Lineer Olmayan Oluşum Denklemlerinin Dalga Çözümleri ve Analizleri

Sümeyra Kara

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Haziran 2022

Wave Solutions and Analysis of Nonlinear Evolution Equations

Sümeyra Kara

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics and Computer Sciences

June 2022

Lineer Olmayan Oluşum Denklemlerinin Dalga Çözümleri ve Analizleri

Sümeyra Kara

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. Ömer Ünsal

Haziran 2022

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Doç. Dr. Ömer Ünsal danışmanlığında hazırlamış olduğum "Lineer Olmayan Oluşum Denklemlerinin Dalga Çözümleri ve Analizleri" başlıklı YÜKSEK LİSANS tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 06/06/2022

Sümeyra Kara

İmza

ÖZET

Lineer olmayan oluşum denklemlerinin birçoğu bazı dalga yapılarını temsil etmesinden dolayı dalga çözümleri ve analizleri; akışkanlar fiziği, uygulamalı matematik ve ilişkili diğer bilim dallarında araştırma konusu olmuştur. Dalga çözümleri üzerine yapılan araştırmalar ile elde edilen tam çözümlerin, dalganın hareketi, hızı ve fiziksel karakterizasyonu hakkında bilgi verdiği bilindiğinden son birkaç yılda bu denklemlerin tam çözümlerini elde etmek için birçok algoritmaya ve prosedüre sahip yöntemler geliştirilmiştir. Ayrıca bu yöntemler sayesinde çeşitli dalga çözümlerinin sınıfları hakkında çıkarım yapılmaktadır.

Bu tez, bazı lineer olmayan oluşum denklemlerinin analitik çözümlerini, iki değişkenli açılım yöntemi kullanılarak öncesinde verilen yardımcı kavramlar ile sunmaktadır. Bu yöntemin etkili olduğunu kanıtlamak için yararlanılan denklemler (2+1) boyutlu B-Tipi Kadomtsev-Petviashvili (BKP) denkleminin yeni formu, (3+1) boyutlu BKP-Boussinesq denkleminin yeni formu, (3+1) boyutlu birinci formda genişletilmiş Jimbo-Miwa denklemi ve (3+1) boyutlu ikinci formda genişletilmiş Jimbo-Miwa denklemidir.

Bu çalışmalara ek olarak, tam çözümlerin yeni bir sınıfı olan ‘‘kompleksiton çözümler’’ bulmada kolaylık sağlayan modifiye edilmiş çiftli alt denklem yöntemi üzerinden (3+1) boyutlu Korteweg-de Vries (KdV) tipi denklemin hiperbolik ve trigonometrik fonksiyonların birleşmesi ile oluşan kompleksiton çözümleri verilmiştir. Dahası, elde edilen analitik çözümlerin fiziksel karakterizasyonu, çeşitli parametrelerin seçilmiş sabit değerleri ile grafikler sayesinde mevcuttur.

Anahtar Kelimeler: Hareketli Dalga Çözümleri, Analitik Çözümler, Kompleksiton Çözümler, Lineer Olmayan Oluşum Denklemleri.

SUMMARY

Since many nonlinear evolution equations represents some wave structure, their wave solutions and analysis has been topic of research in fluid physics, applied mathematics and other related areas. Since it is known that exact solutions obtained from researches made on wave solutions give informations about wave motions, wave speeds and their physical characteristics, in the last few years, methods with many algorithms and procedures have been developed to obtain the exact solutions of these kinds of equations. Besides, with the help of these methods some inferences are made about the classes of various wave solutions.

This thesis presents the analytical solutions of some nonlinear evolution equations by using two variable expansion method with the auxiliary concepts given before. The equations used to prove that this method is effective, are the new form of (2+1)-dimensional B-Type Kadomtsev-Petviashvili (BKP) equation, the new form of (3+1)-dimensional BKP-Boussinesq equation, the first extended (3+1)-dimensional Jimbo-Miwa equation and second extended (3+1)-dimensional Jimbo-Miwa equation.

In addition to these studies, complexiton solutions of the (3+1)-dimensional Korteweg-de Vries (KdV) type equation are given with the aid of the modified double sub-equation method which provides conviences to find complexiton solutions which is a new class of exact solutions and consist of hyperbolic and trigonometric functions. Moreover, the physical characterization of the obtained analytical solutions is available through graphs with selected constant values of various parameters.

Keywords: Travelling Wave Solutions, Analytical Solutions, Complexiton Solutions, Nonlinear Evolution Equations.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET…….. vi
SUMMARY…… vii
TEŞEKKÜR…….. viii
İÇİNDEKİLER……... ix
ŞEKİLLER DİZİNİ...……..…….... xi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ...…….. xiii
1. GİRİŞ VE AMAÇ.....……... 1
2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI.....……...…… 3
3. TEMEL KAVRAMLAR……...……..... 6
3.1. Kısmi Diferensiyel Denklemler...…….……... 6
3.1.1. Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Lineerlik Sınıflandırılması…...…… 8
3.1.1.1. Lineer Kısmi Diferensiyel Denklem…… 8
3.1.1.2. Yarı Lineer Kısmi Diferensiyel Denklem ……..... 8
3.1.1.3. Hemen Hemen Lineer Kısmi Diferensiyel Denklem…….. 9
3.1.1.4. Lineer Olmayan Kısmi Diferensiyel Denklem…… 9
3.2. Lineer Olmayan Oluşum Denklemleri…….……... 10
3.3. Tam Çözüm ……..……..... 11
3.3.1. Homojen Denge Prensibi…… 11
3.4. Dalga Tipleri ……..……..…….. 12
3.4.1. Soliter Dalga ve Solitonlar……..... 12
3.4.2. Kompleksiton Dalgalar……..... 12
3.4.3. Periyodik Dalgalar……. 13
4. MATERYAL VE YÖNTEM ……. 14
4.1. İki Değişkenli $(G'/G, 1/G)$ Açılım Yöntemi ……... 15
4.1.1. (2+1) Boyutlu BKP Denkleminin Yeni Formunun
$(G'/G, 1/G)$ Açılım Yöntemi Sayesinde Farklı Tipte Tam
Çözümlerine Ulaşılması ……... 18

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

4.1.2. (3+1) Boyutlu BKP-Boussinesq Denkleminin Yeni Formunun $(G'/G, 1/G)$ Açılım Yöntemi Sayesinde Farklı Tipte Tam Çözümlerine Ulaşılması …… 25

4.1.3. Birinci Formda Genişletilmiş (3+1) Boyutlu Jimbo-Miwa Denkleminin $(G'/G, 1/G)$ Açılım Yöntemi Sayesinde Farklı Tipte Tam Çözümlerine Ulaşılması ……... 31

4.1.4. İkinci Formda Genişletilmiş (3+1) Boyutlu Jimbo-Miwa Denkleminin $(G'/G, 1/G)$ Açılım Yöntemi Sayesinde Farklı Tipte Tam Çözümlerine Ulaşılması ……..……. 37

4.2. Modifiye Edilmiş Çiftli Alt Denklem Yöntemi …….…… 43

4.2.1. Modifiye Edilmiş Çiftli Alt Denklem Yöntemini Kullanarak (3+1) Boyutlu Korteweg-de Vries Tipi Denklemin Kompleksiton Çözümlerini Bulma…….……..... 46

5. BULGULAR VE TARTIŞMA……..…… .. 54

6. SONUÇ VE ÖNERİLER ……..……..…… .. 55

KAYNAKLAR DİZİNİ……..……..... 56

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil **Sayfa**

4.1. (2+1) boyutlu BKP denkleminin yeni formunun hiperbolik fonksiyon çözümü grafiği……..... 24

4.2. (2+1) boyutlu BKP denkleminin yeni formunun hiperbolik fonksiyon çözümü grafiği……..……..... 24

4.3. (2+1) boyutlu BKP denkleminin yeni formunun trigonometrik fonksiyon çözümü grafiği……..……..... 24

4.4. (2+1) boyutlu BKP denkleminin yeni formunun trigonometrik fonksiyon çözümü grafiği……..……..... 24

4.5. (3+1) boyutlu BKP-Boussinesq denkleminin yeni formunun hiperbolik fonksiyon çözümü grafiği……..……..... 29

4.6. (3+1) boyutlu BKP-Boussinesq denkleminin yeni formunun hiperbolik fonksiyon çözümü grafiği……..……..... 30

4.7. (3+1) boyutlu BKP-Boussinesq denkleminin yeni formunun hiperbolik fonksiyon çözümü grafiği……..……..... 30

4.8. (3+1) boyutlu BKP-Boussinesq denkleminin yeni formunun trigonometrik fonksiyon çözümü grafiği …..……..... 30

4.9. (3+1) boyutlu BKP-Boussinesq denkleminin yeni formunun trigonometrik fonksiyon çözümü grafiği.……..…..... 30

4.10. Birinci formda genişletilmiş (3+1) boyutlu Jimbo-Miwa denkleminin hiperbolik fonksiyon çözümü grafiği……...…… 35

4.11. Birinci formda genişletilmiş (3+1) boyutlu Jimbo-Miwa denkleminin hiperbolik fonksiyon çözümü grafiği……...…… 35

4.12. Birinci formda genişletilmiş (3+1) boyutlu Jimbo-Miwa denkleminin hiperbolik fonksiyon çözümü grafiği……...…… 36

4.13. Birinci formda genişletilmiş (3+1) boyutlu Jimbo-Miwa denkleminin trigonometrik fonksiyon çözümü grafiği……..…… 36

4.14. Birinci formda genişletilmiş (3+1) boyutlu Jimbo-Miwa denkleminin trigonometrik fonksiyon çözümü grafiği…… 36

4.15. Birinci formda genişletilmiş (3+1) boyutlu Jimbo-Miwa denkleminin trigonometrik fonksiyon çözümü grafiği…… 36

ŞEKİLLER DİZİNİ (devamı)

Şekil **Sayfa**

4.16. İkinci formda genişletilmiş (3+1) boyutlu Jimbo-Miwa denkleminin hiperbolik fonksiyon çözümü grafiği……..…… 41

4.17. İkinci formda genişletilmiş (3+1) boyutlu Jimbo-Miwa denkleminin hiperbolik fonksiyon çözümü grafiği……. 41

4.18. İkinci formda genişletilmiş (3+1) boyutlu Jimbo-Miwa denkleminin hiperbolik fonksiyon çözümü grafiği……. 41

4.19. İkinci formda genişletilmiş (3+1) boyutlu Jimbo-Miwa denkleminin trigonometrik fonksiyon çözümü grafiği……....……. 41

4.20. İkinci formda genişletilmiş (3+1) boyutlu Jimbo-Miwa denkleminin trigonometrik fonksiyon çözümü grafiği……..……. 42

4.21. İkinci formda genişletilmiş (3+1) boyutlu Jimbo-Miwa denkleminin trigonometrik fonksiyon çözümü grafiği……..……. 42

4.22. (3+1) boyutlu Korteweg-de Vries tipi denklemin kompleksiton çözümü grafiği…… 48

4.23. (3+1) boyutlu Korteweg-de Vries tipi denklemin kompleksiton çözümü grafiği…… 48

4.24. (3+1) boyutlu Korteweg-de Vries tipi denklemin kompleksiton çözümü grafiği……..…… 50

4.25. (3+1) boyutlu Korteweg-de Vries tipi denklemin kompleksiton çözümü grafiği…… 50

4.26. (3+1) boyutlu Korteweg-de Vries tipi denklemin kompleksiton çözümü grafiği…… 51

4.27. (3+1) boyutlu Korteweg-de Vries tipi denklemin kompleksiton çözümü grafiği…… 51

4.28. (3+1) boyutlu Korteweg-de Vries tipi denklemin kompleksiton çözümü grafiği…… 52

4.29. (3+1) boyutlu Korteweg-de Vries tipi denklemin kompleksiton çözümü grafiği…… 53

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
ξ	Ksi
ϕ	Phi
ψ	Psi

Kısaltmalar	**Açıklama**
KP	Kadomtsev- Petviashvili
KdV	Korteweg de Vries
BKP	B-Type Kadomtsev-Petviashvili

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Matematiksel olarak, içerisinde bir bağımlı değişkenin bir bağımsız değişkene göre türevini bulunduran denklem adi diferensiyel denklem olarak adlandırılırken, bir bağımlı değişkenin en az iki bağımsız değişkene göre kısmi türev veya türevlerini bulunduran denklem ise kısmi diferensiyel denklem olarak adlandırılır. Lineer olmayan oluşum denklemleri ise, yeryüzünde karşılaşılan bilimsel problemleri matematiksel olarak sunan kısmi diferensiyel denklemlerdir. Özellikle, modern fizik ve uygulamalı matematikte geniş bir çalışma alanına sahip olan dalga mekaniğinden ötürü, dalga problemlerini modelleyen oluşum denklemleri üzerine çalışmalar artmakta ve sürekli gelişmektedir.

Analitik çözüm araştırmaları, dalga yayılımlarını veren lineer olmayan oluşum denklemlerini de içinde barındıran birçok modellemenin davranışlarını anlamada katkı sağladığından ve bu modellemelerin denklemlerinin genel çözümlerini elde etmek her zaman mümkün olmadığından, uygulamalı bilimlerin vazgeçilmez bir konusu haline gelmiştir. Son birkaç yıldır, sayısal yöntemlerin zorlayıcı matematiksel uğraş gerektirmesi ve dalgaların büyük bir kısmında mevcut olan ‘’lineer olmama’’ kavramının getirdiği zorluk karşısında, görece daha etkili ve net sonuçlar verdiğinden tam çözüm yöntemlerinin üzerine odaklanılmaktadır. Böylece, araştırmacılar tam çözüm bulma sürecinde daha az prosedüre sahip çeşitli teknikler kullanmakta ve geliştirmektedir. Bu teknikler uygulanarak elde edilen tam çözümler, doğada ortaya çıkan modellemeleri temsil etmekle birlikte uzay ve zaman açısından farklı boyutlardaki oluşum denklemlerinin zamanı baz alan değişim, gelişim, şekil ve hızları hakkında birçok bilgi edinilmesini sağlar.

Tam çözüm bulma süreci, verilen kısmi diferensiyel denklemin dalga dönüşümü sayesinde adi diferensiyel denkleme dönüştürülmesi ile başlar, genellikle homojen denge sabiti kullanılmasıyla devam eder ve bu denge sabitine bağlı olarak belirli bir formda dalga çözümleri aranması ile sonuçlanır. Elde edilen dalga çözümleri trigonometrik, hiperbolik, rasyonel ve çeşitli fonksiyonları içerebilir. Eğer elde edilen dalga çözümü, hiperbolik ve trigonometrik fonksiyonları birlikte içeriyorsa bu çözüm tam çözümlerin yeni bir üyesi olan kompleksiton çözüme karşılık gelir. Kompleksiton dalgaları, diğer dalgalardan ayıran en önemli özellikleri kendilerine özgü dalga şekilleri ve hızlarıdır.

Bu yüksek lisans tezinin amacı, su dalgalarını modelleyen (2+1) boyutlu B-tipi Kadomtsev–Petviashvili (BKP) denkleminin yeni formu, (3+1) boyutlu BKP-Boussinesq denkleminin yeni formu ve Jimbo-Miwa denklemlerinin iki yeni genişletilmiş versiyonunun analitik çözümlerini güçlü ve etkili bir yöntem olan $(G'/G, 1/G)$ açılım metodu kullanarak elde etmektir. Bu tam çözümlere ek olarak, (3+1) boyutlu Korteweg-de Vries tipi denkleminin kompleksiton çözümleri modifiye edilmiş çiftli alt denklem metodu ile verilecektir. Ayrıca, bahsedilen denklemlerin dalga hareketlerini analiz etmek ve kompleksiton dalgaların şekillerindeki farklılığı ortaya koymak için çözümdeki parametrelere bazı gerçek değerler verilerek açıklayıcı grafiklerle desteklenecektir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Türev kavramı kabaca geometrik olarak teğetin eğimine, fizikte anlık hıza, kimyada tepkime hızına, ekonomi biliminde marjinal maliyete, biyolojide popülasyon dinamiklerine karşılık gelir (Balcı, 2003). Okuyucuların matematiğe yakın ve uzak her alandan olabileceği düşüncesiyle, türev kavramı kısaca ‘’değişim’’ olarak ifade edilebilir ve içerisinde değişim olan her alanda karşımıza çıkabilmektedir. Birçok branşta karşılaşılan başlıca sorunları matematik diline çeviren türevli denklemler, bağımsız değişken sayısına bağlı olarak adi ve kısmi diferensiyel denklem olarak isimlendirilir. Esas dayanağı zaman olan kısmi diferensiyel denklemler, lineer olmayan oluşum denklemleri olarak bilinir. Diferensiyel denklem çalışmaları 17. yüzyılın sonlarında Newton ve Leibniz ile başladı ve bilimin gelişmesi ile yeni problemlerin ortaya çıkması neticesinde 20. yüzyılın başlarında lineer olmayan oluşum denklemlerinin çözümleri üzerine yoğunlaştı.

Bu tezde ilk olarak bahsedilen oluşum denklemleri, (3+1) boyutlu genelleştirilmiş B-tipi Kadomtsev-Petviashvili (BKP) denkleminin (2+1) boyuta indirgenmiş özel bir şekli olarak tanımlanabilen BKP denkleminin yeni formu ve yine aynı denkleme yeni bir terim eklenerek oluşturulan (3+1) boyutlu BKP-Boussinesq denkleminin yeni formudur. Kadomtsev-Petviashvili (KP) denklemi integrallenebilen bir denklem olup yarı iki boyutlu bir ortamda yayılan zayıf dağılımlı ve küçük genlikli dalgaları ifade eder (Wazwaz, 2011). B-tipi KP hiyerarşisi de KP hiyerarşisindeki gibi içerisinde integrallenebilir birçok yapı barındırır. Bu sebepten ötürü bu tip denklemlerin araştırılması integrallenebilirlik incelemesi açısından önem teşkil etmektedir.

Daha sonra, standart Jimbo-Miwa denkleminin belirli terimlerinin genişletilmesi ile literatüre geçen birinci ve ikinci formda genişletilmiş (3+1) boyutlu Jimbo-Miwa denklemleri ele alınmıştır. Jimbo-Miwa denklemini ilgi çekici kılan şey, KP hiyerarşisine ikinci sırada dahil olmasına rağmen klasik integrallenebilirlik koşullarından hiçbirini sağlamamasıdır. Bu özelliği sayesinde tam çözümü üzerine araştırmaları büyük bir önem kazanmıştır.

Son olarak, (3+1) boyutlu Korteweg-de Vries tipi denklemin kompleksiton çözümleri araştırılmıştır. En eski soliton denklemi olan KdV denklemi, ilk olarak Korteweg ve de Vries tarafından sığ su dalgalarının modellemesinde kullanılmıştır. Günümüzde hala üzerine araştırmalar yapılmakta ve akışkanlar dinamiğindeki önemini korumaktadır. (3+1) boyutlu KdV tipi denklem ise ilk olarak Wazwaz (2012) tarafından tanıtılmış ve integrallenemez bir denklem olduğu belirtilmiştir.

Literatüre baktığımızda lineer olmayan oluşum denklemlerinin sayısal ve yaklaşık çözümleri dışında tam çözümleri ile ilgili çok fazla bilimsel uğraş vardır. Bunun başlıca sebebi, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin bulunmasındaki zorluktur. Teknolojinin gelişmesiyle birlikte matematiksel hesapların kolaylaşması ve görsellerinin daha basit resmedilmesi zorlukları bir nebze azaltmış olup modellenen problemlerin çözüme ulaştırılmasını sağlamaktadır. Yüksek mertebeli lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için çeşitli tam çözüm yöntemleri geliştirilmektedir.

Bahsi geçen BKP denklemlerinin yeni formlarına ve genişletilmiş Jimbo-Miwa denklemlerinin tam çözümlerini bulmak için bu tezde kullanılacak teknik $(\mathrm{G}'/\mathrm{G}, 1/\mathrm{G})$ açılım yöntemidir. Bu yöntem tek değişkenli (G'/G) açılım yönteminin iki değişken alınarak geliştirilmesiyle ortaya çıkmıştır. Literatürde, (G'/G) açılım yöntemi ilk olarak Wang vd. (2008) tarafından tanıtılmıştır. Daha sonra, Guo ve Zhou (2010) genişletilmiş (G'/G) açılım yöntemi olarak adlandırılan geliştirilmiş bir versiyonunu sunmuştur. Sonrasında Lü vd. (2010) genelleştirilmiş (G'/G) açılım yöntemini geliştirdi. İki değişkenli $(\mathrm{G}'/\mathrm{G}, 1/\mathrm{G})$ açılım yöntemi ise ilk olarak Li vd. (2010) tarafından bir denklem sistemine uygulanarak yakın geçmişte literatüre girmiştir. İlerleyen zamanlarda, birçok bilim insanı tarafından bu yöntem kullanılarak bazı hareketli dalga denklemlerinin farklı fonksiyon tipinde tam çözümleri bulunmuştur.

Tam çözüm yöntemlerinin gelişip artması ile çeşitli tam çözüm sınıfları ortaya çıkmıştır. Son birkaç yıldır Ma (2002) sayesinde bilim dünyasında var olan kompleksiton çözüm sınıfı, diğer tam çözüm sınıflarına göre daha yeni ve yapıları itibariyle daha dikkat çekicidir. Bu yeni tam çözüm sınıfının mevcudiyeti ile kompleksiton çözüm bulmadaki araştırmalar, Wazwaz ve Zhaqilao (2013) tarafından takdim edilen yöntem, genişletilmiş

dönüştürülmüş rasyonel fonksiyon yöntemi, genelleştirilmiş bileşik Riccati denklemleri rasyonel açılım yöntemi, çoklu Riccati denklemleri rasyonel açılım yöntemi, modifiye edilmiş çiftli alt denklem yöntemi gibi bazı yeni yöntemlere ilham kaynağı olmuştur. Bu çalışmada (3+1) boyutlu KdV tipi denklemin kompleksiton çözümünü ararken modifiye edilmiş çiftli alt denklem yönteminden yararlanılacaktır. Bu yöntem Chen vd. (2013) tarafından sunulan çiftli alt denklem yönteminin değiştirilmiş halidir. Modifiye edilmiş çiftli alt denklem yöntemi Yang ve Chen (2013) tarafından Fisher ve KP denklemlerine, Hossen vd. (2017) tarafından Burgers ve Gardner denklemlerine, Ünsal ve Sakartepe (2020) tarafından (2+1) boyutlu BKP denkleminin yeni formuna uygulanarak kompleksiton çözümlere ulaşılmıştır. Ayrıca bu tezde araştırılacak olan (3+1) boyutlu KdV tipi denklemin, Wazwaz ve Zhaqilao'nun önerdiği yöntem kullanılarak Ünsal (2018 a) tarafından elde edilen kompleksiton, soliton ve soliton-kompleksiton etkileşim çözümleri literatürde yer almaktadır.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Oluşum denklemleri ve tam çözümleri üzerine yapılan çalışmalar, günümüzde birçok bilim dalında büyük öneme sahip ve üzerine yoğunlaşılan bir konu haline gelmiştir. Bunun başlıca sebebi, denklemin modellediği hareketli dalga yapıları hakkında detaylı bilgilere sahip olma isteğidir. Hareketli dalgaların incelenmesi, dalgaların özellikleri, davranışları ve yapıları hakkında daha fazla bilgi sahibi olunmasını analizler yardımıyla sağlar. Dalgaların yapısını anlamak açısından onları ifade eden denklemler ve çözümleri hakkında kapsamlı bir bilgi sahibi olmak çeşitli problemlerin çözümü için ilk adımdır. Ayrıca, sınırlayıcı ve özel değerler alınarak bulunan dalga grafikleri, analitik çözümleri açıklamaya ve netleştirmeye olanak sağlar. Bu özelliğinden dolayı, dalga denklemlerinin tam çözümlerini bulmak ve resmetmek için çeşitli araştırmalar literatüre girmiştir. Tam çözümlerin, yaklaşık çözümlere kıyasla daha net ve kesin bir çözüm olduğu bilindiğinden fazla sayıda tam çözüm yöntemi geliştirilmiştir.

Tez çalışmasının daha iyi anlaşılması açısından bilinmesi gereken temel bilgiler bu bölümde verilmiştir. Literatürde geçen birçok kavramın tanımı ve nerelerde kullanıldıkları kısaca bahsedilmiştir. İlk olarak, lineer olmayan oluşum denklemlerini barındıran kısmi diferensiyel denklemler ve bazı örnekleri sunulmuştur. Sonrasında, çeşitli dalga tipleri tanıtılmıştır. Son olarakta, tam çözümler ve tam çözüm bulma yöntemlerinin genel özellikleri verilmiştir.

3.1 Kısmi Diferensiyel Denklemler

Kısmi diferensiyel denklemler, en az iki bağımsız değişken içeren bir bağımlı değişkenin herhangi bir mertebeye kadar bağımsız değişkenlerine göre türevlerini barındıran denklemlerdir. Genel olarak, (x, y) bağımsız değişken ve $u(x, y)$ bağımlı değişken olmak üzere bir kısmi diferensiyel denklem,

$$F\left(x, y, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots\right) = 0 \tag{3.1}$$

formuna sahiptir.

Denklemin **mertebesi**, diferensiyel bir denklem içinde bulunan en yüksek mertebeli türevi belirtir. Diferensiyel bir denklemin polinom formunda yazılışındaki en yüksek mertebeden türevli teriminin kuvveti ise denklemin **derecesi** olarak adlandırılır.

Örnek 3.1.1 Kısmi diferensiyel denklemlere en basitinden, x ve t gibi yalnızca iki bağımsız değişkeni olan birinci mertebeden yani bağımlı değişken olan u'nun iki ve daha fazla türevlerinin bulunmadığı adveksiyon denklemi olarakta bilinen

$$u_t + cu_x = 0 \tag{3.2}$$

şeklindeki c'nin sabit sayıyı ifade ettiği kısmi diferensiyel denklemi örnek olarak verilebilir.

Örnek 3.1.2 İkinci mertebeden bir kısmi diferensiyel denkleme ise,

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{3.3}$$

şeklinde olan Laplace denklemi örnek olarak gösterilebilir.

Örnek 3.1.3 Korteweg-de Vries denklemi,

$$u_t + cuu_x + u_{xxx} = 0 \tag{3.4}$$

şeklinde ifade edilebilen, dalga yayılımı için bir model olarak kullanılan ve soliton adı verilen analitik çözümlere sahip üçüncü mertebeden lineer olmayan bir kısmi diferensiyel denklemdir.

Örnek 3.1.4 Biharmonik denklem ise

$$u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = 0 \tag{3.5}$$

şeklinde yazılan dördüncü mertebeden lineer bir kısmi diferensiyel denklemdir.

3.1.1 Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Lineerlik Sınıflandırılması

Lineerlik kavramı, (Koca, 2013) tarafından ‘’bir kısmi türevli denklemdeki bağımlı değişken ve kısmi türevlerinin derecelerinin bire eşit olması ile birlikte bağımlı değişken ve türevlerinin parantezine aldığında katsayılar sadece bağımsız değişkenlerin birer fonksiyonu şeklinde yazılabiliyor olması’’ olarak tanımlanmıştır. Kısmi diferensiyel denklemler lineerlik durumlarına göre incelendiğinde lineer, yarı lineer, hemen hemen lineer ve lineer olmayan olmak üzere sınıflandırılır.

3.1.1.1 Lineer kısmi diferensiyel denklem

Yukarıda tanımı verilen bir lineer birinci mertebeden kısmi diferensiyel denklem genel olarak u bağımlı, x ve y bağımsız değişken olmak üzere,

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = d(x,y) \tag{3.6}$$

formuna sahiptir.

Örnek 3.1.5 Transport denklemi,

$$u_x + u_y = 0 \tag{3.7}$$

biçiminde yazılan birinci mertebeden lineer kısmi diferensiyel denklemdir.

3.1.1.2 Yarı lineer kısmi diferensiyel denklem

Yarı lineer kısmi diferensiyel denklem, kısmi türevli bir denklemdeki en yüksek mertebeden türevlerinin lineerliği sağlıyor olması durumudur. Yarı lineerlikte, kısmi türevli denklemdeki en yüksek mertebeden daha düşük mertebeye sahip türevler ve bağımlı değişkenin bulunuş şekli herhangi bir önem teşkil etmez. Bu açıdan bakıldığında, lineer her denklem yarı lineerdir denebilir fakat tersi her zaman doğru olmayabilir. Birinci mertebeden yarı lineer kısmi diferensiyel bir denklemin genel formu,

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u) \tag{3.8}$$

şeklindedir.

Örnek 3.1.6 Yarı lineer kısmi türevli denkleme,

$$u_x u_{xx} + xuu_y = \sin y \tag{3.9}$$

biçimindeki bir denklem örnek olarak gösterilebilir.

3.1.1.3 Hemen hemen lineer kısmi diferensiyel denklem

Bir kısmi diferensiyel denklem hem yarı lineer olup hem de denklemde ortaya çıkan en yüksek mertebeli türevlerin katsayıları yalnızca bağımsız değişkenlerin birer fonksiyonundan oluşuyor ise hemen hemen lineer kısmi diferensiyel denklem olarak adlandırılır. İkinci mertebeden hemen hemen lineer kısmi diferensiyel denklem en genel haliyle,

$$a(x,y)u_{xx} + b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + d\left(x,y,u,u_x,u_y\right) = 0 \tag{3.10}$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek 3.1.7 Hemen hemen lineer kısmi diferensiyel denkleme, aşağıdaki gibi verilen denklem örnek olabilir.

$$xu_{xx} + e^{x+y}u_{yy} + uu_x = 0 \tag{3.11}$$

3.1.1.4 Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklem

Lineer olma koşulunu sağlamayan kısmi türevli denklemler, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklem olarak isimlendirilir. Bu tez dahilinde, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemler üzerinde durulacaktır.

3.2 Lineer Olmayan Oluşum Denklemleri

Zamana bağlı olarak yazılabilen yani bağımsız değişkenlerinden biri zaman (t) olan kısmi diferensiyel denklemler aynı zamanda lineer olmayan oluşum denklemleridir. Gerçek hayattaki problemlerin modellemeleri olan oluşum denklemlerinin çözümleri sadece matematik açısından değil birçok branş için önemli ve gereklidir.

Örnek 3.2.1 En genel haliyle,

$$u_t - \kappa u_{xx} = 0 \tag{3.12}$$

olarak verilen ısı denklemi, κ termal iletkenliği temsil eden pozitif bir sabit iken t anında $u(x,t)$, x noktasındaki bir telin sıcaklığını temsil eden bir oluşum denklemidir.

Örnek 3.2.2 Duffing denklemi,

$$u_{tt} + bu + cu^3 = 0 \tag{3.13}$$

şeklindedir. Bu denklem b ve c gerçek sabitler olmak üzere klasik bir parçacığın çift kuyu potansiyelindeki hareketini tanımlayan lineer olmayan bir oluşum denklemidir.

Örnek 3.2.3 Sine-Gordon denklemi,

$$u_{tt} - u_{xx} + u - \frac{1}{6}u^3 = 0 \tag{3.14}$$

iki süper iletken arasındaki Josephson bağlantılarında akıların yayılması, gerilmiş bir tele bağlı katı sarkacın hareketi, katı hal fiziği ve metallerdeki dislokasyonlar gibi birçok bilimsel alanda karşımıza çıkan lineer olmayan bir oluşum denklemidir.

Fiziksel problemleri daha iyi anlamak için, bu tip denklemlerin çözümlerini bulmak açısından çeşitli algoritmalar geliştirilmiştir. Bu algoritmalar sayesinde lineer olmayan oluşum denklemlerinin farklı türde çözümleri bulunmuştur. Bu çözümlerden en bilinenleri tam çözüm ve yaklaşık çözümlerdir. Bu tezde tam çözümler üzerine odaklanılmıştır.

3.3 Tam Çözüm

Lineer olmayan oluşum denklemlerinin tam çözümleri için çok sayıda metod vardır. Bu metodların çoğunda süreç, dalga dönüşümü yardımıyla verilen kısmi diferensiyel denklemin adi diferensiyel denkleme indirgenmesi ile başlayıp homojen denge sabitinin kullanılması sayesinde çözüm formunun oluşması ile devam eder. Bu metodlar ile ilgili daha detaylı bilgiye ulaşmak için tez sonunda verilen referanslara bakılabilir.

3.3.1 Homojen Denge Prensibi

Homojen denge prensibi, tam çözüm metodlarında yaygın olarak kullanıldığından bilinmesi elzemdir. Verilen kısmi diferensiyel denklem, adi diferensiyel denkleme indirgendikten sonra indirgenmiş denklemdeki en yüksek mertebeden türevli lineer terim ile en yüksek dereceli lineer olmayan terim arasındaki dengelenme sonucu oluşan sabite **homojen denge sabiti** denir. Homojen denge sabiti, aranan çözümün yapısını belirler. Bu sabit ne kadar büyük olursa çözüm o derece uzun ve karmaşık olur.

Örnek 3.3.1.1

$$u_{tt} - u_{xx} - (u^2)_{xx} + u_{xxxx} = 0 \tag{3.15}$$

Boussinesq denklemi $\xi = (x - vt)$ dönüşümü kullanılarak indirgenip, iki kez integral alınırsa

$$(v^2 - 1)u - u^2 + u'' = 0 \tag{3.16}$$

elde edilir ve bu denklemdeki en yüksek dereceli lineer olmayan u^2 terimi ile en yüksek mertebeli lineer u'' teriminin dengelenmesi,

$$M + 2 = 2M \tag{3.17}$$

şeklindedir. Burada homojen denge sabiti $M = 2$ olarak bulunur.

3.4 Dalga Tipleri

Dalga, en basit haliyle bir şeklin zamana bağlı değişiminin uzayda yayılması olarak özetlenebilir. Dalga denilince akla ilk olarak ses ya da su dalgası gelmesine rağmen sismik, yay, radyo, mikrodalga, kızıl ötesi, görünür ışık, x-ışınları, gama ışınları ve mor ötesi ışınları gibi çeşitleri de vardır. Sismik, su, ses ve yay dalgaları, taşıdıkları enerjiye göre mekanik dalga olarak adlandırılırlar. Radyo, mikrodalga, kızıl ötesi, görünür ışık, x-ışınları, gama ışınları ve mor ötesi ışınları ise yine taşıdıkları enerjiye göre elektromanyetik dalgalar olarak sınıflandırılırlar. Dalgaların çeşitli olmasından dolayı çalışma alanı oldukça geniştir.

Bir fonksiyona konum ve zamana bağlı olarak $\xi = x - vt$ olacak şekilde dalga dönüşümü yapılırsa $f(\xi) = f(x - vt)$ fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyonda x konum, t zaman, v ise bir dalganın hızını temsil eder. $v > 0$ ise dalga negatif yönde, $v < 0$ ise dalga pozitif yönde ilerler.

3.4.1 Soliter Dalga ve Solitonlar

Tek dalga anlamına gelen soliter dalgalar, dalga sınıflandırılması yapılırken genel bir ifade olması sebebiyle çok kullanılmazlar. Soliton dalgalar ise başka bir dalga ile etkileşime girdiğinde yapısını koruyan dalgalardır. Hali hazırda bulunan dalga çeşitlerinden en çok karşılaşılanı soliton dalgalardır ve genel olarak üstel fonksiyonlar cinsinden ifade edilirler.

3.4.2 Kompleksiton Dalgalar

Üstel ve trigonometrik fonksiyonları birlikte içeren dalga tipine kompleksiton dalga denir. Kompleksiton dalgalar içerdikleri iki farklı fonksiyon türü sebebiyle diğer dalgalardan şekil ve hızları açısından kolayca ayrışırlar. Kompleksiton dalgalar karmaşık yapıları gereği elde edilmesi zor bir dalga tipidir. Her oluşum denklemi kompleksiton dalga çözümüne sahip olmak zorunda değildir.

3.4.3 Periyodik Dalgalar

Periyodik fonksiyonları ihtiva eden dalgalara periyodik dalgalar denir. Periyodik dalgalar, isminden de anlaşılacağı gibi içerdikleri fonksiyonlar gereği periyodik bir forma sahiptirler ve görünüşlerinden kolayca ayırt edilebilirler. Sahip oldukları karakter gereği birbirini tekrar eden dalgalardan oluşur.

4. MATERYAL VE YÖNTEM

Dalgaların incelenmesi, eski çağlarda yaşayan filozofların müzik aletlerindeki seslerin frekanslarını bulma çalışmalarının yapılması ile başlayıp su kemerlerindeki hareketlilik araştırmalarının akışkanlar teorisinin ortaya çıkmasına zemin hazırlaması ile günümüze kadar önemini koruyan bir konu olmuştur. Buna benzer birçok alanda kendisine yer bulan dalgaların literatürde sahip olduğu önemden ötürü, bu dalgaları modelleyen lineer olmayan oluşum denklemlerinin analitik çözüm çalışmaları daima gelişmekte ve yenilenmektedir. Analitik çözümlerle ilişkili olduğu bilinen tam çözümlerin üzerine yapılan çalışmalar birçok yeni yöntemin geliştirilmesine olanak sağlamıştır. Genişletilmiş dönüştürülmüş rasyonel fonksiyon yöntemi (Ünsal, 2018 b), sine-cosine yöntemi (Taşcan ve Bekir, 2009), ters saçılma yöntemi (Mikhailov, 1981), homojen denge yöntemi (Wang, 1996), ilk integral yöntemi (Bekir ve Ünsal, 2013), (G'/G) açılım yöntemi (Ünsal vd., 2017), $(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemi (Li vd., 2010; Demiray vd., 2014), Hirota yöntemi (Zhou ve Ma, 2017), çiftli alt denklem yöntemi (Liu vd., 2014), modifiye edilmiş çiftli alt denklem yöntemi (Yang ve Chen, 2013; Hossen vd., 2017; Ünsal ve Sakartepe, 2020) ve daha fazlası tam çözüm bulma yaklaşımlarına örnek olarak verilebilir.

Yüksek lisans tezinin bu bölümünde bazı dalga denklemlerine $(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemi ve modifiye edilmiş çiftli alt denklem yöntemi uygulanarak daha önce yapılan çalışmalardan farklı olan yeni analitik çözümler bulunacak ve dalga hareketleri incelenecektir. Bulunan bu çözümlerin belli zaman kesitlerinde dalga modellemeleri üç boyutlu grafiklerle verilerek dalgaların davranış ve karakteristik yapıları detaylandırılmıştır. $(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemi uygulanarak elde edilen dalga çözümleri yöntemin gerektirdiği şekilde hiperbolik, trigonometrik ve rasyonel olarak üç farklı formda verilecektir. Modifiye edilmiş çiftli alt denklem yöntemi uygulanarak ulaşılacak olan kompleksiton çözümler ise kompleksiton dalgaların yapılarından kaynaklanan ayırt edici özellik olan üstel ve trigonometrik fonksiyonların birlikte çözüme dahil olması ile istenilen formda verilecektir. Bu çalışmalar neticesinde yüksek mertebeden lineer olmayan oluşum denklemlerinin analitik çözümlerini bulmada bahsi geçen tekniklerin kullanışlılığı ve etkililiğini kanıtlamak açısından literatüre katkıda bulunulacağı düşünülmektedir.

4.1 İki Değişkenli $(\mathrm{G}'/\mathrm{G}, 1/\mathrm{G})$ Açılım Yöntemi

$(\mathrm{G}'/\mathrm{G}, 1/\mathrm{G})$ açılım yöntemi, (G'/G) açılım yönteminde tek değişken yerine iki değişken kullanılarak Li vd. (2010) tarafından geliştirilmesi ile literatüre kazandırılmış bir tekniktir. Bu yönteme göre, verilen kısmi diferensiyel denklem dalga dönüşümü yardımıyla adi diferensiyel denkleme indirgenir ve lineer olan yardımcı bir alt denklem yardımıyla (G'/G) ve $(1/\mathrm{G})$ terimlerinin polinomu şeklinde yazılır. Böylece elde edilen polinom, tam çözümleri üç farklı tipte bulmayı sağlar. $(\mathrm{G}'/\mathrm{G}, 1/\mathrm{G})$ açılım yönteminin uygulama aşamaları daha detaylı bir şekilde Li vd. (2010) tarafından aşağıdaki gibi takdim edilmiştir.

Öncelikle, $(\mathrm{G}'/\mathrm{G}, 1/\mathrm{G})$ yönteminde yararlanılacak olan yardımcı alt denklem,

$$G''(\xi) + \lambda G(\xi) = \mu \tag{4.1}$$

biçiminde tanımlanan λ ve μ'nün sabit sayıları temsil ettiği ikinci mertebeden bir lineer adi diferensiyel denklemdir. Matematiksel hesaplamalarda kolaylık sağlaması açısından,

$$\phi = \frac{G'}{G}, \quad \psi = \frac{1}{G} \tag{4.2}$$

şeklinde alınırsa ϕ ve ψ değişkenlerinin türevleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\phi' = -\phi^2 + \mu\psi - \lambda, \quad \psi' = -\phi\psi \tag{4.3}$$

(4.1) de verilen lineer adi diferensiyel denklemin genel çözümleri λ sabitinin işaretine bağlı olarak üç farklı durumda incelenir.

Durum I: $\lambda < 0$ iken A_1 ve A_2 keyfi sabitler olmak üzere (2.1) deki adi diferensiyel denklemin genel çözümü, hiperbolik tipte

$$G(\xi) = A_1 \sinh(\sqrt{-\lambda}\,\xi) + A_2 \cosh(\sqrt{-\lambda}\,\xi) + \frac{\mu}{\lambda} \tag{4.4}$$

$$\psi^2 = \frac{-\lambda}{\lambda^2\sigma + \mu^2}(\phi^2 - 2\mu\psi + \lambda)$$

olarak bulunur. Burada σ, A_1 ve A_2 sabitlerinin kareleri farkını temsil etmektedir. $\sigma = A_1^2 - A_2^2$ şeklinde ifade edilebilir.

Durum II: $\lambda > 0$ iken (4.1) deki diferensiyel denklemin genel çözümü, trigonometrik tipte

$$G(\xi) = A_1 \sin(\sqrt{\lambda}\,\xi) + A_2 \cos(\sqrt{\lambda}\,\xi) + \frac{\mu}{\lambda}$$
$$\psi^2 = \frac{\lambda}{\lambda^2\sigma - \mu^2}(\phi^2 - 2\mu\psi + \lambda) \tag{4.5}$$

olarak bulunur. Buradaki σ ise sabitlerin kareleri toplamını temsil eder. $\sigma = A_1^2 + A_2^2$ şeklinde yazılabilir.

Durum III: $\lambda = 0$ iken (4.1) deki yardımcı alt denklemin genel çözümü, rasyonel tipte

$$G(\xi) = \frac{\mu}{2}\xi^2 + A_1\xi + A_2$$
$$\psi^2 = \frac{1}{A_1^2 - 2\mu A_2}(\phi^2 - 2\mu\psi) \tag{4.6}$$

olarak elde edilir.

Bu yönteme göre υ bağımlı, x ve t bağımsız değişken olmak üzere,

$$\mathrm{P}(\upsilon, \upsilon_t, \upsilon_x, \upsilon_{tt}, \upsilon_{xt}, \upsilon_{xx}, \dots) = 0 \tag{4.7}$$

şeklinde yazılan bir lineer olmayan oluşum denkleminin tam çözümlerine ulaşmak için belirli adımlar izlenir. Bu adımlar şu şekilde özetlenebilir:

1. Adım: $v(x,t) = v(\xi)$ ve $\xi = x - ct$ dalga dönüşümü kullanılarak (4.7) kısmi diferensiyel denklemi,

$$\mathrm{P}(v, -cv', v', c^2v'', -cv'', v'', \dots) = 0 \tag{4.8}$$

biçiminde ifade edilebilen bir adi diferensiyel denkleme dönüştürülür. Burada $v^{(n)}$, $v(\xi)$'in ξ'ye göre n. mertebeden türevini temsil eder.

2. Adım: $G(\xi) = G$ eşitliği (4.1) lineer adi diferensiyel denklemini sağlamak üzere,

$$v(\xi) = \sum_{j=0}^{M} a_j \phi^j + \sum_{j=1}^{M} b_j \phi^{j-1} \psi \tag{4.9}$$

biçiminde ϕ ve ψ'in bir polinomu şeklinde yazılabilen bir çözüm aranır. Bu çözüm formunda a_j, $b_j (j = 1, \dots, M)$, λ, μ ve c, çözüm sürecinin sonunda belirlenecek sabitler olup M tamsayısı ise (4.8) adi diferensiyel denkleminde ortaya çıkan en yüksek mertebeli lineer terim ile en yüksek dereceli lineer olmayan terim arasındaki dengeye tekabül eder.

3. Adım: (4.2), (4.3) ve (4.4) ile birlikte araştırılan duruma göre (4.5), (4.6) ya da (4.7)'i göz önünde bulundurarak (4.9)'un (4.8) denkleminde yerine yazılması, ψ'in derecesinin birden büyük olmadığı ϕ ve ψ'ye bağlı bir polinom elde edilmesini sağlar. Bu polinomun katsayıları cebirsel bir denklem sistemi verir.

4. Adım: Sürecin son aşaması, 3. adımda oluşturulan cebirsel denklem sisteminin yardımcı matematiksel programlar kullanarak çözülmesi ile elde edilen A_1, A_2, a_j, b_j, λ, c ve μ sabitlerinin (4.9) da yerine yazılıp üç farklı fonksiyon tipinde tam çözümlerin bulunması ile sonuçlanır.

4.1.1 (2+1) Boyutlu BKP Denkleminin Yeni Formunun $(\mathbf{G'/G, 1/G})$ Açılım Yöntemi Sayesinde Farklı Tipte Tam Çözümlerine Ulaşılması

(2+1) boyutlu BKP denkleminin yeni formu, genelleştirilmiş BKP denkleminde z=y kabul edilerek (3+1) boyuttan (2+1) boyuta indirgemenin bir sonucu olarak oluşur (Kaur ve Wazwaz, 2019). Bu denklem,

$$u_{xxxy} + \alpha(u_x u_y)_x + (2u_x + u_y)_t - 2u_{xx} - u_{yy} = 0 \tag{4.10}$$

biçiminde verilen sığ su dalgalarını modelleyen lineer olmayan bir oluşum denklemidir. (4.10) denkleminin dalga çözümlerini bulmak ve bahsi geçen yöntemin uygunluğunu göstermek amacı ile $u(x,y,t) = u(\xi),\ \xi = kx + sy - vt$ şeklinde bir dalga dönüşümü kullanılırsa

$$k^3 s u^{(4)} + 2\alpha k^2 s u' u'' - (2k^2 + s^2 + 2vk + vs)u'' = 0 \tag{4.11}$$

biçiminde bir adi diferensiyel denkleme dönüşür. (4.11) adi diferensiyel denkleminin ξ'ye göre bir kez integrali alınarak r integral sabiti olmak üzere

$$k^3 s u''' + \alpha k^2 s (u')^2 - (2k^2 + s^2 + 2vk + vs)u' + r = 0 \tag{4.12}$$

denklemi elde edilir. Daha sonra (4.12) denkleminde bulunan u''' en yüksek mertebeli lineer terimi ile $(u')^2$ en yüksek dereceli lineer olmayan terimi

$$M + 3 = 2(M + 1)$$

olacak şekilde dengelenmesi ile

$$M = 1 \tag{4.13}$$

pozitif tam sayısı bulunur. Böylece, (4.9) da M tam sayısı yerine yazılırsa

$$u(\xi) = a_0 + a_1\varphi + b_1\psi \tag{4.14}$$

olacak şekilde belirli bir çözüm formuna ulaşılır. (4.14) aranan çözüm formunda bulunan a_0, a_1 ve b_1, $(\mathrm{G}'/\mathrm{G}, 1/\mathrm{G})$ açılım yönteminde belirtildiği gibi daha sonra belirlenecek olan sabit sayılardır.

Durum I: Hiperbolik fonksiyon çözümü ($\lambda < 0$)

(4.14) çözüm formunu, (4.3) ve (4.4) deki denklemlerden yararlanarak denklem (4.12) de yerine yerleştirilmesi φ ve ψ'ye bağlı bir polinomu verir. Bu polinomdaki $\varphi^i\psi^j$ ($i = 0,1,2,\ldots, j = 0,1,2,\ldots$) katsayıları sıfırlanırsa aşağıdaki gibi bir denklem sistemi oluşur.

$$\boldsymbol{\varphi^4} \ : \ a_1^2\alpha k^2\lambda^2\sigma s + a_1^2\alpha k^2\mu^2 s - 6a_1k^3\lambda^2\sigma s - 6a_1k^3\mu^2 s - \alpha b_1^2k^2\lambda s$$

$$\boldsymbol{\psi\varphi^3}: 2a_1\alpha b_1k^2\lambda^2\sigma s + 2a_1\alpha b_1k^2\mu^2 s - 6b_1k^3\lambda^2\sigma s - 6b_1k^3\mu^2 s$$

$$\boldsymbol{\varphi^3} \ : \ 2a_1\alpha b_1k^2\lambda\mu s - 6b_1k^3\lambda\mu s$$

$$\boldsymbol{\psi\varphi^2}: -2a_1^2\alpha k^2\lambda^2\mu\sigma s - 2a_1^2\alpha k^2\mu^3 s + 12a_1k^3\lambda^2\mu\sigma s + 12a_1k^3\mu^3 s + 2\alpha b_1^2k^2\lambda\mu s$$

$$\boldsymbol{\varphi^2} \ : \ 2a_1^2\alpha k^2\lambda^3\sigma s - 8a_1k^3\lambda^3\sigma s - 5a_1k^3 s\lambda\mu^2 - \alpha b_1^2k^2\lambda^2 s + a_1\mu^2 s^2 + a_1^2\alpha k^2\lambda\mu^2 s + 2va_1k\lambda^2\sigma + va_1\lambda^2\sigma s + 2a_1k^2\lambda^2\sigma + a_1\lambda^2\sigma s^2 + 2va_1k\mu^2 + va_1\mu^2 s + 2a_1k^2\mu^2$$

$$\boldsymbol{\psi\varphi} \ : 2a_1\alpha b_1k^2\lambda^3\sigma s - 2a_1\alpha b_1k^2\lambda\mu^2 s - 5b_1k^3\lambda^3\sigma s + 7b_1k^3\lambda\mu^2 s + b_1\mu^2 s^2 + 2vb_1k\lambda^2\sigma + vb_1\lambda^2\sigma s + 2b_1k^2\lambda^2\sigma + b_1\lambda^2\sigma s^2 + 2vb_1k\mu^2 + vb_1\mu^2 s + 2b_1k^2\mu^2$$

$$\boldsymbol{\varphi} \ : 2a_1\alpha b_1k^2\lambda^2\mu s - 6b_1k^3\lambda^2\mu s \tag{4.15}$$

$$\boldsymbol{\psi^0\varphi^0} \ : a_1^2\alpha k^2\lambda^4 s\sigma - 2a_1k^3\lambda^4\sigma s + a_1k^3\lambda^2\mu^2 s + 2va_1k\lambda^3\sigma + va_1\lambda^3\sigma s + 2a_1k^2\lambda^3\sigma + a_1\lambda^3\sigma s^2 + 2va_1k\lambda\mu^2 + va_1\lambda\mu^2 s + 2a_1k^2\lambda\mu^2 + a_1\lambda\mu^2 s^2 + \lambda^2\sigma r + \mu^2 r$$

$$\boldsymbol{\psi}: -2a_1^2\alpha k^2\lambda^3\mu\sigma s + 5a_1k^3\lambda^3\mu\sigma s - a_1k^3\lambda\mu^3 s - 2va_1k\lambda^2\mu\sigma - va_1\lambda^2\mu\sigma s$$
$$-2a_1k^2\lambda^2\mu\sigma - a_1\lambda^2\mu\sigma s^2 - 2va_1k\mu^3 - va_1\mu^3 s - 2a_1k^2\mu^3 - a_1\mu^3 s^2$$

Oluşan (4.15) cebirsel sistemi çözülürse

$$r = 0$$

$$a_1 = \frac{3k}{\alpha}$$

$$b_1 = \frac{\sqrt{-\frac{9\lambda^2\sigma + 9\mu^2}{\lambda}}\,k}{\alpha} \tag{4.16}$$

$$v = -\frac{k^3\lambda s + 2k^2 + s^2}{2k + s}$$

eşitlikleri elde edilir ve bu eşitlikler kullanılarak (4.2) ile (4.14) sayesinde istenilen hiperbolik tipte

$$u(\xi) = a_0 + \frac{3k\sqrt{-\lambda}(A_1\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi))}{\alpha(A_1\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + \mu/\lambda)} + \frac{3\sqrt{-\frac{\lambda^2(A_1^2 - A_2^2) + \mu^2}{\lambda}}k}{\alpha(A_1\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + \mu/\lambda)} \tag{4.17}$$

şeklindeki tam dalga çözümüne ulaşılır. Bu çözümde, $\frac{9\lambda^2\sigma + 9\mu^2}{\lambda} < 0$ ve $\sigma = A_1^2 - A_2^2$'dir.

Daha özel bir çözüm için (4.17) de $a_0 = 0$, $A_2 = 0$, $A_1 > 0$ ve $\mu = 0$ eşitlikleri kabul edilirse

$$u(\xi) = \frac{3k}{\alpha}\sqrt{-\lambda}(\coth(\sqrt{-\lambda}\xi) + \operatorname{csch}(\sqrt{-\lambda}\xi)) \tag{4.18}$$

şeklinde bir çözüme ulaşılır.

Durum II: Trigonometrik fonksiyon çözümleri ($\lambda > 0$)

λ'nın işaretinin pozitif olduğu durum için iki ayrı tam çözüm bulunmuştur.

Trigonometrik fonksiyon çözümü, (4.14) çözüm formunu, bu sefer (4.3) ve (4.5) deki eşitlikler ile (4.12) deki denklemde yerine yazılması ile araştırılır ve yine φ ve ψ'ye bağlı bir polinomun katsayıları sıfırlanarak cebirsel denklem sistemi elde edilir. Durum I 'e benzer olarak bu sistemin çözümü,

i)

$$r = 0$$

$$a_1 = \frac{3k}{\alpha}$$

$$b_1 = \frac{\sqrt{-\frac{-9\lambda^2\sigma + 9\mu^2}{\lambda}}\,k}{\alpha} \tag{4.19}$$

$$v = -\frac{k^3\lambda s + 2k^2 + s^2}{2k + s}$$

eşitliklerini verir. Bu eşitliklerle birlikte (4.2) göz önünde bulundurularak (4.14) çözüm formu

$$u(\xi) = a_0 + \frac{3k\sqrt{\lambda}(A_1\, cos(\sqrt{\lambda}\xi) - A_2\, sin(\sqrt{\lambda}\xi))}{\alpha(A_1\, sin(\sqrt{\lambda}\xi) + A_2\, cos(\sqrt{\lambda}\xi) + \mu/\lambda)} + \frac{\sqrt[3]{-\frac{-\lambda^2(A_1^2 + A_2^2) + \mu^2}{\lambda}}\,k}{\alpha(A_1\, sin(\sqrt{\lambda}\xi) + A_2\, cos(\sqrt{\lambda}\xi) + \mu/\lambda)} \tag{4.20}$$

haline gelir ve $\frac{-9\lambda^2\sigma + 9\mu^2}{\lambda} < 0, \sigma = A_1^2 + A_2^2$ şeklinde belirtilir.

Özellikle, (4.20) de $a_0 = 0,\ A_1 = 0,\ A_2 > 0$ ve $\mu = 0$ olarak seçilirse

$$u(\xi) = -\frac{3k}{\alpha}\sqrt{\lambda}(tan(\sqrt{\lambda}\xi) - sec(\sqrt{\lambda}\xi)) \tag{4.21}$$

ve ayrıca $a_0 = 0,\ A_2 = 0,\ A_1 > 0,\ \mu = 0$ olarak seçilirse

$$u(\xi) = \frac{3k}{\alpha}\sqrt{\lambda}(cot(\xi\sqrt{\lambda}) + csc(\xi\sqrt{\lambda})) \tag{4.22}$$

şeklinde periyodik çözümler elde edilir.

Eğer cebirsel denklem sisteminin aşağıdaki çözümü alınırsa,

ii)

$$\begin{gathered} r = 0 \\ a_1 = \frac{3\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{\lambda}}}{\alpha} \\ b_1 = \frac{3\sqrt{3\lambda^2\sigma - 3\mu^2}}{\lambda\alpha} \\ k = 3\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{\lambda}} \\ s = -2\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{\lambda}} \end{gathered} \tag{4.23}$$

eşitliklerini verir böylece bu eşitlikler (4.2) doğrultusunda (4.14) de yerine konulur ve (4.12) adi diferansiyel denkleminin çözümünü,

$$u(\xi) = a_0 + \frac{3\sqrt{3}(A_1 cos(\sqrt{\lambda}\xi) - A_2 sin(\sqrt{\lambda}\xi))}{\alpha(A_1 sin(\sqrt{\lambda}\xi) + A_2 cos(\sqrt{\lambda}\xi) + \mu/\lambda)} + \frac{3\sqrt{3(\lambda^2(A_1^2 + A_2^2) - \mu^2)}}{\lambda\alpha(A_1 sin(\sqrt{\lambda}\xi) + A_2 cos(\sqrt{\lambda}\xi) + \mu/\lambda)} \tag{4.24}$$

şeklinde verir. Burada $3\lambda^2\sigma - 3\mu^2$ ifadesi sıfırdan büyük ve σ ifadesi $A_1^2 + A_2^2$ ifadesine eşittir.

Durum III: Rasyonel fonksiyon çözümü ($\lambda = 0$)

(4.14) çözüm formunu (4.3) ve (4.6) sayesinde denklem (4.12)'e yerleştirip φ ve ψ gibi iki değişkene sahip polinomun katsayılarını sıfıra eşitleyerek aşağıdaki değerler bulunur.

$$r = 0$$

$$a_1 = \frac{3k}{\alpha}$$

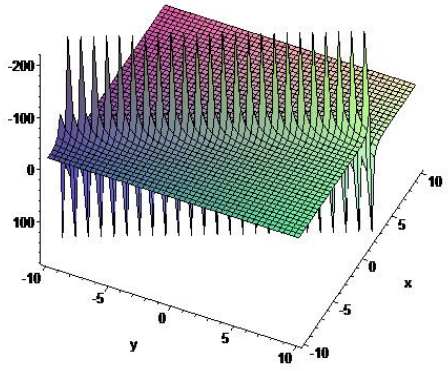
$$b_1 = \frac{3\sqrt{A_1^2 - 2\mu A_2}\,k}{\alpha} \tag{4.25}$$

$$v = -\frac{2k^2 + s^2}{2k + s}$$

Bu değerlere ek olarak (4.2)'i, (4.14) de kullanmak aşağıda verildiği gibi bir rasyonel fonksiyon çözümüne ulaşılmasını sağlar.

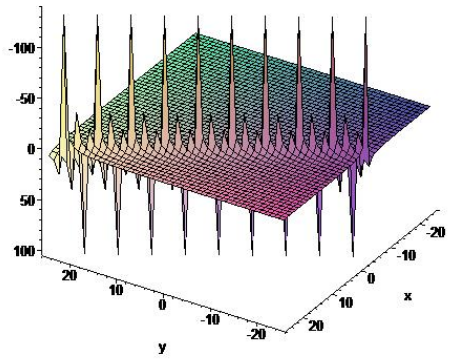
$$u(\xi) = a_0 + \frac{3k(\mu\xi + A_1)}{\alpha(\frac{\mu\xi^2}{2} + A_1\xi + A_2)} + \frac{3k\sqrt{A_1^2 - 2\mu A_2}}{\alpha(\frac{\mu\xi^2}{2} + A_1\xi + A_2)} \tag{4.26}$$

Burada bulunan çözümlerin belirli zaman kesitlerinde oluşturduğu dalga modellemeleri aşağıdaki grafikler ile verilmiştir. Grafikler λ'nın işaretine bağlı olarak bulunan iki farklı tipte tam çözümler için verilmiştir. Şekil 4.1 ve Şekil 4.2, üstel dalga çözümü olan (4.17) denklemini, Şekil 4.3 periyodik dalga çözümü olan (4.20) denklemini ve Şekil 4.4 başka bir periyodik dalga çözümü olan (4.24) denklemini temsil etmektedir.



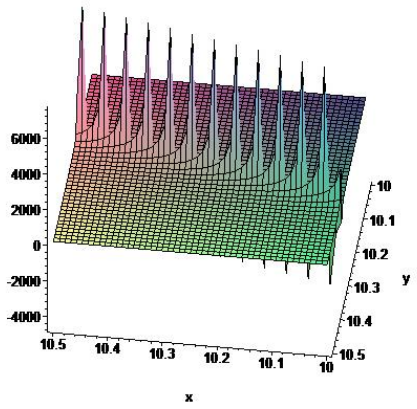
Şekil 4.1 *Hiperbolik fonksiyon çözümü*

$t = 1,\ \lambda = -3,\ k = -1,\ s = 0.5,$
$\mu = 1.2,\ a_0 = -1, \alpha = 0.3,$
$A_1 = 1.5,\ A_2 = 0.1.$



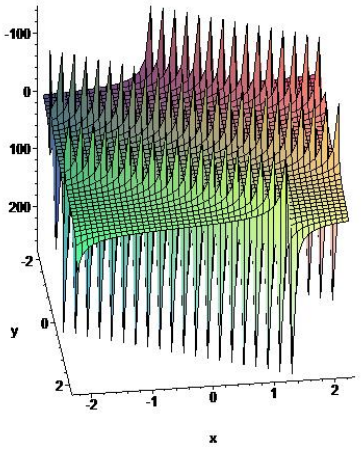
Şekil 4.2 *Hiperbolik fonksiyon çözümü*

$t = -2,\ \lambda = -0.1,\ k = -1,\ s = 0.6,$
$\mu = -0.2,\ a_0 = 0.6,\ \alpha = -0.5,$
$A_1 = 1.4,\ A_2 = 1.1.$



Şekil 4.3 *Trigonometrik fonksiyon çözümü*

$t = 0.3,\ \lambda = 1,\ k = 0.1,\ s = 0.4,$
$\mu = 0.4,\ a_0 = 0.8,\ \alpha = 0.2,$
$A_1 = 0.9,\ A_2 = 0.8.$



Şekil 4.4 *Trigonometrik fonksiyon çözümü*

$t = 3,\ \lambda = 3,\ v = -1,$
$\mu = 1,\ a_0 = 3,\ \alpha = 0.8,$
$A_1 = 1,\ A_2 = 0.$

4.1.2 (3+1) Boyutlu BKP-Boussinesq Denkleminin Yeni Formunun $(\mathbf{G'/G, 1/G})$ Açılım Yöntemi Sayesinde Farklı Tipte Tam Çözümlerine Ulaşılması

(3+1) boyutlu BKP-Boussinesq denkleminin yeni formu, Kaur ve Wazwaz (2019) tarafından genelleştirilmiş B-tipi KP denklemine u_{tt} teriminin eklenmesi ile $u(x,y,z,t) = u$ olacak şekilde,

$$u_{ty} - u_{xxxy} - 3(u_x u_y)_x + u_{tt} + 3u_{xz} = 0 \tag{4.27}$$

biçiminde türetilmiştir. (4.27) denkleminin tam çözümünü bulmak ve aşağıdaki gibi lineer olmayan adi bir diferensiyel denkleme indirgemek için (4.27) denklemine öncelikle, $u(x,y,z,t) = u(\xi),\ \ \xi = kx + sy + dz - vt$ biçiminde bir dalga dönüşümü uygulanır.

$$k^3 s u^{(4)} + 6k^2 s u' u'' - (v^2 - sv + 3kd)u'' = 0 \tag{4.28}$$

Daha sonra, (4.28) adi diferensiyel denkleminin bir kez integrali alınarak r integral sabiti olmak üzere,

$$k^3 s u''' + 3k^2 s (u')^2 - (v^2 - sv + 3kd)u' + r = 0 \tag{4.29}$$

şeklinde bir adi diferensiyel denklem elde edilir. (4.29) denklemindeki u''' terimi ve $(u')^2$ teriminin dengelenmesi,

$$M = 1 \tag{4.30}$$

tam sayısını verir. (4.30)'u (4.9) da yerine yerleştirirsek a_0, a_1 ve b_1 sabit sayıları temsil etmek üzere,

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \varphi + b_1 \psi \tag{4.31}$$

biçiminde bir çözüm formuna ulaşılır.

Durum I: $\lambda < 0$ kabul edildiğinde hiperbolik fonksiyon çözümüne ulaşılır. Bunun için ilk olarak ulaştığımız çözüm formunu, (4.29) denklemine (4.3) ve (4.4) eşitlikleri yardımı ile yerleştirilir. Bunun sonucunda elde edilen φ ve ψ'e bağlı oluşan polinomun katsayıları sıfıra eşitlenerek elde edilen denklem sistemi çözülürse aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{gathered} r = 0 \\ a_1 = k \\ b_1 = \sqrt{-\frac{\lambda^2\sigma + \mu^2}{\lambda}}\,k \\ v = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}\sqrt{-4k^3\lambda s - 12dk + s^2} \end{gathered} \tag{4.32}$$

Bu değerleri (4.31) deki çözüm formunda (4.2)'i göz önünde bulundurarak yerleştirmek (4.29) denkleminin tam çözümünü

$$u(\xi) = a_0 + \frac{k\sqrt{-\lambda}(A_1\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi))}{A_1\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + \mu/\lambda} + \frac{\sqrt{-\frac{\lambda^2(A_1^2 - A_2^2) + \mu^2}{\lambda}}k}{A_1\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + \mu/\lambda} \tag{4.33}$$

şeklinde verir. Özellikle, (4.33) çözümünde $a_0 = 0$, $A_2 = 0$, $A_1 > 0$ ve $\mu = 0$ kabul edilirse

$$u(\xi) = k\sqrt{-\lambda}(\coth(\sqrt{-\lambda}\xi) + \operatorname{csch}(\sqrt{-\lambda}\xi)) \tag{4.34}$$

çözümü elde edilir.

Durum II: $\lambda > 0$ kabul edildiğinde iki farklı trigonometrik fonksiyon çözümlerine ulaşılmıştır.

i) Birinci trigonometrik çözüm için (4.3) ve (4.5) yardımı ile (4.31) deki çözüm formunu (4.29) denkleminde kullanarak elde edilen polinomun katsayılarını sıfıra eşitlemek

$$r = 0$$

$$a_1 = k$$

$$b_1 = \sqrt{-\frac{-\lambda^2\sigma + \mu^2}{\lambda}}k \tag{4.35}$$

$$v = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}\sqrt{-4k^3\lambda s - 12dk + s^2}$$

değerlerini elde etmeyi sağlar. Bu değerler (4.29)'un tam çözümünü

$$u(\xi) = a_0 + \frac{k\sqrt{\lambda}(A_1\, cos(\sqrt{\lambda}\xi) - A_2\, sin(\sqrt{\lambda}\xi))}{A_1\, sin(\sqrt{\lambda}\xi) + A_2\, cos(\sqrt{\lambda}\xi) + \mu/\lambda} + \frac{\sqrt{-\frac{-\lambda^2(A_1^2 + A_2^2) + \mu^2}{\lambda}}k}{A_1\, sin(\sqrt{\lambda}\xi) + A_2\, cos(\sqrt{\lambda}\xi) + \mu/\lambda} \tag{4.36}$$

şeklinde verir.

Ayrıca, $a_0 = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 > 0$ ve $\mu = 0$ alındığında aşağıdaki gibi periyodik bir çözüm elde edilir.

$$u(\xi) = -k\sqrt{\lambda}(tan(\xi\sqrt{\lambda}) - sec(\xi\sqrt{\lambda})) \tag{4.37}$$

Yukarıdaki çözüme ek olarak, $a_0 = 0$, $A_2 = 0$, $A_1 > 0$ ve $\mu = 0$ alındığında,

$$u(\xi) = k\sqrt{\lambda}(cot(\xi\sqrt{\lambda}) + csc(\xi\sqrt{\lambda})) \tag{4.38}$$

şeklinde özel bir çözüm elde edilir.

ii) Başka bir trigonometrik çözüm için aynı çözüm sürecini kullanarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$r = 0$$

$$a_1 = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda^2\sigma - \mu^2}}\, b_1$$

$$k = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda^2\sigma - \mu^2}}\, b_1 \tag{4.39}$$

$$v = \frac{1}{2}\frac{1}{\lambda^2\sigma - \mu^2}\,(s\lambda^2\sigma - s\mu^2 + (-4\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda^2\sigma - \mu^2}}\, b_1^3\lambda^4\sigma s + 4\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda^2\sigma - \mu^2}}\, b_1^3\lambda^2\mu^2 s$$

$$-12\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda^2\sigma - \mu^2}}\, b_1 d\lambda^4\sigma^2 + 24\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda^2\sigma - \mu^2}}\, b_1 d\lambda^2\mu^2\sigma + \lambda^4\sigma^2 s^2 - 12\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda^2\sigma - \mu^2}}\, b_1 d\mu^4$$

$$-2\lambda^2\mu^2\sigma s^2 + \mu^4 s^2)^{\frac{1}{2}})$$

Bu eşitlikler (4.29) denkleminin tam çözümünü, $\frac{\lambda}{\lambda^2(A_1^2+A_2^2)-\mu^2} > 0$ ve $\sigma = A_1^2 + A_2^2$ sağlayacak şekilde,

$$u(\xi) = a_0 + \frac{\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda^2(A_1^2+A_2^2)-\mu^2}}\, b_1\sqrt{\lambda}(A_1\, cos(\sqrt{\lambda}\xi) - A_2\, sin(\sqrt{\lambda}\xi))}{A_1\, sin(\sqrt{\lambda}\xi) + A_2\, cos(\sqrt{\lambda}\xi) + \mu/\lambda} + \frac{b_1}{A_1\, sin(\sqrt{\lambda}\xi) + A_2\, cos(\sqrt{\lambda}\xi) + \mu/\lambda} \tag{4.40}$$

olarak verir.

(4.40) çözümünde $a_0 = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 > 0$ ve $\mu = 0$ olarak alınırsa

$$u(\xi) = -\frac{b_1}{A_2}\left(tan(\xi\sqrt{\lambda}) - sec(\xi\sqrt{\lambda})\right) \tag{4.41}$$

çözümü, $a_0 = 0$, $A_2 = 0$, $A_1 > 0$ ve $\mu = 0$ olarak alınırsa

$$u(\xi) = \frac{b_1}{A_1}(cot(\xi\sqrt{\lambda}) + csc(\xi\sqrt{\lambda})) \tag{4.42}$$

çözümü bulunur.

Durum III: λ'nın sıfıra eşit olduğu durum için rasyonel fonksiyon çözümü aranırken,

$$r = 0$$

$$a_1 = k$$

$$b_1 = \sqrt{A_1^2 - 2A_2^2\mu k} \tag{4.43}$$

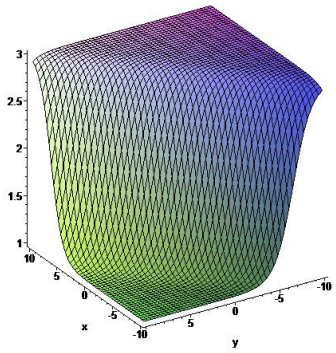
$$v = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}\sqrt{-12dk + s^2}$$

değerlerine ulaşılır. Bu değerler kullanılarak (4.29) denkleminin rasyonel fonksiyon çözümü,

$$u(\xi) = a_0 + \frac{k(\mu\xi + A_1)}{\frac{\mu\xi^2}{2} + A_1\xi + A_2} + \frac{\sqrt{A_1^2 - 2A_2^2\mu k}}{\frac{\mu\xi^2}{2} + A_1\xi + A_2} \tag{4.44}$$

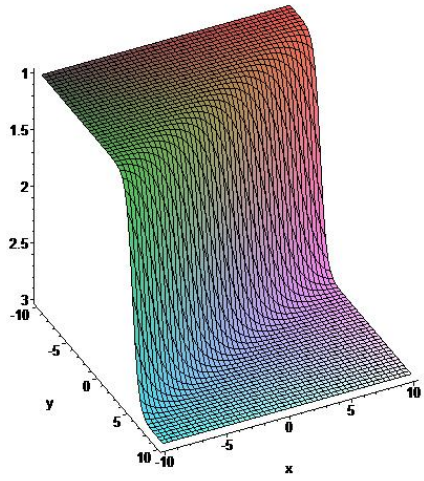
şeklinde yazılabilir.

Yukarıda üç farklı durumda bulunan dalga çözümleri için z yerine sabit değerler alınarak oluşturulmuş grafikler aşağıda verilmiştir.

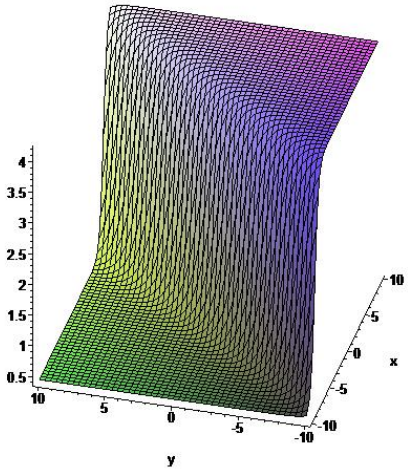


Şekil 4.5 *Hiperbolik fonksiyon çözümü*

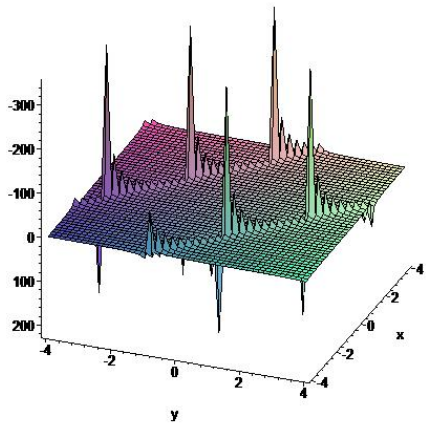
$t = 1.5,\quad \lambda = -1,\quad k = -1,\quad s = 1,$
$d = 2,\quad z = 1,\quad \mu = 1,\quad a_0 = 2,$
$A_1 = -2,\ A_2 = 1.$



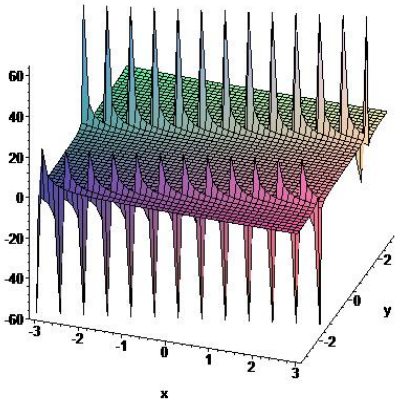
Şekil 4.6 *Hiperbolik fonksiyon çözümü*
$t = 1,\ \lambda = -1,\ k = -1,\ s = -2,$
$d = 2,\ z = 1,\ \mu = 1,\ a_0 = 2,$
$A_1 = -2,\ A_2 = -1.$



Şekil 4.7 *Hiperbolik fonksiyon çözümü*
$t = 0.5,\ \lambda = -1.1,\ k = -1.8,\ s = 1.4,$
$d = 2.1,\ \mu = 1.6,\ a_0 = 2.3,$
$A_1 = -2.2,\ A_2 = 0.1.$



Şekil 4.8 *Trigonometrik fonksiyon çözümü*
$t = -1.4,\ \lambda = 1,\ k = -1.1,\ s = 1.2,$
$d = 1.3,\ z = 1.4,\ \mu = 1.6,\ a_0 = 2.2,$
$A_1 = -1.7,\ A_2 = 1.8.$



Şekil 4.9 *Trigonometrik fonksiyon çözümü*
$t = -1,\ \lambda = 1,\ s = 2,$
$d = 1,\ z = 1,\ \mu = 1,\ a_0 = 2,$
$A_1 = -2,\ A_2 = 1.$

Şekil 4.5, Şekil 4.6 ve Şekil 4.7 üstel dalga çözümüne, Şekil 4.8 ve Şekil 4.9 periyodik dalga çözümlerine karşılık gelmektedir.

4.1.3 Birinci Formda Genişletilmiş (3+1) Boyutlu Jimbo-Miwa Denkleminin $(G'/G, 1/G)$ Açılım Yöntemi Sayesinde Farklı Tipte Tam Çözümlerine Ulaşılması

Wazwaz (2017), standart Jimbo-Miwa denklemini u_{yz} ve u_{zz} terimlerini ekleyerek genişleterek yeniden üretilen,

$$u_{xxxy} + 3u_y u_{xx} + 3u_x u_{xy} + 2u_{yt} - 3(u_{xz} + u_{yz} + u_{zz}) = 0 \qquad (4.45)$$

şeklinde lineer olmayan (3+1) boyutlu birinci formda genişletilmiş Jimbo-Miwa denklemini literatüre kazandırdı. Öncelikle, (4.45) denklemi $u(x, y, z, t) = u(\xi)$ ve $\xi = kx + sy + dz - vt$ dalga dönüşümü kullanılarak,

$$k^3 s u^{(4)} + 6k^2 s u' u'' - (2sv + 3kd + 3sd + 3d^2)u'' = 0 \qquad (4.46)$$

olacak şekilde bir adi diferensiyel denkleme dönüştürülür. Daha sonra, bu adi diferensiyel denklemin ξ'e göre bir kez integrali alınarak r integral sabiti olmak üzere

$$k^3 s u''' + 3k^2 s (u')^2 - (2sv + 3kd + 3sd + 3d^2)u' + r = 0 \qquad (4.47)$$

biçiminde bir denklem elde edilir. Bu denklemdeki u''' ve $(u')^2$ terimleri homojen denge prensibi kullanılarak dengelenirse,

$$M = 1 \qquad (4.48)$$

bulunur ve böylece çözüm formu aşağıdaki gibi olur.

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \varphi + b_1 \psi \qquad (4.49)$$

(4.49) çözüm formundaki a_0, a_1 ve b_1 sabit katsayılardır. Daha önce belirtildiği gibi çözümler, λ'ın işaretine bağlı olarak üç durumda araştırılır.

Durum I: λ'ın negatif olması hiperbolik fonksiyon çözümlerini verir. Sürecin devamında, (4.49) çözüm formunun (4.47) denkleminde kullanılması sonucu oluşan φ ve ψ cinsinden bir polinom verir. Bu polinomun katsayıları, $a_0, a_1, b_1, v, k, s, d, r, \sigma, \mu$ ve λ'dan oluşan aşağıdaki cebirsel denklem sistemini verir.

$$\boldsymbol{\varphi^4}: 3a_1^2k^2\lambda^2\sigma s - 6a_1k^3\lambda^2\sigma s + 3a_1^2k^2\mu^2 s - 6a_1k^3\mu^2 s - 3b_1^2k^2\lambda s$$

$$\boldsymbol{\psi\varphi^3}: 6a_1b_1k^2\lambda^2\sigma s - 6b_1k^3\lambda^2\sigma s + 6a_1b_1k^2\mu^2 s - 6b_1k^3\mu^2 s$$

$$\boldsymbol{\varphi^3}: 6a_1b_1k^2\lambda\mu s - 6b_1k^3\lambda\mu s$$

$$\boldsymbol{\psi\varphi^2}: -6a_1^2k^2\lambda^2\mu\sigma s + 12a_1k^3\lambda^2\mu\sigma s - 6a_1^2k^2\mu^3 s + 12a_1k^3\mu^3 s + 6b_1^2k^2\lambda\mu s$$

$$\boldsymbol{\varphi^2}: 6a_1^2k^2\lambda^3\sigma s - 8a_1k^3\lambda^3\sigma s + 3a_1^2k^2\lambda\mu^2 s - 5a_1k^3\lambda\mu^2 s - 3b_1^2k^2\lambda^2 s + 2va_1\lambda^2\sigma s + 3a_1d^2\lambda^2\sigma + 3a_1d^2\lambda^2\sigma + 3a_1dk\lambda^2\sigma + 3a_1d\lambda^2\sigma s + 2va_1\mu^2 s + 3a_1d^2\mu^2 + 3a_1dk\mu^2 + 3a_1d\mu^2 s$$

$$\boldsymbol{\psi\varphi}: 6a_1b_1k^2\lambda^3\sigma s - 5b_1k^3\lambda^3\sigma s - 6a_1b_1k^2\lambda\mu^2 s + 7b_1k^3\lambda\mu^2 s + 2vb_1\lambda^2\sigma s + 3b_1d^2\lambda^2\sigma + 3b_1dk\lambda^2\sigma + 3b_1d\lambda^2\sigma s + 2vb_1\mu^2 s + 3b_1d^2\mu^2 + 3b_1dk\mu^2 + 3b_1d\mu^2 s$$

$$\boldsymbol{\varphi}: 6a_1b_1k^2\lambda^2\mu s - 6b_1k^3\lambda^2\mu s \tag{4.50}$$

$$\boldsymbol{\psi^0\varphi^0}: 3a_1^2k^2\lambda^4\sigma s - 2a_1k^3\lambda^4\sigma s + a_1k^3\lambda^2\mu^2 s + 2va_1\lambda^3\sigma s + 3a_1d^2\lambda^3\sigma + 3a_1d\lambda^3\sigma s + 2va_1\lambda\mu^2 s + 3a_1d^2\lambda\mu^2 + 3a_1dk\lambda\mu^2 + 3a_1d\lambda\mu^2 s + \lambda^2\sigma r + \mu^2 r + 3a_1dk\lambda^3\sigma$$

$$\boldsymbol{\psi}: -6a_1^2k^2\lambda^3\mu\sigma s + 5a_1k^3\lambda^3\mu\sigma s - a_1k^3\lambda\mu^3 s - 2va_1\lambda^2\mu\sigma s - 3a_1d^2\lambda^2\mu\sigma - 3a_1dk\lambda^2\mu\sigma - 3a_1d\lambda^2\mu\sigma s - 2va_1\mu^3 s - 3a_1d^2\mu^3 - 3a_1dk\mu^3 - 3a_1d\mu^3 s$$

Oluşan cebirsel sistem çözülerek,

$$r = 0$$

$$a_1 = k$$

$$b_1 = \sqrt{-\frac{\lambda^2\sigma + \mu^2}{\lambda}}k \tag{4.51}$$

$$v = -\frac{k^3 s\lambda + 3kd + 3sd + 3d^2}{2s}$$

$\frac{\lambda^2\sigma+\mu^2}{\lambda} < 0$ ve $\sigma = A_1^2 - A_2^2$ sağlayacak şekilde değerler elde edilir. Bu değerler ile birlikle (4.2) ve (4.4) kullanılarak (4.49) daki çözüm formuna yerleştirilirse tam dalga çözümü,

$$u(\xi) = a_0 + \frac{k(A_1\, cosh(\xi\sqrt{-\lambda})\sqrt{-\lambda} + A_2\, sinh(\xi\sqrt{-\lambda})\sqrt{-\lambda})}{A_1\, sinh(\xi\sqrt{-\lambda}) + A_2\, cosh(\xi\sqrt{-\lambda}) + \frac{\mu}{\lambda}} + \frac{\sqrt{-\frac{\lambda^2(A_1^2 - A_2^2)+\mu^2}{\lambda}}k}{A_1\, sinh(\xi\sqrt{-\lambda}) + A_2\, cosh(\xi\sqrt{-\lambda}) + \frac{\mu}{\lambda}} \tag{4.52}$$

şeklinde bulunur.

Ek olarak, (4.52) denkleminde $a_0 = 0$, $A_2 = 0$, $A_1 > 0$ ve $\mu = 0$ olarak yerleştirilirse,

$$u(\xi) = k\sqrt{-\lambda}(coth(\xi\sqrt{-\lambda}) + csch(\xi\sqrt{-\lambda})) \tag{4.53}$$

şeklinde daha özel bir çözüm haline gelir.

Durum II: λ'ın pozitif olması trigonometrik fonksiyon çözümlerini verir. Birinci duruma benzer şekilde, (4.49)'u (4.47)'e yerleştirildiğinde bir polinom elde edilir. Daha sonra, oluşan cebirsel yapıda her bir katsayı sıfıra eşitlenerek aşağıdaki eşitliklere ulaşılır.

$$r = 0$$

$$a_1 = k$$

$$b_1 = \sqrt{-\frac{-\lambda^2(A_1^2+A_2^2)+\mu^2}{\lambda}}k \tag{4.54}$$

$$d = -\frac{1}{2}(k+s) + \frac{1}{6}\sqrt{-12k^3\lambda s - 24vs + 9k^2 + 18ks + 9s^2}$$

(4.2) ve (4.5) ile (4.54) eşitliklerini (4.49) da kullanmak $\frac{-\lambda^2(A_1^2+A_2^2)+\mu^2}{\lambda} < 0$ ve $\sigma = A_1^2 + A_2^2$ değerlerini sağlayan aşağıdaki gibi yeni bir tam dalga çözümünü verir.

$$u(\xi) = a_0 + \frac{k(A_1\, cos(\xi\sqrt{\lambda})\sqrt{\lambda} - A_2\, sin(\xi\sqrt{\lambda})\sqrt{\lambda})}{A_1\, sin(\xi\sqrt{\lambda}) + A_2\, cos(\xi\sqrt{\lambda}) + \mu/\lambda} + \frac{\sqrt{-\frac{-\lambda^2(A_1^2+A_2^2)+\mu^2}{\lambda}}k}{A_1\, sin(\xi\sqrt{\lambda}) + A_2\, cos(\xi\sqrt{\lambda}) + \mu/\lambda} \tag{4.55}$$

İlaveten, (4.55) dalga çözümünde $a_0 = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 > 0$ ve $\mu = 0$ olarak farz edilirse, (4.55) çözümü

$$u(\xi) = -k\sqrt{\lambda}(tan(\xi\sqrt{\lambda}) - sec(\xi\sqrt{\lambda})) \tag{4.56}$$

halini alır. Benzer şekilde, $a_0 = 0, A_2 = 0, A_1 > 0$ ve $\mu = 0$ olursa,

$$u(\xi) = k\sqrt{\lambda}(cot(\xi\sqrt{\lambda}) + csc(\xi\sqrt{\lambda})) \tag{4.57}$$

şeklinde bir çözüme dönüşür.

Durum III: λ, sıfıra eşit olduğunda rasyonel fonksiyon çözümü oluşur. Sırasıyla, (4.3) ve (4.6) dan yararlanarak (4.49)'u (4.47) de kullanarak, φ ve ψ polinomundaki tüm katsayılar sıfıra eşitlenerek,

$$r = 0$$

$$a_1 = -\frac{3sd + 2sv + 3d^2}{3d}$$

$$b_1 = -\frac{\sqrt{A_1^2 - 2A_2\mu}(3sd+2sv+3d^2)}{3d} \tag{4.58}$$

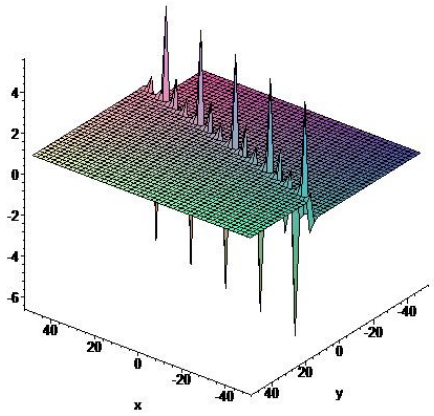
$$k = -\frac{3sd + 2sv + 3d^2}{3d}$$

değerleri kolayca elde edilir. Sonrasında, bu değerleri (4.2) ve (4.6) ile (4.49)'a uyarlamak rasyonel dalga çözümünü,

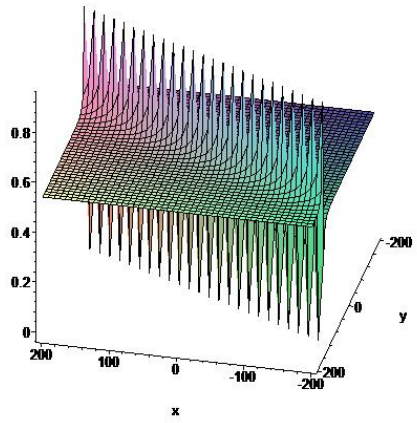
$$u(\xi) = a_0 - \frac{(3sd+2sv+3d^2)(\mu\xi+A_1)}{3d(\frac{\mu\xi^2}{2}+A_1\xi+A_2)} + \frac{\sqrt{A_1^2-2\mu A_2}(3sd+2sv+3d^2)}{3d(\frac{\mu\xi^2}{2}+A_1\xi+A_2)} \tag{4.59}$$

biçiminde verir.

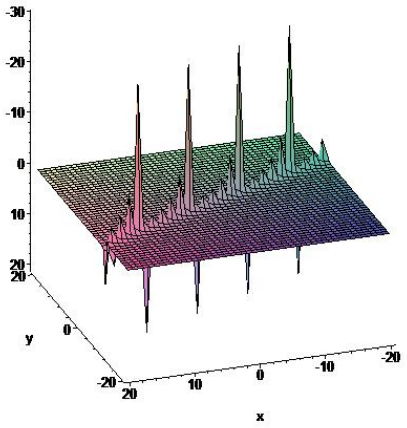
Burada, elde edilen dalga çözümlerinin yayılımını ve özelliklerini daha iyi anlamak için özel değerler alınarak oluşturulmuş grafikleri aşağıdaki gibi veriyoruz.



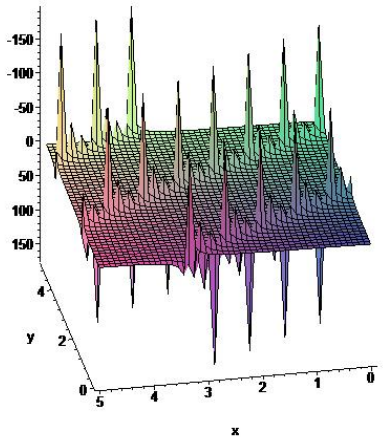
Şekil 4.10 *Hiperbolik fonksiyon çözümü* $t = 0.25,\ \lambda = -0.7,\ k = 0.6,\ s = 2,\ d = 1.8,\ z = 0.9,\ \mu = 0.8,\ a_0 = 0.4,\ A_1 = 1.4,\ A_2 = 0.7.$



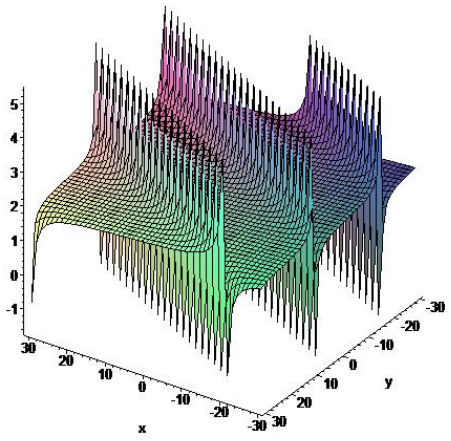
Şekil 4.11 *Hiperbolik fonksiyon çözümü* $t = 0.4,\ \lambda = -0.1,\ k = 0.1,\ s = 0.2,\ d = 0.3,\ z = 1,\ \mu = 0.7,\ a_0 = 0.5,\ A_1 = 0.6,\ A_2 = 0.9.$



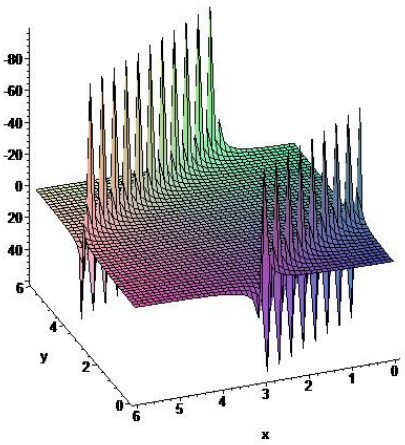
Şekil 4.12 *Hiperbolik fonksiyon çözümü* $t = 1.2,\ \lambda = -1.4,\ k = 0.5,\ s = 1.1,$ $d = 0.2,\ z = 1.8,\ \mu = 0.7,\ a_0 = 0.5,$ $A_1 = 1.3,\ A_2 = 0.9.$



Şekil 4.13 *Trigonometrik fonksiyon çözümü* $t = 2.5,\ \lambda = 1.4,\ k = -1.2,\ s = -2.1,$ $v = 0.5,\ z = 1.4,\ \mu = 2,\ a_0 = 1,$ $A_1 = 1.5,\ A_2 = 0.1.$



Şekil 4.14 *Trigonometrik fonksiyon çözümü* $t = 0.3,\ \lambda = 1.5,\ k = 0.1,\ s = 0.2,$ $v = -1.2,\ z = 0.4,\ \mu = 0.8,\ a_0 = 2,$ $A_1 = 1.6,\ A_2 = 1.1.$



Şekil 4.15 *Trigonometrik fonksiyon çözümü* $t = 1.4,\ \lambda = 1.8,\ k = 0.6,\ s = 0.9,$ $v = -1.5,\ z = 0.8,\ \mu = 0.6,\ a_0 = 1.6,$ $A_1 = 1.2,\ A_2 = 0.4.$

4.1.4 İkinci Formda Genişletilmiş (3+1) Boyutlu Jimbo-Miwa Denkleminin $(\mathrm{G}'/\mathrm{G}, 1/\mathrm{G})$ Açılım Yöntemi Sayesinde Farklı Tipte Tam Çözümlerine Ulaşılması

İkinci formda genişletilmiş (3+1) boyutlu Jimbo-Miwa denklemi, Wazwaz (2017) tarafından birinci formda genişletilmiş Jimbo-Miwa denklemi gibi standart Jimbo-Miwa denklemindeki u_{yt} terimini $u_{xt} + u_{yt} + u_{zt}$ olarak genişleterek boyutunu koruyacak şekilde

$$u_{xxxy} + 3u_y u_{xx} + 3u_x u_{xy} + 2(u_{yt} + u_{xt} + u_{zt}) - 3u_{xz} = 0 \tag{4.60}$$

biçiminde elde edilmiştir. İkinci formda genişletilmiş (3+1) boyutlu Jimbo-Miwa denklemi $u(x, y, z, t) = u(\xi)$ ve $\xi = kx + sy + dz - vt$ olan dalga dönüşümü kullanılarak,

$$k^3 s u^{(4)} + 6k^2 s u' u'' - (2vs + 2vk + 2vd + 3kd)u'' = 0 \tag{4.61}$$

denklemine dönüştürülür ve bu denklemin integrali alınarak r integral sabitini temsil edecek şekilde,

$$k^3 s u''' + 3k^2 s (u')^2 - (2vs + 2vk + 2vd + 3kd)u' + r = 0 \tag{4.62}$$

denklemi elde edilir. Dengeleme kullanılırsa $M = 1$ gelir ve $(\mathrm{G}'/\mathrm{G}, 1/\mathrm{G})$ açılım yöntemine göre aranan çözüm,

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \varphi + b_1 \psi \tag{4.63}$$

formundadır.

Durum I: Hiperbolik fonksiyon çözümünü bulmak için izlenecek birinci adım, (4.63) denklemini (4.3), (4.4) deki değerlerin kullanımı ile (4.62) denklemine yerleştirerek (G'/G) ve $(1/\mathrm{G})$ terimlerine ek olarak bu terimlerin kuvvetlerinden oluşan cebirsel bir denklem sistemine ulaşmaktır. İkinci adım ise bu denklem sistemini çözdürmektir. Bu denklem sisteminin çözümlerinden biri,

$$r = 0$$

$$a_1 = \sqrt{-\frac{\lambda}{\lambda^2\sigma + \mu^2}}\, b_1$$

$$k = \sqrt{-\frac{\lambda}{\lambda^2\sigma + \mu^2}}\, b_1 \tag{4.64}$$

$$v = \frac{(sb_1^2\lambda^2 - 3d\lambda^2\sigma - 3d\mu^2)\sqrt{-\frac{\lambda}{\lambda^2\sigma + \mu^2}}\, b_1}{2(\lambda^2\sigma + \mu^2)(\sqrt{-\frac{\lambda}{\lambda^2\sigma + \mu^2}}\, b_1 + d + s)}$$

değerlerini verir. Bu değerleri (4.63) de (4.2) ve (4.4)'ü dikkate alarak kullanmak (4.62)'in çözümünü,

$$u(\xi) = a_0 + \frac{\sqrt{-\frac{\lambda}{\lambda^2(A_1^2 - A_2^2)+\mu^2}}\, b_1 (A_1 \cosh(\xi\sqrt{-\lambda})\sqrt{-\lambda} + A_2 \sinh(\xi\sqrt{-\lambda})\sqrt{-\lambda})}{A_1 \sinh(\xi\sqrt{-\lambda}) + A_2 \cosh(\xi\sqrt{-\lambda}) + \frac{\mu}{\lambda}} + \frac{b_1}{A_1 \sinh(\xi\sqrt{-\lambda}) + A_2 \cosh(\xi\sqrt{-\lambda}) + \frac{\mu}{\lambda}} \tag{4.65}$$

biçiminde verir.

(4.65) denklemindeki değerler, $A_2 = 0, A_1 > 0, a_0 = 0$ ve $\mu = 0$ olarak alınırsa,

$$u(\xi) = \frac{b_1}{A_1}(coth(\xi\sqrt{-\lambda}) + csch(\xi\sqrt{-\lambda})) \tag{4.66}$$

periyodik çözümü bulunur.

Durum II: Trigonometrik fonksiyon çözümünü bulmanın birinci durumdan farkı, (4.63) denklemini (4.62) denklemine yerleştirirken (4.3) ve (4.5)'i kullanarak bir polinom elde etmektir. Çözüm bulma sürecinin devamı yine birinci durumla aynı olarak bu polinomun katsayılarını sıfıra eşitleyerek cebirsel denklem sistemini oluşturup sistemi çözdürmektir. Bu

sefer çözümlerden biri,

$$r = 0$$

$$a_1 = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda^2\sigma - \mu^2}}\, b_1$$

$$k = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda^2\sigma - \mu^2}}\, b_1 \tag{4.67}$$

$$v = -\frac{1}{2}\frac{(b_1^2\lambda^2 s + 3d\lambda^2\sigma - 3d\mu^2)\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda^2\sigma - \mu^2}}\, b_1}{\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda^2\sigma - \mu^2}}\, b_1\lambda^2\sigma - \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda^2\sigma - \mu^2}}\, b_1\mu^2 + d\lambda^2\sigma + \lambda^2\sigma s - d\mu^2 - \mu^2 s}$$

eşitliklerini sağlar. Bu bağlantılı parametreler sayesinde tam çözüm,

$$u(\xi) = a_0 + \frac{\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda^2(A_1^2+A_2^2)-\mu^2}}\, b_1 (A_1\, cos(\xi\sqrt{\lambda})\sqrt{\lambda} - A_2\, sin(\xi\sqrt{\lambda})\sqrt{\lambda})}{A_1\, sin(\xi\sqrt{\lambda}) + A_2\, cos(\xi\sqrt{\lambda}) + \frac{\mu}{\lambda}} + \frac{b_1}{A_1\, sin(\xi\sqrt{\lambda}) + A_2\, cos(\xi\sqrt{\lambda}) + \frac{\mu}{\lambda}} \tag{4.68}$$

şeklinde bulunur.

(4.68) denkleminde $a_0 = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 > 0$ ve $\mu = 0$ olarak seçilirse

$$u(\xi) = \frac{b_1}{A_2}\sqrt{\lambda}(tan(\xi\sqrt{\lambda}) - sec(\xi\sqrt{\lambda})) \tag{4.69}$$

özel çözümü, $a_0 = 0$, $A_2 = 0$, $A_1 > 0$ ve $\mu = 0$ olarak seçilirse

$$u(\xi) = \frac{b_1}{A_1}\sqrt{\lambda}(cot(\xi\sqrt{\lambda}) + csc(\xi\sqrt{\lambda})) \tag{4.70}$$

özel çözümü elde edilir.

Durum III: Rasyonel fonksiyon çözümü için yukarıda verilen uygulamalardaki aynı işlem prosedürü kullanılırsa,

$$r = 0$$

$$a_1 = k$$

$$b_1 = \sqrt{A_1^2 - 2A_2^2\mu k} \tag{4.71}$$

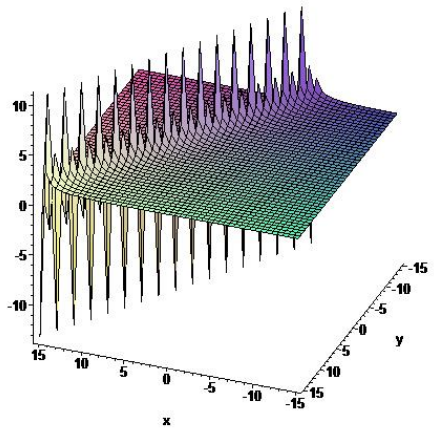
$$v = -\frac{3kd}{2(k+s+d)}$$

değerleri elde edilir. Böylece, dalga çözümü

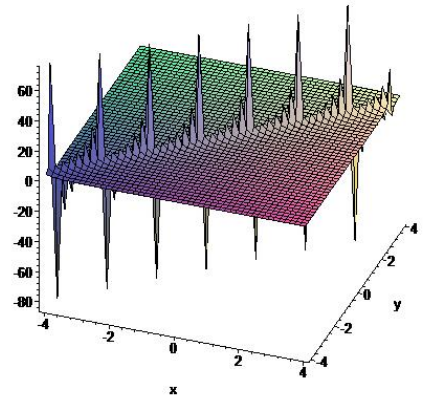
$$u(\xi) = a_0 - \frac{2v(s+d)(\mu\xi + A_1)}{(3d+2v)(\frac{\mu\xi^2}{2} + A_1\xi + A_2)} + \frac{2\sqrt{A_1^2 - 2A_2^2\mu}(s+d)v}{(3d+2v)(\frac{\mu\xi^2}{2} + A_1\xi + A_2)} \tag{4.72}$$

olacak biçimde bulunur.

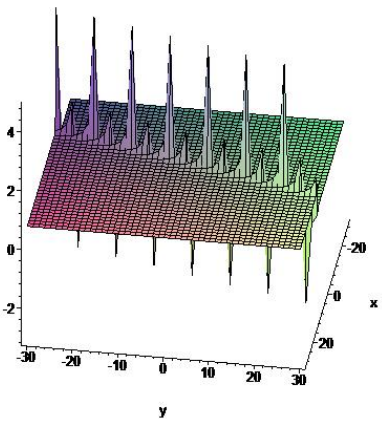
Bulunan bu dalga çözümlerinin grafik gösterimleri ilerleyen kısımda verilmiştir.



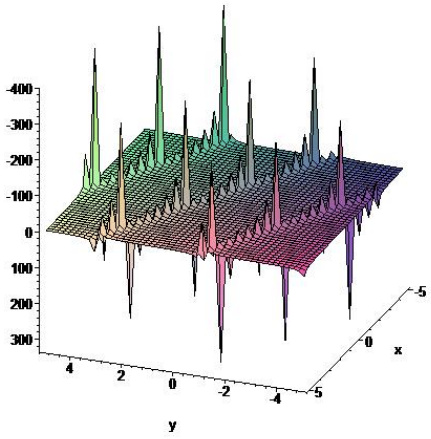
Şekil 4.16 *Hiperbolik fonksiyon çözümü* $t = 0.2,\ \lambda = -1.1,\ k = 0.3,\ s = -0.2,$ $d = -0.5,\ z = 2,\ \mu = 0.6,\ a_0 = 1.1,$ $b_1 = -0.2,\ A_1 = 0.9,\ A_2 = 0.1.$



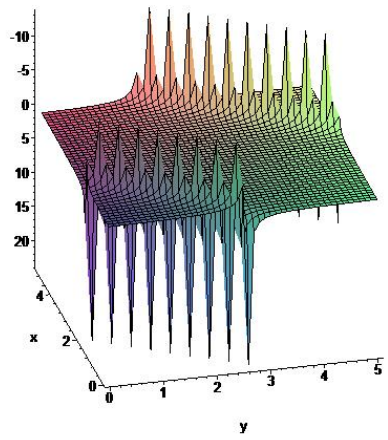
Şekil 4.17 *Hiperbolik fonksiyon çözümü* $t = 0.1,\ \lambda = -1.2,\ k = 1.2,\ s = -1.4,$ $d = 0.4,\ z = 0.5,\ \mu = 1.1,\ a_0 = 0.5,$ $b_1 = 1.1,\ A_1 = 1.3,\ A_2 = 0.4.$



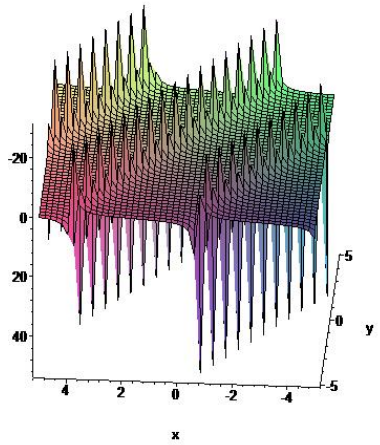
Şekil 4.18 *Hiperbolik fonksiyon çözümü* $t = 2.4,\ \lambda = -1.4,\ k = 1.4,\ s = -0.4,$ $d = 0.4,\ z = 1.4,\ \mu = 0.4,\ a_0 = 0.4,$ $b_1 = 0.4,\ A_1 = 1.4,\ A_2 = 0.4.$



Şekil 4.19 *Trigonometrik fonksiyon çözümü* $t = 2.4,\ \lambda = 1.4,\ k = 0.7,\ s = -1.3$ $d = 0.3,\ z = 1.1,\ \mu = 0.9,\ a_0 = 0.2,$ $b_1 = -0.5,\ A_1 = 0.1,\ A_2 = 0.7.$



Şekil 4.20 *Trigonometrik fonksiyon çözümü* $t = -0.25,\ \lambda = 2.4,\ k = 0.9,\ s = 0.6,$ $d = 1.6,\ z = 1.5,\ \mu = 0.4,\ a_0 = 1.2,$ $b_1 = 0.3,\ A_1 = 1.8,\ A_2 = 0.2.$



Şekil 4.21 *Trigonometrik fonksiyon çözümü* $t = -0.25,\ \lambda = 2.4,\ k = 0.9,\ s = 0.6,$ $d = -2.6,\ z = 0.1,\ \mu = 0.4,\ a_0 = 0.4,$ $b_1 = 1.3,\ A_1 = 1.8,\ A_2 = 0.2.$

4.2 Modifiye Edilmiş Çiftli Alt Denklem Yöntemi

Modifiye edilmiş çiftli alt denklem yönteminde çözüm, Riccati denklemlerini sağlayan, iki dalga dönüşümü içeren, sabitlerden ve iki fonksiyondan oluşan belirli bir biçimde aranır. Bu yöntem kullanılarak elde edilen çözümler trigonometrik ve hiperbolik fonksiyon çözümlerini verir. Bu fonksiyonların bir arada bulunması ile elde edilen çözüm, kompleksiton çözüm olarak adlandırılır. Ayrıca, bu yöntem aynı anda iki tip fonksiyon türetilmesi üzerine kurulmuş olsa da, parametrelere bağlı olarak sadece bir fonksiyon tipi içeren çözümlerde üretir. Sonuç olarak, modifiye edilmiş çiftli alt denklem yöntemi kompleksiton dalga çözümü bulmada oldukça etkilidir.

Son zamanlarda oldukça önemli bir araştırma alanı haline gelen kompleksiton dalga çalışmaları, modifiye edilmiş çiftli alt denklem yöntemi gibi birçok yöntemin literatüre girmesini sağlamıştır. Hossen vd. (2017) tarafından bu yöntemin uygulama adımları aşağıdaki gibi kısaca özetlenmiştir.

1. Adım: Bu yöntem, uzay ve zaman boyutlarında

$$\mathrm{P}(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{tx}, u_{xx}, \dots) = 0 \tag{4.73}$$

biçiminde verilen kısmi diferensiyel denklemlerin soliton-trigonometrik (kompleksiton) çözümlerinin bulunmasına dayanır. (4.73) biçiminde verilen lineer olmayan oluşum denklemlerinde t ve x sırasıyla zamanı ve uzayı temsil eden değişkenlerdir. $u(x,t)$ ise belirli bir formda aranacak ve çözüm prosedürü sonunda bulunacak fonksiyondur. İşlemlerin bir çoğunun homojen denge sabiti gerektirdiği, tam çözümlere aşina olan araştırmacılar tarafından bilinir. Aranan çözüm bu denge sabitine göre şekillenir. Denge sayısı ne kadar büyükse, $u(x,t)$ çözümü o kadar uzun ve karmaşıktır.

2. Adım: Eğer denge sabiti 1'e eşit olursa, $u(x,t)$ fonksiyonu, λ_0, λ_1 keyfi sabitler ve $a_0 = a_0(x,t)$, $a_1 = a_1(x,t)$, $a_2 = a_2(x,t)$, $\xi = \xi(x,t)$, $\eta = \eta(x,t)$ ifadeleri zaman ile uzaya bağlı fonksiyonlar olmak üzere

$$u(x,t) = a_0 + \frac{a_1\phi(\xi)+a_2\psi(\eta)}{\lambda_0+\lambda_1\phi(\xi)\psi(\eta)} \tag{4.74}$$

şeklindeki formda aranır. $\phi(\xi)$ ve $\psi(\eta)$ fonksiyonları ise $\xi = k_1x + w_1t$ ile $\eta = k_2x + w_2t$ dalga dönüşümleri kullanıldığında sırasıyla,

$$\phi'(\xi) = q_1 + p_1\phi^2(\xi) \tag{4.75}$$

ve

$$\psi'(\eta) = q_2 + p_2\psi^2(\eta) \tag{4.76}$$

eşitliklerini sağlar.

3. Adım: ϕ ve ψ'nin türevlerinden oluşan (4.75) ve (4.76) Riccati denklemlerinin çözümleri, q_1 ve p_1'nin farklı değerlerine göre aşağıda verildiği gibi değişik tipte fonksiyon formunda olabilir. Örneğin, $\phi'(\xi) = q_1 + p_1\phi^2(\xi)$ Riccati denkleminin q_1 ve p_1'in farklı değerleri için çözüm durumları aşağıda verilmiştir.

(i) $q_1 = 1$ ve $p_1 = -1$ şeklinde kabul edilirse

$$\phi(\xi) = tanh(\xi),\ \phi(\xi) = coth(\xi), \tag{4.77}$$

(ii) $q_1 = p_1 = \mp\frac{1}{2}$ şeklinde kabul edilirse

$$\phi(\xi) = sec(\xi) \pm tan(\xi), \tag{4.78}$$

(iii) $q_1 = p_1 = 1$ şeklinde kabul edilirse

$$\phi(\xi) = tan(\xi), \tag{4.79}$$

(iv) $q_1 = p_1 = -1$ şeklinde kabul edilirse

$$\phi(\xi) = cot(\xi), \tag{4.80}$$

(v) $q_1 = \frac{1}{2}$ ve $p_1 = -\frac{1}{2}$ şeklinde kabul edilirse

$$\phi(\xi) = tanh(\xi) \pm i\, sech(\xi)\,,\ \phi(\xi) = coth(\xi) \pm csch(\xi), \tag{4.81}$$

(vi) $q_1 = 0$ ve $p_1 = 1$ şeklinde kabul edilirse

$$\phi(\xi) = -\frac{1}{\xi + w} \tag{4.82}$$

çözümlerine ulaşılır.

4. Adım: (4.75) ve (4.76) Riccati denklemleri hesaba katılarak, (4.74) deki çözüm formu (4.73) kısmi diferensiyel denkleminde yerine yazılırsa ϕ ve ψ'nin kuvvetlerinden oluşan bir polinom elde edilir. Bu polinomun katsayıları sıfırlanır ve bunun sonucu oluşan cebirsel sistem yardımcı matematiksel programlar tarafından çözdürülürse verilen kısmi diferensiyel denklemin çözümleri bulunur.

4.2.1 Modifiye Edilmiş Çiftli Alt Denklem Yöntemini Kullanarak (3+1) Boyutlu Korteweg-de Vries Tipi Denklemin Kompleksiton Çözümlerini Bulma

(3+1) boyutlu KdV tipi denklem Wazwaz (2012) tarafından,

$$u_t + 6u_x u_y + u_{xxy} + u_{xxxxz} + 60u_x^2 u_z + 10u_{xxx}u_z + 20u_x u_{xxz} = 0 \qquad (4.83)$$

şeklinde tanıtılmış ve sığ su dalgalarını temsili olarak literatüre girmiştir. Bu denkleme modifiye edilmiş çiftli alt denklem yöntemini uygulamak için dengeleme yapılırsa aranan çözüm formu

$$u(x,y,z,t) = b_0 + \frac{b_1\phi(\xi)+b_2\psi(\eta)}{b_3+b_4\phi(\xi)\psi(\eta)} \qquad (4.84)$$

şeklinde olur. Burada, $\xi = k_1x + s_1y + n_1z + w_1t$ ve $\eta = k_2x + s_2y + n_2z + w_2t$ olarak alınmıştır. (4.75) ve (4.76) Riccati denklemlerinin kullanımı ile (4.84) çözüm formunu (3+1) boyutlu KdV tipi denkleminde yerine yazmak ϕ ile ψ ve onların kuvvetlerinden oluşan polinomu verir. Böylece, bu polinomdaki ϕ, ψ ve kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitleyerek bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümü de aşağıdaki gibi kompleksiton dalga çözümü bulmada yararlanılan iki farklı çözüm kümesini verir.

1. Çözüm:

$$b_1 = 0, \qquad b_2 = -\frac{k_1(b_3^2p_1p_2 - b_4^2q_1q_2)}{b_4q_2}, \qquad k_2 = \frac{b_3k_1p_1}{b_4q_2},$$

$$s_2 = -\frac{p_1(12b_3^3k_1^2n_1p_1^2p_2 + 8b_3^2b_4k_1^2n_2p_1p_2q_2 - 8b_3b_4^2k_1^2n_1p_1q_1q_2)}{b_4^3q_2^2} - \frac{p_1(-12b_4^3k_1^2n_2q_1q_2^2 - b_3b_4^2q_2s_1)}{b_4^3q_2^2} \qquad (4.85)$$

$$w_1 = -4k_1^2p_1q_1(4k_1^2n_1p_1q_1 - s_1)$$

$$w_2 = -\frac{4k_1^2p_1^3b_3^2p_2(12b_3^3k_1^2n_1p_1^2p_2 + 12b_3^2b_4k_1^2n_2p_1p_2q_2)}{b_4^5q_2^3}$$
$$-\frac{4k_1^2p_1^3b_3^2p_2(-8b_3b_4^2k_1^2n_1p_1q_1q_2 - 12b_4^3k_1^2n_2q_1q_2^2 - b_3b_4^2q_2s_1)}{b_4^5q_2^3}$$

2. Çözüm:

$$b_2 = 0, \qquad b_1 = -\frac{k_1(b_3^2p_1p_2 - b_4^2q_1q_2)}{b_3p_2}, \qquad k_2 = \frac{b_4k_1q_1}{b_3p_2},$$

$$s_2 = \frac{q_1(12b_3^3k_1^2n_2p_1p_2^2 + 8b_3^2b_4k_1^2n_1p_1p_2q_1)}{b_3^3p_2^2}$$
$$+\frac{q_1(-8b_3b_4^2k_1^2n_2p_2q_1q_2 - 12b_4^3k_1^2n_1q_1^2q_2 + b_3^2b_4p_2s_1)}{b_3^3p_2^2} \qquad (4.86)$$

$$w_1 = -4k_1^2p_1q_1(4k_1^2n_1p_1q_1 - s_1)$$

$$w_2 = \frac{4k_1^2q_1^3b_4^2q_2(12b_3^3k_1^2n_2p_1p_2^2 + 8b_3^2b_4k_1^2n_1p_1p_2q_1 - 12b_3b_4^2k_1^2n_2p_2q_1q_2)}{b_3^5p_2^3}$$
$$+\frac{4k_1^2q_1^3b_4^2q_2(-12b_4^3k_1^2n_1q_1^2q_2 + b_3^2b_4p_2s_1)}{b_3^5p_2^3}$$

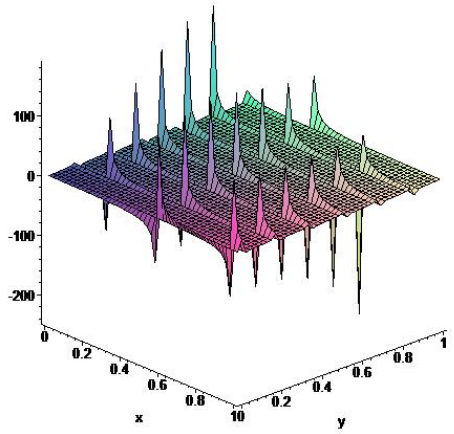
Son olarak, (4.85) ve (4.86) daki çözüm kümeleri, modifiye edilmiş çiftli alt denklem yöntemindeki durumlar ile birlikte kullanılarak (4.83) denkleminin dalga çözümleri bulunur. Bulunan çözümlerin bazıları aşağıdaki gibi grafiklerle verilmiştir.

(4.85) deki çözüm eşitlikleri ile (4.77) ve (4.79) daki $q_1 = 1$, $p_1 = -1$, $q_2 = 1$ ve $p_2 = 1$ değerlerini kullanarak $\phi(\xi) = tanh(\xi)$ ve $\psi(\eta) = tan(\eta)$ fonksiyonları seçilirse,

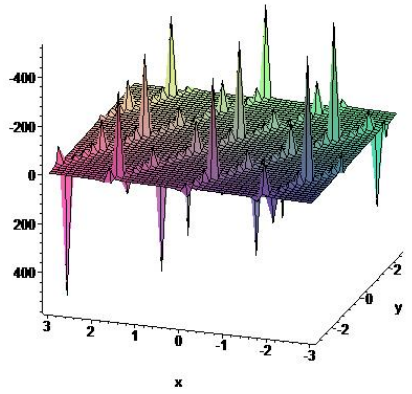
$$u(x,y,z,t) = b_0 - k_1(-b_3^2 - b_4^2)\tan(-\frac{b_3k_1x}{b_4} + n_2z +$$
$$\frac{(12b_3^3k_1^2n_1 - 8b_3^2b_4k_1^2n_2 + 8b_3b_4^2k_1^2n_1 - 12b_4^3k_1^2n_2 - b_3b_4^2s_1)y}{b_4^3} +$$
$$\frac{4k_1^2b_3^2(12b_3^3k_1^2n_1 - 12b_3^2b_4k_1^2n_2 + 8b_3b_4^2k_1^2n_1 - 12b_4^3k_1^2n_2 - b_3b_4^2s_1)t}{b_4^5})/(b_4\left(b_3 - b_4\tanh(-k_1x - n_1z -\right.$$

$$s_1 y - 4k_1^2(-4k_1^2 n_1 - s_1)t)\tan(-\frac{b_3 k_1 x}{b_4} + n_2 z + \frac{(12b_3^3 k_1^2 n_1 - 8b_3^2 b_4 k_1^2 n_2 + 8b_3 b_4^2 k_1^2 n_1 - 12b_4^3 k_1^2 n_2 - b_3 b_4^2 s_1)y}{b_4^3} + \frac{4b_3^2 k_1^2 (12b_3^3 k_1^2 n_1 - 12b_3^2 b_4 k_1^2 n_2 + 8b_3 b_4^2 k_1^2 n_1 - 12b_4^3 k_1^2 n_2 - b_3 b_4^2 s_1)t}{b_4^5}))) \quad (4.87)$$

şeklinde bir çözüm bulunur. Bu çözümde özel parametreler seçilerek dalga yayılımlarını göstermek amacıyla aşağıdaki grafikler sunulmuştur.



Şekil 4.22 $k_1 = 0.4,\ s_1 = 0.4,\ n_1 = 1.2,\ n_2 = -0.9,\ w_1 = 1.4,\ b_0 = 1.1,\ b_3 = 1.3,\ b_4 = -0.6,\ z = 0.4,\ t = 1.4.$



Şekil 4.23 $k_1 = 2,\ s_1 = 2.2,\ n_1 = 2.4,\ n_2 = -2.1,\ w_1 = 2.5,\ b_0 = 2,\ b_3 = 2.1,\ b_4 = -2.3,\ z = 2.1,\ t = 2.2.$

(4.85) deki değerler ile (4.77) ve (4.78) deki $q_1 = 1, p_1 = -1, q_2 = -\frac{1}{2}$ ve $p_2 = -\frac{1}{2}$ değerlerini kullanarak $\phi(\xi) = tanh(\xi)$ ve $\psi(\eta) = sec(\eta) - tan(\eta)$ seçilirse,

$$u(x,y,z,t) = b_0 + 2k_1\left(\frac{b_3^2}{2} + \frac{b_4^2}{2}\right)\left(\sec\left(-\frac{2b_3 k_1 x}{b_4} - n_2 z - \frac{4\left(-6b_3^3 k_1^2 n_1 - 2b_3^2 b_4 k_1^2 n_2 - 4b_3 b_4^2 k_1^2 n_1 - 3b_4^3 k_1^2 n_2 + \frac{b_3 b_4^2 s_1}{2}\right)y}{b_4^3} - \frac{16k_1^2 b_3^2\left(-6b_3^3 k_1^2 n_1 - 3b_3^2 b_4 k_1^2 n_2 - 4b_3 b_4^2 k_1^2 n_1 - 3b_4^3 k_1^2 n_2 + \frac{b_3 b_4^2 s_1}{2}\right)t}{b_4^5}\right)\right)$$

$$+\tan\left(-\frac{2b_3k_1x}{b_4}-n_2z-\frac{4\left(-6b_3^3k_1^2n_1-2b_3^2b_4k_1^2n_2-4b_3b_4^2k_1^2n_1-3b_4^3k_1^2n_2+\frac{b_3b_4^2s_1}{2}\right)y}{b_4^3}-\right.$$

$$\left.\frac{16k_1^2b_3^2\left(-6b_3^3k_1^2n_1-3b_3^2b_4k_1^2n_2-4b_3b_4^2k_1^2n_1-3b_4^3k_1^2n_2+\frac{b_3b_4^2s_1}{2}\right)t}{b_4^5}\right))/(b_4(b_3-b_4\tanh(-k_1x-n_1z-$$

$$s_1y-4k_1^2(-4k_1^2n_1-s_1)t)(\sec(-\frac{2b_3k_1x}{b_4}-n_2z-$$

$$\frac{4\left(-6b_3^3k_1^2n_1-2b_3^2b_4k_1^2n_2-4b_3b_4^2k_1^2n_1-3b_4^3k_1^2n_2+\frac{b_3b_4^2s_1}{2}\right)y}{b_4^3}-$$

$$\frac{16k_1^2b_3^2\left(-6b_3^3k_1^2n_1-3b_3^2b_4k_1^2n_2-4b_3b_4^2k_1^2n_1-3b_4^3k_1^2n_2+\frac{b_3b_4^2s_1}{2}\right)t}{b_4^5})+\tan(-\frac{2b_3k_1x}{b_4}-n_2z-$$

$$\frac{4\left(-6b_3^3k_1^2n_1-2b_3^2b_4k_1^2n_2-4b_3b_4^2k_1^2n_1-3b_4^3k_1^2n_2+\frac{b_3b_4^2s_1}{2}\right)y}{b_4^3}-$$

$$\frac{16k_1^2b_3^2\left(-6b_3^3k_1^2n_1-3b_3^2b_4k_1^2n_2-4b_3b_4^2k_1^2n_1-3b_4^3k_1^2n_2+\frac{b_3b_4^2s_1}{2}\right)t}{b_4^5}))))\qquad(4.88)$$

şeklinde bir kompleksiton çözüm bulunur. Bu çözümün seçilmiş değerler alınarak çizilmiş grafiği aşağıda Şekil 4.24 de verilmiştir.

(4.85) ile (4.78) ve (4.81) deki $q_1=\frac{1}{2},\ p_1=\frac{1}{2},\ q_2=\frac{1}{2}$ ve $p_2=-\frac{1}{2}$ değerlerini kullanarak $\phi(\xi)=sec(\xi)+tan(\xi)$ ve $\psi(\eta)=coth(\eta)+csch(\eta)$ fonksiyonları seçilirse,

$$u(x,y,z,t)=b_0-2k_1\left(-\frac{b_3^2}{4}-\frac{b_4^2}{4}\right)\left(-\coth(-\frac{b_3k_1x}{b_4}-n_2z+\right.$$

$$\frac{2\left(-\frac{3b_3^3k_1^2n_1}{2}-b_3^2b_4k_1^2n_2-b_3b_4^2k_1^2n_1-\frac{3b_4^3k_1^2n_2}{2}-\frac{b_3b_4^2s_1}{2}\right)y}{b_4^3}-$$

$$\left.\frac{2b_3^2k_1^2\left(-\frac{3b_3^3k_1^2n_1}{2}-\frac{3b_3^2k_1^2b_4n_2}{2}-b_3b_4^2k_1^2n_1-\frac{3b_4^3k_1^2n_2}{2}-\frac{b_4^2b_3s_1}{2}\right)t}{b_4^5}\right)-\operatorname{csch}(-\frac{b_3k_1x}{b_4}-n_2z+$$

$$\frac{2\left(-\frac{3b_3^3k_1^2n_1}{2}-b_3^2b_4k_1^2n_2-b_3b_4^2k_1^2n_1-\frac{3b_4^3k_1^2n_2}{2}-\frac{b_3b_4^2s_1}{2}\right)y}{b_4^3}-$$

$$\frac{2b_3^2k_1^2\left(-\frac{3b_3^3k_1^2n_1}{2}-\frac{3b_3^2k_1^2b_4n_2}{2}-b_3b_4^2k_1^2n_1-\frac{3b_4^3k_1^2n_2}{2}-\frac{b_4^2b_3s_1}{2}\right)t}{b_4^5}\Bigg)\Bigg)/(b_4(b_3+b_4(\sec(-k_1x-n_1z-$$

$$s_1y+k_1^2(k_1^2n_1-s_1)t)-\tan(-k_1x-n_1z-s_1y+k_1^2(k_1^2n_1-s_1)t))(-\coth(-\frac{b_3k_1x}{b_4}-$$

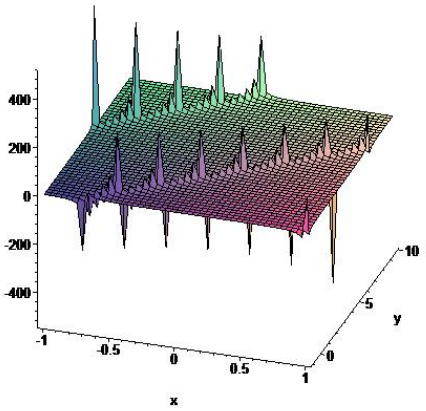
$$n_2z+\frac{2\left(-\frac{3b_3^3k_1^2n_1}{2}-b_3^2b_4k_1^2n_2-b_3b_4^2k_1^2n_1-\frac{3b_4^3k_1^2n_2}{2}-\frac{b_3b_4^2s_1}{2}\right)y}{b_4^3}-$$

$$\frac{2b_3^2k_1^2\left(-\frac{3b_3^3k_1^2n_1}{2}-\frac{3b_3^2k_1^2b_4n_2}{2}-b_3b_4^2k_1^2n_1-\frac{3b_4^3k_1^2n_2}{2}-\frac{b_4^2b_3s_1}{2}\right)t}{b_4^5})-\operatorname{csch}(-\frac{b_3k_1x}{b_4}-n_2z+$$

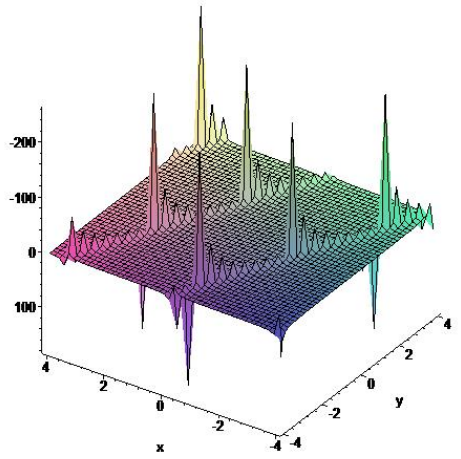
$$\frac{2\left(-\frac{3b_3^3k_1^2n_1}{2}-b_3^2b_4k_1^2n_2-b_3b_4^2k_1^2n_1-\frac{3b_4^3k_1^2n_2}{2}-\frac{b_3b_4^2s_1}{2}\right)y}{b_4^3}-$$

$$\frac{2b_3^2k_1^2\left(-\frac{3b_3^3k_1^2n_1}{2}-\frac{3b_3^2k_1^2b_4n_2}{2}-b_3b_4^2k_1^2n_1-\frac{3b_4^3k_1^2n_2}{2}-\frac{b_4^2b_3s_1}{2}\right)t}{b_4^5}))))\qquad(4.89)$$

şeklinde bir çözüm elde edilir. Bu dalga çözümünün grafiği Şekil 4.25 de verilmiştir.



Şekil 4.24 $k_1 = 1.6, s_1 = 1.8, n_1 = -2.1,$ $n_2 = -2.3, w_1 = 1.7, b_0 = 1.9$ $b_3 = 2.2, b_4 = 1.9, z = 1.8, t = -2.3.$

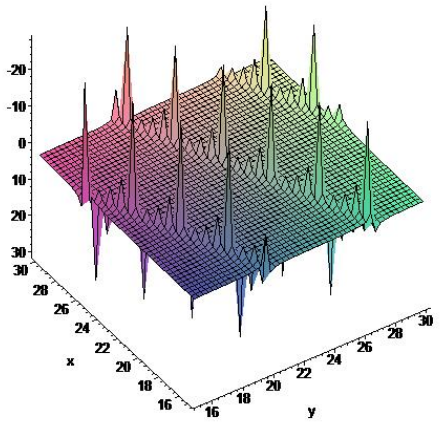


Şekil 4.25 $k_1 = 1.7, s_1 = 0.8, n_1 = -2.1,$ $n_2 = -1.3, w_1 = 0.4, b_0 = 1.5,$ $b_3 = 1.2, b_4 = 0.9, z = 2.1, t = 1.5.$

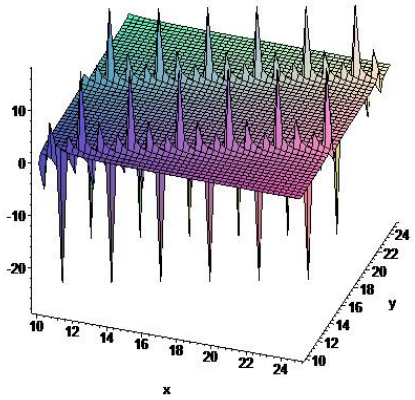
Burada ise (4.86) daki çözüm eşitlikleri ile (4.78) ve (4.81) deki $q_1 = \frac{1}{2}, p_1 = \frac{1}{2}, q_2 = \frac{1}{2}$ ve $p_2 = -\frac{1}{2}$ değerlerinin oluşturduğu $\phi(\xi) = sec(\xi) + tan(\xi)$ ve $\psi(\eta) = tanh(\eta) + i\, sech(\eta)$ fonksiyonları seçilirse,

$$u(x,y,z,t) = b_0 + 2k_1(-\frac{b_3^2}{4} - \frac{b_4^2}{4})(\sec(-k_1x - n_1z - s_1y + k_1^2(k_1^2n_1 - s_1)t) - \tan(-k_1x - n_1z - s_1y + k_1^2(k_1^2n_1 - s_1)t))/(b_3(b_3 + b_4(\sec(-k_1x - n_1z - s_1y + k_1^2(k_1^2n_1 - s_1)t) - \tan(-k_1x - n_1z - s_1y + k_1^2(k_1^2n_1 - s_1)t))(\tanh(-\frac{b_4k_1x}{b_3} + n_2z + \frac{2\left(\frac{3b_3^3k_1^2n_2}{2} - b_3^2b_4k_1^2n_1 + b_3b_4^2k_1^2n_2 - \frac{3b_4^3k_1^2n_1}{2} - \frac{b_3^2b_4s_1}{2}\right)y}{b_3^3} - \frac{2k_1^2b_4^2\left(\frac{3b_3^3k_1^2n_2}{2} - b_3^2b_4k_1^2n_1 + \frac{3b_3b_4^2k_1^2n_2}{2} - \frac{3b_4^2k_1^2n_1}{2} - \frac{b_3^2b_4s_1}{2}\right)t}{b_3^5}) + \operatorname{sech}\left(-\frac{b_4k_1x}{b_3} + n_2z + \frac{2\left(\frac{3b_3^3k_1^2n_2}{2} - b_3^2b_4k_1^2n_1 + b_3b_4^2k_1^2n_2 - \frac{3b_4^3k_1^2n_1}{2} - \frac{b_3^2b_4s_1}{2}\right)y}{b_3^3} - \frac{2k_1^2b_4^2\left(\frac{3b_3^3k_1^2n_2}{2} - b_3^2b_4k_1^2n_1 + \frac{3b_3b_4^2k_1^2n_2}{2} - \frac{3b_4^3k_1^2n_1}{2} - \frac{b_3^2b_4s_1}{2}\right)t}{b_3^5}\right)i))) \quad (4.90)$$

şeklindeki çözüme ulaşılır. Bu çözümün iki farklı dalga grafiği aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.26 $k_1 = 0.4,\ s_1 = 0.9,$ $n_1 = 0.7,\ n_2 = -0.1,\ b_0 = 2.9,$ $b_3 = 1.6, b_4 = 1.1,\ z = 2.3,\ t = 1.$



Şekil 4.27 $k_1 = -0.3,\ s_1 = 0.8,$ $n_1 = 0.7,\ n_2 = -0.9,\ b_0 = 2.1,$ $b_3 = 0.7,\ b_4 = 2.1, z = 0.6, t = 1.1.$

(4.86) daki çözüm eşitlikleri ile (4.90) dan farklı bir kompleksiton çözüm bulmak için (4.79) ve (4.81) deki $q_1 = 1,\ p_1 = 1,\ q_2 = \frac{1}{2}$ ve $p_2 = -\frac{1}{2}$ değerlerinin oluşturduğu $\phi(\xi) = tan(\xi)$ ve $\psi(\eta) = tanh(\eta) - i\,sech(\eta)$ fonksiyonları seçilirse,

$$u(x,y,z,t) = b_0 - 2k_1\left(-\frac{b_3^2}{2} - \frac{b_4^2}{2}\right)\tan(-k_1x - n_1z - s_1y + 4k_1^2\,(4k_1^2n_1 - s_1)t)/$$

$$(b_3(b_3 - b_4\tan(-k_1x - n_1z - s_1y + 4k_1^2\,(4k_1^2n_1 - s_1)t)(\tanh\left(-\frac{2b_4k_1x}{b_3} + n_2z + \right.$$

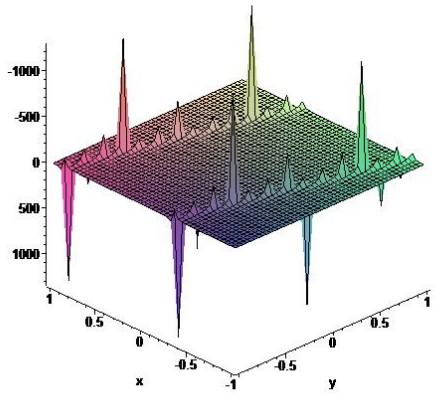
$$\left.\frac{4\left(3b_3^3k_1^2n_2 - 4b_3^2b_4k_1^2n_1 + 2b_3b_4^2k_1^2n_2 - 6b_4^3k_1^2n_1 - \frac{b_3^2b_4s_1}{2}\right)y}{b_3^3} - \right.$$

$$\left.\frac{16k_1^2b_4^2\left(3b_3^3k_1^2n_2 - 4b_3^2b_4k_1^2n_1 + 3b_3b_4^2k_1^2n_2 - 6b_4^3k_1^2n_1 - \frac{b_3^2b_4s_1}{2}\right)t}{b_3^5}\right) - \operatorname{sech}\left(-\frac{2b_4k_1x}{b_3} + n_2z + \right.$$

$$\left.\frac{4\left(3b_3^3k_1^2n_2 - 4b_3^2b_4k_1^2n_1 + 2b_3b_4^2k_1^2n_2 - 6b_4^3k_1^2n_1 - \frac{b_3^2b_4s_1}{2}\right)y}{b_3^3} - \right.$$

$$\left.\frac{16k_1^2b_4^2\left(3b_3^3k_1^2n_2 - 4b_3^2b_4k_1^2n_1 + 3b_3b_4^2k_1^2n_2 - 6b_4^3k_1^2n_1 - \frac{b_3^2b_4s_1}{2}\right)t}{b_3^5}\right)i))) \qquad (4.91)$$

çözümüne ulaşılır. Bu çözümdeki parametrelere sabit değerler verilerek oluşturulan grafik aşağıdaki gibidir.

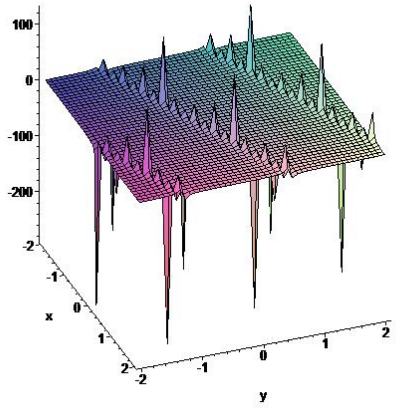


Şekil 4.28 $k_1 = 2.6, s_1 = 0.7,$
$n_1 = 1.3, n_2 = 0.8, b_0 = 1.9,$
$b_3 = 1.1, b_4 = 1.1\ \ z = 0.4, t = 0.3.$

Ek olarak, (4.86) daki eşitlikler ile (4.77) ve (4.80) deki $q_1 = -1$, $p_1 = -1$, $q_2 = 1$ ve $p_2 = -1$ değerlerinin oluşturduğu $\phi(\xi) = cot(\xi)$ ve $\psi(\eta) = tanh(\eta)$ fonksiyonlarını kullanarak,

$$u(x,y,z,t) = b_0 - k_1(b_3^2 + b_4^2)\cot(-k_1x - n_1z - s_1y + 4k_1^2(4k_1^2n_1 - s_1)t)/(b_3(b_3 - b_4\cot(-k_1x - n_1z - s_1y + 4k_1^2(4k_1^2n_1 - s_1)t)\tanh(\frac{b_4k_1x}{b_3} + n_2z - \frac{(-12b_3^3k_1^2n_2 - 8b_3^2b_4k_1^2n_1 - 8b_3b_4^2k_1^2n_2 - 12b_4^3k_1^2n_1 - b_3^2b_4s_1)y}{b_3^3} + \frac{4b_4^2k_1^2(-12b_3^3k_1^2n_2 - 8b_3^2b_4k_1^2n_1 - 12b_3b_4^2k_1^2n_2 - 12b_4^3k_1^2n_1 - b_3^2b_4s_1)t}{b_3^5}))) \quad (4.92)$$

çözümünü elde ederiz. (4.92) çözümünün kompleksiton dalga yayılımını gösteren grafik aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.29 $k_1 = 0.7, s_1 = -1.8,$
$n_1 = 1.9, n_2 = 1.7, b_0 = 2,$
$b_3 = -1.1, b_4 = 0.9\ \ z = -1.3, t = 2.5.$

5. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu tez kapsamında, bazı lineer olmayan oluşum denklemlerine iki farklı yöntem uygulanarak çeşitli fonksiyon tiplerinde tam çözümleri bulunmuştur. Çoğu tam çözüm yönteminde olduğu gibi, çözümler denge sabiti olarak adlandırılan bir tam sayı ile kesilen toplamlar biçiminde bulunur. Bu nedenle, denge sabiti çözüm formunu daha karmaşık ve uzun hale getirebilir. Bu tezde uygulanan $(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemi ve modifiye edilmiş çiftli alt denklem yöntemi sayesinde lineer olmayan oluşum denklemlerinin tam çözüm sınıflarına dahil olan trigonometrik, hiperbolik ve kompleksiton çözümlerine ulaşılmış ayrıca ulaşılan çözümlere uygun değerler verilerek resmedilmiştir. Böylece yalnızca lineer olmayan denklemlerin analitik çözümlerini bulmakla kalınmamış, aynı zamanda okuyucuların elde edilen çözümlerdeki dalgaların yayılımını ve hareketini anlamasına yardımcı olan grafikler verilmiştir. Modifiye edilmiş çiftli alt denklem yöntemi kullanılarak elde edilen kompleksiton çözümlerin grafikleri, iki değişkenli açılım yöntemi kullanılarak elde edilen analitik çözümlerin grafikleri ile kıyaslandığında bariz farklılıklar olduğu görülebilir. Bu farklılıklar, kompleksiton dalgaların hızları ve çözümlerinin çeşitli fonksiyon tiplerini birlikte içermesinden kaynaklanır.

Ayrıca, bu yüksek lisans tezi kapsamında yapılan çalışmalardan üretilen iki adet makale çeşitli uluslararası bilimsel dergilerde incelenerek yayımlanmak üzere kabul almıştır.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Tez dahilinde, iki değişkenli açılım yöntemi, biri (2+1) boyutlu diğer üçü (3+1) boyutlu olan dört farklı oluşum denklemine uygulanıp hiperbolik ve trigonometrik çözümler elde edilmiştir. Dahası, modifiye edilmiş çiftli alt denklem yöntemi, (3+1) boyutlu KdV tipi denkleme uygulanıp hiperbolik ve trigonometrik çözümleri aynı anda çözüme dahil eden kompleksiton çözümler bulunmuştur. Uygulanan iki yöntem sadece bu tezde kullanılan oluşum denklemleriyle sınırlanmayıp, bu konuda çalışmalar yapmak isteyen araştırmacılar tarafından daha yüksek denge sabitine sahip lineer olmayan oluşum denklemlerine uygulanabilir ve çeşitli tam çözüm sınıflarına ulaşılabilir. Böylece tam çözüm sınıflandırılması yapılabilir ve dalgaların davranışları hakkında detaylı bilgiler elde edilebilir. Ek olarak, kompleksiton çözümlerin son yıllarda ortaya çıkması sebebiyle yeni birçok uygulama ve genelleştirmeler yapılabileceği daha sonraki çalışmalar için bir öneri mahiyetindedir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Balcı, M., 2003, Genel Matematik (2.Baskı), Balcı Yayınları, s.122.

Bekir, A.,Ünsal, Ö., 2013, Exact solutions for a class of nonlinear wave equations by using first integral method, International Journal of Nonlinear Science, 15, 2, p.99-110.

Chen, H.T., Yang, S.H., 2013, Ma, W.X., Double sub-equation method for complexiton solutions of nonlinear partial differential equations, Applied Mathematics and Computation, 219, 9, p.4775-4781.

Demiray, S., Ünsal, Ö., Bekir, A., 2014, New exact solutions for Boussinesq type equations by using (G'/G, 1/G) and (1/G)-expansion methods, Acta Physica Polonica A, 125, p.1093-1098.

Guo, S.M., Zhou, Y.B., 2010, The extended (G'/G)-expansion method and its applications to the whitham-broer-kaup-like equationsand coupled Hirota-Satsuma KdV equations, Applied Mathematics and Computation, 215, p.3214-3221.

Hossen, M.B., Roshid, H.O., Ali, M.Z., 2017, Modifed double sub-equation method for finding complexiton solutions to the (1+1) dimensional nonlinear evolution equations, Int. J. Appl. Comput. Math., 3, p.679-697.

Kaur, L., Wazwaz, A.M., 2019, Lump, breather and solitary wave solutions to new reduced form of the generalized BKP equation, International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, 29, 2, p.569-579.

Koca, K., 2013, Kısmi Türevli Denklemler, Gazi Kitabevi, s.55.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Li, L.X, Li, E.Q, Wang, M.L, 2010, The (G'/G,1/G)-expansion method and its application to travelling wave solutions of the Zakharov equations, Applied Mathematics, A Journal of Chinese Universities, 25, p.454-462.

Liu, H.Z., Lin, S., Sun, X.Q., 2014, Comment on: Double sub-equation method for complexiton solutions of nonlinear partial differential equations, Applied Mathematics and Computation, 246, p.597-598.

Lü, H.L, Liu, X.Q, Niu, N., 2010, A generalized (G'/G)-expansion and its applications to nonlinear evolution equations, Applied Mathematics and Computation, 215, p.3811-3816.

Ma, W.X., 2002, Complexiton solutions to the Kortweg-de Vries equation, Physics Letter A, 301, p.35-44.

Mikhailov, A.V., 1981, The reduction problem and the inverse scattering method, Physica D: Nonlinear Phenomena, 3, 1, p.73.

Taşcan, F., Bekir, A., 2009, Analytic solutions of the (2 + 1)-dimensional nonlinear evolution equations using the sine-cosine method, Applied Mathematics and Computation, 215, p.3134.

Ünsal, Ö., Güner, Ö., Bekir, A., 2017, Analytical approach for space time fractional Klein Gordon equation, Optik, 135, p. 337-345.

Ünsal, Ö., 2018, Application of Extended Transformed Rational Function Method to Some (3+1)-Dimensional Nonlinear Evolution Equations, Karaelmas Science and Engineering Journal, 8, 2, 433-437.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Ünsal, Ö., 2018, Complexiton solutions for (3+1) dimensional KdV-type equation, Computers and Mathematics with Applications, 75, p.2466-2472.

Ünsal, Ö., Sakartepe, Z., 2020, An useful procedure for finding exact solutions to new form of (2 + 1)-dimensional B-type Kadomtsev-Petviashvili (BKP) equation, Eur. Phys. J. Plus, p.135-669.

Wang, M., Zhou, Y., Li, Z., 1996, Application of a homogeneous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics, Phys. Lett. A, 216, p.67.

Wang, M.L, Li, X.Z, Zhang, J.L., 2008, The (G'/G)-expansion method and traveling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics, Physics Letters A, 372, p.417-423.

Wazwaz, A.M, 2011, Distinct kinds of multiple-soliton solutions for a (3+1)-dimensional generalized B-type Kadomtsev-Petviashvili equation, Physica Scripta, 84, 055006.

Wazwaz, A.M, 2012, Soliton solutions for two (3+1)-dimensional non-integrable KdV-type equations, Mathematical and Computer Modelling, 55, 5-6, p.1845-1848.

Wazwaz, A.M., Zhaqilao, 2013, Nonsingular complexiton solutions for two higher-dimensional fifth-order nonlinear integrable equations, Physica Scripta, 88, 2, p.025001.

Wazwaz, A.M., 2017, Multiple-soliton solutions for extended (3+1)-dimensional JimboMiwa equations, Appl Math Lett., 64, p.21-26.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Yhang, S., H., Chen, H.T., 2013, Applications of the modified double sub-equation method to nonlinear partial differential equations, Physical Review & Research International, 3, 4, p.623-633.

Zhou, Y., Ma, W.X., 2017, Complexiton solutions to soliton equations by the Hirota Method, Journal of mathematical physics, 58, 10, p.101511.