.32×10^{-9}	3.999
0.005	2.39×10^{-6}	2.000	2.70×10^{-10}	3.580
0.002	3.83×10^{-7}		1.02×10^{-11}	

Şekil 4.5 de $\nu = 0.05$ viskozite değeri seçilerek Metot 1 için $t = 3$ anındaki mutlak hata grafiği konum ve zaman artım uzunlukları 0.002 alınarak çizilmiştir. Hatanın maksimum değerinin tabloda verilen değer ile uyuştuğu ve maksimum hatanın dalganın keskinleştiği yerler civarında geldiği görülebilir (Analitik çözümün grafiğinin çizildiği Şekil 3.2 ye bakılabilir).



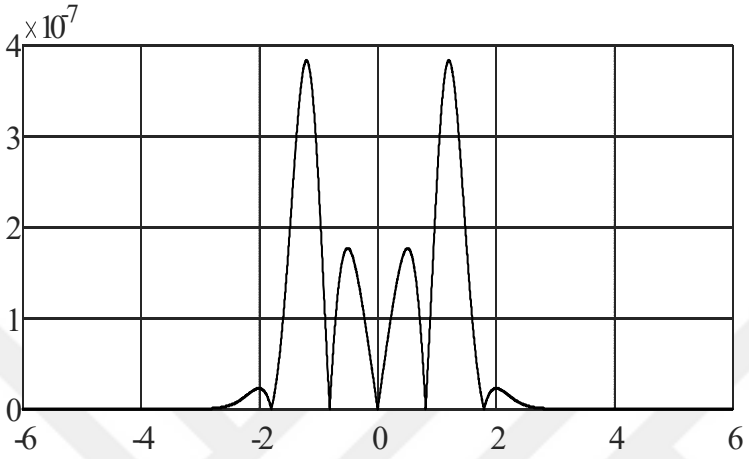
Şekil 4.5 : $\nu = 0.05$ ve Metot 1 için $t = 3$ anındaki mutlak hata ($h = \Delta t = 0.002$)

Şekil 4.6 de $\nu = 0.05$ viskozite değeri seçilerek Metot 2 için $t = 3$ anındaki mutlak hata grafiği konum ve zaman artım uzunlukları 0.002 alınarak çizilmiştir. Hatanın maksimum değerinin tabloda verilen değer ile uyuştuğu ve maksimum hatanın Şekil 4.5 te olduğu gibi dalganın keskinleştiği yerler civarında geldiği görülebilir



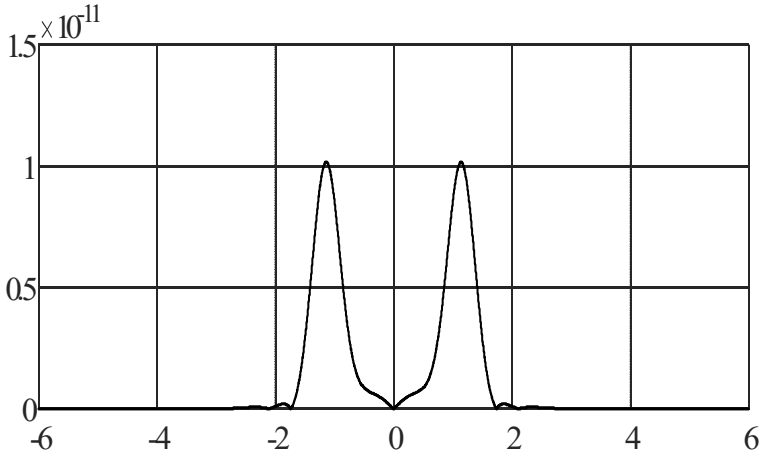
Şekil 4.6 : $\nu = 0.05$ ve Metot 2 için $t = 3$ anındaki mutlak hata ($h = \Delta t = 0.002$)

Şekil 4.7 de $\nu = 0.05$ viskozite değeri seçilerek Metot 3 için $t = 3$ anındaki mutlak hata grafiği konum ve zaman artım uzunlukları 0.002 alınarak çizilmiştir. Hatanın maksimum değerinin tabloda verilen değer ile uyuştuğu ve maksimum hatanın Şekil 4.5 ve Şekil 4.6 da olduğu gibi dalganın keskinleştiği yerler civarında geldiği görülebilir



Şekil 4.7 : $\nu = 0.05$ ve Metot 3 için $t = 3$ anındaki mutlak hata ($h = \Delta t = 0.002$)

Şekil 4.8 de $\nu = 0.05$ viskozite değeri seçilerek Metot 4 için $t = 3$ anındaki mutlak hata grafiği konum ve zaman artım uzunlukları 0.002 alınarak çizilmiştir. Hatanın maksimum değerinin tabloda verilen değer ile uyuştuğu ve maksimum hatanın Şekil 4.5, Şekil 4.6 ve Şekil 4.7 de olduğu gibi dalganın keskinleştiği yerler civarında geldiği görülebilir



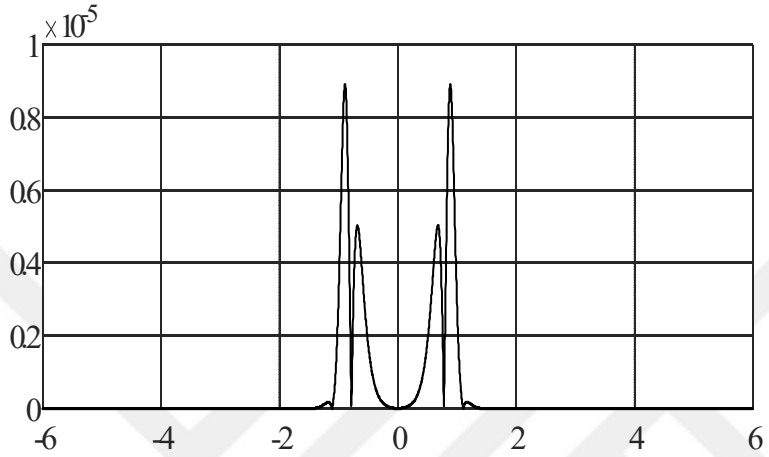
Şekil 4.8 : $\nu = 0.05$ ve Metot 4 için $t = 3$ anındaki mutlak hata ($h = \Delta t = 0.002$)

Üçüncü olarak Burgers denklemi tanımlanırken verilen test problemi kullanılarak önerilen 4 yöntem için programlar $\nu = 0.01$ viskozite değeri seçimiyle çalıştırılmıştır. Program çalıştırılırken zaman ile konum artım uzunlukları 0.1 den azalarak 0.002 olacak şekilde eşit olarak alınmıştır. Elde edilen hata normları ve yakınsaklık oranları (Y.O) Çizelge 4.3 de verilmiştir. Çizelge 4.3 incelendiğinde en düşük hatayı Metot 4 ün verdiği görülebilir. Metot 4 diğer metotlara göre konum ve zaman doğruluğu açısından en yüksek doğruluğa sahip yöntem olduğu için bu beklenen bir durumdur. 4. metodun yakınsama oranının hemen hemen 4 olduğu söylenebilir.

Çizelge 4.3: $\nu = 0.01$ için hata normları ve yakınsama oranları

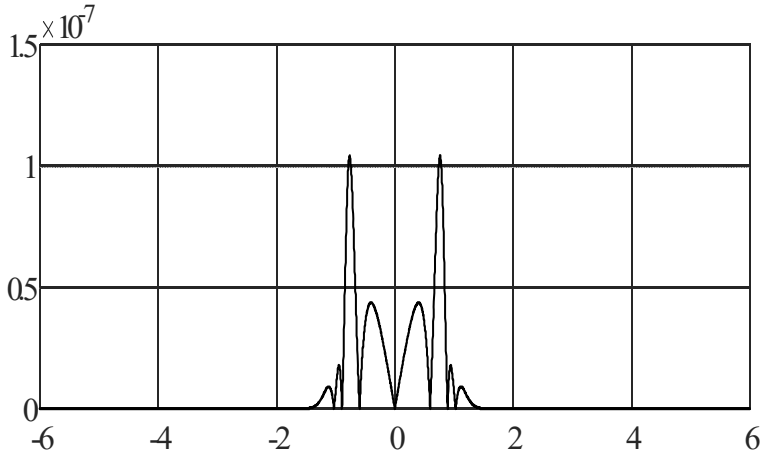
	Metot 1		Metot 2	
$h = \Delta t$	L_∞	Y.O	L_∞	Y.O
0.1	2.06×10^{-2}	1.869	7.03×10^{-3}	3.964
0.05	5.65×10^{-3}	2.013	4.50×10^{-4}	3.374
0.02	8.923×10^{-4}	2.000	2.05×10^{-5}	2.674
0.01	2.23×10^{-4}	2.002	3.21×10^{-6}	2.231
0.005	5.57×10^{-5}	2.001	6.83×10^{-7}	2.053
0.002	8.91×10^{-6}		1.04×10^{-7}	
	Metot 3		Metot 4	
$h = \Delta t$	L_∞	Y.O	L_∞	Y.O
0.1	2.06×10^{-2}	1.866	6.49×10^{-3}	3.963
0.05	5.64×10^{-3}	2.011	4.16×10^{-4}	3.928
0.02	8.94×10^{-4}	2.001	1.14×10^{-5}	3.965
0.01	2.23×10^{-4}	2.002	7.29×10^{-7}	3.996
0.005	5.57×10^{-5}	2.001	4.57×10^{-8}	3.998
0.002	8.91×10^{-6}		1.17×10^{-9}	

Şekil 4.9 de $\nu = 0.01$ viskozite değeri seçilerek Metot 1 için $t = 3$ anındaki mutlak hata grafiği konum ve zaman artım uzunlukları 0.002 alınarak çizilmiştir. Hatanın maksimum değerinin tabloda verilen değer ile uyuştuğu ve maksimum hatanın dalganın keskinleştiği yerler civarında geldiği görülebilir (Analitik çözümün grafiğinin çizildiği Şekil 3.3 e bakılabilir).



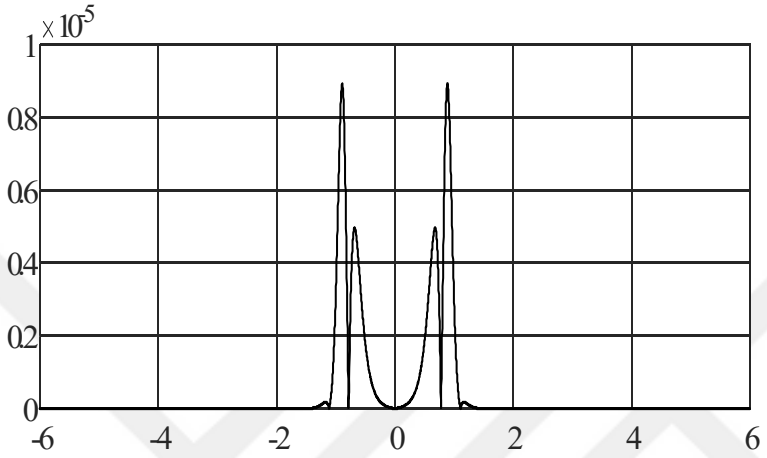
Şekil 4.9 : $\nu = 0.01$ ve Metot 1 için $t = 3$ anındaki mutlak hata ($h = \Delta t = 0.002$)

Şekil 4.10 da $\nu = 0.01$ viskozite değeri seçilerek Metot 2 için $t = 3$ anındaki mutlak hata grafiği konum ve zaman artım uzunlukları 0.002 alınarak çizilmiştir. Hatanın maksimum değerinin tabloda verilen değer ile uyuştuğu ve maksimum hatanın Şekil 4.9 da olduğu gibi dalganın keskinleştiği yerler civarında geldiği görülebilir



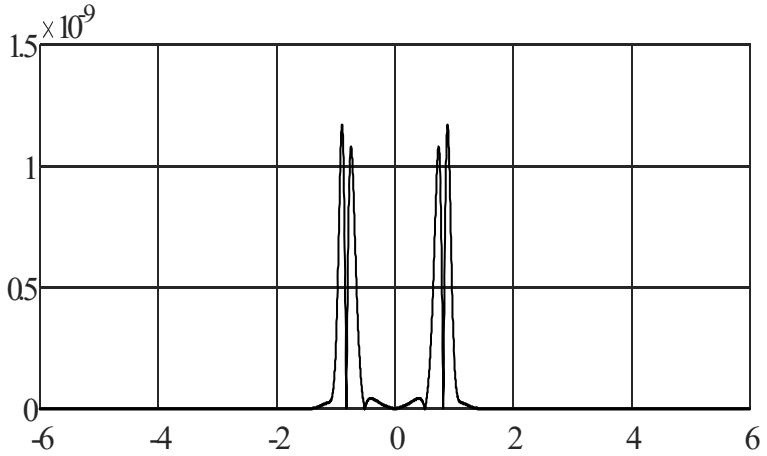
Şekil 4.10 : $\nu = 0.01$ ve Metot 2 için $t = 3$ anındaki mutlak hata ($h = \Delta t = 0.002$)

Şekil 4.11 de $\nu = 0.01$ viskozite değeri seçilerek Metot 3 için $t = 3$ anındaki mutlak hata grafiği konum ve zaman artım uzunlukları 0.002 alınarak çizilmiştir. Hatanın maksimum değerinin tabloda verilen değer ile uyuştuğu ve maksimum hatanın Şekil 4.9 ve Şekil 4.10 da olduğu gibi dalganın keskinleştiği yerler civarında geldiği görülebilir



Şekil 4.11 : $\nu = 0.01$ ve Metot 3 için $t = 3$ anındaki mutlak hata ($h = \Delta t = 0.002$)

Şekil 4.12 de $\nu = 0.01$ viskozite değeri seçilerek Metot 4 için $t = 3$ anındaki mutlak hata grafiği konum ve zaman artım uzunlukları 0.002 alınarak çizilmiştir. Hatanın maksimum değerinin tabloda verilen değer ile uyuştuğu ve maksimum hatanın Şekil 4.9, Şekil 4.10 ve Şekil 4.11 de olduğu gibi dalganın keskinleştiği yerler civarında geldiği görülebilir



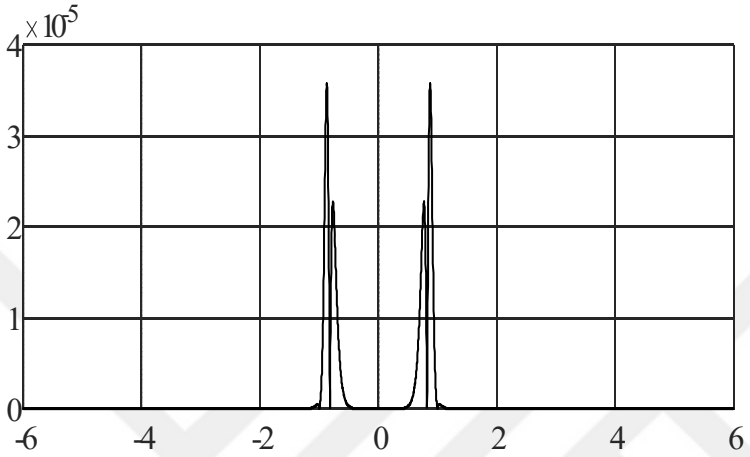
Şekil 4.12 : $\nu = 0.01$ ve Metot 4 için $t = 3$ anındaki mutlak hata ($h = \Delta t = 0.002$)

Dördüncü olarak Burgers denklemi tanımlanırken verilen test problemi kullanılarak önerilen 4 yöntem için programlar $\nu = 0.005$ viskozite değeri seçimiyle çalıştırılmıştır. Program çalıştırılırken zaman ile konum artım uzunlukları 0.1 den azalarak 0.002 olacak şekilde eşit olarak alınmıştır. Elde edilen hata normları ve yakınsaklık oranları (Y.O) Çizelge 4.4 de verilmiştir. Çizelge 4.4 incelendiğinde en düşük hatayı Metot 4 ün verdiği görülebilir. Metot 4 diğer metotlara göre konum ve zaman doğruluğu açısından en yüksek doğruluğa sahip yöntem olduğu için bu beklenen bir durumdur. 4. metodun yakınsama oranının hemen hemen 4 olduğu tablodan görülebilir.

Çizelge 4.4: $\nu = 0.005$ için hata normları ve yakınsama oranları

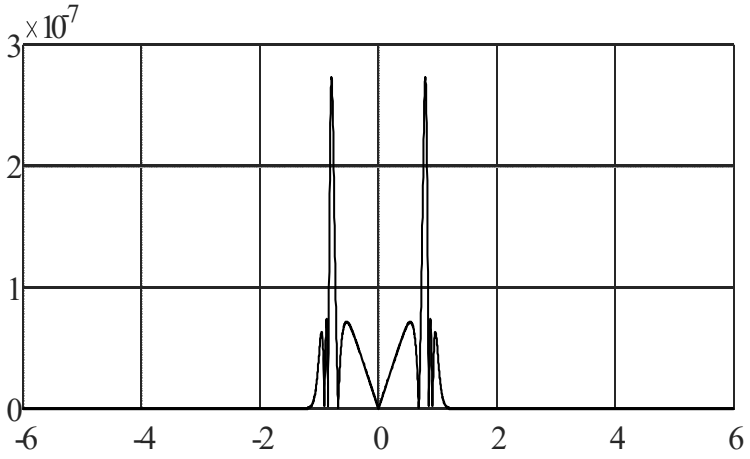
	Metot 1		Metot 2	
$h = \Delta t$	L_∞	Y.O	L_∞	Y.O
0.1	8.78×10^{-2}	1.748	5.89×10^{-2}	3.451
0.05	2.61×10^{-2}	2.177	5.38×10^{-3}	3.745
0.02	3.55×10^{-3}	1.985	1.74×10^{-4}	3.453
0.01	8.98×10^{-4}	2.010	1.59×10^{-5}	2.851
0.005	2.23×10^{-4}	2.000	2.20×10^{-6}	2.281
0.002	3.57×10^{-5}		2.73×10^{-7}	
	Metot 3		Metot 4	
$h = \Delta t$	L_∞	Y.O	L_∞	Y.O
0.1	8.95×10^{-2}	1.779	5.65×10^{-2}	3.874
0.05	2.61×10^{-2}	2.176	5.12×10^{-3}	3.463
0.02	3.55×10^{-3}	1.987	1.47×10^{-4}	3.941
0.01	8.97×10^{-4}	2.010	9.58×10^{-6}	3.980
0.005	2.23×10^{-4}	2.000	6.07×10^{-7}	3.996
0.002	3.56×10^{-5}		1.56×10^{-8}	

Şekil 4.13 de $\nu = 0.005$ viskozite değeri seçilerek Metot 1 için $t = 3$ anındaki mutlak hata grafiği konum ve zaman artım uzunlukları 0.002 alınarak çizilmiştir. Hatanın maksimum değerinin tabloda verilen değer ile uyuştuğu ve maksimum hatanın dalganın keskinleştiği yerler civarında geldiği görülebilir (Analitik çözümün grafiğinin çizildiği Şekil 3.4 e bakılabilir).



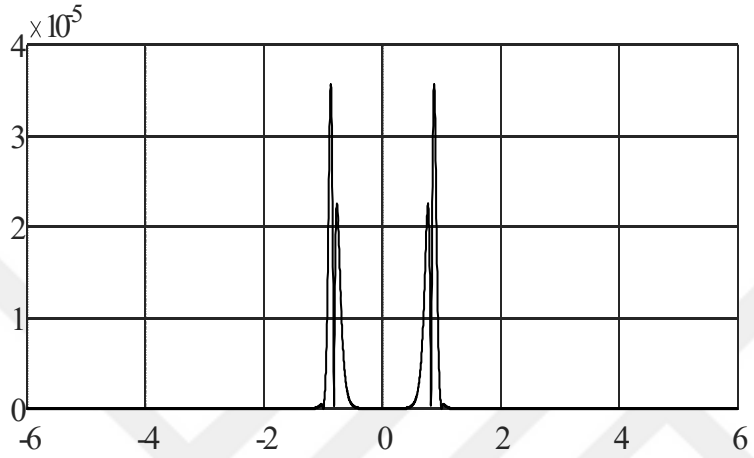
Şekil 4.13 : $\nu = 0.005$ ve Metot 1 için $t = 3$ anındaki mutlak hata ($h = \Delta t = 0.002$)

Şekil 4.14 da $\nu = 0.005$ viskozite değeri seçilerek Metot 2 için $t = 3$ anındaki mutlak hata grafiği konum ve zaman artım uzunlukları 0.002 alınarak çizilmiştir. Hatanın maksimum değerinin tabloda verilen değer ile uyuştuğu ve maksimum hatanın Şekil 4.13 de olduğu gibi dalganın keskinleştiği yerler civarında geldiği görülebilir



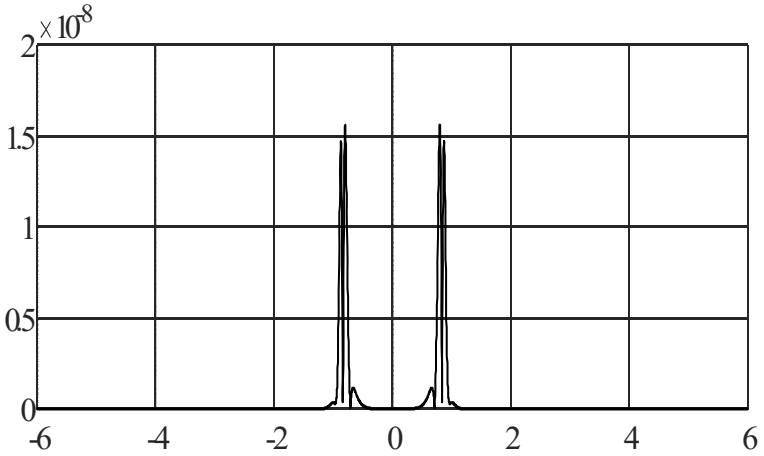
Şekil 4.14 : $\nu = 0.005$ ve Metot 2 için $t = 3$ anındaki mutlak hata ($h = \Delta t = 0.002$)

Şekil 4.15 de $\nu = 0.005$ viskozite değeri seçilerek Metot 3 için $t = 3$ anındaki mutlak hata grafiği konum ve zaman artım uzunlukları 0.002 alınarak çizilmiştir. Hatanın maksimum değerinin tabloda verilen değer ile uyuştuğu ve maksimum hatanın Şekil 4.13 ve Şekil 4.14 de olduğu gibi dalganın keskinleştiği yerler civarında geldiği görülebilir



Şekil 4.15 : $\nu = 0.005$ ve Metot 3 için $t = 3$ anındaki mutlak hata ($h = \Delta t = 0.002$)

Şekil 4.16 de $\nu = 0.005$ viskozite değeri seçilerek Metot 4 için $t = 3$ anındaki mutlak hata grafiği konum ve zaman artım uzunlukları 0.002 alınarak çizilmiştir. Hatanın maksimum değerinin tabloda verilen değer ile uyuştuğu ve maksimum hatanın Şekil 4.13, Şekil 4.14 ve Şekil 4.15 de olduğu gibi dalganın keskinleştiği yerler civarında geldiği görülebilir



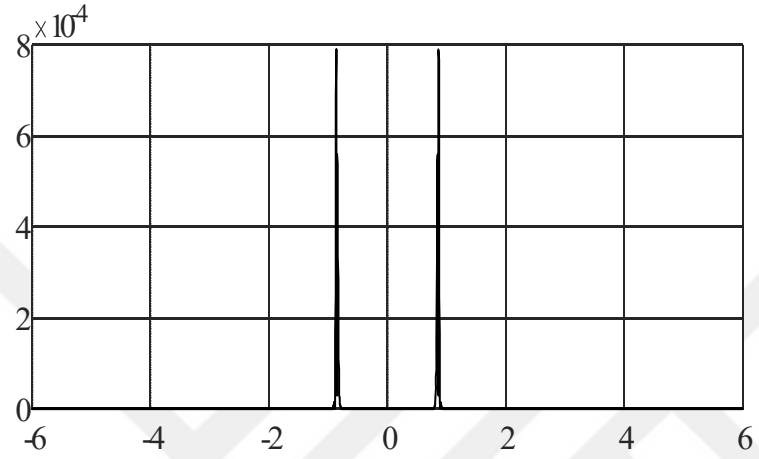
Şekil 4.16 : $\nu = 0.005$ ve Metot 4 için $t = 3$ anındaki mutlak hata ($h = \Delta t = 0.002$)

Beşinci olarak Burgers denklemi tanımlanırken verilen test problemi kullanılarak önerilen 4 yöntem için programlar $\nu = 0.001$ viskozite değeri seçimiyle çalıştırılmıştır. Program çalıştırılırken zaman ile konum artım uzunlukları 0.1 den azalarak 0.002 olacak şekilde eşit olarak alınmıştır. Elde edilen hata normları ve yakınsaklık oranları (Y.O) Çizelge 4.5 de verilmiştir. Çizelge 4.5 incelendiğinde en düşük hatayı Metot 4 ün verdiği görülebilir. Metot 4 diğer metotlara göre konum ve zaman doğruluğu açısından en yüksek doğruluğa sahip yöntem olduğu için bu beklenen bir durumdur. Düşük zaman ve konum artım değerleri için 4. metodun yakınsama oranının hemen hemen 4, diğer yöntemlerin ise hemen hemen 2 olduğu söylenebilir. Daha büyük konum ve zaman artım değerlerinde istenen yakınsama oranının elde edilememe sebebi viskozitenin küçük olması sebebiyle artık dalganın keskinleşmesinden kaynaklanmaktadır.

Çizelge 4.5: $\nu = 0.001$ için hata normları ve yakınsama oranları

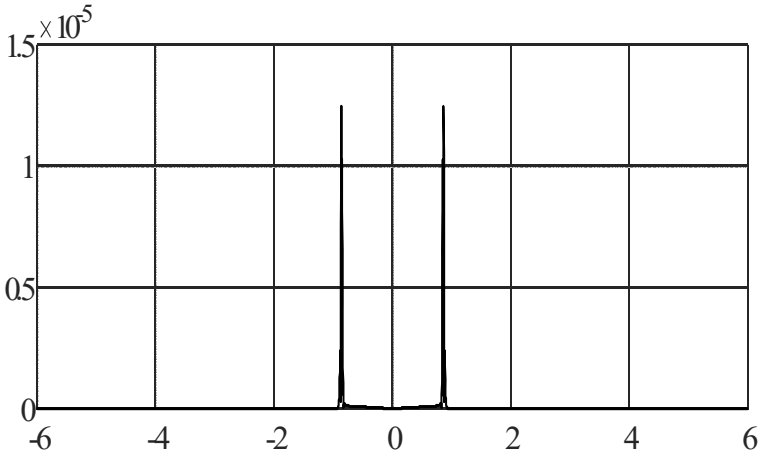
	Metot 1		Metot 2	
$h = \Delta t$	L_∞	Y.O	L_∞	Y.O
0.1	3.48×10^{-1}	-0.265	2.79×10^{-1}	0.329
0.05	4.19×10^{-1}	1.652	2.20×10^{-1}	1.635
0.02	9.21×10^{-2}	2.218	4.91×10^{-2}	3.227
0.01	1.98×10^{-2}	1.952	5.24×10^{-3}	3.995
0.005	5.11×10^{-3}	2.039	3.29×10^{-4}	3.572
0.002	7.90×10^{-4}		1.25×10^{-5}	
	Metot 3		Metot 4	
$h = \Delta t$	L_∞	Y.O	L_∞	Y.O
0.1	3.30×10^{-1}	-0.399	3.07×10^{-1}	0.482
0.05	4.35×10^{-1}	1.745	2.20×10^{-1}	1.613
0.02	8.79×10^{-2}	2.149	5.02×10^{-2}	3.292
0.01	1.98×10^{-2}	1.955	5.12×10^{-3}	4.040
0.005	5.11×10^{-3}	2.042	3.11×10^{-4}	3.895
0.002	7.86×10^{-4}		8.77×10^{-6}	

Şekil 4.17 de $\nu = 0.001$ viskozite değeri seçilerek Metot 1 için $t = 3$ anındaki mutlak hata grafiği konum ve zaman artım uzunlukları 0.002 alınarak çizilmiştir. Hatanın maksimum değerinin tabloda verilen değer ile uyuştuğu ve maksimum hatanın dalganın keskinleştiği yerler civarında geldiği görülebilir (Analitik çözümün grafiğinin çizildiği Şekil 3.4 e bakılabilir).



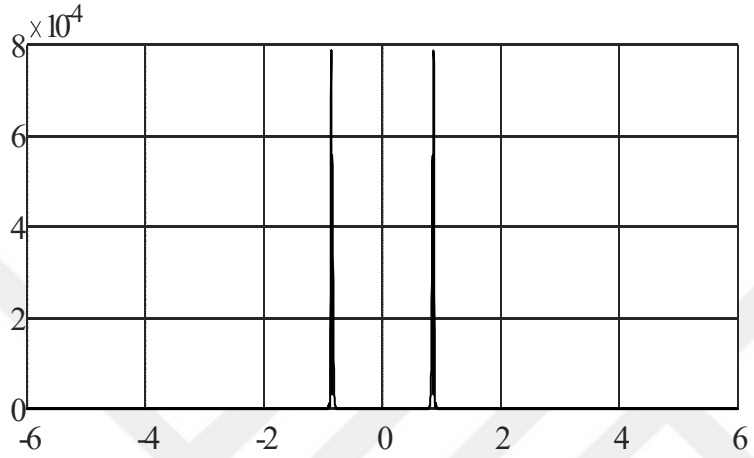
Şekil 4.17 : $\nu = 0.001$ ve Metot 1 için $t = 3$ anındaki mutlak hata ($h = \Delta t = 0.002$)

Şekil 4.18 da $\nu = 0.001$ viskozite değeri seçilerek Metot 2 için $t = 3$ anındaki mutlak hata grafiği konum ve zaman artım uzunlukları 0.002 alınarak çizilmiştir. Hatanın maksimum değerinin tabloda verilen değer ile uyuştuğu ve maksimum hatanın Şekil 4.17 da olduğu gibi dalganın keskinleştiği yerler civarında geldiği görülebilir



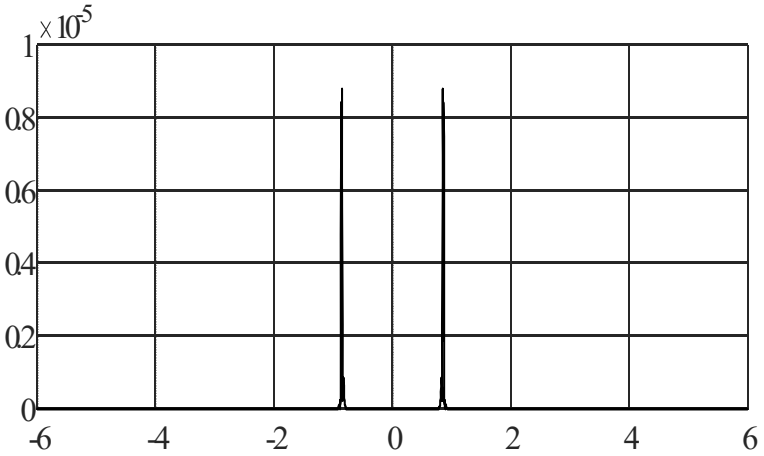
Şekil 4.18 : $\nu = 0.001$ ve Metot 2 için $t = 3$ anındaki mutlak hata ($h = \Delta t = 0.002$)

Şekil 4.19 de $\nu = 0.001$ viskozite değeri seçilerek Metot 3 için $t = 3$ anındaki mutlak hata grafiği konum ve zaman artım uzunlukları 0.002 alınarak çizilmiştir. Hatanın maksimum değerinin tabloda verilen değer ile uyuştuğu ve maksimum hatanın Şekil 4.17 ve Şekil 4.18 da olduğu gibi dalganın keskinleştiği yerler civarında geldiği görülebilir



Şekil 4.19 : $\nu = 0.001$ ve Metot 3 için $t = 3$ anındaki mutlak hata ($h = \Delta t = 0.002$)

Şekil 4.20 de $\nu = 0.001$ viskozite değeri seçilerek Metot 4 için $t = 3$ anındaki mutlak hata grafiği konum ve zaman artım uzunlukları 0.002 alınarak çizilmiştir. Hatanın maksimum değerinin tabloda verilen değer ile uyuştuğu ve maksimum hatanın Şekil 4.17, Şekil 4.18 ve Şekil 4.19 de olduğu gibi dalganın keskinleştiği yerler civarında geldiği görülebilir



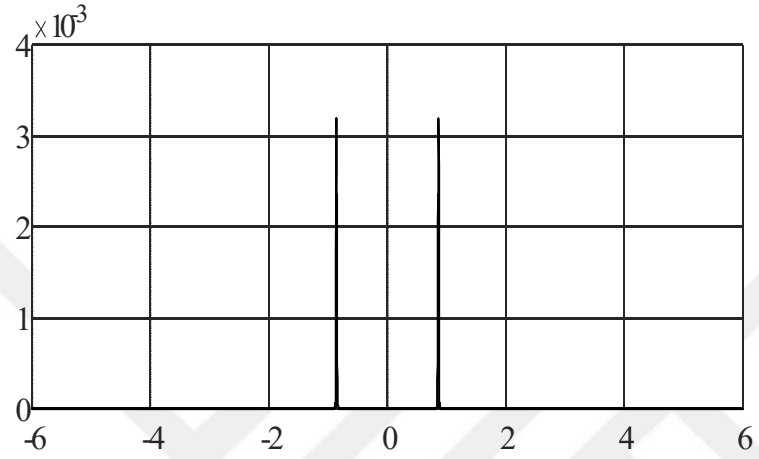
Şekil 4.20 : $\nu = 0.001$ ve Metot 4 için $t = 3$ anındaki mutlak hata ($h = \Delta t = 0.002$)

Son olarak olarak Burgers denklemi tanımlanırken verilen test problemi kullanılarak önerilen 4 yöntem için programlar $\nu = 0.0005$ viskozite değeri seçimiyle çalıştırılmıştır. Program çalıştırılırken zaman ile konum artım uzunlukları 0.1 den azalarak 0.002 olacak şekilde eşit olarak alınmıştır. Elde edilen hata normları ve yakınsaklık oranları (Y.O) Çizelge 4.6 da verilmiştir. Çizelge 4.6 incelendiğinde en düşük hatayı Metot 4 ün verdiği görülebilir. Metot 4 diğer metotlara göre konum ve zaman doğruluğu açısından en yüksek doğruluğa sahip yöntem olduğu için bu beklenen bir durumdur. Düşük zaman ve konum artım değerleri için 2. ve 4. metodun yakınsama oranının hemen hemen 4, 1. ve 3. yöntemlerin yakınsama oranlarının ise hemen hemen 2 olduğu söylenebilir. Daha büyük konum ve zaman artım değerlerinde istenen yakınsama oranının elde edilememe sebebi viskozitenin küçük olması sebebiyle artık dalganın keskinleşmesinden kaynaklanmaktadır.

Çizelge 4.6: $\nu = 0.0005$ için hata normları ve yakınsama oranları

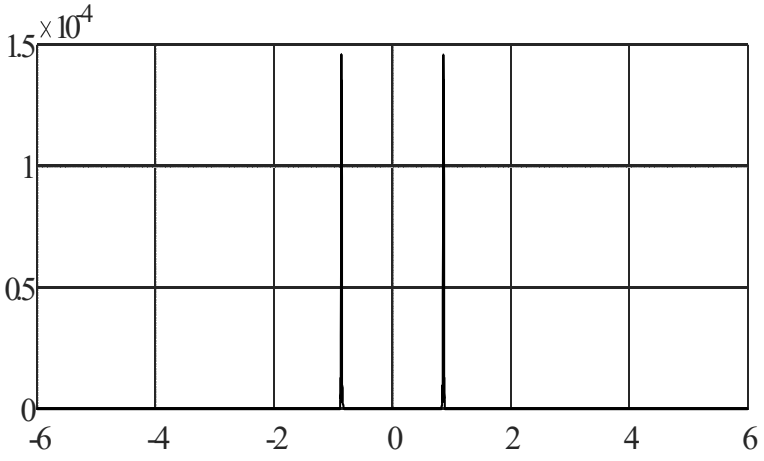
	Metot 1		Metot 2	
$h = \Delta t$	L_∞	Y.O	L_∞	Y.O
0.1	5.19×10^{-1}	0.720	2.62×10^{-1}	-0.197
0.05	3.15×10^{-1}	-0.043	3.00×10^{-1}	0.511
0.02	3.28×10^{-1}	1.729	1.88×10^{-1}	1.906
0.01	9.89×10^{-2}	2.159	5.01×10^{-2}	3.638
0.005	2.21×10^{-2}	2.116	4.02×10^{-3}	3.620
0.002	3.18×10^{-3}		1.49×10^{-4}	
	Metot 3		Metot 4	
$h = \Delta t$	L_∞	Y.O	L_∞	Y.O
0.1	5.52×10^{-1}	0.079	2.61×10^{-1}	-0.243
0.05	5.23×10^{-1}	0.568	3.09×10^{-1}	0.550
0.02	3.11×10^{-1}	1.604	1.87×10^{-1}	1.916
0.01	1.02×10^{-1}	2.220	4.95×10^{-2}	3.631
0.005	2.19×10^{-2}	2.110	4.00×10^{-3}	3.747
0.002	3.17×10^{-3}		1.29×10^{-4}	

Şekil 4.21 de $\nu = 0.0005$ viskozite değeri seçilerek Metot 1 için $t = 3$ anındaki mutlak hata grafiği konum ve zaman artım uzunlukları 0.002 alınarak çizilmiştir. Hatanın maksimum değerinin tabloda verilen değer ile uyuştuğu ve maksimum hatanın dalganın keskinleştiği yerler civarında geldiği görülebilir (Analitik çözümün grafiğinin çizildiği Şekil 3.4 e bakılabilir).



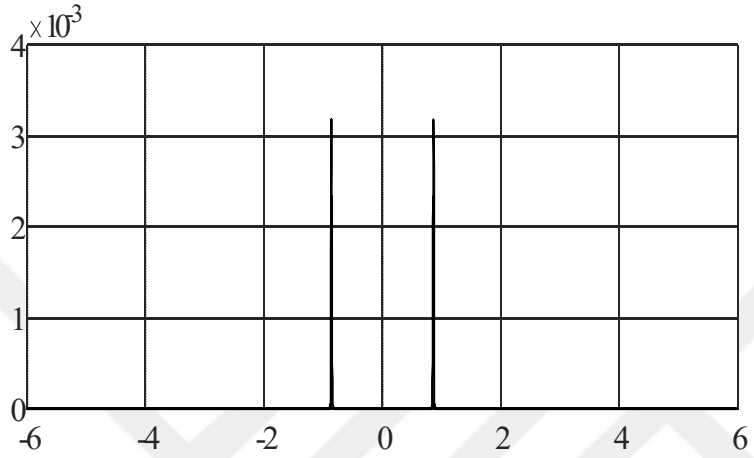
Şekil 4.21 : $\nu = 0.0005$ ve Metot 1 için $t = 3$ anındaki mutlak hata ($h = \Delta t = 0.002$)

Şekil 4.22 de $\nu = 0.0005$ viskozite değeri seçilerek Metot 2 için $t = 3$ anındaki mutlak hata grafiği konum ve zaman artım uzunlukları 0.002 alınarak çizilmiştir. Hatanın maksimum değerinin tabloda verilen değer ile uyuştuğu ve maksimum hatanın Şekil 4.21 da olduğu gibi dalganın keskinleştiği yerler civarında geldiği görülebilir



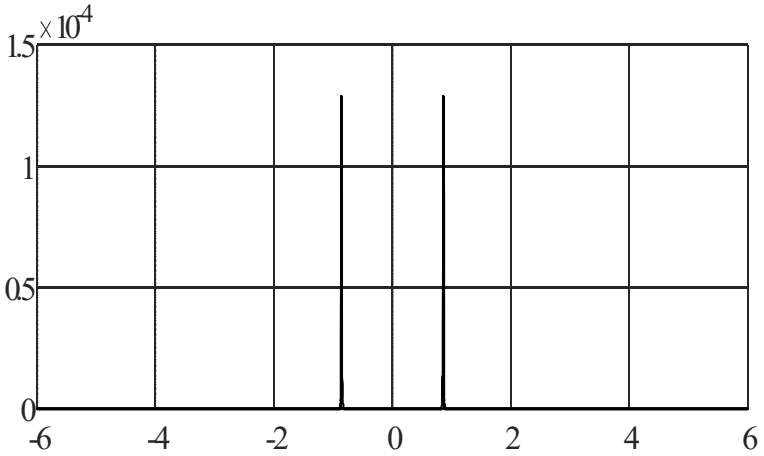
Şekil 4.22 : $\nu = 0.0005$ ve Metot 2 için $t = 3$ anındaki mutlak hata ($h = \Delta t = 0.002$)

Şekil 4.23 de $\nu = 0.0005$ viskozite değeri seçilerek Metot 3 için $t = 3$ anındaki mutlak hata grafiği konum ve zaman artım uzunlukları 0.002 alınarak çizilmiştir. Hatanın maksimum değerinin tabloda verilen değer ile uyuştuğu ve maksimum hatanın Şekil 4.21 ve Şekil 4.22 da olduğu gibi dalganın keskinleştiği yerler civarında geldiği görülebilir



Şekil 4.23 : $\nu = 0.0005$ ve Metot 3 için $t = 3$ anındaki mutlak hata ($h = \Delta t = 0.002$)

Şekil 4.24 de $\nu = 0.0005$ viskozite değeri seçilerek Metot 4 için $t = 3$ anındaki mutlak hata grafiği konum ve zaman artım uzunlukları 0.002 alınarak çizilmiştir. Hatanın maksimum değerinin tabloda verilen değer ile uyuştuğu ve maksimum hatanın Şekil 4.21, Şekil 4.22 ve Şekil 4.23 de olduğu gibi dalganın keskinleştiği yerler civarında geldiği görülebilir



Şekil 4.24 : $\nu = 0.0005$ ve Metot 4 için $t = 3$ anındaki mutlak hata ($h = \Delta t = 0.002$)

5. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, Burgers denkleminin yaklaşık çözümü araştırılırken kullanılan algoritmalar ile birlikte kullanılan test problemi sonucunda elde edilen bulgular tartışılacaktır.

Burgers denkleminin sayısal çözümü için zamana ve konuma göre farklı doğruluğa sahip dört yöntem önerilmiştir. Bu yöntemlerden ilki, zamana ve konuma göre ikinci mertebeden doğruluğa sahip, ikincisi zamana göre ikinci, konuma göre dördüncü mertebeden doğruluğa sahip, üçüncüsü zamana göre dördüncü, konuma göre ikinci mertebeden doğruluğa sahip ve son yöntem olan dördüncü yöntem ise zamana ve konuma göre dördüncü mertebeden doğruluğa sahiptir. Yöntemlerin doğruluğunu etkilememek için gerekli olan tüm sonlu farklar yaklaşımları yöntemlerin konum doğruluğunu etkilemeyecek şekilde yapılmıştır. Önerilen yöntemlerin kontrolu için kullanılan test probleminde düşük viskozite değerleri için modellemenin zor olduğu keskin kenarlar oluşmaktadır. Bu durumu görebilmek için viskozite değerleri 0.1, 0.05, 0.01, 0.005, 0.001 ve 0.0005 seçilerek $[-6, 6]$ aralığında $t = 1$ ve $t = 3$ anındaki grafikler çizilerek sırasıyla Şekil 3.1, Şekil 3.2, Şekil 3.3, Şekil 3.4, Şekil 3.5 ve Şekil 3.6 da verilmiştir. Şekiller incelendiğinde viskozite değerinin küçülmesiyle dalganın keskinleştiği görülmektedir. Keskinliğin arttığı yerleri sayısal olarak modellemenin zor olduğu bilinmektedir.

Test problemi kullanılarak 0.1, 0.05, 0.02, 0.01, 0.005, 0.002 olarak eşit zaman ve konum artım uzunlukları seçilerek programlar çalıştırılmış ve elde edilen hata normları ile birlikte yakınsaklık oranları için sonuçlar 0.1, 0.05, 0.01, 0.005, 0.001 ve 0.0005 viskozite değerlerine göre sırasıyla Çizelde 4.1, Çizelde 4.2, Çizelde 4.3, Çizelde 4.4, Çizelde 4.5 ve Çizelde 4.6 da verilmiştir. Zaman ve konum artımı küçüldükçe farklı viskozite değerleri için tüm metotlarda hesaplanan hata norm değerleri düşmüştür. Her bir metot ve her bir viskozite değeri için mutlaka hatayı gösteren grafikler $h = \Delta t = 0.002$ için çizilmiştir. Hata grafikleri incelendiğinde en yüksek hatanın dalganın keskinleştiği yere karşılık gelen bölge civarında olduğu görülmüştür. Çizilen hata grafiği ve tablolara göre yorum yapıldığında önerilen metotlar için en düşük hatayı önerilen dördüncü metodun verdiği sonucuna ulaşılabilir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Burgers denkleminin sayısal çözümü için dört yöntem önerilmiştir. Önerilen yöntemlerin doğruluğunun kontrolü ise test problemi ile yapılmıştır.

Test problemi kullanılarak elde edilen sonuçlara göre önerilen dördüncü yöntem yani zamana ve konuma göre doğruluğu dört olan yöntemin en iyi sonucu verdiği görülmüştür. Teorik olarak dördüncü yöntemin diğer yöntemlere göre doğruluğunun yüksek olması sebebiyle bu beklenen bir durumdur. İncelenen test probleminde viskozite değeri düştükçe dalganın keskinleşmesi sebebiyle önerilen yöntemlerin etkinliğide azalmaktadır. Bu gibi durumlarda, düşük konum ve zaman artımı kullanılarak modellemenin daha hassas yapılması gerekmektedir. Fakat bu durumda kullanılan yöntemler sonucu elde edilen denklem sistemlerinin boyutu büyümekte, yuvarlama hataları artmaktadır. Örneğin $h = 0.002$ için konum aralığı

$$N = \frac{b-a}{h} = \frac{6-(-6)}{0.002} = 6000$$

olarak 6000 parçaya bölünmekte ve bu sebeple de 6000×6000 boyutlarındaki denklem sistemleri çözülmektedir. Zaman artımı da küçük seçildiğinde programların çalışma süreleri daha da artmaktadır. Buna rağmen elde edilen sonuçlar incelendiğinde hataların oldukça düşük olduğu görülebilir.

Burgers denklemi lineer olmayan adveksiyon ve yayılım terimi içeren en basit denklem olduğundan birçok sayısal çalışma için model denklem olarak kullanılmaktadır. Dolayısıyla önerilen yöntemler farklı denklemlerin sayısal çözümleri içinde kullanılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Arora, G. and Singh, B. K., 2013, Numerical solution of Burgers' equation with modified cubic B-spline differential quadrature method, Applied Mathematics and Computation, 224, p. 166-177.

Bateman, H., 1915, Some recent researches on the motion of the fluids, Monthly Weather Review, 43, p. 163-70.

Burgers, J. M., 1948, A mathematical model illustrating the theory of turbulence, Advances in Applied Mathematics, 1, p. 171-199.

Christie I. , Griffiths D. F. , Mitchell A. R. and Sanz-Serna J. M. (1981), Product Approximation for Non-linear Problems in the Finite Element Method, IMA, J. Num. Anal., 1, p. 253-266.

Cole Julian D. 1951 , On a Quasi-linear Parabolg in Aerodynamics, Quarterly of Applied Math., 9, p. 225-236.

Crank, J. and Nicolson, P., 1947, A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 43, p.50-64.

Dağ, İ., Irk, D., and Saka, B., 2005a, A numerical solution of the Burgers' equation using cubic B-splines, Applied Mathematics and Computation, 163, p. 199-211.

Dağ, İ., Irk, D. and Şahin, A., 2005b, B-spline collocation methods for numerical solutions of the Burgers' equation, Mathematical Problems in Engineering, p. 521-538.

Dağ, İ., Canıvar, A. and Şahin, A., 2011, Taylor-Galerkin and Taylor-collocation methods for the numerical solutions of Burgers' equation using B-splines, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 16, p. 2696-2708.

Fletcher C. A. J.(1983) , A comparison of finite element and finite difference solutions of the one- and two-dimensional Burgers' equations, Jour. Comp. Physics, 51, p.159-188.

Hopf E. 1950, The Partial Differential Equation $U_t + UU_x = \mu U_{xx}$, Comm. Pure App. Math., 3, p. 201-230.

Iskandar L. and Mohsen A. 1992, Some Numerical Experiments on the Splitting of Burgers' Equation, Num. Meth. Par. Diff. Eq., 8, 267-276.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Jain P. C. ,Shankar R. and Singh T. V. 1995, Numerical Technique for Solving Convective-Reaction-Diffusion Equation, Math. Comput. Modelling, Vol. 22, No. 9, p. 113-125.

Jiang, Z., Wang, R. 2010, An improved numerical solution of Burgers' equation by cubic B-spline quasi-interpolation, Journal of Information & Computational Science, 7 (5), p. 1013-1021.

Kutluay S. , Bahadır A. R. and Özdeş A. 1999, Numerical Solution of One-dimensional Burgers Equation: Explicit and Exact-Explicit Finite Difference Methods, J. Comp. App. Maths., 103, p. 251-261.

Kutluay, S., Esen, A. and Dağ, İ., 2004, Numerical solutions of the Burgers' equation by the least squares quadratic B-spline finite element method, Journal of Computational and Applied Mathematics, 167, p. 21-33.

Mittal, R. C. and Jain, R. K., 2012, Numerical solutions of nonlinear Burgers' equation with modified cubic B-splines collocation method, Applied Mathematics and Computation, 218, p. 7839-7855.

Rubin S. G. and Khosla P. K. 1976, Higher-order Numerical Solutions Using Cubic Splines, AIAA Journal, vol 14, no 7, p. 851-858.

Saka, B. and Dağ, İ., 2007, Quartic B-spline collocation methods to the numerical solutions of the Burgers' equation, Chaos, Solitons and Fractals, 32, p. 1125-1137.

Tamsir M., Dhiman N, and Srivastava V. K., 2016, Extended modified cubic B-spline algorithm for nonlinear Burgers' equation, Beni-Suef University Journal of Basic and Applied Sciences, 5(3) p. 244-254.

Varoğlu E. and Finn W. D. L. 1980, Space-time finite elements incorporating characteristics for the Burgers' equation, Int. Jour. Num. Meth. Eng., 16, p. 171-184.

Zhu, C., Wang, R., 2009, Numerical solution of Burgers' equation by cubic B-spline quasi-interpolation, Applied Mathematics and Computation, 208, p. 260-272.