Fuzzy 3-Boyutlu Projektif Uzayın Doğruları ve Düzlemleri Üzerine

Emre Koyuncu

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Ağustos 2014

On the Lines and Planes of Fuzzy 3-Dimensionel Projective Space

Emre Koyuncu

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics and Computer Sciences

August 2014

Fuzzy 3-Boyutlu Projektif Uzayın Doğruları ve Düzlemleri Üzerine

Emre Koyuncu

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. Süheyla Ekmekçi

Ağustos 2014

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı yüksek lisans öğrencisi Emre Koyuncu' nun YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı "**Fuzzy 3-Boyutlu Projektif Uzayın Doğruları ve Düzlemleri Üzerine** " başlıklı bu çalışma, jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Süheyla Ekmekçi

İkinci Danışman : –

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Münevver ÖZCAN

Üye : Prof. Dr. Ziya AKÇA

Üye : Doç. Dr. Ayşe BAYAR

Üye : Doç. Dr. Süheyla EKMEKÇİ

Üye : Doç. Dr. Aytaç KURTULUŞ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu çalışmada, fuzzy 3-boyutlu projektif uzayın fuzzy projektif doğruları ve fuzzy projektif düzlemlerinin sınıflamaları incelenmiştir

Birinci bölümde klasik grup teori, fuzzy ve projektif geometri ile ilgili temel tanım ve kavramlar verilmiştir. İkinci bölümde, fuzzy vektör uzaylarından elde edilen fuzzy projektif düzlemler üzerinde durulmuştur. Üçüncü bölümde ”On the Classification of Fuzzy Projective Lines of Fuzzy 3-Dimensional Projective Space ” başlıklı çalışma esas alınarak fuzzy vektör düzlemlerinden elde edilen fuzzy projektif doğruların bir sınıflaması incelenmiştir. Dördüncü bölümde ise ”On the Classification of Fuzzy Projective Planes of Fuzzy 3-Dimensional Projective Space” başlıklı çalışma esas alınarak fuzzy vektör uzaylarından elde edilen fuzzy projektif düzlemlerin bir sınıflaması incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fuzzy Vektör Uzayı, Fuzzy Projektif Düzlem, Fuzzy Projektif Uzay

SUMMARY

In this thesis, the classifications of fuzzy projective lines and fuzzy projective planes were examined. In the first chapter, the basic definitions, concepts and theorems related to classic group theory, projective geometry and fuzzy projective geometry were given. In the second chapter, the fuzzy projective planes obtained from fuzzy vector spaces were studied. In the third chapter, the classification of fuzzy projective lines obtained from fuzzy vector planes were studied as taking based on the paper with the title ”On the Classification of Fuzzy Projective Lines of Fuzzy 3-Dimensional Projective Space ”. In the last chapter, the classification of the fuzzy projective planes obtained from 4- dimesionel vector spaces were examined as taking based on the paper with the title ”On the Classification of Fuzzy Projective Planes of Fuzzy 3-Dimensional Projective Space”.

Keywords: Fuzzy Vector Space, Fuzzy Projective Plane, Fuzzy Projective Space

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarında, gerek derslerimde ve gerekse tez çalışmalarında, bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım

Doç. Dr. Süheyla EKMEKÇİ

başta olmak üzere

Prof. Dr. Ziya Akça'ya **Doç. Dr. Ayşe Bayar**'a

ve beni her zaman destekleyen,

sevgili aileme

sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET v

SUMMARY vi

TEŞEKKÜR vii

BÖLÜM 0. GİRİŞ 1

BÖLÜM 1. BAZI TEMEL KAVRAMLAR 2

1.1 Cebirsel ve Geometrik Yapılar 2

1.1.1 Bazı Cebirsel Kavramlar 2

1.1.2 Projektif Uzay 4

1.1.3 Projektif Düzlem 6

BÖLÜM 2. FUZZY VEKTÖR UZAYLARINDAN ELDE EDİLEN FUZZY PROJEKTİF GEOMETRİLER 12

2.1 Fuzzy Vektör Doğruları ve Düzlemleri 13

2.2 Fuzzy Vektör Uzaylar 15

2.3 Fuzzy Projektif Noktalar ve Doğrular 19

2.3.1 Fuzzy Projektif Noktalar 20

2.3.2 Fuzzy Projektif Doğrular 21

2.4 Fuzzy Projektif Uzaylar 21

2.5 Fuzzy Projektif Uzayda Üzerinde Bulunma Bağıntısı 22

2.6 Fuzzy Projektif Düzlemler 22

BÖLÜM 3. 3-BOYUTLU FUZZY PROJEKTİF UZAYIN FUZZY PROJEKTİF DOĞRULARI 26

BÖLÜM 4. 3-BOYUTLU FUZZY PROJEKTİF UZAYIN FUZZY PROJEKTİF DÜZLEMLERİ **31**

BÖLÜM 5. SONUÇ VE ÖNERİLER **34**

KAYNAKLAR DİZİNİ **35**

BÖLÜM 0

GİRİŞ

Projektif geometri, vektör uzaylarını çalışmak için geometrik bir yoldur. Bir F cismi üzerindeki projektif uzay, F cismi üzerindeki bir vektör uzayının aşikar olmayan altuzaylarından oluşur Bu projektif geometrinin orijinidir. Matematikte pek çok teorinin fuzzy karşılığı vardır. Fuzzileştirme temel olarak bir kümenin elemanlarına $[0,1]$ aralığında üyelik derecesi verilerek oluşturulur. Projektif uzaylar Leen Kuijken ve Hendrik Van Maldeghem tarafından fuzzileştirildi.

Bu çalışmada, birinci bölümde bazı cebirsel kavramlar, fuzzy küme teori, vektör uzayları ve projektif geometrideki temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, fuzzy vektör uzayları ile fuzzy projektif uzaylar arasındaki ilişkiler incelendi.

Üçüncü bölümde, fuzzy $4-$boyutlu vektör uzayının fuzzy vektör düzlemlerinin bir sınıflaması ve fuzzy $4-$boyutlu vektör uzayından elde edilen fuzzy $3-$boyutlu projektif uzayın fuzzy projektif doğrularının bir sınıflaması incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ise fuzzy $4-$boyutlu vektör uzayının fuzzy $3-$boyutlu vektör uzaylarının ve fuzzy $4-$boyutlu vektör uzayından elde edilen fuzzy $3-$boyutlu projektif uzayın fuzzy projektif düzlemlerinin bir sınıflaması incelenmiştir

BÖLÜM 1

BAZI TEMEL KAVRAMLAR

1.1 Cebirsel ve Geometrik Yapılar

1.1.1 Bazı Cebirsel Kavramlar

Tanım 1.1 A boş olmayan bir küme olsun. $A \times A$ dan A ya tanımlı bir

$$\begin{array}{rccc} * : & A \times A & \longrightarrow & A \\ & (x,y) & \longrightarrow & (x * y) \end{array}$$

fonksiyonuna A içinde **ikili işlem** denir. Bu tanıma göre ikili işlem iki değişkenli bir fonksiyondur. $A \times A$ nın herhangi bir (a,b) elemanının ikili işlem denilen böyle bir fonksiyon altındaki görüntüsü genel olarak $a+b, ab, a.b, a \circ b, a \oplus b, a \odot b$ ve benzeri biçimde gösterilir (Karakaş, 1998).

Örnek 1.1 Tamsayıların ve gerçel sayıların toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri en çok bilinen ikili işlemlerdir.

Tanım 1.2 G boş olmayan bir küme ve $*$, G de bir ikili işlem olsun. $(G,*)$ cebirsel yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bir **grup** denir (Çallıalp, 2011).

G1) $*$, G de bir ikili işlem olduğundan G kümesi $*$ işlemine göre kapalıdır.

G2) $*$ işleminin G de birleşme özelliğini sağladığından $\forall x,y,z \in G$ için $x*(y*z) = (x*y)*z$ dir.

G3) G kümesinin $*$ işlemine göre etkisiz (birim) elemanı vardır. Başka bir deyişle $\forall x \in G$ için $x*e = e*x = x$ olacak şekilde bir tek $e \in G$ vardır.

G4) G nin her elemanının $*$ işlemine göre tersi vardır. Diğer bir ifadeyle $x \in G$ için $x*x^{-1} = x^{-1}*x = e$ olacak şekilde bir tek $x^{-1} \in G$ vardır.

Örnek 1.2 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ve $\mathbb{C}$ kümeleri adi toplama işlemine ($+$ işlemine) göre birer gruptur. $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$, $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, ve $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ kümeleri de adi çarpma işlemine($\cdot$ işlemine) göre bir gruptur. $(\mathbb{N},+)$ ve $(\mathbb{Z},\cdot)$ cebirsel yapıları ise grup değildir.

Tanım 1.3 $(G,*)$ bir grup olsun, $\forall x,y \in G$ için $x*y = y*x$ özelliği sağlanıyorsa bu gruba **değişmeli grup** veya **abelyan grup** denir (Çallıalp, 2011).

Örnek 1.3 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümeleri adi toplama işlemine ($+$ işlemine) göre birer değişmeli gruptur. $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$ ve $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ kümeleri de adi çarpma işlemine ($\cdot$ işlemine) göre değişmeli gruptur.

Not 1.4 Grubun işlemi "$+$" ise **toplamsal grup**, "$\cdot$" ise **çarpımsal grup** denir (Çallıalp, 2011).

Tanım 1.5 $(G,*)$ bir grup olsun, G sonlu bir küme ise $(G,*)$ grubuna bir **sonlu grup** denir ve grubun eleman sayısına da **grubun mertebesi** denir (Çallıalp, 2011).

Tanım 1.6 G bir grup ve G nin boş olmayan alt kümesi H olsun. Eğer H, G deki işleme göre kendi başına bir grup ise H ye, G nin **alt grubu** denir ve $H < G$ ile gösterilir (Çallıalp, 2011).

Tanım 1.7 F boş olmayan bir küme ve bu kümenin elemanları arasında $+ : F \times F \to F$ ve $\cdot : F \times F \to F$ ile göstereceğimiz iki tane ikili işlem tanımlanmış olsun. $(F,+,\cdot)$ cebirsel yapısı aşağıdaki şartları sağlıyorsa, bu cebirsel yapıya **cisim** adı verilir.

C1) Her $a,b \in F$ için $a+b = b+a$ ve $a\cdot b = b\cdot a$ dır.

C2) Her $a,b,c \in F$ için $(a+b)+c = a+(b+c)$ ve $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$ dır.

C3) Her $a,b,c \in F$ için $a\cdot(b+c) = (a\cdot b)+(a\cdot c)$ dır.

C4) F kümesinde öyle bir 0 elemanı vardır ki, her $a \in F$ için $a+0 = a$ eşitliğini sağlar.

C5) F kümesinde öyle bir 1 elemanı vardır ki, 0 dan farklı her $a \in F$ için $a\cdot 1 = a$ eşitliğini sağlar.

C6) Her $a \in F$ elemanı için, F kümesinde öyle bir $-a$ elemanı vardır ki, $a+(-a) = 0$ eşitliğini sağlar.

C7) Her $0 \neq a \in F$ için, F kümesinde öyle bir a^{-1} elemanı vardır ki, $a\cdot a^{-1} = 1$ eşitliğini sağlar.

Örnek 1.4 $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ birer cisim iken, $\mathbb{Z}$ bir cisim değildir.

Tanım 1.8 V boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun. $+ : V \times V \to V$ ve $\cdot : F \times V \to V$ iki fonksiyon olmak üzere $(V,F,+,\cdot)$ cebirsel yapısı aşağıdaki şartları sağlıyorsa, V kümesine F cismi üzerinde bir **vektör uzayı**dır denir.

V1) Her $x, y \in V$ için $x + y = y + x$ dir.

V2) Her $x, y, z \in V$ için $(x + y) + z = x + (y + z)$ dir.

V3) Her $x \in V$ için $x + \theta = x$ olacak şekilde V de bir tek θ elemanı vardır.

V4) Her $x \in V$ elemanı için, $x + y = \theta$ eşitliğini sağlayan V de bir tek y elemanı vardır.

V5) Her $a, b \in F$ ve her $x \in V$ için $a \cdot (b \cdot x) = (a \cdot b) \cdot x$ dir.

V6) Her $a, b \in F$ ve her $x \in V$ için $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$ dir.

V7) Her $a \in F$ ve her $x, y \in V$ için $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$ dir.

V8) Her $x \in V$ için $1 \cdot x = x$ dir.

Örnek 1.5 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ birer vektör uzayıdır. $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$ bir vektör uzayıdır.

Tanım 1.9 V bir vektör uzayı ve U bunun boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa U kümesine V nin bir lineer alt uzayı denir:

1) $x \in U$ ve $y \in U$ iken $x + y \in U$.

2) $x \in U$ ve $r \in \mathbb{R}$ iken $rx \in U$.

1.1.2 Projektif Uzay

Tanım 1.10 V bir vektör uzayı $D(V)$ de V nin alt uzaylarının bir kolleksiyonu ve $\circ$ da bu alt uzaylar arasında bir üzerinde bulunma bağıntısı olsun. $D(V)$ ve $D(V)$ deki üzerinde bulunma bağıntısı yardımıyla tanımlanan $PG(V) = (D(V), \circ)$ geometrik yapısına **projektif uzay** denir. U ve U' V nin altuzayları olsun. Eğer $U \subseteq U'$ veya $U' \subseteq U$ şartlarından biri sağlanıyorsa U ve U' birbirinin üzerindedir denir ve $U \circ U'$ ile gösterilir (Kujken, Maldeghem, Kerre, 1999).

Tanım 1.11 V bir vektör uzayı ve V nin bir alt uzayı U olsun. U alt uzayının boyutu tabanındaki vektör sayısına eşittir ve $boy(U)$ ile gösterilir. U alt uzayının **projektif boyutu** da U nun boyutunun bir eksiğidir ve $pboy(U) = boy(U) - 1$ ile gösterilir (Kujken, Maldeghem, Kerre, 1999).

Sonlu boyutlu bir projektif uzayda bütün doğrular eşit sayıda nokta içerir ve projektif uzayın mertebesi herhangi bir doğrusu üzerindeki nokta sayısının bir eksiğidir. Eğer q mertebeli sonlu bir cisim üzerindeki projektif uzaylar üzerinde çalışırsak, bir doğru üzerindeki noktaların sayısı $q+1$'e eşittir, böylece projektif uzayın mertebesi q olacaktır. q mertebeli bir cisim üzerindeki $n-$boyutlu projektif uzay $PG(n,q)$ ile gösterilir.

Tanım 1.12 $S_n = PG(n,q)$ $n-$boyutlu projektif uzay ve $n \geq 2$ olsun. O zaman aşağıdaki aksiyomlar geçerlidir (Casse, 2006).

A1) S_n elemanları noktalar olan bir kümedir.

A2) $-1 \leq h \leq n$ ve $\forall h \in \mathbb{Z}$ için S_h, S_n nin h-boyutlu alt uzayıdır.

A3) S_n nin aşikar alt uzayları S_n ve S_{-1} dir. S_{-1} alt uzayı S_n nin boş alt uzayıdır.

A4) S_n nin noktaları kendisinin 0 boyutlu alt uzaylarıdır.

A5) $n-$boyutlu tek alt uzay S_n dir.

A6) S_h ve S_k, S_n nin iki alt uzayı olsun. O zaman $S_h \cap S_k$ da S_n nin alt uzayılarıdır.

A7) S_h ve S_k, S_n nin iki alt uzayı olsun. O zaman $S_h \cap S_k$ alt uzayının boyutu,

$$pboy(S_h \oplus S_k) + pboy(S_h \cap S_k) = pboy(S_h) + pboy(S_k)$$

şeklinde hesaplanır ($S_h \oplus S_k$ uzayı S_h ve S_k alt uzaylarının gerdiği uzaydır, bu ifade $\langle S_h, S_k \rangle$ şeklinde de gösterilebilir.).

Tanım 1.13 $S_n = PG(n,q)$ $n-$boyutlu bir projektif uzay olsun. O zaman;

$0-$boyutlu S_0 projektif alt uzayına **projektif nokta**,

$1-$boyutlu S_1 projektif alt uzayına **projektif doğru**,

$2-$boyutlu S_2 projektif alt uzayına **projektif düzlem**,

$3-$boyutlu S_3 projektif alt uzayına **projektif uzay** denir (Casse, 2006).

Tanım 1.14 $n-$boyutlu projektif uzayda boyutu $n-1$ olan alt uzaylar **hiperdüzlem** olarak adlandırılır (Casse, 2006).

Örnek 1.6 p bir projektif nokta ve L, p noktasından geçmeyen bir projektif doğru olsun. Bu durumda $pboy(p) = 0$, $pboy(L) = 1$ ve $pboy(p \cap L) = -1$ dir. O zaman

$$\begin{aligned} pboy(L \oplus p) &= pboy(L) + pboy(p) - pboy(p \cap L) \\ &= 1 + 0 - (-1) = 2 \end{aligned}$$

olarak bulunur, yani $L \oplus p$ bir projektif düzlem belirtir (Casse, 2006).

Tanım 1.15 $\mathcal{P}$ $n-$boyutlu bir projektif uzay olsun. $\mathcal{P}$ de aşikar olmayan alt uzayların ($\emptyset$ ve $\mathcal{P}$ den farklı alt uzaylar) ve $\forall j \leq i \leq m \leq n-1$ için $U_j \subset U_i$ olacak şekilde içiçe geçmiş farklı alt uzayların $(U_0, U_1, ..., U_m)$ ayrık dizisine $\mathcal{P}$ de bir **flag** denir. Bir flagın rankı onun içerdiği alt uzayların sayısına eşittir. $\mathcal{P}$ de maksimal bir flag n uzunluğunda bir flagdir (Kujken, Maldeghem, Kerre, 1998).

U_i nin boyutu i olsun. $\{i, i+1, ...,m\}$ şeklinde bir flag aşikar olmayan alt uzayların ve $\forall j \leq i < k \leq m \leq n-1$ için $U_j \subset U_k$ olacak şekilde farklı alt uzayların $(U_i, U_{i+1}, ...,U_m)$ ayrık dizisidir, bu flag kısaca $[i,m]$ flag olarak da gösterilebilir.

1.1.3 Projektif Düzlem

Tanım 1.16 Biri noktalardan diğeri doğrulardan oluşan ayrık $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ kümeleri ile $\mathcal{N} \times \mathcal{D}$ üzerinde bir $\circ$ bağıntısından meydana gelen $(\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)$ üçlüsüne bir **geometrik yapı** denir. $\mathcal{N}$ nin elemanları $A,B,C,...,X,Y,Z,...$ gibi büyük harflerle, $\mathcal{D}$ nin elemanları $a, b, c, ..., x, y, z, ...$ gibi küçük harflerle gösterilir.

$N_1, N_2, N_3, ... \in \mathcal{N}$ noktaları için $N_i \circ d$, $i = 1,2,3,...$ olacak şekilde bir $d \in \mathcal{D}$ varsa, yani bu noktaların hepsi aynı doğru üzerinde ise bunlara **doğrudaş noktalar** denir.

$d_1, d_2, d_3, ... \in \mathcal{D}$ doğruları için $N \circ d_i$, $i = 1,2,3,...$ olacak şekilde bir $N \in \mathcal{N}$ varsa, yani bu doğruların hepsi aynı noktadan geçerlerse bunlara **noktadaş doğrular** denir. (Kaya, 2005).

Tanım 1.17 $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ elemanları sırası ile noktalar ve doğrular olan ayrık iki küme (yani $\mathcal{N} \cap \mathcal{D} = \varnothing$ özelliğine sahip iki küme) ve $\circ$ da $\mathcal{N} \times \mathcal{D}$ kümesinde tanımlanan bir üzerinde bulunma bağıntısı (yani $\circ \subset \mathcal{N} \times \mathcal{D}$) olmak üzere aşağıda verilen P1, P2 ve P3 aksiyomlarını gerçekleyen $(\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)$ sistemine bir **projektif düzlem** denir (Kaya, 2005).

P1: Her $M, N \in \mathcal{N}$, $M \neq N$ için $M \circ d$ ve $N \circ d$ olacak şekilde bir tek $d \in \mathcal{D}$ doğrusu vardır. Yani farklı iki nokta bir tek doğru belirtir.

P2: Her $c, d \in \mathcal{D}$, için $N \circ c$ ve $N \circ d$ olacak şekilde en az bir $N \in \mathcal{N}$ noktası vardır. Yani iki doğrunun en az bir ortak noktası vardır.

P3: Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

Teorem 1.18 Bir $\mathbb{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ projektif düzleminde farklı iki doğru tek bir noktada kesişir (Kaya, 2005).

Teorem 1.19 Her sonlu $\mathbb{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ projektif düzlemi için aşağıdaki koşullara uyan bir $n \geq 2$ pozitif tam sayısı vardır (Kaya, 2005). (Bu tam sayıya ilgili projektif düzlemin mertebesi denir.)

(1) $\mathbb{P}$ nin her doğrusu üzerinde tam olarak $n+1$ tane nokta bulunur.

(2) $\mathbb{P}$ nin her noktası tam olarak $n+1$ tane doğru üzerindedir.

(3) $\mathbb{P}$ deki noktaların toplam sayısı n^2+n+1 dir.

(4) $\mathbb{P}$ deki doğruların toplam sayısı n^2+n+1 dir.

Teorem 1.20 Verilen her F cismi için nokta ve doğruları bu cismin elemanlarıyla cebirsel olarak belirlenebilen bir projektif düzlem vardır. Bu projektif düzlemin geometrik yapısı şöyle oluşturulur:

F herhangi bir cisim olsun.

$\mathcal{N} = \{(x_1,x_2,x_3) : x_1,x_2,x_3 \in F, (x_1,x_2,x_3) \neq (0,0,0),\ (x_1,x_2,x_3) \equiv \lambda(x_1,x_2,x_3),$

$\lambda \in F, \lambda \neq 0\}$

$\mathcal{D} = \{[a_1,a_2,a_3] : a_1,a_2,a_3 \in F, [a_1,a_2,a_3] \neq [0,0,0], [a_1,a_2,a_3] \equiv \lambda[a_1,a_2,a_3],$

$\lambda \in F, \lambda \neq 0\}$

$(x_1,x_2,x_3) \circ [a_1,a_2,a_3] \Leftrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$

$(\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)$ sistemi bir projektif düzlemdir. F cismi yardımıyla tanımlanan bu projektif düzlemlere cisim düzlemleri denir ve genel olarak $\mathbb{P}_2F$ ile gösterilir. Özel olarak $F = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ve $\mathbb{Q}$ cisimleri için $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ gerçel projektif düzlem, $\mathbb{P}_2\mathbb{C}$ kompleks projektif düzlem, $\mathbb{P}_2\mathbb{Q}$ rasyonel

projektif düzlem olarak adlandırılır. Bunlardan özellikle $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ düzlemi düzlemler teorisinin en önemli ve iyi bilinen örneğidir (Kaya, 2005).

Yukarıdaki teoremden sonlu cisim düzlemlerine ilişkin şu sonuç hemen verilebilir.

Sonuç 1.21 r pozitif bir tam sayı p de bir asal sayı olmak üzere p^r elemanlı $GF(p^r)$ cismi var olduğu için, bu cismin elemanlarından homogen koordinatlarla belirtilen düzlemde

$$\frac{(p^r)^3-1}{p^r-1} = (p^r)^2 + p^r + 1$$

nokta vardır. Bu da düzlemin mertebesinin p^r olduğunu gösterir. Yani her r pozitif tam sayısı ve her p asal sayısı için mertebesi $n = p^r$ olan sonlu bir projektif düzlem vardır. Buna karşın cisimler yardımıyla elde edilen bir çok projektif düzlem vardır. Üstelik cisimler yardımıyla elde edilmemiş olsalar bile bilinen bütün sonlu projektif düzlemlerin mertebeleri p^r biçiminde yazılabilen pozitif tam sayılardır (Kaya, 2005).

Örnek 1.7 En küçük projektif düzlemde 7 nokta ve 7 doğru vardır.

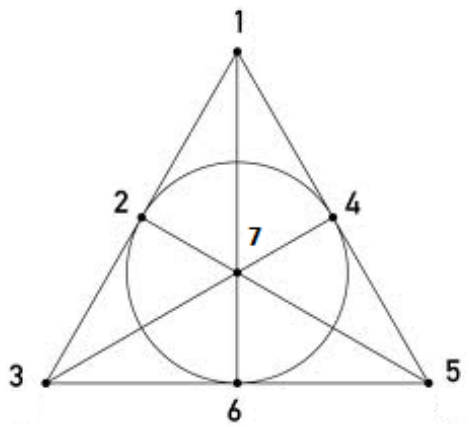
$$\mathcal{N} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$

$$\mathcal{D} = \{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7\}$$

ve

$$d_1 = \{1,2,3\} \quad , \quad d_2 = \{1,4,5\} \quad , \quad d_3 = \{1,6,7\} \quad , \quad d_4 = \{2,4,6\}$$
$$d_5 = \{2,5,7\} \quad , \quad d_6 = \{3,4,7\} \quad , \quad d_7 = \{3,5,6\}$$

olmak üzere $(\mathcal{N},\mathcal{D},\in)$ sistemi bir projektif düzlemdir. Yedi noktalı bu projektif düzleme **Fano Düzlemi** denir (Kaya, 2005).



Şekil 1.1. Fano Düzlemi

P1) 3 ve 5 farklı iki nokta çiftini ele alalım. 3 ve 5 den geçen bir tek d_7 doğrusu vardır. 3 ve 5 noktalarından geçen başka bir doğru bulmak mümkün değildir. Bu durum diğer farklı nokta çiftleri içinde geçerlidir. O halde bu düzlemde farklı iki noktadan tek bir doğru geçer.

P2) d_1 ve d_2 doğrularını ele alalım. Bu iki doğrunun tek bir ortak noktası vardır. Bu da 1 dir. Diğer doğru çiftlerinin de benzer şekilde tek bir ortak noktası vardır. O halde bu düzlemde farklı iki doğrunun bir tek ortak noktası vardır.

P3) $1,2,3$ ve 7 noktaları herhangi üçü doğrudaş olmayan dört noktadır.

Burada $(G,\cdot)$ veya kısaca G her zaman bir grubu belirtecektir ve bu grubun etkisiz elemanınıda e ile göstereceğiz.

Tanım 1.22 λ *fuzzy kümesi* , X kümesi üzerinde tanımlı dönüşümdür.

$$\begin{array}{rl} \lambda: & X \to [0,1] \\ & x \to \lambda(x) \end{array}$$

$\lambda(x)$ sayısı , λ daki x noktasının *üyelik derecesi* şeklinde adlandırılır. X kümesi üzerindeki λ ve μ gibi *iki fuzzy kümelerinin arakesiti*

$$\begin{array}{rl} \lambda \wedge \mu: & X \to [0,1] \\ & x \to \lambda(x) \wedge \mu(x) \end{array}$$

şeklinde tanımlanan $\lambda \wedge \mu$ fuzzy kümesidir. Burada, $\wedge$ minimum operatörünü ifade eder. (Zadeh, 1965)

Tanım 1.23 Bir X kümesi üzerinde μ ve λ fuzzy kümelerini düşünelim. Bu iki fuzzy kümenin $\mu \times \lambda$ **kartezyen çarpımı** aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{array}{rl} \lambda \times \mu: & X \times X \to [0,1] \\ & (x,y) \to \lambda(x) \wedge \mu(y) \end{array}$$

Tanım 1.24 X kümesi için x in bütün fuzzy alt kümelerinin kümesini $\mathcal{F}(X)$ ile gösterelim. X_1, X_2 ve Y herhangi kümeler olsun. f, $X_1 \times X_2$ den Y ye dönüşüm olsun. Genişletme prensibi ifade ederki bu dönüşüm aşağıdakilerden birine genişletilebilinir.

$$\begin{array}{rl} f: & \mathcal{F}(X_1) \times \mathcal{F}(X_2) \to \mathcal{F}(Y) \\ & (\lambda_1, \lambda_2) \to f(\lambda_1, \lambda_2) \end{array}$$

$\lambda_1 \in \mathcal{F}(X_1)$ ve $\lambda_2 \in \mathcal{F}(X_2)$ olmak üzere Y üzerinde $f(\lambda_1, \lambda_2)$ görüntü kümesi

$$y \to \left\{ \begin{array}{ll} \sup_{f(x_1,x_2)=y} \left\{ (\lambda_1 \times \lambda_2)_{(x_1,x_2)} \mid x_i \in X_i,\ i=1,2 \right\}, & \exists \overline{x} \in X_1 \times X_2 : f(x) = y \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\}$$

şeklinde bir fuzzy kümesi tanımlar. (Kuijken, Maldeghem and Kerre,1999)

Örnek 1.8 X kümesi R reel sayılar doğrusu ve μ fuzzy kümesi 1 den çok büyük sayıların fuzzy kümesi olsun. O zaman μ fuzzy kümesinin temsil ettiği değerleri

$$\mu(0)=0;\ \mu(1)=0;\ \mu(5)=0.01;\ \mu(10)=0.2;\ \mu(100)=0.95;\ \mu(500)=1$$

şeklinde alabiliriz. Buradan anlaşılıyorki normalde 1 den çok büyük sayılar öznel bir ifade olmasına rağmen μ fuzzy kümesini kullanarak kesin bir ifade olarak verilebilir.(Zadeh, 1965).

Tanım 1.25 μ bir X kümesinin bir fuzzy kümesi olsun. O zaman $t \in [0,1]$ için

$$\mu_t = \{x \in X : \mu(x) \geq t\}$$

kümesine μ fuzzy kümesinin **seviye alt kümesi** denir. (Zadeh, 1965)

Tanım 1.26 $\mathcal{P}$ $n-$boyutlu bir projektif uzay ve $\mathcal{P}$ üzerinde bir fuzzy kümesi λ olsun. $\mathcal{P}$ nin her p, q, r doğrudaş noktaları için

$$\lambda(p) \geq \lambda(q) \wedge \lambda(r)$$

şartı sağlanıyorsa λ ya $\mathcal{P}$ üzerinde $n-$**boyutlu fuzzy projektif uzay** denir ve $[\lambda, \mathcal{P}]$ ile gösterilir. $\mathcal{P}$ projektif uzayına $[\lambda, \mathcal{P}]$'nin **taban projektif uzayı** denir. (Kuijken, Maldeghem and Kerre,1999)

Tanım 1.27 $\mathcal{P}$ de uzunluğu n olan $(q, U_1, U_2, ..., U_{n-1})$ maksimal flagı ve $[0,1]$ aralığındaki $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$ reel sayıları için $[\lambda, \mathcal{P}]$ $n-$boyutlu fuzzy projektif uzayı

$$\begin{array}{lll}
\lambda: & \mathcal{P} \longrightarrow [0,1] & \\
& p \longrightarrow a_0 \quad , & p = q \ \text{ise} \\
& p \longrightarrow a_1 \quad , & p \in U_1 \setminus \{q\} \ \text{için} \\
& p \longrightarrow a_2 \quad , & p \in U_2 \setminus U_1 \ \text{için} \\
& \ldots & \\
& p \longrightarrow a_{n-1} \quad , & p \in U_{n-1} \setminus U_{n-2} \ \text{için} \\
& p \longrightarrow a_n \quad , & p \in \mathcal{P} \setminus U_{n-1} \ \text{için}
\end{array}$$

şeklindedir. (Kuijken, Maldeghem and Kerre,1999)

Tanım 1.28 Bir $T : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ ikili işlemi, aşağıdaki koşulları sağlıyorsa T işlemine bir **üçgensel norm** veya kısaca t-**norm** denir (Peter, Radko, Endre, 2000).

(T1) Her x, $y \in [0,1]$ için $T(x,y) = T(y,x)$

(T2) Her x, y, $z \in [0,1]$ için $T(x, T(y,z)) = T(T(x,y), z)$

(T3) $y \leq z$ olmak üzere $T(x,y) \leq T(x,z)$

(T4) Her $x \in [0,1]$ için $T(x,1) = x$

Dört temel t-norm vardır. Bunlar minimum, çarpım, Lukasiewicz ve drastic normlardı ve sırasıyla T_M, T_P, T_L ve T_D şeklinde gösterilirler (Peter, Radko, Endre, 2000).

Tanım 1.29 $T_M : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $T_M\ (x,y) = \min\{x,y\}$ şeklinde tanımlanan T_M işlemi bir $t-$normdur. Buna **minimum t-norm** denir. (Peter, Radko, Endre, 2000).

Tanım 1.30 $T_P : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $T_P\ (x,y) = x \cdot y$ şeklinde tanımlanan T_P işlemi bir t-normdur. Buna **product t-norm** denir. (Peter, Radko, Endre, 2000).

Tanım 1.31 $T_L : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $T_L\ (x,y) = \max\{x+y-1,0\}$ şeklinde tanımlanan T_L işlemi bir t-normdur. Buna **Lukasiewicz t-norm** denir. (Peter, Radko, Endre, 2000).

Tanım 1.32 $T_D : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$

$$T_D\ (x,y) = \begin{cases} 0 & , \quad (x,y) \in [0,1) \times [0,1) \\ \min\{x,y\} & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan T_D işlemi bir t-normdur. Buna **drastic product t-norm** denir . (Peter, Radko, Endre, 2000).

BÖLÜM 2

FUZZY VEKTÖR UZAYLARINDAN ELDE EDİLEN FUZZY PROJEKTİF GEOMETRİLER

Matematikte birçok teorinin fuzzy karşılığı vardır. Temel olarak bu bir kümeye ait elemanların üyelik derecesinin $[0,1]$ aralığında değer almasıdır. Fuzzy kavramı ilk olarak Zadeh tarafından kuruldu (Zadeh, 1965) ve bu fuzzy teori pek çok alana uygulanacaktır.

Bu bölümdeki temel kavram ve teoremler Kuijken, Maldeghem and Kerre (L. Kuijkeen, H. Van Maldeghem, E. Kerre, fuzzy projektif geometries from fuzzy vektor spaces, Proceedings of IPMU'98, 1331-1338) den derlenmiştir.

Bu bölümde Fuzzy vektör uzayları üzerinde bir fuzzy geometri oluşturuldu. Fuzzy vektör doğrular, fuzzy vektör düzlemler ve n-boyutlu fuzzy vektör uzayları incelendikten sonra bir fuzzy vektör uzayından elde edilen fuzzy projektif düzlemin fuzzy projektif noktaları, fuzzy projektif doğruları ve bunların özellikleri verilmektedir. Bu bölümdeki temel kavram ve teoremler (L.Kuijken, H. Van Maldeghem, Kerre, 1998) den alınmıştır.

Burada, verilen bir K cismi üzerindeki vektör uzayı V , V nin başlangıç vektörü de $\overline{o}$ ile gösterilmektedir. Minimum operatör $\wedge$ ve Maksimum operatör $\vee$ ile gösterilmektedir. V nin klasik altuzayları L, α ve U ile gösterilmektedir.

Tanım 2.1 $\lambda : V \longrightarrow [0,1]$, V üzerinde bir fuzzy kümesi olsun. λ ya V üzerinde bir fuzzy vektör uzayıdır denir gerek ve yeter şart $\forall \overline{u}, \overline{v} \in V$ ve $\forall a, b \in K$ için $\lambda(a.\overline{u} + b.\overline{v}) \geqslant \lambda(\overline{u}) \wedge \lambda(\overline{v})$ olmasıdır. (Lubczonok, 1990).

Yardımcı Teorem 2.2 K cismi üzerinde V bir vektör uzayı, $\overline{u}, \overline{v} \in V$ ve $\alpha \in K - \{0\}$ olsun.

$\lambda : V \to [0,1]$ fuzzy vektör uzayı ise aşağıdaki özellikler geçerlidir.

(i) $\lambda(\alpha.\overline{u}) = \lambda(\overline{u})$;

(ii) $\lambda(\overline{o}) = \sup_{\overline{u} \in V} \lambda(\overline{u})$

(iii) $\lambda(\overline{u}) \neq \lambda(\overline{v})$ ise $\lambda(\overline{u} + \overline{v}) = \lambda(\overline{u}) \wedge \lambda(\overline{v})$.

Tanım 2.3 V nin bir λ fuzzy altuzayının boyutu onun taban alt uzayının boyutudur ve $d(\lambda)$ ile gösterilir ve onun taban altuzayının boyutudur.(P. Lubczonok)

Örneğin V vektör uzayının 1 boyutlu alt uzayı L olsun. $\lambda : L \longrightarrow [0,1]$ fuzzy altuzayının boyutu $d(\lambda) = 1$ dir.

Tanım 2.4 U, V nin $i-$boyutlu bir altyuzayı olsun ve (λ, U) da bir fuzzy vektör uzayı ise λ ya U üzerinde bir **fuzzy $i-$boyutlu vektör uzayı** denir. $i = 1$ iken U bir **vektör doğrudur** ve (λ, U), U üzerinde bir fuzzy vektör doğru olarak adlandırılır. $i = 2$ ise U bir düzlemdir ve (λ, U), U üzerinde bir fuzzy vektör düzlemi olarak adlandırılır. $i = n-1$ ise (λ, U) U üzerinde bir **fuzzy vektör hiperdüzlem** olarak adlandırılır.

2.1 Fuzzy Vektör Doğruları ve Düzlemleri

V, bir K cismi üzerinde n-boyutlu vektör uzayı olsun. $n \geqslant 2$ olmak üzere L, V nin bir vektör doğrusu olsun. Böylece L, sıfırdan farklı $\overline{u}$ vektörü ile tanımlanır. Bazen de bu L doğrusu $\overline{ou}$ ile gösterilir. L üzerindeki bir λ fuzzy kümesi verilsin.

Teorem 2.5 $\lambda : L \longrightarrow [0,1]$, L üzerinde bir fuzzy vektör doğrusu ise $\forall \overline{u}, \overline{v} \in L - \{0\}$, $\lambda(\overline{u}) = \lambda(\overline{v})$ ve $\forall \overline{u} \in L$,*i*çin $\lambda\left(\overline{0}\right) \geqslant \lambda(\overline{u})$ dür.

İspat. Yardımcı teorem 2.2 (i) ve (ii) den kolaylıkla elde edilir. □

$n \geqslant 3$ olmak üzere, $n-$boyutlu V vektör uzayının bir vektör düzlemi α olsun. Bu takdirde α, $\overline{u}$ ve $\overline{v}$ gibi iki lineer bağımsız vektör tarafından tek türlü olarak bellidir. Bazen de bu α düzlemi örneği $\overline{ouv}$ ile gösterilir.

Aşağıdaki teoremde α üzerindeki λ fuzzy kümesini ele alıyoruz.

Teorem 2.6 $\lambda : \alpha \longrightarrow [0,1]$, α üzerinde bir fuzzy vektör düzlemi

$$\begin{array}{rcccl} \lambda & : & \alpha & \longrightarrow & [0,1] \\ & & \overline{0} & \longrightarrow & \alpha_0 \\ & & \overline{u} & \longrightarrow & \alpha_1, \quad \overline{u} \in L \setminus \{0\} \\ & & \overline{u} & \longrightarrow & \alpha_{2,} \quad \overline{u} \in \alpha \setminus L \end{array}$$

olup, $\alpha_0 \geqslant \alpha_1 \geqslant \alpha_2 \in [0,1]$ ve L, α vektör düzleminin bir vektör doğrusudur.

İspat. $\lambda(\overline{0}) = \alpha_0$ olsun. Yardımcı teorem 2.2 (ii) den $\forall\ \overline{u} \in V$ için $\alpha_0 = \lambda(\overline{0}) \geqslant \lambda(\overline{u})$, olduğu açıktır. Şimdi α düzleminde $\overline{u}$ ve $\overline{v}$ iki taban vektörünü seçelim. O halde $a, b \in K$, olmak üzere $\overline{w} \in \alpha$ vektörü, $\overline{w} = a.\overline{u} + b.\overline{v}$ şeklinde bir lineer kombinasyon olarak yazılabilir. Bir fuzzy vektör uzayı tanımından

$$\lambda(\overline{w}) = \lambda(a.\overline{u} + b.\overline{v}) \geqslant \lambda(\overline{u}) \wedge \lambda(\overline{v})$$

dır. $\overline{u}' = a.\overline{u}$ ve $\overline{v}' = b.\overline{v}$ denilirse, bu takdirde

$$\lambda(\overline{w}) = \lambda(a.\overline{u} + b.\overline{v}) = \lambda\left(\overline{u'} + \overline{v'}\right)$$

İspat. elde edilir. Burada iki durum söz konusudur:

1.DURUM : $\lambda\left(\overline{u'}\right) \neq \lambda\left(\overline{v'}\right)$.

$a, b \in K - \{0\}$iken yardımcı teorem 2.2 (iii) den

$$\lambda(\overline{w}) = \lambda\left(\overline{u}'\right) \wedge \lambda\left(\overline{v}'\right) = \lambda(a.\overline{u}) \wedge \lambda(b.\overline{v}) = \lambda(\overline{u}) \wedge \lambda(\overline{v})$$

olur. Bu ifade ya $\lambda(\overline{u})$ ya da $\lambda(\overline{v})$ demektir ki bu da u demek oluyor ki $a, b \neq 0$ olmak üzere $\overline{w} = a.\overline{u} + b.\overline{v}$ şeklinde yazılan $\forall \overline{w} \in V$ için, $\overline{w}, \overline{u}$ ve $\overline{v}$ nin üyelik derecesi en küçük olan ile aynı üyelik derecesine sahip olacağı anlamına gelir. Eğer $\lambda(\overline{u}) > \lambda(\overline{v})$ ise $\overline{ou}$ vektör doğrusu üzerindeki vektörler dışında α üzerindeki tüm vektörler $\lambda(\overline{v})$ üyelik derecesine sahip olacaktır. ($\lambda(\overline{v}) = \alpha_1$) Bu vektörler için $\exists a \in K \setminus \{0\}$ için $\lambda(\overline{w}) = \lambda(a.\overline{u}) = \lambda(\overline{u}) = a_1$ dir. Bu durumda $L = \overline{ou}$ dır. Benzer şekilde $\lambda(\overline{v}) > \lambda(\overline{u})$ ise $L = \overline{ov}$ dir.

2.DURUM: $\lambda(\overline{u'}) = \lambda\left(\overline{v'}\right) = \lambda(\overline{u}) = \lambda(\overline{v})$ ise

a) $\lambda(\overline{w}) > \lambda\left(\overline{u'}\right) = \lambda\left(\overline{v'}\right)$ olacak şekilde α da $\overline{w} \neq \overline{0}$ vektörleri yoksa α üzerindeki tüm vektörler aynı $\lambda-$üyelik derecelerine sahip olacaktır ve teoremin doğruluğu aşikardır. Herhangi bir vektör doğrusu olarak L vektör doğrusu gibi düşünülebilir ve $\alpha_0 = \alpha_1 = \lambda(\overline{u}')$ dür.

b) $\lambda(\overline{w}) > \lambda(\overline{u}) = \lambda(\overline{v})$ olacak şekilde $\overline{w} \neq \overline{0}$ vektörü düşünülürse, bir vektör olsun öyleki (özellikle $\overline{w}$ ne $\overline{ou}$ ne de $\overline{ov}$ üzerindedir) α yı geren vektör kümesi olarak $\{\overline{u}, \overline{w}\}$ kümesi alınabilir ki bu durumda 1. Durum söz konusudur. □ □

2.2 Fuzzy Vektör Uzaylar

Yardımcı Teorem 2.7 Tabanı $\{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, ..., \overline{x_n}\}$ olan, K cismi üzerinde n-boyutlu V vektör uzayı verilsin. λ, V üzerinde bir fuzzy vektör uzayı olmak üzere

$$\forall i, j, i \neq j \quad \text{için } \lambda(\overline{x}_i) \neq \lambda\left(\overline{x}_j\right) \text{ ve } \overline{x} \neq \overline{0},\ \overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.\overline{x_i} \text{ ise } \lambda(\overline{x}) = \min_{i=1}^{n} \lambda(\overline{x}_i)$$

dir.

İspat. n üzerinde tümevarım ile yapılmaktadır.

$n = 1$ için yardımcı teorem 2.2 (i) ye indirgenir.

$n = k$ iken ifade doğru olsun. Şimdi sıfırdan farklı bir vektör için $a_{k+1} \neq 0$ iken

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i.\overline{x_i}$$

alınırsa;

$$\lambda(\overline{x}) = \lambda\left(\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i.\overline{x_i}\right) = \lambda(a_{k+1}.\overline{x}_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i.\overline{x_i}) = \lambda\left(a_{k+1}.\overline{x}_{k+1} + \overline{x}'\right)$$

$$\overline{x}' = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i.\overline{x_i}$$

dır.

(a) $\forall i < k+1$ için yardımcı teorem 2.2(iii) den

$$\lambda(a_{k+1}.\overline{x}_{k+1}) = \lambda(\overline{x}_{k+1}) \neq \lambda(\overline{x}_i)$$

olur.

(b) Hipotezden

$$\lambda\left(\overline{x}'\right) = \lambda\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i.\overline{x_i}\right) = \min_{i=1}^{k} \lambda(\overline{x}_i)$$

ifadeleri vardır. $\forall_i < k$, $\lambda(\overline{x}_{k+1}) \neq \lambda(\overline{x}_i)$ dir. Dolayısıyla teorem 2.2(iii) den

$$\lambda\left(\overline{x}'\right) \wedge \lambda(a_{k+1}.\overline{x}_{k+1})$$

olur. (a) ve (b) nin varlığı altında

$$\min_{i=1}^{k} \lambda(\bar{x}_i) \wedge \lambda(\bar{x}_{k+1}) = \min_{i=1}^{k+1} \lambda(\bar{x}_i)$$

olur.

Tanım 2.8 V , $n-$boyutlu bir vektör uzayı olsun. Aşikar olmayan ve her $j < i < n-1$, $U_j \subset U_i$ olacak şekilde farklı altuzaylarının $(U_0, U_1, ..., U_m)$ dizisine V de bir flag denir. Bir flagın rankı onu içerdiği altuzayların sayısı olup, V de bir maximal flag ise uzunluğu n olan bir flagdır.

□

Teorem 2.9 $\lambda : V \to [0,1]$, V de n boyutlu bir fuzzy vektör uzayı olsun.

$\alpha_0 \geqslant \alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant ..... \geqslant \alpha_{n-1} \geqslant \alpha_n$, $a_i \in [0,1]$ olmak üzere

$$\begin{array}{rcccl} \lambda & : & V & \to & [0,1] \\ & & \overline{0} & \to & a_0 \qquad \overline{u} = \overline{0} = U_0 \\ & & \overline{u} & \to & a_1, \quad \overline{u} \in U_1 \setminus \{\overline{0}\} \\ & & \overline{u} & \to & a_2, \quad \overline{u} \in U_2 \setminus U_1 \\ & & \overline{u} & \to & a_3, \quad \overline{u} \in U_3 \setminus U_2 \\ & & & \vdots & \\ & & \overline{u} & \to & \alpha_{n-1}, \quad \overline{u} \in U_n \setminus U_{\,n-1} \\ & & \overline{u} & \to & a_n, \quad \overline{u} \in V \setminus U_n \end{array}$$

ve $d(U_i) = i$ olacak şekilde (bir tek olmak zorunda olmayan) uzunluğu n olan $(U_0, U_1, U_2 ....., U_{n-1}, V)$ maximal bir flag vardır.

İspat. $\lambda(\overline{0}) = a_0$ ise yardımcı teorem 2.2(iii) den $\forall x \in V$, $a_0 \geqslant \lambda(\bar{x})$ dir. V nin mümkün tüm tabanları içinden, üyelik dereceleri farklı en çok sayıda vektörlerden oluşan tabanlar seçilsin ve bu tabanların kümesine M denilsin. M deki tüm tabanlar $i$çinde $i \neq j$, $\lambda(\bar{x}_i) \neq \lambda(\bar{x}_j)$ özelliğindeki bir $B = \{\bar{x}_2, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n\}$ tabanı seçilsin ve bu tabanın vektörleri aşağıdaki özelliği sağlasın;

$$\lambda(\bar{x}_1) > \lambda(\bar{x}_2) > ... > \lambda(\bar{x}_n) \tag{1}$$

şimdi keyfi $\bar{x} \in V$ alınırsa;

- $\lambda(\overrightarrow{x}) = \lambda\left(\overrightarrow{0}\right) \Rightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$

- $\lambda(\overrightarrow{x}) = \lambda(\overrightarrow{x_1}) \Rightarrow \overrightarrow{x} \in \overrightarrow{0x_1} \setminus \overrightarrow{0}$ dir. Bu yardımcı teorem 2.2(ii) ve (1) den söylenebilir.

$\vdots$

• $\lambda(\overrightarrow{x}) = \lambda(\overrightarrow{x_1}) \Rightarrow \overrightarrow{x} \in \overrightarrow{0x_1...x_i} \setminus \overrightarrow{0x_1...x_{i-1}}$ dir.

Eğer $U_0 = \overrightarrow{0}$, $\forall_i \neq 0$, $U_i = \overrightarrow{0x_1..x_i}$ ve $a_i = \lambda(\overrightarrow{x_i})$ ise teorem ispatlanmış olur.

Şimdi M de tüm $\mu(\overrightarrow{x_i})$ farklı olacak şekilde bir taban bulunmadığını varsayalım. Bu durumda taban vektör uzayın boyutu üzerinden tümevarımla ispat verilirse; teorem 2.2(ii) ve teorem 2.6 den, $n = 1$ (taban $\{\overline{x_1}\}$) ve $n = 2$ (taban $\{\overline{x_1},\ \overline{x_2}\}$) için bu durumu ispatlar.

$\left(\overline{0}, \overline{0x_1}\right)$ ve $\left(\overline{0}, \overline{0x_1,\ 0x_1x_2}\right)$ maximal flaglar, (α_0, α_1) ve $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, $\left(\lambda\left(\overline{0}\right), \lambda(\overline{x}_1)\right)$ ve $\left(\lambda\left(\overline{0}\right), \lambda(\overline{x}_1), \lambda(x_2)\right)$ tarafından verilen diziler olur. Buradan da görülür ki taban maksimal flag i ve α_i lerin dizisini tanımlar.

Şimdi $n = 1$ ve $n = 2$ deki durumun k dan $n-1$ e kadar olan tüm boyutlar için sağlanacağı kabul edilip. n boyutlu durum için geçerli olacağı gösterilecektir. Yani $B = \{\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}\}$ tabanı için $U_i = \overline{0x_1x_2.....x_i}$ ve $\alpha_0 \geqslant \alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant ..... \geqslant \alpha_{n-1} \geqslant \alpha_n$, $\alpha_i = \lambda(x_i)$ olduğu araştırılacak ve $U_0 = \overline{0}$, $\lambda\left(\overline{0}\right) = \alpha_0$ olması ile ispat tamamlanacaktır. M nin her bir tabanı ile belli bir sayı arasında ilişki kurulacaktır. Bunu yapmak için

$$\lambda(x_n) \leqslant \lambda(\overline{x_{n-1}}) \leqslant ..... \leqslant \lambda(\overline{x_1}) \tag{2}$$

olacak şekilde her bir tabandaki $\{\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}\}$ taban vektörleri düzenlenir. M nin seçiminden dolayı bu tabandaki vektörlerin herbiri için eşitliklerin sayısı aynı olacaktır.

Şimdi her bir tabanın sayısının nasıl tanımlanacağını açıklayalım. İlk olarak taban vektörleri (2) deki şekilde monoton artan bir dizideki gibi düzenlenir. Her bir eşitsizlik için "/" koyarak başlanır. Seçilen tüm tabanlar için "/" sayısı aynı olacaktır. İlk "/" dan önce, ilk eşitsizlikten önce ortaya çıkan eşitliklerin sayısı yazılır, iki ardışık "/" arasına ise iki ilişkili eşitsizlik arasında ortaya çıkan eşitliklerin sayısı yazılır. Son olarak ise son "/" dan sonra, son eşitsizlikten sonra ortaya çıkan, eşitliklerin sayısı yazılır.

$n = 8$ için örnek verilirse;

$$\lambda(\overline{x}_8) = \lambda(\overline{x}_7) = \lambda(\overline{x}_6) < \lambda(\overline{x}_5) < \lambda(\overline{x}_4) = \lambda(\overline{x}_3) < \lambda(\overline{x}_2) = \lambda(\overline{x}_1) < \lambda\left(\overline{0}\right)$$

olacak şekilde bir $\{x_1, x_2, ..., x_8\}$ tabanı $2/0/1/1/0$ dizisini verir.

M nin her bir tabanı $i$çin bir dizi elde ettikten sonra, bu diziler sırasıyla düzenlenip ve bu düzenleme ile ilişkili olarak en küçük B tabanı olduğu gösterilecektir.

Varsayalım ki B nin dizisi sıfır ile başlasın. ($\lambda(\overline{x}_n) < \lambda(\overline{x}_{n-1})$) keyfi $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} b_i.\overline{x}_i$ olacak şekilde $V \setminus \overline{ox_1x_2.....x_{n-1}}$ alınsın. Dolayısıyla b_n sıfırdan farklı olmak zorundadır. Böylece $\lambda(\overline{x}) = \lambda\left(b_n.\overline{x}_n + \sum_{i=1}^{n-1}\right)$ dır. Tümevarım hipotezinden dolayı $i < n$, $\lambda\left(\sum_{i=1}^{n-1} b_i.\overline{x}_i\right) = \lambda(\overline{x}_i)$ dir. $\forall i < n$, $i$çin $\lambda(\overline{x_i}) \geqslant \lambda(\overline{x}_n)$ olduğundan yardımcı teorem 2.2 (iii) den $\lambda(\overline{x}) = \lambda(\overline{x}_n)$

$\overline{0x_1.....x_n}$ vektörü, $\{\overline{x}_1,.....,\overline{x}_{n-1}\}$ tabanı tarafından tanımlanan $(n-1)$ boyutta, tümevarım hipotezinden elde edilen maksimal flag ile toplanırsa $n+1$ uzunluklu bir maksimal flag elde edilir ve $\lambda(\overline{x_n}) = a_n$ alarak teorem ispatlanır. Eğer dizi sıfırdan farklı bir k sayısı ile başlarsa, bunun anlamı

$$\lambda(\overline{x}_n) = \lambda(\overline{x}_{n-1}) = ... = \lambda(\overline{x}_{n-k})$$

dır.

$V \setminus \overline{0x_1x_{2.....}x_{n-1}}$ de keyfi bir $\overline{x}$ vektörü alınırsa iki durum vardır. $\overline{x} = b_n.x_n$, $b_n \neq 0$ ise $\lambda(\overline{x}) = \lambda(\overline{x_n})$ olduğu açıktır. Eğer bir $i \neq n, i$çin en azından bir $b_i \neq 0$ ve $b_n \neq 0$ ise iki durum vardır;

1.DURUM: $\forall\ i \in \{n-k,.....,n-1\}$ için $b_i = 0$ ise $\overline{x} \in \overline{0x_1x_2.....x_{n-k-1}x_n}$ dir. Böylece $\lambda(\overline{x}) = \lambda\left(b_n.\overline{x_n} + \sum_{i=1}^{n-k-1} b_i.\overline{x_i}\right)$ dır. Tümevarım hipotezinden belli bir $j < n-k$ için, $\lambda\left(\sum_{i:1}^{n-k-1} b_i.\overline{x}_i\right) = \lambda\left(\overline{x_j}\right) < \lambda(\overline{x}_n)$ dir, buradan yardımcı teorem 2.2 uygulanabilir anlamı çıkar ve $\lambda(\overline{x}) = \lambda(\overline{x}_n)$ bulunur.

2.DURUM: $b_i \neq 0$ olacak şekilde en az bir $i \in \{n-k, n-k-1, ..., n-1\}$ tamsayısının bulunduğunu varsayalım. Tümevarım hipotezinden $\overline{0x_1.....x_{n-1}}$ sırasıyla düzenlenmiş en küçük taban $\{\overline{x}_1, ...\overline{x}_{n-1}\}$ dır.

$$\lambda\left(\sum_{i:1}^{n-1} b_i.\overline{x}_i\right) = \lambda(\overline{x}_{n-1}) = \lambda(\overline{x_n})$$

dır. Burada yardımcı teorem 2.2 (iii) kullanılamaz fakat tanım 2.1 den $\lambda(\overline{x}) \geqslant \lambda(\overline{x_n})$ sonucu elde edilir. Varsayalım ki $V \setminus \overline{0x_{1.....}x_{n-1}}$ de $\lambda(\overline{v}) \succ \lambda(\overline{x}_n)$ olacak şekilde bir $\overline{v} \in V$ olsun. Bu takdirde bazı $i \leqslant n-k-1$ için, M nin tanımından $\lambda(\overline{v}) \geqslant \lambda(\overline{x_i})$ dir. Başka bir B' tabanından elde edilen $\overline{v}$ vektörü ile $\overline{x}_n$ vektörü değiştirilsin. Ancak $B^{'}$ tabanı sırasıyla düzenlenen B den daha küçük bir taban olacaktır. Çünkü B

$$n_1/n_2/...../n_i/..../n_e$$

dizisi ile karakterize edilseydi, B'

$$n_1 - 1/n_2/...../n_i + 1/...../n_e$$

ile karakterize edilecektir. Bu ise B nin seçimi ile çelişir. Dolayısıyla $\forall v \in V \setminus \overline{0x_{1.....}x_{n-1}}$ için $\lambda(\overline{v}) = \lambda(\overline{x}_n)$ dir. Bu iki durumda da $\forall \overline{x} \in V \setminus \overline{0x_1.....x_{n-1}}$ için $\lambda(\overline{x}) = \lambda(\overline{x_n})$ bulundu. Dolayısıyla n uzunluklu maksimal flag $\overline{0x_1x_{2.....}x_{n-1}x_n} = V$ ekleyerek ve $a_n = \lambda(\overline{x_n})$ alarak teorem ispatlanır. □

Sonuç 2.10 $\lambda : V \to [0,1]$, V üzerinde n boyutlu bir fuzzy vektör uzayı, $a_0 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant ..... \geqslant a_{m-1} \geqslant a_m$, $a_i \in [0,1]$ olmak üzere ve

$$\begin{array}{rcccl}
\lambda & : & V & \to & [0,1] & \\
 & & \overline{0} & \to & a_0 & \overline{u} = \overline{0} = U_0 \\
 & & \overline{u} & \to & a_1, & \overline{u} \in U_1 \setminus \{\overline{0}\} \\
 & & \overline{u} & \to & a_2, & \overline{u} \in U_2 \setminus U_1 \\
 & & \overline{u} & \to & a_3, & \overline{u} \in U_3 \setminus U_2 \\
 & & & \vdots & & \\
 & & \overline{u} & \to & \alpha_{m-1}, & \overline{u} \in U_m \setminus U_{\ m-1} \\
 & & \overline{u} & \to & a_m, & \overline{u} \in V \setminus U_m
\end{array}$$

olacak şekilde $m \leqslant n$ için $(U_0, U_1, ...U_m)$ tek bir flag bulunur.

İspat. Bir önceki teoremde, U_i altuzayları tek olmadıklarını görmek mümkündü, örneğin $\lambda(\overline{x_i}) = \lambda(\overline{x_{i+1}})$ ise $j < i$ için tüm U_j leri içeren U_{i+1} de $i-$boyutlu her U_i altuzayı maxsimal flag içinde $i-$boyutlu her altuzay için seçilebilir. Tüm belirsiz altuzaylar çıkarılırsa, tek olan bir F flag elde edilir ki burada teoremin düzenlediği başka flagler yoktur. Bu F flag ı genellikle maksimal olmayacaktır. □

2.3 Fuzzy Projektif Noktalar ve Doğrular

Bir V vektör uzayına karşılık gelen bir projektif uzay $PG(V) = (D(V), I)$ ile gösterilir. Burada $(D(V), I)$ projektif uzayı V nin bir boyutlu alt uzaylarının bir kolleksiyonu, "I " da altuzaylar üzerindeki üzerinde bulunma bağıntısıdır. U ve U' birbirlerinin üzerinde iseler $U \subseteq U'$ ya da $U' \subseteq U$ dur ve $U\ I\ U'$ ile gösterilir. Bir U uzayının boyutu olan $boy(U)$, U nun taban vektörlerinin sayısına eşittir. U nun projektif boyutu olan $boy(U)$, U nun taban vektörlerinin sayısına eşittir. U nun projektif boyutu olan $pd(U)$ ise $pd(U) = boy(U) - 1$ şeklinde tanımlanır. Projektif noktalar, doğrular, düzlemler gibi yapıların tanımı bu projektif

boyuta dayanır 0 projektif boyuta sahip olan altuzaylara projektif nokta, $1-$projektif boyuta sahip olan altuzaylara projektif doğru denir.

Klasik durumda bir $n-$boyutlu projektif uzay, $(n+1)-$boyutlu vektör üzayından elde edilir.Bundan sonra bir fuzzy projektif uzayın da fuzzy vektör uzayından nasıl elde edileceği üzerinde durulacaktır.

Şimdi fuzzy projektif uzayı taımlamak için gerekli bazı kavramları verelim.

2.3.1 Fuzzy Projektif Noktalar

Bir projektif nokta sadece bir vektör doğrusudur. V nin bir vektör doğrusu L olmak üzere (λ, L) fuzzy vektör doğrusundan başlayarak bir fuzzy projektif nokta inşa edilecektir.Teorem 2.2 den biliniyor ki λ aşağıdaki formdadır:

$$\begin{array}{rcccl} \lambda & : & L & \to & [0,1] \\ & & \overline{0} & \to & a_0 \\ & & \overline{u} & \to & a_{1,} \quad \overline{u} \in L \setminus \left\{\overline{0}\right\}, a_0 \geqslant a_1 \in [0,1] \end{array}$$

L vektör doğrusu üzerindeki belli bir projektif nokta p ile gösterilsin. Böylece $p \in PG(V)$ dir. p üzerinde λ' fuzzy projektif noktası oluşturmak için boyutu bir eksiltmek zorunda olduğumuzdan, L vektör doğrusuna karşılık gelen $\overline{0}$ vektörünün değeri seçilemez. Dolayısıyla p üzerinde bir λ' fuzzy projektif nokta aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{array}{rcccl} \lambda' & : & \{p\} & \to & [0,1] \\ & & p & \to & a_1 \end{array}$$

Burada fuzzy vektör uzay gösteriminden farklı olması için köşeli parantez kullanarak fuzzy projektif nokta $\left[\lambda', p\right]$ ile gösterilmektedir.

2.3.2 Fuzzy Projektif Doğrular

Fuzzy projektif doğrular içinde benzer şeyler yapılmaktadır. α, V nin bir vektör düzlemi olsun. Teorem 2.3 den (λ, α) nın aşağıdaki gibi bir fuzzy vektör düzlemi olduğu bilinmektedir.

$$\begin{array}{rcccl} \lambda & : & \alpha & \to & [0,1] \\ & & \overline{0} & \to & a_0 \\ & & \overline{u} & \to & a_1, \quad \overline{u} \in L \\ & & \overline{u} & \to & a_2, \quad \overline{u} \in \alpha \setminus L \end{array}$$

L, α nın vektör doğrusudur ve p, (1) de $L \subseteq \alpha$ vektör doğrusu ile ilgili projektif nokta olsun. Bu durumda M üzerinde α' fuzzy projektif doğrusu aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\begin{array}{rcccl} \alpha' & : & M & \to & [0,1] \\ & & p & \to & a_1 \\ & & q & \to & a_2, \quad q \in M \setminus \{p\}, a_1 \geqslant a_2 \in [0,1] \end{array} \tag{1}$$

Bu fuzzy projektif doğru $[\alpha', M]$ olarak gösterilmektedir. Bir fuzzy projektif doğru, bir fuzzy vektör doğrusu gibi görünmektedir. Fark, karşılık gelen vektör uzayının en büyük üyelik derecesine sahip olan $\overline{o}$ orjin vektörünü içermemesidir. Fuzzy projektif doğru üzerinde herhangi bir nokta eşleşen vektör düzleminde özel bir doğrudur.

2.4 Fuzzy Projektif Uzaylar

n boyutlu λ' fuzzy projektif uzayının genel tanımını verilebilir. Bir $(n+1)$ boyutlu (λ, V) vektör uzayı: $j < i$ için U_j alt uzayları içeren V nin $i-$boyutlu altuzayı U_i ve $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant$ ..... $\geqslant a_{n+1}$, $a_i \in [0,1]$ olmak üzere;

$$\begin{array}{rcccl} \lambda & : & V & \to & [0,1] \\ & & \overline{0} & \to & a_0 \\ & & \overline{u} & \to & a_1, \quad \overline{u} \in U_1 \setminus \{\overline{0}\} \\ & & \overline{u} & \to & a_2, \quad \overline{u} \in U_2 \setminus U_1 \\ & & \overline{u} & \to & a_3, \quad \overline{u} \in U_3 \setminus U_2 \\ & & & \vdots & \\ & & \overline{u} & \to & a_n, \quad \overline{u} \in U_n \setminus U_{n-1} \\ & & \overline{u} & \to & a_{n+1}, \quad \overline{u} \in V \setminus U_n \end{array} \tag{2}$$

şeklindedir. $(n+1)-$boyutlu V vektör uzayına karşılık gelen $n-$boyutlu projektif uzay P'_n olsun. Bu takdirde P'_n üzerinde n-boyutlu fuzzy projektif uzay λ' aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\begin{array}{rcccl} \lambda' & : & V' & \to & [0,1] \\ & & q & \to & a_1, \\ & & p & \to & a_2, \quad p \in U'_1 \setminus \{q\} \\ & & p & \to & a_3, \quad p \in U'_2 \setminus U'_1 \\ & & & \vdots & \\ & & p & \to & a_n, \quad p \in U'_{n-1} \setminus U'_{n-2} \\ & & p & \to & a_{n+1}, \quad p \in V' \setminus U'_{n-1} \end{array}$$

Burada q (2)de U_1 vektör doğrusu ile eşleşen projektif nokta ve U'_i de $i-$boyutlu projektif uzaydır. U_{i+1} vektör uzayına eşleşen $(q, U_1, ..., U_{n-1}, V')$ bir maximal flagtır ve $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant ..... \geqslant a_{n+1}$, $a_i \in [0,1]$.

2.5 Fuzzy Projektif Uzayda Üzerinde Bulunma Bağıntısı

Şimdi bir $[v,V]$ fuzzy projektif alt yapıları analiz edilecek ve bunun için her bir noktanın tek bir üyelik derecesine sahip olacağı kabul edilecektir. Zadeh' in X in bazı μ ve λ fuzzy altkümelerinin $\subseteq$ fuzzy kapsama tanımına göre;

μ fuzzy altkümesi, λ fuzzy altkümesini kapsar $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X$, $\mu(x) \leqslant \lambda(x)$ olduğu biliniyor. $[\mu, U]$ ve $[\lambda, U']$ fuzzy projektif uzayları için bu tanım:

$$\forall \in p \in U \text{ için } [\mu, U] \subseteq \left[\lambda, U'\right] \Leftrightarrow \forall p \in PG(V) \text{ için } \mu(p) = \lambda(p)$$

dir.

Tanım 2.11 U ve U', V nin iki altuzayı ve U, U' üzerinde olsun. Eğer $\forall \bar{x} \in U \cap U'$için $\mu(\bar{x}) = \lambda(\bar{x})$ ise $[\mu, U]$ fuzzy alt uzayı $[\lambda, U']$ fuzzy alt uzayı üzerindedir.

2.6 Fuzzy Projektif Düzlemler

3-boyutlu vektör uzaylarına kendimizi kısıtlarsak, $PG(V)$, noktalar ve doğrulardan oluşan yani 0 ve 1-boyutlu projektif altuzayları içeren bir projektif düzlemdir. Burada bir doğru üzerindeki nokta sayısı s ile, bir noktadan geçen doğru sayısını ise t ile gösterilecektir. Bunlar

bir projektif düzlemde eşittir. P bir fuzzy projektif düzlem olsun. O halde

$$\begin{array}{rcccl} P & : & PG(V) & \to & [0,1] \\ & & q & \to & a_1, \\ & & p & \to & a_2, \quad p \in L \setminus \{q\} \\ & & p & \to & a_3, \quad p \in PG(V) \setminus L \end{array}$$

L, q yu içeren $PG(V)$ nin bir projektif doğrusudur. $a_{1,}a_2$ ve a_3 birbirinden farklı ise P de farklı türden fuzzy projektif doğruları tartışılabilir. $i \in \{1,.....,t-1\}$ ve $j \in \{1,.....,s-1\}$ olmak üzere i ve j tamsayıları kullanılırsa

1) Taban doğrusu L olan fuzzy doğru λ_1 tektir. λ_1 aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$\begin{array}{rcccl} \lambda_1 & : & L & \to & [0,1] \\ & & q & \to & a_1, \\ & & p & \to & a_2, \quad p \in L \setminus \{q\} \end{array}$$

2) Taban doğrusu olarak M_i , $P-$üyelik derecesi a_1 olan noktada L ile kesişen doğrular ve bir taban doğrusu olarak M_i doğrularından birine sahip olan M_{2i} fuzzy doğruları

$$\begin{array}{rcccl} \lambda_{2i} & : & M_i & \to & [0,1] \\ & & q & \to & a_1, \\ & & p & \to & a_3, \quad p \in M_i \setminus \{q\} \end{array}$$

3) N_{ij}, $\mathcal{P}-$üyelik derecesi a_2 olan q_j noktalarında sırasıyla L ile kesişen doğrular ve bir taban doğrusu olarak N_{ij} doğrularından birine sahip olan λ_{3ij} fuzzy doğruları aşağıdaki formdadır.

$$\begin{array}{rcccl} \lambda_{3ij} & : & N_{ij} & \to & [0,1] \\ & & q_j & \to & a_2, \\ & & p & \to & a_3, \quad p \in N_{ij} \setminus \{q_j\} \end{array}$$

Teorem 2.12 $PG(V)$ nin nokta ve doğruları aşağıdaki ifadeleri sağlar:

(i) Farklı her iki noktadan tek bir doğru geçer.

(ii) Farklı her iki doğrunun tek bir ortak noktası vardır.

(iii) $PG(V)$ herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta içerir.

Benzer durumların fuzzy projektif düzlem için de geçerli olup olmayacağı araştırılacaktır. P fuzzy projektif düzlemindeki sonuçlara bakılırsa, aynı teoremin sağlandığını söyleme eğiliminde olunur. Çünkü projektif uzay tabanı bir projektif düzlemdir.

λ_1, λ_{2i} ve λ_{3ij} gibi farklı türden fuzzy projektif doğrularını ve farklı a_1, a_2, a_3 üyelik derecelerine sahip farklı türden üç noktayı düşünerek çok karışık olan gerçek aşağıda gösterilecektir.

(ii) yi ele alarak başlanabilir. Her iki fuzzy projektif doğrunun bir tek ortak fuzzy noktası olduğu açıktır. Fuzzy projektif doğruların $PG(V)$ deki herhangi iki taban doğrusu $PG(V)$ nin tam olarak bir noktasında kesişecektir. Her fuzzy projektif doğrusu aslında noktalarına değerler atanmış $PG(V)$ nin bir doğrusu olduğundan, arakesit noktasına bir değer atanacaktır. Bu noktanın üyelik derecesi iki doğruda da aynı olacaktır, çünkü P nin her noktası tek bir üyelik derecesine sahiptir.

Şimdi (i) incelensin. Burada iki durum söz konusudur. P nin keyfi $[\mu, p]$ ve $[\lambda, q]$ iki fuzzy projektif noktası alınsın. $PG(V)$ nin p ve q noktaları $PG(V)$ nin tek bir L doğrusu üzerinde olacaktır. Fakat fuzzy projektif doğrunun bu doğru olacağı kesin değildir. Çünkü iki fuzzy projektif noktayı bilerek tüm P fuzzy projektif düzlem belirlenemez.

DURUM 1 : $\mu(p) \neq \lambda(q)$ olsun. Bu durumda tek bir fuzzy doğrunun bu iki noktadan geçeceği biliniyor. Çünkü $\mu(p) = a$ ve $\lambda(q) = b$ $(a, b \in \{a_1, a_2, a_3\})$ reel sayıları karşılaştırabilir. $a \leqslant b$ ise L nin üzerindeki diğer tüm noktalar aynı a üyelik derecesine, $b \leqslant a$ ise b üyelik derecesine sahip olacaktır. Bu sadece $[\mu', L]$ doğrusu için mümkündür.

DURUM 2 : $\mu(p) = \lambda(q)$, $a \in \{a_2, a_3\}$ için $\mu(p) = \lambda(q) = a$ olsun. $a = a_2$ ise tek bir durum vardır. Çünkü üyelik dereceleri ile iki noktayı içeren tek bir $[\lambda_1, L]$ fuzzy doğru vardır. Fakat fuzzy projektif düzlemi bilinmiyorsa üyelik derecesi a_1 olan $[\lambda_1, L]$ nin diğer fuzzy noktalarını bilmek imkansızdır.

$a = a_3$ ise bilinen hiç birşey yoktur. İki fuzzy noktayı içeren fuzzy doğru, $[\lambda_{2i}, M_i]$ ya da $[\lambda_{3ij}, N_{ij}]$ doğrularından biri olabilir ve bu doğrular üzerindeki diğer noktalar üyelik derecesi sırasıyla a_1 ve a_2 olan fuzzy noktalar olabilir.

(iii) özelliği açıktır. P , aynı fuzzy projektif doğru üzerinde bulunmayan dört fuzzy projektif nokta içerir. Çünkü $PG(V)$ de bu özellik vardır ve fuzzy projektif nokta sadece değer atanmış bir projektif noktadır.

Teorem 2.13 *P* fuzzy projektif düzleminin fuzzy nokta ve fuzzy doğruları aşağıdaki ifadeleri sağlar :

(i) Farklı her fuzzy nokta çifti, tek bir fuzzy doğrusu üzerinde bulunur. Fakat bu fuzzy

doğru, noktaların üyelik dereceleri farklı ise belirlenebilir.

(ii) Farklı her fuzzy doğrunun tek bir ortak fuzzy noktası vardır.

(iii) P fuzzy projektif düzleminde herhangi üçü aynı fuzzy doğru üzerinde bulunmayan dört tane fuzzy nokta vardır.

Ayrıca fuzzy projektif düzlem biliniyor ise tek bir fuzzy projektif doğru tanımlamak için farklı olmak zorunda olan iki üyelik derecesi olma şartına ihtiyaç yoktur.

BÖLÜM 3

3-BOYUTLU FUZZY PROJEKTİF UZAYIN FUZZY PROJEKTİF DOĞRULARI

Bu bölümde $4-$boyutlu fuzzy vektör uzayının fuzzy vektör düzlemlerinin ve $4-$boyutlu fuzzy vektör uzayından elde edilen $3-$boyutlu fuzzy projektif uzayının fuzzy projektif doğrularının sınıflaması verilecektir. Bir alt uzayda, uzayın tamamındaki gibi noktalarının içinde aynı üyelik derecesine sahip olması gerekmediğinden bu sınıflama aşağıdaki teoremle veriliyor. (Akça, Bayar, Ekmekçi, 2006)

Teorem 3.1 V, K cismi üzerinde $4-$boyutlu vektör uzayı ve bu vektör uzayı üzerinde $\lambda : V \to [0,1]$ fuzzy vektör uzayı olsun. $4-$boyutlu fuzzy vektör uzayı λ tam olarak 6 tip fuzzy vektör düzlemine sahiptir.

İspat. V üzerinde $\lambda : V \to [0,1]$ fuzzy vektör uzayı ve (U_0, U_1, U_2, U_3, V) maximal flag ise V nin bir α vektör düzlemi ve α nın L taban doğrusu için $a_0 \geq a \geq b \geq c \geq d \in [0,1]$ olmak üzere

$$\begin{array}{rll} \lambda : & V \to [0,1] & \\ & 0 \to a_0, & \overline{u} \in L \backslash \{\overline{o}\} \\ & u \to a, & u \in U_1 \backslash \{U_0\} \\ & u \to b, & u \in U_2 \backslash U_1 \\ & u \to c, & u \in U_3 \backslash U_2 \\ & u \to d, & u \in V \backslash U_3 \end{array}$$

olur.

I. Durum: α_j, $2-$boyutlu vektör uzayı olsun.

$$\begin{array}{rll} \lambda_{ij} : & \alpha_j \to [0,1] & \\ & \overline{o} \to a_0 & \\ & \overline{u} \to a_i, & \overline{u} \in L \backslash \{\overline{o}\} \\ & \overline{u} \to b_{ij} & \overline{u} \in \alpha_j \backslash L \end{array}$$

II. Durum: β_k, $2-$boyutlu vektör uzayı olsun.

$$\begin{array}{rll} \mu_{ik} : & \beta_k \to [0,1] & \\ & \overline{o} \to a_0 & \\ & \overline{u} \to a_i \text{ for } \overline{u} \in L \backslash \{\overline{o}\} & \\ & \overline{u} \to c_{ik} \text{ for } \overline{u} \in \beta_k \backslash L & \end{array}$$

III. Durum: γ_t, $2-$boyutlu vektör uzayı olsun.

$$\begin{array}{rl} \delta_{it} \ : & \gamma_t \to [0,1] \\ & \overline{o} \to a_0 \\ & \overline{u} \to a_i \text{ for } \overline{u} \in L \backslash \{\overline{o}\} \\ & \overline{u} \to d_{it} \text{ for } \overline{u} \in \gamma_t \backslash L \end{array}$$

IV. Durum: α_{jk}, $2-$boyutlu vektör uzayı olsun.

$$\begin{array}{rl} \psi_{ijk} \ : & \alpha_{jk} \to [0,1] \\ & \overline{o} \to a_0 \\ & \overline{u} \to b_{ij} \text{ for } \overline{u} \in L_j \backslash \{\overline{o}\} \\ & \overline{u} \to c_{ik} \text{ for } \overline{u} \in \alpha_{jk} \backslash L_j \end{array}$$

V. Durum: β_{jt}, $2-$boyutlu vektör uzayı olsun.

$$\begin{array}{rl} \varphi_{ijt} \ : & \beta_{jt} \to [0,1] \\ & \overline{o} \to a_0 \\ & \overline{u} \to b_{ij} \text{ for } \overline{u} \in L_j \backslash \{\overline{o}\} \\ & \overline{u} \to d_{it} \text{ for } \overline{u} \in \beta_{jt} \backslash L_j \end{array}$$

VI. Durum: γ_{kt}, $2-$boyutlu vektör uzayı olsun.

$$\begin{array}{rl} \eta_{ikt} : & \gamma_{kt} \to [0,1] \\ & \overline{o} \to a_0 \\ & \overline{u} \to c_{ik} \text{ for } \overline{u} \in L_j \backslash \{\overline{o}\} \\ & \overline{u} \to d_{it} \text{ for } \overline{u} \in \gamma_{kt} \backslash L_j \end{array}$$

elde edilir. $\square$

Herhangi bir fuzzy vektör düzlem 6 sınıftan birisidir. Şimdi λ_{ij} ve η_{ikt} den elde edilen fuzzy vektör düzlemlerinin iki alt sınıfının bir örneğini verelim.

Örnek 3.1 $j=2$, $k=2$, $t=3$ için λ_{i2} ve η_{i23} fuzzy alt uzayları aşağıdaki gibidir. α_2 vektör düzlemi ve $a_0 \geq a_i \geq b_{i2}$, $i \in \{1,...,p\}$ olmak üzere

$$\begin{array}{rl} \lambda_{i2} \ : & \alpha_2 \to [0,1] \\ & \overline{o} \to a_0 \\ & \overline{u} \to a_i, \overline{u} \in L \backslash \{0\} \\ & \overline{u} \to b_{i2}, \overline{u} \in \alpha_j \backslash L \end{array}$$

ve γ_{23} vektör düzlemi ve $a_0 \geq c_{i2} \geq d_{i3}$, $i \in \{1,...,p\}$ olmak üzere

$$\begin{array}{rl} \eta_{i23} : & \gamma_{23} \to [0,1] \\ & \overline{o} \to a_0 \\ & \overline{u} \to c_{i2}, \overline{u} \in \beta_2 \backslash \{0\} \\ & \overline{u} \to d_{i3}, \overline{u} \in \gamma_{23} \backslash \{0\}. \end{array}$$

Fuzzy $n-$boyutlu projektif uzay λ' nün genel tanımı [3] de verilmiştir. Burada fuzzy $4-$boyutlu vektör uzayı (λ, V) den elde edilen fuzzy $3-$boyutlu projektif uzay durumuna kendimizi kısıtlayalım. Yani U_i ler V nin $i-$boyutlu altuzayları ve $a_0 \geq a \geq b \geq c \geq d \in [0,1]$ olmak üzere fuzzy $4-$boyutlu vektör uzayı (λ, V)

$$\begin{array}{lll} \lambda: & V \to [0,1] & \\ & 0 \to a_0 & \\ & u \to a, & u \in U_1 \backslash \{U_0\} \\ & u \to b & u \in U_2 \backslash U_1 \\ & u \to c & u \in U_3 \backslash U_2 \\ & u \to d & u \in V \backslash U_3 \end{array}$$

şeklindedir.

U_1 fuzzy vektör doğrusuna karşılık gelen projektif nokta q ve U_{i+1} fuzzy vektör uzayına karşılık gelen fuzzy $i-$boyutlu projektif altuzay ise (q, U_1', U_2', V) dizisi bir maksimal flagdır. $a \geq b \geq c \geq d \in [0,1]$ olmak üzere $V' = V \backslash \{0\}$ üzerinde fuzzy $3-$boyutlu projektif uzay λ' aşağıdaki gibi tanımlıdır ve $FPG(3,K)$ ile gösterilir.

$$\begin{array}{lll} \lambda': & V' \to [0,1] & \\ & q \to a & \\ & p \to b, & p \in U_1' \backslash \{q\} \\ & p \to c & p \in U_2' \backslash U_1' \\ & p \to d & p \in V' \backslash U_2' \end{array}$$

Aşağıdaki teorem fuzzy $4-$boyutlu vektör uzayından elde edilen $3-$boyutlu fuzzy projektif uzayın fuzzy projektif doğrularının sınıflaması ile ilgilidir.

Teorem 3.2 *K cismi üzerinde fuzzy $4-$boyutlu vektör uzayından elde edilen fuzzy $3-$boyutlu projektif uzay λ' tam olarak 6 tip fuzzy projektif doğruya sahiptir.*

İspat. λ', V' üzerinde fuzzy $3-$boyutlu projektif uzay olsun. λ' aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\begin{array}{lll} \lambda': & V' \to [0,1] & \\ & q \to a & \\ & p \to b, & p \in U_1' \backslash \{q\} \\ & p \to c & p \in U_2' \backslash U_1' \\ & p \to d & p \in V' \backslash U_2' \end{array}$$

λ' nün fuzzy projektif doğruları aşağıdakilerden birisidir: $\square$

I. Durum: L_j, α_j vektör düzlemine karşılık gelen projektif doğru ve q, $L \subseteq \alpha_j$ vektör doğrusuna karşılık gelen projektif nokta olsun. O zaman $a_i \geq b_{ij}$ olmak üzere 1.tip fuzzy projektif doğru

$$\begin{array}{lll} \lambda'_{ij}: & L_j \to [0,1] & \\ & q \to a_i & \\ & p \to b_{ij}, & p \in L_j \backslash \{q\} \end{array}$$

şeklindedir.

II. Durum: M_k, β_k vektör düzlemine karşılık gelen projektif doğru ve q, $L \subseteq M_k$ vektör doğrusuna karşılık gelen projektif nokta olsun. Bu durumda $a_i \geq c_{ik}$ olmak üzere 2.tip fuzzy projektif doğru

$$\begin{array}{rll} \mu'_{ik}: & M_k \to [0,1] & \\ & q \to a_i & \\ & p \to c_{ik}, & p \in M_k \backslash \{q\} \end{array}$$

şeklindedir.

III. Durum: N_t, γ_t vektör düzlemine karşılık gelen projektif doğru ve q da $L \subseteq \gamma_t$ vektör doğrusuna karşılık gelen projektif nokta olsun.Bu durumda $a_i \geq d_{it}$ olmak üzere 3.tip fuzzy projektif doğru

$$\begin{array}{rll} \delta'_{it}: & \gamma_t \to [0,1] & \\ & q \to a_i & \\ & p \to d_{it}, & p \in N_t \backslash \{q\} \end{array}$$

şeklindedir.

IV. Durum: L_{jk}, α_{jk} vektör düzlemine karşılık gelen projektif doğrular olsun. Bu durumda $b_{ij} \geq c_{ik}$ olmak üzere 4.tip fuzzy projektif doğru

$$\begin{array}{rll} \psi'_{ijk}: & L_{jk} \to [0,1] & \\ & q_j \to b_{ij} & q_j \in L \\ & p \to c_{ik}, & p \in L_{jk} \backslash \{q_j\} \end{array}$$

şeklindedir.

V. Durum: M_{jt}, β_{jt} vektör düzlemine karşılık gelen projektif doğrular olsun. Bu durumda $b_{ij} \geq d_{it}$ olmak üzere 5.tip fuzzy projektif doğru

$$\begin{array}{rll} \varphi'_{ijt}: & M_{jt} \to [0,1] & \\ & q_j \to b_{ij} & q_j \in L \\ & p \to d_{it}, & p \in M_{jt} \backslash \{q_j\} \end{array}$$

şeklindedir.

VI. Durum: N_{kt}, γ_{kt} vektör düzlemine karşılık gelen projektif doğrular olsun. Bu durumda $c_{ik} \geq d_{it}$ olmak üzere 6.tip fuzzy projektif doğru

$$\begin{array}{rll} \eta'_{ikt}: & N_{kt} \to [0,1] & \\ & p \to c_{ik} & p \in L_j \\ & p \to d_{it}, & p \in N_{kt} \backslash L_j \end{array}$$

şeklindedir.

Örnek 3.2 Yukarıda verilen örnekteki λ_{i2} ve η_{i23} alt fuzzy vektör düzlemlerinden elde edilen λ'_{i2} ve η'_{i23} fuzzy projektif doğruları aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \lambda'_{i2} \ : \ & L_2 \to [0,1] \\ & q \to a_i \\ & p \to b_{i2} \ , \ p \in L_2 \backslash \{q\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \eta'_{i23} : \ & N_{23} \to [0,1] \\ & p \to c_{i2} \ , \ p \in L_2 \\ & p \to d_{i3} \ , \ p \in N_{23} \backslash L \end{aligned}$$

dir.

BÖLÜM 4

3-BOYUTLU FUZZY PROJEKTİF UZAYIN FUZZY PROJEKTİF DÜZLEMLERİ

Bu bölümde $4-$boyutlu fuzzy vektör uzayının $3-$boyutlu fuzzy vektör uzaylarının ve $4-$boyutlu fuzzy vektör uzayından elde edilen $3-$boyutlu fuzzy projektif uzayının fuzzy projektif düzlemlerinin sınıflaması verilecektir. (Ekmekçi, Akça, Bayar, 2009)

Teorem 4.1 V, K cismi üzerinde $4-$boyutlu vektör uzayı ve bu vektör uzayı üzerinde $\lambda : V \to [0,1]$ fuzzy vektör uzayı olsun. $4-$boyutlu fuzzy vektör uzayı λ tam olarak 4 tip $3-$boyutlu fuzzy vektör uzayına sahiptir.

İspat. V nin bir vektör düzlemi α, α nın taban doğrusu L ve $(\{\overline{o}\}, L, \alpha, U_3, V)$ maksimal flağı için $a_0 \geq a \geq b \geq c \geq d \in [0,1]$ olmak üzere V üzerinde $\lambda : V \to [0,1]$ fuzzy vektör uzayı

$$\begin{array}{rll} \lambda : & V \to [0,1] & \\ & 0 \to a_0, & \\ & u \to a, & \overline{u} \in L \backslash \{\overline{o}\} \\ & u \to b, & u \in \alpha \backslash L \\ & u \to c, & u \in U_3 \backslash \alpha \\ & u \to d, & u \in V \backslash U_3 \end{array}$$

şeklindedir. $3-$boyutlu fuzzy vektör uzaylarını sınıflamak için

L doğrusu üzerindeki sıfırdan farklı nokta sayısı p, α düzlemindeki orjinden geçen L_j doğrularının sayısı q, $U_3 \backslash L_j$ uzayındaki taban doğrusu L den farklı ve orjinden geçen L_k doğrularının sayısı r, $V \backslash U_3$ uzayında taban doğrusu L den farklı ve orjinden geçen L_t doğrularının sayısı s olsun. Bu durumda $4-$boyutlu vektör uzayı V ve bu vektör uzayı üzerindeki fuzzy vektör uzayı $\lambda : V \to [0,1]$ nın $3-$boyutlu fuzzy alt vektör uzayları aşağıdaki 4 tipten birisidir.

I. Durum: V nin $3-$ boyutlu alt vektör uzayıları α_{jk} ve $a_0 \geq a_i \geq b_{ij} \geq c_{ik}$, $i \in \{1,...,p\}$, $j \in \{1,...,q\}$, $k \in \{1,...,r\}$ olmak üzere

$$\begin{array}{rll} \lambda_{ijk} : & \alpha_{jk} \to [0,1] & \\ & 0 \to a_0, & \\ & u \to a_i, & \overline{u} \in L \backslash \{\overline{o}\} \\ & u \to b_{ij}, & u \in \alpha \backslash L \\ & u \to c_{ik}, & u \in U_3 \backslash \alpha \end{array}$$

şeklindedir.

II. Durum: V nin $3-$ boyutlu alt vektör uzayları β_{jt} ve $a_0 \geq a_i \geq b_{ij} \geq d_{it}$, $i \in \{1,...,p\}$, $j \in \{1,...,q\}$, $t \in \{1,...,s\}$ olmak üzere

$$\begin{array}{rll} \mu_{ijt}: & \beta_{jk} \to [0,1] & \\ & 0 \to a_0, & \\ & u \to a_i, & \overline{u} \in L \backslash \{\overline{o}\} \\ & u \to b_{ij}, & u \in \alpha \backslash L \\ & u \to d_{it}, & u \in V \backslash U_3 \end{array}$$

şeklindedir.

III. Durum: V nin $3-$ boyutlu alt vektör uzayları γ_{kt} ve $a_0 \geq a_i \geq c_{ik} \geq d_{it}$, $i \in \{1,...,p\}$, $k \in \{1,...,r\}$, $t \in \{1,...,s\}$ olmak üzere

$$\begin{array}{rll} \nu_{ijt}: & \gamma_{kt} \to [0,1] & \\ & 0 \to a_0, & \\ & u \to a_i, & \overline{u} \in L \backslash \{\overline{o}\} \\ & u \to c_{ik}, & u \in U_3 \backslash \alpha \\ & u \to d_{it}, & u \in V \backslash U_3 \end{array}$$

şeklindedir.

IV. Durum: V nin $3-$ boyutlu alt vektör uzayları δ_{jkt} ve $a_0 \geq b_{ij} \geq c_{ik} \geq d_{it}$, $i \in \{1,...,p\}$, $j \in \{1,...,q\}$, $k \in \{1,...,r\}$, $t \in \{1,...,s\}$ olmak üzere

$$\begin{array}{rll} \zeta_{ijkt}: & \delta_{jkt} \to [0,1] & \\ & 0 \to a_0, & \\ & u \to b_{ij}, & \overline{u} \in L_j \backslash \{\overline{o}\} \\ & u \to c_{ik}, & u \in U_3 \backslash \alpha \\ & u \to d_{it}, & u \in V \backslash U_3 \end{array}$$

şeklindedir. □

Aşağıdaki teorem fuzzy $4-$boyutlu vektör uzayından elde edilen fuzzy $3-$boyutlu projektif uzayların fuzzy projektif düzlemlerinin bir sınıflamasını vermektedir.

Teorem 4.2 *K cismi üzerinde fuzzy $4-$boyutlu vektör uzayından elde edilen fuzzy $3-$boyutlu projektif uzay λ' tam olarak 4 tip fuzzy projektif düzlemlere sahiptir.*

İspat. λ', V' üzerinde fuzzy $3-$boyutlu projektif uzay olsun. λ' aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\begin{array}{rll} \lambda': & V' \to [0,1] & \\ & q \to a & \\ & p \to b, & p \in U_1' \backslash \{q\} \\ & p \to c & p \in U_2' \backslash U_1' \\ & p \to d & p \in V' \backslash U_2' \end{array}$$

λ' nün fuzzy projektif düzlemleri aşağıdakilerden birisidir: □

İspat. I. Durum: K_{jk}, α_{jk} fuzzy 3−boyutlu vektör uzayına karşılık gelen projektif düzlem ve q, $U_1 = L$ vektör doğrusuna karşılık gelen projektif nokta olsun. $a_i \geq b_{ij} \geq c_{ik}$ için I. tip fuzzy projektif düzlemleri

$$\begin{array}{rll} \lambda'_{ijk}: & K_{jk} \to [0,1] & \\ & q \to a_i, & \\ & p \to b_{ij}, & p \in L_j - \{q\} \\ & p \to c_{ik}, & p \in K_{jk} \backslash L_j \end{array}$$

şeklindedir.

II. Durum: L_{jt}, β_{jt} fuzzy 3−boyutlu vektör uzayına karşılık gelen projektif düzlem ve q, $U_1 = L$ vektör doğrusuna karşılık gelen projektif nokta olsun. $a_i \geq b_{ij} \geq d_{it}$ için II. tip fuzzy projektif düzlemleri

$$\begin{array}{rll} \mu'_{ijk}: & L_{jt} \to [0,1] & \\ & q \to a_i, & \\ & p \to b_{ij}, & p \in L_j - \{q\} \\ & p \to d_{it}, & p \in L_{jt} \backslash L_j \end{array}$$

şeklindedir.

III. Durum: M_{kt}, γ_{kt} fuzzy 3−boyutlu vektör uzayına karşılık gelen projektif düzlem ve q, $U_1 = L$ vektör doğrusuna karşılık gelen projektif nokta olsun. $a_i \geq c_{ik} \geq d_{it}$ için III. tip fuzzy projektif düzlemleri

$$\begin{array}{rll} \nu'_{ikt}: & M_{kt} \to [0,1] & \\ & q \to a_i, & \\ & p \to c_{ik}, & p \in U'_3 - \{q\} \\ & p \to d_{it}, & p \in V' - U'_2 \end{array}$$

şeklindedir.

IV. Durum: N_{jk}, α_{jk} fuzzy 3−boyutlu vektör uzayına karşılık gelen projektif düzlem olsun. $b_{ij} \geq c_{ik} \geq d_{it}$ için IV. tip fuzzy projektif düzlemleri

$$\begin{array}{rll} \zeta'_{ijkt}: & N_{jkt} \to [0,1] & \\ & p \to b_{ij}, & p \in U'_2 - \{q\} \\ & p \to b_{ij}, & p \in U'_3 - U'_2 \\ & p \to d_{it}, & p \in V' - U'_3 \end{array}$$

şeklindedir. □

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

Pek çok alanda uygulamaları olan fuzzy teori Matematikte de önemli bir yere sahiptir. Fuzzy kavramı ilk olarak Zadeh tarafından ortaya atılmış ve pek çok bilim adamı bu alanda çalışmış ve katkı sağlamışlardır. Fuzzy projektif geometri ise ilk defa Leen Kuijken ve H. Van Maldeghem tarafından çalışılmıştır.

A. Bayar, Z. Akça, S. Ekmekçi, $4-$boyutlu fuzzy vektör uzayından elde edilen fuzzy $3-$boyutlu projektif uzayın fuzzy doğrularının sınıflamasını incelediler. Daha sonra da aynı fuzzy projektif uzayın fuzzy düzlemlerinin sınıflamasını oluşturdular..

Bu tezde, yukarıda sözü edilen çalışmalar esas alınmıştır. Birinci bölümde fuzzy küme teori, vektör uzayları ve projektif geometrideki temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, fuzzy vektör uzayları ile fuzzy projektif uzaylar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, fuzzy $4-$boyutlu vektör uzayının fuzzy vektör düzlemlerinin bir sınıflaması ve fuzzy $4-$boyutlu vektör uzayından elde edilen fuzzy $3-$boyutlu projektif uzayın fuzzy projektif doğrularının bir sınıflaması incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ise fuzzy $4-$boyutlu vektör uzayının fuzzy $3-$boyutlu vektör uzaylarının ve fuzzy $4-$boyutlu vektör uzayından elde edilen fuzzy $3-$boyutlu projektif uzayın fuzzy projektif düzlemlerinin bir sınıflaması incelenmiştir.

Fuzzy $3-$boyutlu projektif uzayın fuzzy doğru ve fuzzy düzlemlerinin sınıflamaları daha büyük boyutlu fuzzy projektif uzaylar için genelleştirilebilir ve her hangi $k-$boyutlu fuzzy alt uzayları sınıflanabilir. Bu fuzzy teoriye çelşitlilik katıp, katkı sağlayacaktır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1]

Kuijken L, Maldeghem H. V. ,Kerre E., 1998, Fuzzy Projektif Geometries From Fuzzy Vektör Spaces, Proceedings of IPMU, 1331-1338)

Kaya, R., 1992, Projektif Geometri, Osmangazi Üniversitesi Yayınları, 66-76 s.

Kuijken L, Maldeghem H. V., 2002, Fibered Geometries, Discrete Mathematics 255, 259-274

Ekmekçi S., Akça Z, Bayar A.,2009, On the Classification of Fuzzy Projective Planes of Fuzzy 3-Dimensional Projective Space, Chaos Solitions & Fractals, 40, 2146-2151.

Akça Z, Bayar A, Ekmekçi S., 2006, On the Classification of Fuzzy Projective Lines of Fuzzy 3-Dimensional Projective Space, Communitions Mathematics and Statistics, 55, 2, 17-23.

Zadeh, L.A., 1965, Fuzzy Sets,8,338-353.

Klement E.Peter, Meisar Radko ve Pap Endre, 2000, Triangluar norms, 3-14. .

P. Lubczonok.Fuzzy vector spaces. Fuzzy Sets and Systems., 1990 ,38:329-343..

Çallıalp, F., 2011, Örneklerle soyut cebir, Birsen Yayınevi, 337s.

Casse R., 2006, Projective geometry, Oxford University Press 192p.