2-Profinite Gruplar

Özden Hande Kozalı

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
2010

2-Profinite Groups

Özden Hande Kozalı

MASTER OF SCIENCE DISSERTATION
Department of Mathematics
2010

2-Profinite Gruplar

Özden Hande Kozalı

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisans Yönetmeliği Uyarınca

Matematik Anabilim Dalı

Topoloji Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Yrd. Doç. Dr. İ. İlker AKÇA

Kasım 2010

ONAY

Matematik Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS öğrencisi Özden Hande Kozalı ın YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı " **2-Profinite Gruplar** " başlıklı bu çalışma jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. İ. İlker AKÇA

İkinci Danışman:

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye: Yrd. Doç. Dr. İ. İlker AKÇA

Üye: Prof.Dr.Mahmut KOÇAK

Üye: Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ

Üye: Yrd.Doç.Dr.Ummahan EGE ARSLAN

Üye: Yrd.Doç.Dr.Sedat PAK

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bir profinite grup, genel olarak Hausdorff, kompakt ve tamamen bağlantısız olan bir topolojik grup olarak ifade edilir. Buna denk olarak, ayrık sonlu grupların bir ters sisteminin ters limitine izomorf olan bir topolojik gruba profinite grup denir.

Kategori teorisi; matematiksel yapılar ve bunlar arasındaki ilişkilerle soyut olarak ilgilenen bir matematik dalıdır. Bir kategori, birbirleriyle ilişkili olan objeler sınıfı (örneğin; gruplar) ve bu objeler arasındaki morfizmlerden oluşur. Gruplar örneğinde bu morfizmler grup homomorfizmleridir. Bu şekildeki farklı kategorileri funktorlar aracılığı ile ilişkilendirmek mümkündür. Funktorlar, bir kategorinin her objesini diğer kategorinin bir objesi ile, ve bir kategorideki morfizmi diğerindeki bir morfizme ilişkilendiren fonksiyonların bir genelleştirilmesidir. Bu tezde objeleri profinite gruplar ve morfizmleri sürekli grup homomorfizmleri olan profinite grup kategorisi üzerinde çalışılacaktır.

Tezin birinci bölümünde tezin ana yapısı olan profinite gruplar tanıtıldı. İkinci bölümde, kategori teorisi ile ilgili gerekli temel bilgiler verildikten sonra profinite gruplar kategorisi incelendi. Bu kategori içindeki internal kategori elde edilerek profinite çaprazlanmş modüller ile olan ilişkisi verildi. Tezin üçüncü bölümünde ise 2-boyutlu kategori olarak da ifade edilen 2- kategori ve bunun özel hali olan 2-grup kavramları tanıtılarak 2-profinite grup yapısı tanımlandı. Ayrıca, grup, cebir, lie cebiri gibi cebirsel yapılara benzer şekilde profinite gruplar için tanımlanan 2- profinite grubun profinite grupların çaprazlanmış modülüne ve profinite cat-1 grubuna denk olduğu gösterildi.

Anahtar Kelimeler: 2-gruplar, internal kategoriler, crossed modüller.

SUMMARY

Generally, a profinite group is a Hausdorff, compact and totally disconneted topologial group. Equivalently, one can define a profinite group to be a topolojical group that is isomorphic to the inverse limit of an inverse system of discrete finite groups.

Category theory is a branch of matematics deals in an abstract way with mathematical structures and relationships between them. A category consists of a class of objects (groups) and morhisms between them. In groups, this morhisms are group homomorphisms. A category is itself a type of mathematical structure, so we can look for "processes" which preverse this structure in some sense; such a process is called a funktor. A funktor associates to every object of one category an object of another category, and to every morphism in the first category a morphism in the thesis, it is studied over category of profinite groups in which objects are profinite groups and morphisms are continuous group homomorphisms.

This thesis consists of three main chapters. In the first chapter, it's recalled some basic notions and examples about profinite groups. In the second chapter it is given some basic notions and examples about category theory than it is examined the category of profinite groups. Also, it is obtained the internal category in this category. In the last chapter, the 2-category notion is given and the 2- group notion is recalled than it is defined 2-profinite groups, also it is shown that the 2-profinite groups are equivalent crossed modules of profinite groups and profinite cat-1 groups.

Key words: 2-groups, internal category, crossed modules

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmamı yöneten ve bu tezin hazırlanması sırasında, çalışma boyunca vakit ayırarak ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın

İ. İLKER AKÇA 'ya

sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET **v**

SUMMARY **vi**

TEŞEKKÜR **vii**

BÖLÜM 1. PROFINITE UZAYLAR VE PROFINITE GRUPLAR **1**

1.1 Giriş 1

1.2 Topolojik Uzaylar 1

1.2.1 Topolojik Uzayların Çarpımı 5

1.3 Topolojik Gruplar 7

1.4 Ters (inverse) ya da Projektif Limitler 11

1.5 Profinite Uzaylar ve Profinite Gruplar 18

BÖLÜM 2. PROFINITE GRUPLAR KATEGORİSİ **22**

2.1 Giriş 22

2.2 Kategoriler 22

2.3 İnternal Kategoriler 28

2.4 Profinite Çaprazlanmış Modüller 32

BÖLÜM 3. 2-PROFİNİTE GRUPLAR ve ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER **40**

3.1 Giriş 40

3.2 2-Kategoriler 40

3.3 2-profinite gruplar 42

BÖLÜM 1

PROFINITE UZAYLAR VE PROFINITE GRUPLAR

1.1 Giriş

Bir profinite grup, genel olarak Haussdorff, kompakt ve tamamen bağlantısız olan bir topolojik grup olarak ifade edilir. Buna denk olarak, ayrık sonlu grupların bir ters sisteminin ters limitine izomorf olan bir topolojik gruba profinite grup denilir. Bu bölümde profinite uzayların ve profinite grupların tanımını ve temel özelliklerini vererek, tez için gerekli olan temel kavramları tanıttık. Burada verilen temel bilgiler için Wilson, S.W [10], ve Ribes,L., Zelesski, P. [8] den yararlanılmıştır.

1.2 Topolojik Uzaylar

X bir küme ve τ , X 'in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa X kümesine τ ailesi ile birlikte bir topolojik uzay denir.

(i) $\emptyset$ ve X, τ ailesine aittir.

(ii) τ 'ya ait olan sonlu sayıda kümenin arakesiti yine τ 'ya aittir.

(iii) τ 'ya ait herhangi sayıda kümenin birleşimi yine τ 'ya aittir.

τ ailesine X üzerinde bir topoloji ve τ 'nun her bir elemanına X 'in açık alt kümesi denir.

X 'in bir Y alt kümesi için, tümleyeni τ 'ya ait oluyorsa Y 'ye X içinde kapalıdır denir. X 'in Y alt kümesi için, Y ' yi içeren bütün alt kümelerin kesişimine Y 'nin $\overline{Y}$ kapanışı denir. Böylece $\overline{Y}$ 'de kapalı kümedir. Eğer X 'in Y alt kümesi için $\overline{Y} = X$ ise Y ye X içine yoğundur denir. X in bir x eleman için, x i içeren bir açık kümeye x elemanının bir açık komşuluğu denir. X ' in açık kümelerinin $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ kolleksiyonunu düşünelim. Eğer X in her açık alt kümesi bazı U_λ kümelerinin bir birleşimi olarak yazılabiliyorsa, $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ ailesine X üzerindeki topoloji için bir taban denir (ve

x elemanının açık komşuluklarının bir tabanı da benzer şekilde tanımlanır). Herhangi bir X kümesi, her alt kümesi açık olan kümeler ile oluşan topolojiye göre bir topolojik uzay olarak ele alınabilir. Bu topolojiye X üzerinde ayrık (discrete) topoloji denir ve X 'e ayrık uzay denir.

Eğer Y, X uzayının bir alt kümesi ve U, X 'in açık alt kümesi ise, $Y \cap U$ formundaki tüm alt kümelerin ailesi Y üzerinde bir topoloji belirtir, bu topolojiye alt uzay topolojisi denir ve bu topolojiye göre Y 'ye X 'in alt uzayı denir.

X topolojik uzay olsun. Birleşimi X 'i veren X 'in açık alt kümelerinin herhangi bir $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ ailesi için, yine birleşimi X 'i veren $\{U_\alpha, ..., U_{\alpha_n}\}$ sonlu bir alt ailesi bulunabiliyorsa X uzayına kompaktır denir.

X 'in herhangi farklı iki x, y elemanı için $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde sırasıyla x ve y 'nin U ve V açık komşulukları bulunabiliyorsa X 'e Hausdorff uzay denir. Eğer X, Hausdorff uzayı ise her bir $x \in X$ elemanı için $\{x\}$ kapalıdır. Bir X uzayı boş olmayan iki açık alt kümesinin ayrık birleşimi olarak yazılamıyorsa, X uzayına bağlantılıdır denir. X uzayının her bir bağlantılı alt uzayı en çok bir elemandan oluşuyorsa X 'e tamamen bağlantısızdır denir.

Yardımcı Teorem 1.1 X kompakt Hausdorff uzay olsun.

(a) Eğer C ve D, $C \cap D = \emptyset$ olacak şekilde kapalı alt kümeler ise, $C \subseteq U$, $D \subseteq V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U ve V açık alt kümeleri mevcuttur.

(b) $x \in X$ olsun ve A, X uzayının x elemanını içeren hem açık hemde kapalı tüm alt kümelerinin kesişimi olsun. Bu durumda A bağlantılıdır.

(c) Eğer X aynı zamanda tamamen bağlantısız ise, her açık küme, hem açık hemde kapalı olan kümelerin bir birleşimidir.

İspat. (a) İlk olarak her bir $c \in C$ elemanı için, $C \subseteq U_c$ ve $D \subseteq V_c$ olacak şekilde U_c ve V_c ayrık açık kümelerinin var olduğu gösterilecektir. Sabit bir $c \in C$ seçilsin. Her bir $d \in D$ için $c \in O_d$ ve $d \in P_d$ şeklinde O_d ve P_d ayrık açık kümeler mevcuttur. Açıktır ki,

$$U_c = O_{d_1} \cap .... \cap O_{d_m}$$

ve

$$V_c = P_{d_1} \cup .... \cup P_{d_m}$$

kümeleri iddia edilen özelliklere sahiptir. Şimdi de c elemanı C 'de değişsin. X uzayı, $X \setminus C$ ile, $c \in C$ için U_c kümelerinin birleşimi olduğundan ve X kompakt uzay olduğundan öyle $c_1, c_2, ..., c_n \in C$ elemanları vardır ki, X, $X \setminus C$ ile $U_{c_1}, ..., U_{c_n}$ lerin birleşimi eşittir. O halde, $U = U_{c_1} \cup ... \cup U_{c_n}$ ve $V = V_{c_1} \cap ... \cap V_{c_n}$ dir.

(b) $\{C_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}, x \in X$ içeren açık -kapalı kümelerin ailesi olsun. $A = C \cup D$ olduğunu kabul edelim. Burada C ile D, A da açık ve $C \cap D = \emptyset$ olsun. Böylece C ile D, X içinde kapalı olan A kümesinde kapalıdır ve böylece (alt uzay topolojisi tanımından) C ile D, X içinde kapalıdır. U ve V kümeleri, (a) nın koşullarını sağlayan açık kümeler olsun. $B = X \setminus (U \cup V)$ yazalım. Kapalı kümelerin $\{B\} \cup \{C_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ ailesinin kesişimi boştur, bundan dolayı $B \cap C_{\lambda_1} \cap ... \cap C_{\lambda_n} = \emptyset$ olacak şekilde bir $\{C_{\lambda_1}, ..., C_{\lambda_n}\}$ sonlu ailesi mevcuttur. Böylece $I = C_{\lambda_1} \cap ... \cap C_{\lambda_n}$ kümesi $I \subseteq U \cup V$ yi sağlar ve I, $I \cap U$, $I \cap V$ ayrık kümelerinin birleşimine eşittir. Bu kümelerin her biri I içinde hem açık hem kapalıdır. I, X içinde hem açık hemde kapalı olduğundan dolayı, $I \cap U$ ile $I \cap V$ kümeleri de X içinde hem açık hemde kapalıdır. Böylece eğer $x \in I \cap U$ ise, $A \subseteq I \cap U$ olmalıdır, o halde $D \subseteq A \cap V \subseteq U \cap V = \emptyset$ dir.

Benzer şekilde $x \in I \cap V$ ise, $C = \emptyset$ olduğu sonucuna varılır. Buna göre A bağlantılıdır.

(c) U bir açık küme ve $x \in U$ olsun. Her bir $y \in X \setminus \{y\}$ için, $x \in F_y$ ve $y \notin F_y$ yi sağlayan ve hem açık hemde kapalı olan bir F_y kümesi vardır. X, U açık kümesi ile $X \setminus F_y$ açık kümelerinin birleşimidir. Böylece $X = U \cup (X \setminus F_{y_1}) \cup ... \cup (X \setminus F_{y_n})$ olacak şekilde sonlu sayıda $y_1, ..., y_n$, U içindedir. Bu küme aynı zamanda X 'i içerir ve hem açık hemde kapalıdır. □

X ve Y birer topolojik uzay olsun. $f : X \to Y$ dönüşümünü ele alalım. Eğer Y 'nin her bir U açık kümesi için $f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \in U\}$ kümesi X içinde acık ise, f 'ye süreklidir denir. Buna denk olarak, eğer Y 'nin her C kapalı alt kümesi için $f^{-1}(C)$, X içinde kapalı ise f 'ye süreklidir denir. Eğer $f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$ sürekli ise $gf : X \to Z$ nin sürekli olduğu açıktır. Eğer $f : X \to Y$ birebir ve örten ise $f^{-1} : Y \to X$ ters fonksiyonu tanımlıdır fakat sürekli olması gerekmez. Eğer bir f dönüşümü birebir ve örten ve f ile f^{-1} sürekli ise f 'ye homeomorfizm denir.

Yardımcı Teorem 1.2 (a) Bir Kompakt uzayın her kapalı alt kümesi kompakttır.

(b) Bir Hausdorff uzayın her kompakt alt kümesi kapalıdır.

(c) Eğer $f : X \to Y$ sürekli ve X kompakt ise $f(X)$ kompakttır.

(d) Eğer $f : X \to Y$ sürekli ve birebir örten ise, X kompakt ve Y Hausdorff ise, f bir homeomorfizmdir.

(e) Eğer $f : X \to Y$ ile $g : X \to Y$ sürekli fonksiyonlar ve Y Hausdorff ise, $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ kümesi X içinde kapalıdır.

İspat. (a),(b) ve (c) şıkları açıktır.

(d) X in her bir kapalı alt kümesinin f altındaki görüntüsünün kapalı olduğunu göstermemiz yeterlidir. A, X in kapalı alt kümesi olsun. X Hausdorff ve $A \subseteq X$ kapalı olduğundan (a) gereği kompakttır. (c) gereği $f(A) \subset Y$ kompakttır. Y Hausdorff ve $f(X)$ kompakt olduğundan (b) gereği $f(X)$ kapalıdır. O halde f homeomorfizmdir.

(e) $N = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ olsun. $g \in G$ alalım ve U ile V, $f(y)$ ve $g(y)$ 'yi içeren Y 'nin ayrık açık alt kümeleri olsun. Açıktır ki, $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ X 'in açık komşuluğudur ve N içinde kalır. Böylece N açık kümelerin bir birleşimidir ve bunlardan dolayı açıktır. O halde tümleyeni, yani $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ kümesi, X içinde kapalıdır. □

Yardımcı Teorem 1.3 X tamamen bağlantısız bir uzay olsun. Bu durumda her $x \in X$ için, $\{x\}$ kümesi X içinde kapalıdır.

İspat. C, $\{x\}$ kümesinin kapanışı olsun. Eğer C, $x \in A$ olmak üzere, iki ayrık açık A ve B alt kümelerinin birleşimi ise, A , C 'de kapalıdır. Böylece A, X 'de de kapalıdır. $A = C$ olduğunu göstermeliyiz. X tamamen bağlantısız olduğundan, C kapalı kümesi bağlantılıdır ve $C = \{x\}$ 'dir. Buna göre $A = C$ elde edilir. □

p, X topolojik uzayında bir denklik bağıntısı olsun ve bölüm kümesini $X \,/\, p$ ile gösterelim ve X den $X \,/\, p$ 'ye bölüm dönüşümü q ile gösterelim. (Böylece $X \,/\, p$ 'nin elemanları, p 'nin denklik sınıflarıdır ve q, X 'in her bir elemanını denklik sınıfına resmeder). $X \,/\, p$ 'nun üzerindeki bölüm topolojisi, $q^{-1}(V)$, X içinde açık olacak şekilde $X \setminus p$ 'nun V alt kümelerinden oluşur. Böylece, $X \setminus p$ üzerinde bölüm topolojisi verilirse, bölüm dönüşümü q süreklidir.

1.2.1 Topolojik Uzayların Çarpımı

Kümelerin $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ bir ailesinin kartezyen çarpımı, $C = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ olup, bunun elemanları Λ 'dan $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ kümesine giden ve her bir $\lambda \in \Lambda$ için $x(\lambda) \in X_\lambda$ özelliğindeki X dönüşümleridir. C 'nin bu elemanları ile indislenmiş koordinatları (girdiler) gibi düşünebiliriz. Buna göre bir eleman (X_λ) şeklinde yazılabilir, bu eleman λ 'yı X_λ 'ya dönüştüren bir fonksiyona karşılık gelir. $\prod_\lambda$ projeksiyon dönüşümü, C 'nin bir elemanını bunun λ 'daki değerine eşleyen dönüşümdür. Kümelerin sonlu sayıdaki $X_1, X_2, ..., X_n$ ailesinin çarpımı $X_1 \times ... \times X_n$ şeklinde gösterilir.

X_λ bir topolojik uzay olsun. C üzerindeki çarpım topolojisinin açık kümeleri, n sonlu bir sayı, her bir λ_i, Λ içinde ve U_i, X_{λ_i} içinde açık olmak üzere

$$\prod_{\lambda_1}^{-1}(U_1) \cap ... \cap \prod_{\lambda_n}^{-1}(U_n) \qquad (0.1)$$

biçimindeki kümelerin birleşiminden oluşur. Böylece her bir $\prod_\lambda$ dönüşümü süreklidir. Aslında çarpım topolojisi, her bir projeksiyon dönüşümünün sürekli olduğu en dar topolojidir. I bir başka topolojik uzay ve $f : I \to C$ bir dönüşüm olsun. f 'nin sürekli olması için gerek ve yeter şart her bir $\prod_\lambda f$ dönüşümünün sürekli olmasıdır. Tersine $\prod_\lambda f$ nin sürekli olduğunu kabul edelim. Her $i = 1, ..., n$ için U_i, X_{λ_i} içinde açık ise, her bir $\left(\prod_{\lambda_i} f\right)^{-1}(U_i)$, I 'da açıktır. Böylece

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \prod_{\lambda_i}^{-1}(U_i)\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \left(\prod_{\lambda_i} f\right)^{-1}(U_i)$$

I 'da açıktır. $a = (a_\lambda) \in C$ olsun ve N, a 'nın C 'de bir açık komşuluğu olsun. Böylece a 'yı içinde bulunduran ve N içinde kalan (0.1) formunda bir küme vardır, yani öyle bir n tamsayısı, Λ 'nın $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ elemanları ve $i = 1, ..., n$ için U_i açık kümeleri vardır öyle ki her bir i için $a_{\lambda_i} \in U_i$ dir ve

$$\prod_{\lambda_i}^{-1}(U_1) \cap ... \cap \prod_{\lambda_N}^{-1}(U_n) \subseteq N$$

dir. Özel olarak N

$$\left\{x \in C \mid \prod_{\lambda_1}(x) = a_{\lambda_1}, ..., \prod_{\lambda_n}(x) = a_{\lambda_n}\right\}$$

kümesini içerir.

Teorem 1.4 $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ topolojik uzayların bir ailesi ve C bunların kartezyen çarpımı olsun.

(a) Eğer herbir X_λ Hausdorff ise C 'de Hausdorfftur.

(b) Eğer herbir X_λ tamamen bağlantısız ise C 'de tamamen bağlantısızdır.

(c) Eğer herbir X_λ kompakt ise C 'de kompakttır.

İspat. Açıktır. □

X bir küme ve $\pounds$, X 'in alt kümelerinin bir ailesi olsun öyle ki $A_1, A_2 \in \pounds$ ise $A_1 \cap A_2 \in \pounds$ ve $A_1 \cup A_2 \in \pounds$ olsun. $\pounds$ içinde bir süzgeç aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\Gamma \subseteq \pounds$ ailesidir;

(i) Eğer $A_1, A_2 \in \Gamma$ ise $A_1 \cap A_2 \in \Gamma$ 'dir.

(ii) Eğer $A \in \Gamma$ ve $A \subseteq B \in \pounds$ ise $B \in \Gamma$ 'dir.

(iii) $\emptyset \notin \Gamma$ 'dir.

$\pounds$ içindeki tüm süzgeçlerin kümesi kapsamaya göre kısmi sıralıdır. Böylece $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ ise $\Gamma_1 \leq \Gamma_2$ yazarız. Bu kısmi sıralı kümenin bir maksimal elemanına ultra süzgeç denir.

Yardımcı Teorem 1.5 (a) $\pounds$ içindeki her Γ_0 süzgeçi bir ultra süzgeç içinde bulunur.

(b) Eğer Γ, $\pounds$ içinde bir ultra süzgeç ise ve A,B, $\pounds$ içinde $A \cup B \in \Gamma$ olacak şekilde kümeler ise ya $A \in \Gamma$ yada $B \in \Gamma$ 'dir.

(c) X bir topolojik uzay olsun. Bu durumda X 'in kompakt olması için gerekli ve yeter şart, X 'in kapalı alt kümelerinin ailesi içindeki herbir Γ ultra süzgeci için $\cap (D \mid D \in \Gamma) \neq \emptyset$ 'dir.

1.3 Topolojik Gruplar

G bir küme olsun. G hem bir grup hem de bir topolojik uzay ise ve $G \times G \longrightarrow G$,$(x, y) \mapsto xy^{-1}$ döşümü sürekli ise G 'ye bir topolojik grup denir. Aşağıdaki yardımcı teoremde topolojik gruplar hakkındaki bazı sonuçları bir araya toplayacağız. Eğer G bir grup, g, G 'nin bir elemanı ve U ve V, G 'nin alt kümeleri ise

$$Ug = \{ug \mid u \in U\}, gU = \{gu \mid u \in U\}, U^{-1} = \left\{u^{-1} \mid u \in U\right\}$$

dır ve $UV = \{uv \mid u \in U \text{ ve } v \in V\}$ dir. Bir grubun birim elemanını 1 ile göstereceğiz.

Yardımcı Teorem 1.6 G bir topolojik grup olsun.

(a) $G \times G \to G$, $(x, y) \longmapsto xy$ döşümü süreklidir ve $G \to G$, $x \longmapsto x^{-1}$ dönüşümü bir homeomorfizmdir. Her bir $g \in G$ için, $G \to G$, $x \longmapsto gx$ ve $x \longmapsto xg$ dönüşümleri homeomorfizmdir.

(b) Eğer H, G ' nin bir açık (ya da kapalı) alt grubu ise, G içinde H nın her bir Hg ya da gH koseti açık (ya da kapalı) dır.

(c) G 'nin her açık altgrubu kapalıdır ve sonlu indisli her kapalı altgrubu açıktır. Eğer G kompakt ise G 'in her açık alt grubu sonlu indislidir.

(d) Eğer H, G 'nin boş olmayan bir U açık alt kümesini içeren bir alt grup ise H, G içinde açıktır.

(e) Eğer H, G 'nin bir altgrubu ve K, G 'nin bir normal altgrubu ise, H altgrup topolojisine göre bir topolojik gruptur ve G/K bölüm topolojisine göre bir topolojik gruptur ve $g : G \to G/K$ bölüm dönüşümü açık kümeleri açık kümelere dönüştürür.

(f) G 'nin *Hausdorff* olması için gerek ve yeter koşul $\{1\}$ 'in G 'nin bir kapalı alt kümesi olmasıdır ve eğer K, G 'nin bir normal altgrubu ise G/K 'nın *Hausdorff* olması için gerekli ve yeter koşul K 'nin G içinde kapalı olmasıdır. Eğer G tamamen bağlantısız ise G *Hausdorfftur.*

(g) Eğer G kompakt ve *Hausdorff* ve C ile D kapalı kümeler ise CD kapalı kümedir.

(h) Kabul edelim ki G kompakt olsun ve $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ "her bir $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ için $X_\mu \subseteq X_{\lambda_1} \cap X_{\lambda_2}$ olacak şekilde bir $\mu \in \Lambda$ elemanı mevcut" özelliğine sahip kapalı kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer Y, G 'nin bir kapalı alt kümesi ise,

$$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right) Y = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda Y$$

dir.

İspat. (a) Bir X uzayından $G \times G$ 'ye giden bir dönüşümün sürekli olması için gerek ve yeter şart projeksiyon dönüşümlerinin her birinin sürekli olmasıdır. Böylece eğer $\theta : G \to G$ ve $\varphi : G \to G$ sürekli ise , $G \to G \times G$, $x \longmapsto (\theta(x), \varphi(x))$ dönüşümü de süreklidir. İlk olarak bunu θ için $x \longmapsto 1$ sabit dönüşüm ve φ için Id_G birim dönüşüm olarak uygulayalım ve sonuçta elde edilen dönüşüm ile $G \times G \to G \quad C : (x, y) \longmapsto xy^{-1}$ sürekli dönüşümünün birleşimini bulalım. Sonuçta $G \to G \quad x \to x^{-1}$ elde edilir ve bu süreklidir. Böylece tersine de eşit olduğu için bir homeomorfizmdir. Böylece $(x.y) \longmapsto (x, y^{-1})$ dönüşümü süreklidir ve bunun C ile birleşimi $(x, y) \longmapsto (x, y^{-1}) \longmapsto xy$ olup süreklidir. Şimdi θ için Id_G yi ve φ için $x \longmapsto y^{-1}$ sabit dönüşümünü alalım ve sonuçta elde edilen dönüşüm ile C nin birleşimini alalım. Bu durumda $x \longmapsto xy$ elde edilir ve bu süreklidir. Tersi de $x \longmapsto xy^{-1}$ süreklidir. $x \longmapsto xy$ dönüşümü için de benzer inceleme yapılabilir.

(b) Her bir $g \in G$ için $G \to G \quad x \longmapsto xg$ ve $x \longmapsto gx$ dönüşümleri homeomorfizm dolayısıyla açık dönüşüm ve kapalı dönüşümlerdir. Dolayısıyla G 'nin herbir açık alt grubunun görüntüsü de açıktır . O halde G nin H açık altgrubunun görüntüsü Hg ve gH G nin açık altgruplarıdır (veya kapalıdır).

(c) G ' nin her bir açık altgrubunun kapalı olduğunu görmek için tümleyeninin açık olduğunu göstermeliyiz. H, G 'nin açık altgrubu olsun.

$$G \setminus H = \cup \{H_g \mid g \notin H\}$$

dir. Böylece H açık ise Hg ler, dolayısıyla bunların birleşiminden oluşan $G \setminus H$ açıktır. O halde H kapalıdır. Eğer H sonlu indisli ise $G \setminus H$ sonlu sayıda kosetlerin bir birleşimidir ve böylece H kapalı ise $G \setminus H$ da kapalıdır ve H açıktır. Eğer H açık ise, Hg kümeleri açık, ayrık ve bunların birleşimi G 'yi verir. Böylece kompaktlık tanımından, G kompakt ise H, G içinde sonlu indise sahip olmak zorundadır.

(d) H, G 'nin boş olmayan bir U açık alt kümesini içeren bir alt grup olsun. Buna göre her bir $Uh = \{uh \mid u \in U\}$ kümesi açık olup $H = \cup\{Uh \mid h \in H\}$ olduğundan H 'de açıktır.

(e) H hakkındaki durum açıktır.

V, G içinde açık olsun. kV, $k \in K$ için açıktır ve $V_1 = KV$ açıktır. Böylece $q(V) = q(V_1)$ ve $q^{-1}q(V_1) = V_1$olduğundan $q(V), G\ /\ K$ içinde açıktır. Şimdi

$$\begin{array}{rccccc} m: & G/K & \times & G/K & \to & G/K \\ & (\varepsilon & , & \iota) & \mapsto & \varepsilon\iota^{-1} \end{array}$$

dönüşümünün sürekli olduğunu göstermeliyiz. $U, G/K$ da açık ve $(K_{w_1}, K_{w_2}) \in m^{-1}(U)$ olsun. q dönüşümü ile $G \times G \to G \quad (x, y) \longmapsto xy^{-1}$ sürekli olduğundan w_1 ve w_2 'nin W_1 ve W_2 açık komşuları vardır öyle ki $W_1W_2^{-1} \subseteq q^{-1}(U)$ dur. Böylece $q(W_1) \times q(W_2)$, (KW_1, KW_2) 'nin $G/K \times G/K$ de bulunan $m^{-1}(U)$ içinde bir açık komşuluğudur.

(f) Hausdorff uzayların tek elemanlı alt kümelerinin kapalı olduğunu biliyoruz. O halde $\{1\}$ kümesi kapalı ise G 'nin Hausdorff olduğunu gösermeliyiz. a ve b, G nin farklı elemanları olsun . (a) gereği $\{ab^{-1}\}$ kapalıdır ve bundan dolayı $1 \in U$ ve $ab^{-1} \notin U$ olacak biçimde bir U açığı vardır. $(x, y) \longmapsto xy^{-1}$ dönüşümü süreklidir. Bundan dolayı U nun ters görüntüsü açıktır. Buradan $UW^{-1} \subseteq U$ olacak şekilde 1 'i içeren V ve W açık kümeleri mevcuttur. Buna göre $a^{-1}b \notin VW^{-1}$ dir ve $aV \cap BW = \emptyset$ dır. aV ve bW açık olduklarından G Hausdorfftur. İkinci ve üçüncü iddia ilkinin bir sonucu olarak kolayca gösterilebilir.

(g) *Yardımcı teorem 1.1.2'* nin sonucunu kullanacağız. C ve D kapalı ve G kompakt olduğundan hem C hem de D kompakttır ve böylece $(x, y) \longmapsto xy$ sürekli dönüşümü altında $C \times D$ nin görüntüsü de kompakttır. Bunun görüntüsü CD dir ve G Hausdorff olduğundan dolayı her bir kompakt küme kapalıdır. □

Yardımcı Teorem 1.7 G kompakt topolojik uzay olsun. Eğer $C, 1$' i içeren hem açık hemde kapalı bir alt küme ise , C bir açık normal alt grup içerir.

İspat. Her bir $x \in C$ için $W_x = Cx^{-1}$ kümesi 1' in bir açık komşuluğudur öyle ki $W_x x \subseteq C$ dir. $G \times G$ den G 'ye çarpım dönüşüm sürekli olduğundan dolayı 1 'i içeren L_x ve R_x açık kümeleri vardır öyle ki $L_x \times R_x$ in görüntüsü, W_x in içinde bulunur, yani $L_xR_x \subset W_x$ dir. $S_xS_x \subseteq W_x$ ve S_x açıktır. C kompakttır ve $C \cap S_x x$ biçiminde açık

kümelerin birleşimine eşittir. Böylece bu küme bu biçimdeki kümelerin sonlu tanesinin birleşimi biçiminde yazılabilir. Bunun $C \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} S_{x_i} X_i$ şeklinde gösterelim. $S = \bigcap_{i=1}^{n} S_{x_i}$ kümesi açıktır ve1 'i içerir. Buna göre

$$SC \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S S_{x_i} X_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i} X_i \subseteq C \qquad (0.2)$$

olur, böylece $S \subseteq C$ elde edilir.

$T = S \cap S^{-1}$ olsun. Böylece T açıktır, $T = T^{-1}$ 'dir ve $1 \in T$ 'dir. $T^1 = T$ yazalım, $n > 1$ için $T^n = TT^{n-1}$ yazalım, ve $H = \bigcup_{nT^0} T^n$ yazalım. Böylece H, T tarafından üretilen gruptur ve bu açıktır. (0.2)' den $n > 0$ için $T^n \subseteq C$ olduğu elde edilir. Buradan da $H \subseteq C$ elde edilir. Buna göre H, G 'de sonlu indise sahiptir. Böylece G 'de sadece sonlu sayıda konjuge mevcuttur. Bu konjugelerin kesişimi ise C 'de bir açık normal alt gruptur. □

Önerme 1.8 G, kompakt tamamen bağlantısız bir topolojik grup olsun.

(a) G içindeki her açık küme açık normal altgrupların kosetlerinin bir birleşimidir.

(b) G 'nin bir alt kümesinin hem açık hem de kapalı olması için gerekli ve yeterli şart, açık normal altgrupların sonlu sayıda kosetlerının bir birleşimi olmasıdır.

(c) Eğer X, G 'nin bir alt kümesi ise bunun $\overline{X}$ kapanışı

$$\overline{X} = \cap \{NX \mid N, G \text{ nin açık normal altgrubu}\}$$

şeklindedir. Özel olarak, her bir C kapalı alt kümesi için

$$C = \cap \{NC \mid N, G \text{ nin açık normal altgrubu}\}$$

dır ve G 'nin açık normal altgruplarının kesişimi trivial (aşikar) altgruptur.

Yardımcı Teorem 1.9 $\{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ topolojik gruplar ailesi olsun ve

$$C = \prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$$

yazalım. C 'de nokta çarpımı tanımlayalım (C de her $(X_\lambda), (Y_\lambda)$ için $(X_\lambda)(Y_\lambda) = (X_\lambda Y_\lambda)$ dir). Bu çarpıma ve çarpım topolojisine göre C bir topolojik grup olur.

1.4 Ters (inverse) ya da Projektif Limitler

I kısmi sıralı ve yönlendirilmiş bir indis kümesi (yani aşağıdaki özellikleri sağlayan bir kısmi sıralı küme) olsun.

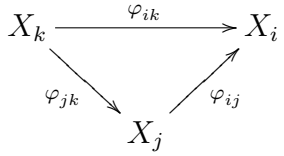
(a) $i \in I$ için $i \leq i$ 'dir,

(b) $i, j, k \in I$ için $i \leq j$ ve $j \leq k$ ise $i \leq k$ 'dir,

(c) $i, j \in I$ için $i \leq j$ ve $j \leq i$ ise $i = j$ 'dir,

(d) $i, j \in I$ ise $i, j \leq k$ olacak şekilde bir $k \in I$ mevcuttur.

$i \in I$ için X_i bir topolojik uzay ve $i, j \in I$, $i \leq j$ için $\varphi_{ij} : X_j \to X_i$ sürekli fonksiyonlarını göz önüne alalım. $\{X_i \mid i \in I\}$ topolojik uzaylar ailesi ile $i \in I$ için $\varphi_{ii} : X_i \to X_i$ birim dönüşüm ve $i \leq j \leq k$, $i, j, k \in I$ için



diyagramı değişmeli yani $\varphi_{ik} = \varphi_{ij}\varphi_{jk}$ olacak şekildeki $\{\varphi_{ij} : X_j \to X_i \mid i, j \in I, i \leq j\}$ sürekli fonksiyonlar ailesinin oluşturduğu $\{X_i, \varphi_{ij}\}$ sistemine bir **topolojik uzayların bir** ters sistemi denir.

Ters sistem kavramı kümeler, topolojik gruplar, halkalar vb. içinde benzer şekilde tanımlanır.

Örnek 1.1 $I = N$ olsun. $i \in I$ için X_i sonlu küme olsun ve her bir $i \in I$ için $\varphi_{i,i+1} : X_{i+1} \to X_i$ keyfi dönüşüm olsun. $\varphi_{ij} = Id_{x_i}$ şeklinde tanımlayalım ve $j > i$ için $\varphi_{ij} = \varphi_{i,i+1} \circ \varphi_{i+1,i+2} \circ \cdots \circ \varphi_{j-1,j}$ şeklinde olsun. Buna göre $\{X_i, \varphi_{ij}\}$ sonlu kümelerinin bir ters sistemidir.

Örnek 1.2 $I = N$, p bir asal sayı ve her $i \in I$ için $G_i = Z/\ p^i Z$ olsun. $i \leq j$ için

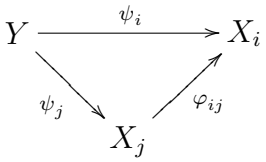
$$\varphi_{ij} : G_j \to G_i$$

dönüşümü ise her $n \in Z$ için

$$\varphi_{ij}(n + p^i Z) = n + p^i Z$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre $\{G_i, \varphi_{ij}\}$,sonlu grupların bir ters sistemidir.

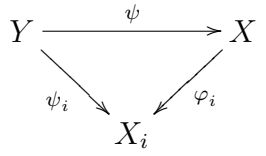
$\{X_i, \varphi_{ij}\}$ topolojik uzayların bir ters sistemi ve Y bir topolojik uzay olsun. $i \in I$ için $\psi_i : Y \to X_i$ sürekli fonksiyonlarını ele alalım. Eğer $i \leq j$ için



diyagramı değişmeli yani $\psi_i = \varphi_{ij}\psi_j$ oluyorsa $\{\psi_i\}_{i \in I}$ ailesine uyumlu aile denir.

Tanım 1.10 (Ters limit) $\{X_i, \varphi_{ij}\}$, topolojik gruplar ve sürekli grup homomorfizmlerinin bir ters sistemi olsun. X bir topolojik grup ve $\{\varphi_i : X \to X_i\}$ sürekli fonksiyonların bir uyumlu ailesi olsun. Buna göre evrensel özellik dediğimiz aşağıdaki özellik sağlanıyorsa $\{X, \varphi_i\}$ ikilisine $\{X_i, \varphi_{ij}\}$ ters sisteminin bir ters limiti denir.

"Her bir Y topolojik uzayı ve her $\{\psi_i : Y \to X_i\}$ sürekli fonksiyonlarının uyumlu aileleri için ;

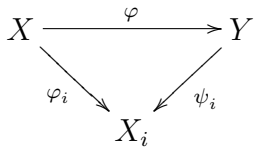


diyagramı değişmeli yani $\psi_i = \varphi_i\psi$ olacak şekilde bir tek $\psi : Y \to X$ sürekli dönüşümü mevcuttur."

Teorem 1.11 $\{X_i, \varphi_{ij}\}$, topolojik grupların bir ters sistemi olsun. Bu durumda

(a)$\{X_i, \varphi_{ij}\}$ ters sisteminin bir ters limiti mevcuttur.

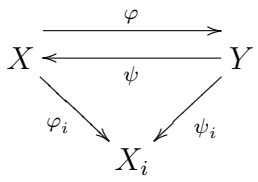
(b)Bu limit aşağıdaki anlamda tektir. Eğer $\{X, \varphi_i\}$ ve $\{Y, \psi_i\}$, $\{X_i, \varphi_{ij}\}$ ters sisteminin iki ters limiti ise, her $i \in I$ için



diyagramı değişmelidir yani $\varphi_i = \psi_i\varphi$ olacak şekilde bir tek $\varphi : X \to Y$ topolojık izomorfizmi mevcuttur.

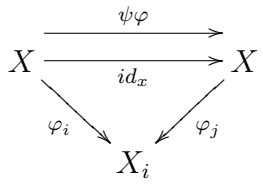
İspat. (a) $X, \prod_{i\in I} X_i$ direkt çarpımının bir alt grubu olsun öyle ki $(x_i) \in X$ için $i \leq j$ olmak üzere $\varphi_{ij}(x_j) = X_i$ şeklinde tanımlansın. $\varphi_i : X \to X_i$ ise $\prod_{i\in I} X_i \to X_i$ izdüşüm dönüşümünün kısıtlanmışını göstersin. Buna göre, her bir φ_i nin sürekli homomorfizm ve (X, φ_i) 'nin ise bir ters limit olduğunu görmek kolaydır.

(b) Kabul edelım ki (X, φ_i) ile (Y, ψ_i), $\{X_i, \varphi_{ij}\}$ ters sisteminin iki ters limiti olsun.



$\psi_i : Y \to X_i$ dönüşümleri uyumlu dönüşümler olduğundan, (X, φ_i) ters limitinin evrensel özelliği gereği, her $i \in I$ için $\varphi_i\psi = \psi_i$ olacak şekilde bir tek $\psi : Y \to X$ sürekli homomorfizmi mevcuttur. Benzer şekilde $\varphi_i : X \to X_i$ dönüşümleri uyumlu dönüşümler olduğundan (Y, ψ_i) ters limitinin evrensel özelliği gereği, her $i \in I$ için $\psi_i\, Y = \varphi_i$ olacak şekilde bir tek $\varphi : X \to Y$ sürekli homomorfizmi mevcuttur.

Şimdi şuna dikkat edelim. Her bir $i \in I$ için



diyagramı sağlanır. Yani $\varphi_i = \varphi_i Id_x$ ve $\varphi_i = \varphi_i(\Psi\varphi)$ dir. Ters limit tanımı gereği bu özelliği sağlayan sadece bir tane dönüşüm bulunmalıdır. O halde $\psi\varphi = Id_x$ olduğu söylenebilir. Böylece φ dönüşümü bir topolojik izomorfizmdir. □

Eğer $\{X_i, \varphi_{ij}\}$ bir ters sistem ise, bu sistemin ters limitini genelde

$$\varprojlim_{i\in I} X_i$$

biçiminde göstereceğiz.

Yardımcı Teorem 1.12 Eğer $\{X_i, \varphi_{ij}\}$, Hausdorff topolojik grupların bir ters sistemi ise, $\varprojlim X_i$, $\prod_{i\in I} X_i$ 'nin bir kapalı alt grubudur.

İspat. $(X_i) \in (\prod X_i) - (\varprojlim X_i)$ alalım. Buna göre, öyle $r, s \in I$ mevcuttur ki $r \leq s$ için $\varphi_{rs}(X_s) \neq X_r$ dir. X_r içinde $\varphi_{rs}(X_s)$ ve X_r 'nin, sırasıyla U ve V ayrık açık komşuluklarını seçelim. U, X_s içinde X_s 'nin bir açık komşuluğu olsun ki $\varphi_{rs}(U') \subseteq U$ olsun. $i \neq r, s$ için $V_i = X_i, V_s = U'$ ve$V_r = V$ olmak üzere $\prod_{i\in I} X_i$ nin $W = \prod_{i\in I} V_i$ açık alt kümesini göz önüne alalım. Buna göre $W_1 \prod_{i\in I} X_i$ içinde (X_i) nin bir açık komşuluğudur ve $\varprojlim X_i$ den ayrıktır. Her noktası için böyle bir açık komşuluk bulunabileceğinden $(\prod X_i) - \left(\varprojlim X_i\right)$ açıktır, dolayısıyla $\varprojlim X_i$ kapalıdır. □

Önerme 1.13 $\{X_i, \varphi_{ij}\}$ bir ters sistem ve $X = \varprojlim X_i$ olsun.

(a) Her bir X_i Hausdorff ise, X 'de Hausdorfftur.

(b) Her bir X_i tamamen bağlantısız ise, X 'de tamamen bağlantısızdır.

(c) Her bir X_i Hausdorff ise, $s\varprojlim X_i$, $C = \prod_{i\in I} X_i$ içinde kapalıdır.

(d)Her bir X_i kompakt ve Hausdorff ise, X 'de kompakt ve Hausdorfftur.

(e) Her bir X_i boş olmayan kompakt Hausdorff uzay ise X 'de boş değildir.

İspat. (a) Her bir X_i Hausdorff olsun. Bu durumda X_i 'lerin kartezyen çarpımı da Hausdorff ve $s\underset{\longleftarrow}{\lim} X_i \subset \prod X_i$ 'de Hausdorfftur. Buna göre $s\underset{\longleftarrow}{\lim} X_i$ 'ye izomorf olan her X ters limiti de Hausdorff olur.

(b) Her bir X_i tamamen bağlantısız olsun. (a) 'daki gibi X ters limitinin tamamen bağlantısız olduğu görülür.

(c) $f, g : X \to Y$ sürekli ve Y Hausdorff ise, $\{x \mid f(x) = g(x)\}$ kümesi X içinde kapalıdır.

$$s\underset{\longleftarrow}{\lim} X_i = \underset{j>i}{\cap} \left\{ c \in C \mid \varphi_{ij} \prod_j (c) = \prod_i (c) \right\}$$

olduğundan, ($\prod_i$ dönüşümleri projeksiyon dönüşümleridir) her bir X_i Hausdorff ise, $s\underset{\longleftarrow}{\lim} X_i$ kapalı kümelerinin kesişimidir ve $\prod\limits_{i\in I} X_i \left(C = \prod\limits_{i\in I} X_i \right)$ kartezyen çarpımı içinde kapalıdır.

(d) Her bir X_i Hausdorff ise (a) gereği X 'de Hausdorfftur.

Her bir X_i kompakt olsun. Buna göre $\prod\limits_{i\in I} X_i$ kompakt ve $s\underset{\longleftarrow}{\lim} X_i, \prod\limits_{i\in I} X_i$ içinde kapalıdır. Kompakt uzayın kapalı alt kümesi kompakt olduğundan $s\underset{\longleftarrow}{\lim} X_i$ kompakttır. O halde X ters limiti de kompakt olur.

(e) $i < j$ için $D_{ij} = \left\{ c \in C \mid \varphi_{ij} \prod_j (c) = \prod_i (c) \right\}$ diyelim. Her bir D_{ij} kapalıdır ve C kompakttır. $s\underset{\longleftarrow}{\lim} X_i = \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda bazı n tamsayıları ve $i_r, y_r \in I$ için $\underset{r=1}{\overset{n}{\cap}} D_{i_r y_r} = \emptyset$ olur.

I yönlendirilmiş olduğundan her r için $k \geq j_r$ olacak şekilde bir $k \in I$ bulabiliriz. $x_k \in X_k$ seçelim ve $l \leq k$ için $X_l = \varphi_{ij}(X_k)$ diyelim ve X_l 'yi I 'nın diğer tüm elemanları için keyfi olarak tanımlayalım. Kartezyen çarpımı (x_i) elemanı $\underset{r=1}{\overset{n}{\cap}} D_{ir j_i}$içinde bulunur. Bu ise çelişkidir. O halde $s\underset{\longleftarrow}{\lim} X_i \neq \emptyset$ dır ve buna göre X ters limiti de boş olmaz. □

Önerme 1.14 $\{X_i, \varphi_i\}$ boş olmayan kompakt Hausdorff uzaylar $\left\{X_i, \varphi_{ij}\right\}$ ters sisteminin bir ters limiti olsun. Buna göre,

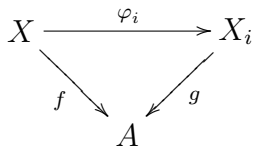
(a) Her bir $i \in I$ için $\varphi_i(X) = \underset{i\leq j}{\cap} \varphi_{ij}(X_j)$ 'dir.

(b) $i \in I$ ve U X_i içinde açık olmak üzere $\varphi_i^{-1}(U)$ kümeleri, X üzerindeki topoloji için bir taban oluşturur.

(c) Eğer Y, her i için $\varphi_i(Y) = X_i$ olacak şekilde X in bir alt kümesi ise Y, X içinde yoğundur.

(d) Eğer θ, Y 'den X 'e giden bir dönüşüm ise, θ 'nın sürekli olması için gerekli ve yeter şart $\varphi_i\theta$ 'nın sürekli olmasıdır.

(e) A bir ayrık uzay olsun. Eğer $f : X \to A$ sürekli dönüşüm ise, bazı i 'ler için



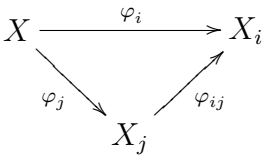
diyagramı komütatif yani

$$f = g\varphi_i$$

olacak şekilde bir $g : X_i \to A$ sürekli dönüşümü vardır.

İspat. İspatı $X = s\varprojlim X_i$ için yapalım. $C = \prod_{i\in I} X_i$ diyelim ve $\prod_i : C \to X_i$ projeksiyon dönüşümü olup $\varphi_i : X \to X_i$ dönüşümü $\varphi_i = \prod_i / X$ şeklinde tanımlansın.

(a) $i \leq j$ için



$\varphi_i(X) = \varphi_{ij}\varphi_j(X) \subseteq \varphi_{ij}(X_j)$ dir. Böylece $\varphi_i(X) \subseteq \bigcap_{i\leq j}\varphi_{ij}(X_j)$ dir. Şimdi i 'yi sabitleyelim. $a \in \bigcap_{i\leq j}\varphi_{ij}(X_j)$ seçelim ve $i \leq j$ için

$$Y_j = \{y \in X_j \mid \varphi_{ij}(y) = a\}$$

yı oluşturalım. Böylece Y_j kapalı bir kümenin ters görüntüsü olup X_j içinde kapalıdır ve böylece kompakttır. Eğer $i \leq j \leq k$ ve $y_k \in Y_k$ ise, $\varphi_{ij}(\varphi_{jk}(Y_k)) = \varphi_{ik}(Y_k) = a$ dır ve böylece $\varphi_{yk}(Y_k) \in Y_j$ dir. Buna göre $\{Y_j \mid i \leq j\}$ kümesi (φ_{ij} dönüşümlerinin kısıtlamalarına göre) boş olmayan kompakt Hausdorff uzayların bir ters limitidir ve $(b_j) \in$

$s\varprojlim Y_j$ elemanı mevcuttur. O halde $i \leq j \leq k$ ise $\varphi_{ij}(b_k) = b_j$ dir ve $b_i = a$ dır. Eğer $l \in I$ ve $i > l$ ise $i \leq j$ olacak şekilde bir j bulunur ve $b_l = \varphi_{ij}(b_j)$ diyelim, bu j 'den bağımsızdır çünkü, aynı zamanda $i, l \leq j'$ olursa ,$j, j' \leq k$ bulabiliriz ve

$$\varphi_{lj}(b_j) = \varphi_{lj}\varphi_{jk}(b_k) = \varphi_{lj'}\varphi_{j'k}(b_k) = \varphi_{lj'}(b_j)$$

olur. Şimdi $j \leq k$ olacak şekilde j, k indis çiftleri için $\varphi_{yk}(b_k) = b_j$ olduğunu göstermek kolaydır. Böylece $b = (b_j)_{j\in I} \in s\varprojlim_{j\in I} Y_j \subseteq X$ dir. Buna ilaveten $\varphi_i(b) = \prod_i(b) = a$ olup ispat biter.

(b) X 'deki her açık küme

$$P = X \cap \prod_{i}^{-1}(U_1) \cap .... \cap \prod_{in}^{-1}(U_n)$$

biçimindeki açık kümelerin bir birleşimidir. Burada n bir tamsayı ve $i_1, ..., i_n \in I$ ve her r için $U_r, .., X_{ir}$ de açıktır.

Eğer her $a \in P$ için U, X_k 'da açık ve $a \in \varphi_k^{-1}(U) \subseteq P$ olacak şekilde bir $\varphi_k^{-1}(U)$ kümesi bulunabilirse istenen gösterilmiş olur. $a = (a_i)$ olsun. $i_1, i_2, ...i_n \leq k$ olacak şekilde bir $k \in I$ seçelim. $\varphi_{i_r k}$ sürekli olduğundan dolayı $\varphi_{i_r k}^{-1}(U_r)$ kümesi X_k 'da açıktır. $i \leq k$ için $\varphi_{ik}(a_k) = a_i$ olduğundan dolayı a_k 'yı verir. $U = \bigcap_{r=1}^{n} \varphi_{i_r k}^{-1}(U_r)$ yazalım. Bu X_k 'da a_k 'nın bir açık komşuluğudur ve böylece $\varphi_k^{-1}(U)$ 'da X 'de a 'nın bir açık komşuluğudur. Buna rağmen $b = (b_i) \in \varphi_k^{-1}(U)$ ise $b_k \in U$ dir öyle ki $r = 1, 2, ..., n$ için $b_{i_r} = \varphi_{i_r k}(b_k) \in U_r$ dir.$\varphi_k^{-1}(U) \subseteq P$ elde edilir.

(c) Her bir $i \in I$ için ve X_i 'deki her bir boş olmayan U açık kümesi için $\varphi_i(Y) \cap U \neq \emptyset$ dır. (b) 'den Y, X 'de yoğundur.

(d) Eğer θ sürekli ise, her bir $\varphi_i\theta$ dönüşümünün sürekli olduğu açıktır. Her bir $\varphi_i\theta$ dönüşümü sürekli ise, her bir i için ve X_i 'deki her bir U açık kümesi için $\theta^{-1}\left(\varphi_i^{-1}(U)\right) = (\varphi_i\theta)^{-1}(U)$ açıktır ve (b) 'den θ süreklidir.

(e) f 'nin A_0 görüntüsü kompakt ve ayrıktır, böylece sonludur. Her bir $a \in A_0$ için $Y_a = f^{-1}(a)$ kümesi kompakt ve açıktır. Böylece bu, $\varphi_j^{-1}(U)$ temel açıklarının sonlu bir birleşimine eşittir ($j \in I$ ve U, X_j de açık). Böylece Y_a kümeleri, bunların bazılarının birleşimine eşit olacak şekilde, sonlu tane $\varphi_{j_1}(U_1), ..., \varphi_{j_n}^{-1}(U_n)$ kümeleri vardır. $r = 1, 2, ..., n$ için $j_r \leq k$ olacak şekilde bir k indisi seçelim. Her bir r için

$$\varphi_{y_r}^{-1}(U_r) = \varphi_k^{-1}(\varphi_{y_r k}^{-1}(U_r))$$

dir ve böylece her bir $a \in A_0$ için $Y_a = \varphi_k^{-1}(V_a)$ 'dir, burada V_a, X_k 'nın bir açık alt kümesidir. $D = X_k \setminus \underset{a\in A_0}{\cup} V_a$ diyelim. Açıktır ki $D \cap \varphi_k(X) = \emptyset$ 'dir ve (a) 'dan $D \cap \left(\underset{k\leq l}{\cap} \varphi_{kl}(X_l) \right) = \emptyset$ dir. Böylece D ve her bir $\varphi_{kl}(X_l)$ kapalı ve X_k kompakt olduğundan

$$D \cap \varphi_{kl_i}(X_{l_1}) \cap ... \cap \varphi_{kl_s}(X_{l_s}) = \emptyset$$

olacak şekilde sonlu sayıda $l_1, l_2, ..., l_s \leq i$ seçelim. $k \leq l \leq i$ için $\varphi_{ki}(X_i) = \varphi_{kl}(\varphi_{l_i}(X_i)) \subseteq \varphi_{kl}(X_k)$ 'dir ve

$$D \cap \varphi_{ki}(X_i) = \emptyset$$

ve

$$\varphi_{k_i}(X_i) \subseteq \underset{a\in A_0}{\cup} V_a$$

dır. Her bir a için $W_a = \varphi_{kl}^{-1}(V_a)$ yazalım. Böylece her bir W_a, X_i de açıktır ve açıktır ki $a_1 \neq a_2$ için $W_{a_1} \cap W_{a_2} = \emptyset$ dir. $x \in X_i$ olsun. Bu durumdaki bazı a 'lar için $\varphi_{k_i}(x) \in U_a$ 'dır ve $x \in \varphi_{kl}^{-1}(V_a) = W_a$ 'dır. Böylece $X_i = \underset{a\in A_0}{\cup} W_a$ 'dır ve her W_a aynı zamanda kapalıdır. Böylece her $a \in A_0$ için W_a 'yı a 'ya dönüştüren $g : X_i \to A$ dönüşümü süreklidir ve $f = g\varphi_i$ sağlanır. □

1.5 Profinite Uzaylar ve Profinite Gruplar

X bir topolojik uzay olsun. Eğer X sonlu X_i topolojik uzaylarının ters sisteminin bir ters limiti olarak elde edilebiliyorsa yani

$$X = \varprojlim X_i$$

oluyorsa X uzayına bir **profinite uzay** denir. Benzer şekilde profinite grubuda aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz.

P bir topolojik grup olsun. Eğer P sonlu P_i gruplarının ters sisteminin bir ters limiti oluyorsa , yani

$$P = \varprojlim P_i$$

ise P 'ye bir profinite grup denir.

Örnek 1.3 $I = \{1, 2, 3, 4\}$ alalım. I üzerindeki sırayı " $i, j \in I$ için $i \leq j \iff i$ / j " bağıntısı ile tanımlayalım. Buna göre I yönlendirilmiş kısmi sıralı kümedir. $\mathbb{Z}$, üzerindeki ayrık topoloji ile birlikte bir topolojik gruptur. $i \in I$ için $i\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ 'nin normal

alt grubudur. Ayrıca $i\mathbb{Z}$ üzerindeki topolojide ayrık topolojidir. Buna göre $\mathbb{Z}\ /i\mathbb{Z}$ bölüm grubunu oluşturabiliriz. Bunun üzerindeki topoloji ise

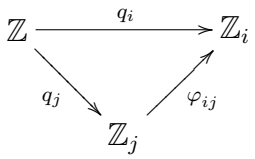
$$\begin{array}{rccc} q_i: & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/i\mathbb{Z} \\ & z & \mapsto & z+i \end{array}$$

dönüşümü ile elde edilen $\tau_{\mathbb{Z}/i\mathbb{Z}} = \left\{U : q_i^{-1}(U) \in \tau_Z\right\}$ şeklinde sonuç topolojisidir. Her $i \in I$ için q_i dönüşümü süreklidir. $i, j \in I$, $i \leq j$ için i/j olduğundan

$$\varphi_{ij} : \mathbb{Z}/j\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$$

$$z + j\mathbb{Z} \to z + i\mathbb{Z}$$

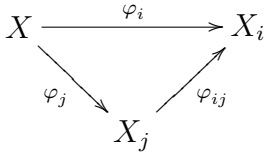
dönüşümü vardır. Bu dönüşüm homomorfizmdir. $\mathbb{Z}/i\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_i$ olduğundan $\mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$ yerine $\mathbb{Z}_i$ alalım. Ayrıca evrensellık özelliğinden,



diyagramı komütatiftir. Yani $q_i = \varphi_{ij} q_j$ dir. q_i ve q_j dönüşümleri sürekli olduğundan φ_{ij} de süreklidir. Buna göre $i \leq j$ için φ_{ij} dönüşümü sürekli homomorfizmdir. O halde $i \in I$ için $\mathbb{Z}_i$ topolojik grupları ile, $i \leq j$ için yukarıdaki gibi tanımlı φ_{ij} sürekli homomorfizmlerinin oluşturduğu $\left\{\mathbb{Z}_i, \varphi_{ij}\right\}$ ailesinin bir ters sistemidir.

$$C = \prod_{i \in I} \mathbb{Z}_i = \mathbb{Z}_1 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$$

çarpımını ele alalım. Bu çarpım üzerinde çarpım topolojisi mevcuttur. $i, j \in I$, $i \leq j$



diyagramına $\prod_i(c) = \varphi_{ij} \prod_j(c)$ özelliğini sağlayan $c \in C$ elemanlarının kümesi

$$\begin{aligned} X &= \left\{c \in C \mid \textstyle\prod_i (c) = \varphi_{ij} \prod_i (c), i, j \in I, i \leq j\right\} \\ &= \{(\overline{0},\overline{0},\overline{0},\overline{0}), (\overline{0},\overline{0},\overline{0},\overline{2}), (\overline{0},\overline{0},\overline{1},\overline{0}), (\overline{0},\overline{0},\overline{1},\overline{2}), (\overline{0},\overline{0},\overline{2},\overline{0}), (\overline{0},\overline{0},\overline{2},\overline{2}), \\ &\quad (\overline{0},\overline{1},\overline{0},\overline{1}), (\overline{0},\overline{1},\overline{0},\overline{3}), (\overline{0},\overline{1},\overline{1},\overline{1}), (\overline{0},\overline{1},\overline{1},\overline{3}), (\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{1}), (\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3})\} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. O halde X, $\left\{Z_i, \varphi_{ij}\right\}$ ters sisteminin bir ters limitidir. Yani

$$\varprojlim \mathbb{Z}_i = X$$

olur. Ayrıca $\mathbb{Z}_i$ 'ler sonlu gruptur. Buna göre X bir profinite gruptur.

Önerme 1.15 X kompakt, Hausdorff ve tamamen bağlantısız olan bir uzay olsun. Bu durumda X , X 'in ayrık bölüm uzaylarının bir ters sisteminin ters limitidir.

İspat. I, X 'in sonlu sayıdaki açık ve kapalı alt kümelerinin tüm parçalanışlarının kümesi olsun. Her $i \in I$ için X_i, karşılık gelen bölüm grubu olsun. (elemanları i parçalanışının açık ve kapalı kümeleridir) ve $q_i : X \to X_i, X$ den X_i ye giden bölüm dönüşümü olsun, Böylece X_i kümeleri bölüm topolojisine göre ayrık olan X 'in bölüm uzaylarıdır.

$i \leq j$ olması için gerekli ve yeter koşul için $q_{ij} q_j = q_i$ eşitliğini sağlayacak şekilde bir $q_{ij} : X_j \to X_i$ dönüşümünün varlığını yazalım. Bu q_{ij} dönüşümü tek şekilde bellidir çünkü q_j örtendir. I 'nın kısmi sıralı küme olduğu açıktır. Eğer

$$i = \{U_r \mid 1 \leq r \leq m\}$$

ve

$$j = \{V_s \mid 1 \leq s \leq n\}$$

I 'nın elemanları ise, bu durumda

$$\{U_r \cap V_s \mid 1 \leq r \leq m, 1 \leq s \leq n\}$$

$i, j \leq k$ olacak şekilde bir k elemandır ve böylece I yönlendirilmiş bir küme olur. Her bir q_{ij} dönüşümü tek şekilde belli olduğundan (X_i, q_{ij}), uyumlu dönüşümler ailesidir. $Y = \varprojlim X_i$ olsun ve $\widehat{q_i} = Y \to X_i$ her bir i için izdüşüm fonsiyonu olsun. Ters limitinin evrensel özelliği gereği her i için

$$\widehat{q_i} v = q_i$$

olacak şekilde bir $v : X \to Y$ sürekli dönüşümü vardır. Eğer $x_1, x_2; v(x_1) = v(x_2)$ olacak şekilde X 'in elemanları ise her i için $q_i(x_1) = q_i(x_2)$ dir. Buna göre x_1, x_2 nin sadece birini içeren hiç bir açık-kapalı küme yoktur. Böylece X tamamen bağlantısız olduğundan $x_1 = x_2$ dir. Buna göre v birebirdir. Her bir q için

$$\widehat{q_i}(v(X)) = q_i(X) = X_i$$

olduğundan $v(X), Y$ içinde yoğundur. v sürekli X kompakt ve Y Hausdorff olduğundan $v(X)$ kapalıdır ve böylece v örtendir. Buna göre v homeomorfizmdir. $\square$

G bir topolojik grup olsun. Eğer H, G 'nin bir kapalı altgrubu ise bunu $H \leq G$ ile N, G nin açık normal altgrubu ise bunu $N \lhd_0 G$ ile göstereceğiz. I keyfi bir G grubunun normal altgruplarının ailesi olsun. Eğer her bir $K_1, K_2 \in I$ için $K_3 \subseteq K_1 \cap K_2$ olacak şekilde en az bir $K_3 \in I$ altgrubu mevcutsa I 'ya bir süzgeç tabanı denir.

Teorem 1.16 G bir topolojik grup olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.

(1) G profinite gruptur.

(2) G, sonlu grupların bir kartezyen çarpımının bir kapalı altgrubuna izomorftur.

(3) G kompakttır ve $\cap \{N \mid N \lhd_0 G\} = 1$ 'dir.

(4) G kompakt, Hausdorff ve tamamen bağlantısızdır.

BÖLÜM 2

PROFINITE GRUPLAR KATEGORİSİ

2.1 Giriş

Kategori teorisi; matematiksel yapılar ve bunlar arasındaki ilişkilerle soyut olarak ilgilenen bir matematik dalıdır. Bir kategori, birbiriyle ilişkili olan objeler sınıfı (örneğin, gruplar) ve bu objeler arasındaki morfizmlerden oluşur. Gruplar örneğinde bu morfizmler grup homomorfizmleridir. Bu şekildeki farklı kategorilerin her objesini diğer kategorinin bir objesi ile, ve bir kategorideki morfizmi diğerindeki bir morfizme ilişkilendiren fonksiyonların bir genelletirilmesidir. Kategoriler, funktorlar ve doğal dönüşümler Samuel Eilenberg ve Saunders Mac Lane tarafından 1945 yılında ortaya atılmıştır. Bu konuda daha detaylı bilgi [5], [4], [3] de bulunabilir. Bu bölümde objeleri profinite gruplar ve morfizmleri sürekli grup homomorfizmleri olan profinite grup kategorisi üzerinde çalışılacaktır.

2.2 Kategoriler

Bir $\mathcal{G}$ kategorisi, bir G_0 objelerinin sınıfı ve tüm $A, B \in G_0$ obje ikilileri için bir $G_1(A,B)$ morfizmlerin kümesinden oluşur. Herhangi $A, B, C \in G_0$ obje üçlüsü için

$$\begin{array}{rccc} \circ: & G_1(B,C) \times G_1(A,B) & \rightarrow & G_1(A,C) \\ & (f,g) & \mapsto & f \circ g \end{array}$$

şeklinde bir bileşke döşümü ve her bir $A \in G_0$ objesi için $iA \in G_1\ (A,A)$ birim morfizmleri mevcuttur. Bileşkenin birleşmeli (asosyatif) olması için birim morfizmlerin, her $f \in G_1(A,B)$ için

$$iB \circ f \ = \ f \ = \ f \circ iA$$

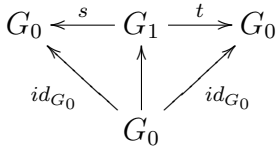
eşitliğini sağlaması gerekir. G_1, $\mathcal{G}$ içindeki tüm morfizmlerin sınıfını gösterir. G_1 den G_0 a kaynak (source), hedef (target) ve G_0 dan G_1' e birim dönüşümleri

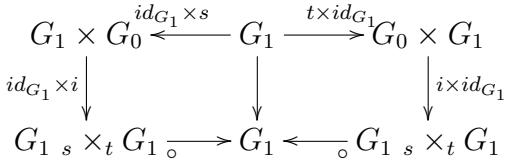
$$s: \ G_1 \ \rightarrow \ G_0 \qquad t: \ G_1 \ \rightarrow \ G_0 \qquad i: \ G_0 \ \rightarrow \ G_1$$

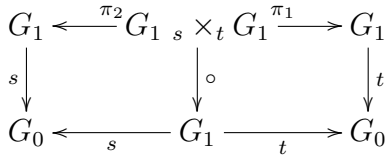
tanımlanır.

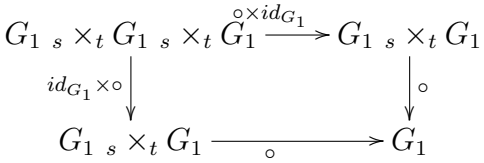
$$\circ: \ G_1 \ {}_s\times_t \ G_1 \ \rightarrow \ G_1$$

bileşke dönüşümünü tanımlayabilmek için $G_1 \ {}_s\!\times_{\,t}\ G_1$ geri çekmesi (pullback) kullanılır. Bu gösterimde, $\mathcal{G}$ nın bir kategori olması için gerekli koşullar diagramlarla ifade edilebilir, bunlar aşağıdaki diagramların değişmeli oluşuna denktir.









Verilen $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}'$ kategorileri için,

$$F: \ \mathcal{G} \ \rightarrow \ \mathcal{G}'$$

funktoru,

$$F_0: \ G_0 \ \rightarrow \ G_0' \ \text{ ve } \ F_1: \ G_1 \ \rightarrow \ G_1'$$

dönüşümlerinden oluşur, bu dönüşümlerin, aşağıdaki diagramların değişmeli olması anlamına gelen, kaynak, hedef, birim morfizmler ve bileşke dönüşümleri ile uyumlu olması gerekir.

$$\begin{array}{ccccc} G_0 & \xleftarrow{s} & G_1 & \xrightarrow{t} & G_0 \\ \downarrow{\scriptstyle F_0} & & \downarrow{\scriptstyle F_1} & & \downarrow{\scriptstyle F_0} \\ {G_0}' & \xleftarrow[s']{} & {G_1}' & \xrightarrow[t']{} & {G_0}' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} G_0 & \xrightarrow{i} & G_1 \\ \downarrow{\scriptstyle F_0} & & \downarrow{\scriptstyle F_1} \\ {G_0}' & \xrightarrow[i']{} & {G_1}' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} G_1 \ {}_s\times_t G_1 & \xrightarrow{\circ} & G_1 \\ \downarrow{\scriptstyle F_1\times F_1} & & \downarrow{\scriptstyle F_1} \\ {G_1}' \ {}_{s'}\times_{t'} G'_1 & \xrightarrow[\circ']{} & G'_1 \end{array}$$

(2)

Verilen

$$F, E: \ \mathcal{G} \ \rightarrow \ \mathcal{G}'$$

funktorları için, bunlar arasında bir

$$\vartheta: \ F \ \Rightarrow \ E$$

dönüşümü tanımlanır. Burada $\mathcal{G}$ içindeki her A objesine $\mathcal{G}'$ içinde bir

$$\vartheta A: \ FA \ \rightarrow \ EA$$

morfizmi karşılık gelir öyle ki her bir $f \in \boldsymbol{G}_1(A, B)$ morfizmi için

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{Ff} & FB \\ \downarrow{\scriptstyle \vartheta A} & & \downarrow{\scriptstyle \vartheta B} \\ EA & \xrightarrow[Ef]{} & EB \end{array}$$

(3a)

diagramı komütatif (değişmeli) dir. Bu ϑ dönüşümüne F ve E funktorları arasındaki doğal dönüşüm denir. Eğer her bir ϑA izomorfizm ise ϑ ye bir doğal izomorfizm denir.

(3a) diagramı $\mathcal{G}'$ kategorisi içinde bir diagramdır ve bunun komütatifliği, kümeler kategorisindeki aşağıdaki diagramın komütatifliğine denktir.

$$\begin{array}{ccc} G_1(A,B) & \xrightarrow{F} & {G_1}'(FA,FB) \\ {\scriptstyle E}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \vartheta B\circ} \\ {G_1}'(EA,EB) & \xrightarrow[\circ\vartheta A]{} & {G_1}'(FA,EB) \end{array}$$

$(3b)$

Bu, tanımın 2-kategorilere genelleştirileceği zaman daha kullanışlı olacaktır.

Bir

$$\vartheta : \ G_0 \ \rightarrow \ G_1'$$

dönüşümünün bir doğal dönüşüm olmasının koşulu diagramlar dilinde de ifade edilebilir, bu aşağıdaki diagramların komütatif oluşuna denktir.

$$\begin{array}{ccccc} {G_0}' & \xleftarrow{s'} & {G_1}' & \xrightarrow{t'} & {G_0}' \\ & {\scriptstyle F_0}\nwarrow & \uparrow{\scriptstyle \vartheta} & \nearrow{\scriptstyle E_0} & \\ & & G_0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{(\vartheta t, F_1)} & {G_1}' \ {}_{s'}\times_{t'} {G_1}' \\ {\scriptstyle (E_1,\vartheta s)}\downarrow & & \downarrow \\ {G_1}' \ {}_{s'}\times_{t'} {G_1}' & \xrightarrow[\circ']{} & {G_1}' \end{array}$$

(4)

$\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ kategorileri verilsin.

$$F : \ \mathcal{G} \ \rightarrow \ \mathcal{G}' \ \text{ ve } \ E : \ \mathcal{G}' \ \rightarrow \ \mathcal{G}$$

funktorları için

$$\vartheta : \ E \circ F \ \stackrel{\sim}{\Rightarrow} \ Id_g \quad \text{ve} \quad T : \ F \circ E \ \stackrel{\sim}{\Rightarrow} \ Id_g$$

doğal izomorfizmleri bulunabiliyorsa $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}'$ kategorilerine denktir denir.

Aşağıda bazı kategori örnekleri verilmiştir.

(a) **1**; bir objesi $*$, ve bir morfizmi Id_* olan kategoridir.

(b) **0**; hiç bir objesi ve hiç bir morfizmi olmayan boş kategoridir.

(c) X bir küme, $x, y \in X$ için xy işlemi birleşmeli ve $ex = xe = x$ olacak şekilde $e \in X$ birim elemanına sahip ise X kümesine monoid denir. Böyle bir monoid, bir objeye sahip ve her bir $x \in X$ için x morfizmlerine sahip bir kategoridir.

(d) **Set**, objeleri kümeler olan ve morfizmleri fonksiyonlar olan bir kategoridir.

(e) **Top**, objeleri topolojik uzaylar ve morfizmleri sürekli fonksiyonlar olan bir kategoridir.

(f) **Grp**, objeleri gruplar, morfizmleri grup homomorfizmleri olan bir kategoridir.

(g) **Rng**, objeleri halkalar, morfizmleri halka homomorfizmleri olan bir kategoridir.

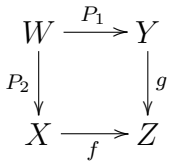
(h) ProGrp, objeleri profinite gruplar, morfizmleri ürekli grup homomorfizmleri olan bir kategoridir.

Terminal Obje:

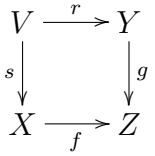
$\mathcal{C}$ bir kategori olsun. Eğer $\mathcal{C}$ içindeki her bir B objesi için $\hom_{\mathcal{C}}(B, X)$ tek bir morfizme sahipse X objesine $\mathcal{C}$ kategorisinin terminal objesi denir. Yani her bir B objesi için tek bir $e : B \to X$ morfizmi olacaktır. Terminal obje genelde 1 ile gösterilir.

GERİ ÇEKME (PULLBACK) VE GERİ ÇEKME OBJESİ:

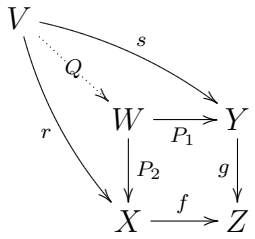
$\mathcal{C}$ bir kategori, $X, Y, Z, \mathcal{C}$ nin objeleri ve $f : X \to Z, \ g : Y \to Z$ morfizmler olsun.



diagramı komutatif olacak şekideki yani $fP_2 = gP_1$ olacak şekildeki W objesini ele alalım. Bu durumda



diagramı komütatif yani $fs = gr$ olacak şekildeki tüm V objeleri için



diagramı komütatif olacak şekilde bir tek $\phi : V \to W$ morfizmleri mevcutsa P_1 ve P_2 morfizmlerine f ile g nin geri çekmesi denir.

Yukarıdaki diagrama geri çekme diagramı denir ve W 'ye de f ile g nin geri çekme objesi denir. Açıktır ki f ile g nin geri çekme objesi $\{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$ kümesine izomorftur.

NOT: Sonlu çarpımlara sahip herbir $\mathcal{C}$ kategorisinde geri çekme objesi vardır ve izomorfizm farkıyla tektir.

2.3 İnternal Kategoriler

Bu bölümde bir kategori içinde, uygun obje ve morfizm sınıfları belirleyerek bir kategori oluşturulacaktır, bu kategori, kategori içinde bir kategori olup adına internal kategori denir.

$\mathcal{C}$ sonlu çarpımlara sahip bir kategori ve A ile O, $\mathcal{C}$ kategorisi içinde iki obje olsun ve

$$A \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} O \xrightarrow{e} A$$

morfizmleri $se = id_o = te$ olacak şekilde mevcut olsun. Burada $\mathcal{C}$ kategorisi geri çekmelere sahip olduğundan $A \,{}_t\!\times_s A = \{(f,g) \in A \times A : t(f) = s(g)\}$ olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} A \,{}_t\!\times_s A & \xrightarrow{P_2} & A \\ {\scriptstyle P_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s} \\ A & \xrightarrow[t]{} & O \end{array}$$

geri çekme diagramı oluşturulabilir. Bu durumda

$$\begin{array}{ccc} (f,g) & \longrightarrow & g \\ \downarrow & & \downarrow \\ f & \longrightarrow & t(f) = s(g) \end{array}$$

olur.

Şimdi $\mathcal{C}$ kategorisi içinde objeleri O ve morfizmleri A olan bir kategori oluşturmak istiyoruz. Bunun için morfizmlerin bir bileşkesine ihtiyacımız vardır. Bu yüzden

$$m : A \,{}_t\!\times_s A \to A$$

biçiminde asosyatif olan ve birimi koruyan bir m bileşkesini tanımlayalım.

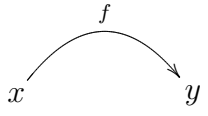
$f \in A$ morfizmleri için;

$$\begin{array}{rccc} t: & A & \longrightarrow & O \\ & f & \mapsto & t(f) \end{array}$$

morfizmi hedef morfizmi,

$$\begin{array}{rccc} s: & A & \longrightarrow & O \\ & f & \mapsto & s(f) \end{array}$$

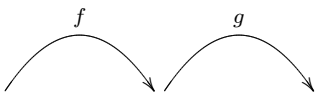
morfizmi kaynak morfizmi olarak bilinir yani



$f \in A$ ve $x, y \in O$ için

$$t(f) = y \text{ ve } s(f) = x$$

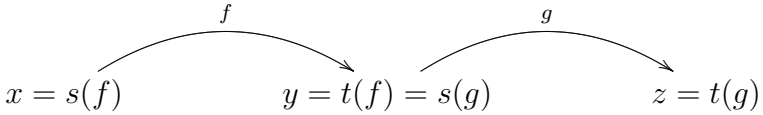
olur. Bundan dolayı A içindeki morfizmler için bileşke tanımlanabilmesi için



f nin bittiği yer yani $t(f)$ ile g nin başladığı yer yani $s(g)$ eşit olmalıdır. Yani $t(f) = s(g)$ olmalıdır. Dolayısıyla A içinde bir bileşke, $t(f) = s(g)$ olacak şekilde ki $(f, g) \in A \times A$ ikilileri için tanımlanabilir, bu şekildeki ikililer ise $A \,{}_t\!\times_s A$ ile temsil edilir.

$$\begin{array}{rccc} m: & A \,{}_t\!\times_s A & \longrightarrow & A \\ & (f,g) & \longrightarrow & m(f,g) = g \circ f \end{array}$$

denirse,



$$t(m(f,g)) = t(g \circ f) = t(g)$$

$$s(m(f,g)) = s(g \circ f) = s(f)$$

olur.

$$\begin{array}{ccccc} A \,{}_t\!\times_s A & \xrightarrow{m} & A & \xrightarrow{t} & O \\ (f,g) & \longrightarrow & g \circ f & \longrightarrow & t(g \circ f) = t(g) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{s} & O \\ f & \longrightarrow & s(f) \end{array}$$

morfizmlerini kullanarak $(A \,{}_t\!\times_s A) \,{}_t\!\times_s A$ geri çekme objesi oluşturulabilir, burada

$$(A \,{}_t\!\times_s A) \,{}_t\!\times_s A = \{(f,g,h) \in A \times A \times A = t(f) = s(g) \text{ ve } t(g \circ f) = s(h)\}$$

dir. Benzer şekilde $A \,{}_t\times_s (A \,{}_t\times_s A)$ geri çekme objesi de

$$A \,{}_t\times_s (A \,{}_t\times_s A) = \{(f,g,h) \in A \times A \times A = t(f) = s(h \circ g) \text{ ve } t(g) = s(h)\}$$

şeklinde oluşturulabilir. $s(h \circ g) = s(g)$ ve $t(g \circ f) = t(g)$ olduğundan dolayı bu iki geri çekme objesi eşittir. Dolayısıyla

$$\begin{array}{ccc} A \,{}_t\times_s A \,{}_t\times_s A & \xrightarrow{m\times id_A} & A \,{}_t\times_s A \\ \downarrow{\scriptstyle id_A\times m} & & \downarrow{\scriptstyle m} \\ A \,{}_t\times_s A & \xrightarrow[m]{} & O \end{array}$$

diagramı oluşturulabilir, buna göre

$$\begin{array}{ccc} (f,g,h) & \longrightarrow & (m(f,g),h) = (g\circ f,h) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (f,h\circ g) = (f,(m(g,h))) & \longrightarrow & m(f,h\circ g) = m(g\circ f,h) \end{array}$$

olur ki bu diagramın komütatifliği, m bileşkesinin asosyatif olduğunu verir.

Son olarak bir kategori için bileşkenin birimi koruduğu gösterilmelidir yani her bir $f \in Mor(\mathcal{C})$ için

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow^{f} & \downarrow{\scriptstyle Id_Y} \\ & & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow^{Id_X} & \uparrow{\scriptstyle f} \\ & & X \end{array}$$

diagramlarının komütatif dolayısıyla

$$Id_y \circ f = f$$

ve

$$f \circ Id_x = f$$

olduğu gösterilmelidir.

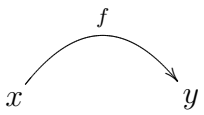
$e : O \to A$ morfizmini, O içindeki her bir x objesi için id_x morfizmi olarak seçelim yani

$$\begin{array}{rccc} e: & O & \longrightarrow & A \\ & x & \mapsto & e(x) \end{array}$$

için

$$e(x) = Id_x : \quad x \quad \longrightarrow \quad x$$

olsun. Eğer $f \in A$ için $s(f) = x$, $t(f) = y$ ise,



$id_y \circ f = f \circ id_x$ olduğu gösterilmelidir. Burada $te = id_O$ bileşkesi kullanılırsa

$$O \;{}_{id_O}\times\;{}_{s}\; A = \{(x, f) = x = s\,(f)\}$$

geri çekme objesi oluşturulabilir ve benzer şekilde $se = Id_0$ bileşkesi kullanılırsa da

$$A \;{}_{t}\times\;{}_{Id_0}\; O = \{(f, y) : t\,(f) = y\}$$

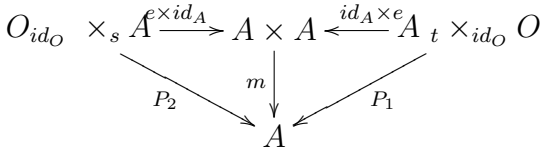
geri çekme objesi elde edilir. Bu geri çekme objesi,

$$\begin{array}{rccc} p_2 : & O \;{}_{id_O}\times\;{}_{s}\; A = & \longrightarrow & A \\ & (x, f) & \mapsto & p_2(x, f) = f \end{array}$$

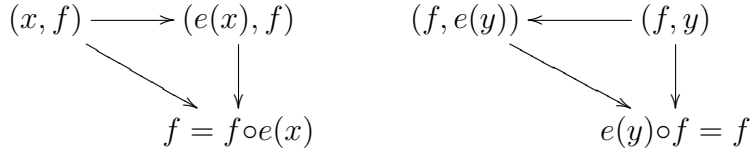
ve

$$\begin{array}{rccc} p_1 : A \;{}_{t}\times\;{}_{Id_0}\; O & \longrightarrow & A \\ (f, y) & \mapsto & p_1(f, y) = f \end{array}$$

biçiminde projeksiyonlara sahiptir. Bunlar kullanılarak



diagramının komütatifliğinden birimler için istenilen elde edilir yani



elde edilir.

Buna göre bir $\mathcal{C}$ kategorisinde, A ile O objeler ve s, t, m, e yukarıdaki diagramları değişmeli yapan morfizmler olmak üzere $\mathcal{G} = \langle A, O, s, t, e, m\rangle$ sistemine internal kategori denir. $A, \mathcal{G}$ nin morfizmler ailesi ve O ise $\mathcal{G}$ nin objelerinin ailesi olur.

Bir $\mathcal{C}$ kategorisi içindeki $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}'$ gibi iki internal kategorisi arasındaki bir internal funktor,

$$F_0 : \ O \ \rightarrow \ O' \qquad\qquad F_1 : \ A \ \rightarrow \ A'$$

morfizmlerinden oluşur, öyle ki (2) deki diagramlar komütatiftir.

$$F, F' : \ \mathcal{G} \ \rightarrow \ \mathcal{G}'$$

internal funktorları arasındaki $\mathcal{G}$ deki bir internal doğal dönüşüm (4) diagramlarını değişmeli yapacak şekildeki $\mathcal{G}$ içindeki bir

$$\vartheta : \ O \ \rightarrow \ O'$$

morfizmidir.

Set, küme kategorisi içindeki internal kategori small kategori dir.

Grp, grup kategorisi içindeki internal kategori ise objeler ve morfizmler ailesi birer grup ve s, t, e, m dönüşümleri birer grup homomorfizmi olan bir kategoridir. Bu kategori grupların çaprazlanmış modülüne denktir. Dolayısıyla, **Grp** içindeki internal kategori grupların caprazlanmış modülünü verir. Bunu sonraki bölümde profinite gruplar için ayrıntılı biçimde inceleyeceğiz.

2.4 Profinite Çaprazlanmış Modüller

C ve G iki profinite grup ve $\partial : C \rightarrow G$ bir sürekli grup homomorfizmi olmak üzere, G nin C üzerine

$$\begin{array}{ccc} G \times C & \rightarrow & C \\ (g, c) & \mapsto & g_c \end{array}$$

şeklinde sürekli bir etkisi için

CM1) $g \in G, c \in C$ için $\partial(g_c) = g\partial(c)g^{-1}$ ve

CM2) $c, c^{'} \in C$ için $\partial(c)_{c'} = cc^{'}c^{-1}$

şartları sağlanıyorsa (C, G, ∂) ifadesine bir profinite çaprazlanmış modül denir. Burada CM2 şartına Peiffer özdeşliği denir.

Eğer (C, G, ∂) ve (C', G', ∂') profinite çaprazlanmış modüller ise bunlar arasındaki

$$(\mu, \eta) : (C, G, \partial) \to (C', G', \partial')$$

morfizmi,

$i) \eta\partial = \partial'\mu$

$ii)$ her bir $c \in C, g \in G$ için $\mu(g_c) = \eta(g)_{\mu(c)}$

şartlarını sağlayan $\mu : C \to C'$ ve $\eta : G \to G'$ sürekli grup homomorfizmlerinden oluşur. Böylece profinite çaprazlanmış modüller ve bunlar arasındaki morfizmler bir kategori oluşturur. Bu kategoriyi $\mathrm{Pr}\,\mathbf{o} - \mathbf{CMod}$ ile göstereceğiz.

Örnek 2.1 G bir profinite çaprazlanmış modül, H, G nin bir kapalı normal alt grubu ve $i : H \to G$ inclusion(içine dönüşüm) olsun. Burada G nin H üzerine sürekli etkisi,

$$\begin{array}{ccc} G \times H & \to & H \\ (g, h) & \mapsto & g_h = ghg^{-1} \end{array}$$

şeklinde tanımlanan konjuge etkidir. Bu etki yardımıyla (H, G, i) bir profinite çaprazlanmış modül oluşturur.

Örnek 2.2 G bir sonlu üreteçli profinite grup olsun, bu durumda $Aut(G)$, G 'nin sürekli otomorfizmlerinin grubu, düzgün yakınsak topolojiye göre bir profinite gruptur. ([1] ve[9])

$$\begin{array}{rccl} \delta : & G & \to & Aut(G) \\ & g & \mapsto & \delta(g) = f_g : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & f_g(x) = gxg^{-1} \end{array} \end{array}$$

sürekli grup homomorfizmi ve $Aut(G)$ nin G üzerine

$$\begin{array}{ccc} Aut(G) \times G & \to & G \\ (f_g, x) & \mapsto & (fg)_x = gxg^{-1} \end{array}$$

şeklinde tanımlanan sürekli etkisi ile birlikte, $(G, Aut(G), \delta)$ bir profinite çaprazlanmış modül olur.

Tanım 2.1 C ve G iki profinite grup ve G nin C üzerine sürekli bir sol etkisi mevcut olsun. Bu durumda G ve C profinite grup olduğundan

$$\begin{array}{rccc} \phi: & G\times C & \to & C \\ & (g,c) & \longmapsto & \phi(g,c)=g_c \end{array}$$

için, $g_{cc'}=g_c g_{c'}$ ve $gg_c^{'}=g_{g_c'}$ dir. Bu sürekli etki yardımıyla

$$C\rtimes G=(c,g):c\in C,g\in G$$

grubu tanımlanabilir, burada $(c,g),(c',g')\in C\rtimes G$ için grup çarpımı

$$(c,g)(c',g')=(cg_{c'},gg')$$

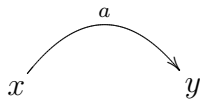
dır. Bu $C\rtimes G$ grubuna C 'nin G ile semidirect (yarıdirekt)çarpım grubu denir. Bu grupta bir profinite gruptur [9].

Teorem 2.2 ProGrp profinite grup kategorisi içindeki internal kategori ile profinite çaprazlanmış modül kategorisi denktir.

İspat. A ve O iki profinite grup,

$$A\underset{t}{\overset{s}{\rightarrow}}O\overset{e}{\rightarrow}A$$

sürekli grup homomorfizmleri $se=id_0$ ve $te=id_0$ olacak şekilde verilsin. Her bir $a\in A$ için $x=s(a)$ olmak üzere



$$k=a(es(a))^{-1}\in Kers$$

dir,

$$((s(k)=s(a(es(a)^{-1})=s(a)s(e(s(a))^{-1})=s(a)se(s(a)^{-1})=s(a)s(a)^{-1}=Id_0)$$

Buna göre

$$a=ke(x)$$

yazılabilir .

$$a' = k'e(x')$$

olsun. Bu durumda

$$aa' = ke(x)k'e(x') = ke(x)k'(e(x))^{-1}\, e(x)e(x')$$

olur. O nın $Kers$ üzerine sürekli etkisini

$$\begin{array}{lll} O \times Kers & \longrightarrow & Kers \\ (x,k) & \mapsto & x_k = e(x)ke(x)^{-1} \end{array}$$

biçiminde tanımlanabilir. Bu etki yardımıyla

$$aa' = ke(x)k'(e(x))^{-1}e(x)e(x') = kx_{k'}e(xx')$$

yazılabilir. Ayrıca bu etki yardımıyla $Kers \rtimes O = \{(k,x) \mid k \in Kers, x \in O\}$ yarıdirekt çarpım grubunu oluşturulabilir, burada $(k,x)\,,(k',x') \in Kers \rtimes O$ için çarpım $(k,x)\,(k',x') = (kx_{k'}, xx')$ biçimindedir. Burada

$$\begin{array}{lll} \phi : A & \longrightarrow & Kers \rtimes O \\ ke(x) & \mapsto & \phi(ke(x)) = (k,x) \end{array}$$

dönüşümü tanımlanabilir.

$$a = ke(x), a' = k'e(x') \in A$$

için

$$\begin{array}{rcl} \phi(aa') & = & \phi(ke(x)k'e(x')) \\ & = & \phi(kx_{k'}e(xx')) \\ & = & (kx_{k'}, xx') \\ & = & (k,x)(k',x') \\ & = & \phi(a)\phi(a') \end{array}$$

elde edilir ki bu ϕ dönüşümünün bir homomorfizm olduğunu söyler. Benzer şekilde

$$\begin{array}{lll} \phi^{-1} : Kers \rtimes O & \longrightarrow & A \\ (k,x) & \mapsto & \phi^{-1}(k,x) = ke(x) \end{array}$$

ters dönüşümü de bir homomorfizmdir. O halde ϕ bir izomorfizmdir, öyleyse $A \cong Kers \rtimes O$ elde edilir.

ProGrp profinite grup kategorisi içinde $\mathcal{G} = \langle A, O, s, t, e, \circ \rangle$ bir internal kategori olsun. $A \cong Kers \rtimes O$ olduğunu ve O nın $Kers$ üzerine $x \in O$ ve $k \in Kers$ için $x_k = e\,(x)\, ke(x^{-1})$ şeklinde tanımlı sürekli etkisini biliyoruz. Bu kategorinin objeleri O nın elemanlarıdır ve morfizmleri $k \in Kers, x \in O$ için (k,x) formundadır. Ayrıca s,t sürekli dönüşümleri her bir morfizmin kaynak (source) ve hedef (target) objelerini verir, e ise her bir obje için birim morfizmi verir.

$$\delta : Kers \to O$$

dönüşümü t nın $Kers$ ye kısıtlaması olarak tanımlayalım yani $\delta = t|_{Kers}$ olsun.

t bir sürekli homomorfizm oldugundan δ da bir sürekli homomorfizmdir. Herhangi $k \in Kers, x \in O$ için

$$\delta(x_k) = t(x_k) = t(e(x)ke(x^{-1})$$

olur. t bir homomorfizm olduğundan dolayı

$$t(e(x)ke(x^{-1})) = te(x)t(k)te(x^{-1}) = xt(k)x^{-1}$$

olduğuna göre

$$\begin{array}{ccc} O \times Kers & \rightarrow & Kers \\ (x,k) & \mapsto & x_k \end{array}$$

sürekli etkisi için

cm1)

$$\begin{array}{rcl} \delta\left(x_k\right) & = & t\left(x_k\right) \\ & = & t(e(x)ke(x^{-1})) \\ & = & te(x)t(k)te(x^{-1}) \\ & = & xt(k)x^{-1} \\ & = & x\delta(k)x^{-1} \end{array}$$

sağlanır.

A da yani $Kers \rtimes O$ daki $\circ$ kompozisyonunun bir sürekli homomorfizm olduğunu biliyoruz ve böylece $Kers \rtimes O$ içindeki çarpım ile $\circ$ kompozisyonu bileşkelerin değişim kuralını (interchange law) sağlar. Yani,

$$((k,x).(l,y)) \circ ((k', \delta(k)x).(l', \delta(l)y)) = ((k,x) \circ (k', \delta(k)x)).((l,y) \circ (l', \delta(l)y)$$

olur. Şimdi bu denklemin her iki tarafınıda inceleyelim.

$$\begin{array}{rcl} DSol = ((k,x).(l,y)) \circ ((k', \delta(k)x).(l', \delta(l)y)) & = & ((k,x) \circ (k', \delta(k)x)(l', \delta(l)y) \\ & = & (kx_l, xy) \circ (k'\delta(k)x_{l'}, \delta(k)x\delta(l)y) \\ & = & (k'\delta kx_{l'}kx_l, xy) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} Dsağ & = & ((k,x) \circ (k', \delta(k)x)).((l,y) \circ (l', \delta(l)y)) \\ & = & (k'k, x).(l'l, y) \\ & = & (k'kx_{l'l}, xy) \end{array}$$

dir. İki ifade eşit olması gerektiğinden $(k'\delta_k x_{l'} kx_e, xy) = (k'kx_{l'l}, xy)$ elde edilir. Buradan

$$\begin{array}{rcl} k'\left(\delta_k x\right)_{l'} kx_l & = & k'\left(\delta k\right)_{x_{e'}} kx_l \\ & = & k'kx_{(l'l)} \\ & = & k'kx_{l'}x_l \\ & = & k'kx_{l'}k^{-1}kx_l \end{array}$$

olur. Buradan $(\delta k)_{x_{l'}} = k x_{l'} k^{-1}$ elde edilir. $m = x_{l'} \in Kers$ yazılırsa,

CM2) k, $m = x_{l'} \in Kers$ için

$$\delta k_m = kmk^{-1}$$

bulunur.

Böylece $(Kers, O, \delta)$ bir profinite çaprazlanmış modüldür.

Tersine (C, G, δ) profinite grupların bir çaprazlanmış modülü olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{ccc} G \times C & \longrightarrow & C \\ (g, c) & \mapsto & g_c \end{array}$$

sürekli etkisi yardımıyla

$$C \rtimes G = \{(c, g) \mid c \in C, g \in G\}$$

yarıdırekt çarpım grubu olusturulabilir, burada $(c, g), (c', g') \in C \rtimes G$ için

$$(c, g)(c', g') = (cg_{c'}, gg')$$

dir. Ayrıca

$$\begin{array}{rccc} s: & C \rtimes G & \to & G \\ & (c, g) & \longmapsto & s(c, g) = g \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} t: & C \rtimes G & \to & G \\ & (c, g) & \longmapsto & t(c, g) = \delta cg \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rccc} e: & G & \to & C \rtimes G \\ & g & \longmapsto & e(e) = (1_c, g) \end{array}$$

dönüşümlerini tanımlanabilir.

$$\begin{aligned} s((c, g)(c', g')) &= s(cg_{c'}, gg') \\ &= gg' \\ &= s(c, g).s(c', g') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t((c, g).(c', g')) &= t(cg_{c'}, gg') \\ &= \delta(cg_{c'})gg' \\ &= \delta(c)\delta(g_{c'})gg' \\ &= \delta(c)g\delta(c')g^{-1}gg' \\ &= \delta(c)g\delta(c')g' \\ &= t(c, g)t(c', g') \end{aligned}$$

ve

$$e(gg') = (1_c, gg') = (1_c, g)(1_c, g') = e(g)\, e(g')$$

oldugundan t, s ve e dönüşümleri birer grup homomorfizmidir, (Burada $g_{1_c} = 1_c$ dir.)

Ayrıca her $g \in G$ için

$$s(e(g)) = s(1_c, g) = g = Id_G(g)$$

$$t(e(g)) = t(1_c, g) = \delta(1_c)g = g = Id_G(g)$$

dir yani

$$se = te = Id_G$$

elde edilir. Buna göre

$$C \rtimes G \underset{t}{\overset{s}{\rightarrow}} G \overset{e}{\rightarrow} C \rtimes G$$

internal yapısı elde edilmiş olur, burada $(c, g) \in C \rtimes G$ için

$$s(c, g) = g$$

ve

$$t(c, g) = \delta(c)g$$

olduğundan

$$g \overset{(c,g)}{\rightarrow} \delta(c)g$$

biçimindedir. $C \rtimes G$ deki (c, g) ve (c', g') elemanları arasında bir kompozisyon tanımlanabilmesi için

$$t(c, g) = s(c', g')$$

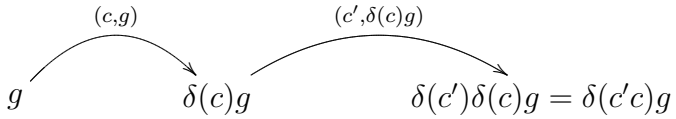
olmalıdır. Şimdi bu şart altında $C \rtimes G$ içinde bir m kompozisyonu tanımlayalım. (c, g) ve $(c', g') \in C \rtimes G$ için

$$t(c, g) = s(c', g')$$

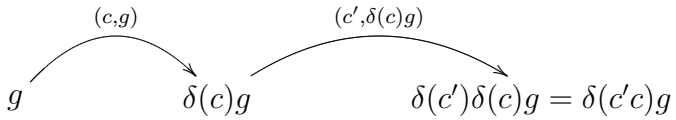
olması için

$$\delta(c)g = g'$$

olmaldır. Buna göre $(c, g), (c', \delta(c)g) \in C \rtimes G$ için



$=$



olup

$$\begin{array}{rlll} m: & (C \rtimes G)_t \times_s (C \rtimes G) & \to & C \rtimes G \\ & ((c,g),(c',\delta cg)) & \mapsto & m((c,g),(c',\delta cg)) \quad = (c,g) \circ (c',\delta cg) = (c'c,g) \end{array}$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu şekilde tanımlanan m nin homomorfizm olduğunu göstermemiz durumunda $(C \rtimes G, G, s, t, e, m)$ bir internal kategori olur. O halde m 'nin homomorfizm olduğunu gösterelim, yani

$$((c,g).(d,h)) \circ ((c',\delta cg).(d',\delta dh)) = ((c,g) \circ (c',\delta cg)).((d,h) \circ (d',\delta dh))$$

olduğunu gösterelim, (bu eşitlik bileşkelerin değişim kuralıdır)

$$\begin{array}{rcl} Sol & = & (cg_d, gh) \circ (c'\delta(c)g_{d'}, \delta(c)g\delta(d)h) \\ & = & (c'\delta(c)g_{d'}cg_d, gh) \\ & = & \left(c'\delta(c)_{(g_{d'})}cg_d, gh\right) \\ & = & (c'cg_{d'}c^{-1}cg_d, gh) \\ & = & (c'cg_{d'}g_d, gh) \\ & = & (c'cg_{(d'd)}gh) \\ & = & (c'c, g).(d'd, h) \\ & = & (c'cg_{(d'd)}, gh) \end{array}$$

olup eşitlik elde edilir. Dolayısıyla m, yani $\circ$ homomorfizmdir ve böylece $(C \rtimes G, G, s, t, e, m)$, **ProGrp** profinite grup kategorisi içinde bir internal kategoridir. $\square$

BÖLÜM 3

2-PROFİNİTE GRUPLAR ve ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

3.1 Giriş

Bir 2-kategori "morfizmler arasındaki morfizmler" ile oluşturulmuş bir kategoridir, yani buradaki herbir hom-set (morfizmler kümesi), bir kategori yapısına sahiptir. Buna göre herbir hom-set içindeki morfizmler, hom-set kategorisinin objelerini oluşturur ve morfizmler arasında 2-morfizm olarak isimlendirilen dönüşümler ise hom-set kategorisinin morfizmlerini oluşturur. O halde bir 2-kategori; objeler, 1-morfizmler ve 2-morfizmler ailelerinden oluşan bir yapıdır. 1-morfizmleri ve 2-morfizmleri izomorfizm olan bir 2-kategoriye 2-gruboid adı verilir. Bu durumda 1-morfizmlerin ve 2-morfizmlerin aileleri birer grup oluşturur. Benzer şekilde 1-morfizmlerinin ve 2-morfizmlerinin aileleri birer grup olan tek objeli bir 2-kategoriye 2-grup denir. Bu bölümde 1-morfizmlerinin ve 2-morfizmlerinin aileleri birer profinite grup olan ve tek objesi bulunan 2-kategoriler incelenecektir ve adına 2-profinite grup denilecektir. 2-gruplar ile grupların çaprazlanmış modülleri ve cat-1 grupları arasında belli ilişkiler mevcuttur, yani 2-grupların kategorisi ile çaprazlanmış modüllerin kategorisi ve cat-1 gruplar kategorisinin denkliği bilinmektedir. Benzer ilişkinin 2-profinite gruplar ile profinite çaprazlanmış modüller ve profinite cat-1 gruplar arasında da mevcut olduğu gösterilecektir.

3.2 2-Kategoriler

Bir $\mathcal{G}$ 2-kategorisi, G_0 objelerin sınıfı ile herhangi A, B obje ikilisi için $\mathcal{G}(A,B)$ morfizmlerin bir küçük (small) kategorisinden oluşur, burada $G_1(A,B)$ ile $\mathcal{G}(A,B)$ küçük kategorisinin objelerinin ailesini ve $G_2(A,B)$ ile $\mathcal{G}(A,B)$ küçük kategorisinin morfizmlerinin ailesini göstereceğiz. Her bir A, B, C obje üçlüsü için

$$\circ : \ \mathcal{G}(B,C) \times \mathcal{G}(A,B) \ \rightarrow \ \mathcal{G}(A,C)$$

bileşke funktorları ve her A objesi için, 1 terminal kategori olmak üzere,

$$iA : \ 1 \ \rightarrow \ \mathcal{G}(A,A)$$

birim funktorları tanımlıdır, burada $\circ$ asosyatif olmalı ve her bir $F \in G_1(A,B)$ ve $\vartheta \in G_2(A,B)$ için

$$iB \circ F \;=\; F \;=\; F \circ iA \qquad ve \qquad iB \circ \vartheta = \vartheta = \vartheta \circ iA$$

sağlanmalıdır.

Her bir A, B obje ikilisi için, $G_1(A,B)$ nin elemanlarına $\mathcal{G}$ nın 1-morfizmleri ve $G_2(A,B)$ nın elemanlarına da $\mathcal{G}$ nın 2-morfizmleri denir. Tüm 1-morfizmlerin sınıfını G_1 ile ve tüm 2-morfizmlerin sınıfını ise G_2 ile göstereceğiz.

2-morfizmlerin iki türlü bileşkesi mevcuttur. Birincisi $\mathcal{G}(A,B)$ kategorileri içindeki mevcut bileşkesi olan $\bullet$ bileşkesidir, buna dikey bileşke denir, ikincisi ise $\circ$ bileşke funktoru vasıtasıyla elde edilir buna da yatay bileşke denir.

Verilen iki $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ 2-kategorileri için, bunlar arasındaki bir

$$F: \;\; \mathcal{G} \;\rightarrow\; \mathcal{G}'$$

2-funktoru, objeler arasındaki

$$F_0: \;\; G_0 \;\rightarrow\; G_0'$$

dönüşümü ile, $\mathcal{G}$ içindeki herhangi A, B objeleri için bileşke ve birimleri koruyan

$$F_{A,B}: \;\; \mathcal{G}(A,B) \;\rightarrow\; \mathcal{G}'(F_0A, F_0B)$$

funktorlarından oluşur, yani her bir A, B, C obje üçlüsü için ve $D \in G_0$ için,

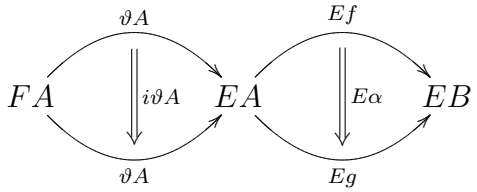
$$F_{B,C}(-) \circ F_{A,B}(-) \;=\; F_{A,C}(-) \;\; ve \;\; iFD(-) \;=\; F_{D,D}i(-)$$

dir.

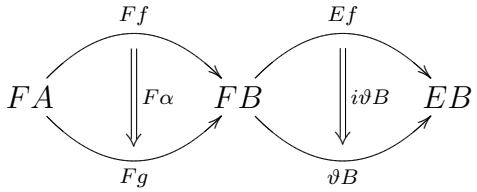
Verilen iki $F, E : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ 2-funktoru için, bir $\vartheta : F \Rightarrow E$ 2-doğal dönüşümü, $\mathcal{G}$ nin her bir A objesini $\vartheta A \in G_1'(F_0A, E_0A)$ morfizmine karşılık getiren bir dönüşümdür. Burada her bir A, B obje ikilisi için

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(A,B) & \xrightarrow{F_{A,B}} & \mathcal{G}'(FA,FB) \\ {\scriptstyle E_{A,B}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \vartheta B\circ} \\ \mathcal{G}'(EA,EB) & \xrightarrow[\circ\vartheta A]{} & \mathcal{G}'(FA,EB) \end{array}$$

diagramı komütatif olmalıdır. Böylece 2-morfizmler için diagramın koşulu $f, g \in \mathcal{G}(A, B)$ için



=



şeklinde yazılabilir. Eğer her bir A objesi için ϑA bir izomorfizm ise ϑ 2-doğal dönüşümüne 2-doğal izomorfizm denir.

3.3 2-profinite gruplar

Bu kesimde bir profinite grubun kategorileştirilmiş biçimi tanımlanacak ve adına 2-profinite grup denilecektir. Ayrıca profinite çaprazlanmış modüller kategorisi ve profinite cat-1 grupları kategorisinin 2-profinite grup kategorisine denk olduğu gösterilecektir.

Tanım 3.1 1-morfizmlerinin ve 2-morfizmlerinin aileleri birer profinite grup olan 2-kategoriye 2-profinite grup denir.

Örnek 3.1 Herhangi bir P profinite grubu için $P_0 = AutP$ ve $P_1 = P \rtimes AutP$ tanımlansın. P_0 ve P_1 birer profinite gruptur ([1], [9]). Burada $s(p, F) = F$, $t(p, F) = Ad_p \circ F$ (Ad, sürekli adjoint etkiyi göstermektedir), $i(p) = (e, p)$ ve $(p', F') \bullet (p, F) = (p'p, F)$ tanımlamaları yapılırsa, 1-morfizmleri P_0 ın elemanları ve 2-morfizmleri P_1 in elemanlarından oluşan ve tek bir P objesine sahip bir 2-kategori elde edilir. Burada P_0 ve P_1 birer profinite grup olduğundan, elde edilen 2-kategori bir 2-profinite grup olur.

Tanım 3.2 2-profinite gruplar arasındaki bir morfizm, profinite gruplar kategorisi içinde bir funktordur. 2-profinite grupların 2-morfizmi ise yine profinite gruplar kategorisi içindeki bir doğal dönüşümdür. Böylece 2-profinite gruplar, bunlar arasındaki funktorlar ve doğal dönüşümlerin oluşturduğu bir 2-kategori elde edilir. Bu kategoriyi **2-ProGrp** ile göstereceğiz.

2-grupların kategorisi ile cat-1 grupların kategorisinin ve grupların çaprazlanmış modüllerinin kategorisi arasında bir denkliğin mevcut olduğu bilinmektedir. Bu denkliklerin ispatı [7], [2] gibi birçok kaynakta bulunabilir. Burada benzer denklik, 2-profinite gruplar için incelenecektir.

Teorem 3.3 Profinite çaprazlanmış modül kategorisi ile profinite cat-1 grup kategorisi denktir.

İspat. $X = (\delta : S \to R)$ bir profinite çaprazlanmış modül olsun. Buradan bir profinite cat-1 grup elde edilmelidir. R nin S üzerine sürekli etkisi yardımıyla

$$G = S \rtimes R = \{(s, r) \mid s \in S,\ r \in R\}$$

grubu tanımlanabilir. Ve

$$G = S \rtimes R \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} R \xrightarrow{e} S \rtimes R$$

s, t, e sürekli grup homomorfizmleri

$$\begin{array}{rccc} s: & S \rtimes R & \to & R \\ & (s,r) & \mapsto & s(s,r) = r \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} t: & S \rtimes R & \to & R \\ & (s,r) & \mapsto & t\,(s,r) = r\delta\,(s) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} e: & R & \to & S \rtimes R \\ & r & \mapsto & e\,(r) = (1, r) \end{array}$$

biçiminde tanımlanabilir. Burada,

$$\begin{array}{rcl} Kert & = & \{(s,r) \mid t\,(s,r) = r\delta\,(s) = 1\} \\ & = & \left\{\left(s, \delta\,(s)^{-1}\right)\right\} \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} Kers & = & \{(s,r) \mid s\,(s,r) = r = 1\} \\ & = & \{(s,1)\} \end{array}$$

biçimindedir. Bütün bunlara göre,

$$\begin{array}{rcl} (te)\,(r) & = & t\,(e\,(r)) = t\,(1,r) \\ & = & r\delta\,(1) = r = I_R\,(r) \end{array}$$

ve

$$\begin{aligned}(se)(r) &= s(e(r)) = s(1,r)\\ &= r = I_R(r)\end{aligned}$$

elde edilir.

cat2)

$$x = \left(s, \delta(s)^{-1}\right) \in Kert$$

ve

$$y = (s', 1) \in Kers$$

için

$$xy = \left(s, \delta(s)^{-1}\right)(s', 1) = \left(s\delta(s)^{-1}_{s'}, \delta(s)^{-1}\right)$$

$$yx = (s', 1)\left(s, \delta(s)^{-1}\right) = \left(s'\ 1_s\ , \delta(s)^{-1}\right)$$

bulunur. Burada $(\delta : S \to R)$ bir profinite çaprazlanmış modül olduğundan (CM2) gereği s , $s' \in S$ için

$$\delta(s)^{-1}_{s'} = \delta\left(s^{-1}\right)_{s'} = s^{-1}s's$$

olduğundan,

$$s\delta(s)^{-1}_{s'} = s'1_s$$

eşitliği sağlanır. Bu ise

$$xy = yx$$

eşitliğini sağlar. Öyleyse, (G, R, s, t, e) bir profinite cat-1 grup olur.

Tersine $e = (G, R, s, t, e)$ bir profinite cat-1 grup olsun, buna göre,

$$G \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} R \xrightarrow{e} G$$

s, t, e sürekli grup homomorfizmleri için $(te) = I_R$, $(se) = I_R$ ve $[Kers, Kert] = 1$ yani $x \in Kers$ ve $y \in Kert$ için $xy = yx$ dır. Buradan $S = Kers$ ve $\delta = t|_{Kers}$ tanımlansın ve R nın S üzerine sürekli etkisi de

$$\begin{array}{ccc} R \times S & \to & S \\ (r, s) & \mapsto & r_s = e(r)\, se(r)^{-1} \end{array}$$

şeklinde tanımlansın. O halde

CM1) $r \in R$ ve $s \in S$ için

$$\begin{aligned} \delta(r_s) &= t(r_s) = t\left(e(r)\, se(r)^{-1}\right) \\ &= (te)(r)\, t(s)\, (te)\left(r^{-1}\right) \\ &= rt(s)\, r^{-1} \\ &= r\delta(s)\, r^{-1} \end{aligned}$$

olur.

CM2) $s, s' \in Ker\ s$ için

$$\begin{aligned} \delta(s)_{s'} &= t(s)_{s'} = e(t(s))\, s' e(t(s))^{-1} \\ &= e(t(s))\, s' e\left(t\left(s^{-1}\right)\right) ss^{-1} \\ &= e(t(s))\, e\left(t\left(s^{-1}\right)\right) ss's^{-1} \\ &= ss's^{-1} \end{aligned}$$

bulunur, burada $e(t(s^{-1}))\, s \in Kerk\ t$ ve $s' \in Kers$ olduğundan $s' \cdot e(t(s^{-1}))\, s = e(t(s^{-1}))\, s \cdot s'$ dır. Böylece(S, R, δ) profinite çaprazlanmış modüldür. Buna göre profinite çaprazlanmış modül kategorisi ile profinite cat-1 grup kategorisi arasında bir denklik bulunur. □

Teorem 3.4 Profinite çaprazlanmış modül kategorisi ile profinite 2-grup kategorisi denktir.

İspat. $X = (G, H, \delta) = (\delta : H \to G)$ bir profinite çaprazlanmış modül olsun. G nin H üzerine sürekli bir sol etkisi mevcut olduğundan,

$$H \rtimes G = \{(h, g) \mid h \in H\ ,\ g \in G\}$$

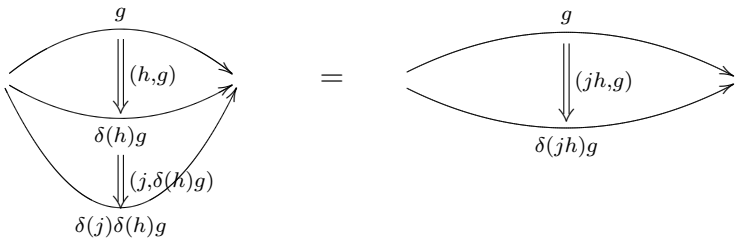
yarıdirekt çarpım grubu oluşturulabilir. Buna göre $G_0 = \{*\}$, $G_1 = G_1$, $G_2 = H \rtimes G$ profinite grupları ele alınsın. G_1 profinite grubunun elemanları, $*$ objesinden yine $*$ objesine giden sürekli 1-morfizmler olarak isimlendirilsin ve G_2 profinite grubunun elemanları da sürekli 2-morfizmler olarak isimlendirilsin ve bu sürekli 2-morfizmleri için önce s , t ve i dönüşümleri

$$\begin{array}{rccc} s: & H \rtimes G & \to & G \\ & (h, g) & \mapsto & s(h, g) = g \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} t: & H \rtimes G & \to & G \\ & (h, g) & \mapsto & t(h, g) = \delta(h) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rccc} i: & G & \to & H \rtimes G \\ & g & \mapsto & i(g) = (e, g) \end{array}$$

şeklinde tanımlansın. Burada



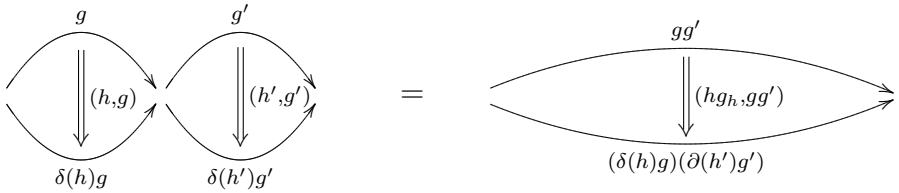
olup

$$\begin{array}{rccl} m: & H \rtimes G \ {}_s\times_t (H \rtimes G) & \to & H \rtimes G \\ & ((h,g),(j,\delta(h)\,g)) & \mapsto & m((h,g),(j,\delta(h)\,g)) = (h,g) \bullet (j,\delta(h)\,g) = (jh,g) \end{array}$$

şeklinde bir kompozisyon tanımlanır. Bu kompozisyona sürekli 2-morfizmlerin dikey (vertical) kompozisyonu denilecektir. Burada

$$i(g) = (e,g)$$

sürekli 2-morfizmlerin dikey kompozisyonunun birim elemanıdır.



$$\begin{array}{rcll} \delta(h)\,g\delta(h')\,g' & = & \delta(h)\ \ g\delta(h')\,g^{-1}\ gg' & \\ & = & \delta(h)\,\delta(g_{h'})\,gg' & \text{(cm1 den)} \\ & = & \delta(hg_{h'})\,gg' & (\delta \text{ grup homomorfizm}) \end{array}$$

olup

$$(h,g) \circ (h',g') = (hg_{h'}, gg')$$

olarak tanımlanır, bu şekilde tanımlanan kompozisyona sürekli 2-morfizmlerin yatay (horizantal) kompozisyonu denilecektir.

Son olarak sürekli 2-morfizmler için tanımlanan bu iki (vertical ve horizantal) kompozisyonun bileşkelerin değişim kuralını(interchange law) sağladığını gösterelim. Bunun

için

$$[(h,g) \bullet (j,\delta(h)\,g)]\circ[(h',g') \bullet (j',\delta(h')\,g')] = [(h,g) \circ (h',g')]\bullet[(j,\delta(h)\,g) \circ (j',\delta(h')\,g')]$$

eşitliğinin sağlandığı gösterilmelidir. Burada eşitliğin sol tarafı

$$(jh,g)\circ(j'h',g') = (jh\ g_{j'h'},gg') \qquad (*)$$

ve sağ tarafı

$$(hg_{h'},gg')\bullet\left(j\left(\delta(h)\,g\right)_{j'},\delta(h)\,g\delta(h')\,g'\right) = \left(j\left(\delta(h)\,g\right)_{j'}hg_{h'},gg'\right) \qquad (**)$$

olup, bileşkelerin değişim kuralının sağlandığının gösterilmesi için $(*)=(**)$ olduğu, yani,

$$(jh\ g_{j'h'},gg') = \left(j\left(\delta(h)\,g\right)_{j'}hg_{h'},gg'\right)$$

olduğu gösterilmelidir.

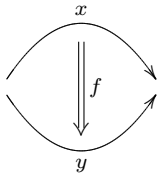
$$\begin{aligned} jhg_{j'h'} &= jhg_{j'}g_{h'} \\ &= jhg_{j'}h^{-1}hg_{h'} \\ &= j\left(hg_{j'}h^{-1}\right)hg_{h'} \\ &= j\left(\delta(h)\,g\right)_{j'}hg_{h'} \end{aligned}$$

olup bileşkelerin değişim kuralı sağlanmış olur. O halde

$$G = (\{*\},G_1,H\rtimes G)$$

bir profinite 2- gruptur.

Tersine $G=(\{*\},G_1,G_2)$ bir profinite 2-grup olsun. Buna göre $x,y\in G_1$ ve $f: x\Longrightarrow y\in G_2$ için



$$\begin{array}{rccc} s: & G_2 & \to & G_1 \\ & f & \mapsto & s(f)=x \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} t: & G_2 & \to & G_1 \\ & f & \mapsto & t(f)=y \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rccc} e: & G_1 & \to & G_2 \\ & x & \mapsto & e\left(x\right) \end{array}$$

olup

$$Kers = H = \{h \in G_2 \mid s\left(h\right) = Id_{G_1}\}$$

tanımlansın. G_1 profinite grubunun $Ker = H$ üzerine sürekli etkisi

$$\begin{array}{lcl} G_1 \times Kers & \to & Kers \\ (x,h) & \mapsto & x_h = e\left(x\right) he\left(x\right)^{-1} \end{array}$$

şeklinde ve

$$\begin{array}{rccc} \delta: & Kers & \to & G_1 \\ & h & \mapsto & \delta\left(h\right) = t\left(h\right) \end{array}$$

şeklinde tanımlansın. Tanımlanan G_1 in $Kers$ üzerine sürekli etkisi yardmıyla

$$Kers \rtimes G_1 = \{(h,x) \mid h \in Kers, x \in G_1\}$$

kümesi tanımlanabilir, bu küme

$$\left(h,x\right)\left(g,h\right) = \left(hx_g, xy\right)$$

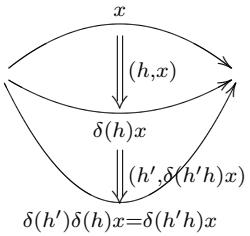
çarpımıyla bir grup oluşturur. Bu grup aynı zamanda bir profinite grup olur. Ayrıca

$$G_2 \cong Kers \rtimes G_1$$

dır. Dolayısıyla $\left(\{*\}, G_1, Kers \rtimes G_1\right)$ bir profinite 2-grup olur. Buna göre

$$\begin{array}{rccc} s: & Kers \rtimes G_1 & \to & G_1 \\ & (h,x) & \mapsto & s\left(h,x\right) = x \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} t: & Kers \rtimes G_1 & \to & G_1 \\ & (h,x) & \mapsto & t\left(h,x\right) = \delta\left(h\right)x \end{array}$$

alınırsa,



olup (h,x) ile $\left(h', \delta\left(h\right)x\right)$ sürekli 2-morfizmlerinin dikey kompozisyonu

$$(h,x) \bullet \left(h', \delta\left(h\right)x\right) = \left(h'h, x\right)$$

şeklinde olacaktır. Böylece

CM1)

$$\begin{aligned}\delta(x_h) &= \delta\left(e(x)\,he\left(x^{-1}\right)\right)\\ &= \delta e(x))\delta(h)\,\delta(e(x))^{-1}\\ &= (te)(x)\,\delta(h)\,(te)\left(x^{-1}\right)\\ &= x\delta(h)\,x^{-1}\end{aligned}$$

olur. Ayrıca $G_2 \cong Kers \rtimes G_1$ içindeki sürekli 2-morfizmlerin kompozisyonlarının bileşkelerin değişim kuralı sağlaması gerektiğinden,

$$[(h,x) \bullet (h',\delta(h)\,x)]\circ[(g,y) \bullet (g',\delta(g)\,y)] = [(h,x)\circ(g,y)]\bullet[(h',\delta(h)\,x)\circ(g',\delta(g)\,y)]$$

olmalıdır, buna göre

$$\begin{aligned}(h'h,x)\bullet(g'g,y) &= (hx_g,xy)\circ(h'(\delta(h)\,x)\,g',\delta(h)\,x\delta(g)\,y)\\ (h'hx_{g'g},xy) &= (h'(\delta h(x))\,g'hx_g,xy)\end{aligned}$$

eşitliği sağlanmaktadır, o halde

$$h'hx_{g'g} = h'(\delta h(x))_{g'}\,hx_g$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}h'(\delta h(x))_{g'}\,hx_g &= h'hx_{g'g}\\ &= h'hx_{g'}x_g\\ &= h'hx_{g'}h^{-1}hx_g\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}\delta(h(x))_{g'} &= (\delta h)_{x_{g'}}\\ &= hx_{g'}h^{-1}\end{aligned}$$

elde edilir. $m = x_{g'} \in Kers$ ve $h \in Kers$ olup

$$\delta h_m = hmh^{-1}$$

elde edilir. Böylece $(Kers, G_1, \delta)$ bir profinite çaprazlanmış modüldür. □

Teorem 3.5 Profinite cat-1 gruplar kategorisi ile 2-profinite gruplar kategorisi denktir.

İspat. ($\Rightarrow$) (G, C, s, t, e) bir profinite cat-1 grup olsun. Buna göre

$$G \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} C \xrightarrow{e} S \rtimes G$$

şeklindeki s, t, e sürekli grup homomorfizmleri için

1) $se = Id_c$, $te = 1d_c$

2) $[Kers, Kert] = 1$

sağlanır. Burada $Kers = \{h \mid s(h) = 1\} = H$ olup C grubunun $Kers$ üzerine,

$$\begin{array}{rccc} \delta: & H & \to & C \\ & h & \mapsto & \delta(h) = t(h) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} C \times Kers & \to & Kers \\ (c,h) & \mapsto & c_h = e(c)\, he(c)^{-1} \end{array}$$

sürekli etkisi yardımıyla $c_x = e(x)\, he(x)^{-1}$

$$Kers \rtimes C = \{(h,c) \mid h \in Kers, c \in C\}$$

$(h,c) \circ (h',c') = (hc_{h'}, cc')$ çarpımına sahip yarıdirekt çarpım grubu oluşturulabilir. Ayrıca

$$Kers \rtimes C \cong G$$

olduğundan, $(Kers \rtimes C, C, s, t, e)$ de bir profinite cat-1 grup oluşturur, burada

$$\begin{array}{rccc} s: & Kers \rtimes C & \to & C \\ & (h,c) & \mapsto & s(h,c) = c \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} t: & Kers \rtimes C & \to & C \\ & (h,c) & \mapsto & t(h,c) = \delta(h)\, c \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} e: & C & \to & Kers \rtimes C \\ & c & \mapsto & e(c) = (1,c) \end{array}$$

şeklinde tanımlanır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} Kers &= \{(h,c) \mid s(h,c) = c = 1\} \\ &= \{(h,1)\} \end{aligned}$$

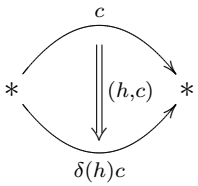
$$\begin{aligned} Kert &= \{(h',c') \mid t(h',c') = \delta(h')\, c' = 1\} \\ &= \left\{\left(h', \delta(h')^{-1}\right)\right\} \end{aligned}$$

bulunur ve $(h,1) \in Kers$, $\left(h', \delta\left(h'\right)^{-1}\right) \in Kert$ için

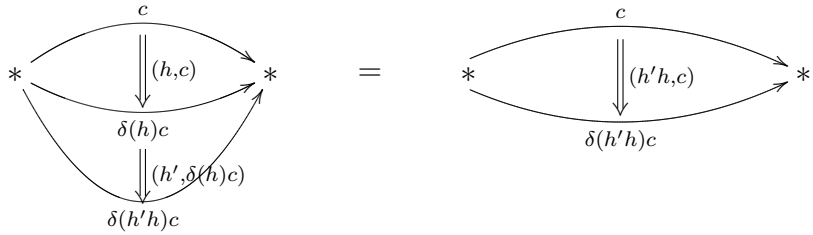
$(h,1) \circ \left(h', \delta\left(h'\right)^{-1}\right) = \left(h1_{h'}, \delta\left(h'\right)^{-1}\right) = (1,1) \Rightarrow hh' = 1 \quad \delta\left(h'\right)^{-1} = 1 \quad \Rightarrow h' = 1$

$\left(h', \delta\left(h'\right)^{-1}\right) \circ (h,1) = \left(h'\delta\left(h'\right)_h^{-1}, \delta\left(h'\right)^{-1}\right) = (1,1) \Rightarrow h'\delta\left(h'\right)_h^{-1} = 1 = hh'$ elde edilir.

Burada $C_0 = \{*\}$ $C_1 = C$ ve $C_2 = Kers \rtimes C$ grupları için,



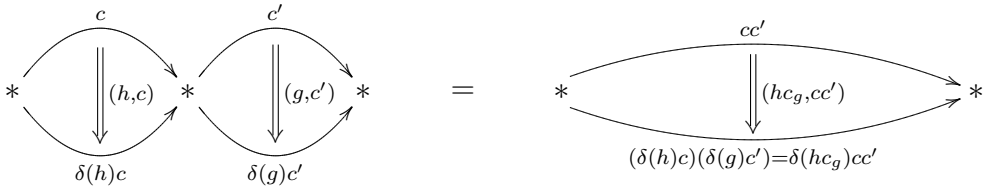
$(h,c) \in C_2 = Kers \rtimes C$, $c, \delta\left(h\right)c \in C_1 = C$ olur. $Kers \rtimes C$ içindeki (h,c) şeklindeki elemanların iki değişik kompozisyonu tanımlanabilir. Birincisi



olup,

$$(h,c) \bullet \left(h', \delta\left(h\right)c\right) = \left(h'h, c\right)$$

elde edilir buna dikey kompozisyon denir. Ayrıca



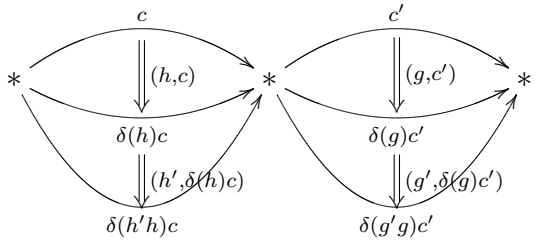
olup

$$(h,c) \circ (g,c') = (hc_g, cc')$$

biçiminde tanımlanan kompozisyona yatay kompozisyon denir. Burada

$$\begin{aligned}
\delta(hc_g)\,cc' &= t(hc_g)\,cc' \\
&= t(h)\,t(cg)\,cc' \\
&= \delta(h)\,t(e(c)\,ge(c)^{-1})cc' \\
&= \delta(h)\,(te)(c)\,t(g)\,(te)\left(c^{-1}\right)cc' \\
&= \delta(h)\,c\delta(g)\,c^{-1}cc' \\
&= \delta(h)\,c\delta(g)\,c'
\end{aligned}$$

dır. Şimdi de bu iki kompozisyon arasında bileşkelerin deişim kuralının sağladığını gösterelim.



$[(h,c)\bullet(h',\delta(h)\,c)]\circ[(g,c)\bullet(g,\delta(g)\,c)] = [(h,c)\circ(g,c')]\bullet[(h',\delta(h)\,c)\circ(g',\delta(g)\,c')]$ eşitliğinin sağlandığını göstermeliyiz. Yani

$$\Rightarrow (h'h,c)\circ(g'g,c') = (hc_g,cc')\bullet\left(h'(\delta(h)\,c)_{g'},\delta(h)\,c\delta(g)\,g\right)$$

$\Rightarrow (h'hc_{g'g},cc') = \left(h'(\delta(h)\,c)_g\ ,cc'\right)$ eşitliği sağlanmalıdır, buna göre birinci bileşenlerin eşit olması gerekir. Yani,

$$h'hc_{g'g} = h'(\delta(h)\,c)_{g'}\,hc_g$$

eşitliği sağlanmalıdır. Buradan,

$$\begin{aligned}
h'hc_{g'}c_g &= h'(\delta(h))_{c_{g'}}\,hc_g \\
hc_{g'} &= \delta(h)_{c_{g'}}\,h
\end{aligned}$$

$*$ sağlanmalıdır. $l = c_{g'} \in Kers\ ,\ \ h \in Kers$ için profinite cat-1 grup şartından,

$$h\delta\left(h^{-1}\right)_l = lh$$

olup

$$h^{-1}\delta\left(h\right)_{l}=lh^{-1}$$

yazılabilir. O halde,

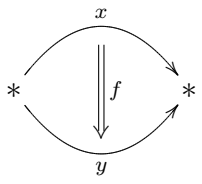
$$\delta\left(h\right)_{l}=hlh^{-1}$$

elde edilir. Buna göre $(*)$ eşitliğine geri dönersek, $\delta\left(h\right)_{c_{g'}}h=\delta\left(h\right)_{l}h=hlh^{-1}h=hl=hc_{g'}$ bulunur yani $Kers\rtimes C$ içindeki (h,c) elemanlarının dikey ve yatay kompozisyonlarının bileşkelerin deişim kuralını sağladığı gösterilmiş olur. Buna göre

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= \left(\{*\},C,Kers\rtimes C\right)\\ &= \left(C_0=\{*\},C_1=C,C_2=Kers\rtimes C\right)\end{aligned}$$

bir profinite 2-grup oluşturur.

$(\Leftarrow)$ Tersine $\mathcal{C}=\left(\{*\},G_1,G_2\right)$ bir profinite 2-grup olsun.



$$\begin{array}{rccc} s: & G_2 & \to & G_1 \\ & f & \mapsto & s\left(f\right)=x \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} t: & G_2 & \to & G_1 \\ & f & \mapsto & t\left(f\right)=y \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} e: & G_1 & \to & G_2 \\ & x & \mapsto & e\left(x\right) \end{array}$$

için

$$Kers=H=\{h\in G_2\mid s\left(h\right)=ld_{G_1}\}$$

ve

$$\begin{array}{rccc} \delta: & H & \to & G_1 \\ & h & \mapsto & \delta\left(h\right)=t\left(h\right) \end{array}$$

$\delta=t/\!\!/H$

morfizmini tanımlayalım. G_1 in $Kers$ üzerine

$$\begin{array}{ccc} G_1 \times Kers & \to & Kers \\ (x,h) & \mapsto & x_h = e(x)\, he(x)^{-1} \end{array}$$

sürekli etkisi yardımıyla,

$$\begin{aligned} Kers \rtimes G_1 &= \{(h,x) \mid h \in Kers, x \in G_1\} \\ (h,x)(g,y) &= (hx_g, xy) \end{aligned}$$

çarpımına sahip grubu tanımlayalım.

$$\begin{array}{rccc} s: & Kers \rtimes G_1 & \to & G_1 \\ & (h,x) & = & s(h,x) = x \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} t: & Kers \rtimes G_1 & \to & G_1 \\ & (h,x) & \mapsto & t(h,x) = \delta(h)\, x \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} G_1 & & \\ x & \mapsto & e(x) = (1,x) \end{array}$$

sürekli morfizmlerinini tanımlayalım. Bunlar için

1) $(se)(x) = s(e(x)) = s(1,x) = x = Id_x$

$(te)(x) = t(e(x)) = t(1,x) = \delta(1)\, x$

$= x = Id(x)$ olur.

2) $Kers = \{(h,x) \mid s(h,x) = 1\} = \{(h,1)\}$

$Kert = \{(h,x) \mid t(h,x) = 1\} = \{(h, \delta(h^{-1}))\}$ olup, $[Kers, Kert] = 1$ yani $(h,1) \in Kers$, $\left(h', \delta(h')^{-1}\right) \in Kerst$ için

$(h,1)\left(h', \delta(h')^{-1}\right)(h,1)^{-1}\left(h', \delta(h')^{-1}\right)^{-1} = (1,1)$ olduğunu gösterelim. Burada

$$(h,x)^{-1} = \left(x_{h^{-1}}^{-1}, h^{-1}\right)$$

olup

$$(h,1)\left(h', \delta(h')^{-1}\right)(h,1)^{-1}\left(h', \delta(h')^{-1}\right)^{-1} = \left(hh'\delta(h')_{h^{-1}}^{-1}\, \delta(h')_{\left(\delta(h')_{h'^{-1}}\right)}^{-1}, 1\right) = (1,1)$$

olmalıdır. Burada profinite 2-grup için sağlanan bileşkelerin değişim kuralından

$$\delta(h')_{h^{-1}}^{-1} = (h')^{-1} h^{-1} h'$$

olup

$$\begin{aligned} hh'\delta\left(h'\right)_{h^{-1}}^{-1}\left(\delta\left(h'\right)^{-1}\delta\left(h'\right)\right)_{h'^{-1}} &= hh'\delta\left(h'\right)_{h^{-1}}\left(h'\right) \\ &= hh'\left(h'\right)^{-1}h^{-1}h'\left(h'\right)^{-1} \\ &= hh^{-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

bulunur. Yani

$$[Kers, Kert] = 1$$

elde edilir. O halde

$$(Kers \rtimes G_1, G_1, s, t, e)$$

bir profinite cat-1 grup olur.

$$G_1 \ {}_s\times_t G_1$$

□

SONUÇ ve ÖNERİLER

Bir profinite grup, Hausdorff, kompakt ve tamamen bağlantısız olan bir topolojik gruptur. Buna denk olarak, ayrık sonlu grupların bir ters sisteminin ters limitine izomorf olan bir topolojik gruba profinite grup denir. Bu tezde profinite gruplar kategorisindeki internal kategori incelenmiş ve elde edilen internal kategorinin, profinite çaprazlanmış modüller ile denk yapılar olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca bir objesi olan, 1-morfizmlerinin ve 2-morfizmlerinin aileleri birer profinite grup olan 2-kategori, 2-profinite grup olarak tanımlanmış ve bunun da yine profinite çaprazlanmış modüllere denk olduğu gösterilmiştir.

Bundan sonraki lisans üstü çalışmalarda bu tezde ele alınmamış olan profinite simplisel gruplar ile 2-profinite gruplar arasındaki ilişkiler incelenebilir. Yani, Moore kompleksinin uzunluğu 1 olan profinite simplisel gruplar kategorisi ile 2-profinite gruplar kategorisinin denkliği gösterilebilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] Anderson, M., 1974, Exactness properties of profinite completion functors, Topology, 13, 229-239.

[2] Barker, M., F., 2002, Group objects and internal categories, arXiv: math. CV/0212065V1.

[3] Borceux F., 1994, Handbook of Categorical Algebra, volumes 50-52 of Enyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press.

[4] Lawvere W., Schanuel S., 1997, Conceptual Mathematics:A First Introduction to Categories, Cambridge University Press, Cambridge.

[5] Mac Lane, S., 1998, Categories for the Working Mathematician, 2nd edition. Graduate Texts in Mathematics 5,Springer.

[6] Murkres,J.,R., 2000, Topology Prestice Hall, Inc.

[7] Porst, S. S., 2008, Strict 2-groups are crossed modules,arXiv:0812.1464V1 [Math.CT].

[8] Ribes, L., Zalesskii, P., 2000, Profinite Groups, Springer.

[9] Smith, J., 1969, On products of profinite groups, Ill. J. Math., 13, 680-688.

[10] Wilson, J., S., 1998, Profinite Groups, Clarendon Press, Oxford.