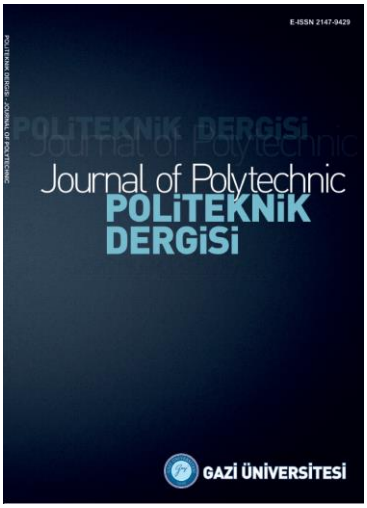


POLİTEKNİK DERGİSİ

JOURNAL of POLYTECHNIC

ISSN: 1302-0900 (PRINT), ISSN: 2147-9429 (ONLINE)
URL: http://dergipark.org.tr/politeknik

CLARIVATE ANALYTICS
EMERGING SOURCES CITATION INDEX
INDEXED

Stokastik darboğaz çok kaynaklı genelleştirilmiş atama problemi

Stochastic bottleneck multi-resource generalized assignment problem

***Yazar(lar) (Author(s))**: Tuğba SARAÇ[1], Feriştah ÖZÇELİK[2]*

ORCID[1]: 0000-0002-8115-3206

ORCID[2]: 0000-0003-0329-203X

ERKEN GÖRÜNÜM

To cite to this article: Saraç T. ve Özçelik F., "Stokastik darboğaz çok kaynaklı genelleştirilmiş atama problemi", ***Journal of Polytechnic***, *(*): *, (*).

Bu makaleye şu şekilde atıfta bulunabilirsiniz: Saraç T. ve Özçelik F., "Stokastik darboğaz çok kaynaklı genelleştirilmiş atama problemi", ***Politeknik Dergisi***, *(*): *, (*).

Erişim linki (To link to this article): http://dergipark.org.tr/politeknik/archive

DOI: **10.2339/politeknik.1070424**

Stokastik Darboğaz Çok Kaynaklı Genelleştirilmiş Atama Problemi

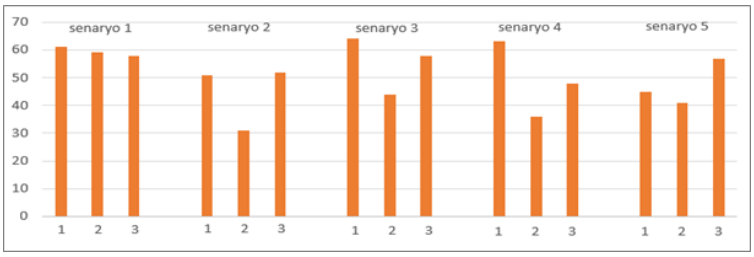
Stochastic Bottleneck Multi-Resource Generalized Assignment Problem

Önemli noktalar (Highlights)

- *Darboğaz çok kaynaklı genelleştirilmiş atama problemi stokastik olarak ele alınmıştır. / The bottleneck multi-resource generalized assignment problem is handled as stochastic.*
- *Kaynak tüketim miktarları stokastiktir. /Resource consumption amounts are stochastic.*
- *Ele alınan problem iki aşamalı stokastik programlama yaklaşımı kullanılarak çözülmüştür. / The problem under consideration is solved using a two-stage stochastic programming approach.*

Grafik Özet (Graphical Abstract)

Bu çalışmada B-MRGAP'da kaynak tüketim miktarları stokastik olarak ele alınmıştır. Bu problemin çözümü için iki aşamalı stokastik programlama modeli geliştirilmiştir. Önerilen yöntemin performansı rassal türetilen test problemleri kullanılarak gösterilmiştir. Test sonuçları incelendiğinde küçük boyutlu problemlerde bile, problemi stokastik ele almanın katkı sağladığı görülmüştür. (In this study, resource consumption amounts in B-MRGAP are handled as stochastic. To solve this problem, a two-stage stochastic programming model has been developed. The performance of the proposed method is demonstrated by using randomly generated test problems. When the test results were examined, it was seen that even in small-sized problems, handling the problem stochastically made a contribution.)



Şekil. Deterministik atamaların stokastik modelde yerine konması ile elde edilen çözüm için her bir senaryo ve ajan bazında yük toplamları /**Figure.** Total agent loads of stochastic solution for each senario

Amaç (Aim)

B-MRGAP'da kaynak tüketimini stokastik ele almanın enbüyük ajan yüküne etkisinin ortaya konulması amaçlanmıştır. / It is aimed to reveal the effect of handling resource consumption as stochastic on the maximum agent load in B-MRGAP.

Tasarım ve Yöntem (Design & Methodology)

Ele alınan problem iki aşamalı stokastik programlama yaklaşımı kullanılarak çözülmüştür. / The problem under consideration is solved using a two-stage stochastic programming approach.

Özgünlük (Originality)

B-MRGAP problemi literatürde ilk kez bu çalışmada stokastik olarak ele alınmıştır. / For the first time in the literature, the B-MRGAP problem was handled stochastically in this study.

Bulgular (Findings)

Test sonuçları incelendiğinde, problemi stokastik ele almanın enbüyük ajan yükünü ortalama %1.3 oranında azalttığı görülmüştür. Ayrıca ajan sayısı, görev sayısı ve kaynak tüketimi değişkenliği arttıkça sağlanan katkının da arttığı ortaya konmuştur. / When the test results were examined, it was seen that the stochastic approach to the problem reduced the maximum agent load by an average of 1.3%. In addition, it has been revealed that the contribution made increases as the number of agents, the number of tasks and the resource consumption variability increase.

Sonuç (Conclusion)

B-MRGAP'da kaynak tüketimini stokastik ele almak enbüyük ajan yükünü azaltmaktadır. / Stochastic handling of resource consumption in B-MRGAP reduces the maximum agent load.

***Etik Standartların Beyanı* (*Declaration of Ethical Standards*)**

Bu makalenin yazar(lar)ı çalışmalarında kullandıkları materyal ve yöntemlerin etik kurul izni ve/veya yasal-özel bir izin gerektirmediğini beyan ederler. / The author(s) of this article declare that the materials and methods used in this study do not require ethical committee permission and/or legal-special permission.

Stokastik Darboğaz Çok Kaynaklı Genelleştirilmiş Atama Problemi

Araştırma Makalesi / Research Article

Tuğba SARAÇ*, Feriştah ÖZÇELİK

Mühendislik Mimarlık Fakültesi, Endüstri Müh. Bölümü, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Türkiye

(Geliş/Received : 09.02.2022 ; Kabul/Accepted : 05.12.2022 ; Erken Görünüm/Early View : 30.01.2023)

ÖZ

Darboğaz çok kaynaklı genelleştirilmiş atama problemi (B-MRGAP) görevlerin, en büyük ajan yükünü enküçükleyecek şekilde ajanların kapasiteli kaynaklarına (dönemlerine) atanması problemidir. Bir firmanın temin etmesi gereken ürünleri (görevleri), birden çok dönemi göz önünde bulunduracak şekilde yan sanayilerine ataması problemi B-MRGAP'a bir örnektir. Bu problemde, talep edilen ürün miktarlarındaki her türlü değişim, görevlerin yan sanayilerdeki kaynak tüketim miktarlarını da değiştirecektir. Pek çok sektörde, üretim miktarlarının değişmesi sık yaşanan bir durum olduğundan kaynak tüketim miktarlarının deterministik değil, stokastik ele alınması daha gerçekçi çözümlere ulaşılmasını sağlayacaktır. Bu çalışmada B-MRGAP'da kaynak tüketim miktarları stokastik olarak ele alınmıştır. Bu problemin çözümü için iki aşamalı stokastik programlama modeli geliştirilmiştir. Önerilen yöntemin performansı rassal türetilen test problemleri kullanılarak gösterilmiştir. Test sonuçları incelendiğinde küçük boyutlu problemlerde bile, problemi stokastik ele almanın katkı sağladığı görülmüştür. Ayrıca ajan sayısı, görev sayısı ve kaynak tüketimi değişkenliği arttıkça sağlanan katkının da arttığı ortaya konmuştur.

Anahtar Kelimeler: Çok kaynaklı genelleştirilmiş atama problemi (MRGAP), iki aşamalı stokastik programlama, stokastik kaynak tüketim miktarları.

Stochastic Bottleneck Multi-Resource Generalized Assignment Problem

ABSTRACT

The bottleneck multi-resource generalized assignment problem (B-MRGAP) is the assignment of jobs to capacitated resources (periods) of agents to minimize the maximum agent load. The problem of assigning the products (tasks) that a firm has to supply to its sub-industries considering more than one period is an example of B-MRGAP. In this problem, any change in product demands will also change the resource consumption amounts of the tasks in the sub-industries. Since changes in production quantities are common in many sectors, handling resource consumption quantities as stochastic rather than deterministic will lead to more realistic solutions. In this study, resource consumption amounts in B-MRGAP are handled as stochastic. To solve this problem, a two-stage stochastic programming model has been developed. The performance of the proposed method is demonstrated by using randomly generated test problems. When the test results were examined, it was seen that even in small-sized problems, handling the problem stochastically made a contribution. In addition, it was revealed that the contribution increased as the number of agents, the number of tasks, and the resource consumption variability increased.

Keywords: Multi-resource generalized assignment problem (MRGAP), two-stage stochastic programming, stochastic resource consumption quantities.

ERKEN GÖRÜNÜM

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Atama problemi, toplam atama maliyetini enküçükleyecek şekilde görevlerin ajanlara atanmasıdır. Bu problemde her ajana sadece bir görev atanmalıdır. Atama problemlerinin farklı uygulama alanları vardır [1-3]. Genelleştirilmiş atama probleminde (GAP) ise ajanlara birden fazla görev atanabilir ancak her ajanın kapasitesi vardır. Literatürde çok amaçlı, çok aşamalı, elastik, darboğaz, çok kaynaklı, dinamik ve stokastik gibi farklı GAP türleri mevcuttur. GAP'ın darboğaz versiyonunda (B-GAP) amaç, enbüyük ajan yükünün enküçüklenmesidir. Çok kaynaklı GAP (MRGAP) probleminde ise, her ajan birden çok kapasiteli kaynağa sahiptir.

Literatürde GAP ile ilgili pek çok çalışma mevcut olmasına rağmen bu çalışmaların önemli bir kısmında problem deterministik olarak ele alınmıştır. GAP'ı stokastik olarak ele alan çalışmalar Çizelge 1.'de verilmiştir. Fu vd. [4], stokastik kapasiteli darboğaz GAP problemini ele almışlar ve problemin çözümü için gürbüz eniyileme yaklaşımını kullanmışlardır. Kogan vd. [5], kaynak tüketiminin stokastik olduğu dinamik GAP problemi için polinom zamanlı algoritma önermişlerdir. Morton vd. [6], çalışmalarında GAP problemini ele almışlardır. Hem kapasitenin hem de kaynak tüketiminin stokastik olduğu durum için bir dal fiyat algoritması önermişlerdir. Albareda-Sambola vd. [7] kaynak tüketiminin stokastik olduğu GAP için kesin çözüm yöntemi geliştirmişlerdir. Sarin vd. [8], çalışmalarında

*Sorumlu Yazar (Corresponding Author)
e-posta : tsarac@ogu.edu.tr

GAP problemini ele almışlardır. Kaynak tüketiminin stokastik olduğu durum için bir dal fiyat algoritması önermişlerdir. Singh ve Rani [9] kapasite, kaynak tüketimi ve maliyetin stokastik olduğu GAP için dal sınır algoritması geliştirmişlerdir. Toktaş vd. [10], çalışmalarında GAP problemini ele almışlardır. Kapasitenin stokastik olduğu durum için bir dal sınır algoritması önermişlerdir. Yang and Chakraborty [11] kaynak tüketiminin stokastik olduğu GAP problemi için bir yaklaşık algoritma önermişlerdir. Literatürde stokastik GAP problemini ele alan çalışmalar çözüm yöntemleri açısından incelendiğinde, genellikle kesin çözüm yaklaşımlarının kullanıldığı görülmektedir.

Çizelge 1. Stokastik GAP literatürü (Stochastic GAP literature)

Kaynak	Problem	Stokastik Parametre	Yöntem
[4]	B-GAP	kapasite	RO
[5]	D-GAP	kaynak tüketimi	PZA
[6]	GAP	kapasite, kaynak tüketimi	B&P
[7]	GAP	kaynak tüketimi	KÇY
[8]	GAP	kaynak tüketimi	B&P
[9]	GAP	kapasite, kaynak tüketimi, maliyet	B&B
[10]	GAP	kapasite	B&B
[11]	GAP	kaynak tüketimi	YA

B-GAP: darboğaz GAP, D-GAP: dinamik GAP, RO: gürbüz eniyileme, PZA: polinom zamanlı algoritma, B&P: dal fiyat algoritması, KÇY: kesin çözüm yöntemi, B&B: dal sınır algoritması, YA: yaklaşık algoritma

Çizelge 1.'den de görülebileceği gibi, erişilebilen GAP literatüründe çok kaynaklı GAP (MRGAP) problemini stokastik olarak ele alan bir çalışma yoktur.

Literatürde MRGAP ile ilgili erişilebilen çalışmaların tamamında parametreler deterministik kabul edilmiştir. Shtub ve Kogan [12], dinamik MRGAP'ı, LeBlanc vd. [13], hazırlık süreli MRGAP'ı, Yagiura vd. [14] ve Mitrović-Minić ve Punnen [15], klasik MRGAP problemini ele almışlardır. Özçelik ve Saraç [16], yetenek ve birliktelik kısıtlarının olduğu MRGAP problemini ele almışlardır. Janak vd. [17], tercihleri dikkate alan bir MRGAP modeli geliştirmiştir. Önerdikleri model, ajan yüklerini de dengelemektedir. Karsu ve Azizoglu [18], B-MRGAP'ı, Özçelik ve Saraç [19] uygunluk kısıtlı B-MRGAP'ı ele almışlardır. Karsu ve Azizoglu [20], MRGAP'ı iki amaçlı olarak ele almıştır. Amaçlar, toplam yükün ve en çok yüke sahip ajan yükünün enküçüklenmesidir. Özçelik ve Saraç [21], MRGAP'ta ajan yüklerinin dengelenmesini incelemişlerdir.

MRGAP ile ilgili literatür incelendiğinde problem parametrelerinin deterministik varsayıldığı görülmektedir. Ancak problemin doğası gereği bu varsayım her zaman çok gerçekçi değildir. Çünkü farklı nedenlere bağlı olarak pek çok sektörde talepler sık sık değişebilmektedir. Bu değişimleri dikkate almayan bir atama yapıldığında, bazı ajanlarda âtıl kapasite bazılarında ise kapasite aşımı ile karşılaşılabilir. Böyle bir durumun ortaya çıkması bu çözümün kullanılmasını olanaksız kılar. Ayrıca, çözüm, kapasite kısıtlarını sağlıyor olsa bile daha iyi çözümlerin gözden kaçırılması riskini barındırır. Bu nedenle bu çalışmada darboğaz çok kaynaklı GAP (B-MRGAP) problemi literatürde ilk kez stokastik olarak ele alınmıştır.

Bu çalışmanın izleyen bölümünde problem tanımı ve önerilen matematiksel model, üçüncü bölümde ise iki aşamalı stokastik programlama yaklaşımı verilmiştir. Deneysel sonuçlar, dördüncü bölümde, sonuç ve öneriler ise son bölümde sunulmuştur.

2. PROBLEM TANIMI VE MATEMATİKSEL MODEL (PROBLEM DESCRIPTION AND MATHEMATICAL MODEL)

Bu çalışmada m tane ajana atanacak n tane görev vardır. Her görevin mutlaka bir ajana atanması gerekmektedir. Ajanların dönem bazında kapasiteleri kısıtlıdır ve bir ajana kapasitesini aşmayacak şekilde birden fazla görev atanabilir. Amaç, en büyük ajan yükünü enküçüklemektir. Gerçek hayatta her planlama periyodunda üretim miktarları taleplere bağlı olarak değişiklik gösterdiğinden, j görevinin t. dönemde i. ajanda kaynak tüketim miktarı stokastik olarak ele alınmıştır. Problemin deterministik hali için Karsu ve Azizoğlu [10] tarafından önerilen model (D-B-MRGAP) ve bu çalışmada önerilen stokastik B-MRGAP modeli (S-B-MRGAP) aşağıda verilmiştir. Bu modellerde kullanılan indisler, parametreler ve karar değişkenleri izleyen şekildedir.

İndisler

i : ajan indisi
j : görev indisi
t : dönem indisi
w: senaryo indisi

Parametreler

m: ajan sayısı
n: görev sayısı
r: dönem sayısı
α: senaryo sayısı
p_{ijt} : j görevinin t. dönemde i. ajanda kaynak tüketim miktarı
q_{ijtw} : j görevinin t. dönemde i. ajanda w. senaryoda kaynak tüketim miktarı
b_{it} : i ajanının t dönemindeki kapasitesi
φ_w: w. senaryonun gerçekleşme olasılığı

Karar Değişkenleri

x_{ij} : j görevi i ajanına atandıysa 1, diğer durumda 0.

Z : enbüyük ajan yükü

(D-B-MRGAP):

EKLENCEKTİR

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad \forall j \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ijt} x_{ij} \leq b_{it} \qquad \forall\ i,t \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{t=1}^{r} p_{ijt} x_{ij} \leq Z \qquad \forall\ i \qquad (3)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall\ i,j \qquad (4)$$

$$Z \geq 0 \qquad (5)$$

kısıtları altında,

$$enk\ f_{D-B-MRGAP} = Z \qquad (6)$$

Kısıt (1), her görevin mutlaka bir ajana atanmasını sağlamaktadır. Kısıt (2), ajanların kapasite kısıtıdır. Kısıt (3), enbüyük ajan yükünü belirlemektedir. Kısıt (4) ve (5) karar değişkenlerinin yapısını göstermektedir. Amaç (6) enbüyük ajan yükünü enküçüklemektir.

(S-B-MRGAP):

(1), (4)

$$\sum_{j=1}^{n} q_{ijtw} x_{ij} \leq b_{it} \qquad \forall\ i,t,w \qquad (7)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{t=1}^{r} q_{ijtw} x_{ij} \leq Z_w \qquad \forall\ i,w \qquad (8)$$

$$Z_w \geq 0 \qquad (9)$$

kısıtları altında,

$$enk\ f_{S-B-MRGAP} = \sum_{w=1}^{\alpha} \varphi_w Z_w \qquad (10)$$

Kısıt (7), senaryo bazında kapasite kısıtıdır. Kısıt (8), her senaryo için enbüyük ajan yükünü belirlemektedir. Kısıt (9), Z_w karar değişkenine ait işaret kısıtıdır. Amaç (10) beklenen enbüyük ajan yükünün enküçüklenmesidir.

3. İKİ AŞAMALI STOKASTİK PROGRAMLAMA (TWO-STAGE STOCHASTIC PROGRAMMING)

Belirsizlik altında karar verme problemlerinin çözümünde kullanılan yöntemlerden birisi stokastik programlamadır. Stokastik programlamada kullanılan en genel yaklaşım, stokastik problemin deterministik eşdeğerine dönüştürülerek bilinen yöntemlerle çözülmesidir. Bu yaklaşımda, belirsizliği dikkate almak için problem parametreleri rassal değişkenler olarak tanımlanır.

Düzeltme modellerinde, ilk aşama kararı risk ortamında alınmaktadır. Bu modellerin en yaygını, ilk aşama kararları alındıktan sonra belirsizliğin ortadan kalktığı ve ikinci aşamada düzeltme kararının verildiği iki aşamalı stokastik modeldir.

Deterministik yaklaşımda, her bir parametre için tek bir değer kullanılmaktadır. Stokastik yaklaşımda ise, parametrelerdeki değişkenlik senaryolar aracılığıyla hesaba katılmaktadır. Talep değişikliklerine bağlı olarak kaynak kullanımındaki değişkenliğin senaryolaştırılabilmesi için, her senaryo için, ilgili parametrenin varsayılan dağılımına uygun olarak rassal bir parametre değeri üretilir. Böylece, gerçekçi veriler kullanılarak yapılan atamalar, olası durumları hesaba katarak uzun dönemde daha başarılı sonuçlar sağlar.

Bir problemi stokastik ele almanın katkısını gösteren değere stokastik çözümün değeri (SÇD) denir. SÇD değeri, problem deterministik olarak çözüldüğünde elde edilen atamaların stokastik modelde yerine konması ile elde edilen amaç fonksiyonu değerinden ($f^{D}_{S-B-MRGAP}$) stokastik olarak çözüldüğünde elde edilen amaç fonksiyonu değerinin ($f_{S-B-MRGAP}$) çıkarılması ile hesaplanır. Bu değer pozitif ise problemi stokastik ele almanın fayda sağladığı sonucuna ulaşılır.

SÇD'ni hesaplama yönteminin adımları aşağıda verilmiştir.

Adım 1: S-B-MRGAP modelini çöz. $f_{S-B-MRGAP}$ değerini hesapla.

Adım 2: D-B-MRGAP modelini çöz. Görevlerin atandıkları ajanları (x_{ij}) belirle.

Adım 3: Adım 2'de bulunan atamaları (x_{ij}) sabitleyerek stokastik programlama probleminin amaç fonksiyonu değerini tekrar ($f^{D}_{S-B-MRGAP}$) hesapla.

Adım 4: SÇD'ni hesapla.

$$\text{SÇD} = f^{D}_{S-B-MRGAP} - f_{S-B-MRGAP}$$

4. DENEYSEL SONUÇLAR (EXPERIMENTAL RESULTS)

Önerilen çözüm yaklaşımının performansı, rassal olarak türetilen test problemleri kullanılarak gösterilmiştir. Tüm problemler Intel (R) Core (TM) i7, 2.70 GHz işlemci ve 8 GB belleğe sahip bir bilgisayarda, GAMS 24.0.2 Cplex çözücüsü ile çözülmüştür. İzleyen alt başlıklarda sırasıyla, örnek problem, test problemlerinin türetilme mekanizması ve test sonuçları verilmiştir.

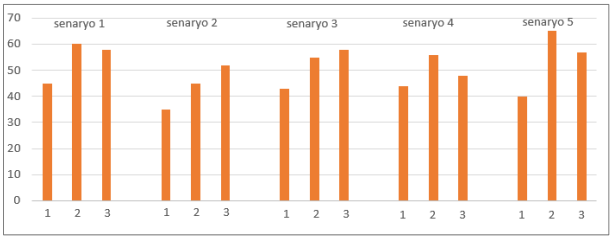
4.1. Örnek Problem (Sample Problem)

7 görev, 3 ajan, 2 dönemin olduğu 5 senaryolu bir örnek problem türetilmiştir. Bu problem için kapasite (b_{it}) ve deterministik kaynak tüketim miktarları (p_{ijt}) Çizelge 2.'de, stokastik kaynak tüketim miktarları (q_{ijtw}) ise Çizelge 3.'te verilmiştir.

ERKEN GÖRÜNÜM

Örnek problem D-B-MRGAP ve S-B-MRGAP modelleri ile sırasıyla 0.09 ve 0.16 saniyede çözülmüştür. Deterministik çözümde 1. ajana; 2, 5 ve 7. görevler, 2.ajana; 3. görev ve 3. ajana; 1, 4 ve 6. görevler atanmıştır. Stokastik çözümde 1. ajana; 3 ve 7. görevler, 2.ajana; 2 ve 5. görev ve 3. ajana; 1, 4 ve 6. görevler atanmıştır. Deterministik çözümün ajanlar bazında toplam yük dağılımları Şekil 1.'de, stokastik çözümün her bir senaryo için ajanlar bazında toplam yük dağılımları Şekil 2.'de ve deterministik atamanın stokastik modelde yerine konması ile elde edilen çözüme ait yük dağılımları ise Şekil 3.'te verilmiştir.

Örnek problem için $f^{D}_{S-B-MRGAP} = 59{,}4$ ve $f_{S-B-MRGAP} = 58{,}2$'dir. SÇD =59,4-58,2=1,2 olarak hesaplanmıştır. Bu kadar küçük boyutlu bir problemde bile SÇD değeri pozitif olarak elde edilmiştir.



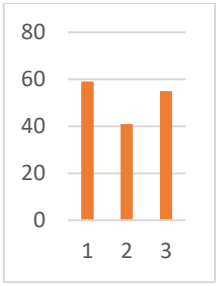
Şekil 2. Stokastik çözüm için her bir senaryo ve ajan bazında yük toplamları (Total agent loads of stochastic solution for each senario)

Çizelge 2. Örnek problem için b_{it} ve p_{ijt} parametre değerleri (b_{it} *and* p_{ijt} *parameter values for sample problem)*

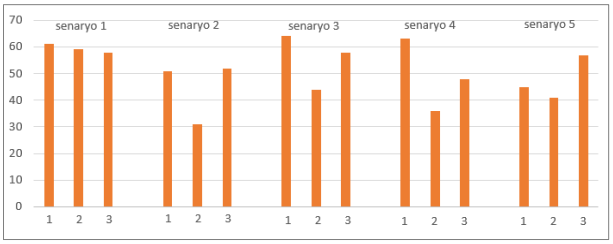
	$t=1$								$t=2$							
i/j	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	b_{i1}	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	b_{i2}
1	19	16	17	11	11	20	5	40	22	12	18	11	10	21	5	40
2	20	21	19	6	13	22	21	49	18	19	22	7	14	27	25	53
3	12	24	22	6	24	12	15	46	10	26	27	5	24	10	19	48

Çizelge 3. Örnek problem için q_{ijtw} parametre değerleri (q_{ijtw} *parameter values for sample problem)*

w	*i/j*	*t*=1							*t*=2						
		1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
1	*1*	13	24	15	7	10	23	3	16	14	24	9	7	13	3
	2	15	15	28	3	12	13	23	23	13	31	5	20	30	25
	3	18	30	30	6	13	13	21	7	31	16	5	26	9	16
2	*1*	26	17	14	11	7	25	3	19	8	13	12	11	24	5
	2	15	11	17	3	8	19	23	14	16	14	6	10	27	16
	3	9	14	24	8	16	9	13	8	33	28	5	13	13	28
3	*1*	20	24	11	7	9	23	5	30	9	21	13	11	22	6
	2	13	16	17	5	12	18	18	11	16	27	5	11	15	29
	3	14	16	32	6	13	14	8	7	17	17	7	17	10	24
4	*1*	15	20	11	15	6	16	6	12	14	23	12	13	11	4
	2	29	21	24	6	11	15	23	22	16	12	5	8	35	26
	3	15	22	12	6	12	8	22	7	23	33	3	35	9	12
5	*1*	15	10	19	8	9	12	3	22	11	14	11	8	27	4
	2	18	14	17	7	10	13	25	10	28	24	10	13	39	16
	3	17	16	15	3	32	12	16	11	31	17	3	20	11	28



Şekil 1. Deterministik çözüm için ajan bazında yük toplamları (Total agent loads for deterministic solution)



Şekil 3. Deterministik atamaların stokastik modelde yerine konması ile elde edilen çözüm için her bir senaryo ve ajan bazında yük toplamları (Total agent loads for deterministic solution))

Çizelge 4. Test sonuçları (*Test results)*

problem	*D-B-MRGAP*		*S-B-MRGAP*		*SÇD*	Δ
	$f_{D\text{-}B\text{-}MRGAP}$	*süre*	$f_{S\text{-}B\text{-}MRGAP}$	*süre*		
5-25-1-1	660	0,11	677,37	8,94	5,00	0,7
5-25-1-2	660	0,11	693,77	10,25	9,40	1,3
5-25-2-1	649	0,06	660,03	10,44	7,17	1,1
5-25-2-2	649	0,06	673,27	1,39	10,37	1,5
5-25-3-1	664	0,08	674,47	0,56	6,17	0,9
5-25-3-2	664	0,08	700,33	26,89	7,53	1,1
5-50-1-1	1311	0,05	1330,70	3255,49	1,57	0,1
5-50-1-2	1311	0,05	1359,90	18114,14	18,30	1,3
5-50-2-1	1323	0,19	1338,33	658,19	13,30	1,0
5-50-2-2	1323	0,19	1356,10	2559,23	26,83	1,9
5-50-3-1	1313	0,09	1335,80	3166,63	5,07	0,4
5-50-3-2	1313	0,09	1358,17	14154,72	18,83	1,4
5-75-1-1	1991	0,27	2004,33	152340,28	16,23	0,8
5-75-1-2	1991	0,27	2019,63	391949,81	29,20	1,4
5-75-2-1	1933	0,27	1959,83	55,44	6,60	0,3
5-75-2-2	1933	0,27	1993,30	216251,41	18,90	0,9
5-75-3-1	1983	1,58	2011,77	3227,22	6,63	0,3
5-75-3-2	1983	1,58	2031,13	4933,31	14,80	0,7
10-25-1-1	371	0,33	390,63	5358,13	0	0
10-25-1-2	371	0,33	-	-	-	-
10-25-2-1	362	0,11	387,60	455286,06	0	0
10-25-2-2	362	0,11	-	-	-	-
10-25-3-1	375	0,31	399,93	4319,56	0	0
10-25-3-2	375	0,31	-	-	-	-
10-50-1-1	643	2,42	660,90	50356,02	3,47	0,5
10-50-1-2	643	2,42	679,50	20673,22	13,63	2,0
10-50-2-1	634	0,30	656,67	236932,63	3,07	0,5
10-50-2-2	634	0,30	677,87	63356,94	14,47	2,1
10-50-3-1	666	0,09	666,20	100001,58	13,50	2,0
10-50-3-2	666	0,09	688,37	9312,33	22,40	3,2
10-75-1-1	986	4,91	997,23	4324,3	16,00	1,6
10-75-1-2	986	4,91	1014,67	10476,98	35,27	3,4
10-75-2-1	981	8,33	997,57	4123,19	11,70	1,2
10-75-2-2	981	8,33	1015,80	10394,53	36,40	3,5
10-75-3-1	992	5,59	1012,50	3916,39	11,33	1,1
10-75-3-2	992	5,59	1028,87	9381,33	39,63	3,7

4.2. Test problemleri (Test problems)

Bu çalışmada deterministik parametreler, Özçelik ve Saraç'ın [21] çalışmasından alınmıştır. Test problemlerinde ajan sayısı (m) 5 ve 10, görev sayısı (n) 25, 50 ve 75, dönem sayısı (r) 5'dir. Kaynak tüketim miktarları ise [25, 35] aralığında düzgün dağılmaktadır.

Bu çalışma kapsamında stokastik parametreler (q_{ijtw}) s_1 ve s_2 olmak üzere iki farklı tiptedir. s_1 ve s_2 tipindeki parametreler sırasıyla $[0{,}75p_{ijt}, 1{,}25p_{ijt}]$ ve $[0{,}5p_{ijt}, 1{,}5p_{ijt}]$ aralığında düzgün dağılıma uygun olarak türetilmiştir. Tüm stokastik problemlerde senaryo sayısı (α) 30'dur.

Deterministik problemler '*m-n-örnek no'* şeklinde stokastik problemler ise '*m-n-örnek no-tip'* şeklinde isimlendirilmiştir. Örneğin; 5-25-2-2 isimli stokastik test problemi, 5 ajanın 25 görevin olduğu 2. örnek problemdir. Stokastik kaynak tüketim değerleri ise s_2 tipindedir. Tüm test problemleri için üçer örnek olmak üzere literatürden alınan 18 adet deterministik problemden yararlanarak toplamda 2×3×3×2=36 adet stokastik test problemi türetilmiştir.

4.3. Test sonuçları (Test results)

Test problemleri D-B-MRGAP ve S-B-MRGAP modelleri ile süre limiti konulmadan çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar Çizelge 4.'te verilmiştir.

Çizelge 4. dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde test problemlerinin adı, ikinci bölümde D-B-MRGAP modeli ile elde edilen amaç fonksiyonu değeri ($f_{D\text{-}B\text{-}MRGAP}$) ve çözüm süresi, üçüncü bölümde S-B-MRGAP modeli ile elde edilen amaç fonksiyonu değeri ($f_{S\text{-}B\text{-}MRGAP}$) ve çözüm süresi, son bölümde ise stokastik çözümün değeri (SÇD) ve iyileşme oranı (Δ) verilmiştir.

Çizelge 4.'ten de görülebileceği gibi, 10-25-1-2, 10-25-2-2 ve 10-25-3-2 problemlerine S-B-MRGAP modeli ile uygun çözüm bulunamamıştır. Uygun çözüm elde edilen problemler içinden sadece üçünde (10-25-1-1, 10-25-2-1 ve 10-25-3-1) SÇD sıfır olarak elde edilmiştir. Enbüyük SÇD değeri 10-75-3-2 problemi için 39,63 olarak bulunmuştur. 36 test probleminin 30'unda pozitif SÇD değeri elde edilmiştir.

Problemi stokastik ele almanın katkısını gösteren SÇD değerlerini aynı ölçeğe getirmek için her bir problem için iyileşme oranı (Δ) hesaplanmıştır. İyileşme oranı formülü (11) numaralı denklemde verilmiştir.

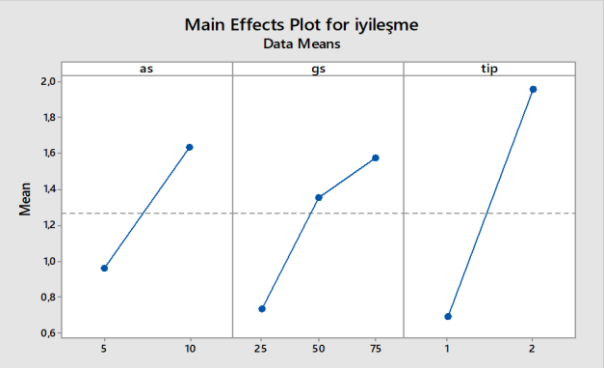
$$\Delta = 100\frac{SÇD}{f^{D}_{S-B-MRGAP}} \qquad (11)$$

Tüm test problemleri dikkate alındığında, problemi stokastik ele almanın enbüyük ajan yükünü ortalama %1,3 oranında azalttığı görülmüştür. Enbüyük ajan yükünün azalma oranının (Δ) ajan sayısı, görev sayısı ve kaynak tüketimindeki değişkenlik özellikleri bazında nasıl etkilendiğini incelemek amacıyla, varyans analizi yapılmıştır ve analiz sonuçları Çizelge 5.'te, ana etkiler grafiği ise Şekil 4.'te verilmiştir.

Çizelge 5. Varyans analizi (Analysis of variance)

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
m	1	2,4604	2,46037	12,88	0,002
n	2	1,538	0,76898	4,03	0,032
s	1	8,2996	8,29963	43,44	0,000
m×*n*	2	3,7802	1,89008	9,89	0,001
m×*s*	1	1,5712	1,57125	8,22	0,009
n×*s*	2	0,1906	0,09532	0,5	0,614
Error	23	4,3941	0,19105		
Lack-of-Fit	1	0,6611	0,66113	3,9	0,061
Pure Error	22	3,7329	0,16968		
Total	32	32,1401			

Çizelge 5.'ten de görülebileceği gibi, ajan sayısı (*m*), görev sayısı (*n*) ve kaynak tüketimindeki değişkenlik (*s*) özellikleri ve *m* ile *n*, *m* ile *s* ikili etkileşimleri kritiktir ($p < 0,05$). Şekil 4.'ten de *m*, *n* ve *s* değerleri arttıkça problemi stokastik ele almanın katkısının da arttığı görülmektedir.



Şekil 4. Ana etkiler grafiği (Main Effects Plot)

5. SONUÇ (CONCLUSION)

Bu çalışmada kaynak tüketim parametresinin stokastik olduğu enbüyük ajan yükünün enküçüklendiği darboğaz çok kaynaklı genelleştirilmiş atama problemi ele alınmıştır. Bu problemin çözümü için iki aşamalı stokastik programlama modeli geliştirilmiştir. Önerilen yöntemin performansı rassal türetilen test problemleri kullanılarak gösterilmiştir. Test sonuçları incelendiğinde, problemi stokastik ele almanın enbüyük ajan yükünü ortalama %1.3 oranında azalttığı görülmüştür. Ayrıca ajan sayısı, görev sayısı ve kaynak tüketimi değişkenliği arttıkça sağlanan katkının da arttığı ortaya konmuştur.

Gelecekte daha büyük boyutlu problemlerin çözümü için metasezgisel ya da matsezgisel algoritmalar geliştirilebilir.

ETİK STANDARTLARIN BEYANI (DECLARATION OF ETHICAL STANDARDS)

Bu makalenin yazar(lar)ı çalışmalarında kullandıkları materyal ve yöntemlerin etik kurul izni ve/veya yasal-özel bir izin gerektirmediğini beyan ederler.

YAZARLARIN KATKILARI (AUTHORS' CONTRIBUTIONS)

Tuğba SARAÇ: Fikrin oluşturulması, literatür taraması, matematiksel modelin geliştirilmesi, test problemlerinin türetilmesi, analizlerin gerçekleştirilmesi ve makalenin yazımı aşamalarında katkı sağlamıştır.

Feriştah ÖZÇELİK: Fikrin oluşturulması, literatür taraması, matematiksel modelin geliştirilmesi, test problemlerinin türetilmesi, analizlerin gerçekleştirilmesi ve makalenin yazımı aşamalarında katkı sağlamıştır.

ÇIKAR ÇATIŞMASI (CONFLICT OF INTEREST)

Bu çalışmada herhangi bir çıkar çatışması yoktur.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

[1] Eren T., Koçtepe S. and Cürebal A., "Hedef Programlama Yöntemi ile Akaryakıt İstasyonları Tanıtımı için Personel Çizelgeleme Problemi", ***Politeknik Dergisi***, 25(3): 921 – 932, (2022).

ERKEN GÖRÜNÜM

[2] Kuğu S., Yolcan O.O. and Köse R., "Kondenser Üretim Hattında Arena16.1 Destekli Hat Dengeleme Çalışması Yapılması", ***Politeknik Dergisi***, *(*): *, (*).

[3] Kaymaz E. ve Çavdur F., "Montaj hattı dengelemede yeniden işleme istasyonlarının paralel görevler için kullanımının matematiksel programlama ve simülasyon ile analizi", ***Politeknik Dergisi***, 25(1): 205-222, (2022).

[4] Fu Y, Sun J, Lai K. K. and Leung J. W. K., "A robust optimization solution to bottleneck generalized assignment problem under uncertainty", ***Annals of Operations Research***, 233: 123–133, (2015).

[5] Kogan K., Khmelnitsky E. and Ibaraki T., "Dynamic Generalized Assignment Problems with Stochastic Demands and Multiple Agent–Task Relationships", ***Journal of Global Optimization***, 31, 17–43, (2005).

[6] Morton D.P., Bard J.F. and Wang Y.M., "Solving a stochastic generalized assignment problem with branch and price", ***Computational biology: new research***, 99-128, (2009).

[7] Albareda-Sambola M., van der Vlerk M.H. and Fernandez E. "Exact solutions to a class of stochastic generalized assignment problems", ***European Journal of Operational Research***, 173 (2): 465-487, (2006).

[8] Sarin S.C., Sherali H.D. and Kim S.K., "A branch-and-price approach for the stochastic generalized assignment problem", ***Naval Research Logistics***, 61 (2): 131-143, (2014).

[9] Singh S.K. and Rani D., "A branching algorithm to solve binary problem in uncertain environment: an application in machine allocation problem". ***OPSEARCH***, 56: 1007–1023, (2019).

[10] Toktas B., Yen J.W. and Zabinsky Z.B., "Addressing capacity uncertainty in resource-constrained assignment problems", ***Computers & Operations Research***, 33 (3): 724-745, (2006).

[11] Yang F. and Chakraborty N., "Algorithm for Multi-Robot Chance-Constrained Generalized Assignment Problem with Stochastic Resource Consumption", ***IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)***, 4329-4336, (2020).

[12] Shtub A. and Kogan, K., "Capacity planning by the dynamic multi-resources generalized assignment problem (DMRGAP)", ***European Journal of Operational Research***, 105: 91-99, (1998).

[13] LeBlanc L.J. and Shtub A., Anandalingam G., "Formulating and solving production planning problems", ***European Journal of Operational Research***, 112: 54-80, (1999).

[14] Yagiura M., Iwasaki S., Ibaraki T. and Glover, F., "A very large-scale neighborhood search algorithm for the multi-resource generalized assignment problem", ***Discrete Optimization***, 1 (1): 87–98, (2004).

[15] Mitrović-Minić S. and Punnen A. P., "Local search intensified: Very large-scale variable neighborhood search for the multi-resource generalized assignment problem", ***Discrete Optimization***, 6 (4): 370–377, (2009).

[16] Özçelik F. ve Saraç T., "Farklı yeteneklere ve önceliklere sahip ajanların ve aynı ajana atanması gereken işlerin olduğu çok kaynaklı genelleştirilmiş atama problemi için bir hedef programlama modeli", ***Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi Part C: Tasarım ve Teknoloji***, 5 (1): 75-90, (2017).

[17] Janak S.L., Taylor M.S. and Floudas C.A., "Novel and effective integer optimization approach for the NSF panel-assignment problem: A multiresource and preference-constrained generalized assignment problem", ***Industrial & Engineering Chemistry Research***, 45: 258-265, (2006).

[18] Karsu Ö. and Azizoglu M., "The multi-resource agent bottleneck generalised assignment problem", ***International Journal of Production Research***, 50 (2): 309-324, (2012).

[19] Özçelik F. and Saraç T., "The bottleneck multi resource generalised assignment problem with agent and resources eligibility restrictions", ***International Symposium for Production Research***, Vienna, Austria, 13-15 September (2017).

[20] Karsu Ö. and Azizoglu M., "Bicriteria multiresource generalized assignment problem", ***Naval Research Logistics***, 61: 621-636, (2014).

[21] Özçelik F. and Saraç T. "Çok kaynaklı genelleştirilmiş atama probleminde ajan yüklerinin dengelenmesi için bir hedef programlama modeli". ***Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University***, 37(1): 193-205, (2022).

ERKEN GÖRÜNÜM