Simetrik Olmayan Osserman Kenmotsu Manifoldların Diferensiyel Geometrisi Üzerine

Tolga Demirli

DOKTORA TEZİ

Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı

Kasım 2021

On Differential Geometry of Nonsymmetric Osserman Kenmotsu Manifolds

Tolga Demirli

DOCTORAL DISSERTATION

Deparment of Mathematics - Computer

November 2021

Simetrik Olmayan Osserman Kenmotsu Manifoldların Diferensiyel Geometrisi Üzerine

Tolga Demirli

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Cumali Ekici

Kasım 2021

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Cumali Ekici danışmanlığında hazırlamış olduğum "Simetrik Olmayan Osserman Kenmotsu Manifoldların Diferensiyel Geometrisi Üzerine" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 25/11/2021

Tolga DEMİRLİ

ÖZET

Bu tez çalışmasında, Osserman probleminin Jakobi operatörü yardımıyla Lorentzian Kenmotsu manifoldlarında incelenmesi amaçlanmıştır. Bir manifoldun Osserman manifold olması için Jakobi operatörünün özdeğerlerinin seçilen birim timelike vektörden bağımsız olması gerekmektedir. Farklı koneksiyonlar ile bazı eğrilik şartlarını sağlayan Lorentzian Kenmotsu manifoldlarında $R(X,Y)Z$ eğrilik tensörü hesaplanmış, timelike ve null Osserman manifold olma koşulları teorem olarak verilmiştir.

Altı bölümden oluşan çalışmanın Giriş ve Literatür Araştırması bölümlerinde, Osserman probleminin ortaya çıkışı ve yapılan tarihsel çalışmalar hakkında bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde, çalışmada kullanılan bazı temel tanım ve teoremlere değinilmiştir. Dördüncü ve beşinci bölümlerde, Lorentzian Kenmotsu manifoldlar ve Osserman problemi ile ilgili bazı tanım ve teoremler ispatlar ile birlikte verilmiştir. Altıncı bölümde, timelike ve null Osserman koşulu farklı koneksiyonlu Lorentzian Kenmotsu manifodlarda incelenmiş ve bazı eğrilik şartları verilerek Osserman olma koşulu ile ilgili teoremler ve sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca farklı boyutlarda timelike ve null Osserman örnekleri incelenmiş ve $(2n+1)$-boyut için genelleştirilmiş bir örnek de verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hemen hemen değme Lorentz metrik yapısı, Lorentzian Kenmotsu manifold, Jakobi operatör, timelike Osserman manifold, null Osserman

SUMMARY

In the thesis, it is intented to investigate Osserman conjecture by using Jacobi operator on Lorentzian Kenmotsu manifolds. It is known that M is Osserman manifold if the eigenvalues of Jacobi operator with respect to timelike characteristic vector are independent from the choice of the timelike vector. $R(X,Y)Z$ curvature tensor has been calculated in the case which different connections to be used and under some curvature conditions, some conclusions and theorems indicating to be timelike and null Osserman manifold have been provided.

Under Introduction and Literature Review of this study which consists of six sections, Osserman problem has been explained and some historical information related studies for this topic have been provided. In the third section, some fundemental definitions and theorems which have been used in the study have been given. Then, some theorems and results have been provided for Lorentzian Kenmotsu manifolds and Osserman conjecture under fouth and fifth sections. Timelike and null Osserman condition have been investigated for Lorentzian Kenmotsu manifold with different special connections in sixth section. Moreover, Osserman problem has been checked in some curvature conditions for Lorentzian Kenmotsu manifolds. Also some examples with different dimensions and a generalized $(2n+1)$-dimensional example have been provided.

Key Words: Almost Contact Lorentz Metric, Lorentzian Kenmotsu Manifolds, Jacobi operator, timelike Osserman manifold, null Osserman.

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Cismi
R_Z	Jakobi Operatör
g	Metrik
$S(M)$	Birim Vektör Kümesi
∇	Levi-Civita Koneksiyon
η	Temel $1-$Form
ϕ	$(1,1)$ Tensör Alanı
$\widetilde{\nabla}$	Semi-simetrik Metrik Olmayan Koneksiyon
$\widehat{\nabla}$	Semi-simetrik Metrik Koneksiyon
ξ	Karakteristik Vektör
J	Kompleks Yapı
Φ	Temel $2-$Form
$[,]$	Lie Operatörü
κ	Kesit Eğrilik
S	Ricci Eğrilik Tensörü
Q	Ricci Operatörü
τ	Skaler Eğrilik
P	Projektif Eğrilik Tensörü
$\check{C}$	Konsörkılır Eğrilik Tensörü
H	Konformal Eğrilik Tensörü
I_A	$I : A \to A$ Birim Dönüşüm Fonksiyonu

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET . . . . . **v**

SUMMARY . . . . . **vi**

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ . . . . . **vii**

İÇİNDEKİLER . . . . . **viii**

1. GİRİŞ VE AMAÇ **1**

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI **3**

3. TEMEL KAVRAMLAR **5**
3.1. Manifold ve Koneksiyon 5
3.2. Eğrilik Tensörleri 10

4. LORENTZIAN KENMOTSU MANİFOLDLAR **14**
4.1. Hemen Hemen Değme Lorentzian Manifold 14
4.2. Lorentzian Kenmotsu Manifold 18
4.3. Lorentzian Kenmotsu Manifoldlarda Eğrilik Tensörleri 23

5. OSSERMAN MANİFOLDLAR **31**
5.1. Semi-Riemann Geometride Osserman Problemi 31
5.2. Osserman Manifold Örnekleri 33
5.3. Lorentzian Osserman Manifold 35

6. LORENTZIAN KENMOTSU MANİFOLDLARDA OSSERMAN PROBLEMLERİ **40**
6.1. Farklı Koneksiyonlara Sahip $3-$Boyutlu Lorentzian Kenmotsu Manifoldlarda Osserman Problemi 40
6.2. Bazı Eğrilik Şartlarına Sahip Lorentzian Kenmotsu Manifoldlarda Osserman Problemi 50
6.3. Lorentzian Osserman Kenmotsu Manifold Örnekleri 60

7. BULGULAR VE TARTIŞMA **91**

Sayfa

İÇİNDEKİLER (devam)

8. SONUÇ VE ÖNERİLER 93

KAYNAKLAR DİZİNİ 94

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Kesit eğriliği ve Jakobi operatörü, manifoldlar hakkında önemli sonuçlar veren, diferensiyel geometride üzerine birçok çalışma yapılan temel konulardan olmuştur. R. Osserman tarafından ortaya atılan Osserman problemi Jakobi operatörünün karakteristik polinomu veya özdeğerleri hesaplanarak incelenmektedir. (M, g) Riemann manifold ve $Z \in S(M)$ birim vektör olsun. $R(., Z)Z$ lineer operatörünün $Z^{\perp}$ vektörüne kısıtlanmasıyla oluşturulan $R_Z : Z^{\perp} \to Z^{\perp}$ operatörüne Z birim vektöre göre Jakobi operatörü denir. R_Z Jakobi operatörünün özdeğerlerinin seçilen birim vektörden bağımsız olması durumunda (M, g) manifolduna Osserman manifold denir.

Q. S. Chi, 1988-1991 yılları arasında Riemann geometride bu doğrultuda bazı çalışmalar yapmıştır. Aynı şekilde Nikolayevsky, Gilkey, Swann ve Vanhecke yapılan çalışmaları genişleterek birçok değerli sonuca ulaşmıştır.

Lorentzian geometride Osserman problemi E. Garcia Rio, D. N. Kupeli ve M. E. Vazquez-Abal tarafından timelike, spacelike ve null vektörler için incelenmiştir. Yapılan çalışmalar doğrultusunda timelike (spacelike) Osserman manifoldların aynı zamanda spacelike (timelike) Osserman manifold olduğu ispatlanmıştır.

Hemen hemen değme manifoldlar ile ilgili olarak D. Blair, J. A. Oubina tarafından bazı çalışmalar gerçekleştirilmiştir. S. Sasaki tarafından normal ve ξ karakteristik vektörün killing vektör olduğu özel hemen hemen değme metrik manifoldlara Sasakian manifold adı verilmiştir. 1972 yılında K. Kenmotsu tarafından normal, $d\eta = 0$ ve $d\Phi = 2\eta \wedge \Phi$ eşitliklerini sağlayan hemen hemen değme manifoldları incelenmiş ve bu manifoldlara Kenmotsu manifold adı verilmiştir. Lorentzian Kenmotsu manifoldları üzerine Rosca, Mihai, Oiagă ve Pitiş tarafından önemli çalışmalar yürütülmüştür. Aynı şekilde R. Sari Lorentzian Kenmotsu manifoldlarında bir takım eğrilik ve altmanifoldlar ile ilgili çalışmalar yapılmıştır.

Yaptığımız ön çalışmalardan sonra Osserman probleminin Riemann geometrisinde incelendiği ve neredeyse birçok sorunun çözümlendiği görülmüştür. Bu yüzden çalışmamızda Lorentzian geometri esas alınmıştır. Lorentzian Kenmotsu manifoldlarda Osserman problemi incelenmiştir. Lorentzian Kenmotsu manifoldlarında farklı koneksiyonlar ile çalışma yapılmıştır. Ayrıca $R.R = 0$, $R.S = 0$ ve $R.\widetilde{C} = 0$ gibi bazı semi-simetrik durumlarda Riemann eğrilik tensörü hesaplanmış ve Osserman problemi

incelenmiştir. Çalışma içerisinde Lorentzian Kenmotsu manifoldlarının flat olma durumları da incelenmiş ve manifoldun flat olduğu durumlarda elde edilen R eğrilik tensörü ile Osserman manifold olma durumları irdelenmiştir. Bu doğrultuda bazı teorem ve sonuçlar verilmiştir. Osserman koşulunu sağlayan farklı boyutlarda Lorentzian Kenmotsu manifold örnekleri verilmiştir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

R. Osserman tarafından 1990 yılında yayınlanan ”Curvature in the eighties” çalışması ile Osserman problemi ilk defa incelenmiştir. Osserman, Riemann manifoldlarının Osserman olarak adlandırılması için Jakobi operatörünün özdeğerlerinin seçilen birim timelike vektörden bağımsız olması gerektiğini belirtmiştir. Ardından Q. S. Chi tarafından 1988 ve 1991 yıllarında Riemann geometride Osserman problemi ile ilgili iki önemli çalışma yapılmıştır. Chi, ”A curvature characterization of certain locally rank one symmetric spaces” çalışmasında (1988) Osserman manifoldları $(2n+1)$ ve $(4n+2)$ boyutlu manifoldlar için sınıflandırmıştır. Gilkey, Swann ve Vanhecke (1995) tarafından yeni çalışmalar üretilmiş ve bu çalışmalar zenginleştirilmiştir. Y. Nikolayevski tarafından 2004 yılında yayınlanan ”Osserman manifolds of dimension 8” çalışması ile 8-boyutlu Osserman manifoldlar incelenmiştir.

Lorentzian geometride Osserman kavramı ile ilgili ilk çalışmalar Blazic, Bokan ve Gilkey (1997) ile Rio, Kupeli ve Lorenzo (1997) tarafından yapılmıştır. Özellikle Rio, Kupeli ve Lorenzo tarafından 2001 yılında hazırlanan ”Osserman Manifolds in Semi-Riemann Geometry” kitabı Osserman problemi ile ilgili birçok çalışmayı ele alması ve sınıflandırması bakımından bu konuda önemli bir kaynak oluşturmaktır.

Osserman kavramı simetrik olmayan manifoldlar üzerinde de incelenmiş ve bu konuda bazı çalışmalar yapılmıştır. Bonome, Castro, Rio, Hervella ve Lorenzo (1995) belirsiz Kahler manifoldlarında Osserman problemini incelemiştir. Bu çalışmadan yola çıkarak Rio, Abel ve Lorenzo tarafından 1998 yılında yarı-Riemann manifoldları için benzer bir çalışma yapılmıştır. Zamanla Osserman koşulunun sağlandığı yapılar üzerinde duallik prensibi, lightlike hiperyüzeyler gibi kavramlar incelenmiş ve bu konular üzerine bir takım araştırmalar yürütülmüştür.

1972 yılında, Kenmotsu tarafından bazı özel şartları sağlayan ve Kenmotsu manifold olarak da bilinen değme Riemann manifoldları incelenmiştir. Friedmann ve Schouten 1924 yılında diferensiyel geometride semi-simetrik koneksiyon kavramı üzerine ilk çalışmaları yapmışlardır. 1932 yılında Hayden, semi-simetrik koneksiyonu Riemann manifoldları üzerinde incelemiştir. 1992 yılında Agashe ve Chafle, semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlar üzerine çalışmalar yürütmüşlerdir. Yine bu çalışmalar ışığında Barman ve De, 2010 yılında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonları Kenmotsu Manifoldlarda incelemişlerdir.

G. Calvaruso tarafından 2011 yılında yayınlanan ”Contact Lorentzian Manifolds” makalesi, çalışmamızın temelini oluşturmaktadır. Hemen hemen değme Lorentz metrik oluşturulurken Calvaruso’nun belirttiği yapı baz alınmıştır. Lorentzian Kenmotsu manifoldları üzerine R. Rosca tarafından 1991 yılında ”On Lorentzian Kenmotsu Manifolds” çalışması yapılmıştır. Ardından G. Pitiş, 2007 yılında tamamlanan ”Geometry of Kenmotsu Manifolds” kitabında Lorentzian Kenmotsu manifoldlar üzerine bir takım çalışmalar gerçekleştirmiştir. Yine son dönemde R. Sari ve A. Vanlı, Lorentzian Kenmotsu manifoldlarında altmanifoldlar ile ilgili çalışmalar üretmiştir.

Osserman problemi 1990 yılından bu yana diferensiyel geometri alanında ele alınan ve üzerine birçok çalışma yapılan problemlerden biridir. Farklı manifoldlar ve koşullar altında incelenen bu problem ile ilgili daha önce Kenmotsu manifoldları üzerine bir çalışma yapılmamıştır. Yapılan ön çalışmalardan sonra Osserman probleminin Osserman (1990), Chi (1988), Gilkey, Swann, Vanhecke (1995) ve Nikolalevsky (2002) gibi matematikçiler tarafından Riemann geometrisinde incelendiği ve neredeyse birçok sorunun çözümlendiği görülmüştür. Bu yüzden çalışmamızda esas olarak Lorentz geometri baz alınmıştır.

Lorentzian Kenmotsu manifoldlarında farklı koneksiyonlar ve bazı eğrilik durumlarında Osserman problemi incelenmiştir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda, çalışmamızda kullanılan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

3.1 Manifold ve Koneksiyon

Bu bölümde, manifold ve koneksiyon kavramları ile ilgili önemli tanımlar, sonuçlar ve teoremler aktarılmıştır.

Tanım 3.1.1 V, $n-$boyutlu bir reel vektör uzayı olsun. $g : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineer fonksiyonu $\forall X, Y \in V$ için

$$g(X, Y) = g(Y, X)$$

özelliğini sağlıyorsa g ye V üzerinde bir **simetrik bilineer form** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.1.2 V, $n-$boyutlu bir reel vektör uzayı ve V üzerinde g simetrik bilineer dönüşüm olsun. O halde

i) $\forall X \in V$ için $g(X, X) < 0$ ise g ye V üzerinde **negatif tanımlı**

ii) $\forall X \in V$ için $g(X, X) > 0$ ise g ye V üzerinde **pozitif tanımlı**

iii) $\forall Y \in V$ için $g(X, Y) = 0$ iken $X = 0$ ise g ye V üzerinde **non-dejenere**

denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.1.3 V, $n-$boyutlu bir reel vektör uzayı ve V üzerinde g simetrik bilineer dönüşüm olsun. $0 \neq X \in V$ olmak üzere $\forall Y \in V$ için

$$g(X, Y) = 0$$

ise g ye V üzerinde **dejeneredir** denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 3.1.4 V bir reel vektör uzayı ve V üzerinde g simetrik bilineer dönüşüm olsun. V uzayının

$$Rad\, V = \{X \in V : g(X, Y) = 0, \forall Y \in V\}$$

alt uzayına V uzayının g ye göre **null uzayı** denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 3.1.5 V reel vektör uzayında g nin negatif tanımlı olduğu en geniş W alt uzayının boyutuna V üzerinde g nin **indeksi** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.1.6 M, $n-$boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun.

$$\begin{aligned} g_p : \ T_pM \times T_pM &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X_p, Y_p) &\rightarrow g_p(X_p, Y_p) = g(X_p, Y_p) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı sabit indeksli, non-dejenere, $(0, 2)$ tipindeki g tensör alanına M üzerinde **metrik tensör** denir. g metrik tensör ile donatılmış M manifolduna **yarı-Riemann manifold** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.1.7 (M, g) bir yarı-Riemann manifold olsun. g metrik tensörünün indeksine M manifoldunun indeksi denir ve indeks(M) ile gösterilir. $0 \leq q \leq boy\ M$ olmak üzere indeks$(M) = q$ olsun. Özel olarak

i) $q = 0$ ise M ye **Riemann manifold**

ii) $q = 1$ ve $boy\ M > 2$ ise M ye **Lorentz manifold**

denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.1.8 (M, g) bir yarı-Riemann manifold olmak üzere, sıfırdan farklı $Z \in T_pM$ vektörü için

i) $g(X, X) > 0$ veya $X = 0$ ise X vektörüne **spacelike** vektör

ii) $g(X, X) < 0$ ise X vektörüne **timelike** vektör

iii) $g(X,X)=0$ ise X vektörüne **null** vektör

denir. Ayrıca null olmayan Z vektörü için $|g(X,X)| = 1$ koşulu sağlandığı takdirde X vektörü **birim vektör** olarak adlandırılır (O'Neill, 1983).

Tanım 3.1.9 (M,g) bir yarı-Rieamann manifold olsun. (M,g) manifoldu üzerinde bulunan bir p noktası için birim timelike, birim spacelike ve birim vektörlerin kümesi sırası ile $S_p^-(M)$, $S_p^+(M)$ ve $S_p(M)$

$$\begin{aligned} S_p^-(M) &= \{X \in T_pM \,/\, g(X,X) = -1\}, \\ S_p^+(M) &= \{X \in T_pM \,/\, g(X,X) = 1\}, \\ S_p(M) &= \{X \in T_pM \,/\, |g(X,X)| = +1\} \;=\; S_p^-(M) \cup S_p^+(M) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır (O'Neill, 1983).

Tanım 3.1.10. (M,g) bir yarı-Riemann manifold olsun. (M,g) manifoldu üzerinde bulunan tüm birim timelike, birim spacelike ve birim vektörlerin kümesi sırası ile $S^-(M), S^+(M)$ ve $S(M)$

$$\begin{aligned} S^-(M) &= \cup_{p\in M} S_p^-(M) = \{X \in TM \,/\, g(X,X) = -1\}, \\ S^+(M) &= \cup_{p\in M} S_p^+(M) = \{X \in TM \,/\, g(X,X) = 1\}, \\ S(M) &= \cup_{p\in M} S_p(M) = \{X \in TM \,/\, |g(X,X)| = +1\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır (O'Neill, 1983).

Tanım 3.1.11 M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \nabla : \; \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (X,Y) &\to \nabla(X,Y) = \nabla_X Y \end{aligned} \tag{3.1}$$

dönüşümünde $\forall f, g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için

i) $\nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

ii) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

iii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

özellikleri sağlanıyorsa ∇ ye M manifoldu üzerinde bir **afin koneksiyon** ve ∇_X operatörüne de X vektör alanına göre **kovaryant türev operatörü** denir (Hacısalihoğlu, 1998; Yano ve Kon, 1984).

Tanım 3.1.12 M bir C^∞ $n-$manifold ve M üzerinde bir afin koneksiyon ∇ olsun.

$$\begin{aligned} Tor: \ \chi(M)\times\chi(M) &\to \chi(M) \\ (X,Y) &\to Tor(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan vektör değerli tensöre M üzerinde tanımlı ∇ koneksiyonunun **torsiyon tensörü** denir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 3.1.13 M bir C^∞ manifold ve ∇ da M üzerinde bir afin koneksiyon olsun. O halde $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere, ∇ dönüşümü

i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$ (Sıfır torsiyon özelliği),

ii) $X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (Metrikle bağdaşabilme özelliği)

şartlarını sağlıyorsa, ∇ ye M nin **Levi-Civita koneksiyonu** adı verilir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 3.1.14 K cismi üzerinde V vektör uzayı olsun.

$$\begin{aligned} [,]: \ V\times V &\to V \\ (X,Y) &\to [X,Y] \end{aligned}$$

dönüşümü için

1) 2-lineer

2) Alterne ($\forall X, Y \in V$ için $[X,Y] = -[Y,X]$)

3) $\forall X, Y, Z \in V$ için

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] \equiv 0$$

özellikleri sağlanırsa $[,]$ dönüşümüne V üstünde bir **Lie operatörü** (Lie parantez operatörü) denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 3.1.15 $P \in \mathbb{E}^n$ noktasındaki kotanjant uzayı, $T^*_{\mathbb{E}^n}(P)$ olsun.

$$w: \ \mathbb{E}^n \ \rightarrow \ \underset{P\in\mathbb{E}^n}{\cup} T^*_{\mathbb{E}^n}(P)$$

fonksiyonu için

$$\pi \circ w: \ \mathbb{E}^n \ \rightarrow \ \mathbb{E}^n$$

olacak şekilde

$$\pi: \ \underset{P\in\mathbb{E}^n}{\cup} T^*_{\mathbb{E}^n}(P) \ \rightarrow \ \mathbb{E}^n$$

fonksiyonu mevcutsa w ya $\mathbb{E}^n$ üstünde **1−form** denir ve bu $1-$formların cümlesi $\chi^*(\mathbb{E}^n)$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 3.1.16 w bir r-form olsun. Bir $r-$formun dış türevi

$$\begin{aligned} dw(X_0, X_1, ..., X_r) &= \frac{1}{r+1}\{\sum_{i=0}^{r}(-1)^i X_i w\left(X_0, X_1, ..., \widehat{X}_i, ..., X_r\right) \\ &\quad \sum_{1\leq i\leq j\leq r}(-1)^{i+j} w\left([X_i, X_j], X_1, ..., \widehat{X}_i, ..., \widehat{X}_j, ..., X_r\right)\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Özel olarak w, 1-form ise

$$dw(X_0, X_1) = \frac{1}{2}\{X_0 w(X_1) - X_1 w(X_0) - w([X_0, X_1])\} \tag{3.2}$$

ifadesine eşittir. w, 2-form ise

$$\begin{aligned} dw(X_0, X_1, X_2) &= \frac{1}{3}\{X_0 w(X_1, X_2) - X_1 w(X_0, X_2) + X_2 w(X_0, X_1) \\ &\quad -w([X_0, X_1], X_2) + w([X_0, X_2], X_1) - w([X_1, X_2], X_0)\} \end{aligned} \tag{3.3}$$

şeklinde ifade edilir (Hacısalihoğlu, 2003).

Yardımcı Teorem 3.1.1 (M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ Reimann koneksiyon olsun. O zaman $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için Riemann koneksiyonu,

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ &\quad -g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Kozsul formülü ile tek türlü belirtilir (Kuhnel, 2006).

Tanım 3.1.17 M, n-boyutlu bir diferensiyellenebilir (C^{∞}) manifold, $\widetilde{\nabla}$, M üzerinde bir afin koneksiyon olsun. $\widetilde{\nabla}$ nın torsiyon tensörü $T(X,Y)$, $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$T(X,Y) = \widetilde{\nabla}_X \widetilde{\nabla}_Y - \widetilde{\nabla}_Y \widetilde{\nabla}_X - [X,Y]$$

ile tanımlanır. $T = 0$ ise $\widetilde{\nabla}$ ya **simetrik koneksiyon**, $T \neq 0$ ise **simetrik olmayan koneksiyon** adı verilir. (M,g) Riemann manifoldu üzerinde tanımlı g Riemann metriği

$$\widetilde{\nabla} g \neq 0$$

şartını sağlıyor ise $\widetilde{\nabla}$ ya **metrik olmayan koneksiyon**

$$\widehat{\nabla} g = 0$$

şartını sağlıyor ise $\widehat{\nabla}$ ya **metrik koneksiyon** adı verilir (Agashe ve Chafle, 1992).

Yardımcı Teorem 3.1.2 (M,g) bir Riemann manifoldu üzerinde $\forall X,Y \in \chi(M)$ keyfi vektör alanları olmak üzere $\widetilde{\nabla}$ semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon, ∇ Levi-Civita koneksiyonu cinsinden

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \eta(Y) X \tag{3.5}$$

şeklinde tanımlanır. $\widehat{\nabla}$ semi-simetrik metrik koneksiyon, ∇ Levi-Civita koneksiyonu cinsinden

$$\widehat{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \eta(Y) X - g(X,Y)\xi \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlanır (Agashe ve Chafle, 1992).

3.2 Eğrilik Tensörleri

Bu bölümde, çalışmamızda kullanılan eğrilik tensörleri ile ilgili önemli tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 3.2.1 (M,g) bir Riemann manifoldu ve ∇ Levi-Civita koneksiyonu olsun. $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} R: \ \chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M) &\to \chi(M) \\ (X,Y,Z) &\to R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \end{aligned} \tag{3.7}$$

şeklinde tanımlanan R fonksiyonu M üzerinde $(1,3)$ tensör alanıdır. Bu tensör alanına M nin **Riemann eğrilik tensörü** denir. Ayrıca $R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W)$ tensörüne **Riemann-Christoffel eğrilik tensörü** denir (O'Neill, 1983; Spivak, 1979).

Yardımcı Teorem 3.2.1 (M, g) bir Riemann manifoldu üzerinde tanımlı R Riemann eğrilik tensörü olsun. $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için

i) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$,

ii) $g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(Y,X)Z,W)$,

iii) $g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(X,Y)W,Z)$,

iv) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y$=0,

v) $g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y)$

eşitlikleri geçerlidir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.2.2 (M, g) bir Riemann manifoldu ve T_pM tanjant uzayının iki boyutlu altuzayı $\mathcal{P}$ olsun. $X, Y \in \mathcal{P}$ vektörleri için

$$\kappa(\mathcal{P}) = \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(X,X)\,g(Y,Y) - g(X,Y)^2} \tag{3.8}$$

eşitliğine $\mathcal{P}$ düzleminin **kesit eğriliği** denir ve $\kappa(\mathcal{P})$ ile gösterilir (Kobayashi ve Nomizu, 1963; O'Neill, 1983).

Tanım 3.2.3 (M, g) bir $n-$boyutlu Riemann manifoldu ve $\{X_1, ..., X_n\}$, $\chi(M)$ nin bir lokal çatı alanı olsun. $X \in \chi(M)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} Q: \ \chi(M) &\to \chi(M) \\ X &\to Q(X) = \sum_{i=1}^{n} R(X_i, X)X_i \end{aligned} \tag{3.9}$$

şeklinde tanımlanan Q ye M nin **Ricci operatörü** adı verilir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 3.2.4 (M, g) bir $n-$boyutlu Riemann manifoldu ve $\{X_1, ..., X_n\}$, $\chi(M)$ nin bir bazı olsun.

$$\begin{aligned} S: \ \chi(M) \times \chi(M) &\to C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ (X, Y) &\to S(X,Y) = g(Q(X), Y) \end{aligned} \tag{3.10}$$

şeklinde tanımlanan $(0,2)$ tipinde S tensör alanına **Ricci eğrilik tensörü** denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 3.2.5 (M,g) bir $n-$boyutlu Riemann manifoldu üzerinde tanımlı S Ricci eğrilik tensörü için

$$S(X,Y)=\lambda g(X,Y)-\mu\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right) \tag{3.11}$$

eşitliği sağlanırsa (M,g) manifolduna $\mu-$**Einstein manifoldu** denir**.** Eğer $\mu=0$ ise (M,g) manifolduna **Einstein manifold** denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 3.2.6 n-boyutlu M semi-Riemann manifoldu üzerinde R Riemann eğrilik tensörü ve $\{e_1,...,e_n\}$, $\chi(M)$ nin bir lokal ortonormal çatı alanı olsun. $\forall X,Y\in\chi\left(M\right)$ için S Ricci eğrilik tensörü

$$S\left(X,Y\right)=\sum_{i=1}^{n}g\left(e_i,e_i\right)g\left(R\left(e_i,X\right)Y,e_i\right) \tag{3.12}$$

şeklinde tanımlanır (O'Neill, 1983).

Tanım 3.2.7 (M,g) bir $n-$boyutlu semi-Riemann manifoldu ve $\{e_1,e_2,...,e_n\}$, bir lokal ortonormal çatı alanı olmak üzere

$$\tau=\sum_{i=1}^{n}g\left(e_i,e_i\right)S(e_i,e_i) \tag{3.13}$$

değerine M nin **skaler eğriliği** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.2.8 $3-$boyutlu M semi-Riemann manifoldu üzerinde tanımlı R Riemann eğrilik tensörü $\forall X,Y,Z\in\chi\left(M\right)$ için S Ricci eğrilik tensörü, Q Ricci operatörü ve τ skaler eğriliği cinsinden

$$\begin{aligned}R\left(X,Y\right)Z &= S\left(Y,Z\right)X-g\left(X,Z\right)QY+g\left(Y,Z\right)QX\\ &\quad -S\left(X,Z\right)Y-\frac{\tau}{2}\left[g(Y,Z)X-g\left(X,Z\right)Y\right]\end{aligned} \tag{3.14}$$

şeklinde tanımlanır (Olszak ve Rosca, 1991; Singh vd., 2015).

Tanım 3.2.9 M n-boyutlu bir Riemann manifold olsun. $\forall X,Y,Z\in\chi\left(M\right)$ için **projektif eğrilik tensörü**

$$P\left(X,Y\right)Z=R\left(X,Y\right)Z-\frac{1}{n-1}\left[S(Y,Z)X-S\left(X,Z\right)Y\right] \tag{3.15}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca P projektif eğrilik tensörünün sıfıra eşit olması halinde M manifoldu **projektif flat** olarak adlandırılır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 3.2.10 M n-boyutlu bir Riemann manifold olsun. $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için **konsörkılır (concircular) eğrilik tensörü**

$$\check{C}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{\tau}{n(n-1)}[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] \tag{3.16}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca $\check{C}$ konsörkılır (concircular) eğrilik tensörünün sıfıra eşit olması halinde M manifoldu **konsörkılır (concircular) flat** olarak adlandırılır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 3.2.11 M n-boyutlu bir Riemann manifold olsun. $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için **konformal eğrilik tensörü**

$$\begin{aligned} H(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + \frac{1}{n-2}[S(X,Z)Y - S(Y,Z)X + g(X,Z)QY - g(Y,Z)QX] \\ &\quad - \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(X,Z)Y - g(Y,Z)X] \end{aligned} \tag{3.17}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca H konformal eğrilik tensörünün sıfıra eşit olması halinde M manifoldu **konformal flat** olarak adlandırılır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 3.2.12 (M,g) manifoldu üzerinde tanımlı R Riemann eğrilik tensörü için

$$R.R = 0$$

(kastedilen $R(X,Y).R = 0$ olup) koşulu sağlandığı takdirde manifold, **semi-simetrik** olarak adlandırılır (Szabo, 1982).

Tanım 3.2.13 (M,g) manifoldu üzerinde tanımlı R Riemann eğrilik tensörü ve S Ricci eğrilik tensörü için

$$R.S = 0$$

koşulu sağlandığı takdirde manifold, **Ricci semi-simetrik** olarak adlandırılır (Szabo, 1982).

Tanım 3.2.14 (M,g) manifoldu üzerinde tanımlı R Riemann eğrilik tensörü ve $\check{C}$ konsörkılır (concircular) eğrilik tensörü için

$$R.\check{C} = 0$$

koşulu sağlandığı takdirde manifold, **konsörkılır (concircular) semi-simetrik** olarak adlandırılır (Deszcz, 1992).

4. LORENTZIAN KENMOTSU MANİFOLDLAR

Bu kısımda, hemen hemen değme yapılar, hemen hemen değme yapılar ile bağdaştırılmış Lorentz metrik ile oluşan hemen hemen değme Lorentzian manifoldlar ve Lorentzian Kenmotsu manifoldlar ile ilgili önemli tanımlar ve teoremlere yer verlmiştir. Ayrıca Lorentzian Kenmotsu manifoldlar üzerinde eğrilik tensörleri ispatları ile birlikte verilmiştir.

4.1 Hemen Hemen Değme Lorentzian Manifold

Bu bölümde, hemen hemen değme Lorentzian manifoldlar ile ilgili tanım ve sonuçlara yer verilmiştir.

Tanım 4.1.1 M $(2n+1)$-boyutlu manifold, $\phi-(1,1)$ tipinde tensör alanı, ξ karakteristik vektör alanı ve η 1-form olsun. M üzerinde herhangi bir vektör alanı X için

$$\begin{aligned} \eta(\xi) &= 1 \\ \phi^2(X) &= -X+\eta(X)\xi \end{aligned} \tag{4.1}$$

eşitlikleri sağlanırsa (ϕ,ξ,η) üçlüsüne **hemen hemen değme yapısı**, M manifolduna da **hemen hemen değme manifold** denir (Blair, 1976; Blair ve Oubina, 1990; Calvaruso, 2011).

Yardımcı Teorem 4.1.1 (ϕ,ξ,η) hemen hemen değme yapısı için

$$\begin{aligned} &\textbf{i)} \quad \phi\xi &&= 0 \\ &\textbf{ii)} \quad \eta(\phi X) &&= 0 \\ &\textbf{iii)} \quad rank\phi &&= 2n \end{aligned} \tag{4.2}$$

eşitlikleri sağlanır (Blair, 1976; Blair ve Oubina, 1990; Calvaruso, 2011).

İspat (4.1) eşitliğinde $X=\xi$ alınır ve eşitliğinin iki tarafına ϕ operatörü uygulanırsa

$$\phi^3(\xi)=\phi^2(\phi(\xi))=-\phi(\xi)+\eta(\phi(\xi))\xi=0$$

eşitliğinden

$$\eta(\phi(\xi))\xi=\phi(\xi) \tag{4.3}$$

elde edilir. (4.3) ifadesi kullanılarak

$$\phi(\phi(\xi)) = \phi(\eta(\phi(\xi))\xi) = \eta(\phi(\xi))\phi(\xi) = 0 \tag{4.4}$$

bulunur. (4.3) ifadesinde bulunan $\phi(\xi)$ karşılığı (4.4) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$(\eta(\phi(\xi)))^2 \xi = 0 \tag{4.5}$$

elde edilir. (4.5) ifadesinden $\eta(\phi(\xi)) = 0$ bulunur. Böylece

$$\phi(\xi) = \eta(\phi(\xi))\xi = 0.\xi = 0$$

yazılır. Herhangi bir X vektör alanı için (4.1) eşitliğinin iki tarafına ϕ operatörü uygulanırsa

$$\phi\left(\phi^2(X)\right) = -\phi(X) + \eta(X)\phi\xi$$

bulunur. $\phi(\xi) = 0$ olduğundan dolayı

$$\phi\left(\phi^2(X)\right) = -\phi(X) \tag{4.6}$$

elde edilir. (4.6) kullanılarak

$$\phi^2(\phi(X)) = -\phi(X) + \eta(\phi(X))\xi = \phi\left(\phi^2(X)\right) = -\phi(X)$$

yazılır. Böylece

$$\eta(\phi(X)) = 0$$

eşitliği ispatlanmış olur.

Tanım 4.1.2 M $(2n+1)$-boyutlu hemen hemen değme manifold ve M üzerinde g Lorentzian metriği verilsin. $\forall X, Y \in \chi(M)$ vektör alanları için

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y) \tag{4.7}$$

eşitliği sağlanırsa (ϕ, ξ, η, g) yapısına **hemen hemen değme Lorentz metrik yapısı**, M manifolduna ise **hemen hemen değme Lorentzian manifold** denir (Calvaruso, 2011).

Sonuç 4.1.1 (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme Lorentzian manifold olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ vektör alanları için

$$\begin{aligned} &\textbf{i)} && \eta(X) && = && -g(\xi, X) \\ &\textbf{ii)} && g(\xi, \xi) && = && -1 \\ &\textbf{iii)} && g(X, \phi Y) && = && -g(\phi X, Y) \end{aligned} \tag{4.8}$$

eşitlikleri sağlanır (Calvaruso, 2011).

İspat (4.7) eşitliğinde $Y = \xi$ alınırsa

$$0 = g(\phi X, \phi\xi) = g(X, \xi) + \eta(X)\eta(\xi)$$

olur. Böylece

$$\eta(X) = -g(\xi, X) \tag{4.9}$$

elde edilir. (4.9) eşitliğinde $X = \xi$ alınır ve (4.1) eşitliği kullanılırsa

$$g(\xi, \xi) = -1 \tag{4.10}$$

bulunur. (4.7) eşitliğinde $Y = \phi Y$ alınır ve (4.1) eşitliği kullanılırsa

$$g(\phi X, -Y + \eta(Y)\xi) = g(X, \phi Y) + \eta(X)\eta(\phi Y)$$

yazılır. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$-g(\phi X, Y) - \eta(Y)\eta(\phi X) = g(X, \phi Y) + \eta(X)\eta(\phi Y) \tag{4.11}$$

olur. (4.11) eşitliğinde $\eta \circ \phi = 0$ olduğundan dolayı

$$g(X, \phi Y) = -g(\phi X, Y) \tag{4.12}$$

sonucuna ulaşılır.

Tanım 4.1.3 V bir vektör uzayı olsun

$$J : V \to V$$

lineer dönüşümü

$$J^2 = -I$$

şartını sağlıyorsa J ye V üzerinde bir **kompleks yapı** denir.

$(2n + 1)$-boyutlu bir hemen hemen değme yarı-metrik manifoldu M verilsin. Bu manifold üzerinde (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme yarı-metrik yapısı olsun. Reel bir doğru $\mathbb{R}$ ile göstererek $M \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldu göz önüne alınsın. $M \times \mathbb{R}$ üzerinde herhangi bir vektör alanı ise $\left(X, f\frac{d}{dt}\right)$ şeklindedir. X, M ye teğet vektör alanı, t, $\mathbb{R}$ nin bir koordinatı ve f $M \times \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir fonksiyondur.

$M \times \mathbb{R}$ nin tanjant uzayındaki bir J dönüşümü

$$J\left(X, f\frac{d}{dt}\right) = (\phi X - f\xi, \eta(X) f\frac{d}{dt})$$

ile tanımlanır. J dönüşümü $M \times \mathbb{R}$ üzerinde hemen hemen kompleks yapıdır. J hemen hemen kompleks yapının integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart J nin Nijenhius tensörünün sıfıra eşit olmasıdır.

$$[J, J]\left((X, 0)\left(Y, 0\right)\right) = N^{(1)}\left(X, Y\right) + N^{(2)}\left(X, Y\right)$$

$$[J, J]\left((X, 0)\left(0, \frac{d}{dt}\right)\right) = N^{(3)}\left(X\right) + N^{(4)}\left(X\right)$$

olup buradan

$$N_\phi(X, Y) = \phi^2[X, Y] - \phi[\phi X, Y] - \phi[X, \phi Y] + [\phi X, \phi Y] \tag{4.13}$$

olmak üzere dört tensör alanı $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$ ve $N^{(4)}$ sırasıyla

$$\begin{aligned} N^{(1)}\left(X, Y\right) &= N_\phi(X, Y) + 2d\eta\left(X, Y\right) \otimes \xi \\ N^{(2)}\left(X, Y\right) &= \left(L_{\phi X}\eta\right) Y - \left(L_{\phi Y}\eta\right) X \\ N^{(3)}\left(X, Y\right) &= \left(L_\xi \phi\right) X \\ N^{(4)}\left(X, Y\right) &= \left(L_\xi \eta\right) X \end{aligned} \tag{4.14}$$

şeklinde tanımlanır. $N^{(1)} = 0$ olması diğer üç tensör alanının da $N^{(2)}$, $N^{(3)}$ ve $N^{(4)}$ sıfıra eşit olduğunu gösterir. Böylece J nin integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $N^{(1)} = 0$ olmasıdır (Calvaruso ve Perrone, 2010).

Tanım 4.1.4 M hemen hemen değme manifoldunda

$$\Phi\left(X, Y\right) = g\left(X, \phi Y\right) \tag{4.15}$$

şeklinde tanımlanan Φ dönüşümüne M manifoldunun **temel** $2-$**formu** adı verilir (Blair, 1976; Calvaruso, 2011).

Yardımcı Teorem 4.1.2 M üzerinde (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı ve g Lorentzian metriği verilsin. Her X, Y, Z tanjant vektörü için

$$\begin{aligned} 2g\left(\left(\nabla_X \phi\right) Y, Z\right) &= 3d\Phi\left(X, \phi Y, \phi Z\right) - 3d\Phi\left(X, Y, Z\right) + g\left(N^{(1)}\left(Y, Z\right), \phi X\right) \\ &\quad -N^{(2)}\left(Y, Z\right)\eta\left(X\right) - 2d\eta\left(\phi Y, X\right)\eta\left(Z\right) + 2d\eta\left(\phi Z, X\right)\eta\left(Y\right) \end{aligned} \tag{4.16}$$

eşitliği geçerlidir (Calvaruso, 2011).

4.2 Lorentzian Kenmotsu Manifold

Bu bölümde, Lorentzian Kenmotsu manifoldlar ile ilgili temel tanım, teorem ve sonuçlar ispatları ile birlikte aktarılmıştır.

Tanım 4.2.1 M $(2n+1)$-boyutlu hemen hemen değme Lorentzian manifoldu, η 1-form ve Φ temel 2-form olmak üzere

$$\begin{aligned} d\eta &= 0 \\ d\Phi &= -2\eta \wedge \Phi \end{aligned} \tag{4.17}$$

eşitliğini sağladığı takdirde hemen hemen Lorentzian Kenmotsu manifold olarak adlandırılır (Rosca, 1991; Pitiş, 2007).

Tanım 4.2.2 M $(2n+1)$-boyutlu hemen hemen Lorentzian Kenmotsu manifold normal olduğu takdirde ($N^{(1)} = N^{(2)} = N^{(3)} = N^{(4)} = 0$) Lorentzian Kenmotsu manifold olarak adlandırılır (Rosca, 1991; Pitiş, 2007).

Teorem 4.2.1 M $(2n+1)$-boyutlu hemen hemen değme manifoldunun Lorentzian Kenmotsu manifold olması için gerek ve yeter şart

$$(\nabla_X \phi)\, Y = -g\,(X, \phi Y)\,\xi + \eta(Y)\phi X \tag{4.18}$$

eşitliğidir (Rosca, 1991; Pitiş, 2007).

İspat $\Longrightarrow$ M Lorentzian Kenmotsu manifold olsun. $d\eta = 0$ olduğundan dolayı (3.2) eşitliği kullanılırsa

$$X\eta\,(Y) - Y\eta\,(X) = \eta\,([X, Y]) \tag{4.19}$$

elde edilir. Ayrıca $d\Phi = -2\eta \wedge \Phi$ olduğundan dolayı

$$d\Phi\,(X, Y, Z) = -\frac{2}{3}\left\{\eta\,(X)\,g\,(Y, \phi Z) - \eta\,(Y)\,g\,(X, \phi Z) + \eta\,(Z)\,g\,(X, \phi Y)\right\} \tag{4.20}$$

yazılır. Son olarak Lorentzian Kenmotsu manifold normal olduğundan dolayı

$$N^{(1)} = N^{(2)} = N^{(3)} = N^{(4)} = 0 \tag{4.21}$$

eşitliği mevcuttur. (4.19) ve (4.21) eşitlikleri (4.16) denkleminde kullanılırsa

$$2g\,((\nabla_X \phi)\, Y, Z) = 3d\Phi\,(X, \phi Y, \phi Z) - 3d\Phi\,(X, Y, Z) \tag{4.22}$$

elde edilir. (4.22) eşitliğinde (4.20) kullanılırsa

$$\begin{aligned} 2g\left(\left(\nabla_X\phi\right)Y,Z\right) &= -2\eta\left(X\right)g\left(\phi Y,\phi^2Z\right)+2\eta\left(\phi Y\right)g\left(X,\phi^2Z\right) \\ &\quad -2\eta\left(\phi Z\right)g\left(X,\phi^2Y\right)+2\eta\left(X\right)g\left(Y,\phi Z\right) \\ &\quad -2\eta\left(Y\right)g\left(X,\phi Z\right)+2\eta\left(Z\right)g\left(X,\phi Y\right) \end{aligned} \tag{4.23}$$

bulunur. (4.23) eşitliğinde (4.1) ve (4.2) kullanılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$g\left(\left(\nabla_X\phi\right)Y,Z\right)=-g\left(X,\phi Y\right)g\left(Z,\xi\right)+\eta\left(Y\right)g\left(\phi X,Z\right) \tag{4.24}$$

elde edilir. (4.24) ifadesinde metriğin lineerlik özelliği kullanılırsa

$$g\left(\left(\nabla_X\phi\right)Y,Z\right)=g\left(-g\left(X,\phi Y\right)\xi+\eta\left(Y\right)\phi X,Z\right) \tag{4.25}$$

şeklinde yazılır. Böylece

$$\left(\nabla_X\phi\right)Y=-g\left(X,\phi Y\right)\xi+\eta(Y)\phi X$$

elde edilir.

$\Longleftarrow$ (4.18) eşitliği sağlanmış olsun. Bu durumda manifoldun $d\eta=0, d\Phi=-2\eta\wedge\Phi$ ve normal olduğu ispatlanmalıdır. (4.18) nolu eşitlikte yer alan $\left(\nabla_X\phi\right)Y$ ifadesi yerine

$$\left(\nabla_X\phi\right)Y=\nabla_X\phi Y-\phi\left(\nabla_XY\right)$$

yazılır ve $Y=\xi$ alınırsa

$$\nabla_X\phi\xi-\phi\left(\nabla_X\xi\right)=-g\left(X,\phi\xi\right)\xi+\eta(\xi)\phi X \tag{4.26}$$

elde edilir. (4.26) eşitliğinde (4.1) ve (4.2) nolu eşitlikler kullanılır ve eşitliğin her iki tarafına ϕ operatörü uygulanılırsa

$$\phi^2\left(\nabla_X\xi\right)=-\phi^2X \tag{4.27}$$

bulunur. (4.27) eşitliğinde (4.1) kullanılırsa

$$-\nabla_X\xi+\eta\left(\nabla_X\xi\right)\xi=X-\eta\left(X\right)\xi \tag{4.28}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece

$$\nabla_X\xi=-X+\eta(X)\xi \tag{4.29}$$

elde edilir. (3.2) nolu eşitlikte kovaryant türev ve Lie operatörü kullanılırsa

$$\begin{aligned} d\eta\left(X,Y\right) &= \frac{1}{2}\left\{-Xg\left(Y,\xi\right)+Yg\left(X,\xi\right)-\eta\left(\left[X,Y\right]\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\{-g\left(\nabla_XY,\xi\right)-g\left(Y,\nabla_X\xi\right)+g\left(\nabla_YX,\xi\right)+g\left(X,\nabla_Y\xi\right) \\ &\quad -\eta\left(\nabla_XY\right)+\eta\left(\nabla_YX\right)\} \end{aligned} \tag{4.30}$$

sonucuna ulaşılır. (4.30) eşitliğinde (4.8) kullanılırsa

$$\begin{aligned} d\eta(X,Y) &= \frac{1}{2}\{-g(\nabla_X Y,\xi)-g(Y,\nabla_X\xi)+g(\nabla_Y X,\xi)+g(X,\nabla_Y\xi) \\ &\quad +g(\nabla_X Y,\xi)-g(\nabla_Y X,\xi)\} \\ &= \frac{1}{2}\{g(X,\nabla_Y\xi)-g(Y,\nabla_X\xi)\} \end{aligned} \tag{4.31}$$

elde edilir. (4.31) eşitliğinde (4.29) kullanılırsa

$$\begin{aligned} d\eta(X,Y) &= \frac{1}{2}\{g(X,-Y+\eta(Y)\xi)-g(Y,-X+\eta(X)\xi)\} \\ &= \frac{1}{2}\{-g(X,Y)+\eta(Y)g(X,\xi)+g(Y,X)-\eta(X)g(Y,\xi)\} \\ &= \frac{1}{2}\{-g(X,Y)-\eta(Y)\eta(X)+g(Y,X)+\eta(X)\eta(Y)\} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.32}$$

bulunur. (3.3) nolu eşitlikte kovaryant türev ve Lie operatörü kullanılırsa

$$\begin{aligned} d\Phi(X,Y,Z) &= \frac{1}{3}\{X(g(Y,\phi Z))-Y(g(X,\phi Z))+Z(g(X,\phi Y)) \\ &\quad -g([X,Y],\phi Z)+g([X,Z],\phi Y)-g([Y,Z],\phi X)\} \\ &= \frac{1}{3}\{g(\nabla_X Y,\phi Z)+g(Y,\nabla_X\phi Z)-g(\nabla_Y X,\phi Z)-g(X,\nabla_Y\phi Z) \\ &\quad +g(\nabla_Z X,\phi Y)+g(X,\nabla_Z\phi Y)-g(\nabla_X Y,\phi Z)+g(\nabla_Y X,\phi Z) \\ &\quad +g(\nabla_X Z,\phi Y)-g(\nabla_Z X,\phi Y)-g(\nabla_Y Z,\phi X)+g(\nabla_Z Y,\phi X)\} \end{aligned} \tag{4.33}$$

elde edilir. (4.33) eşitliğinde yer alan $\nabla_X\phi Z$, $\nabla_Y\phi Z$ ve $\nabla_Z\phi Y$ ifadeleri

$$\nabla_X\phi Z=(\nabla_X\phi)Z+\phi(\nabla_X Z) \tag{4.34}$$

eşitliği yardımıyla yerine yazılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned} d\Phi(X,Y,Z) &= \frac{1}{3}\{g(\nabla_X Y,\phi Z)+g(Y,(\nabla_X\phi)Z)-g(\nabla_X Z,\phi Y)-g(\nabla_Y X,\phi Z) \\ &\quad -g(X,(\nabla_Y\phi)Z)+g(\nabla_Y Z,\phi X)+g(\nabla_Z X,\phi Y)+g(X,(\nabla_Z\phi)Y) \\ &\quad -g(\nabla_Z Y,\phi X)-g(\nabla_X Y,\phi Z)+g(\nabla_Y X,\phi Z)+g(\nabla_X Z,\phi Y) \\ &\quad -g(\nabla_Z X,\phi Y)-g(\nabla_Y Z,\phi X)+g(\nabla_Z Y,\phi X)\} \\ &= \frac{1}{3}\{g(Y,(\nabla_X\phi)Z)-g(X,(\nabla_Y\phi)Z)+g(X,(\nabla_Z\phi)Y)\} \end{aligned} \tag{4.35}$$

sonucu elde edilir. (4.35) eşitliğinde (4.18) kullanılırsa

$$\begin{aligned} d\Phi(X,Y,Z) &= \frac{1}{3}\{-g(X,\phi Z)g(Y,\xi)+\eta(Z)g(Y,\phi X) \\ &\quad +g(Y,\phi Z)g(X,\xi)-\eta(Z)g(X,\phi Y) \\ &\quad -g(Z,\phi Y)g(X,\xi)+\eta(Y)g(X,\phi Z)\} \end{aligned} \tag{4.36}$$

yazılır. (4.36) eşitliğinde (4.8) kullanılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned} d\Phi(X,Y,Z) &= \frac{1}{3}\{\eta(Y)\,g(X,\phi Z)+\eta(Z)\,g(Y,\phi X) \\ &\quad -\eta(X)\,g(Y,\phi Z)-\eta(Z)\,g(X,\phi Y) \\ &\quad +\eta(X)\,g(Z,\phi Y)+\eta(Y)\,g(X,\phi Z)\} \\ &= \frac{1}{3}\{-2\eta(X)\,g(Y,\phi Z)+2\eta(Y)\,g(X,\phi Z)-2\eta(Z)\,g(X,\phi Y)\} \\ &= -2\eta\wedge\Phi(X,Y,Z) \end{aligned} \tag{4.37}$$

elde edilir. Hemen hemen değme Lorentzian manifoldun normal olması için $N^{(1)}$ değerinin sıfıra eşit olması gerekmektedir. (4.14) eşitliğinde $d\eta=0$ olduğundan dolayı

$$N^{(1)} = N_{\phi}(X,Y) \tag{4.38}$$

yazılır. (4.13) ifadesinde Lie türev yardımıyla

$$\begin{aligned} N_{\phi}(X,Y) &= \phi(\phi\nabla_X Y-\phi\nabla_Y X)+\nabla_{\phi X}\phi Y-\nabla_{\phi Y}\phi X \\ &\quad -\phi(\nabla_{\phi X}Y-\nabla_Y\phi X)-\phi(\nabla_X\phi Y-\nabla_{\phi Y}X) \end{aligned} \tag{4.39}$$

bulunur. (4.39) eşitliği

$$\begin{aligned} N_{\phi}(X,Y) &= -\phi(\nabla_X\phi Y-\phi\nabla_X Y)+\phi(\nabla_Y\phi X-\phi\nabla_Y X) \\ &\quad +(\nabla_{\phi X}\phi Y-\phi\nabla_{\phi X}Y)-(\nabla_{\phi Y}\phi X-\phi\nabla_{\phi Y}X) \end{aligned} \tag{4.40}$$

şeklinde düzenlenir. (4.40) denkleminde (4.34) ve (4.18) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} N_{\phi}(X,Y) &= -\phi(-g(X,\phi Y)\,\xi+\eta(Y)\,\phi X)+\phi(-g(Y,\phi X)\,\xi+\eta(X)\,\phi Y) \\ &\quad -g(\phi X,\phi Y)\,\xi+\eta(Y)\,\phi^2 X+g(\phi Y,\phi X)\,\xi-\eta(X)\,\phi^2 Y \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.41}$$

olduğu gösterilir.

Sonuç 4.2.1 (4.18) nolu eşitlik kullanılırsa

$$\nabla_X\xi = -X+\eta(X)\xi \tag{4.42}$$

elde edilir.

İspat (4.18) nolu eşitlikte yer alan $(\nabla_X\phi)\,Y$ ifadesi yerine

$$(\nabla_X\phi)\,Y = \nabla_X\phi Y-\phi(\nabla_X Y)$$

yazılır ve $Y = \xi$ alınırsa

$$\nabla_X \phi\xi - \phi\left(\nabla_X \xi\right) = -g\left(X, \phi\xi\right)\xi + \eta(\xi)\phi X \tag{4.43}$$

elde edilir. (4.43) eşitliğinde (4.1) ve (4.2) nolu eşitlikler kullanılır ve eşitliğin her iki tarafına ϕ operatörü uygulanılırsa

$$\phi^2\left(\nabla_X \xi\right) = -\phi^2 X \tag{4.44}$$

bulunur. (4.44) eşitliğinde (4.1) kullanılırsa

$$-\nabla_X \xi + \eta\left(\nabla_X \xi\right)\xi = X - \eta\left(X\right)\xi$$

sonucuna ulaşılır. Böylece

$$\nabla_X \xi = -X + \eta(X)\xi$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.2 M Lorentzian Kenmotsu manifold, η $1-$form olsun. $\forall X, Y \in \chi\left(M\right)$ vektör alanları için

$$\left(\nabla_X \eta\right) Y = g\left(X, Y\right) + \eta\left(X\right)\eta\left(Y\right) \tag{4.45}$$

eşitliği sağlanır.

İspat M Lorentzian Kenmotsu manifoldu üzerinde g metriğinin Levi-Civita kovaryant türevi ∇ olmak üzere, η $1-$formun kovaryant türevinden yola çıkılarak

$$\left(\nabla_X \eta\right) Y = X\left[\eta\left(Y\right)\right] - \eta\left(\nabla_X Y\right) \tag{4.46}$$

yazılır. (4.46) eşitliğinde (4.8) kullanılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \left(\nabla_X \eta\right) Y &= -X\left[g\left(Y, \xi\right)\right] + g\left(\nabla_X Y, \xi\right) \\ &= -g\left(\nabla_X Y, \xi\right) - g\left(Y, \nabla_X \xi\right) + g\left(\nabla_X Y, \xi\right) \\ &\quad -g\left(Y, \nabla_X \xi\right) \end{aligned} \tag{4.47}$$

elde edilir. (4.47) ifadesinde $\nabla_X \xi$ karşılığı yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \left(\nabla_X \eta\right) Y &= -g\left(Y, -X + \eta(X)\xi\right) \\ &= +g\left(X, Y\right) - \eta\left(X\right) g\left(Y, \xi\right) \\ &= g\left(X, Y\right) + \eta\left(X\right)\eta\left(Y\right) \end{aligned}$$

sonucu bulunur.

4.3 Lorentzian Kenmotsu Manifoldlarda Eğrilik Tensörleri

Bu bölümde, Lorentzian Kenmotsu manifoldlarında eğrilik tensörleri ile ilgili çalışmalar ve hesaplamalar verilmiştir.

Sonuç 4.3.1 M Lorentzian Kenmotsu manifold, R Riemann eğrilik tensörü, ξ karakteristik vektör alanı olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ vektör alanları için

$$R(X,Y)\xi = \eta(X)Y - \eta(Y)X \tag{4.48}$$

eşitliği sağlanır.

İspat R Riemann eğrilik tensörü

$$R(X,Y)\xi = \nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_Y\nabla_X\xi - \nabla_{[X,Y]}\xi \tag{4.49}$$

tanımında (4.42) nolu eşitlik kullanılırsa $\nabla_X\nabla_Y\xi$ ifadesi

$$\begin{aligned} \nabla_X\nabla_Y\xi &= \nabla_X(-Y + \eta(Y)\xi) \\ &= -\nabla_X Y + \nabla_X\eta(Y)\xi \end{aligned} \tag{4.50}$$

bulunur. η $1-$formun kovaryant türevinden yola çıkılarak $\nabla_X\eta(Y)\xi$ değeri

$$\nabla_X\eta(Y)\xi = (\nabla_X\eta)Y\xi + \eta(\nabla_X Y)\xi + \eta(Y)\nabla_X\xi \tag{4.51}$$

şeklinde yazılır. (4.51) değeri (4.50) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\nabla_X\nabla_Y\xi = -\nabla_X Y + (\nabla_X\eta)Y\xi + \eta(\nabla_X Y)\xi + \eta(Y)\nabla_X\xi$$

elde edilir. (4.42) ve (4.45) kullanılırsa $(\nabla_X\eta)Y$ ve $\nabla_X\xi$ karşılıkları yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \nabla_X\nabla_Y\xi &= -\nabla_X Y + g(X,Y)\xi + \eta(X)\eta(Y)\xi \\ &\quad +\eta(\nabla_X Y)\xi + \eta(Y)(-X + \eta(X)\xi) \end{aligned} \tag{4.52}$$

sonucuna ulaşılır. (4.52) eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned} \nabla_X\nabla_Y\xi &= -\nabla_X Y + g(X,Y)\xi + 2\eta(X)\eta(Y)\xi \\ &\quad +\eta(\nabla_X Y)\xi - \eta(Y)X \end{aligned} \tag{4.53}$$

bulunur. Aynı şekilde $\nabla_Y\nabla_X\xi$ ifadesi

$$\begin{aligned} \nabla_Y\nabla_X\xi &= -\nabla_Y X + g(Y,X)\xi + 2\eta(Y)\eta(X)\xi \\ &\quad +\eta(\nabla_Y X)\xi - \eta(X)Y \end{aligned} \tag{4.54}$$

şeklinde bulunur. $\nabla_{[X,Y]}\xi$ ifadesi (4.42) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\nabla_{[X,Y]}\xi &= -[X,Y]+\eta([X,Y])\,\xi \\ &\quad -\nabla_X Y+\nabla_Y X+\eta(\nabla_X Y)\,\xi-\eta(\nabla_Y X)\,\xi\end{aligned} \tag{4.55}$$

elde edilir. (4.53), (4.54) ve (4.55) ifadeleri (4.49) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}R(X,Y)\,\xi &= -\nabla_X Y+g(X,Y)\,\xi+2\eta(X)\,\eta(Y)\,\xi \\ &\quad +\eta(\nabla_X Y)\,\xi-\eta(Y)\,X \\ &\quad +\nabla_Y X-g(Y,X)\,\xi-2\eta(Y)\,\eta(X)\,\xi \\ &\quad -\eta(\nabla_Y X)\,\xi+\eta(X)\,Y \\ &\quad +\nabla_X Y-\nabla_Y X-\eta(\nabla_X Y)\,\xi+\eta(\nabla_Y X)\,\xi\end{aligned} \tag{4.56}$$

hesaplanır. (4.56) eşitliğinde gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$R(X,Y)\,\xi=\eta(X)\,Y-\eta(Y)\,X$$

elde edilir.

Sonuç 4.3.2 M Lorentzian Kenmotsu manifold, R Riemann eğrilik tensörü, ξ karakteristik vektör alanı olsun. $\forall X,Y\in\chi(M)$ vektör alanları için

$$R(\xi,X)\,Y=g(X,Y)\,\xi+\eta(Y)\,X, \tag{4.57}$$

$$R(X,\xi)\,Y=-g(X,Y)\,\xi-\eta(Y)\,X \tag{4.58}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat (4.48) eşitliğinin her iki tarafına Z ile iç çarpım uygulanırsa

$$g(R(X,Y)\,\xi,Z)=R(X,Y,\xi,Z)=\eta(X)\,g(Y,Z)-\eta(Y)\,g(X,Z) \tag{4.59}$$

bulunur. Riemann eğrilik tensörü özelliği gereği (4.59) ifadesi

$$R(X,Y,\xi,Z)=R(\xi,Z,X,Y)=\eta(X)\,g(Y,Z)-\eta(Y)\,g(X,Z) \tag{4.60}$$

elde edilir. (4.60) eşitliği metriğin lineerlik özelliği kullanılırsa

$$g(R(\xi,Z)\,X,Y)=g(\eta(X)\,Z+g(X,Z)\,\xi,Y) \tag{4.61}$$

olarak yazılır. (4.61) eşitliğin iki tarafında yer alan iç çarpım ifadeleri birbirine eşitlenir ve $Z=X, X=Y$ alınırsa

$$R(\xi,X)\,Y=g(X,Y)\,\xi+\eta(Y)\,X \tag{4.62}$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.62) eşitliğinin her iki tarafına Z ile iç çarpım uygulanırsa

$$g\left(R\left(\xi,X\right)Y,Z\right)=R(\xi,X,Y,Z)=-\eta\left(Z\right)g\left(X,Y\right)+\eta\left(Y\right)g\left(X,Z\right) \tag{4.63}$$

bulunur. Riemann eğrilik tensörü özelliği gereği (4.63) ifadesi

$$R(\xi,X,Y,Z)=-R(X,\xi,Y,Z)=-\eta\left(Z\right)g\left(X,Y\right)+\eta\left(Y\right)g\left(X,Z\right) \tag{4.64}$$

şeklinde yazılır. (4.64) eşitliği metriğin lineerlik özelliği kullanılırsa

$$g\left(R\left(X,\xi\right)Y,Z\right)=g\left(-g\left(X,Y\right)\xi-\eta\left(Y\right)X,Z\right) \tag{4.65}$$

olarak yazılır. (4.65) eşitliğin iki tarafında yer alan iç çarpım ifadeleri birbirine eşitlenirse

$$R\left(X,\xi\right)Y=-g\left(X,Y\right)\xi-\eta\left(Y\right)X$$

elde edilir.

Sonuç 4.3.3 M Lorentzian Kenmotsu manifold, R Riemann eğrilik tensörü, ξ karakteristik vektör alanı ve η $1-$form olsun. Her $X,Y,Z\in\chi\left(M\right)$ vektör alanları için

$$\eta\left(R\left(X,Y\right)Z\right)=g\left(Y,Z\right)\eta\left(X\right)-g\left(X,Z\right)\eta\left(Y\right) \tag{4.66}$$

eşitliği sağlanır.

İspat R Riemann eğrilik tensörü olmak üzere $\forall X,Y,Z,W\in\chi\left(M\right)$ için

$$R\left(X,Y,Z,W\right)=g\left(R\left(X,Y\right)Z,W\right) \tag{4.67}$$

olur. (4.67) ifadesinde $W=\xi$ alınırsa

$$R\left(X,Y,Z,\xi\right)=g\left(R\left(X,Y\right)Z,\xi\right)=-\eta\left(R\left(X,Y\right)Z\right)$$

bulunur. R Riemann eğrilik tensörü özelliği yardımıyla

$$-\eta\left(R\left(X,Y\right)Z\right)=R\left(X,Y,Z,\xi\right)=-R\left(X,Y,\xi,Z\right)=-g\left(R\left(X,Y\right)\xi,Z\right) \tag{4.68}$$

elde edilir. (4.48) ifadesi (4.68) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}-\eta\left(R\left(X,Y\right)Z\right) &= -g\left(\eta\left(X\right)Y-\eta\left(Y\right)X,Z\right)\\ &= -g\left(Y,Z\right)\eta\left(X\right)+g\left(X,Z\right)\eta\left(Y\right)\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\eta\left(R\left(X,Y\right)Z\right)=g\left(Y,Z\right)\eta\left(X\right)-g\left(X,Z\right)\eta\left(Y\right)$$

elde edilir.

Sonuç 4.3.4 M Lorentzian Kenmotsu manifoldunda S Ricci eğrilik tensörü, Q Ricci operatörü olmak üzere

$$S(X,\xi) = -2n\eta(X), \tag{4.69}$$

$$S(\xi,\xi) = -2n, \tag{4.70}$$

$$Q\xi = 2n\xi \tag{4.71}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat (4.48) eşitliğinin iki tarafına Z ile iç çarpım uygulanırsa

$$g(R(X,Y)\xi,Z) = \eta(X)g(Y,Z) - \eta(Y)g(X,Z) \tag{4.72}$$

yazılır. Riemann eğrilik tensörü özelliği gereği (4.72) ifadesi

$$g(R(Y,X)\xi,Z) = \eta(Y)g(X,Z) - \eta(X)g(Y,Z) \tag{4.73}$$

şeklinde yazılır. (4.73) eşitliğinde $Y = Z = e_i$ alınırsa

$$S(X,\xi) = \sum_{i=1}^{2n+1} g(e_i,e_i)\,g(R(e_i,X)\xi,e_i) = \sum_{i=1}^{2n+1} g(e_i,e_i)\left[\eta(e_i)g(X,e_i) - \eta(X)g(e_i,e_i)\right] \tag{4.74}$$

bulunur. (4.74) eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned} S(X,\xi) &= \textstyle\sum_{i=1}^{2n} \eta(e_i)g(X,e_i) - \eta(X)g(e_i,e_i) \\ &\quad -\eta(\xi)g(X,\xi) + \eta(X)g(\xi,\xi) \end{aligned} \tag{4.75}$$

yazılır. (4.75) eşitliğinde (4.8) kullanılırsa

$$S(X,\xi) = -2n\eta(X) \tag{4.76}$$

elde edilir. (4.76) eşitliğinde $X = \xi$ yazılırsa

$$S(\xi,\xi) = -2n$$

bulunur. Q Ricci operatörü $S(X,Y) = g(QX,Y)$ tanımı gereği (4.76) kullanılırsa

$$S(X,\xi) = S(\xi,X) = g(Q\xi,X) = -2n\eta(X) \tag{4.77}$$

şeklinde yazılır. (4.77) eşitliğinin her iki tarafı X ile iç çarpım şeklinde yazılırsa

$$g(Q\xi,X) = g(2n\xi,X)$$

yazılır. Böylece

$$Q\xi = 2n\xi$$

bulunur.

Sonuç 4.3.5 M $3-$boyutlu Lorentzian Kenmotsu manifoldunda S Ricci eğrilik tensörü, Q Ricci operatörü olmak üzere

$$S(X,Y) = \left(\frac{\tau}{2} - 2n + 1\right) g(X,Y) + \left(\frac{\tau}{2} - 4n + 1\right) \eta(X)\eta(Y), \tag{4.78}$$

$$QX = \left(\frac{\tau}{2} - 2n + 1\right) X - \left(\frac{\tau}{2} - 4n + 1\right) \eta(X)\xi \tag{4.79}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat (4.48) eşitliğinde $Y = \xi$ alınırsa

$$\begin{aligned} R(X,\xi)\xi &= \eta(X)\xi - \eta(\xi)X \\ &= \eta(X)\xi - X \end{aligned} \tag{4.80}$$

bulunur.(4.80) eşitliğinin her iki tarafına Y ile iç çarpım uygulanırsa (4.8) yardımıyla

$$g(R(X,\xi)\xi, Y) = -\eta(X)\eta(Y) - g(X,Y) \tag{4.81}$$

elde edilir. Riemann eğrilik tensörü özelliği gereği

$$g(R(X,\xi)\xi, Y) = g(R(\xi,X)Y,\xi)$$

yazılır. Böylece

$$g(R(\xi,X)Y,\xi) = -\eta(X)\eta(Y) - g(X,Y) \tag{4.82}$$

bulunur. (3.14) eşitliğinde $X = \xi$, $Y = X$ ve $Z = Y$ yazılırsa

$$\begin{aligned} R(\xi,X)Y &= S(X,Y)\xi - g(\xi,Y)QX + g(X,Y)Q\xi - S(\xi,Y)X \\ &\quad -\frac{\tau}{2}\left[g(X,Y)\xi - g(\xi,Y)X\right] \end{aligned} \tag{4.83}$$

elde edilir. (4.83) eşitliğinin her iki tarafına ξ ile iç çarpım uygulanılırsa

$$\begin{aligned} g(R(\xi,X)Y,\xi) &= S(X,Y)g(\xi,\xi) - g(\xi,Y)S(X,\xi) \\ &\quad + g(X,Y)S(\xi,\xi) - g(X,\xi)S(\xi,Y) \\ &\quad -\frac{\tau}{2}\left[g(X,Y)g(\xi,\xi) - g(\xi,Y)g(\xi,X)\right] \end{aligned} \tag{4.84}$$

yazılır. (4.84) eşitliğinde (4.8) kullanılır ve eşitlik düzenlenirse

$$\begin{aligned} g\left(R\left(\xi,X\right)Y,\xi\right) &= -S\left(X,Y\right)+\eta\left(Y\right)S\left(X,\xi\right) \\ &\quad +g\left(X,Y\right)S\left(\xi,\xi\right)+\eta\left(X\right)S\left(\xi,Y\right) \\ &\quad -\frac{\tau}{2}\left[-g\left(X,Y\right)-\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)\right] \end{aligned} \tag{4.85}$$

olur. (4.85) eşitliğinde (4.69) ve (4.70) ifadeleri kullanılır ve eşitlik düzenlenirse

$$\begin{aligned} g\left(R\left(\xi,X\right)Y,\xi\right) &= -S\left(X,Y\right)-4n\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)-2ng\left(X,Y\right) \\ &\quad -\frac{\tau}{2}\left[-g\left(X,Y\right)-\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)\right] \end{aligned} \tag{4.86}$$

sonucuna ulaşılır. (4.82) ve (4.86) ifadeleri birbirine eşitlenirse

$$\begin{aligned} -\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)-g\left(X,Y\right) &= -S\left(X,Y\right)-4n\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)-2ng\left(X,Y\right) \\ &\quad -\frac{\tau}{2}\left[-g\left(X,Y\right)-\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)\right] \end{aligned} \tag{4.87}$$

yazılır. (4.87) ifadesi düzenlenirse

$$S\left(X,Y\right)=\left(\frac{\tau}{2}-2n+1\right)g\left(X,Y\right)+\left(\frac{\tau}{2}-4n+1\right)\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)$$

elde edilir. Q Ricci operatörü $S\left(X,Y\right)=g\left(QX,Y\right)$ tanımı gereği (4.78) kullanılırsa

$$g\left(QX,Y\right)=\left(\frac{\tau}{2}-2n+1\right)g\left(X,Y\right)+\left(\frac{\tau}{2}-4n+1\right)\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right) \tag{4.88}$$

şeklinde ifade edilir. (4.88) eşitliğinin her iki tarafı X ile iç çarpım şeklinde yazılırsa

$$g\left(QX,Y\right)=g\left(\left(\frac{\tau}{2}-2n+1\right)X-\left(\frac{\tau}{2}-4n+1\right)\eta\left(X\right)\xi,Y\right) \tag{4.89}$$

yazılır. (4.89) eşitliğinden

$$QX=\left(\frac{\tau}{2}-2n+1\right)X-\left(\frac{\tau}{2}-4n+1\right)\eta\left(X\right)\xi$$

bulunur.

Sonuç 4.3.6 $2n+1$ boyutlu M Lorentzian Kenmotsu manifoldunda τ skaler eğriliği $n\neq 1$ olmak üzere

$$\tau=4n \tag{4.90}$$

şeklinde hesaplanır.

İspat. $2n+1$ boyutlu M Lorentzian Kenmotsu manifoldunda $\{e_1,e_2,...,e_{2n},\xi\}$ ortonormal baz vektörleri verilsin. Manifold üzerinde τ skaler eğriliği, S Ricci eğrilik tensörü cinsinden

$$\tau=\sum_{i=1}^{2n+1}S\left(e_i,e_i\right)=\sum_{i=1}^{2n}S\left(e_i,e_i\right)-S\left(\xi,\xi\right) \tag{4.91}$$

şeklinde yazılır. $1 \leq i \leq 2n$ olmak üzere $2n$ spacelike baz vektörü için $S(e_i, e_i)$ ifadesi birbirine eşit olduğundan dolayı (4.91) eşitliği

$$\tau = 2nS(e_1, e_1) - S(\xi, \xi) \tag{4.92}$$

şeklinde yazılabilir. (4.78) ifadesinde $X = Y = e_1$ alınırsa

$$S(e_1, e_1) = \left(\frac{\tau}{2} - 2n + 1\right) g(e_1, e_1) + \left(\frac{\tau}{2} - 4n + 1\right) \eta(e_1) \eta(e_1) \tag{4.93}$$

elde edilir. (4.93) eşitliğinde $g(e_1, e_1) = 1$ ve $\eta(e_1) = 0$ sonuçları kullanılırsa

$$S(e_1, e_1) = \frac{\tau}{2} - 2n + 1 \tag{4.94}$$

sonucuna ulaşılır. (4.92) eşitliğinde (4.94) ve (4.70) ifadeleri yerine yazılırsa

$$\tau = 2n\left(\frac{\tau}{2} - 2n + 1\right) + 2n \tag{4.95}$$

bulunur. (4.95) eşitliğinde gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\tau(n-1) = 4n(n-1) \tag{4.96}$$

elde edilir. (4.95) eşitliğinde $n \neq 1$ olmak üzere

$$\tau = 4n$$

bulunur.

Sonuç 4.3.7 M $3-$boyutlu Lorentzian Kenmotsu manifold, R Riemann eğrilik tensörü, τ skaler eğrilik ve ξ karakteristik vektör alanı olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ vektör alanları için

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \left(\frac{\tau}{2} - 4n + 2\right)(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y) \\ &\quad + \left(\frac{\tau}{2} - 4n + 1\right)(\eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y) \\ &\quad + \left(\frac{\tau}{2} - 4n + 1\right)(g(X,Z)\eta(Y)\xi - g(Y,Z)\eta(X)\xi) \end{aligned} \tag{4.97}$$

eşitliği sağlanır.

İspat (4.78) ve (4.79) ifadeleri (3.14) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \left(\frac{\tau}{2} - 2n + 1\right) g(Y,Z)X + \left(\frac{\tau}{2} - 4n + 1\right) \eta(Y)\eta(Z)X \\ &\quad - \left(\frac{\tau}{2} - 2n + 1\right) g(X,Z)Y + \left(\frac{\tau}{2} - 4n + 1\right) g(X,Z)\eta(Y)\xi \\ &\quad + \left(\frac{\tau}{2} - 2n + 1\right) g(Y,Z)X - \left(\frac{\tau}{2} - 4n + 1\right) g(Y,Z)\eta(X)\xi \\ &\quad - \left(\frac{\tau}{2} - 2n + 1\right) g(X,Z)Y - \left(\frac{\tau}{2} - 2n + 1\right) \eta(X)\eta(Z)Y \\ &\quad - \frac{\tau}{2}(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y) \end{aligned} \tag{4.98}$$

elde edilir. (4.98) eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \left(\frac{\tau}{2}-4n+2\right)(g(Y,Z)X-g(X,Z)Y) \\ &+\left(\frac{\tau}{2}-4n+1\right)(\eta(Y)\eta(Z)X-\eta(X)\eta(Z)Y) \\ &+\left(\frac{\tau}{2}-4n+1\right)(g(X,Z)\eta(Y)\xi-g(Y,Z)\eta(X)\xi) \end{aligned}$$

olduğu gösterilir.

5. OSSERMAN MANİFOLDLAR

Bu kısımda, Osserman problemi ile ilgili yapılan çalışmalar, tanımlar ve teoremler verilmiştir. Ayrıca Osserman koşulunu sağlayan bazı örnek manifoldlar incelenmiştir.

5.1 Semi-Riemann Geometride Osserman Problemi

Bu bölümde, semi-Riemann geometride Osserman problemi ile ilgili yapılan çalışmalar aktarılmıştır.

Tanım 5.1.1 (M, g) semi-Riemann manifoldunda, ∇ Levi-Civita koneksiyonu için R eğrilik tensörü

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

şeklinde yazılır. $Z \in T_pM$ vektörü için $R(.,Z)Z$ lineer operatörü

$$\begin{aligned} R(.,Z)Z: \quad & T_pM \to T_pM \\ & X \to R(X,Z)Z \end{aligned}$$

şekilde tanımlansın. $R(X,Z)Z$ ifadesine Z ile iç çarpım uygulanırsa, eğrilik özellikleri yardımı ile

$$g(R(X,Z)Z,Z) = 0$$

olduğu görülür. O halde $R(.,Z)Z$ operatörü

$$R(.,Z)Z : T_pM \to Z^{\perp}$$

şeklinde tanımlanır. (M, g) bir semi-Riemann manifold ve $Z \in S(M)$ birim vektörü olsun. $R(.,Z)Z$ lineer operatörünün $Z^{\perp}$ vektörüne kısıtlanmasıyla oluşturulan $R_Z : Z^{\perp} \to Z^{\perp}$ operatörüne **Jakobi operatör** denir ve

$$R_Z X = R(X,Z)Z \tag{5.1}$$

şeklinde ifade edilir (Garcia vd., 2002).

Yardımcı Teorem 5.1.1 (M, g) bir semi-Riemann manifold olsun. (M, g) üzerinde tanımlı R Riemann eğrilik tensörü ile ifade edilen $R_Z : Z^{\perp} \to Z^{\perp}$ Jakobi operatörü **self adjointtir** (Garcia vd., 2002).

İspat. $X, Y \in Z^{\perp}$ olsun. Eğrilik operatörünün özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(R_Z X, Y) &= g(R(X,Z)Z,Y) = g(R(Z,Y)X,Z) = g(R(Y,Z)Z,X) \\ &= g(R_Z Y, X) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece R_Z self-adjointtir (Garcia vd., 2002).

(M, g) bir semi-Riemann manifold olsun. $Z \in S(M)$ ve R_Z Jakobi operatörü verilsin. $Z^{\perp}$ için tanımlı $\{X_i, ..., X_{n-1}\}$ ortonormal bazı kullanılırsa

$$\begin{aligned} traceR_Z &= \sum_{i=1}^{n-1} g(X_i, X_i) g(R_Z X_i, X_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} g(X_i, X_i) g(R(X_i, Z)Z, X_i) \\ &= Ric(Z, Z) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. $\forall X \in Z^{\perp}$, $X \neq 0$ birim vektörü için X ve Z vektörlerinin gerdiği $\mathcal{P} = span\{X, Z\}$ düzlemi, T_pM üzerine dejenere edilmemiş bir düzlem oluşturur ve $\kappa(\mathcal{P})$ eğriliği

$$\kappa(\mathcal{P}) = \frac{g(R(X,Z)Z,X)}{g(X,X)g(Z,Z) - g(X,Z)^2} = \frac{g(R_Z X, X)}{g(X,X)g(Z,Z)}$$

şeklinde tanımlanır (Garcia vd., 2002).

Tanım 5.1.2 (M, g) bir semi-Riemann manifold olsun. M üzerinde bir $p \in M$ noktası için aşağıdaki tanımlar geçerlidir (Garcia vd., 2002).

$a)$ Eğer R_Z Jakobi operatörünün karakteristik polinomu seçilen $Z \in S_p^-(M)$ timelike vektörüne göre değişmiyorsa (M, g) manifolduna p noktasında **timelike Osserman manifold** denir (Garcia vd., 2002).

$b)$ Eğer R_Z Jakobi operatörünün karakteristik polinomu seçilen $Z \in S_p^+(M)$ spacelike vektörüne göre değişmiyorsa (M, g) manifolduna p noktasında **spacelike Osserman manifold** denir (Garcia vd., 2002).

Teorem 5.1.1 (M, g) bir semi-Riemann manifold olsun. M üzerinde bir $p \in M$ noktası için (M, g) manifoldu p noktasında timelike Osserman manifolddur ancak ve ancak (M, g) manifoldu p noktasında spacelike Osserman manifolddur (Garcia vd., 2002).

Tanım 5.1.3 (M, g) bir semi-Riemann manifoldu olsun. Eğer (M, g) manifoldu bir $p \in M$ noktasında hem timelike hem de spacelike Osserman ise (M, g) manifolduna p noktasında **noktasal (pointwise) Osserman manifold** adı verilir (Garcia vd., 2002).

Tanım 5.1.4 (M, g) bir semi-Riemann manifold verilsin. Eğer (M, g) manifoldu $p \in M$ noktasında Osserman ise (M, g) manifolduna **noktasal (pointwise) Osserman manifold** adı verilir. Eğer (M, g) manifoldu $\forall p \in M$ noktaları için Osserman ise (M, g) manifolduna **global (globally) Osserman manifold** adı verilir (Garcia vd., 2002).

Yardımcı Teorem 5.1.2 (M, g) bir semi-Riemann manifold olsun. Eğer (M, g) manifoldu, $p \in M$ noktasında Osserman manifold ise (M, g) manifoldu $p \in M$ noktasında **Einstein manifold** olarak adlandırılır ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$Ric = \lambda g$$

eşitliği sağlanır (Garcia vd., 2002).

5.2 Osserman Manifold Örnekleri

Bu bölümde, Osserman koşulunu sağlayan bazı örnek manifoldlar verilmiştir.

Tanım 5.2.1 V vektör uzayı olmak üzere $\forall X, Y, Z, W \in V$ için

$$F : V \times V \times V \times V \to \mathbb{R}$$

operatörü

$$\begin{aligned} F(X,Y,Z,W) &= -F(Y,X,Z,W) = -F(X,Y,W,Z), \\ F(X,Y,Z,W) &= F(Z,W,X,Y), \\ F(X,Y,Z,W) &+ F(Y,Z,X,W) + F(Z,X,Y,W) = 0 \end{aligned}$$

şartlarını sağlıyorsa **cebirsel (algebraic) eğrilik operatörü** olarak adlandırılır. V vektör uzayı üzerinde $\langle , \rangle$ iç çarpım verilsin. $\forall X, Y, Z, W \in V$ için $\widetilde{F} : V \times V \times V \to V$ cebrik eğrilik tensörü

$$\left\langle \widetilde{F}(X,Y)Z, W \right\rangle = F(X,Y,Z,W)$$

şeklinde tanımlanır (Garcia vd., 2002).

Örnek 5.2.1 $(V, \langle , \rangle)$ iç çarpım uzayı verilsin. $R^0 : V \times V \times V \to V$ cebrik eğrilik tensörü

$$R^0(X,Y)Z = \langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y$$

şeklinde tanımlansın. $Z \in S(M)$ birim vektöre göre $R^0_Z : Z^\perp \to Z^\perp$ Jakobi operatörü $\forall X \in Z^\perp$ için

$$R^0_Z X = R^0(X,Z)Z = \langle Z,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Z \tag{5.2}$$

şeklinde yazılır. $X \in Z^\perp$ olduğundan dolayı $\langle X,Z\rangle = 0$ olur ve (5.2) eşitliği

$$R^0_Z X = \langle Z,Z\rangle X \tag{5.3}$$

olarak sadeleştirilir. (5.3) eşitliğinden yola çıkarak R^0_Z Jakobi operatörü için

$$R^0_Z = I_{Z^\perp} \tag{5.4}$$

eşitliği elde edilir. (5.4) eşitliğinden R^0_Z Jakobi operatörünün karakteristik polinomunun seçilen $Z \in S(M)$ vektöründen bağımsız olduğu görülür. Böylece R^0 eğrilik tensörü Osserman olarak adlandırılır.

Örnek 5.2.2 V vektör uzayı üzerinde $J^2 = -I$ koşulunu sağlayan $J : V \to V$ kompleks yapısı tanımlansın. (V,J) yapısı üzerinde tanımlı $\forall X,Y \in V$ için
$\langle X, JY\rangle + \langle JX, Y\rangle = 0$ eşitliğini sağlayan $\langle , \rangle$ iç çarpım Hermitian olarak adlandırılır ve $(V,J,\langle , \rangle)$ üçlüsüne Hermitian iç çarpım uzayı adı verilir. $(V,J,\langle , \rangle)$ uzayında
$R^0 : V \times V \times V \to V$ cebrik eğrilik tensörü

$$R^J(X,Y)Z = \langle JX,Z\rangle JY - \langle JY,Z\rangle JX + 2\langle JX,Y\rangle JZ$$

şeklinde tanımlansın. Z vektörüne göre $R^J_Z : Z^\perp \to Z^\perp$ Jakobi operatörü $\forall X \in Z^\perp$ için

$$R^J_Z X = R^J(X,Z)Z = \langle JX,Z\rangle JZ - \langle JZ,Z\rangle JX + 2\langle JX,Z\rangle JZ$$

yazılır. Hermitian olma koşulu, $\langle X, JY\rangle + \langle JX,Y\rangle = 0$ eşitliği kullanılarak $\langle JZ,Z\rangle = 0$ bulunur ve yine bu özellik yardımı ile

$$R^J_Z X = -3\langle X, JZ\rangle JZ \tag{5.5}$$

elde edilir. (5.5) eşitliğinde X vektörünün alabileceği değere göre

$$R^J_Z = \begin{cases} -3I_{Z^\perp} & X \in Span\{J_Z\} \\ 0 & X \in (Span\{J_Z\})^\perp \cap Z^\perp \end{cases} \tag{5.6}$$

şeklinde ifade edilir. (5.6) eşitliğinden R^J_Z Jakobi operatörünün karakteristik polinomunun seçilen $Z \in S(M)$ vektöründen bağımsız olduğu görülür. Böylece R^J eğrilik tensörü Osserman olarak adlandırılır.

5.3 Lorentzian Osserman Manifold

Bu bölümde, Lorentz geometride Osserman problemi ile ilgili yapılan çalışmalar, tanım ve teoremler aktarılmıştır. Ayrıca null Osserman kavramı incelenmiş ve konuyla ilgili bir örnek verilmiştir.

Yardımcı Teorem 5.3.1 $0 < v < n$ olmak üzere v-indeksli g metrik tensöre sahip (M, g) yarı-Riemann manifoldu verilsin. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir (Garcia vd., 1997).

$a)$ $p \in M$ noktasında tüm nondejenere P düzlemleri için $\kappa(P)$ sabittir ve $\forall X, Y, Z \in T_pM$ için $R(X,Y)Z = cR^0(X,Y)Z$ dir.

$b)$ $p \in M$ noktasında tüm dejenere P düzlemleri için $R(X,Y,Y,X) = 0$ dır.

$c)$ $p \in M$ noktasında $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere tüm nondejenere P düzlemleri için $a \leq \kappa(P)$ veya $\kappa(P) \leq b$ yazılır.

$d)$ $p \in M$ noktasında $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere tüm timelike P düzlemleri için $a \leq \kappa(P) \leq b$ yazılır.

Teorem 5.3.1 (M, g) bir Lorentzian manifold olsun. (M, g) manifoldu $p \in M$ noktasında Osserman manifolddur ancak ve ancak $p \in M$ noktasında $\kappa(P)$ sabit kesit eğriliğine sahiptir (Garcia vd., 1997).

İspat M manifoldunun sabit kesit eğriliğine sahip olduğu durumda Osserman manifold olduğu görülmektedir. Bu durumun tersten de geçerli olduğunu ispatlamak için M manifoldunun p noktasında Osserman olduğu kabul edilsin. R_z Jakobi operatörünün özdeğerlerinin $c_1, c_2, ..., c_{n-1}$ ve özdeğerlere karşılık gelen ortonormal özvektörlerinin de sırasıyla $V_1, V_2, ..., V_{n-1}$ olduğunu kabul edelim. $X = \sum_{i=1}^{n-1} a_i V_i \in Z^{\perp}$ birim vektörü için

$$g(R_Z X, X) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i g(R_Z V_i, X) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i c_i g(V_i, X) \tag{5.7}$$

yazılır. (5.7) eşitliğinde X yerine $\sum_{i=1}^{n-1} a_i V_i$ ifadesi yazılırsa

$$g(V_i, X) = a_i$$

bulunur. Böylece (5.7) eşitliği

$$|g(R_Z X, X)| = \leq \sum_{i=1}^{n-1} \mid a_i \mid^2 \mid c_i \mid \leq \sum_{i=1}^{n-1} \mid c_i \mid \tag{5.8}$$

şeklinde yazılır. (5.8) eşitliğinde $|g(R_Z X, X)|$ ifadesinin sınırlı olduğu görülmektedir. Yardımcı Teorem 5.3.1 kullanılarak M manifoldunun $\kappa(\mathcal{P})$ kesit eğriliğinin sabit olduğu söylenir (Garcia vd., 1997).

Tanım 5.3.1 M bir Lorentzian manifold olsun. Eğer $\forall z \in T_p M$ birim timelike vektörü için R_z Jakobi operatörü sabit özdeğerlere sahip ise, R_z Jakobi operatörünün karakteristik polinomu seçilen her $z \in T_p M$ birim timelike vektöründen bağımsız ise, M Lorentzian manifoldu timelike Osserman manifolddur (Garcia vd., 1997).

Null vektörler ile çalışmanın ilk zorluğu null vektörlerinin ortogonal vektörlerinin de kendi gerdiği vektörlerden oluşuyor olmasıdır. (M, g) bir Lorentzian manifold ve $U \in T_p M$ null vektör olsun. $(span\{U\}) \subset U^{\perp}$ olduğundan dolayı $R(., U)U$ operatörünün $U^{\perp}$ vektör kümesine kısıtlanması, $R(U, U)U = 0$, konu hakkında fazla bilgi vermeyecektir. Bu yüzden null vektörler ile çalışırken $U^{\perp}$ kümesinden U vektörünün gerdiği vektörler $span\{U\}$ çıkartılacaktır.

Bu doğrultuda $U \in T_p M$ null vektörü için $\pi : U^{\perp} \to \overline{U}^{\perp}$ operatörü ile $\overline{U}^{\perp} = U^{\perp}/span\{U\}$ vektör kümesi tanımlanır. $\overline{U}^{\perp}$ vektör kümesinde $X, Y \in U^{\perp}$ için $\pi(X) = \overline{X}$ ve $\pi(Y) = \overline{Y}$ olmak üzere

$$\overline{g}\left(\overline{X}, \overline{Y}\right) = g(X, Y)$$

şartını sağlayan belirli iç çarpım tanımlanır (Garcia vd., 2002).

Tanım 5.3.2 (M, g) bir Lorentzian manifold ve $U \in T_p M$ null vektör olsun. $X \in U^{\perp}$ için $\pi(X) = \overline{X}$ olmak üzere

$$\overline{R}_U \overline{X} = \pi\left(R(X, U)U\right)$$

şeklinde tanımlanan $\overline{R}_U : \overline{U}^{\perp} \to \overline{U}^{\perp}$ operatörü U null vektörüne göre **Jakobi operatörü**dür (Garcia vd., 2002).

Tanım 5.3.3 (M,g) bir Lorentzian manifold ve $Z \in T_pM$ birim timelike vektör olsun. $p \in M$ noktasında Z birim timelike vektörüne göre $N(Z)$ **null denklik kümesi (null congruence)**

$$N(Z) = \{U \in T_pM / g(U,U) = 0 \text{ ve } g(U,Z) = -1\}$$

şeklinde tanımlanır (Garcia vd., 2002).

Tanım 5.3.4 (M,g) manifoldu $\dim M \geq 3$ olmak üzere bir Lorentzian manifold olsun. Eğer $\overline{R}_U$ Jakobi operatörünün özdeğerleri seçilen $U \in N(Z)$ vektöründen bağımsız ise, (M,g) Lorentzian manifoldu $Z \in T_pM$ birim timelike vektörüne göre **null Osserman manifolddur** (Garcia vd., 2002).

Yardımcı Teorem 5.3.2 $p \in M$ noktasında sabit kesit eğrilikli (M,g) Lorentzian manifoldu için $\overline{R}_U = 0$ olacağından dolayı (M,g) manifoldu $\forall Z \in T_pM$ birim timelike vektörüne göre null Osserman manifold olacaktır (Garcia vd., 2002).

Yardımcı Teorem 5.3.3 (M,g) manifoldu $\dim M \geq 4$ olmak üzere bir Lorentzian manifold olsun. $p \in M$ noktasında (M,g) manifoldu $Z, Z' \in T_pM$ lineer bağımsız birim timelike vektörlerine göre null Osserman manifold ise (M,g) manifoldu p noktasında sabit kesit eğriliğe sahiptir (Garcia vd., 2002).

Tanım 5.3.5 (M,g) bir Lorentzian manifold ve $Z \in T_pM$ birim timelike vektör olsun. $p \in M$ noktasında Z birim timelike vektörüne göre $S(Z)$ **gök küresi (celestial sphere)**

$$S(Z) = \{X \in Z^{\perp} / g(X,X) = 1\}$$

şeklinde tanımlanır (Garcia vd., 2002).

Tanım 5.3.6 (M,g) bir Lorentzian manifold ve $U \in T_pM$ null vektör olsun.
$\dim W = \dim \overline{U}^{\perp}$ olacak şekilde nondejenere $W \subset U^{\perp}$ alt uzayına $\overline{U}^{\perp}$ in geometrik yansıması denir. g metriğinin W alt uzayına kısıtlanması belirli iç çarpımdır ve $\pi_W : W \to \overline{U}^{\perp}$ operatörü izometriktir. $\overline{X} \in \overline{U}^{\perp}$, $\overline{R}_U$ Jakobi operatörünün c özdeğerli özvektörü olsun. O halde $\pi(X) = \overline{X}$ şartını sağlayan $X \in W$ vektörü $\overline{R}_U$ Jakobi operatörünün W alt uzayında c özdeğerli özvektörünün geometrik yansımasıdır (Garcia vd., 2002).

(M,g) bir Lorentzian manifold ve $Z \in T_pM$ birim timelike vektör olsun. O halde $\forall U \in N(Z)$ için $U = Z + Y$ koşulunu sağlayan tek bir $Y \in S(Z)$ bulunur. Bu yüzden

$$\psi(U) = U - Z = Y$$

şeklinde tanımlanan $\psi : N(Z) \to S(Z)$ operatörü diffeomorfizmdir. $U \in N(Z)$ için $\overline{U}^{\perp}$ in geometrik yansıması olan W alt uzayı $W = U^{\perp} \cap Z^{\perp}$ şeklinde $Z^{\perp}$ kümesini de içererek oluşturulsun. O halde $\forall U \in N(Z)$, $\exists X \in W$ öyle ki $X = U - Z$. Bulunan her X değeri için W alt uzayı $T_XS(Z)$ ile tanımlanarak $\overline{U}^{\perp}$ nin de $T_XS(Z)$ ile tanımlanmasını sağlar. Buna göre $\overline{R}_U$ Jakobi operatörü $\pi(Y) = \overline{Y}$, $\pi(R_XY) = \overline{R}_U\overline{Y}$ koşullarını sağlayan $R_X : T_XS(Z) \to T_XS(Z)$ operatörünün tanımlanmasını sağlar. Bu durumda, $\overline{R}_U$ ve R_X operatörleri aynı karakteristik polinomlara sahiptir (Garcia vd., 2002).

Tanım 5.3.7 M manifoldu üzerinde p noktasında T_pM tanjant uzay olsun. ξ karakteristik vektörüne ortogonal $X \in T_pM$ vektörü ile ϕX vektörünün gerdiği $\{X, \phi X\}$ düzleme ϕ-düzlem denir. $\{X, \phi X\}$ düzleminin $\kappa\{X, \phi X\}$ kesit eğriliğine **ϕ-kesit eğriliği** denir (Tanno, 1969; Tanno, 1973).

Tanım 5.3.8 (M,g) bir Lorentzian Sasakian manifold olsun. (M,g) manifoldu sabit φ-kesit eğriliğine sahip olduğu zaman **Lorentzian Sasakian uzay formu** adını alır (Ogiue, 1964).

Yardımcı Teorem 5.3.4 Bir manifoldun p noktasında sabit φ-kesit eğriliğine sahip olması için gerekli ve yeter şart $c \in \mathbb{R}$ ve R Riemann eğrilik tensörü olmak üzere

$$R(X, \phi X, X, \phi X) = cg(\phi X, \phi X)$$

koşulunun sağlanmasıdır (Tanno, 1969; Tanno, 1973).

Yardımcı Teorem 5.3.5 Lorentzian Sasakian manifoldunun Lorentzian Sasakian uzay form haline gelmesi için gerekli ve yeter şart R Riemann eğrilik tensörü için

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \frac{(k\text{-}3)}{4}\left(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\right) - \frac{(k\text{+}1)}{4}\left(\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X\right) \\ &\quad + \frac{(k\text{+}1)}{4}[g(X,Z)\eta(Y)\xi - g(Y,Z)\eta(X)\xi + g(\phi Y, Z)\phi X + g(\phi Z, X)\phi Y \\ &\quad - 2g(\phi X, Y)\phi Z] \end{aligned} \tag{5.9}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır (Ogiue, 1964; Takahashi, 1969; Erdogan ve Ikawa, 1996).

Örnek 5.3.1 Lorentizan Sasakian uzay formu ξ karakteristik vektör alanına göre global (globally) null Osserman manifolddur (Garcia vd., 2002).

Lorentzian Sasakian uzay formunun ξ karakteristik vektör alanına göre null Osserman manifold olduğunu göstermek için $U \in N(\xi)$ null vektörü ele alınır ve (5.9) eşitliği ile verilen R Riemann eğrilik tensörünün $R_U : U^{\perp} \to U^{\perp}$ Jakobi operatörü $X \in U^{\perp}$ için

$$\begin{aligned} R_U X &= R(X,U)U \\ &= \frac{(k\text{-}3)}{4}\left(g(U,U)X - g(X,U)U\right) - \frac{(k+1)}{4}\left(\eta(X)\eta(U)U - \eta(U)\eta(U)X\right) \\ &\quad + \frac{(k+1)}{4}[g(X,U)\eta(U)\xi - g(U,U)\eta(X)\xi + g(\phi U,U)\phi X + g(\phi U,X)\phi U \\ &\quad - 2g(\phi X,U)\phi U] \end{aligned} \tag{5.10}$$

şeklinde yazılır. (5.10) ifadesinde $X \in U^{\perp} \cap \xi^{\perp}$olduğu için $g(X,U) = 0$ ve $\eta(X) = 0$ sonuçları ve $U \in N(\xi)$ olduğundan dolayı $g(U,U) = 0$ ve $g(U,\xi) = \eta(U) = -1$ değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} R_U X &= R(X,U)U \\ &= \frac{(k+1)}{4}\left[X + g(\phi U,X)\phi U - 2g(\phi X,U)\phi U\right] \end{aligned} \tag{5.11}$$

sonucu elde edilir. Her $U \in N(\xi)$ için $X = \phi Y$ ve $U = \xi + Y$ koşulunu sağlayan bir tek $Y \in S(\xi)$ bulunur (Brunetti, 2014). (5.11) eşitliğinde U yerine $\xi + Y$ yazılırsa

$$\begin{aligned} R_U X &= R(X,U)U \\ &= \frac{(k+1)}{4}\left[X + g(\phi Y,X)\phi Y - 2g(\phi X,Y)\phi Y\right] \end{aligned} \tag{5.12}$$

yazılır. (5.11) eşitliğinde $X = \phi Y$ olduğundan dolayı

$$R(X,U)U = (k+1)X$$

bulunur. Böylece

$$R_U = (k+1)I_{U^{\perp}} \tag{5.13}$$

ifadesi elde edilir. (5.13) eşitliğinden yola çıkarak R_U Jakobi operatörünün özdeğerlerinin seçilen $U \in N(Z)$ değerinden bağımsız olduğu ve Lorentzian Sasakian uzay formunun ξ karakteristik vektör alanına göre null Osserman manifold olduğu görülür.

6. LORENTZIAN KENMOTSU MANİFOLDLARDA OSSERMAN PROBLEMLERİ

Bu kısımda, Lorentzian Kenmotsu manifoldlarında Osserman problemi incelenmiştir. $3-$boyutlu Lorentzian Kenmotsu manifoldlarında R eğrilik tensörü yardımıyla Jakobi operatörü hesaplanmış ve Osserman olma durumları kontrol edilmiştir. Koneksiyon değiştirilerek semi-simetrik metrik ve semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Lorentzian Kenmotsu manifoldlarında Osserman problemi incelenmiştir. Ayrıca bazı eğrilik durumlarına göre Lorentzian Kenmotsu manifoldlarının Osserman olma koşulları incelenmiştir.

6.1 Farklı Koneksiyonlara Sahip $3-$Boyutlu Lorentzian Kenmotsu Manifoldlarda Osserman Problemi

Bu bölümde, Levi-Civita koneksiyonlu, semi-simetrik metrik koneksiyonlu ve semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu $3-$boyutlu Lorentzian Kenmotsu manifoldlarda timelike ve null Osserman problemi incelenmiştir.

Levi-Civita koneksiyonlu $3-$boyutlu Lorentzian Kenmotsu manifoldlarda timelike Osserman

$3-$boyutlu Lorentzian Kenmotsu manifoldlarında R Riemann eğrilik tensörü için R_Z Jakobi operatörü, $Z \in S^-(M)$ birim timelike vektör ve $X \in S(M)$ birim vektör olmak üzere (4.97) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} R_Z \quad &: \quad Z^\perp \to Z^\perp \\ R_Z X \quad &= \quad R(X,Z)Z \\ &= \quad \left(\frac{\tau}{2} - 4n + 2\right)(g(Z,Z)X - g(X,Z)Z) \\ &\quad + \left(\frac{\tau}{2} - 4n + 1\right)(\eta(Z)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Z) \\ &\quad + \left(\frac{\tau}{2} - 4n + 1\right)(g(X,Z)\eta(Z)\xi - g(Z,Z)\eta(X)\xi) \end{aligned} \tag{6.1}$$

şeklinde yazılır. $X \in Z^\perp$ olduğu için $g(X,Z) = 0$ olacaktır. Ayrıca $Z \in S^-(M)$ birim timelike vektör olduğundan dolayı $g(Z,Z) = -1$ olur. Bu bilgiler ışığında (6.1) eşitliği

düzenlenirse

$$\begin{aligned} R_Z X &= -\left(\frac{\tau}{2} - 4n + 2\right) X \\ &\quad + \left(\frac{\tau}{2} - 4n + 1\right) (\eta(Z)\,\eta(Z)\,X - \eta(X)\,\eta(Z)\,Z) \\ &\quad + \left(\frac{\tau}{2} - 4n + 1\right) \eta(X)\,\xi \end{aligned} \tag{6.2}$$

elde edilir. (6.2) eşitliğinde de görüleceği üzere R_Z Jakobi operatörünün özdeğerleri, seçilen $Z \in S^-(M)$ vektöründen bağımsızdır. Bu doğrultuda aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 6.1.1 $3-$boyutlu (M, g) Lorentzian Kenmotsu manifoldu her zaman global (globally) Osserman manifold değildir.

Semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu $3-$boyutlu Lorentzian Kenmotsu manifoldlarda timelike Osserman

(M, g) $3-$boyutlu Lorentzian Kenmotsu manifold, $\widetilde{\nabla}$ semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon olsun. (M, g) semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Lorentzian Kenmotsu manifoldu üzerinde $\widetilde{R}$ Riemann eğrilik tensörü

$$\widetilde{R}(X, Y)\,Z = \widetilde{\nabla}_X \widetilde{\nabla}_Y Z - \widetilde{\nabla}_Y \widetilde{\nabla}_X Z - \widetilde{\nabla}_{[X,Y]} Z \tag{6.3}$$

yardımıyla hesaplanır. (3.5) ifadesi kullanılarak $\widetilde{\nabla}_X \widetilde{\nabla}_Y Z$ ifadesi

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_X \widetilde{\nabla}_Y Z &= \widetilde{\nabla}_X (\nabla_Y Z + \eta(Z)\,Y) \\ &= \nabla_X (\nabla_Y Z + \eta(Z)\,Y) + \eta(\nabla_Y Z + \eta(Z)\,Y)\,X \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_X \eta(Z)\,Y + \eta(\nabla_Y Z) X + \eta(Z)\eta(Y) X \end{aligned} \tag{6.4}$$

şeklinde yazılır. Aynı şekilde $\widetilde{\nabla}_Y \widetilde{\nabla}_X Z$ ifadesi

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_Y \widetilde{\nabla}_X Z &= \widetilde{\nabla}_Y (\nabla_X Z + \eta(Z)\,X) \\ &= \nabla_Y (\nabla_X Z + \eta(Z)\,X) + \eta(\nabla_X Z + \eta(Z)\,X)\,Y \\ &= \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_Y \eta(Z)\,X + \eta(\nabla_X Z) Y + \eta(Z)\eta(X) Y \end{aligned} \tag{6.5}$$

olarak bulunur. Son olarak $\widetilde{\nabla}_{[X,Y]} Z$ ifadesi

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_{[X,Y]} Z &= \nabla_{[X,Y]} Z + \eta(Z)\,[X, Y] \\ &= \nabla_{[X,Y]} Z + \eta(Z)\,\nabla_X Y - \eta(Z)\,\nabla_Y X \end{aligned} \tag{6.6}$$

bulunur. (6.4), (6.5) ve (6.6) ifadeleri (6.3) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y)Z &= \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_X\eta(Z)Y + \eta(\nabla_Y Z)X + \eta(Z)\eta(Y)X \\ &\quad -\nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_Y\eta(Z)X - \eta(\nabla_X Z)Y - \eta(Z)\eta(X)Y \\ &\quad -\nabla_{[X,Y]}Z - \eta(Z)\nabla_X Y + \eta(Z)\nabla_Y X\end{aligned} \tag{6.7}$$

elde edilir. η 1-formun kovaryant türevi özelliği yardımıyla

$$((\nabla_X\eta)Z)Y = \nabla_X\eta(Z)Y - \eta(\nabla_X Z)Y - \eta(Z)\nabla_X Y \tag{6.8}$$

ve

$$-((\nabla_Y\eta)Z)X = -\nabla_Y\eta(Z)X + \eta(\nabla_Y Z)X + \eta(Z)\nabla_Y X \tag{6.9}$$

eşitlikleri yazılır. Böylece (6.7) eşitliği (6.8) ve (6.9) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + ((\nabla_X\eta)Z)Y - ((\nabla_Y\eta)Z)X \\ &\quad +\eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y\end{aligned} \tag{6.10}$$

şeklinde yazılır. (6.10) eşitliğinde (4.45) kullanılırsa

$$\widetilde{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z + g(X,Z)Y - g(Y,Z)X \tag{6.11}$$

yazılır. (6.11) eşitliğinde (4.97) kullanılarak $R(X,Y)Z$ ifadesi yerine yazılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu $3-$boyutlu Lorentzian Kenmotsu manifoldlarında $\widetilde{R}$ Riemann eğrilik tensörü

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y)Z &= \left(\frac{\tau}{2} - 4n + 1\right)(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y) \\ &\quad + \left(\frac{\tau}{2} - 4n + 1\right)(\eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y) \\ &\quad + \left(\frac{\tau}{2} - 4n + 1\right)(g(X,Z)\eta(Y)\xi - g(Y,Z)\eta(X)\xi)\end{aligned} \tag{6.12}$$

olarak bulunur.

Semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu $3-$boyutlu Lorentzian Kenmotsu manifoldlarında $\widetilde{R}$ Riemann eğrilik tensörü için $\widetilde{R}_Z$ Jakobi operatörü, $Z \in S^-(M)$ birim timelike vektörü ve $X \in S(M)$ birim vektörü için (6.12) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{R}_Z &: Z^\perp \to Z^\perp \\ \widetilde{R}_Z X &= \widetilde{R}(X,Z)Z \\ &= \left(\frac{\tau}{2} - 4n + 1\right)(g(Z,Z)X - g(X,Z)Z) \\ &\quad + \left(\frac{\tau}{2} - 4n + 1\right)(\eta(Z)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Z) \\ &\quad + \left(\frac{\tau}{2} - 4n + 1\right)(g(X,Z)\eta(Z)\xi - g(Z,Z)\eta(X)\xi)\end{aligned} \tag{6.13}$$

elde edilir. $X \in Z^{\perp}$ olduğu için $g(X,Z)=0$ olacaktır. Ayrıca $Z \in S^{-}(M)$ birim timelike vektör olduğundan dolayı $g(Z,Z)=-1$ olur. Bu bilgiler ışığında (6.13) eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned}\widetilde{R}_Z X &= -\left(\frac{\tau}{2}-4n+1\right)X \\ &\quad +\left(\frac{\tau}{2}-4n+1\right)\left(\eta(Z)\,\eta(Z)\,X-\eta(X)\,\eta(Z)\,Z\right) \\ &\quad +\left(\frac{\tau}{2}-4n+1\right)\eta(X)\,\xi\end{aligned} \tag{6.14}$$

elde edilir. (6.14) eşitliğinde de görüleceği üzere $\widetilde{R}_Z$ Jakobi operatörünün özdeğerleri, seçilen $Z \in S^{-}(M)$ vektöründen bağımsızdır. Bu doğrultuda aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 6.1.2 $3-$boyutlu (M,g) Lorentzian Kenmotsu manifold, $\widetilde{\nabla}$ semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon olsun. Semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu (M,g) Lorentzian Kenmotsu manifoldu her zaman global (globally) Osserman manifold değildir.

Semi-simetrik metrik koneksiyonlu $3-$boyutlu Lorentzian Kenmotsu manifoldlarda timelike Osserman

(M,g) $3-$boyutlu Lorentzian Kenmotsu manifold, $\widehat{\nabla}$ semi-simetrik metrik koneksiyon olsun. (M,g) semi-simetrik metrik koneksiyonlu Lorentzian Kenmotsu manifoldu üzerinde $\widehat{R}$ Riemann eğrilik tensörü

$$\widehat{R}(X,Y)\,Z=\widehat{\nabla}_X\widehat{\nabla}_Y Z-\widehat{\nabla}_Y\widehat{\nabla}_X Z-\widehat{\nabla}_{[X,Y]}Z \tag{6.15}$$

yardımıyla hesaplanır. (3.6) ifadesi kullanılarak $\widehat{\nabla}_X\widehat{\nabla}_Y Z$ ifadesi

$$\begin{aligned}\widehat{\nabla}_X\widehat{\nabla}_Y Z &= \widehat{\nabla}_X\left(\nabla_Y Z+\eta(Z)\,Y-g(Y,Z)\,\xi\right) \\ &= \nabla_X\left(\nabla_Y Z+\eta(Z)\,Y-g(Y,Z)\,\xi\right) \\ &\quad +\eta\left(\nabla_Y Z+\eta(Z)\,Y-g(Y,Z)\,\xi\right)X \\ &\quad -g\left(X,\nabla_Y Z+\eta(Z)\,Y-g(Y,Z)\,\xi\right)\xi\end{aligned} \tag{6.16}$$

şeklinde yazılır. (6.16) eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned}\widehat{\nabla}_X\widehat{\nabla}_Y Z &= \nabla_X\nabla_Y Z+\nabla_X\eta(Z)\,Y-\nabla_X g(Y,Z)\,\xi \\ &\quad +\eta(\nabla_Y Z)\,X+\eta(Z)\,\eta(Y)\,X-g(Y,Z)\,X \\ &\quad -g(X,\nabla_Y Z)\,\xi-\eta(Z)\,g(X,Y)\,\xi-g(Y,Z)\,\eta(X)\,\xi\end{aligned} \tag{6.17}$$

elde edilir. Aynı şekilde $\widehat{\nabla}_Y\widehat{\nabla}_X Z$ ifadesi

$$\begin{aligned}\widehat{\nabla}_Y\widehat{\nabla}_X Z &= \nabla_Y\nabla_X Z+\nabla_Y\eta(Z)\,X-\nabla_Y g(X,Z)\,\xi \\ &\quad +\eta(\nabla_X Z)\,Y+\eta(Z)\,\eta(X)\,Y-g(X,Z)\,Y \\ &\quad -g(Y,\nabla_X Z)\,\xi-\eta(Z)\,g(Y,X)\,\xi-g(X,Z)\,\eta(Y)\,\xi\end{aligned} \tag{6.18}$$

olarak bulunur. Son olarak $\widehat{\nabla}_{[X,Y]}Z$ ifadesi

$$\begin{aligned}\widehat{\nabla}_{[X,Y]}Z &= \nabla_{[X,Y]}Z+\eta\left(Z\right)\left[X,Y\right]-g\left(\left[X,Y\right],Z\right)\xi\\ &= \nabla_{[X,Y]}Z+\eta\left(Z\right)\nabla_{X}Y-\eta\left(Z\right)\nabla_{Y}X\\ &\quad -g\left(\nabla_{X}Y,Z\right)\xi+g\left(\nabla_{Y}X,Z\right)\xi\end{aligned} \tag{6.19}$$

bulunur. (6.17), (6.18) ve (6.19) ifadeleri (6.15) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}\widehat{R}\left(X,Y\right)Z &= \nabla_{X}\nabla_{Y}Z-\nabla_{Y}\nabla_{X}Z-\nabla_{[X,Y]}Z\\ &\quad +g\left(X,Z\right)Y-g\left(Y,Z\right)X\\ &\quad +\eta(Z)\eta(Y)X-\eta(Z)\eta(X)Y\\ &\quad +\nabla_{X}\eta\left(Z\right)Y-\eta(\nabla_{X}Z)Y-\eta\left(Z\right)\nabla_{X}Y\\ &\quad -\nabla_{Y}\eta\left(Z\right)X+\eta(\nabla_{Y}Z)X+\eta\left(Z\right)\nabla_{Y}X\\ &\quad +g\left(\nabla_{X}Y,Z\right)\xi+g\left(Y,\nabla_{X}Z\right)\xi-\nabla_{X}g\left(Y,Z\right)\xi\\ &\quad -g\left(\nabla_{Y}X,Z\right)\xi-g\left(X,\nabla_{Y}Z\right)\xi+\nabla_{Y}g\left(X,Z\right)\xi\\ &\quad -g\left(Y,Z\right)\eta(X)\xi+g\left(X,Z\right)\eta(Y)\xi\end{aligned} \tag{6.20}$$

elde edilir. (6.20) eşitliğinde yer alan $\left(\left(\nabla_{X}\eta\right)Z\right)Y, -\left(\left(\nabla_{Y}\eta\right)Z\right)X,\ -g\left(Y,Z\right)\nabla_{X}\xi$ ve $g\left(X,Z\right)\nabla_{Y}\xi$ ifadeleri

$$\begin{aligned}\left(\left(\nabla_{X}\eta\right)Z\right)Y &= \nabla_{X}\eta\left(Z\right)Y-\eta(\nabla_{X}Z)Y-\eta\left(Z\right)\nabla_{X}Y,\\ -\left(\left(\nabla_{Y}\eta\right)Z\right)X &= -\nabla_{Y}\eta\left(Z\right)X+\eta(\nabla_{Y}Z)X+\eta\left(Z\right)\nabla_{Y}X,\\ -g\left(Y,Z\right)\nabla_{X}\xi &= g\left(\nabla_{X}Y,Z\right)\xi+g\left(Y,\nabla_{X}Z\right)\xi-\nabla_{X}g\left(Y,Z\right)\xi,\\ g\left(X,Z\right)\nabla_{Y}\xi &= -g\left(\nabla_{Y}X,Z\right)\xi-g\left(X,\nabla_{Y}Z\right)\xi+\nabla_{Y}g\left(X,Z\right)\xi\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\widehat{R}\left(X,Y\right)Z &= R\left(X,Y\right)Z+g\left(X,Z\right)Y-g\left(Y,Z\right)X\\ &\quad +\eta(Z)\eta(Y)X-\eta(Z)\eta(X)Y\\ &\quad +\left(\left(\nabla_{X}\eta\right)Z\right)Y-\left(\left(\nabla_{Y}\eta\right)Z\right)X\\ &\quad -g\left(Y,Z\right)\nabla_{X}\xi+g\left(X,Z\right)\nabla_{Y}\xi\\ &\quad -g\left(Y,Z\right)\eta(X)\xi+g\left(X,Z\right)\eta(Y)\xi\end{aligned} \tag{6.21}$$

bulunur. (6.21) eşitliğinde (4.42) ve (4.45) ifadeleri kullanılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\widehat{R}\left(X,Y\right)Z &= R\left(X,Y\right)Z+g\left(X,Z\right)Y-g\left(Y,Z\right)X\\ &\quad +2\left\{g\left(X,Z\right)\eta(Y)\xi-g\left(Y,Z\right)\eta(X)\xi\right\}\end{aligned} \tag{6.22}$$

elde edilir. (6.22) eşitliğinde (4.97) kullanılarak $R(X,Y)Z$ ifadesi yerine yazılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa semi-simetrik metrik koneksiyonlu $3-$boyutlu Lorentzian Kenmotsu manifoldlarında $\widehat{R}$ Riemann eğrilik tensörü

$$\begin{aligned}\widehat{R}(X,Y)Z &= \left(\frac{\tau}{2}-4n+1\right)(g(Y,Z)X-g(X,Z)Y)\\ &\quad+\left(\frac{\tau}{2}-4n+1\right)(\eta(Y)\eta(Z)X-\eta(X)\eta(Z)Y)\\ &\quad+\left(\frac{\tau}{2}-4n+3\right)(g(X,Z)\eta(Y)\xi-g(Y,Z)\eta(X)\xi)\end{aligned} \tag{6.23}$$

olarak bulunur.

Semi-simetrik metrik koneksiyonlu $3-$boyutlu Lorentzian Kenmotsu manifoldlarında $\widehat{R}$ Riemann eğrilik tensörü için $\widehat{R}_Z$ Jakobi operatörü, $Z\in S^-(M)$ birim timelike vektörü ve $X\in S(M)$ birim vektörü için (6.23) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\widehat{R}_Z &: Z^\perp\to Z^\perp\\ \widehat{R}_Z X &= \widehat{R}(X,Z)Z\\ &= \left(\frac{\tau}{2}-4n+1\right)(g(Z,Z)X-g(X,Z)Z)\\ &\quad+\left(\frac{\tau}{2}-4n+1\right)(\eta(Z)\eta(Z)X-\eta(X)\eta(Z)Z)\\ &\quad+\left(\frac{\tau}{2}-4n+3\right)(g(X,Z)\eta(Z)\xi-g(Z,Z)\eta(X)\xi)\end{aligned} \tag{6.24}$$

elde edilir. $X\in Z^\perp$ olduğu için $g(X,Z)=0$ olacaktır. Ayrıca $Z\in S^-(M)$ birim timelike vektör olduğundan dolayı $g(Z,Z)=-1$ olur. Bu bilgiler ışığında (6.24) eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned}\widehat{R}_Z X &= -\left(\frac{\tau}{2}-4n+1\right)X\\ &\quad+\left(\frac{\tau}{2}-4n+1\right)(\eta(Z)\eta(Z)X-\eta(X)\eta(Z)Z)\\ &\quad+\left(\frac{\tau}{2}-4n+3\right)\eta(X)\xi\end{aligned} \tag{6.25}$$

elde edilir. (6.25) eşitliğinde de görüleceği üzere $\widehat{R}_Z$ Jakobi operatörünün özdeğerleri, seçilen $Z\in S^-(M)$ vektöründen bağımsızdır. Bu doğrultuda aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 6.1.3 $3-$boyutlu (M,g) Lorentzian Kenmotsu manifold, $\widehat{\nabla}$ semi-simetrik metrik koneksiyon olsun. Semi-simetrik metrik koneksiyonlu (M,g) Lorentzian Kenmotsu manifoldu her zaman global (globally) Osserman manifold değildir.

Levi-Civita koneksiyonlu $3-$boyutlu Lorentzian Kenmotsu manifoldlarda null Osserman

(M,g) $3-$boyutlu Lorentzian Kenmotsu manifold ve $Z \in T_pM$ birim timelike vektör olsun. O halde $\forall U \in N(Z)$ için $U = Z + Y$ koşulunu sağlayan bir tek $Y \in S(Z)$ bulunur. Bu yüzden

$$\psi(U) = U - Z = Y$$

şeklinde tanımlanan $\psi : N(Z) \to S(Z)$ operatörü diffeomorfizmdir. $U \in N(Z)$ için $\overline{U}^{\perp}$ uzayının geometrik yansıması olan W alt uzayı $W = U^{\perp} \cap Z^{\perp}$ şeklinde $Z^{\perp}$ kümesini de içererek oluşturulsun. c özdeğeri ile $X \in W = U^{\perp} \cap Z^{\perp}$ özvektörü $\pi(X) = \overline{X}$ olmak üzere $\overline{R}_U$ Jakobi operatörü özvektörünün W altkümesinde yer alan geometrik yansımasıdır. Buna göre R Riemann eğrilik tensörünün $R_U : U^{\perp} \to U^{\perp}$ Jakobi operatörü, $X \in U^{\perp} \cap Z^{\perp}$ olmak üzere (4.97) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} R_U X &= R(X,U)U \\ &= \left(\frac{\tau}{2} - 4n + 2\right)(g(U,U)X - g(X,U)U) \\ &\quad + \left(\frac{\tau}{2} - 4n + 1\right)(\eta(U)\eta(U)X - \eta(X)\eta(U)U) \\ &\quad + \left(\frac{\tau}{2} - 4n + 1\right)(g(X,U)\eta(U)\xi - g(U,U)\eta(X)\xi) \end{aligned} \tag{6.26}$$

şeklinde yazılır. (6.26) eşitliğinde

$$g(U,U) = g(X,U) = \eta(X) = 0$$

olduğundan dolayı

$$R_U X = \left(\frac{\tau}{2} - 4n + 1\right)\eta(U)\eta(U)X \tag{6.27}$$

bulunur. $Z = \xi$ olduğu durumda $U \in N(Z)$ olduğundan dolayı $g(U,\xi) = -1$ olacaktır. Bu doğrultuda (6.27) eşitliği $\lambda = \left(\frac{\tau}{2} - 4n + 1\right)$ olmak üzere

$$R_U X = \lambda X \tag{6.28}$$

şeklinde yazılır. (6.28) eşitliğinde de kolayca görüleceği üzere

$$R_U = \lambda I_{U^{\perp} \cap \xi^{\perp}} \tag{6.29}$$

yazılır. R_U Jakobi operatörünün özdeğerlerinin, seçilen $U \in N(Z)$ değerinden bağımsız olduğu görülür. Böylece aşağıdaki teorem yazılır.

Teorem 6.1.4 $3-$boyutlu (M,g) Lorentzian Kenmotsu manifold $Z = \xi$ timelike vektörüne göre null Osserman manifolddur.

Semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu $3-$boyutlu Lorentzian Kenmotsu manifoldlarda null Osserman

(M,g) $3-$boyutlu Lorentzian Kenmotsu manifold, $\widetilde{\nabla}$ semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon ve $Z \in T_pM$ birim timelike vektör olsun. O halde $\forall U \in N(Z)$ için $U = Z + Y$ koşulunu sağlayan bir tek $Y \in S(Z)$ bulunur. Bu yüzden

$$\psi(U) = U - Z = Y$$

şeklinde tanımlanan $\psi : N(Z) \to S(Z)$ operatörü diffeomorfizmdir. $U \in N(Z)$ için $\overline{U}^{\perp}$ uzayının geometrik yansıması olan W alt uzayı $W = U^{\perp} \cap Z^{\perp}$ şeklinde $Z^{\perp}$ kümesini de içererek oluşturulsun. c özdeğeri ile $X \in W = U^{\perp} \cap Z^{\perp}$ özvektörü $\pi(X) = \overline{X}$ olmak üzere $\overline{R}_U$ Jakobi operatörü özvektörünün W altkümesinde yer alan geometrik yansımasıdır. Buna göre R Riemann eğrilik tensörünün $R_U : U^{\perp} \to U^{\perp}$ Jakobi operatörü, $X \in U^{\perp} \cap Z^{\perp}$ olmak üzere (6.12) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \widetilde{R}_U X &= \widetilde{R}(U,Z)Z \\ &= \left(\frac{\tau}{2} - 4n + 1\right)(g(U,U)X - g(X,U)U) \\ &\quad + \left(\frac{\tau}{2} - 4n + 1\right)(\eta(U)\eta(U)X - \eta(X)\eta(U)U) \\ &\quad + \left(\frac{\tau}{2} - 4n + 1\right)(g(X,U)\eta(U)\xi - g(U,U)\eta(X)\xi) \end{aligned} \tag{6.30}$$

şeklinde yazılır. (6.30) eşitliğinde

$$g(U,U) = g(X,U) = \eta(X) = 0$$

olduğundan dolayı

$$R_U X = \left(\frac{\tau}{2} - 4n + 1\right)\eta(U)\eta(U)X \tag{6.31}$$

bulunur. $Z = \xi$ olduğu durumda $U \in N(Z)$ olduğundan dolayı $g(U,\xi) = -1$ olacaktır. Bu doğrultuda (6.31) eşitliği $\lambda = \left(\frac{\tau}{2} - 4n + 1\right)$ olmak üzere

$$R_U X = \lambda X \tag{6.32}$$

şeklinde yazılır. (6.32) eşitliğinde de kolayca görüleceği üzere

$$R_U = \lambda I_{U^{\perp} \cap \xi^{\perp}} \tag{6.33}$$

yazılır. R_U Jakobi operatörünün özdeğerlerinin, seçilen $U \in N(Z)$ değerinden bağımsız olduğu görülür. Böylece aşağıdaki teorem yazılır.

Teorem 6.1.5 $3-$boyutlu (M,g) semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Lorentzian Kenmotsu manifold $Z = \xi$ timelike vektörüne göre null Osserman manifolddur.

Semi-simetrik metrik koneksiyonlu $3-$boyutlu Lorentzian Kenmotsu manifoldlarda null Osserman

(M,g) $3-$boyutlu Lorentzian Kenmotsu manifold, $\widehat{\nabla}$ semi-simetrik metrik koneksiyon ve $Z \in T_pM$ birim timelike vektör olsun. O halde $\forall U \in N(Z)$ için $U = Z + Y$ koşulunu sağlayan bir tek $Y \in S(Z)$ bulunur. Bu yüzden

$$\psi(U) = U - Z = Y$$

şeklinde tanımlanan $\psi : N(Z) \to S(Z)$ operatörü diffeomorfizmdir. $U \in N(Z)$ için $\overline{U}^{\perp}$ uzayının geometrik yansıması olan W alt uzayı $W = U^{\perp} \cap Z^{\perp}$ şeklinde $Z^{\perp}$ kümesini de içererek oluşturulsun. c özdeğeri ile $X \in W = U^{\perp} \cap Z^{\perp}$ özvektörü $\pi(X) = \overline{X}$ olmak üzere $\overline{R}_U$ Jakobi operatörü özvektörünün W altkümesinde yer alan geometrik yansımasıdır. Buna göre R Riemann eğrilik tensörünün $R_U : U^{\perp} \to U^{\perp}$ Jakobi operatörü, $X \in U^{\perp} \cap Z^{\perp}$ olmak üzere (6.23) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \widehat{R}_U X &= \widehat{R}(X,U)U \\ &= \left(\frac{\tau}{2} - 4n + 1\right)(g(U,U)X - g(X,U)U) \\ &\quad + \left(\frac{\tau}{2} - 4n + 1\right)(\eta(U)\eta(U)X - \eta(X)\eta(U)U) \\ &\quad + \left(\frac{\tau}{2} - 4n + 3\right)(g(X,U)\eta(U)\xi - g(U,U)\eta(X)\xi) \end{aligned} \tag{6.34}$$

şeklinde yazılır. (6.34) eşitliğinde

$$g(U,U) = g(X,U) = \eta(X) = 0$$

olduğundan dolayı

$$R_U X = \left(\frac{\tau}{2} - 4n + 1\right)\eta(U)\eta(U)X \tag{6.35}$$

bulunur. $Z = \xi$ olduğu durumda $U \in N(Z)$ olduğundan dolayı $g(U,\xi) = -1$ olacaktır. Bu doğrultuda (6.35) eşitliği $\lambda = \left(\frac{\tau}{2} - 4n + 1\right)$ olmak üzere

$$R_U X = \lambda X \tag{6.36}$$

şeklinde yazılır. (6.36) eşitliğinde de kolayca görüleceği üzere

$$R_U = \lambda I_{U^{\perp} \cap \xi^{\perp}} \tag{6.37}$$

yazılır. R_U Jakobi operatörünün özdeğerlerinin, seçilen $U \in N(Z)$ değerinden bağımsız olduğu görülür. Böylece aşağıdaki teorem yazılır.

Teorem 6.1.6 $3-$boyutlu (M,g) semi-simetrik metrik koneksiyonlu Lorentzian Kenmotsu manifold $Z = \xi$ timelike vektörüne göre null Osserman manifolddur.

Lorentzian Kenmotsu uzay formlarında null Osserman

Tanım 5.3.7 ve Yardımcı Teorem 5.3.3 kullanılarak aşağıdaki yardımcı teorem yazılır.

Yardımcı Teorem 6.1.2 Lorentzian Kenmotsu manifoldunun Lorentzian Kenmotsu uzay form haline gelmesi için gerekli ve yeter şart R Riemann eğrilik tensörü için

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \frac{(k+3)}{4}\left(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\right) \\ &+\frac{(k-1)}{4}[-\eta(X)\eta(Z)Y+\eta(Y)\eta(Z)X+g(X,Z)\eta(Y)\xi\text{-}g(Y,Z)\eta(X)\xi \\ &+g(\phi Y,Z)\phi X+g(\phi Z,X)\phi Y\text{-}2g(\phi X,Y)\phi Z] \end{aligned} \tag{6.38}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır (Naik vd., 2018; Venkatesha vd., 2018; Wang ve Liu, 2016).

Teorem 6.1.7 (M,g) Lorentzian Kenmotsu uzay formu ξ timelike vektörüne göre null Osserman manifolddur.

İspat Lorentzian Kenmotsu uzay formunun ξ karakteristik vektör alanına göre null Osserman manifold olduğunu göstermek için $U \in N(\xi)$ null vektörü ele alınır ve (6.38) eşitliği ile verilen R Riemann eğrilik tensörünün $R_U : U^{\perp} \to U^{\perp}$ Jakobi operatörü, $X \in U^{\perp}$ için

$$\begin{aligned} R_U X &= R(X,U)U \\ &= \frac{(k+3)}{4}\left(g(U,U)X - g(X,U)U\right) \\ &+\frac{(k-1)}{4}[-\eta(X)\eta(U)Y + \eta(U)\eta(U)X + g(X,U)\eta(U)\xi - g(U,U)\eta(X)\xi \\ &+g(\phi U,U)\phi X + g(\phi U,X)\phi U - 2g(\phi X,U)\phi U] \end{aligned} \tag{6.39}$$

şeklinde yazılır. (6.39) ifadesinde $X \in U^{\perp} \cap \xi^{\perp}$olduğu için $g(X,U) = 0$ ve $\eta(X) = 0$ sonuçları elde edilir. Ayrıca $U \in N(\xi)$ olduğundan dolayı $g(U,U) = 0$, $g(U,\xi) = -1$ ve $\eta(U) = 1$ değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} R_U X &= R(X,U)U \\ &= \frac{(k-1)}{4}\left[X + 3g(X,\phi U)\phi U\right] \end{aligned} \tag{6.40}$$

sonucu elde edilir. Her $U \in N(\xi)$ için $X = \phi Y$ ve $U = \xi + Y$ koşulunu sağlayan bir tek $Y \in S(\xi)$ bulunur. (6.40) eşitliğinde U yerine $\xi + Y$ yazılırsa

$$\begin{aligned} R_U x &= R(X,U)U \\ &= \frac{(k-1)}{4}\left[X + 3g\left(X,\phi Y\right)\left(\phi Y\right)\right] \end{aligned} \tag{6.41}$$

yazılır. (6.41) eşitliğinde $X = \phi Y$ olduğundan dolayı

$$R(X,U)U = (k-1)\,X$$

bulunur. Böylece

$$R_U = (k-1)I_{U^{\perp}\cap\xi^{\perp}} \tag{6.42}$$

ifadesi elde edilir. (6.42) eşitliğinden yola çıkarak R_U Jakobi operatörünün özdeğerlerinin, seçilen $Z \in S(M)$ değerinden bağımsız olduğu ve Lorentzian Kenmotsu uzay formunun ξ karakteristik vektör alanına göre null Osserman manifold olduğu görülür.

6.2 Bazı Eğrilik Şartlarına Sahip Lorentzian Kenmotsu Manifoldlarda Osserman Problemi

Bu bölümde, bazı eğrilik şartları sağlayan Lorentzian Kenmotsu manifoldlarda Osserman problemi incelenmiş ve teoremler elde edilmiştir.

$n-$boyutlu Konsörkılır flat $\widetilde{C} = 0$ Lorentzian Kenmotsu manifoldlar

(3.16) eşitliğinde $\widetilde{C} = 0$ olduğu durumda $n-$boyutlu M konsörkılır (concircular) flat manifoldunda R Riemann eğrilik tensörü

$$R\left(X,Y\right)Z = \frac{\tau}{n\left(n-1\right)}\left[g\left(Y,Z\right)X - g\left(X,Z\right)Y\right] \tag{6.43}$$

olarak bulunur. R Riemann eğrilik tensörü için R_Z Jakobi operatörü, $Z \in S^{-}(M)$ birim timelike vektörü ve $X \in S(M)$ birim vektörü için (6.43) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} R_Z &: Z^{\perp} \to Z^{\perp} \\ R_Z X &= R(X,Z)Z \\ &= \frac{\tau}{n\left(n-1\right)}\left[g\left(Z,Z\right)X - g\left(X,Z\right)Z\right] \end{aligned} \tag{6.44}$$

elde edilir. $X \in Z^{\perp}$ olduğu için $g(X,Z)=0$ olacaktır. Ayrıca $Z \in S^{-}(M)$ birim timelike vektör olduğundan dolayı $g(Z,Z)=-1$ olur. Bu bilgiler ışığında (6.44) eşitliği düzenlenerek $\lambda = \dfrac{\tau}{n\,(n-1)}$ olmak üzere

$$R_Z X = -\lambda X \tag{6.45}$$

bulunur. (6.45) eşitliğinde de görüleceği üzere $R_Z = (-\lambda) I_{Z^{\perp}}$ bulunur. R_Z Jakobi operatörünün özdeğerleri, seçilen $Z \in S^{-}(M)$ vektöründen bağımsızdır. Bu doğrultuda aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 6.2.1 $n-$boyutlu (M,g) Lorentzian Kenmotsu manifoldu konsörkılır (concircular) flat olduğu durumda Osserman koşulunu sağlar ve M Osserman manifolddur.

$3-$boyutlu Projektif flat $P=0$ Lorentzian Kenmotsu manifoldlar

(3.15) eşitliğinde $P=0$ olduğu durumda $n-$boyutlu M projektif flat manifoldunda R Riemann eğrilik tensörü

$$R\,(X,Y)\,Z = \frac{1}{n-1}\left[S\,(Y,Z)\,X - S\,(X,Z)\,Y\right] \tag{6.46}$$

olarak bulunur. (6.46) eşitliğinde (4.78) kullanılır ve eşitlik düzenlenirse

$$\begin{aligned} R\,(X,Y)\,Z &= \frac{1}{n-1}[\Big(\frac{\tau}{2}-2n{+}1\Big)\,g\,(Y,Z)\,X + \Big(\frac{\tau}{2}-4n{+}1\Big)\,\eta\,(Y)\,\eta\,(Z)\,X \\ &\quad - \Big(\frac{\tau}{2}-2n{+}1\Big)\,g\,(X,Z)\,Y - \Big(\frac{\tau}{2}-4n{+}1\Big)\,\eta\,(X)\,\eta\,(Z)\,Y] \end{aligned} \tag{6.47}$$

bulunur. R Riemann eğrilik tensörü için R_Z Jakobi operatörü, $Z \in S^{-}(M)$ birim timelike vektörü ve $X \in S(M)$ birim vektörü için (6.47) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} R_Z &: Z^{\perp} \to Z^{\perp} \\ R_Z X &= R(X,Z)Z \\ &= \frac{1}{n-1}[\Big(\frac{\tau}{2}-2n+1\Big)\,g\,(Z,Z)\,X + \Big(\frac{\tau}{2}-4n+1\Big)\,\eta\,(Z)\,\eta\,(Z)\,X \\ &\quad - \Big(\frac{\tau}{2}-2n+1\Big)\,g\,(X,Z)\,Z - \Big(\frac{\tau}{2}-4n+1\Big)\,\eta\,(X)\,\eta\,(Z)\,Z] \end{aligned} \tag{6.48}$$

elde edilir. $X \in Z^{\perp}$ olduğu için $g(X,Z)=0$ olacaktır. Ayrıca $Z \in S^{-}(M)$ birim timelike vektör olduğundan dolayı $g(Z,Z)=-1$ olur. Bu bilgiler ışığında (6.48) eşitliği düzenlenirse $\lambda = \Big(\dfrac{\tau}{2}-2n+1\Big)$ olmak üzere

$$R_Z X = \frac{1}{2n}\left[-\lambda X + (\lambda - 2n)\,(\eta\,(Z)\,\eta\,(Z)\,X - \eta\,(X)\,\eta\,(Z)\,Z)\right] \tag{6.49}$$

bulunur. (6.49) eşitliğinde de görüleceği üzere R_Z Jakobi operatörünün özdeğerleri, seçilen $Z \in S^{-}(M)$ vektöründen bağımsız değildir. Bu doğrultuda aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 6.2.2 $3-$boyutlu (M, g) Lorentzian Kenmotsu manifoldu projektif flat olduğu durumda Osserman koşulunu sağlamaz. (M, g) Lorentzian Kenmotsu manifoldu her zaman global (globally) Osserman manifold değildir.

$3-$boyutlu Konformal flat $H = 0$ Lorentzian Kenmotsu manifoldlar

(3.17) eşitliğinde $H = 0$ olduğu durumda $3-$boyutlu M konformal flat manifoldunda R Riemann eğrilik tensörü

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= -\frac{1}{n-2}[S(X,Z)Y - S(Y,Z)X + g(X,Z)QY - g(Y,Z)QX] \\ &\quad + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(X,Z)Y - g(Y,Z)X] \end{aligned} \tag{6.50}$$

olarak bulunur. (6.50) eşitliğinde (4.78) ve (4.79) kullanılırsa

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= -\frac{1}{n-2}[\left(\frac{\tau}{2} - 2n+1\right) g(X,Z)Y + \left(\frac{\tau}{2} - 4n+1\right) \eta(X)\eta(Z)Y \\ &\quad - \left(\frac{\tau}{2} - 2n+1\right) g(Y,Z)X - \left(\frac{\tau}{2} - 4n+1\right) \eta(Y)\eta(Z)X \\ &\quad + \left(\frac{\tau}{2} - 2n+1\right) g(X,Z)Y - \left(\frac{\tau}{2} - 4n+1\right) g(X,Z)\eta(Y)\xi \\ &\quad - \left(\frac{\tau}{2} - 2n+1\right) g(Y,Z)X + \left(\frac{\tau}{2} - 4n+1\right) g(Y,Z)\eta(X)\xi] \\ &\quad + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(X,Z)Y - g(Y,Z)X] \end{aligned} \tag{6.51}$$

yazılır. (6.51) eşitliği düzenlenirse $\lambda = \left(\frac{\tau}{2} - 2n + 1\right)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= -\frac{1}{n-2}[2\lambda (g(X,Z)Y - g(Y,Z)X) \\ &\quad + (\lambda - 2n)(g(Y,Z)\eta(X)\xi - g(X,Z)\eta(Y)\xi + \eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X)] \\ &\quad + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}(g(X,Z)Y - g(Y,Z)X) \end{aligned} \tag{6.52}$$

bulunur. R Riemann eğrilik tensörü için R_Z Jakobi operatörü, $Z \in S^-(M)$ birim timelike vektörü ve $X \in S(M)$ birim vektörü için (6.52) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} R_Z &: Z^\perp \to Z^\perp \\ R_Z X &= R(X,Z)Z \\ &= -\frac{1}{n-2}[2\lambda\left(g\left(X,Z\right)Z - g\left(Z,Z\right)X\right) \\ &\quad +\left(\lambda-2n\right)\left(g\left(Z,Z\right)\eta\left(X\right)\xi - g\left(X,Z\right)\eta\left(Z\right)\xi + \eta\left(X\right)\eta\left(Z\right)Z - \eta\left(Z\right)\eta\left(Z\right)X\right)] \\ &\quad +\frac{\tau}{\left(n-1\right)\left(n-2\right)}\left(g\left(X,Z\right)Z - g\left(Z,Z\right)X\right) \end{aligned} \tag{6.53}$$

elde edilir. $X \in Z^\perp$ olduğu için $g(X,Z) = 0$ olacaktır. Ayrıca $Z \in S^-(M)$ birim timelike vektörü olduğundan dolayı $g(Z,Z) = -1$ olur. Bu bilgiler ışığında (6.53) eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned} R_Z X &= R(X,Z)Z \\ &= -\frac{1}{n-2}[2\lambda X + \left(\lambda-2n\right)\left(-\eta\left(X\right)\xi + \eta\left(X\right)\eta\left(Z\right)Z - \eta\left(Z\right)\eta\left(Z\right)X\right)] \\ &\quad +\frac{\tau}{\left(n-1\right)\left(n-2\right)}X \end{aligned} \tag{6.54}$$

bulunur. (6.54) eşitliğinde de görüleceği üzere R_Z Jakobi operatörünün özdeğerleri, seçilen $Z \in S^-(M)$ vektöründen bağımsız değildir. Bu doğrultuda aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 6.2.3 $3-$boyutlu (M,g) Lorentzian Kenmotsu manifoldu konformal flat olduğu durumda Osserman koşulunu sağlamaz. (M,g) Lorentzian Kenmotsu manifoldu her zaman globally Osserman manifold değildir.

Semi-simetrik $R.R = 0$ koşulunu sağlayan $(2n+1)-$boyutlu Lorentzian Kenmotsu manifoldlar

$(2n+1)-$boyutlu (M,g) Lorentzian Kenmotsu manifoldunun semi-simetrik manifold olduğunu varsayalım. Manifold üzerinde $\forall X, Y \in \chi\left(M\right)$ için

$$R\left(X,Y\right).R = 0 \tag{6.55}$$

yazılır. (6.55) eşitliğinde $X = \xi, Y = X$ alınırsa

$$\begin{aligned} \left(R\left(\xi,X\right)R\right)\left(Y,Z\right)W &= R\left(\xi,X\right)R\left(Y,Z\right)W - R\left(R\left(\xi,X\right)Y,Z\right)W \\ &\quad -R\left(Y,R\left(\xi,X\right)Z\right)W - R\left(Y,Z\right)R\left(\xi,X\right)W \end{aligned} \tag{6.56}$$

elde edilir. (6.56) eşitliğinin sağ tarafında yer alan her bir ifadenin hesaplanması gerekmektedir. Öncelikle (4.57) ve (4.66) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} R(\xi,X)R(Y,Z)W &= g(X,R(Y,Z)W)\xi+\eta(R(Y,Z)W)X \\ &= g(X,R(Y,Z)W)\xi+g(Z,W)\eta(Y)X-g(Y,W)\eta(Z)X \end{aligned} \tag{6.57}$$

hesaplanır. Aynı şekilde (4.57) kullanılırsa

$$\begin{aligned} R(R(\xi,X)Y,Z)W &= R(g(X,Y)\xi+\eta(Y)X,Z)W \\ &= g(X,Y)R(\xi,Z)W+\eta(Y)R(X,Z)W \\ &= g(X,Y)g(Z,W)\xi+g(X,Y)\eta(W)Z+\eta(Y)R(X,Z)W \end{aligned} \tag{6.58}$$

elde edilir. (4.57) ve (4.58) kullanılırsa

$$\begin{aligned} R(Y,R(\xi,X)Z)W &= R(Y,g(X,Z)\xi+\eta(Z)X)W \\ &= g(X,Z)R(Y,\xi)W+\eta(Z)R(Y,X)W \\ &= -g(X,Z)\eta(W)Y-g(X,Z)g(Y,W)\xi+\eta(Z)R(Y,X)W \end{aligned} \tag{6.59}$$

bulunur. (4.57) ve (4.48) kullanılırsa

$$\begin{aligned} R(Y,Z)R(\xi,X)W &= R(Y,Z)(g(X,W)\xi+\eta(W)X) \\ &= g(X,W)R(Y,Z)\xi+\eta(W)R(Y,Z)X \\ &= g(X,W)\eta(Y)Z-g(X,W)\eta(Z)Y+\eta(W)R(Y,Z)X \end{aligned} \tag{6.60}$$

hesaplanır. (6.56) eşitliğinde (6.57), (6.58), (6.59) ve (6.60) ifadeleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} (R(\xi,X)R)(Y,Z)W = {} & g(X,R(Y,Z)W)\xi+g(Z,W)\eta(Y)X-g(Y,W)\eta(Z)X \\ & -g(X,Y)g(Z,W)\xi-g(X,Y)\eta(W)Z-\eta(Y)R(X,Z)W \\ & +g(X,Z)\eta(W)Y+g(X,Z)g(Y,W)\xi-\eta(Z)R(Y,X)W \\ & -g(X,W)\eta(Y)Z+g(X,W)\eta(Z)Y-\eta(W)R(Y,Z)X \end{aligned} \tag{6.61}$$

bulunur. Manifold semi-simetrik $R(X,Y).R=0$ olduğundan dolayı eşitliğin sağ tarafı da sıfıra eşittir. (6.61) eşitliğinin her iki tarafı ξ ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} 0 = {} & g(X,R(Y,Z)W)g(\xi,\xi)+g(Z,W)\eta(Y)g(X,\xi)-g(Y,W)\eta(Z)g(X,\xi) \\ & -g(X,Y)g(Z,W)g(\xi,\xi)-g(X,Y)\eta(W)g(Z,\xi)-\eta(Y)\eta(R(X,Z)W) \\ & +g(X,Z)\eta(W)g(Y,\xi)+g(X,Z)g(Y,W)g(\xi,\xi)-\eta(Z)\eta(R(Y,X)W) \\ & -g(X,W)\eta(Y)g(Z,\xi)+g(X,W)\eta(Z)g(Y,\xi)-\eta(W)\eta(R(Y,Z)X) \end{aligned} \tag{6.62}$$

elde edilir. (6.62) eşitliğinde (4.8) ve (4.66) kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= -g(X,R(Y,Z)W) - g(Z,W)\eta(Y)\eta(X) + g(Y,W)\eta(Z)\eta(X) \\ &\quad +g(X,Y)g(Z,W) + g(X,Y)\eta(W)\eta(Z) \\ &\quad +g(Z,W)\eta(Y)\eta(X) - g(X,W)\eta(Y)\eta(Z) \\ &\quad -g(X,Z)\eta(W)\eta(Y) - g(X,Z)g(Y,W) \\ &\quad +g(X,W)\eta(Z)\eta(Y) - g(Y,W)\eta(Z)\eta(X) \\ &\quad +g(X,W)\eta(Y)\eta(Z) - g(X,W)\eta(Z)\eta(Y) \\ &\quad +g(Z,X)\eta(W)\eta(Y) - g(Y,X)\eta(Z)\eta(W) \end{aligned} \tag{6.63}$$

bulunur. (6.63) eşitliği düzenlenir ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$g(X,R(Y,Z)W) = g(X,Y)g(Z,W) - g(X,Z)g(Y,W) \tag{6.64}$$

elde edilir. (6.64) eşitliğinin her iki tarafı X ile iç çarpım uygulanmış şekilde

$$g(X,R(Y,Z)W) = g(X,g(Z,W)Y - g(Y,W)Z) \tag{6.65}$$

yazılır. (6.65) eşitliğinden

$$R(Y,Z)W = g(Z,W)Y - g(Y,W)Z, \tag{6.66}$$

bulunur. R Riemann eğrilik tensörü

$$R(X,Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y \tag{6.67}$$

şeklinde yazılır. Semi-simetrik Lorentzian Kenmotsu manifoldunda R Riemann eğrilik tensörü için R_Z Jakobi operatörü, $Z \in S^-(M)$ birim timelike vektörü ve $X \in S(M)$ birim vektörü için (6.67) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} R_Z &: Z^\perp \to Z^\perp \\ R_Z X &= R(X,Z)Z \\ &= g(Z,Z)X - g(X,Z)Z \end{aligned} \tag{6.68}$$

şeklinde yaızılır. $X \in Z^\perp$ olduğu için $g(X,Z) = 0$ olacaktır. Ayrıca $Z \in S^-(M)$ birim timelike vektör olduğundan dolayı $g(Z,Z) = -1$ olur. Bu bilgiler ışığında (6.68) eşitliği kullanılırsa

$$R_Z X = -X \tag{6.69}$$

bulunur. (6.69) eşitliğinde de görüleceği üzere $R_Z = -I_{Z^\perp}$ bulunur. R_Z Jakobi operatörünün özdeğerleri, seçilen $Z \in S^-(M)$ vektöründen bağımsız olduğu görülmektedir. Bu doğrultuda aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 6.2.4 $(2n+1)-$boyutlu (M,g) Lorentzian Kenmotsu manifoldu semi-simetrik olduğu durumda Osserman koşulunu sağlar ve M Osserman manifolddur.

Ricci semi-simetrik $R.S=0$ koşulunu sağlayan $(2n+1)-$boyutlu Lorentzian Kenmotsu manifoldlar

$(2n+1)-$boyutlu (M,g) Lorentzian Kenmotsu manifoldunun Ricci semi-simetrik manifold olduğunu varsayalım. Manifold üzerinde $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$R(X,Y).S=0 \tag{6.70}$$

yazılır. (6.70) eşitliğinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned}(R.S)(X,Y,U,V) &= -S(R(X,Y)U,V)-S(U,R(X,Y)V)\\ &= 0\end{aligned} \tag{6.71}$$

elde edilir. (6.71) eşitliğinde $U=\xi$ alınırsa

$$S(R(X,Y)\xi,V)+S(\xi,R(X,Y)V)=0 \tag{6.72}$$

bulunur. (6.72) eşitliğinde (4.48) ve (4.69) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}S(\eta(X)Y-\eta(Y)X,V)+S(\xi,R(X,Y)V) &= 0\\ \eta(X)S(Y,V)-\eta(Y)S(X,V)-2n\eta(R(X,Y)V) &= 0\end{aligned} \tag{6.73}$$

yazılır. (6.73) eşitliğinde (4.66) ifadesi yerine yazılırsa

$$\eta(X)S(Y,V)-\eta(Y)S(X,V)-2n(\eta(X)g(Y,V)-\eta(Y)g(X,V))=0 \tag{6.74}$$

elde edilir. (6.74) eşitliğinde $X=\xi$ alınırsa

$$\eta(\xi)S(Y,V)-\eta(Y)S(\xi,V)-2n(\eta(\xi)g(Y,V)-\eta(Y)g(\xi,V))=0 \tag{6.75}$$

bulunur. (6.75) eşitliğinde (4.1), (4.8) ve (4.69) kullanılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$S(Y,V)=2ng(Y,V) \tag{6.76}$$

hesaplanır. (6.76) eşitliği Ricci semi-simetrik Lorentzian Kenmostu manifoldun sabit kesit eğriliğe sahip Einstein manifold olduğunu göstermektedir. Teorem 5.3.1 kullanılarak aşağıdaki teorem yazılır.

Teorem 6.2.5 $(2n+1)-$boyutlu (M,g) Lorentzian Kenmotsu manifoldu Ricci semi-simetrik olduğu durumda Einstein manifolddur ve sabit kesit eğriliğine sahiptir.

Böylece Ricci semi-simetrik Lorentz Kenmotsu manifoldu Osserman koşulunu sağlar ve M Osserman manifolddur.

Konsörkılır semi-simetrik $R.\widetilde{C} = 0$ koşulunu sağlayan $(2n+1)-$boyutlu Lorentzian Kenmotsu manifoldlar

$(2n+1)-$boyutlu (M,g) Lorentzian Kenmotsu manifoldunun konsörkılır (concircular) semi-simetrik manifold olduğunu varsayalım. Manifold üzerinde $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$R(X,Y).\widetilde{C} = 0 \tag{6.77}$$

yazılır. (6.77) eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned}\left(R(X,Y)\widetilde{C}\right)(U,V)W &= R(X,Y)\widetilde{C}(U,V)W - \widetilde{C}(R(X,Y)U,V)W \\ &\quad -\widetilde{C}(U,R(X,Y)V)W - \widetilde{C}(U,V)R(X,Y)W\end{aligned} \tag{6.78}$$

bulunur. (6.78) eşitliğinde $X = V = \xi$ alınırsa

$$\begin{aligned}\left(R(\xi,Y)\widetilde{C}\right)(U,\xi)W &= R(\xi,Y)\widetilde{C}(U,\xi)W - \widetilde{C}(R(\xi,Y)U,\xi)W \\ &\quad -\widetilde{C}(U,R(\xi,Y)\xi)W - \widetilde{C}(U,\xi)R(\xi,Y)W\end{aligned} \tag{6.79}$$

elde edilir. (6.79) eşitliğinde (4.57) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left(R(\xi,Y)\widetilde{C}\right)(U,\xi)W &= g\left(Y,\widetilde{C}(U,\xi)W\right)\xi + \eta\left(\widetilde{C}(U,\xi)W\right)Y \\ &\quad -\widetilde{C}(g(Y,U)\xi + \eta(U)Y,\xi)W \\ &\quad -\widetilde{C}(U,-\eta(Y)\xi + Y)W \\ &\quad -\widetilde{C}(U,\xi)(g(Y,W)\xi + \eta(W)Y)\end{aligned} \tag{6.80}$$

yazılır. Manifold konsörkılır (concircular) semi-simetrik $R(X,Y).\widetilde{C} = 0$ olduğundan dolayı eşitliğin sağ tarafı da sıfıra eşittir. Bu doğrultuda (6.80) eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned}0 &= g\left(Y,\widetilde{C}(U,\xi)W\right)\xi + \eta\left(\widetilde{C}(U,\xi)W\right)Y \\ &\quad -g(Y,U)\widetilde{C}(\xi,\xi)W - \eta(U)\widetilde{C}(Y,\xi)W \\ &\quad +\eta(Y)\widetilde{C}(U,\xi)W - \widetilde{C}(U,Y)W \\ &\quad -g(Y,W)\widetilde{C}(U,\xi)\xi - \eta(W)\widetilde{C}(U,\xi)Y\end{aligned} \tag{6.81}$$

elde edilir. (6.81) eşitliğinin sağ tarafında yer alan her bir ifadenin hesaplanması gerekmektedir. Öncelikle (3.16) ve (4.57) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}\widetilde{C}(\xi,X)Y &= R(\xi,X)Y-\frac{\tau}{n(n-1)}\left[g(X,Y)\xi+\eta(Y)X\right]\\ &= g(X,Y)\xi+\eta(Y)X-\frac{\tau}{n(n-1)}\left[g(X,Y)\xi+\eta(Y)X\right]\\ &= \left(1-\frac{\tau}{n(n-1)}\right)\left[g(X,Y)\xi+\eta(Y)X\right]\end{aligned} \tag{6.82}$$

hesaplanır. Aynı şekilde (3.16) ve (4.58) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{C}(X,\xi)Y &= R(X,\xi)Y-\frac{\tau}{n(n-1)}\left[-\eta(Y)X-g(X,Y)\xi\right]\\ &= -\eta(Y)X-g(X,Y)\xi-\frac{\tau}{n(n-1)}\left[-\eta(Y)X-g(X,Y)\xi\right]\\ &= \left(1-\frac{\tau}{n(n-1)}\right)\left[-\eta(Y)X-g(X,Y)\xi\right]\end{aligned} \tag{6.83}$$

elde edilir. Aynı şekilde (3.16) ve (4.48) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{C}(X,Y)\xi &= R(X,Y)\xi-\frac{\tau}{n(n-1)}\left[\eta(X)Y-\eta(Y)X\right]\\ &= \eta(X)Y-\eta(Y)X-\frac{\tau}{n(n-1)}\left[\eta(X)Y-\eta(Y)X\right]\\ &= \left(1-\frac{\tau}{n(n-1)}\right)\left[\eta(X)Y-\eta(Y)X\right]\end{aligned} \tag{6.84}$$

bulunur. (6.84) eşitliğinde $Y=\xi$ alınırsa

$$\widetilde{C}(X,\xi)\xi=\left(1-\frac{\tau}{n(n-1)}\right)\left[\eta(X)\xi-X\right] \tag{6.85}$$

yazılır. Aynı şekilde (6.82) eşitliğinde $X=\xi, Y=X$ alınırsa

$$\widetilde{C}(\xi,\xi)X=0 \tag{6.86}$$

olduğu görülür. (6.81) eşitliğinde (6.82), (6.83), (6.84), (6.85) ve (6.86) ifadeleri yerine yazılırsa $\lambda=1-\dfrac{\tau}{n(n-1)}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}0 &= g(Y,\lambda(-\eta(W)U-g(U,W)\xi))\xi+\eta\left(\widetilde{C}(U,\xi)W\right)Y\\ &\quad -g(Y,U)\widetilde{C}(\xi,\xi)W-\eta(U)\lambda\left[-\eta(W)Y-g(Y,W)\xi\right]\\ &\quad +\eta(Y)\lambda\left[-\eta(W)U-g(U,W)\xi\right]-\widetilde{C}(U,Y)W\\ &\quad -g(Y,W)\lambda(\eta(U)\xi-U)-\eta(W)\lambda(-\eta(Y)U-g(U,Y)\xi)\end{aligned} \tag{6.87}$$

hesaplanır. (6.87) eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda\eta(W)\,g(Y,U)\,\xi+\lambda\eta(Y)\,g(U,W)\,\xi+\eta\left(\widetilde{C}(U,\xi)W\right)Y \\ &\quad +\lambda\eta(U)\,\eta(W)\,Y+\lambda\eta(U)\,g(Y,W)\,\xi \\ &\quad -\lambda\eta(Y)\,\eta(W)\,U-\lambda\eta(Y)\,g(U,W)\,\xi-\widetilde{C}(U,Y)W \\ &\quad -\lambda\eta(U)\,g(Y,W)\,\xi+\lambda g(Y,W)\,U+\lambda\eta(Y)\,\eta(W)\,U+\lambda\eta(W)\,g(U,Y)\,\xi \end{aligned} \tag{6.88}$$

yazılır. (6.88) eşitliği gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \eta\left(\widetilde{C}(U,\xi)W\right)Y-\widetilde{C}(U,Y)W \\ &\quad +\lambda\eta(U)\,\eta(W)\,Y+\lambda g(Y,W)\,U \end{aligned} \tag{6.89}$$

şeklinde yazılır. (6.89) eşitliğinde yer alan $\eta\left(\widetilde{C}(U,\xi)W\right)Y$ değeri (6.83) ifadesinde $X=U, Y=W$ alınır ve ξ ile iç çarpım uygulanırsa

$$\begin{aligned} \eta\left(\widetilde{C}(U,\xi)W\right)Y &= \left[-g\left(\lambda\left(-\eta(W)\,U-g(U,W)\,\xi\right),\xi\right)\right]Y \\ &= +\lambda\eta(W)\,g(U,\xi)\,Y+\lambda g(U,W)\,g(\xi,\xi)\,Y \end{aligned} \tag{6.90}$$

bulunur. (6.90) eşitliğinde (4.8) kullanılırsa

$$\eta\left(\widetilde{C}(U,\xi)W\right)Y=-\lambda\eta(U)\,\eta(W)\,Y-\lambda g(U,W)\,Y \tag{6.91}$$

elde edilir. (6.91) ifadesi (6.89) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda\eta(U)\,\eta(W)\,X-\lambda g(U,W)\,Y-\widetilde{C}(U,Y)W \\ &\quad +\lambda\eta(U)\,\eta(W)\,Y+\lambda g(Y,W)\,U \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $\lambda=1-\dfrac{\tau}{n(n-1)}$ olmak üzere

$$\widetilde{C}(U,Y)W=\lambda\left[g(Y,W)\,U-g(U,W)\,Y\right] \tag{6.92}$$

olur. (3.16) ve (6.92) eşitlikleri kullanılırsa

$$R(X,Y)Z=g(Y,Z)\,X-g(X,Z)\,Y \tag{6.93}$$

elde edilir. Konsörkılır (concircular) semi-simetrik Lorentzian Kenmotsu manifoldunda R Riemann eğrilik tensörü için R_Z Jakobi operatörü, $Z\in S^{-}(M)$ birim timelike vektörü ve $X\in S(M)$ birim vektörü için (6.93) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} R_Z &: Z^{\perp}\to Z^{\perp} \\ R_ZX &= R(X,Z)Z \\ &= g(Z,Z)\,X-g(X,Z)\,Z \end{aligned} \tag{6.94}$$

şeklinde yaızılır. $X \in Z^{\perp}$ olduğu için $g(X,Z) = 0$ olacaktır. Ayrıca $Z \in S^{-}(M)$ birim timelike vektör olduğundan dolayı $g(Z,Z) = -1$ olur. Bu bilgiler ışığında (6.94) eşitliği kullanılırsa

$$R_Z X = -X \tag{6.95}$$

bulunur. (6.95) eşitliğinde de görüleceği üzere $R_Z = -I_{Z^{\perp}}$ bulunur. R_Z Jakobi operatörünün özdeğerleri, seçilen $Z \in S^{-}(M)$ vektöründen bağımsız olduğu görülmektedir. Bu durumda aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 6.2.6 $(2n+1)-$boyutlu (M,g) Lorentzian Kenmotsu manifoldu konsörkılır (concircular) semi-simetrik olduğu durumda Osserman koşulunu sağlar ve M Osserman manifolddur.

6.3 Lorentzian Osserman Kenmotsu Manifold Örnekleri

Bu bölümde, yukarıda belirtilen teoremlere uygun Osserman koşulunu sağlayan Lorentzian Kenmotsu manifold örnekleri verilmiştir.

Osserman koşulunu sağlayan 3-boyutlu Lorentzian Kenmotsu manifoldlar

Örnek 6.3.1 (x_1, x_2, x_3) standart koordinatları olmak üzere $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3, x_3 \neq 0\}$ manifoldu olsun. M manifoldu üzerinde lineer bağımsız vektör alanları

$$e_1 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad e_2 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad e_3 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \tag{6.96}$$

olsun. g Lorentzian metriği

$$g = \frac{1}{x_3^2}(dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2) \tag{6.97}$$

şeklinde verilsin (De ve Krishnendu, 2013). (6.97) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} &g(e_1, e_3) = g(e_2, e_3) = g(e_1, e_2) = 0 \\ &g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = 1,\ g(e_3, e_3) = -1 \end{aligned} \tag{6.98}$$

olacak şekilde tanımlanır. $\forall Z \in T(M)$ için η 1-form

$$\eta(Z) = -g(Z, e_3) \tag{6.99}$$

biçimindedir. ϕ $(1,1)$-tensör alanı

$$\phi(e_1) = -e_2,\ \phi(e_2) = e_1,\ \phi(e_3) = 0 \tag{6.100}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece $e_3 = \xi$ olmak üzere (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme Lorentzian metrik yapısı oluşturulur. O halde

$$\begin{aligned}[e_1, e_2] &= e_1e_2 - e_2e_1 \\ &= x_3\frac{\partial}{\partial x_1}(x_3\frac{\partial}{\partial x_2}) - x_3\frac{\partial}{\partial x_2}(x_3\frac{\partial}{\partial x_1}) \\ &= 0\end{aligned} \tag{6.101}$$

bulunur. Aynı şekilde

$$\begin{aligned}[e_2, e_3] &= e_2e_3 - e_3e_2 \\ &= x_3\frac{\partial}{\partial x_2}(x_3\frac{\partial}{\partial x_3}) - x_3\frac{\partial}{\partial x_3}(x_3\frac{\partial}{\partial x_2}) \\ &= x_3^2\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3} - x_3^2\frac{\partial^2}{\partial x_3\partial x_2} - x_3\frac{\partial}{\partial x_2} \\ &= -e_2\end{aligned} \tag{6.102}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca

$$\begin{aligned}[e_1, e_3] &= e_1e_3 - e_3e_1 \\ &= x_3\frac{\partial}{\partial x_1}(x_3\frac{\partial}{\partial x_3}) - x_3\frac{\partial}{\partial x_3}(x_3\frac{\partial}{\partial x_1}) \\ &= x_3^2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3} - x_3^2\frac{\partial^2}{\partial x_3\partial x_1} - x_3\frac{\partial}{\partial x_1} \\ &= -e_1\end{aligned} \tag{6.103}$$

elde edilir. (3.4) denkleminde $X = e_1, Y = e_3$ ve $Z = e_2$ için

$$\begin{aligned}2g(\nabla_{e_1}e_3, e_2) &= e_1g(e_3, e_2) + e_3g(e_2, e_1) - e_2g(e_1, e_3) \\ &\quad -g(e_1, [e_3, e_2]) - g(e_3, [e_1, e_2]) + g(e_2, [e_1, e_3]) \\ &= 0\end{aligned}$$

olur. O halde

$$\nabla_{e_1}e_3 = 0 \ , \ \nabla_{e_1}e_3 = ce_1 \ \text{veya} \ \nabla_{e_1}e_3 = ce_3$$

yazılır. $X = e_1, Y = e_3$ ve $Z = e_1$ için

$$\begin{aligned}2g(\nabla_{e_1}e_3, e_1) &= e_1g(e_3, e_1) + e_3g(e_1, e_1) - e_1g(e_1, e_3) \\ &\quad -g(e_1, [e_3, e_1]) - g(e_3, [e_1, e_1]) + g(e_1, [e_1, e_3]) \\ &= -1 - 1 \\ &= -2\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece

$$\nabla_{e_1} e_3 = -e_1$$

olur. $X = e_2, Y = e_3$ ve $Z = e_2$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_2} e_3, e_2\right) &= e_2 g\left(e_3, e_2\right) + e_3 g\left(e_2, e_2\right) - e_2 g\left(e_2, e_3\right) \\ &\quad -g\left(e_2, [e_3, e_2]\right) - g\left(e_3, [e_2, e_2]\right) + g\left(e_2, [e_2, e_3]\right) \\ &= -1 - 1 \\ &= -2 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\nabla_{e_2} e_3 = -e_2$$

elde edilir. $X = e_1, Y = e_1$ ve $Z = e_3$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_1} e_1, e_3\right) &= e_1 g\left(e_1, e_3\right) + e_1 g\left(e_3, e_1\right) - e_3 g\left(e_1, e_1\right) \\ &\quad -g\left(e_1, [e_1, e_3]\right) - g\left(e_1, [e_1, e_3]\right) + g\left(e_3, [e_1, e_1]\right) \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\nabla_{e_1} e_1 = -e_3$$

elde edilir. $X = e_2, Y = e_2$ ve $Z = e_3$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_2} e_2, e_3\right) &= e_2 g\left(e_2, e_3\right) + e_2 g\left(e_3, e_2\right) - e_3 g\left(e_2, e_2\right) \\ &\quad -g\left(e_2, [e_2, e_3]\right) - g\left(e_2, [e_2, e_3]\right) + g\left(e_3, [e_2, e_2]\right) \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

yazılır. Bu durumda

$$\nabla_{e_2} e_2 = -e_3$$

bulunur. Aynı hesaplamalar kullanılırsa

$$\begin{array}{llllll} \nabla_{e_1} e_1 = -e_3, & \nabla_{e_2} e_1 = 0, & \nabla_{e_3} e_1 = 0, \\ \nabla_{e_1} e_2 = 0, & \nabla_{e_2} e_2 = -e_3, & \nabla_{e_3} e_2 = 0, \\ \nabla_{e_1} e_3 = -e_1, & \nabla_{e_2} e_3 = -e_2, & \nabla_{e_3} e_3 = 0 \end{array} \tag{6.104}$$

eşitlikleri elde edilir. M hemen hemen değme Lorentzian manifoldunda
$X = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3$ ve $Y = y^1 e_1 + y^2 e_2 + y^3 e_3$ vektör alanları için (6.100) ve (6.104) eşitlikleri kullanılırsa

$$\nabla_X \phi Y = -x^1 y^2 e_3 + x^2 y^1 e_3, \tag{6.105}$$

$$\phi\left(\nabla_X Y\right) = x^1 y^3 e_2 - x^2 y^3 e_1 \tag{6.106}$$

elde edilir. (6.105) ve (6.106) ifadeleri

$$\left(\nabla_X \phi\right) Y = \nabla_X \phi Y - \phi\left(\nabla_X Y\right) \tag{6.107}$$

eşitliğinde yerine yazılırsa (4.18) eşitliğinin sol tarafı

$$\left(\nabla_X \phi\right) Y = -x^1 y^2 e_3 + x^2 y^1 e_3 - x^1 y^3 e_2 + x^2 y^3 e_1 \tag{6.108}$$

şeklinde hesaplanır. $\xi = e_3$ olmak üzere (6.98), (6.99) ve (6.100) kullanılırsa

$$g\left(X, \phi Y\right)\xi = x^1 y^2 e_3 - x^2 y^1 e_3, \tag{6.109}$$

ve

$$\eta\left(Y\right)\phi X = -x^1 y^3 e_2 + x^2 y^3 e_1 \tag{6.110}$$

elde edilir. (4.18) eşitliğinin sağ tarafı, (6.109) ve (6.110) ifadeleri yerine yazılırsa

$$\left(\nabla_X \phi\right) Y = -x^1 y^2 e_3 + x^2 y^1 e_3 - x^1 y^3 e_2 + x^2 y^3 e_1 \tag{6.111}$$

bulunur. Böylece (6.108) ve (6.111) eşitlikleri ile M manifoldunun Lorentzian Kenmotsu manifold olma koşulu olan (4.18) denkleminin sağlandığı görülür. Sonuç olarak M manifoldu Lorentzian Kenmotsu manifolddur.

(6.104) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} R\left(e_1, e_2\right) e_3 &= \nabla_{e_1}\nabla_{e_2} e_3 - \nabla_{e_2}\nabla_{e_1} e_3 - \nabla_{[e_1,e_2]} e_3 \\ &= -\nabla_{e_1} e_2 + \nabla_{e_2} e_1 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{6.112}$$

bulunur. Aynı şekilde (6.112) eşitliğinde e_1, e_2 ve e_3 vektörlerinin döndürülmesi ile

$$\begin{array}{llllll} R\left(e_1, e_2\right) e_3 = 0, & R\left(e_2, e_3\right) e_3 = -e_2, & R\left(e_1, e_3\right) e_3 = -e_1, \\ R\left(e_1, e_2\right) e_2 = e_1, & R\left(e_2, e_3\right) e_2 = -e_3, & R\left(e_1, e_3\right) e_2 = 0, \\ R\left(e_1, e_2\right) e_1 = -e_2, & R\left(e_2, e_3\right) e_1 = 0, & R\left(e_1, e_3\right) e_1 = -e_3 \end{array} \tag{6.113}$$

elde edilir. (6.113) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} S\left(e_1, e_1\right) &= g\left(R\left(e_1, e_2\right) e_2, e_1\right) - g\left(R\left(e_1, e_3\right) e_3, e_1\right) \\ &= g\left(e_1, e_1\right) - g\left(-e_1, e_1\right) \\ &= 2 \end{aligned} \tag{6.114}$$

bulunur. Aynı şekilde

$$S\left(e_2, e_2\right) = 2, \tag{6.115}$$

$$S\left(e_3, e_3\right) = -2 \tag{6.116}$$

yazılır. (6.114), (6.115) ve (6.116) eşitlikleri kullanılırsa

$$\tau = S\left(e_1, e_1\right) + S\left(e_2, e_2\right) - S\left(e_3, e_3\right) = 6 \tag{6.117}$$

bulunur. Böylece τ skaler eğirilik sabit olduğu gösterilir.

Sonuç 6.3.1 (6.113) eşitliklerinden görüleceği üzere e_3 timelike karakteristik vektör alanına göre R_{e_3} Jakobi operatörünün özdeğerleri, seçilen e_3 timelike vektöründen bağımsız her zaman -1 dir. Bu durumda M manifoldu timelike Osserman koşulunu sağlar ve timelike Osserman manifold olur.

Örnek 6.3.2 (x_1, x_2, x_3) standart koordinatları olmak üzere $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3,\ x_3 \neq 0,\ \delta \neq 0\}$ manifoldu olsun. M manifoldu üzerinde lineer bağımsız vektör alanları δ sabit olmak üzere

$$e_1 = \frac{e^{x_1}}{x_3^2}\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad e_2 = \frac{e^{x_2}}{x_3^2}\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad e_3 = -\frac{\delta}{2}\frac{\partial}{\partial x_3} \tag{6.118}$$

olsun. g Lorentzian metriği

$$g = \frac{x_3^4}{e^{2x_1}}(dx_1^2 + dx_2^2) - \frac{4}{\delta^2}dx_3^2 \tag{6.119}$$

şeklinde verilsin (Siddiqi, 2018). (6.119) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} &g\left(e_1, e_3\right) = g\left(e_2, e_3\right) = g\left(e_1, e_2\right) = 0 \\ &g\left(e_1, e_1\right) = g\left(e_2, e_2\right) = 1,\ g\left(e_3, e_3\right) = -1 \end{aligned} \tag{6.120}$$

olacak şekilde tanımlanır. $\forall Z \in T\left(M\right)$ için η 1-form

$$\eta\left(Z\right) = -g\left(Z, e_3\right) \tag{6.121}$$

biçimindedir. $\phi\left(1,1\right)$-tensör alanı

$$\phi\left(e_1\right) = -e_2,\ \phi\left(e_2\right) = e_1,\ \phi\left(e_3\right) = 0 \tag{6.122}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece $e_3 = \xi$ olmak üzere (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme Lorentzian metrik yapısı oluşturulur. O halde

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_1e_2 - e_2e_1 \\ &= \frac{e^{x_1}}{x_3^2}\frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{e^{x_2}}{x_3^2}\frac{\partial}{\partial x_2}) - \frac{e^{x_2}}{x_3^2}\frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{e^{x_1}}{x_3^2}\frac{\partial}{\partial x_1}) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{6.123}$$

bulunur. Aynı şekilde

$$\begin{aligned}[e_2,e_3] &= e_2e_3-e_3e_2\\ &= \frac{e^{x_2}}{x_3^2}\frac{\partial}{\partial x_2}(-\frac{\delta}{2}\frac{\partial}{\partial x_3})+\frac{\delta}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}(\frac{e^{x_2}}{x_3^2}\frac{\partial}{\partial x_2})\\ &= -\frac{\delta}{2}.\frac{2}{x_3}.\frac{e^{x_2}}{x_3^2}\frac{\partial}{\partial x_2}\\ &= -\frac{\delta}{x_3}e_2\end{aligned} \tag{6.124}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca

$$\begin{aligned}[e_1,e_3] &= e_1e_3-e_3e_1\\ &= \frac{e^{x_1}}{x_3^2}\frac{\partial}{\partial x_1}(-\frac{\delta}{2}\frac{\partial}{\partial x_3})+\frac{\delta}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}(\frac{e^{x_1}}{x_3^2}\frac{\partial}{\partial x_1})\\ &= -\frac{\delta}{2}.\frac{2}{x_3}.\frac{e^{x_1}}{x_3^2}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ &= -\frac{\delta}{x_3}e_1\end{aligned} \tag{6.125}$$

elde edilir. (3.4) denkleminde $X=e_1, Y=e_3$ ve $Z=e_2$ için

$$\begin{aligned}2g\left(\nabla_{e_1}e_3,e_2\right) &= e_1g\left(e_3,e_2\right)+e_3g\left(e_2,e_1\right)-e_2g\left(e_1,e_3\right)\\ &\quad -g\left(e_1,[e_3,e_2]\right)-g\left(e_3,[e_1,e_2]\right)+g\left(e_2,[e_1,e_3]\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

olur. O halde

$$\nabla_{e_1}e_3 = 0\ ,\ \nabla_{e_1}e_3 = ce_1 \text{ veya } \nabla_{e_1}e_3 = ce_3$$

yazılır. $X=e_1, Y=e_3$ ve $Z=e_1$ için

$$\begin{aligned}2g\left(\nabla_{e_1}e_3,e_1\right) &= e_1g\left(e_3,e_1\right)+e_3g\left(e_1,e_1\right)-e_1g\left(e_1,e_3\right)\\ &\quad -g\left(e_1,[e_3,e_1]\right)-g\left(e_3,[e_1,e_1]\right)+g\left(e_1,[e_1,e_3]\right)\\ &= -\frac{\delta}{x_3}-\frac{\delta}{x_3}\\ &= -2\frac{\delta}{x_3}\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\nabla_{e_1}e_3 = -\frac{\delta}{x_3}e_1$$

bulunur. $X=e_2, Y=e_3$ ve $Z=e_2$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_2}e_3, e_2\right) &= e_2 g\left(e_3, e_2\right) + e_3 g\left(e_2, e_2\right) - e_2 g\left(e_3, e_2\right) \\ &\quad -g\left(e_2, [e_3, e_2]\right) - g\left(e_3, [e_2, e_2]\right) + g\left(e_2, [e_2, e_3]\right) \\ &= -\frac{\delta}{x_3} - \frac{\delta}{x_3} \\ &= -2\frac{\delta}{x_3} \end{aligned}$$

yazılır. Böylece

$$\nabla_{e_2}e_3 = -\frac{\delta}{x_3}e_2$$

elde edilir. $X=e_1, Y=e_1$ ve $Z=e_3$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_1}e_1, e_3\right) &= e_1 g\left(e_1, e_3\right) + e_1 g\left(e_3, e_1\right) - e_3 g\left(e_1, e_1\right) \\ &\quad -g\left(e_1, [e_1, e_3]\right) - g\left(e_1, [e_1, e_3]\right) + g\left(e_3, [e_1, e_1]\right) \\ &= \frac{\delta}{x_3} + \frac{\delta}{x_3} \\ &= 2\frac{\delta}{x_3} \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\nabla_{e_1}e_1 = -\frac{\delta}{x_3}e_3$$

elde edilir. $X=e_2, Y=e_2$ ve $Z=e_3$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_2}e_2, e_3\right) &= e_2 g\left(e_2, e_3\right) + e_2 g\left(e_3, e_2\right) - e_3 g\left(e_2, e_2\right) \\ &\quad -g\left(e_2, [e_2, e_3]\right) - g\left(e_2, [e_2, e_3]\right) + g\left(e_3, [e_2, e_2]\right) \\ &= \frac{\delta}{x_3} + \frac{\delta}{x_3} \\ &= 2\frac{\delta}{x_3} \end{aligned}$$

yazılır. Bu durumda

$$\nabla_{e_2}e_2 = -\frac{\delta}{x_3}e_3$$

bulunur. Aynı hesaplamalar kullanılırsa

$$\begin{array}{llll} \nabla_{e_1}e_1 = -\frac{\delta}{x_3}e_3, & \nabla_{e_2}e_1 = 0, & & \nabla_{e_3}e_1 = 0, \\ \nabla_{e_1}e_2 = 0, & \nabla_{e_2}e_2 = -\frac{\delta}{x_3}e_3, & \nabla_{e_3}e_2 = 0, & \\ \nabla_{e_1}e_3 = -\frac{\delta}{x_3}e_1, & \nabla_{e_2}e_3 = -\frac{\delta}{x_3}e_2, & \nabla_{e_3}e_3 = 0 & \end{array} \tag{6.126}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.18) denklemi kontrol edilerek M manifoldunun Lorentzian Kenmotsu manifold olduğu görülür.

(6.126) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} R(e_1,e_2)e_3 &= \nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_3 - \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_3 - \nabla_{[e_1,e_2]}e_3 \\ &= -\frac{\delta}{x_3}\nabla_{e_1}e_2 + \frac{\delta}{x_3}\nabla_{e_2}e_1 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{6.127}$$

bulunur. Aynı şekilde (6.127) eşitliğinde e_1, e_2 ve e_3 vektörlerinin döndürülmesi ile

$$\begin{aligned} R(e_1,e_2)e_3 &= 0, & R(e_2,e_3)e_3 &= -\frac{\delta^2}{x_3^2}e_2, & R(e_1,e_3)e_3 &= -\frac{\delta^2}{x_3^2}e_1, \\ R(e_1,e_2)e_2 &= \frac{\delta^2}{x_3^2}e_1, & R(e_2,e_3)e_2 &= -\frac{\delta^2}{x_3^2}e_3, & R(e_1,e_3)e_2 &= 0, \\ R(e_1,e_2)e_1 &= -\frac{\delta^2}{x_3^2}e_2, & R(e_2,e_3)e_1 &= 0, & R(e_1,e_3)e_1 &= -\frac{\delta^2}{x_3^2}e_3 \end{aligned} \tag{6.128}$$

elde edilir. (6.128) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} S(e_1,e_1) &= g(R(e_1,e_2)e_2,e_1) + g(R(e_1,e_3)e_3,e_1) \\ &= \frac{\delta^2}{x_3^2}g(e_1,e_1) - \frac{\delta^2}{x_3^2}g(-e_1,e_1) \\ &= 2\frac{\delta^2}{x_3^2} \end{aligned} \tag{6.129}$$

bulunur. Aynı şekilde

$$S(e_2,e_2) = 2\frac{\delta^2}{x_3^2}, \tag{6.130}$$

$$S(e_3,e_3) = -2\frac{\delta^2}{x_3^2} \tag{6.131}$$

yazılır. (6.129), (6.130) ve (6.131) eşitlikleri kullanılırsa

$$\tau = S(e_1,e_1) + S(e_2,e_2) - S(e_3,e_3) = 6\frac{\delta^2}{x_3^2} \tag{6.132}$$

bulunur.

Sonuç 6.3.2 (6.128) eşitliklerinden görüleceği üzere e_3 timelike karakteristik vektör alanına göre R_{e_3} Jakobi operatörünün özdeğerleri, seçilen e_3 timelike vektöründen bağımsız her zaman $-\frac{\delta^2}{x_3^2}$ dir. Bu durumda M manifoldu timelike Osserman koşulunu sağlar ve timelike Osserman manifold olur.

Osserman koşulunu sağlayan 5-boyutlu Lorentzian Kenmotsu manifoldlar

Örnek 6.3.3 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ standart koordinatları olmak üzere $M^5 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in R^5\}$ manifoldu olsun. M manifoldu üzerinde lineer bağımsız vektör alanları

$$e_1 = e^{-x_5}\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad e_2 = e^{-x_5}\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad e_3 = e^{-x_5}\frac{\partial}{\partial x_3},$$
$$e_4 = e^{-x_5}\frac{\partial}{\partial x_4}, \quad e_5 = \frac{\partial}{\partial x_5}$$

olsun. g Lorentzian metriği

$$g = e^{2x_5}\left\{dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2 + dx_3 \otimes dx_3 + dx_4 \otimes dx_4\right\} - dx_5 \otimes dx_5 \tag{6.133}$$

şeklinde verilsin (Barman ve De, 2015). (6.133) eşitliği kullanılırsa

$$g\left(e_i, e_j\right) = 0, \ i \neq j, \tag{6.134}$$

$$g\left(e_i, e_i\right) = 1, \ i = 1, 2, 3, 4 \tag{6.135}$$

$$g\left(e_i, e_i\right) = -1, \ i = 5 \tag{6.136}$$

olacak şekilde tanımlanır. $\forall U \in T\left(M\right)$ için η 1-form

$$\eta\left(U\right) = -g\left(U, e_5\right) \tag{6.137}$$

biçimindedir. $\phi\left(1,1\right)$-tensör alanı

$$\phi\left(e_1\right) = e_3, \ \phi\left(e_2\right) = e_4, \ \phi\left(e_3\right) = -e_1, \ \phi\left(e_4\right) = -e_2, \ \phi\left(e_5\right) = 0 \tag{6.138}$$

şeklinde tanımlanır. ϕ tensör alanı ve g Lorentzian metriğin lineerlik özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \eta\left(e_5\right) &= 1, \\ \phi^2\left(U\right) &= -U + \eta\left(U\right)e_5, \\ g\left(\phi U, \phi V\right) &= g\left(U, V\right) + \eta\left(U\right)\eta\left(V\right) \end{aligned} \tag{6.139}$$

yazılır. Böylece $e_5 = \xi$ olmak üzere (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme Lorentzian metrik yapısı oluşturulur. Lie parantez operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= [e_1, e_3] = [e_1, e_4] = 0, \\ [e_2, e_3] &= [e_2, e_4] = 0, \\ [e_3, e_4] &= 0 \end{aligned} \tag{6.140}$$

bulunur. e_5 timelike vektörü için

$$\begin{aligned}
[e_1, e_5] &= e_1 e_5 - e_5 e_1 \\
&= e^{-x_5}\frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial}{\partial x_5}) - \frac{\partial}{\partial x_5}(e^{-x_5}\frac{\partial}{\partial x_1}) \\
&= 0 + e^{-x_5}\frac{\partial}{\partial x_1} \\
&= e_1
\end{aligned} \tag{6.141}$$

elde edilir. Aynı şekilde

$$\begin{aligned}
[e_2, e_5] &= e_2 e_5 - e_5 e_2 \\
&= e^{-x_5}\frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial}{\partial x_5}) - \frac{\partial}{\partial x_5}(e^{-x_5}\frac{\partial}{\partial x_2}) \\
&= 0 + e^{-x_5}\frac{\partial}{\partial x_2} \\
&= e_2
\end{aligned} \tag{6.142}$$

yazılır. Aynı şekilde

$$\begin{aligned}
[e_3, e_5] &= e_3 e_5 - e_5 e_3 \\
&= e^{-x_5}\frac{\partial}{\partial x_3}(\frac{\partial}{\partial x_5}) - \frac{\partial}{\partial x_5}(e^{-x_5}\frac{\partial}{\partial x_3}) \\
&= 0 + e^{-x_5}\frac{\partial}{\partial x_3} \\
&= e_3
\end{aligned} \tag{6.143}$$

elde edilir. Son olarak

$$\begin{aligned}
[e_4, e_5] &= e_4 e_5 - e_5 e_4 \\
&= e^{-x_5}\frac{\partial}{\partial x_4}(\frac{\partial}{\partial x_5}) - \frac{\partial}{\partial x_5}(e^{-x_5}\frac{\partial}{\partial x_4}) \\
&= 0 + e^{-x_5}\frac{\partial}{\partial x_4} \\
&= e_4
\end{aligned} \tag{6.144}$$

bulunur. (6.141), (6.142), (6.143) ve (6.144) eşitliklerinden yola çıkılırsa

$$[e_i, e_5] = e_i,\ 1 \leq i \leq 4 \tag{6.145}$$

yazılır. (3.4) ve (6.145) eşitlikleri kullanılarak 5 farklı durum incelenmiştir.

Durum 1: $i \neq j$ ve $1 \leq i, j \leq 4$ olmak üzere

$$\nabla_{e_i} e_j = 0 \tag{6.146}$$

bulunur. (3.4) eşitliğinde $X = e_1, Y = e_2$ ve $Z = e_5$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_1} e_2, e_5\right) &= e_1 g\left(e_2, e_5\right) + e_2 g\left(e_5, e_1\right) - e_5 g\left(e_1, e_2\right) \\ &\quad -g\left(e_1, [e_2, e_5]\right) - g\left(e_2, [e_1, e_5]\right) + g\left(e_5, [e_1, e_2]\right) \\ &= -g\left(e_1, e_2\right) - g\left(e_2, e_1\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Durum 2: $1 \leq i \leq 4$ olmak üzere

$$\nabla_{e_i} e_i = e_5 \tag{6.147}$$

bulunur. (3.4) eşitliğinde $X = e_1, Y = e_1$ ve $Z = e_5$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_1} e_1, e_5\right) &= e_1 g\left(e_1, e_5\right) + e_1 g\left(e_5, e_1\right) - e_5 g\left(e_1, e_1\right) \\ &\quad -g\left(e_1, [e_1, e_5]\right) - g\left(e_1, [e_1, e_5]\right) + g\left(e_5, [e_1, e_1]\right) \\ &= -g\left(e_1, e_1\right) - g\left(e_1, e_1\right) \\ &= -2 \end{aligned}$$

yazılır. Böylece

$$\nabla_{e_1} e_1 = e_5$$

bulunur.

Durum 3: $i = j = 5$ olmak üzere

$$\nabla_{e_5} e_5 = 0 \tag{6.148}$$

bulunur. (3.4) eşitliğinde $X = e_5, Y = e_5$ ve $Z = e_1$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_5} e_5, e_1\right) &= e_5 g\left(e_5, e_1\right) + e_5 g\left(e_5, e_1\right) - e_1 g\left(e_5, e_5\right) \\ &\quad -g\left(e_5, [e_5, e_1]\right) - g\left(e_5, [e_5, e_1]\right) + g\left(e_1, [e_5, e_5]\right) \\ &= g\left(e_5, e_1\right) + g\left(e_5, e_1\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $X = e_5, Y = e_5$ ve $Z = e_5$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_5} e_5, e_5\right) &= e_5 g\left(e_5, e_5\right) + e_5 g\left(e_5, e_5\right) - e_5 g\left(e_5, e_5\right) \\ &\quad -g\left(e_5, [e_5, e_5]\right) - g\left(e_5, [e_5, e_5]\right) + g\left(e_5, [e_5, e_5]\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Durum 4: $1 \leq i \leq 4$ olmak üzere

$$\nabla_{e_5} e_i = 0 \tag{6.149}$$

bulunur. (3.4) eşitliğinde $X = e_5, Y = e_1$ ve $Z = e_1$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_5} e_1, e_1\right) &= e_5 g\left(e_1, e_1\right) + e_1 g\left(e_5, e_1\right) - e_1 g\left(e_5, e_1\right) \\ &\quad -g\left(e_5, [e_1, e_1]\right) - g\left(e_1, [e_5, e_1]\right) + g\left(e_1, [e_5, e_1]\right) \\ &= g\left(e_1, e_1\right) - g\left(e_1, e_1\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $X = e_5, Y = e_1$ ve $Z = e_5$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_5} e_1, e_5\right) &= e_5 g\left(e_1, e_5\right) + e_1 g\left(e_5, e_5\right) - e_5 g\left(e_5, e_1\right) \\ &\quad -g\left(e_5, [e_1, e_5]\right) - g\left(e_1, [e_5, e_5]\right) + g\left(e_5, [e_5, e_1]\right) \\ &= -g\left(e_5, e_1\right) - g\left(e_5, e_1\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Durum 5: $1 \leq i \leq 4$ olmak üzere

$$\nabla_{e_i} e_5 = e_i \tag{6.150}$$

bulunur. (3.4) eşitliğinde $X = e_1, Y = e_5$ ve $Z = e_1$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_1} e_5, e_1\right) &= e_1 g\left(e_5, e_1\right) + e_5 g\left(e_1, e_1\right) - e_1 g\left(e_1, e_5\right) \\ &\quad -g\left(e_1, [e_5, e_1]\right) - g\left(e_5, [e_1, e_1]\right) + g\left(e_1, [e_1, e_5]\right) \\ &= g\left(e_1, e_1\right) + g\left(e_1, e_1\right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

yazılır. Böylece

$$\nabla_{e_1} e_5 = e_1$$

bulunur.

Sonuç olarak yaptığımız hesaplamalar doğrultusunda

$$\begin{array}{lllll} \nabla_{e_1}e_1=e_5, & \nabla_{e_1}e_2=0, & \nabla_{e_1}e_3=0, & \nabla_{e_1}e_4=0, & \nabla_{e_1}e_5=e_1, \\ \nabla_{e_2}e_1=0, & \nabla_{e_2}e_2=e_5, & \nabla_{e_2}e_3=0, & \nabla_{e_2}e_4=0, & \nabla_{e_2}e_5=e_2, \\ \nabla_{e_3}e_1=0, & \nabla_{e_3}e_2=0, & \nabla_{e_3}e_3=e_5, & \nabla_{e_3}e_4=0, & \nabla_{e_3}e_5=e_3, \\ \nabla_{e_4}e_1=0, & \nabla_{e_4}e_2=0, & \nabla_{e_4}e_3=0, & \nabla_{e_4}e_4=e_5, & \nabla_{e_4}e_5=e_4, \\ \nabla_{e_5}e_1=0, & \nabla_{e_5}e_2=0, & \nabla_{e_5}e_3=0, & \nabla_{e_5}e_4=0, & \nabla_{e_5}e_5=0 \end{array} \tag{6.151}$$

elde edilir. (4.18) denklemi kontrol edilerek M manifoldunun Lorentzian Kenmotsu manifold olduğu görülür. (6.151) eşitlikleri kullanılarak R Riemann eğrilik tensörünün hesaplanmasında 7 farklı durum incelenmiştir.

Durum 1: $1 \leq i \leq 5$ olmak üzere

$$R(e_i, e_i)\, e_i = 0 \tag{6.152}$$

bulunur.

Durum 2: $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq 5$ olmak üzere

$$R(e_i, e_i)\, e_j = 0 \tag{6.153}$$

elde edilir.

Durum 3: $i \neq j \neq k$, $1 \leq i, j, k \leq 5$ olmak üzere

$$R(e_i, e_j)\, e_k = 0 \tag{6.154}$$

yazılır.

Durum 4: $i \neq j$, $1 \leq i \leq 4$ ve $1 \leq j \leq 5$ olmak üzere

$$R(e_i, e_j)\, e_i = -e_j \tag{6.155}$$

bulunur. (6.155) eşitliğinde $i = 1$ ve $j = 4$ için

$$\begin{aligned} R(e_1, e_4)\, e_1 &= \nabla_{e_1}\nabla_{e_4}e_1 - \nabla_{e_4}\nabla_{e_1}e_1 - \nabla_{[e_1,e_4]}e_1 \\ &= 0 - \nabla_{e_4}e_5 - 0 \\ &= -e_4 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Aynı şekilde $i = 2$ ve $j = 5$ için

$$\begin{aligned} R(e_2, e_5) e_2 &= \nabla_{e_2}\nabla_{e_5}e_2 - \nabla_{e_5}\nabla_{e_2}e_2 - \nabla_{[e_2,e_5]}e_2 \\ &= 0 - 0 - \nabla_{e_2}e_2 \\ &= -e_5 \end{aligned}$$

yazılır.

Durum 5: $i = 5$ ve $1 \leq j \leq 4$ olmak üzere

$$R(e_i, e_j) e_i = e_j \tag{6.156}$$

bulunur. (6.156) eşitliğinde $i = 5$ ve $j = 3$ için

$$\begin{aligned} R(e_5, e_3) e_5 &= \nabla_{e_5}\nabla_{e_3}e_5 - \nabla_{e_3}\nabla_{e_5}e_5 - \nabla_{[e_5,e_3]}e_5 \\ &= \nabla_{e_5}e_3 - 0 + \nabla_{e_3}e_5 \\ &= e_3 \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Durum 6: $i \neq j$, $1 \leq i \leq 5$ ve $1 \leq j \leq 4$ olmak üzere

$$R(e_i, e_j) e_j = e_i \tag{6.157}$$

bulunur. (6.157) eşitliğinde eşitliğinde $i = 1$ ve $j = 4$ için

$$\begin{aligned} R(e_1, e_4) e_4 &= \nabla_{e_1}\nabla_{e_4}e_4 - \nabla_{e_4}\nabla_{e_1}e_4 - \nabla_{[e_1,e_4]}e_4 \\ &= \nabla_{e_1}e_5 - 0 - 0 \\ &= e_1 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Aynı şekilde $i = 5$ ve $j = 2$ için

$$\begin{aligned} R(e_5, e_2) e_2 &= \nabla_{e_5}\nabla_{e_2}e_2 - \nabla_{e_2}\nabla_{e_5}e_2 - \nabla_{[e_5,e_2]}e_2 \\ &= \nabla_{e_5}e_5 - 0 + \nabla_{e_2}e_2 \\ &= e_5 \end{aligned}$$

yazılır.

Durum 7: $j = 5$ ve $1 \leq i \leq 4$ olmak üzere

$$R(e_i, e_j) e_j = -e_i \tag{6.158}$$

bulunur. (6.158) eşitliğinde $i=3$ ve $j=5$ için

$$\begin{aligned} R(e_3,e_5)\,e_5 &= \nabla_{e_3}\nabla_{e_5}e_5-\nabla_{e_5}\nabla_{e_3}e_5-\nabla_{[e_3,e_5]}e_5 \\ &= 0-0-\nabla_{e_3}e_5 \\ &= -e_3 \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Yukarıdaki hesaplamalardan yararlanılırsa

$$\begin{aligned} &R(e_i,e_i)\,e_i=0, && && 1\le i\le 5 \\ &R(e_i,e_i)\,e_j=0, && i\neq j, && 1\le i,j\le 5 \\ &R(e_i,e_j)\,e_k=0, && i\neq j\neq k, && 1\le i,j,k\le 5 \\ &R(e_i,e_j)\,e_i=-e_j, && i\neq j, && 1\le i\le 4 \text{ ve } 1\le j\le 5 \\ &R(e_i,e_j)\,e_i=e_j, && i=5, && 1\le j\le 4 \\ &R(e_i,e_j)\,e_j=e_i, && i\neq j, && 1\le i\le 5 \text{ ve } 1\le j\le 4 \\ &R(e_i,e_j)\,e_j=-e_i, && j=5, && 1\le i\le 4 \end{aligned} \tag{6.159}$$

elde edilir. $X=\sum_{i=1}^{5}x_ie_i$, $Y=\sum_{j=1}^{5}y_je_j$ ve $Z=\sum_{k=1}^{5}z_ke_k$ vektör alanları için $1\le i,j,k\le 5$ olmak üzere (6.159) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} R(X,Y)\,Z &= x_iy_jz_kR(e_i,e_j)\,e_k \\ &= y_jz_jx_iR(e_i,e_j)\,e_j+x_iy_jz_iR(e_i,e_j)\,e_i \\ &= y_jz_jx_ie_i-x_iz_iy_je_j \\ &= g(Y,Z)\,X-g(X,Z)\,Y \end{aligned} \tag{6.160}$$

elde edilir. R_Z Jakobi operatörü, $Z\in S^-(M)$ birim timelike vektörü ve $X\in S(M)$ birim vektörü için (6.160) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} R_Z &: Z^\perp\to Z^\perp \\ R_ZX &= R(X,Z)Z \\ &= g(Z,Z)\,X-g(X,Z)\,Z \end{aligned} \tag{6.161}$$

elde edilir. $X\in Z^\perp$ olduğu için $g(X,Z)=0$ olacaktır. Ayrıca $Z\in S^-(M)$ birim timelike vektör olduğundan dolayı $g(Z,Z)=-1$ olur. Bu bilgiler ışığında (6.161) eşitliği kullanılırsa

$$R_ZX=-X \tag{6.162}$$

bulunur. (6.162) eşitliğinde de görüleceği üzere $R_Z = -I_{Z^\perp}$ bulunur. R_Z Jakobi operatörünün özdeğerlerinin, seçilen $Z \in S^-(M)$ vektöründen bağımsız olduğu görülmektedir.

(6.160) denklemi kullanılarak S Ricci tensörü

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= \sum_{i=1}^{4} g(R(e_i,X)Y,e_i) - g(R(e_5,X)Y,e_5) \\ &= \sum_{i=1}^{4} g([g(X,Y)e_i - g(e_i,X)Y],e_i) - g([g(X,Y)e_5 - g(e_5,X)Y],e_5) \\ &= 4g(X,Y) \end{aligned} \tag{6.163}$$

bulunur. (6.163) kullanılırsa

$$S(e_1,e_1) = S(e_2,e_2) = S(e_3,e_3) = S(e_4,e_4) = 4, \tag{6.164}$$

$$S(e_5,e_5) = -4 \tag{6.165}$$

yazılır. (6.164) ve (6.165) kullanılarak M nin skaler eğriliği τ

$$\begin{aligned} \tau &= \sum_{i=1}^{5} g(e_i,e_i)\, S(e_i,e_i) \\ \tau &= 20 \end{aligned} \tag{6.166}$$

olarak hesaplanır. Böylece manifoldun Einstein manifold olduğu görülür.

Sonuç 6.3.3 Yukarıdaki hesaplamalardan görüleceği üzere e_5 timelike karakteristik vektör alanına göre R_{e_5} Jakobi operatörünün özdeğerleri, seçilen e_5 timelike vektöründen bağımsız her zaman -1 dir. Bu durumda M manifoldu Einstein manifold olur ve timelike Osserman koşulunu sağlar. M manifolduna timelike Osserman manifold denir.

Osserman koşulunu sağlayan 7-boyutlu Lorentzian Kenmotsu manifoldlar

Örnek 6.3.4 $(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3,z)$ standart koordinatları olmak üzere $M^7 = \{(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3,z) \in R^7\}$ manifoldu olsun. M manifoldu üzerinde $1 \leq i,j \leq 3$ olmak üzere olmak üzere lineer bağımsız vektör alanları

$$e_i = e^z \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad e_j = e^z \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad e_7 = \frac{\partial}{\partial z}$$

olsun. g Lorentzian metriği

$$g = e^{-2z} \sum_{i=1}^{3} \{dx_i \otimes dx_i + dy_i \otimes dy_i\} - dz \otimes dz \tag{6.167}$$

şeklinde verilsin (Yıldırım ve Atçeken, 2019). (6.167) eşitliği kullanılırsa

$$g(e_i, e_j) = 0,\ i \neq j, \tag{6.168}$$

$$g(e_i, e_i) = 1,\ 1 \leq i \leq 6 \tag{6.169}$$

$$g(e_i, e_i) = -1,\ i = 7 \tag{6.170}$$

elde edilir. M manifoldu üzerinde

$$X = \sum_{i=1}^{3} \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial}{\partial y_j} \right) + z \frac{\partial}{\partial z} \tag{6.171}$$

tanımlı X vektör alanı için $\phi\,(1,1)$-tensör alanı

$$\phi X = \sum_{i=1}^{3} \left(y_i \frac{\partial}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \tag{6.172}$$

yazılır. $\forall U \in T(M)$ için η 1-form

$$\eta(U) = -g(U, e_7) \tag{6.173}$$

şeklindedir. ϕ tensör alanı ve g Lorentzian metriğin lineerlik özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \eta(e_7) &= 1, \\ \phi^2(U) &= -U + \eta(U) e_7, \\ g(\phi U, \phi V) &= g(U, V) + \eta(U) \eta(V) \end{aligned} \tag{6.174}$$

yazılır. $1 \leq i, j \leq 6$ olmak üzere Lie parantez operatörü uygulanırsa

$$[e_i, e_j] = 0 \tag{6.175}$$

$$[e_i, e_7] = -e_i \tag{6.176}$$

yazılır. Böylece $e_7 = \xi$ olmak üzere (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme Lorentzian metrik yapısı oluşturulur. Örnek olarak (6.176) ifadesinde $i = 1$ için

$$\begin{aligned} [e_1, e_7] &= e_1 e_7 - e_7 e_1 \\ &= e^z \frac{\partial}{\partial x_1} (\frac{\partial}{\partial z}) - \frac{\partial}{\partial z} (e^z \frac{\partial}{\partial x_1}) \\ &= 0 - e^z \frac{\partial}{\partial x_1} \\ &= -e_1 \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} [e_1, e_7] &= -e_1, \quad [e_4, e_7] = -e_4, \\ [e_2, e_7] &= -e_2, \quad [e_5, e_7] = -e_5, \\ [e_3, e_7] &= -e_3, \quad [e_6, e_7] = -e_6. \end{aligned} \tag{6.177}$$

yazılır. (6.167) ve (6.177) eşitlikleri kullanılarak 5 farklı durum incelenmiştir.

Durum 1: $i \neq j$ ve $1 \leq i, j \leq 6$ olmak üzere

$$\nabla_{e_i} e_j = 0 \tag{6.178}$$

bulunur. (3.4) eşitliğinde $X = e_1, Y = e_3$ ve $Z = e_7$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_1} e_3, e_7\right) &= e_1 g\left(e_3, e_7\right) + e_3 g\left(e_7, e_1\right) - e_7 g\left(e_1, e_3\right) \\ &\quad - g\left(e_1, [e_3, e_7]\right) - g\left(e_3, [e_1, e_7]\right) + g\left(e_7, [e_1, e_3]\right) \\ &= g\left(e_1, e_3\right) + g\left(e_3, e_1\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Durum 2: $1 \leq i \leq 6$ olmak üzere

$$\nabla_{e_i} e_i = -e_7 \tag{6.179}$$

bulunur. (3.4) eşitliğinde $X = e_1, Y = e_1$ ve $Z = e_7$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_1} e_1, e_7\right) &= e_1 g\left(e_1, e_7\right) + e_1 g\left(e_7, e_1\right) - e_7 g\left(e_1, e_1\right) \\ &\quad - g\left(e_1, [e_1, e_7]\right) - g\left(e_1, [e_1, e_7]\right) + g\left(e_7, [e_1, e_1]\right) \\ &= g\left(e_1, e_1\right) + g\left(e_1, e_1\right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

yazılır. Böylece

$$\nabla_{e_1} e_1 = -e_7$$

bulunur.

Durum 3: $i = j = 7$ olmak üzere

$$\nabla_{e_7} e_7 = 0 \tag{6.180}$$

bulunur. (3.4) eşitliğinde $X = e_7, Y = e_7$ ve $Z = e_2$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_7}e_7, e_2\right) &= e_7 g\left(e_7, e_2\right) + e_7 g\left(e_7, e_2\right) - e_2 g\left(e_7, e_7\right) \\ &\quad -g\left(e_7, [e_7, e_2]\right) - g\left(e_7, [e_7, e_2]\right) + g\left(e_2, [e_7, e_7]\right) \\ &= -g\left(e_7, e_2\right) - g\left(e_7, e_2\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $X = e_7, Y = e_7$ ve $Z = e_7$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_7}e_7, e_7\right) &= e_7 g\left(e_7, e_7\right) + e_7 g\left(e_7, e_7\right) - e_7 g\left(e_7, e_7\right) \\ &\quad -g\left(e_7, [e_7, e_7]\right) - g\left(e_7, [e_7, e_7]\right) + g\left(e_7, [e_7, e_7]\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

yazılır.

Durum 4: $1 \leq i \leq 6$ olmak üzere

$$\nabla_{e_7}e_i = 0 \tag{6.181}$$

bulunur. (3.4) eşitliğinde $X = e_7, Y = e_3$ ve $Z = e_3$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_7}e_3, e_3\right) &= e_7 g\left(e_3, e_3\right) + e_3 g\left(e_7, e_3\right) - e_3 g\left(e_7, e_3\right) \\ &\quad -g\left(e_7, [e_3, e_3]\right) - g\left(e_3, [e_7, e_3]\right) + g\left(e_3, [e_7, e_3]\right) \\ &= -g\left(e_3, e_3\right) + g\left(e_3, e_3\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $X = e_7, Y = e_4$ ve $Z = e_7$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_7}e_4, e_7\right) &= e_7 g\left(e_4, e_7\right) + e_4 g\left(e_7, e_7\right) - e_7 g\left(e_7, e_4\right) \\ &\quad -g\left(e_7, [e_4, e_7]\right) - g\left(e_4, [e_7, e_7]\right) + g\left(e_7, [e_7, e_4]\right) \\ &= g\left(e_7, e_4\right) + g\left(e_7, e_4\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

yazılır.

Durum 5: $1 \leq i \leq 6$ olmak üzere

$$\nabla_{e_i}e_7 = -e_i \tag{6.182}$$

bulunur. (3.4) eşitliğinde $X = e_1, Y = e_7$ ve $Z = e_1$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_1} e_7, e_1\right) &= e_1 g\left(e_7, e_1\right) + e_7 g\left(e_1, e_1\right) - e_1 g\left(e_1, e_7\right) \\ &\quad -g\left(e_1, [e_7, e_1]\right) - g\left(e_7, [e_1, e_1]\right) + g\left(e_1, [e_1, e_7]\right) \\ &= -g\left(e_1, e_1\right) - g\left(e_1, e_1\right) \\ &= -2 \end{aligned}$$

yazılır. Böylece

$$\nabla_{e_1} e_7 = -e_1$$

bulunur.

Sonuç olarak yaptığımız hesaplamalar doğrultusunda

$$\begin{aligned} &\nabla_{e_i} e_j = 0, \qquad i \neq j, \qquad 1 \leq i, j \leq 6 \\ &\nabla_{e_i} e_i = -e_7, \quad 1 \leq i \leq 6 \\ &\nabla_{e_7} e_i = 0, \qquad 1 \leq i \leq 6 \\ &\nabla_{e_i} e_7 = -e_i, \quad 1 \leq i \leq 6 \\ &\nabla_{e_7} e_7 = 0 \end{aligned} \tag{6.183}$$

elde edilir. (4.18) denklemi kontrol edilerek M manifoldunun Lorentzian Kenmotsu manifold olduğu görülür. (6.183) eşitlikleri kullanılarak R Riemann eğrilik tensörünün hesaplanmasında farklı 5 durum incelenmiştir.

Durum 1: $1 \leq i \leq 7$ olmak üzere

$$R\left(e_i, e_i\right) e_i = 0 \tag{6.184}$$

bulunur.

Durum 2: $i \neq j, 1 \leq i, j \leq 7$ olmak üzere

$$R\left(e_i, e_i\right) e_j = 0 \tag{6.185}$$

elde edilir.

Durum 3: $i \neq j \neq k, 1 \leq i, j, k \leq 7$ olmak üzere

$$R\left(e_i, e_j\right) e_k = 0 \tag{6.186}$$

yazılır.

Durum 4: $i \neq j$, $1 \leq i \leq 6$ ve $1 \leq j \leq 7$ olmak üzere

$$R(e_i, e_j)\, e_i = -e_j \tag{6.187}$$

bulunur. (6.187) eşitliğinde $i = 1$ ve $j = 4$ için

$$\begin{aligned} R(e_1, e_4)\, e_1 &= \nabla_{e_1}\nabla_{e_4} e_1 - \nabla_{e_4}\nabla_{e_1} e_1 - \nabla_{[e_1,e_4]} e_1 \\ &= 0 + \nabla_{e_4} e_7 - 0 \\ &= -e_4 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Aynı şekilde $i = 2$ ve $j = 7$ için

$$\begin{aligned} R(e_2, e_7)\, e_2 &= \nabla_{e_2}\nabla_{e_7} e_2 - \nabla_{e_7}\nabla_{e_2} e_2 - \nabla_{[e_2,e_7]} e_2 \\ &= 0 - 0 + \nabla_{e_2} e_2 \\ &= -e_7 \end{aligned}$$

yazılır.

Durum 5: $i = 7$ ve $1 \leq j \leq 6$ olmak üzere

$$R(e_i, e_j)\, e_i = e_j \tag{6.188}$$

bulunur. (6.188) eşitliğinde $i = 7$ ve $j = 3$ için

$$\begin{aligned} R(e_7, e_3)\, e_7 &= \nabla_{e_7}\nabla_{e_3} e_7 - \nabla_{e_3}\nabla_{e_7} e_7 - \nabla_{[e_7,e_3]} e_7 \\ &= 0 - 0 - \nabla_{e_3} e_7 \\ &= e_3 \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Durum 6: $i \neq j$, $1 \leq i \leq 7$ ve $1 \leq j \leq 6$ olmak üzere

$$R(e_i, e_j)\, e_j = e_i \tag{6.189}$$

bulunur. (6.189) eşitliğinde $i = 1$ ve $j = 4$ için

$$\begin{aligned} R(e_1, e_4)\, e_4 &= \nabla_{e_1}\nabla_{e_4} e_4 - \nabla_{e_4}\nabla_{e_1} e_4 - \nabla_{[e_1,e_4]} e_4 \\ &= -\nabla_{e_1} e_7 - 0 - 0 \\ &= e_1 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Aynı şekilde $i = 7$ ve $j = 2$ için

$$\begin{aligned} R(e_7, e_2)\, e_2 &= \nabla_{e_7}\nabla_{e_2}e_2 - \nabla_{e_2}\nabla_{e_7}e_2 - \nabla_{[e_7,e_2]}e_2 \\ &= 0 - 0 - \nabla_{e_2}e_2 \\ &= e_7 \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Durum 7: $j = 7$ ve $1 \leq i \leq 6$ olmak üzere

$$R(e_i, e_j)\, e_j = -e_i \tag{6.190}$$

bulunur. (6.190) eşitliğinde $i = 3$ ve $j = 7$ için

$$\begin{aligned} R(e_3, e_7)\, e_7 &= \nabla_{e_3}\nabla_{e_7}e_7 - \nabla_{e_7}\nabla_{e_3}e_7 - \nabla_{[e_3,e_7]}e_7 \\ &= 0 - 0 + \nabla_{e_3}e_7 \\ &= -e_3 \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Yukarıdaki hesaplamalardan yararlanılırsa

$$\begin{aligned} &R(e_i, e_i)\, e_i = 0, && && 1 \leq i \leq 7 \\ &R(e_i, e_i)\, e_j = 0, && i \neq j, && 1 \leq i, j \leq 7 \\ &R(e_i, e_j)\, e_k = 0, && i \neq j \neq k, && 1 \leq i, j, k \leq 7 \\ &R(e_i, e_j)\, e_i = -e_j, && i \neq j, && 1 \leq i \leq 6 \text{ ve } 1 \leq j \leq 7 \\ &R(e_i, e_j)\, e_i = e_j, && i = 7, && 1 \leq j \leq 6 \\ &R(e_i, e_j)\, e_j = e_i, && i \neq j, && 1 \leq i \leq 7 \text{ ve } 1 \leq j \leq 6 \\ &R(e_i, e_j)\, e_j = -e_i, && j = 7, && 1 \leq i \leq 6 \end{aligned} \tag{6.191}$$

elde edilir. $X = \sum_{i=1}^{7} x_i e_i$, $Y = \sum_{j=1}^{7} y_j e_j$ ve $Z = \sum_{k=1}^{7} z_k e_k$ vektör alanları için $1 \leq i, j, k \leq 7$ olmak üzere (6.191) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} R(X, Y)\, Z &= x_i y_j z_k R(e_i, e_j)\, e_k \\ &= y_j z_j x_i R(e_i, e_j)\, e_j + x_i y_j z_i R(e_i, e_j)\, e_i \\ &= y_j z_j x_i e_i - x_i z_i y_j e_j \\ &= g(Y, Z)\, X - g(X, Z)\, Y \end{aligned} \tag{6.192}$$

elde edilir. R_Z Jakobi operatörü, $Z \in S^-(M)$ birim timelike vektörü ve $X \in S(M)$ birim vektörü için (6.192) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} R_Z &: Z^\perp \to Z^\perp \\ R_Z X &= R(X,Z)Z \\ &= g(Z,Z)X - g(X,Z)Z \end{aligned} \tag{6.193}$$

elde edilir. $X \in Z^\perp$ olduğu için $g(X,Z) = 0$ olacaktır. Ayrıca $Z \in S^-(M)$ birim timelike vektör olduğundan dolayı $g(Z,Z) = -1$ olur. Bu bilgiler ışığında (6.193) eşitliği kullanılırsa

$$R_Z X = -X \tag{6.194}$$

bulunur. (6.194) eşitliğinde de görüleceği üzere $R_Z = -I_{Z^\perp}$ bulunur. R_Z Jakobi operatörünün özdeğerleri, seçilen $Z \in S^-(M)$ vektöründen bağımsız olduğu görülmektedir.

(6.192) denklemi kullanılarak S Ricci tensörü

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= \sum_{i=1}^{6} g(R(e_i,X)Y,e_i) - g(R(e_7,X)Y,e_7) \\ &= \sum_{i=1}^{6} g([g(X,Y)e_i - g(e_i,X)Y],e_i) - g([g(X,Y)e_7 - g(e_7,X)Y],e_7) \\ &= 6g(X,Y) \end{aligned} \tag{6.195}$$

bulunur. (6.195) kullanılarak $1 \leq i \leq 6$ olmak üzere

$$S(e_i,e_i) = 6, \tag{6.196}$$

$$S(e_7,e_7) = -6 \tag{6.197}$$

yazılır. (6.196) ve (6.197) kullanılarak M nin skaler eğriliği τ

$$\begin{aligned} \tau &= \sum_{i=1}^{7} g(e_i,e_i)S(e_i,e_i) \\ \tau &= 42 \end{aligned} \tag{6.198}$$

olarak hesaplanır. Böylece manifoldun Einstein manifold olduğu görülür.

Sonuç 6.3.4 Yukarıdaki hesaplamalardan görüleceği üzere e_7 timelike karakteristik vektör alanına göre R_{e_7} Jakobi operatörünün özdeğerleri, seçilen e_7 timelike vektöründen bağımsız her zaman -1 dir. Bu durumda M manifoldu Einstein manifold olur ve timelike Osserman koşulunu sağlar. M manifolduna timelike Osserman manifold denir.

Osserman koşulunu sağlayan (2n+1)-boyutlu Lorentzian Kenmotsu manifoldlar

Örnek 6.3.5 $(x_1, ...x_n, y_1, ..., y_n, z)$ standart koordinatları olmak üzere $M^{2n+1} = \{(x_1, ...x_n, y_1, ..., y_n, z) \in R^{2n+1}\}$ manifoldu olsun. M manifoldu üzerinde $1 \leq i, j \leq n$ ve c sabit değer olmak üzere lineer bağımsız vektör alanları

$$e_i = e^{cz}\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad e_j = e^{cz}\frac{\partial}{\partial y_j}, \quad e_{2n+1} = \frac{\partial}{\partial z}$$

olsun. g Lorentzian metriği

$$g = e^{-2cz}\sum_{i=1}^{n}\{dx_i \otimes dx_i + dy_i \otimes dy_i\} - dz \otimes dz \tag{6.199}$$

şeklinde verilsin. (6.199) eşitliği kullanılırsa

$$g(e_i, e_j) = 0, \ i \neq j, \tag{6.200}$$

$$g(e_i, e_i) = 1, \ 1 \leq i \leq 2n \tag{6.201}$$

$$g(e_i, e_i) = -1, \ i = 2n + 1 \tag{6.202}$$

elde edilir. M manifoldu üzerinde

$$X = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i\frac{\partial}{\partial x_i} + y_i\frac{\partial}{\partial y_j}\right) + z\frac{\partial}{\partial z} \tag{6.203}$$

tanımlı X vektör alanı için $\phi\,(1,1)$-tensör alanı

$$\phi X = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i\frac{\partial}{\partial x_i} - x_i\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \tag{6.204}$$

yazılır. $\forall U \in T(M)$ için η 1-form

$$\eta(U) = -g(U, e_{2n+1}) \tag{6.205}$$

şeklindedir. ϕ tensör alanı ve g Lorentzian metriğin lineerlik özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \eta(e_7) &= 1, \\ \phi^2(U) &= -U + \eta(U)\, e_{2n+1}, \\ g(\phi U, \phi V) &= g(U, V) + \eta(U)\,\eta(V) \end{aligned} \tag{6.206}$$

yazılır. $1 \leq i, j \leq 2n$ olmak üzere Lie parantez operatörü uygulanırsa

$$[e_i, e_j] = 0 \tag{6.207}$$

$$[e_i, e_{2n+1}] = -ce_i \tag{6.208}$$

yazılır. Böylece $e_{2n+1} = \xi$ olmak üzere (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme Lorentzian metrik yapısı oluşturulur. Örnek olarak (6.208) ifadesinde $i = 1$ için

$$\begin{aligned}
[e_1, e_{2n+1}] &= e_1 e_{2n+1} - e_{2n+1} e_1 \\
&= e^{cz} \frac{\partial}{\partial x_1} (\frac{\partial}{\partial z}) - \frac{\partial}{\partial z} (e^{cz} \frac{\partial}{\partial x_1}) \\
&= 0 - ce^{cz} \frac{\partial}{\partial x_1} \\
&= -ce_1
\end{aligned}$$

bulunur. (6.199) ve (6.208) eşitlikleri kullanılarak 5 farklı durum incelenmiştir.

Durum 1: $i \neq j$ ve $1 \leq i, j \leq 2n$ olmak üzere

$$\nabla_{e_i} e_j = 0 \tag{6.209}$$

bulunur. (3.4) eşitliğinde $X = e_1, Y = e_3$ ve $Z = e_{2n+1}$ için

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{e_1} e_3, e_{2n+1}) &= e_1 g(e_3, e_{2n+1}) + e_3 g(e_{2n+1}, e_1) - e_{2n+1} g(e_1, e_3) \\
&\quad -g(e_1, [e_3, e_{2n+1}]) - g(e_3, [e_1, e_{2n+1}]) + g(e_{2n+1}, [e_1, e_3]) \\
&= cg(e_1, e_3) + cg(e_3, e_1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

Durum 2: $1 \leq i \leq 2n$ olmak üzere

$$\nabla_{e_i} e_i = -ce_{2n+1} \tag{6.210}$$

bulunur. (3.4) eşitliğinde $X = e_1, Y = e_1$ ve $Z = e_{2n+1}$ için

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{e_1} e_1, e_{2n+1}) &= e_1 g(e_1, e_{2n+1}) + e_1 g(e_{2n+1}, e_1) - e_{2n+1} g(e_1, e_1) \\
&\quad -g(e_1, [e_1, e_{2n+1}]) - g(e_1, [e_1, e_{2n+1}]) + g(e_{2n+1}, [e_1, e_1]) \\
&= cg(e_1, e_1) + cg(e_1, e_1) \\
&= 2c
\end{aligned}$$

yazılır. Böylece

$$\nabla_{e_1} e_1 = -ce_{2n+1}$$

bulunur.

Durum 3: $i = j = 2n+1$ olmak üzere

$$\nabla_{e_{2n+1}} e_{2n+1} = 0 \tag{6.211}$$

bulunur. (3.4) eşitliğinde $X = e_{2n+1}, Y = e_{2n+1}$ ve $Z = e_2$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_{2n+1}} e_{2n+1}, e_2\right) &= e_{2n+1} g\left(e_{2n+1}, e_2\right) + e_{2n+1} g\left(e_{2n+1}, e_2\right) - e_2 g\left(e_{2n+1}, e_{2n+1}\right) \\ &\quad - g\left(e_{2n+1}, [e_{2n+1}, e_2]\right) - g\left(e_{2n+1}, [e_{2n+1}, e_2]\right) + g\left(e_2, [e_{2n+1}, e_{2n+1}]\right) \\ &= -cg\left(e_{2n+1}, e_2\right) - cg\left(e_{2n+1}, e_2\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $X = e_{2n+1}, Y = e_{2n+1}$ ve $Z = e_{2n+1}$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_{2n+1}} e_{2n+1}, e_{2n+1}\right) &= e_{2n+1} g\left(e_{2n+1}, e_{2n+1}\right) + e_{2n+1} g\left(e_{2n+1}, e_{2n+1}\right) \\ &\quad - e_{2n+1} g\left(e_{2n+1}, e_{2n+1}\right) - g\left(e_{2n+1}, [e_{2n+1}, e_{2n+1}]\right) \\ &\quad - g\left(e_{2n+1}, [e_{2n+1}, e_{2n+1}]\right) + g\left(e_{2n+1}, [e_{2n+1}, e_{2n+1}]\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Durum 4: $1 \leq i \leq 2n$ olmak üzere

$$\nabla_{e_{2n+1}} e_i = 0 \tag{6.212}$$

bulunur. (3.4) eşitliğinde $X = e_{2n+1}, Y = e_3$ ve $Z = e_3$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_{2n+1}} e_3, e_3\right) &= e_{2n+1} g\left(e_3, e_3\right) + e_3 g\left(e_{2n+1}, e_3\right) - e_3 g\left(e_{2n+1}, e_3\right) \\ &\quad - g\left(e_{2n+1}, [e_3, e_3]\right) - g\left(e_3, [e_{2n+1}, e_3]\right) + g\left(e_3, [e_{2n+1}, e_3]\right) \\ &= -cg\left(e_3, e_3\right) + cg\left(e_3, e_3\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $X = e_{2n+1}, Y = e_4$ ve $Z = e_{2n+1}$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_{2n+1}} e_4, e_{2n+1}\right) &= e_{2n+1} g\left(e_4, e_{2n+1}\right) + e_4 g\left(e_{2n+1}, e_{2n+1}\right) - e_{2n+1} g\left(e_{2n+1}, e_4\right) \\ &\quad - g\left(e_{2n+1}, [e_4, e_{2n+1}]\right) - g\left(e_4, [e_{2n+1}, e_{2n+1}]\right) + g\left(e_{2n+1}, [e_{2n+1}, e_4]\right) \\ &= cg\left(e_{2n+1}, e_4\right) + cg\left(e_{2n+1}, e_4\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Durum 5: $1 \leq i \leq 6$ olmak üzere

$$\nabla_{e_i} e_{2n+1} = -ce_i \tag{6.213}$$

bulunur. (3.4) eşitliğinde $X = e_1, Y = e_{2n+1}$ ve $Z = e_1$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_1} e_{2n+1}, e_1\right) &= e_1 g\left(e_{2n+1}, e_1\right) + e_{2n+1} g\left(e_1, e_1\right) - e_1 g\left(e_1, e_{2n+1}\right) \\ &\quad - g\left(e_1, \left[e_{2n+1}, e_1\right]\right) - g\left(e_{2n+1}, \left[e_1, e_1\right]\right) + g\left(e_1, \left[e_1, e_{2n+1}\right]\right) \\ &= -cg\left(e_1, e_1\right) - cg\left(e_1, e_1\right) \\ &= -2c \end{aligned}$$

yazılır. Böylece

$$\nabla_{e_1} e_{2n+1} = -ce_1$$

bulunur.

Sonuç olarak yaptığımız hesaplamalar doğrultusunda

$$\begin{aligned} &\nabla_{e_i} e_j = 0, && i \neq j, && 1 \leq i, j \leq 2n \\ &\nabla_{e_i} e_i = -ce_{2n+1}, && 1 \leq i \leq 2n \\ &\nabla_{e_{2n+1}} e_i = 0, && 1 \leq i \leq 2n \\ &\nabla_{e_i} e_{2n+1} = -ce_i, && 1 \leq i \leq 2n \\ &\nabla_{e_{2n+1}} e_{2n+1} = 0 \end{aligned} \tag{6.214}$$

elde edilir. (4.18) denklemi kontrol edilerek M manifoldunun Lorentzian Kenmotsu manifold olduğu görülür. (6.214) eşitlikleri kullanılarak R Riemann eğrilik tensörünün hesaplanmasında 7 farklı durum incelenmiştir.

Durum 1: $1 \leq i \leq 2n+1$ olmak üzere

$$R\left(e_i, e_i\right) e_i = 0 \tag{6.215}$$

bulunur.

Durum 2: $i \neq j, 1 \leq i, j \leq 2n+1$ olmak üzere

$$R\left(e_i, e_i\right) e_j = 0 \tag{6.216}$$

elde edilir.

Durum 3: $i \neq j \neq k, 1 \leq i, j, k \leq 2n+1$ olmak üzere

$$R\left(e_i, e_j\right) e_k = 0 \tag{6.217}$$

yazılır.

Durum 4: $i \neq j, 1 \leq i \leq 2n$ ve $1 \leq j \leq 2n+1$ olmak üzere

$$R\left(e_i, e_j\right) e_i = -c^2 e_j \tag{6.218}$$

bulunur. (6.218) eşitliğinde $i = 1$ ve $j = 4$ için

$$\begin{aligned} R\left(e_1, e_4\right) e_1 &= \nabla_{e_1} \nabla_{e_4} e_1 - \nabla_{e_4} \nabla_{e_1} e_1 - \nabla_{[e_1, e_4]} e_1 \\ &= 0 + c \nabla_{e_4} e_{2n+1} - 0 \\ &= -c^2 e_4 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Aynı şekilde $i = 2$ ve $j = 2n+1$ için

$$\begin{aligned} R\left(e_2, e_{2n+1}\right) e_2 &= \nabla_{e_2} \nabla_{e_{2n+1}} e_2 - \nabla_{e_{2n+1}} \nabla_{e_2} e_2 - \nabla_{[e_2, e_{2n+1}]} e_2 \\ &= 0 - 0 + c \nabla_{e_2} e_2 \\ &= -c^2 e_{2n+1} \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Durum 5: $i = 2n+1$ ve $1 \leq j \leq 2n$ olmak üzere

$$R\left(e_i, e_j\right) e_i = c^2 e_j \tag{6.219}$$

bulunur. (6.219) eşitliğinde $i = 2n+1$ ve $j = 3$ için

$$\begin{aligned} R\left(e_{2n+1}, e_3\right) e_{2n+1} &= \nabla_{e_{2n+1}} \nabla_{e_3} e_{2n+1} - \nabla_{e_3} \nabla_{e_{2n+1}} e_{2n+1} - \nabla_{[e_{2n+1}, e_3]} e_{2n+1} \\ &= 0 - 0 - c \nabla_{e_3} e_{2n+1} \\ &= c^2 e_3 \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Durum 6: $i \neq j, 1 \leq i \leq 2n+1$ ve $1 \leq j \leq 2n$ olmak üzere

$$R\left(e_i, e_j\right) e_j = c^2 e_i \tag{6.220}$$

bulunur. (6.220) eşitliğinde $i=1$ ve $j=4$ için

$$\begin{aligned} R(e_1,e_4)e_4 &= \nabla_{e_1}\nabla_{e_4}e_4-\nabla_{e_4}\nabla_{e_1}e_4-\nabla_{[e_1,e_4]}e_4 \\ &= -c\nabla_{e_1}e_{2n+1}-0-0 \\ &= c^2e_1 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Aynı şekilde $i=2n+1$ ve $j=2$ için

$$\begin{aligned} R(e_{2n+1},e_2)e_2 &= \nabla_{e_{2n+1}}\nabla_{e_2}e_2-\nabla_{e_2}\nabla_{e_{2n+1}}e_2-\nabla_{[e_{2n+1},e_2]}e_2 \\ &= 0-0-c\nabla_{e_2}e_2 \\ &= c^2e_{2n+1} \end{aligned}$$

yazılır.

Durum 7: $j=2n+1$ ve $1\leq i\leq 2n$ olmak üzere

$$R(e_i,e_j)e_j=-e_i \tag{6.221}$$

bulunur. (6.221) eşitliğinde $i=3$ ve $j=2n+1$ için

$$\begin{aligned} R(e_3,e_{2n+1})e_{2n+1} &= \nabla_{e_3}\nabla_{e_{2n+1}}e_{2n+1}-\nabla_{e_{2n+1}}\nabla_{e_3}e_{2n+1}-\nabla_{[e_3,e_{2n+1}]}e_{2n+1} \\ &= 0-0+c\nabla_{e_3}e_{2n+1} \\ &= -c^2e_3 \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Yukarıdaki hesaplamalardan yararlanılırsa

$$\begin{array}{lll} R(e_i,e_i)e_i=0, & & 1\leq i\leq 2n+1 \\ R(e_i,e_i)e_j=0, & i\neq j, & 1\leq i,j\leq 2n+1 \\ R(e_i,e_j)e_k=0, & i\neq j\neq k, & 1\leq i,j,k\leq 2n+1 \\ R(e_i,e_j)e_i=-c^2e_j, & i\neq j, & 1\leq i\leq 2n \text{ ve } 1\leq j\leq 2n+1 \\ R(e_i,e_j)e_i=c^2e_j, & i=2n+1, & 1\leq j\leq 2n \\ R(e_i,e_j)e_j=c^2e_i, & i\neq j, & 1\leq i\leq 2n+1 \text{ ve } 1\leq j\leq 2n \\ R(e_i,e_j)e_j=-c^2e_i, & j=2n+1, & 1\leq i\leq 2n \end{array} \tag{6.222}$$

elde edilir.

$X=\sum_{i=1}^{2n+1} x_i e_i, Y=\sum_{j=1}^{2n+1} y_j e_j$ ve $Z=\sum_{k=1}^{2n+1} z_k e_k$ vektör alanları ile $1 \leq i,j,k \leq 2n+1$ olmak üzere (6.222) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= x_i y_j z_k R(e_i,e_j)e_k \\ &= y_j z_j x_i R(e_i,e_j)e_j + x_i y_j z_i R(e_i,e_j)e_i \\ &= y_j z_j c^2 x_i e_i - x_i z_i c^2 y_j e_j \\ &= c^2\left[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\right] \end{aligned} \tag{6.223}$$

elde edilir. R_Z Jakobi operatörü, $Z \in S^-(M)$ birim timelike vektörü ve $X \in S(M)$ birim vektörü için (6.223) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} R_Z &: Z^\perp \to Z^\perp \\ R_Z X &= R(X,Z)Z \\ &= c^2\left[g(Z,Z)X - g(X,Z)Z\right] \end{aligned} \tag{6.224}$$

elde edilir. $X \in Z^\perp$ olduğu için $g(X,Z)=0$ olacaktır. Ayrıca $Z \in S^-(M)$ birim timelike vektör olduğundan dolayı $g(Z,Z)=-1$ olur. Bu bilgiler ışığında (6.224) eşitliği kullanılırsa

$$R_Z X = -X \tag{6.225}$$

bulunur. (6.225) eşitliğinde de görüleceği üzere $R_Z = -I_{Z^\perp}$ bulunur. R_Z Jakobi operatörünün özdeğerlerinin, seçilen $Z \in S^-(M)$ vektöründen bağımsız olduğu görülmektedir.

(6.223) denklemi kullanılarak S Ricci tensörü

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= \sum_{i=1}^{2n} g(R(e_i,X)Y,e_i) - g(R(e_{2n+1},X)Y,e_{2n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{2n} g\left(c^2\left[g(X,Y)e_i\text{-}g(e_i,X)Y\right],e_i\right)\text{-}g\left(c^2\left[g(X,Y)e_{2n+1}\text{-}g(e_{2n+1},X)Y\right],e_{2n+1}\right) \\ &= c^2 2n g(X,Y) \end{aligned} \tag{6.226}$$

bulunur. (6.226) kullanılarak $1 \leq i \leq 2n$ olmak üzere

$$S(e_i,e_i) = c^2 2n, \tag{6.227}$$

$$S(e_{2n+1},e_{2n+1}) = -c^2 2n \tag{6.228}$$

yazılır. (6.227) ve (6.228) kullanılarak M nin skaler eğriliği τ

$$\begin{aligned} \tau &= \sum_{i=1}^{2n+1} g\left(e_i, e_i\right) S(e_i, e_i) \\ \tau &= \left(2n+1\right) c^2 2n \end{aligned} \tag{6.229}$$

olarak hesaplanır. Böylece manifoldun Einstein manifold olduğu görülür.

Sonuç 6.3.5 Yukarıdaki hesaplamalardan görüleceği üzere e_{2n+1} timelike karakteristik vektör alanına göre $R_{e_{2n+1}}$ Jakobi operatörünün özdeğerleri, seçilen e_{2n+1} timelike vektöründen bağımsız her zaman $-c^2$ dir. Bu durumda M manifoldu Einstein manifold olur ve timelike Osserman koşulunu sağlar. M manifolduna timelike Osserman manifold denir.

7. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada genel hatlarıyla timelike ve null Osserman problemi Lorentzian Kenmotsu manifoldlarında incelenmiştir. Bir manifoldun Osserman manifold olarak adlandırılması için Jakobi operatörünün özdeğerlerinin seçilen birim timelike vektörden bağımsız olması gerekmektedir. Chi tarafından 1988 ve 1991 yıllarında Riemann geometride Osserman problemi ile ilgili iki önemli çalışma yapılmıştır. Chi, Osserman manifoldları $(2n+1)$ ve $(4n+2)$ boyutlu manifoldlar için sınıflandırmıştır. Nikolayevski, 8-boyutlu Osserman manifoldları yine Riemann geometride incelemiştir. Riemann geometride bu problem ile ilgili birçok matematikçi tarafından çalışma yürütülmüştür. Lorentz geometride de bazı çalışmalar olmasına rağmen hemen hemen değme Lorentzian yapılarında bu problem ile ilgili çalışma yapılmamıştır. Bu yüzden hemen hemen değme Lorentzian manifoldlarda bir özel manifold olan Lorentzian Kenmotsu manifoldlarında Osserman problemi incelenmiştir.

Hemen hemen değme Lorentz metrik oluşturulurken Calvaruso'nun "Contact Lorentzian Manifolds" çalışmasında kullanılan yapı - formül baz alınmıştır. Rosca ve Pitiş tarafından Lorentzian Kenmotsu manifoldları üzerine yapılan çalışmalar incelenerek manifold üzerinde çalışmamıza özgü hesaplamalar, işlemler yapılabilmesi sağlanmıştır. Lorentzian Kenmotsu manifoldlar üzerine çok çalışma yapılmamış olması Osserman problemini özellikle bu manifold üzerinde çözmek istememizi sağlamıştır. Bu çalışmada kullanılan bir çok hesaplamanın ve sonucun yine Lorentzian Kenmotsu manifoldlarında başka çalışmaların önünü açacağını ve bu çalışmalar için bir kaynak oluşturacağını düşünüyoruz.

Çalışma içerisinde Lorentzian Kenmotsu manifoldlarında eğrilik tensörleri incelenmiştir. $3-$boyutlu Lorentzian Kenmotsu manifoldlarında $R(X,Y)Z$ Riemann eğrilik tensörü, $S(X,Y)$ Ricci eğrilik tensörleri hesaplanmıştır. Elde edilen R Riemann eğrilik tensörü kullanılarak Jakobi operatörü hesaplanmış ve manifoldun timelike ve null Osserman manifold olma durumları incelenmiştir. $3-$boyutlu Lorentzian Kenmotsu manifoldlarının her zaman global (globally) Osserman manifold olmadığı ama ξ timelike vektörüne göre her zaman null Osserman manifold olduğu görülmüştür.

Levi-Civita koneksiyonu değiştirilerek semi-simetrik metrik olmayan ve semi-simetrik metrik koneksiyonlu Lorentzian Kenmotsu manifoldlarda R Riemann eğrilik

tensörü hesaplanmıştır. Elde edilen eğrilik tensörü için timelike ve null Osserman olma durumları kontrol edilmiştir.

Ayrıca bazı eğrilik şartlarında Lorentzian Kenmotsu manifoldlarında eğrilik tensörü için Jakobi operatörü hesaplanmış, timelike ve null Osserman olma durumları incelenmiştir. $n-$boyutlu konsörkılır (concircular) flat Lorentzian Kenmotsu manifoldları için eğrilik tensörü hesaplanmıştır. Bu manifoldların Osserman olma koşulunu sağladığı görülmüştür. $3-$boyutlu projektif (projective) flat ve $3-$boyutlu konformal (conformal) flat Lorentzian Kenmotsu manifoldları için eğrilik tensörleri hesaplanmıştır. Bu manifoldların her zaman timelike Osserman manifold olmadığı görülmüştür.

$(2n+1)$-boyutlu semi-simetrik Lorentzian Kenmotsu manifoldlarında R eğrilik tensörü hesaplanmış ve jakobi operatörünün özdeğerlerinin seçilen birim timelike vektörden bağımsız olduğu görülmüştür. Böylece bu manifoldların her zaman Osserman manifold olduğu sonucuna ulaşılmıştır. $(2n+1)$-boyutlu Ricci semi-simetrik manifoldları incelendiğinde bu manifoldların ayrıca Einstein manifold olduğu ve Osserman koşulunu sağladığı görülmüştür. Aynı şekilde $(2n+1)$-boyutlu konsörkılır (concircular) semi-simetrik Lorentzian Kenmotsu manifoldlarında R eğrilik tensörü hesaplanmış ve jakobi operatörünün özdeğerlerinin seçilen birim timelike vektörden bağımsız olduğu görülmüştür. Bu koşulu sağlayan manifoldların da Osserman manifold olduğu ispatlanmıştır.

Son olarak yapılan bu çalışmalar ve elde edilen sonuçlara uygun Osserman koşulunu sağlayan farklı boyutlarda Lorentzian Kenmotsu manifold örnekleri verilmiştir. Mevcut örnekler genelleştirilerek $(2n+1)$-boyutlu bir manifold örneği incelenmiştir.

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez kapsamında manifoldların genel özellikleri ile ilgili birçok bilgi veren Jakobi operatörü kullanılarak Osserman problemi incelenmiştir. Literatür araştırması yapıldığında Osserman probleminin Lorentzian değme geometride çok fazla ele alınmadığı ve bu alanda yapılacak çalışmanın daha değerli olacağı düşünülerek Lorentzian Kenmotsu manifoldları üzerinde durulmuştur.

Şimdiye kadar Osserman problemi ile ilgili yapılan çalışmalar incelenerek Lorentzian Kenmotsu manifoldlarında farklı koneksiyonlar ve farklı eğrilik durumlarında timelike ve null Osserman olma koşulları, teoremleri verilmiştir. Lorentzian Kenmotsu manifoldlarının her zaman timelike Osserman manifold olmadığı, flat ve semi-simetrik olduğu durumlarda timelike Osserman koşulunu sağladığı gösterilmiştir. Aynı zamanda farklı koneksiyonlar ile çalışıldığında null Osserman koşulunu sağladığı gösterilmiştir. Osserman problemini sağlayan manifold örnekler verilmiş ve $(2n+1)$-boyutlu Lorentzian Kenmotsu manifoldlar için genelleştirilmiş bir örnek üretilmiştir.

Yapılan çalışmalar ile Lorentzian Kenmotsu manifoldlarının özel durumlarda farklı koneksiyonlar ile eğrilikleri hesaplanmıştır. Bu çalışmalardan yola çıkılarak Osserman probleminden farklı problemler de incelenebilir. Çalışma içerisinde hesaplanan Lorentzian Kenmotsu manifoldlarında eğrilikler kullanılarak diferensiyel geometride mevcut farklı problemler üzerine de çalışma yapılabilecektir. Yine bu çalışmadan yola çıkılarak farklı manifoldlar için de yine bazı eğrilik şartları ve farklı koneksiyonlar ile çalışma yapılabilir.

Tez çalışmasında yer alan timelike ve null Osserman hesaplamaları, problemi incelenerek farklı manifoldlar için Osserman problemi incelebilir ve önemli sonuçlar, teoremler elde edilebilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Agashe, S., Chafle, R., 1992, A semi-symmetric non-metric connection on a Riemann manifold, Indian Journal Pure Applications, 23(6), 399-409.

Barman, A., De, U.C., 2015, Semi-synnetric Non-metric Connections on Kenmotsu Manifolds, Romanian Jour. of Math. and Comp. Sci., 5(1), 13-24.

Blair, D., 1976, Contact Manifolds in Riemannian Geometry, Lecture Notes in Mathematics, Springer, p.509.

Blair, D., Oubina, J.A., 1990, Conformal and related changes of metric on the productof two almost contact metric manifolds, Publications Matematiques, 34, 199-207.

Bonome, A., Castro, R., Garcia-Rio, E., Hervella, L., 1997, Curvature of indefinite almost contact manifolds, Journal of Geometry, 58(1-2), 66-86.

Brunetti, L., 2014, An Osserman type condition $g.f.f-$manifolds with Lorentz metric, Annales Polonici Matehemtici, 110(2), 123-141.

Calvaruso, G., 2011. Contact Lorentzian manifolds. Differential Geometry and its Applications, 29, 41-51.

Calvaruso, G., Perrone, D., 2010. Contact pseudo-metric manifolds. Differential Geometry and its Applications, 28(5), 615-634.

Chi, Q.S., 1988. A curvature characterization of certain locally rank-one-symmetric spaces, J. Diff. Geom., 28, 187-202.

Chi, Q.S., 1991. Curvature characterization and classification of rank-one-symmetric spaces, Pasific J. Math., 150, 31-42.

De, A., 2010, On Kenmotsu manifold, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, 2(3), 1-6.

De, U.C., Krishnendu, D., 2013, On Lorentzian Trans-Sasakian Manifolds, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series, 62(2), 37-51.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Deszcz, R., 1992, On Pseudosymmetric spaces, Bull. Soc. Math. Belg. Ser. A., 44(1), 1-34.

Duggal, K.L., Bejancu, A., 1996, Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and applications, Mathematics and its Applications, Dordrecht, p.303.

Erdogan, M., Ikawa T., 1996, Sasakian manifolds with Lorentzian metric, Kyungpook Mathematical Journal, January, 35, 517-526.

Garcia Rio, E., Kupeli, D.N., V´azquez-Abal, M.E., 1997, On a problem of Osserman in Lorentzian Geometry, Dif. Geo. and its App., 7, 85-100.

Garcia Rio, E., Kupeli, D.N., V´azquez-Lorenzo, R., 2002, Osserman manifolds in Semi-Riemannian geometry, in: Lect. Notes Math., vol. 1777, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, p.166.

Gilkey, P.B., Swann A., Vanhecke L., 1995, Isoparametric geodesic spheres and a conjecture of Osserman concerning the Jacobi operator, Quart. J. Math. Oxford. 46, 299-320.

Hacısalihoğlu, H.H., 1983, Diferensiyel Geometri, Gazi Üniversitesi, Ankara, s.895.

Hacısalihoğlu, H.H., 1998, Diferensiyel Geometri II, Ankara Üniversitesi, Ankara, s.269.

Hacısalihoğlu, H.H., Ekmekçi, N., 2003, Tensör geometri, Ankara Üniversitesi, Ankara, s.251.

Kenmotsu, K., 1972, A class of almost contact Riemannian manifolds, The Tohoku Mathematical Journal, 24, 93-103.

Kobayashi, S., Nomizu, K. , 1963, Foundations of Differantial Geometry, Interscience Publishers, New York-London, p.799.

Kuhnel, W., 2006, Differential geometry curves-surfaces-manifolds, American Mathematical Society, Second Edition, p.380.

Mihai, I., Oiagă, A., Rosca, R., 1999, Lorentzian Kenmotsu Manifolds Having Two Skew Symmetric Conformal Vector Fields, Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie, 42(90), 237-251.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Naik, D.M., Venkatesha, V., Prakasha, D.G., 2018, Certain Results on Kenmotsu Pseudo-Metric Manifolds, Miskolc Math. Notes, 20(2), 1083-1099.

Nikolayevsky Y., 2003, Two Teorems on Osserman manifolds, Differential Geometry and its Applications, 18, 239-253.

Nikolayevsky Y., 2004, Osserman manifolds of dimension 8, Manuscripta Math., 115, 31-53.

Ogiue, K., 1964, On almost contact manifolds admitting axiom of planes or axiom of free mobility, Kodai Math. Sem. Rep., 16(4), 223-232.

Olszak, Z., Rosca, R., 1991, Normal locally conformal almost cosymplectic manifolds, Publicationes Mathematicae Debrecen, 39(3), 315-323.

O'Neill, B., 1983, Semi-Riemannian geometry with applications to relativity, Academic Press, p.468.

Osserman, R., 1990, Curvature in the eighties, Amer. Math. Monthly 97, 731-756.

Oubina, J.A., 1985, New class of almost contact metric manifolds, Publicationes Mathematicae, Debrecen, 32, 187-193.

Pitiş, G., 2007, Geometry of Kenmotsu Manifolds, Publishing House of Transilvania University of Brasov, Brasov, p.161.

Rosca, R., 1991, On Lorentzian Kenmotsu Manifolds, Atti Accad. Peloritana Pericolanti, Cl. Sci., 69, 15-30.

Sarı, R., 2020, Some Properties Curvture of Lorentzian Kenmotsu Manifolds, Applied Mathematics and Nonlinear Sciences, 5(1), 283-292.

Sarı, R., Vanlı, A.T., 2019, Slant Submanifolds of a Lorentz Kenmotsu Manifold, Mediterr. J. Math., 16(5).

Sasaki, S., 1960, On differentiate manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure I, Tôhoku Math. J., 12, 459-476.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Siddiqi, M.D., 2018, η-Einstein Solutions in a δ-Lorentzian Trans Sasakian Manifolds, Math. Adv. in Pure and App. Sciences, 1(1), 27-38.

Singh, G.P., Srivastava, S.K., Pathak, M., 2015, On Three Dimensional (ϵ)-Lorentzian Para-Sasakian Manifolds, International Journal of Science and Research, 4(12), 2075-2078.

Spivak, M., 1979, Differential geometry, Berkeley, CA: Publish or Perish Press, II., III., IV., p.491.

Szabo, Z.I., 1982, Structure theorems on Riemannian spaces satisfying the local version, J. Diff. Geom., 17(4), 531-582.

Takahashi, T., 1969, Sasakian manifold with pseudo-Riemann metric, Tokohu Math. J., 21, 271-290.

Tanno, S., 1969, Sasakian manifolds with constant ϕ-holomorphic sectional curvature, Tôhoku Math. J., 21(2), 501-507.

Tanno, S., 1973, Constancy of holomorphic sectional curvature in almost Hermition manifolds, Kodai. Math. Sem. Rep, 25, 190-201.

Venkatesha, V. Naik, D.M., Tripathi, M.M., 2018, Certain results on almost contact pseudo-metric manifolds, Journal of Geometry, 110(1), 41.

Wang, Y., Liu, X., 2016, Almost Kenmotsu pseudo-metric manifolds, Analele Stiintifice ale Universitatii Al I Cuza din Iasi - Matematica, 62(1), 241-256.

Yano, K., Kon, M., 1984, Structure On Manifolds, Series in Pure Mathematics, Singapore, 3, p.508.

Yıldırım, Ü., Atçeken, M., 2019, Bir Normal Hemen Hemen Parakontakt Metrik Manifoldun Quasi-Konformal Eğrilik Tensörü Üzerine, GÜFBED/GUSTIJ, 9(2), 196-206.