T.C.

ESKİŞEHİR OSMANGAZİ ÜNİVERSİTESİ

BİLİMSEL ARAŞTIRMA PROJELERİ KOMİSYONU BAŞKANLIĞINA

2016-1097 NOLU PROJE SONUÇ RAPORU

PG(4,4) PROJEKTİF UZAYINDAKİ PROJEKTİF DÜZLEMLER ÜZERİNE

Ekim 2016

T.C.
ESKİŞEHİR OSMANGAZİ ÜNİVERSİTESİ
BİLİMSEL ARAŞTIRMA PROJELERİ KOMİSYONU BAŞKANLIĞI

Bilim Alanı: FEN BİLİMLERİ

PROJENİN ADI

PG(4,4) PROJEKTİF UZAYINDAKİ PROJEKTİF DÜZLEMLER ÜZERİNE

PROJE YÖNETİCİSİ **BİRİM İ**
PROF. DR. SÜHEYLA EKMEKÇİ **ESKİŞEHİR OSMANGAZİ ÜNİVERSİTESİ**
FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR BÖLÜMÜ

PROJE ÇALIŞANLARI

PROF. DR. AYŞE BAYAR **ESKİŞEHİR OSMANGAZİ ÜNİVERSİTESİ**
Danışman **FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ**
MATEMATİK-BİLGİSAYAR BÖLÜMÜ

PROF. DR. Ziya Akça **ESKİŞEHİR OSMANGAZİ ÜNİVERSİTESİ**
FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR BÖLÜMÜ

Başlama Tarihi :23/09/2016 **Proje Desteği : 500 TL**

Bitiş Tarihi :

İçindekiler

Özet	4
Abstract	5
Giriş ve Amaç	6
Yapılan Çalışmalar	7
Temel Kavramlar	8
Projektif Düzlemler	8
Cisim Genişlemesi	9
Projektif Uzaylar	10
Projektif Uzayda Bazı Alt Geometriler	12
Veronesean Dönüşüm	12
PG(4,4) Projektif Uzayındaki 4. Mertebedeb Projektif Düzlemler	15
Sonuç (Bulgular)	22
Tartışma (Yorum)	23
Kaynak	24
EK I	25

Özet

$GF(2^2)$ Galois cismi üzerinde , $PG(2,4)$ ün her bir doğrusu üzerindeki noktalar kümesini $PG(5,4)$ ün düzlemsel noktalar kümesine eşleyen, $PG(2,4)$ projektif düzleminden $PG(5,4)$ projektif uzayına tanımlı Veronesean dönüşümün görüntüsü $PG(5,4)$ projektif uzayını üretir. Bu çalışmada, $PG(5,4)$ projektif uzayındaki $PG(2,4)$ projektif düzleminin Kuadrik Veroneseanları ile $PG(5,4)$ projektif uzayının Veroneseanlarla üretilen altuzaylarının izdüşümleri arasında ilişki kullanılarak $PG(4,4)$ projektif uzaydaki $PG(2,4)$ projektif düzlemin varlığı incelenecektir.

Abstract

The Veronesean map defined from $PG(2,4)$ projective plane to $PG(5,4)$ projective space maps the set of points of each line of $PG(2,4)$ to a set of coplanar points of $PG(5,4)$ such that image of this map generates the projective space $PG(5,4)$. In this study , the existence of $PG(2,4)$ projective plane in Projective Space $PG(4,4)$ is examined by using the relation the quadric Veronesean of $PG(2,4)$ in $PG(4,4)$ and the projections from subspaces of $PG(5,4)$ generated by Veroneseans.

Giriş ve Amaç

Bu projenin temel amacı $PG(5,4)$ projektif uzayındaki $PG(2,4)$ projektif düzleminin Kuadrik Veroneseanları ile $PG(5,4)$ projektif uzayının Veroneseanlarla üretilen altuzaylarının izdüşümleri arasında ilişki kullanılarak $PG(4,4)$ projektif uzaydaki $PG(2,4)$ projektif düzlemin varlığı incelemektir.

YAPILAN ÇALIŞMALAR

Proje kapsamında öncelikle literatür taraması yapılarak projeye temel oluşturacak kaynaklar tespit edilmiştir.

n-boyutlu sonlu $PG(n,q)$ projektif uzayları ve alt uzayları incelenmiştir.

4. mertebeden projektif düzlemin noktaları, doğruları ve üzerinde bulunma yapısı verildi

Veronesean yapılar ve Veronesean dönüşümler ele alınarak, Veronesean dönüşüm altında 4. Mertebeden projektif düzlemin görüntüsü olan yapı incelendi.

5-boyutlu uzayda Veronesean yapının dışındaki bir nokta ile izdüşüm yapılarak, 4-boyutlu projektif uzayda 21 konik düzleminin oluşturduğu yapı elde edildi. Ve bu yapının 4. Mertebeden bir projektif düzlem oluşturduğu gösterildi.

Temel Kavramlar

Projektif Düzlemler

Tanım: N ve D elemanları sırasıyla noktalar ve doğrular olan ayrık iki küme ve $\circ$ da $N \times D$ kümesinde bir üzerinde bulunma bağıntısı olmak üzere aşağıdaki aksiyomları gerçekleyen (N, D, o) sistemine *projektif düzlem* denir:

P1) Her $M, N \in N, M \neq N$ için $M \circ d$ ve $N \circ d$ olacak şekilde bir tek $d \in D$ doğrusu vardır.

P2) Her $c, d \in D, c \neq d$ için $N \circ c$ ve $N \circ d$ olacak şekilde bir tek $N \in N$ noktası vardır.

P3) Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

Teorem: Her sonlu $\mathcal{P} = (N, D, o)$ projektif düzlemi için aşağıdaki koşullara uyan bir n pozitif tamsayısı vardır. Bu sayıya ilgili projektif düzlemin mertebesi denir.

i) $\mathcal{P}$ nin her doğrusu üzerinde $n+1$ nokta vardır.

ii) $\mathcal{P}$ nin her noktasından $n+1$ doğru geçer.

iii) $\mathcal{P}$ deki tüm noktaların sayısı n^2+n+1 dir.

iv) $\mathcal{P}$ deki tüm doğruların sayısı n^2+n+1 dir.

Teorem: Herhangi bir F cisminin elemanlarıyla cebirsel olarak aşağıdaki gibi belirlenen N noktalar kümesi, D doğrular kümesi ve $\circ$ üzerinde bulunma bağıntısı olmak üzere oluşturulan (N, D, o) geometrik yapısı bir projektif düzlemdir:

$$N = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in F, (x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0), (x_1, x_2, x_3) \equiv \lambda(x_1, x_2, x_3), \lambda \in F - \{0\}\},$$

$$D = \{[a_1, a_2, a_3] : a_i \in F, [a_1, a_2, a_3] \neq [0,0,0], [a_1, a_2, a_3] \equiv \mu [a_1, a_2, a_3], \mu \in F - \{0\}\},$$

$$\circ : (x_1, x_2, x_3) \circ [a_1, a_2, a_3] \Leftrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$$

F yardımıyla tanımlanan bu projektif düzlemlere cisim düzlemleri denir ve genel olarak P_2F ile gösterilir. r pozitif tamsayı, p bir asal sayı olmak üzere p^r elemanlı $F = GF(p^r)$ Galois cismi, mertebesi $n = p^r$ olan sonlu bir projektif düzlem belirtir ve bu $P_2F = PG(2, p)$ biçiminde gösterilir.

Teorem: (*Bruck-Ryser*) Eğer $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$ yada $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)$ ise ve n negatif olmayan iki tamsayının kareleri toplamı olarak yazılamıyorsa mertebesi n olan bir projektif düzlem yoktur.

Bu teoreme göre $6, 14, 21, 22, 30, 33, 38, 42, 46, 54, 57, \ldots$ gibi sonsuz çokluktaki sayılardan hiç biri bir projektif düzlemin mertebesi değildir.

$F = GF(2)$ olmak üzere $P_2F = PG(2,2)$ projektif düzleminin noktalar kümesi N, doğrular kümesi D ve üzerinde bulunma bağıntısı $\circ$ olmak üzere aşağıdaki gibidir:

N = $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)$

D = $[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1],[1,1,0],[1,0,1],[0,1,1],[1,1,1]$

$[0,0,1] \circ (0,1,0), (1,0,0), (1,1,0)$

$[0,1,0] \circ (0,0,1), (1,0,0), (1,0,1)$

$[1,0,0] \circ (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1)$

$[0,1,1] \circ (0,1,1), (1,0,0), (1,1,1)$

$[1,0,1] \circ (0,1,0), (1,0,1), (1,1,1)$

$[1,1,0] \circ (0,0,1), (1,1,0), (1,1,1)$

$[1,1,1] \circ (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)$

Cisim Genişlemesi

F herhangi bir cisim olsun. $p(x)$, bu cisim üzerinde derecesi $n>1$ olan indirgenemez polinom olsun.

$S = \{k(x) : k(x), F$ cisminde derk$(x) < n$ olan polinom$\}$

polinomlar kümesini göz önüne alalım. S üzerinde $\oplus$ ve $\otimes$ işlemleri şöyle tanımlanıyor:

"$k(x) \oplus k'(x) = t(x)$" demek, $k(x)$ ve $k'(x)$ polinomlarının aynı dereceli terimlerinin katsayıları F nin toplama işlemine göre toplanarak elde edilen sayı $t(x)$ in aynı dereceli terimine katsayı olarak verilmesidir.

"$k(x) \otimes k'(x) = ç(x)$" demek, katsayıları F cisminin elemanları olduğu göz önünde bulundurularak $k(x)$ ve $k'(x)$ polinomlarının çarpılması sonrada $p(x)$ modülüne göre indirgenmesiyle elde edilen kalanın $ç(x)$ olması demektir. $x \notin F$ olduğundan ve S nin her elemanı, $a_i \in F$ olmak üzere $a_0 + a_1x + ... + a_{n-1}x^{n-1}$ biçiminde ifadeedilebileceğinden, sonlu ve karakteristiği p olan F asal cisminden elde edilecek S nin p^n elemanı vardır. $(S, \oplus, \otimes)$ sistemi $GF(p^n)$ cismine izomorftur.

$GF(2^2)$ cismine izomorf olan $(S, \oplus, \otimes)$ yapısı şöyle inşa edilir:

$F = GF(2)$ cismi üzerinde $p(x) = x^2 + x + 1$ indirgenemez bir polinom olsun. $t,\ t \notin GF(2)$ *ve* $p(t) = t^2 + t + 1 = 0$ denkleminin bir kökü olmak üzere

$$S = \{at + b : a, b \in F, t^2 + t + 1 = 0\} = \{0, 1, t, t^2\}$$

dir. S üzerinde $\oplus$ ve $\otimes$ işlemleri

$\oplus$	0	1	t	t^2
0	0	1	t	t^2
1	1	0	t^2	t
t	t	t^2	0	1
t^2	t^2	t	1	0

$\otimes$	0	1	t	t^2
0	0	0	0	0
1	0	1	t	t^2
t	0	t	t^2	1
t^2	0	t^2	1	t

tabloları verilir. Böylece $(S, \oplus, \otimes)$ yapısı $GF(2^2)$ cismine izomorf olan bir cisimdir.

Bu $(S, \oplus, \otimes)$ cisminin elemanlarıyla cebirsel olarak oluşturulan projektif düzlem $PG(2, 2^2) = PG(2,4)$ ün noktalar kümesi N, doğrular kümesi D ve üzerinde bulunma bağıntısı $\circ$ aşağıdaki gibidir:

N = $N_0, N_1, ..., N_{20}$ olmak üzere

$N_0 = (0,1,0)$ $N_1 = (0,0,1)$ $N_2 = (0,1,1)$ $N_3 = (0,1,t^2)$ $N_4 = (0,1,t)$ $N_5 = (1,1,1)$ $N_6 = (1,0,1)$
$N_7 = (1,t,1)$ $N_8 = (1,t^2,0)$ $N_9 = (1,1,0)$ $N_{10} = (1,1,t^2)$ $N_{11} = (1,1,t)$ $N_{12} = (1,t,t^2)$ $N_{13} = (1,t^2,t)$
$N_{14} = (1,0,0)$ $N_{15} = (1,t,0)$ $N_{16} = (1,t^2,0)$ $N_{17} = (1,0,t^2)$ $N_{18} = (1,0,t)$ $N_{19} = (1,t^2,t^2)$ $N_{20} = (1,t,t)$
dir,

$\mathsf{D} = D_0, D_1, ..., D_{20}$ olmak üzere

$D_0 = [1,0,0]$, $D_1 = [1,0,1]$, $D_2 = [0,0,1]$, $D_3 = [1,0,t]$, $D_4 = [1,0,t^2]$, $D_5 = [1,1,0]$, $D_6 = [0,1,0]$,
$D_7 = [1,t,0]$, $D_8 = [1,t^2,0]$, $D_9 = [0,1,1]$, $D_{10} = [1,t^2,t]$, $D_{11} = [1,t,t^2]$, $D_{12} = [1,1,1]$, $D_{13} = [1,t,t]$,
$D_{14} = [1,t^2,t^2]$, $D_{15} = [1,t^2,1]$, $D_{16} = [1,t,1]$, $D_{17} = [1,1,t^2]$, $D_{18} = [1,1,t]$, $D_{19} = [0,1,t^2]$, $D_{20} = [0,1,t]$.
dir,

$D_0 \circ N_0, N_1, N_2, N_3, N_4,$
$D_1 \circ N_0, N_5, N_6, N_7, N_8,$
$D_2 \circ N_0, N_9, N_{14}, N_{15}, N_{16},$
$D_3 \circ N_0, N_{10}, N_{12}, N_{17}, N_{19},$
$D_4 \circ N_0, N_{11}, N_{13}, N_{18}, N_{20},$
$D_5 \circ N_1, N_5, N_9, N_{10}, N_{11},$
$D_6 \circ N_1, N_6, N_{14}, N_{17}, N_{18},$
$D_7 \circ N_1, N_8, N_{13}, N_{16}, N_{19},$
$D_8 \circ N_1, N_7, N_{12}, N_{15}, N_{20},$
$D_9 \circ N_2, N_5, N_{14}, N_{19}, N_{20},$
$D_{10} \circ N_4, N_5, N_{13}, N_{15}, N_{17},$
$D_{11} \circ N_3, N_5, N_{12}, N_{16}, N_{18},$
$D_{12} \circ N_2, N_6, N_9, N_{12}, N_{13},$
$D_{13} \circ N_2, N_7, N_{11}, N_{16}, N_{17},$
$D_{14} \circ N_2, N_8, N_{10}, N_{15}, N_{18},$
$D_{15} \circ N_3, N_6, N_{11}, N_{15}, N_{19},$
$D_{16} \circ N_4, N_6, N_{10}, N_{16}, N_{20},$
$D_{17} \circ N_4, N_7, N_9, N_{18}, N_{19},$
$D_{18} \circ N_3, N_8, N_9, N_{17}, N_{20},$
$D_{19} \circ N_4, N_8, N_{11}, N_{12}, N_{14},$
$D_{20} \circ N_3, N_7, N_{10}, N_{13}, N_{14}.$

Projektif Uzaylar

Tanım: $V = V(n+1, \mathsf{F})$ bir F cismi üzerinde n+1 boyutlu bir vektör uzayı olsun. $V - \{0\}$ daki vektörler üzerinde bir $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $Y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in V - \{0\}$ ve $\forall t \in \mathsf{F} - 0$ için $X \sim Y \Leftrightarrow y_i = tx_i$, $i = 1,2,...,n$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. $V - \{0\}$ daki denklik sınıfları, V nin orijini çıkarılmış 1-boyutlu alt uzaylarıdır. Bu denklik sınıflarının kümesine F cismi üzerinde n-boyutlu projektif uzay denir ve $PG(n, \mathsf{F})$ ile gösterilir.

Eğer $\mathsf{F} = GF(q)$ alınırsa oluşan n-boyutlu projektif uzay $PG(n,q)$ ile gösterilir ve projektif uzayın mertebesi q olur.

$PG(n, \mathsf{F})$ nın elemanlarına projektif uzayın noktaları denir ve $P(X)$ ile gösterilir. $P(X)$, X vektörünün denklik sınıfı olmak üzere X e $P(X)$ i temsil eden vektör denir.

$X_1, X_2, ..., X_r$ vektörlerinin kümesi lineer bağımsız ise $P(X_1), P(X_2), ..., P(X_r)$ noktaları da lineer bağımsızdır.

Tanım: $PG(n, F)$ nın m-boyutlu bir alt uzayı, $V = V(n+1, K)$ vektör uzayının (m+1)-boyutlu bir alt uzayını oluşturan
vektörlerin temsil ettiği noktalar kümesidir.

Yani, 0-boyutlu alt uzay bir nokta, 1- boyutlu alt uzay bir doğru, 2- boyutlu alt uzay bir düzlem, …, (n-1)-boyutlu alt uzay bir hiperdüzlemdir.

Tanım: Bir hiperdüzlem, $\sum_{i=0}^{n} a_i x_i = 0$ denklemini sağlayan $X = (x_0, x_1, ..., x_n)$ vektörlerinin temsil ettiği $P(X)$ noktalar kümesidir.

Tanım: Bir *m*-uzay π_m, $(t_0, t_1, ..t_m) \in K^{m+1} - \{(0,0,...,0)\}$ olmak üzere (m+1)-lineer bağımsız $X_0, X_1, ...X_m$ vektörlerinin oluşturduğu, yani $t_0 X_0 + t_1 X_1 + ... + t_m X_m$ vektörleri tarafından temsil edilen noktalar kümesidir.

$PG(n, F)$ nın alt uzayları için aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

a) π_r, π_s $PG(n, F)$ nın alt uzayları ise π_r ile π_s nin arakesiti $\pi_r \cap \pi_s$ de bir alt uzaydır.
b) π_r ve π_s nin birleşimi $\pi_r . \pi_s$ olup, bu alt uzay π_r ve π_s yi içeren en küçük alt uzaydır.
c) $\pi_r \cap \pi_s = \pi_t$ ve $\pi_r . \pi_s = \pi_m$ ise $r + s = t + m$ dir.
d) π_r ve $\pi_{r'}$ $PG(n, F)$ da iki r – uzay ve $\pi_r \subset \pi_{r'}$ ise $\pi_r = \pi_{r'}$ dür.
e) π_m alt uzayı m+1 tane lineer bağımsız noktanın birleşimidir veya π_m alt uzayı ,n-boyutlu projektif uzayda n-m tane lineer bağımsız hiperdüzlemin arakesitidir.

$F = GF(q)$ olmak üzere $PG(n, q)$ projektif uzayının r-uzaylarının kümesi $PG^{(r)}(n, q)$ ile gösterilir ve bu r-boyutlu altuzayların sayısı $\Phi(r; n, q) = \left| PG^{(r)}(n, q) \right|$ dır. Bununla ilgili bazı kombinatöryal sonuçlar aşağıda verilmektedir:

$$PG^{(0)}(n, q) = PG(n, q)$$

dır. Yani 0-uzaylarının kümesi projektif uzayı oluşturur.

Ayrıca $PG(n, q)$ nun toplam nokta sayısı $\theta(n) = \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \Phi(0; n, q)$ dir.

$$[r, s] = \begin{cases} \prod_{i=r}^{s} (q^i - 1), & s \geq r \\ 1, & s < r \end{cases} \quad \text{olmak üzere,}$$

1) $PG(n, q)$ da r-boyutlu alt uzayların sayısı $\Phi(r; n, q) = \dfrac{[n - r + 1, n + 1]}{[1, r + 1]}$ dir.

2) $PG(n, q)$ da s-boyutlu alt uzayı kapsayan r-boyutlu alt uzayların sayısı $\chi(s, r; n, q) = \dfrac{[r - s + 1, n - s]}{[1, n - r]}$ dir.

Özel olarak,

a) Bir doğru üzerindeki nokta sayısı $\Phi(0; 1, q) = q + 1$,
b) Bir düzlemdeki nokta ve doğru sayısı $\Phi(0; 2, q) = \Phi(1; 2, q) = q^2 + q + 1$,
c) $PG(3, q)$ da toplam nokta ve düzlem sayısı $\Phi(0; 3, q) = \Phi(2; 3, q) = (q + 1)(q^2 + 1)$,

d) $PG(3,q)$ da toplam doğru sayısı $\Phi(1;3,q)=(q^2+1)(q^2+q+1)$,
e) $PG(3,q)$ da bir noktadan geçen doğru sayısı $\chi(0,1;3,q)=q^2+q+1$,
f) $PG(3,q)$ da bir doğrudan geçen düzlem sayısı $\chi(1,2;3,q)=\chi(0,1;2,q)=q+1$,

dir.

Projektif Uzayda Bazı Alt Geometriler

$PG(n,q)$ da çeşitli sonlu alt geometrik yapılar belli kombinatöryal özelliklere sahip sonlu nokta kümeleri olarak verilir. Bunlardan bazıları şöyledir:

Tanım: $PG(n,q)$ projektif uzayında *k* tane π_l uzayının kümesine $(k,l)-$ küme denir.
$PG(n,q)$ da *k* tane nokta kümesi $(k,0)-$kümedir.

Tanım: $PG(n,q)$ daki en çok r –tanesi π_s uzayında olan k-tane *l*-boyutlu uzayların kümesine $(k,l;r,s;n,q)-$ küme denir.
$PG(n,q)$ da π_s de en çok *r*-tane olacak şekildeki k nokta kümesine $(k;r,s,n,q)=(k,0;r,s;n,q)-$ küme denir. Yani (r+1) tanesi aynı π_s de olamayan *k* nokta kümesidir.

Tanım: $PG(n,q)$ projektif uzayında $(r+1)$ tanesi aynı (r-1)-boyutlu uzayda olmayan k nokta kümesine $(k,r,n,q)=(k;r,r-1;n,q)-$küme denir.

Tanım: $PG(n,q)$ projektif uzayında $(r+1)$ tanesi doğrudaş olmayan *k* nokta kümesine $(k,r)-$cap denir ve $(k,r)-$cap, $(k;r,1;n,q)-$kümedir.

Tanım: $PG(n,q)$ projektif uzayında $(r+1)$ tanesi doğrudaş olmayan *k* nokta kümesine $(k,r)-$cap denir ve $(k,r)-$cap, $(k;r,1;n,q)-$kümedir.

Tanım: $PG(n,q)$ projektif uzayında $(n+1)$ tanesi aynı hiperdüzlemde olmayan k nokta kümesine $(k,r)-$arc denir ve $(k,r)-$arc , $(k;n,n-1;n,q)-$kümedir.

Tanım: $PG(2,q)$ projektif düzleminde Üçü doğrudaş olmayan *k* nokta kümesine düzlemsel $(k,r)-$arc denir ve $(k,r)-$arc , $(k;2,1;2,q)-$kümedir.

Veronesean Dönüşüm

$PG(n,F)$ projektif uzayının Veronesean tipi kuadrikleri

$V=\{P(x_0^2,x_1^2,...,x_n^2,x_0x_1,x_0x_2,...,x_0x_n,x_1x_2,...,x_1x_n,...,x_{n-1}x_n):P(x_0,x_1,...,x_n),\ PG(n,F)\ nin\ bir\ noktası\}$

kümesidir ve kısaca $PG(n,F)$ projektif uzayının Kuadrik Veronesean denir.

$$\zeta:PG(n,F)\to PG(N,F),\ N=\frac{n(n+3)}{2}\ ve\ n\geq 1,$$

$$P(x_0,x_1,...,x_n)\to P(y_{00},y_{11},...,y_{n-1,n}),\ y_{ij}=x_ix_j$$

dönüşümüne Veronesean dönüşüm denir. Bu dönüşüm $PG(n,F)$ projektif uzayının noktalarını, quadric veroneseanlara birebir-örten olarak eşler . Yani $PG(n,F)$ projektif uzayının $P(x_0,x_1,...,x_n)$ noktalarını

$PG(\frac{n(n+3)}{2}, F)$ projektif uzayının $P(x_0^2, x_1^2, ..., x_n^2, x_0x_1, x_0x_2, ..., x_0x_n, x_1x_2, ..., x_1x_n, ..., x_{n-1}x_n)$ noktalarına eşler.

Teorem: Kuadrik Veroneseanların mertebesi 2^n dir ve $V_n^{2^n}$ ile veya daha kısaca V_n ile gösterilir.

Özel olarak;
$n=1$ iken V_1^2 veronesean, $PG(2,F)$ bir koniktir.
$n=2$ iken veronesean $PG(5,F)$ de 4. mertebeden bir V_2^4 yüzeyidir.
$n=3$ iken veronesean $PG(9,F)$ da mertebesi 8 ve boyutu 3 olan V_3^8 yapısıdır.

Teorem: $|V_n| = \theta(n)$ dir.
Yani V_n quadric veroneseanların eleman sayısı $PG(n,F)$ projektif uzayının toplam nokta sayısı olan $\theta(n)$ dir.

Özel olarak, $F = GF(q)$ olmak üzere
$n=1$ iken $|V_1| = \theta(1) = q+1$ dir.
$n=2$ iken $|V_2| = \theta(2) = q^2+q+1$ dir.

Teorem: Bir kuadrik Veronesean V_n, $N = \frac{n(n+3)}{2}$ olmak üzere $PG(N,F)$ projektif uzayının bir $\theta(n)$-capidir.
Yani bir kuadrik Veronesean V_n herhangi üçü doğrudaş olmayan $\theta(n)$ tane nokta kümesidir.

Teorem: $PG(n,F)$ projektif uzayının herhangi bir s-boyutlu altuzayı Π_s olsun. Veronesean dönüşüm altında Π_s nin görüntüsü V_s kuadrik veroneseanıdır. V_s, V_s yi içeren $PG(\frac{s(s+3)}{2}, F)$ projektif uzayı ile V_n kuadrik veroneseanın arakesitidir.
Özel olarak, $PG(n,F)$ projektif uzayının doğruları Veronesean dönüşüm altında V_n nin koniklerine dönüşür.

Teorem: V_n kuadrik Veroneseanının herhangi iki noktası V_n nin bir tek koniğinde içerilir.

Teorem: $F = GF(q)$ olmak üzere $PG(n,F)$ projektif uzayında V_n kuadrik veroneseanı $\Phi(s;n,q)$ tane V_s kuadrik veronesean içerir.
V_n veroneseanındaki V_s kuadrik veroneseanlarının sayısı, $PG(n,q)$ daki s-boyutlu altuzayların sayısı kadardır.
Özel olarak, $n=2$ iken $PG(5,q)$ deki V_2^4 kuadrik veroneseanında $s=1$ iken q^2+q+1 tane V_1^2 veronesean (konik) vardır.
V_2^4 nin herhangi iki noktası bu V_1^2 veroneseandan sadece birinin üzerindedir. V_2^4 nin V_1^2 veroneseanları $PG(2,q)$ projektif düzleminin doğrularıyla eşleştiğinden, bu koniklerin herhangi ikisi bir tek ortak noktaya sahiptir.
V_2^4 kuadrik veroneseanının hiper düzlemsel kesitleri $PG(2,q)$ projektif düzlemininin kuadriklerine karşılık gelir.
$PG(2,q)$ nın bir $\mathcal{C}$ kuadriği bir doğru olarak ele alınacaksa, bu $PG(5,q)$ projektif uzayının hiperdüzleminin V_2^4 ile bir V_1^2 veroneseanda kesişmesine karşılık gelmesidir. Eğer $\mathcal{C}$ iki farklı doğru ise hiperdüzlem V_2^4'ü bir tek ortak noktaya sahip olan iki V_1^2 veroneseanda kesişir.

$PG(5,q)$ projektif uzayının düzlemleri V_2^4 i bir V_1^2 veroneseanda (konikte) keser, bu düzlemlere konik düzlemleri denir.

Teorem: V_2^4 ün herhangi iki konik düzlemi V_2^4 ' e ait bir tek ortak noktaya sahiptir.
V_2^4 'ün kuadriklerinin teğetlerine V_2^4 ' ün teğetleri denir. V_2^4 ' ün P noktasındaki bütün teğetleri $\pi(P)$ düzlemindedir. $\pi(P)$ düzlemine V_2^4 ' ün P noktasındaki teğet düzlemi denir. V_2^4 ' ün P noktasından $q+1$ konik geçtiğinden ve P noktasından geçen herhangi iki konik düzlemini bir doğru boyunca kesişmediğinden $\pi(P)$ teğet düzlemi, V_2^4 ' ün P noktasından geçen $q+1$ teğet doğrudan oluşur. Üstelik, $\pi(P) \cap V_2^4 = P$ dir.

Teorem: V_2^4 ün herhangi iki farklı P_1 ve P_2 noktaları için $\pi(P_1)$ ve $\pi(P_2)$ teğet düzlemleri tam olarak bir ortak noktaya sahiptir.

Teorem: V_2^4 ün konik düzlemlerinin birleşimi,

$$F = \begin{vmatrix} y_{00} & y_{01} & y_{02} \\ y_{01} & y_{11} & y_{12} \\ y_{02} & y_{12} & y_{22} \end{vmatrix} = 0$$

denklemli M_4^3 yapısıdır.

Teorem: M_4^3 de q^2+q+1 q^2+1 nokta vardır.
Eğer karakteristik 2 alınırsa

$$F = \begin{vmatrix} y_{00} & y_{01} & y_{02} \\ y_{01} & y_{11} & y_{12} \\ y_{02} & y_{12} & y_{22} \end{vmatrix} = 0$$

denklemi

$$F = y_{00}y_{11}y_{22} + y_{00}y_{12}{}^2 + y_{11}y_{02}{}^2 + y_{22}y_{01}{}^2$$

dir.
Bu durumda M_4^3, V_2^4 ile ortak noktası olmayan $U_3U_4U_5$ düzlemini içerir.

Teorem: Karakteristik 2 olmak üzere V_2^4 ün her bir teğet düzlemi ile $U_3U_4U_5$ düzlemi bir doğru boyunca, her bir konik düzlemi ile $U_3U_4U_5$ düzlemi bir noktada kesişir ve $U_3U_4U_5$, V_2^4 ün koniklerinin çekirdeklerini(nuclei) içerir.

$PG(4,4)$ **Projektif Uzayındaki 4.Mertebeden Projektif Düzlemler**

Bu bölümde önce $PG(4,4)$ Veronesean dönüşümün izdüşümü olan 4.mertebeden P projektif düzlem belirlenecektir. Daha sonra $PG(4,4)$ de seçilen üç konik ve bunlara karşılık gelen konik düzlemleri üzerindeki noktalarla 4.mertebeden S projektif düzlemi inşa edilecektir.

$$\theta : PG(2,q) \to PG(5,q)$$
$$(x_0,x_1,x_2) \to \theta(x_0,x_1,x_2) = (x_0^2,x_1^2,x_2^2,x_0x_1,x_0x_2,x_1x_2)$$

Veronesean dönüşüm ile herhangi bir q.mertebeden bir projektif düzlem 5-boyutlu projektif uzaya gömülebilmektedir.

q =4 iken Veronesean dönüşüm

$$\theta : PG(2,4) \to PG(5,4)$$
$$(x,y,z) \to (x^2,y^2,z^2,xy,xz,yz)$$
$$N_i \to \theta(N_i) = P_i$$

dır. Dolayısıyla $PG(2,4)$ projektif düzleminin N_i noktalarının θ Veronesean dönüşümü altında görüntüleri $\theta(N_i) = P_i$ noktaları aşağıdaki gibidir:

$N_0 = (0,1,0) \to P_0 = (0,1,0,0,0,0)$
$N_1 = (0,0,1) \to P_1 = (0,0,1,0,0,0)$
$N_2 = (0,1,1) \to P_2 = (0,1,1,0,0,1)$
$N_3 = (0,1,t^2) \to P_3 = (0,1,t,0,0,t^2)$
$N_4 = (0,1,t) \to P_4 = (0,1,t^2,0,0,t)$
$N_5 = (1,1,1) \to P_5 = (1,1,1,1,1,1)$
$N_6 = (1,0,1) \to P_6 = (1,0,1,0,1,0)$
$N_7 = (1,t,1) \to P_7 = (1,t^2,1,t,1,t)$
$N_8 = (1,t^2,0) \to P_8 = (1,t,0,t^2,0,0)$
$N_9 = (1,1,0) \to P_9 = (1,1,0,1,0,0)$
$N_{10} = (1,1,t^2) \to P_{10} = (1,1,t,1,t^2,t^2)$
$N_{11} = (1,1,t) \to P_{11} = (1,1,t^2,1,t,t)$
$N_{12} = (1,t,t^2) \to P_{12} = (1,t^2,t,t,t^2,1)$
$N_{13} = (1,t^2,t) \to P_{13} = (1,t,t^2,t^2,t,1)$
$N_{14} = (1,0,0) \to P_{14} = (1,0,0,0,0,0)$
$N_{15} = (1,t,0) \to P_{15} = (1,t^2,0,t,0,0)$
$N_{16} = (1,t^2,1) \to P_{16} = (1,t,1,t^2,1,t^2)$
$N_{17} = (1,0,t^2) \to P_{17} = (1,0,t,0,t^2,0)$
$N_{18} = (1,0,t) \to P_{18} = (1,0,t^2,0,t,0)$
$N_{19} = (1,t^2,t^2) \to P_{19} = (1,t\ ,t,t^2,t^2,t)$
$N_{20} = (1,t,t) \to P_{20} = (1,t^2,t^2,t,t,t^2)$

$PG(5,4)$ projektif uzayında $\theta(N_i) = P_i$ noktaları V_2^4 ü oluşturur. V_2^4 de toplam 21 nokta bulunmaktadır. Aynı zamanda $PG(5,4)$ daki V_2^4 kuadrik veroneseanında 21 tane V_1^2 veronesean (konik) bulunmaktadır.
$PG(5,4)$ da V_2^4 de bulunmayan $P = (1,1,1,0,0,0)$ noktasını göz önüne alınsın.
$PG(5,4)$ uzayının noktalarının P noktasından $x_0 = 0$ hiperdüzlemi üzerine izdüşümü $PG(5,4)$ nin her X noktası için XP doğrusu ile $x_0 = 0$ hiperdüzleminin arakesitidir.
Bu izdüşüm

$$\begin{aligned} \beta: \quad PG(5,4) &\rightarrow PG(4,4) \\ P_i = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &\rightarrow \beta(P_i) = (x_0 + x_1, x_0 + x_2, x_3, x_4, x_5) \end{aligned}$$

biçimindedir.

$PG(5,4)$ uzayının $x_0 = 0$ hiperdüzlemi 4-boyutlu projektif uzaydır.
Yukarıda elde ettiğimiz $PG(5,4)$ in V_2^4 kuadrik veroneseanın $x_0 = 0$ hiperdüzlemine izdüşümünü bulalım.
P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 noktaları $x_0 = 0$ hiperdüzlemi üzerinde olduğundan izdüşümlerinin kendileridir. Diğer noktalar aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\beta(P_5) = \beta(1,1,1,1,1,1) = P_5' = (0,0,1,1,1)$$
$$\beta(P_6) = \beta(1,0,1,0,1,0) = P_6' = (1,0,0,1,0)$$
$$\beta(P_7) = \beta(1,t^2,1,t,1,t) = P_7' = (t,0,t,1,t)$$
$$\beta(P_8) = \beta(1,t,0,t^2,0,0) = P_8' = (t^2,1,t^2,0,0)$$
$$\beta(P_9) = \beta(1,1,0,1,0,0) = P_9' = (0,1,1,0,0)$$
$$\beta(P_{10}) = \beta(1,1,t,1,t^2,t^2) = P_{10}' = (0,t^2,1,t^2,t^2)$$
$$\beta(P_{11}) = \beta(1,1,t^2,1,t,t) = P_{11}' = (0,t,1,t,t)$$
$$\beta(P_{12}) = \beta(1,t^2,t,t,t^2,1) = P_{12}' = (t,t^2,t,t^2,1)$$
$$\beta(P_{13}) = \beta(1,t,t^2,t^2,t,1) = P_{13}' = (t^2,t,t^2,t,1)$$
$$\beta(P_{14}) = \beta(1,0,0,0,0,0) = P_{14}' = (1,1,0,0,0)$$
$$\beta(P_{15}) = \beta(1,t^2,0,t,0,0) = P_{15}' = (t,1,t,0,0)$$
$$\beta(P_{16}) = \beta(1,t,0,t^2,0,0) = P_{16}' = (t^2,1,t^2,0,0)$$
$$\beta(P_{17}) = \beta(1,0,t,0,t^2,0) = P_{17}' = (1,t^2,0,t^2,0)$$
$$\beta(P_{18}) = \beta(1,0,t^2,0,t,0) = P_{18}' = (1,t,0,t,0)$$
$$\beta(P_{19}) = \beta(1,t,t,t^2,t^2,t) = P_{19}' = (t^2,t^2,t^2,t^2,t)$$
$$\beta(P_{20}) = \beta(1,t^2,t^2,t,t,t^2) = P_{20}' = (t,t,t,t,t^2)$$

Böylece $PG(2,4)$ projektif düzleminin tüm N_i noktaları θ Veronesean dönüşüm ile V_2^4 kuadrik veroneseanın noktalarına ve β izdüşümü ile V_2^4 deki noktalar $x_0 = 0$ hiperdüzlemindeki noktalara dönüşür ki bu noktalar $PG(4,4)$ projektif uzayının noktalarıdır.
Aynı şekilde $PG(2,4)$ projektif düzleminin tüm D_i doğruları θ Veronesean dönüşüm ile V_2^4 kuadrik veroneseanın V_1 veroneseanlarına (koniklere) ve β izdüşümü ile V_2^4 deki V_1 veroneseanlarına (konikler) $x_0 = 0$ hiperdüzlemindeki koniklere dönüşür ki bunlar $PG(4,4)$ projektif uzayındadır, öyleki $\beta \circ \theta$ dönüşümü $PG(2,4)$ projektif düzleminin üzerinde bulunma yapısını korur.

$$\begin{aligned} \beta\circ\theta: \quad & PG(2,4) \rightarrow PG(4,4) \\ & (x,y,z) \rightarrow \beta\circ\theta(x,y,z)=(x^2+y^2, x^2+z^2, xy, yz, zx) \end{aligned}$$

dönüşümünün birebir olduğunu gösterelim.

Kabul edelimki her x,y,z , $x',y',z' \in PG(2,4)$ için $\beta\circ\theta\ x,y,z = \beta\circ\theta\ x',y',z'$ olsun. Bu durumda

$$(x^2+y^2, x^2+z^2, xy, yz, zx) = ((x')^2+(y')^2, (x')^2+(z')^2, x'y', y'z', z'x')$$

dır.

$$x^2+y^2=(x')^2+(y')^2$$

eşitliğini

$$x^2+2xy+y^2=(x')^2+2x'y'+(y')^2$$

olarak yazabiliriz. Buradan

$$(x+y)^2=(x'+y')^2$$
$$x+y=x'+y'$$
$$y'=x'+x+y \qquad (1)$$

dir. Aynı şekilde

$$z^2+x^2=(z')^2+(x')^2$$

eşitliğinden

$$z'=z+x+x' \qquad (2)$$

elde edilir.

$$xy=x'y'$$

eşitliğinde (1) kullanıldığında

$$xy=x'(x+x'+y)$$
$$xy=x'x+(x')^2+x'y \qquad (3)$$

elde edilir. Benzer şekide

$$zx=z'x'$$

eşitliğinde (2) kullanılırsa

$$zx=(z+x+x')x'$$
$$zx=zx'+xx'+(x')^2 \qquad (4)$$

elde edilir.

$$yz=y'z'$$

eşitliğinde (1) ve (2) kullanıldığında

$$yz=(x'+x+y)(z+x+x')$$
$$yz=x'z+x'x+(x')^2+xz+x^2+xx'+yz+yx+yx'$$
$$x'z+(x')^2+xz+x^2+yx+yx'=0 \qquad (5)$$

elde edilir.

$$xy+zx=x'y'+z'x'$$

olup ,

$$x(y+z)=x'(y+z)$$

dir. Burada $y+z\neq 0$ iken $x=x'$ olup, $y=y'$ ve $z=z'$ dir.
Eğer $y+z=0$ (yani $y=z$) iken (1) ve (2) den $y'=z'$ dir. (5) den

$$y^2=(x'+x+y)^2$$

olup

$$y=x'+x+y$$
$$x=x'$$

elde edilir. Dolayısıyla $y = y'$ ve $z = z'$ dir. Böylece $\beta \circ \theta$ dönüşümü birebirdir.

$PG(2,4)$ projektif düzleminin $\beta \circ \theta$ dönüşümü altındaki görüntüsü , $PG(5,4)$ projektif uzayındaki V_2^4 kuadrik veroneseanının $x_0 = 0$ hiperdüzlemine izdüşümüdür. Yani, $\beta \circ \theta(PG(2,4)) = \beta(V_2^4) = P \subset PG(4,4)$ olduğundan

$\forall\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \in \beta(V_2^4) = P$ için $\beta \circ \theta(x, y, z) = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ olacak şekilde

$$x = 1, y = y_3, z = y_4, {y_3}^2 = y_1 + 1, {y_4}^2 = y_2 + 1, y_5 = y_3 y_4$$

bulunur ki $\beta \circ \theta$ nin örten olduğunu gösterir.

Böylece $PG(2,4)$ projektif düzlemi, $\beta \circ \theta$ dönüşümü ile $PG(4,4)$ projektif uzayındaki bir P yapısına dönüşür. P geometrik yapısında $PG(4,4)$ projektif uzayının 21 noktası ve 21 tane V_1 veroneseanların izdüşümü olan konikleri bulunmaktadır. Üstelik P geometrik yapısındaki her bir konik üzerinde herhangi üçü doğrudaş olmayan 5 nokta vardır. Bu yüzden P deki noktalar $\langle P \rangle = PG(4,4)$ özelliğindedir.

V_2 kuadrik Veroneseanının herhangi iki farklı noktası V_2 nin bir tek V_1 veroneseanında (koniğinde) içerilir. V_2 nin V_1 veroneseanları $PG(2,4)$ projektif düzleminin doğrularıyla eşleştiğinden, bu koniklerin herhangi ikisi bir tek ortak noktaya sahiptir. V_2 nin her V_1 veroneseanında herhangi üçü doğrudaş olmayan 5 nokta olduğundan elde edilen P geometrik yapısı bir projektif düzlemdir. P projektif düzlemi noktalar kümesi $PG(2,4)$ ün noktalarının Veronesean görüntülerinin izdüşümleridir. P projektif düzlemi doğrular kümesi V_1 veroneseanlarının izdüşümleri olan konikler olarak düşünülmektedir.

Böylece $PG(4,4)$ projektif uzayında Veronesean dönüşümün izdüşümü olan P 4.mertebeden projektif düzlemi elde edilir. Üstelik P 4.mertebeden projektif düzlemi $PG(2,4)$ projektif düzlemine izomorftur.

$PG(5,4)$ projektif uzayının düzlemleri V_2^4 i bir V_1^2 veroneseanda (konikte) keser, bu düzlemler konik düzlemleridir.

Şimdi $PG(4,4)$ projektif uzayında konik düzlemleri, dolayısıyla konikleri ve üzerindeki noktaları gözününe alacağız.

Bir projektif düzlemin tüm noktaları ve doğruları, doğrudaş olmayan farklı üç doğru ve onların üzerindeki noktalarla tek türlü belirlenebileceği için $PG(4,4)$ projektif uzayında farklı üç konik ve üzerindeki noktaları seçiyoruz. Bu üç koniğin her biri üzerinde üçü doğrudaş olmayan 5 nokta vardır. Bu seçilen noktaların lineer bağımsız herhangi beş tanesi $PG(4,4)$ projektif uzayını oluşturur.

$PG(4,4)$ de seçilen üç koniğin belirlediği konik düzlemleri D_0, D_1, D_5 ve bunların ikişer ikişer arakesitleriyle elde edilen noktalar N_0, N_1, N_5 olsun.

Denklemi $x_4^2 = x_0 x_1$ olan koniği içeren konik düzlemindeki D_0 ise bu düzlemin noktaları

$$N_0 = (1,0,0,0,0)$$
$$N_1 = (0,1,0,0,0)$$
$$N_2 = (1,1,0,0,1)$$
$$N_3 = (1,t,0,0,t^2)$$

ve koniğin nucleusu $(0,0,0,0,1)$ dir.

Denklemi $x_2^2 + x_3^2 + x_0 x_3 = 0$ olan koniği içeren konik düzlemi D_1 ise bu düzlemin noktaları

$$N_0 = (1,0,0,0,0)$$
$$N_5 = (0,0,1,1,1)$$
$$N_6 = (1,0,0,1,0)$$
$$N_7 = (t,0,t,1,t)$$
$$N_8 = (t^2,1,t^2,0,0)$$

ve koniğin nucleusu $(0,0,10,1)$ dir.

Denklemi $x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 = 0$ olan koniği içeren konik düzlem D_5 ise bu düzlemin noktaları

$$N_1 = (0,1,0,0,0)$$
$$N_5 = (0,0,1,1,1)$$
$$N_9 = (0,1,1,0,0)$$
$$N_{10} = (0,t^2,1,t^2,t^2)$$
$$N_{11} = (0,t,1,t,t)$$

ve koniğin nucleusu $(0,0,0,1,1)$ dır.

Böylece $PG(4,4)$ de seçilen üç konik ve bunların konik düzlemleri ile $S = (N', D', \in)$ geometrik yapısının 11 noktası seçilmiş olur. $PG(4,4)$ projektif uzayında 21 nokta ve 21 konik düzlemi bulmak istiyoruz, öyleki bunlar $S = (N', D', \in)$ geometrik yapısını oluşturacaktır. $S = (N', D', \in)$ geometrik yapısının geri kalan nokta ve konik düzlemleri , konik düzlemi tam olarak 21 noktanın beş noktasını içerecek ve iki konik düzlemi 21 noktanın mutlaka bir tanesinde kesişecek şekilde bulunacaktır.

$D_{12} = \langle N_2, N_6, N_9 \rangle$ ve $D_{20} = \langle N_3, N_7, N_{10} \rangle$ konik düzlemlerinin arakesit noktasına N_{13} dersek sırasıyla bu iki düzlemin denklemi

$D_{12} = \langle N_2, N_6, N_9 \rangle$ olduğundan $\forall (y_0, y_1, y_2, y_3, y_4) \in D_{12}$ için $(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4) = aN_2 + bN_6 + cN_9$ olup,

$$y_0 = y_3 + y_4$$
$$y_1 = y_2 + y_4$$

dir ve

$D_{20} = \langle N_3, N_7, N_{10} \rangle$ olduğundan $\forall (y_0, y_1, y_2, y_3, y_4) \in D_{20}$ için $(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4) = aN_3 + bN_7 + cN_{10}$ olup,

$$y_3 = t^2 y_2$$
$$y_4 = y_0 + y_1$$

dir. Bu düzlemlerinin arakesit noktası $N_{13} = (1,t^2,1,t^2,t)$ elde edilir.

Benzer şekilde $D_{14} = \langle N_2, N_8, N_{10} \rangle$ olduğundan bu düzlemin denklemi

$$y_2 = y_0 t + y_1 + y_4 t^2$$
$$y_4 = y_0 + y_1 t + y_4 t^2$$

ve

$D_{15} = \langle N_3, N_6, N_{11} \rangle$ olduğundan bu düzlemin denklemi

$$y_3 = y_0 + t^2(y_1 + y_2)$$
$$y_4 = y_2 + y_1 t$$

olarak bulunur. Bu düzlemlerinin arakesit noktası $N_{15} = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv (x_0, x_1, x_0, x_0 t + x_1 t^2, x_0 + x_1 t)$ elde edilir. $x_1 \neq 0 \Rightarrow k = \frac{x_0}{x_1}$ alınırsa $N_{15} = (k, 1, k, kt + t^2, k + t)$ olarak bulunur.

Diğer yandan N_{14} noktasının sırasıyla N_0, N_9, N_{15} noktaları ve N_3, N_7, N_{10} noktaları tarafından gerilen D_2 ve D_{20} düzlemlerinin arakesiti olduğu göz önüne alınırsa

$$D_2 : \begin{cases} y_3 = 0 \\ y_4 = 0 \end{cases}$$

ve

$$D_{20} : \begin{cases} y_2 = y_3 t \\ y_4 = y_0 + y_1 \end{cases}$$

$N_{14} = (kt + 1, k, t(t + k), (t + k), t^2(t + k))$ olarak bulunur.

$N_4 \in D_0 = \langle N_0, N_1, N_2 \rangle$ ve $N_4 \in D_{10} = \langle N_3, N_{13}, N_{15} \rangle$ olduğundan

$$D_0 : \begin{cases} y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

ve

$$D_{10} : \begin{cases} y_0 = \dfrac{kt + 1 \;\; y_1 + (y_3 + y_4)(k^2 t + 1)}{t(k + 1)} \\ y_2 = \dfrac{kt + 1 \;\; y_1 + y_3 t + y_4 kt}{t(k + 1)} \end{cases}$$

düzlemlerinin arakesit noktası $N_4 = (k^2 t + 1 + kt^2, kt^2(k + 1), 0, 0, t(k^2 t + 1 + kt^2))$ olarak bulunur. N_4 noktası $D_{19} = \langle N_4, N_8, N_{11} \rangle$ düzleminin üzerinde bir nokta olduğundan

$$k^2 + tk = 0 \ldots . (1)$$
$$(k^4 + k)t + k^3 + 1 = 0 \ldots . (2)$$

denklemleri geçerlidir ve $k \in GF(4)$ olduğundan

$k = 0$ iken (2) den 1=0 çelişkisi elde edilir.

$k = 1$ iken (1) den t=0 çelişkisi elde edilir.

$k = t$ iken (1) ve (2) sağlanır.

$k = t^2$ iken (1) den t=0 çelişkisi elde edilir.

Bu yüzden $k = t$ değeri daha önce bulunan N_{15}, N_{14} ve N_4 noktalarında yerine yazılırsa

$N_{15} = (t, 1, t, 0, 0)$, $N_{14} = (t, t, 0, 0, 0)$ ve $N_4 = (1, t^2, 0, 0, t)$ olarak elde edilir.

Geriye kalan noktaların bulunmasına devam edilirse

N_{12} noktası $D_8 = \langle N_1, N_7, N_{15} \rangle$ ve $D_{12} = \langle N_2, N_6, N_9 \rangle$ düzlemlerinin arakesit noktası olduğundan bu iki düzlemin denklemi

$$D_8 : \begin{cases} y_0 = y_2 \\ y_4 = y_3 t \end{cases}$$

ve

$$D_{12} : \begin{cases} y_0 = y_3 + y_4 \\ y_1 = y_2 + y_4 \end{cases}$$

çözülerek $N_{12} = (t, t^2, t, t^2, 1)$ noktası bulunur. Aynı zamanda $N_{12} = t^2 N_4 + t N_8 + t^2 N_{11}$ eşitliği geçerli olduğundan N_{12} noktası $D_{19} = \langle N_4, N_8, N_{11} \rangle$ düzleminin denklemini sağlar.

N_{16} noktası $D_2 = \langle N_0, N_9, N_{15} \rangle, D_7 = \langle N_1, N_8, N_{13} \rangle, D_{11} = \langle N_3, N_5, N_{12} \rangle$ düzlemlerinin arakesit noktası olup, benzer hesaplamalarla $N_{16} = (t^2, 1, t^2, 0, 0)$ bulunur.

N_{17} noktası $D_3 = \langle N_0, N_{10}, N_{12} \rangle, D_6 = \langle N_1, N_6, N_{14} \rangle, D_{10} = \langle N_4, N_5, N_{13} \rangle$ düzlemlerinin arakesit noktası olup, benzer hesaplamalarla $N_{17} = (1, t^2, 0, t^2, 0)$ bulunur.

N_{18} noktası $D_4 = \langle N_0, N_{11}, N_{13} \rangle, D_6 = \langle N_1, N_6, N_{14} \rangle, D_{11} = \langle N_4, N_5, N_{12} \rangle$ düzlemlerinin arakesit noktası olup, benzer hesaplamalarla $N_{18} = (1, t, 0, t, 0)$ bulunur.

N_{19} noktası $D_3 = \langle N_0, N_{10}, N_{12} \rangle, D_7 = \langle N_1, N_8, N_{13} \rangle$ düzlemlerinin arakesit noktası olup, benzer hesaplamalarla $N_{19} = (t^2, t^2, t^2, t^2, t)$ bulunur.

N_{20} noktası $D_4 = \langle N_0, N_{11}, N_{13} \rangle, D_8 = \langle N_1, N_7, N_{12} \rangle$ düzlemlerinin arakesit noktası olup, benzer hesaplamalarla $N_{20} = (1, 1, 1, 1, t)$ bulunur.

$PG(4,4)$ projektif uzayında $S = (N', D', \in)$ geometrik yapısının oluşumu tamamlandı. N' noktalar kümesi 21 tane N_i noktasından ve D' doğrular kümesi olarak 21 tane D_i konik düzlemlerinden (dolayısıyla D_i nin belirttiği konikten) oluşmaktadır. $S = (N', D', \in)$ geometrik yapısındaki herhangi farklı iki N_i ve N_j noktası D' nin bir tek D_k konik düzleminde bulunur. D' nin herhangi farklı iki D_i ve D_j konik düzlemleri N' nin bir tek N_k noktasında kesişir. Her bir N_i noktasından tam olarak beş D_i konik düzlemi geçer. Her bir D_i konik düzleminde tam olarak beş N_i noktası vardır. Böylece $\langle S \rangle = PG(4,4)$ olmak üzere $S = (N', D', \in)$ geometrik yapısı 4. Mertebeden projektif düzlem oluşturmaktadır . $S = (N', D', \in)$ projektif düzlemi $PG(2,4)$ projektif düzlemine izomorf olur.

$PG(4,4)$ projektif uzayında $S = (N', D', \in) \cong PG(2,4)$ ve $P \cong PG(2,4)$ olduğundan 4.mertebeden projektif düzlemleri P ve S izomorftur.

Böylece $PG(4,4)$ de $PG(2,4)$ projektif düzlemine izomorf olan $S = (N', D', \in)$ 4.mertebeden projekif düzlemi vardır , öyleki $N' \subset PG(4,4)$, $\langle N' \rangle = PG(4,4)$ ve D' nin her bir elemanı $PG(4,4)$ nin konik düzleminin bir altkümesidir .

$PG(4,4)$ de $S = (N', D', \in)$ yi bularak, $PG(2,4)$ in $PG(4,4)$ de Veronesean dönüşümün izdüşümü olarak gömülü olduğu belirlenir.

Sonuç (Bulgular)

$PG(4,4)$ projektif uzayında $PG(2,4)$ projektif düzlemine izomorf olan $S=(N',D',\in)$ 4.mertebeden projekif düzlemi vardır , öyleki $N'\subset PG(4,4)$, $\langle N'\rangle = PG(4,4)$ ve D' nin her bir elemanı $PG(4,4)$ nin konik düzleminin bir altkümesidir. $PG(4,4)$ de $S=(N',D',\in)$ yi bularak, 4.mertebeden projektif düzlemin $PG(4,4)$ de Veronesean dönüşümün izdüşümü olarak gömülü olduğu belirlenir.

Tartışma (Yorum)

Bu çalışmanın doğrultusunda 3-boyutlu uzayda veroneseanların izdüşümü olacak şekilde projektif düzlemler incelenebilir. Daha yüksek boyutlarda çalışılarak, mesela 8-boyulu projektif yzayda Veronesean dönüşümlerin izdüşümleri olan 3-boyutlu uzaylar araştırılabilir. Bunlarla incidence geometriye katkı sağlanacaktır.

Kaynaklar

[1]. R. Kaya, Projektif Geometri, *Osmangazi Üniversitesi Yayınları, Eskişehir*, 2005.

[2]. J.A. Thas and H. Van Maldeghem, Some Remarks on Embedding of the Flag Geometries of Projective Planes in Finite Projective Spaces, *Journal of Geometri, 67 (2000) 217-222.*

[3]. J.A. Thas and H. Van Maldeghem, Embeddings of Geometries in Finite Projective Spaces, *Lecture Notes.*

[4]. J.W.P. Hirschfeld, Projecive Geometries over fnite fields, *Clarendon Press. Oxford*, 1979.

[5]. J.W.P.Hirschfeld – J.A. Thas, General Galois Geometries, Springer Monographs in Mathematics, *Springer-Verlag London* 2016.

[6] Z. Akça, A. Bayar, S. Ekmekci, R. Kaya, H. Van Maldeghem Bazı Geometrilerin Sonlu Projektif Uzaylara Gömülmeleri Üzerine, 108T340 Tübitak, 2010**.**

[7] Z. Akça, A. Bayar, S. Ekmekci, R. Kaya, J.A. Thas and H. Van Maldeghem, "Generalized Veronesean embeddings of projective spaces, Part II. The lax case", *Ars Combinatoria*, Vol. CIII, pp. 65-80, (2012).

EK-I

PROJE DESTEĞİ	:	**500 TL**
HARCANAN MİKTAR	:	**500 TL**
EK DESTEK	:	**.....TL**

PROJE KAPSAMINDA ALINAN CİHAZ VE DEMİRBAŞLAR:

Bütçe Kalemleri	**Toplam**
Makine Teçhizat	0.00 TL
Sarf Malzemesi	500.00 TL
Hizmet Alımı	0.00 TL
Seyahat	0.00 TL
Yardımcı Personel	0.00 TL
Yazılım	0.00 TL
GENEL TOPLAM	500.00 TL

PROJE YÜRÜTÜCÜSÜNÜN ADI SOYADI	İMZASI	TARİH
Prof. Dr. Süheyla EKMEKÇİ		