2. ve 3. Mertebeden Fuzzy Projektif Düzlemlerin Fuzzy Doğru Spreadleri

Fatma Kazanç Bekmez

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Eylül 2016

The Fuzzy Line Spreads of The Fuzzy Projective Plane of Order 2 and 3

Fatma Kazanç Bekmez

MASTER OF SCIENCE THESIS

Mathematics and Computer Sciences Department

September 2016

2. ve 3. Mertebeden Fuzzy Projektif Düzlemlerin Fuzzy Doğru Spreadleri

Fatma Kazanç Bekmez

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Süheyla Ekmekçi

Eylül 2016

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS öğrencisi Fatma Kazanç Bekmez'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "**2. ve 3. Mertebeden Fuzzy Projektif Düzlemlerin Fuzzy Doğru Spreadleri**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Süheyla Ekmekçi

İkinci Danışman : -

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Süheyla Ekmekçi

Üye : Prof. Dr. Ayşe Bayar

Üye : Doç. Dr. Mine Turan

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Süheyla Ekmekçi danışmanlığında hazırlamış olduğum "**2. ve 3. Mertebeden Fuzzy Projektif Düzlemlerin Fuzzy Doğru Spreadleri**" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 05/09/2016

Fatma Kazanç Bekmez

ÖZET

Bu çalışmada, 2. ve 3. mertebeden Fuzzy Projektif Düzlemlerinin Fuzzy Doğru Spreadleri incelenmiştir.

İlk bölümde, gerekli olan bazı tanımlar verilmiş, ilk olarak Fuzzy Projektif kavramı ve özellikleri açıklanmıştır. Bu bölümdeki genel bilgiler literatürden özetlenerek verilmiştir.

İkinci bölümde, 2. mertebeden projektif düzlemi taban kabul eden fuzzy projektif düzleminin fuzzy doğru spreadleri incelenmiştir.

Son bölümde, 3. mertebeden projektif düzlemi taban kabul eden fuzzy projektif düzlemin doğru spreadleri çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Fuzzy düzlem, Fuzzy uzay, Fano düzlemi, Fuzzy projektif düzlem, Spread, Fuzzy spread

SUMMARY

In this study, we have investigated the Fuzzy Line Spreads of the Fuzzy Projective Plane of order 2 and 3.

In the first chapter, some definitions needed in the next chapter are given. First of all, the concept and of Fuzzy Projective and its properties are explained. Infact, this cahpter is summarized from some known references.

In the second chapter, the fuzzy line spreads are studied in fuzzy projective plane with base plane that is projective plane over of order 2 field.

In the last chapter, the fuzzy line spreads are studied in fuzzy projective plane with base plane that is projective plane over of order 3 field.

Keywords: Fuzzy Plane, Fuzzy Space, Fano Plane, Fuzzy Projective Plane, Spread, Fuzzy Spread.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmamın her aşamasında deneyimlerini, bilimsel katkılarını ve desteklerini esirgemeyen değerli danışmanım

Prof. Dr. Süheyla EKMEKÇİ'ye,

her zaman fikirlerine başvurduğum ve desteklerini benden esirgemeyen sayın hocalarım

Prof. Dr. Ziya AKÇA ve Prof. Dr. Ayşe BAYAR'a

bu süreçte her zaman yanımda olup maddi, manevi bana destek olan sevgili AİLEME en içten teşekkürlerimi sunarım.

Eskişehir, 2016
Fatma Kazanç Bekmez

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET . . . . . **vi**

SUMMARY . . . . . **vii**

TEŞEKKÜR . . . . . **viii**

İÇİNDEKİLER . . . . . **ix**

ŞEKİLLER DİZİNİ . . . . . **x**

1. GİRİŞ VE AMAÇ **1**

2. TEMEL KAVRAMLAR **2**

2.1. Çeşitli Geometrik Yapılar 2

2.1.1. Afin Düzlemler 3

2.1.2. Projektif Düzlemler 5

2.1.3. Fuzzy Projektif Geometri 8

2.1.3.1. Fuzzy Projektif Noktalar 10

2.1.3.2. Fuzzy Projektif Doğrular 10

2.1.3.3. Fuzzy Projektif Düzlemler 11

3. 2. MERTEBEDEN FUZZY PROJEKTİF DÜZLEMİN FUZZY DOĞRU SPREADLERi **12**

4. 3. MERTEBEDEN FUZZY PROJEKTİF DÜZLEMİN FUZZY DOĞRU SPREADLERİ **30**

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **36**

KAYNAKLAR DİZİNİ **37**

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil		Sayfa
2.1	Afin Düzlem	4
2.2	Fano Düzlemi	6
2.3	Projektif Düzlem	7
3.1	n-Boyutlu Projektif Uzayın Noktalarının Bir Parçalanması	12
3.2	2. Mertebeden Projektif Düzlemde 3 Doğrulu Demet	14
3.3	Özel Nokta	15
3.4	Taban Noktası	16
3.5	2. Mertebeden Projektif Düzlemde 4 Doğrulu Fuzzy Spread	16
3.6	2. Mertebeden Projektif Düzlemde 5 Doğrulu Fuzzy Spreadin 1. Durumu	17
3.7	2. Mertebeden Projektif Düzlemde 5 Doğrulu Fuzzy Spreadin 2. Durumu	18
3.8	2. Mertebeden Projektif Düzlemde 5 Doğrulu Fuzzy Spreadin 3. Durumu	20
3.9	2. Mertebeden Projektif Düzlemde 5 Doğrulu Fuzzy Spreadin 4. Durumu	21
3.10	2. Mertebeden Projektif Düzlemde 5 Doğrulu Fuzzy Spreadin 5. Durumu	22
3.11	2. Mertebeden Projektif Düzlemde 5 Doğrulu Fuzzy Spreadin 6. Durumu	23
3.12	2. Mertebeden Projektif Düzlemde 6 Doğrulu Fuzzy Spreadin 1. Durumu	24
3.13	2. Mertebeden Projektif Düzlemde 6 Doğrulu Fuzzy Spreadin 2. Durumu	25
3.14	2. Mertebeden Projektif Düzlemde 6 Doğrulu Fuzzy Spreadin 3. Durumu	26
3.15	2. Mertebeden Projektif Düzlemde 6 Doğrulu Fuzzy Spreadin 4. Durumu	27
3.16	Fano Düzlemi	29
4.1	Projektif Düzleme Örnek	30
4.2	3. Mertebeden Projektif Düzlemde 4 Doğrulu Demet	31
4.3	3. Mertebeden Projektif Düzlemde 5 Doğrulu Fuzzy Spread	32
4.4	3. Mertebeden Projektif Düzlemde 6 Doğrulu Fuzzy Spreadin 1. Durumu	32
4.5	3. Mertebeden Projektif Düzlemde 6 Doğrulu Fuzzy Spreadin 2. Durumu	33
4.6	3. Mertebeden Projektif Düzlemde 6 Doğrulu Fuzzy Spreadin 3. Durumu	34
4.7	3. Mertebeden Projektif Düzlemde 6 Doğrulu Fuzzy Spreadin 4. Durumu	35

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Fuzzy mantığı, ilk olarak Zadeh tarafından 1965 de ortaya atılmış ve çalışılmıştır. Daha sonra pek çok bilim adamı fuzzy mantığını çalışmış ve geliştirmişlerdir. Fuzzy projektif geometri ise, ilk olarak 1998 de Hendrik Van Maldeghem, L. Kuijken, E. Kerre tarafından çalışılmıştır. Daha sonra Maldeghem ve Kerre, Fuzzy geometrinin bir çeşidi olan Fiber geometriyi tanımlamışlar ve çalışmışlardır. Bunlara ilaveten, Z.Akça, A. Bayar ve S. Ekmekçi Fuzzy geometri ve Fiber Geometri ile ilgili olarak çeşitli yayınlar yapmışlardır. Z.Akça, A. Bayar ve S. Ekmekçi, H.V. Maldephem fuzzy projektif uzaylarda spread kavramını tanımlamışlardır.

Bu tezin birinci bölümünde gerekli olan bazı temel kavramlara yer verilmiştir.

İkinci bölümde, bir fuzzy projektif uzayın fuzzy spread kavramı incelenmiştir. En küçük sonlu projektif uzay olan Fano düzleminin fuzzy doğru spreadlerin sınıflamaları ele alınmıştır.

Son bölümde, 3. mertebeden fuzzy projektif düzlemlerde bazı fuzzy doğru spreadlerinin mevcut olmadığı durumlar incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Çeşitli Geometrik Yapılar

Tanım: (Kuijken ve Van Maldeghem, 1999) V bir vektör uzayı $D(V)$ de V'nin alt uzaylarının bir kolleksiyonu ve $\circ$ da bu alt uzaylar arasında bir üzerinde bulunma bağıntısı olsun. $D(V)$ ve $D(V)$ üzerinde tanımlanan üzerinde bulunma bağıntısı yardımıyla tanımlanan $PG(V) = (D(V), \circ)$ geometrik yapısına **projektif uzay** denir.

U ve U' alt uzayları V' nin altuzayları olsun. Eğer $U \subseteq U'$ veya $U' \subseteq U$ şartlarından biri sağlanıyorsa U ve U' birbirinin üzerindedir denir ve $U \circ U'$ ile gösterilir.

V, herhangi bir K cismi üzerinde n+1-boyutlu vektör uzayı olsun. V nin orijini atılmış 1-boyutu altuzaylarının noktaları üzerinde denklik bağıntısı vardır. Yani X noktası Y noktasına denk olması için $X = tY$ olacak şekilde $K - \{0\}$ da bir t elemanı vardır. Bu denklik sınıflarının kümesine K cismi üzerinde n-boyutlu projektif uzay denir ve $PG(n, K)$ ile gösterilir. Eğer $K = GF(q)$ galois cismi kullanılırsa n-boyutlu projektif uzay $PG(n, q)$ ile gösterilir. Her bir denklik sınıfı projektif uzayın noktasıdır. Projektif uzayın m-boyutlu alt uzayı, V vektör uzayının m+1-boyutlu altuzayına karşılık gelir. n-boyutlu projektif uzaylarda 0-boyutlu altuzaya **nokta**, 1-boyutlu alt uzaya **doğru**, 2-boyutlu alt uzaya **düzlem**, n-1-boyutlu altuzaya **hiperdüzlem** denir.

Tanım: (Kuijken ve Van Maldeghem, 1999) V bir vektör uzayı ve V nin bir alt uzayı U olsun. U alt uzayının boyutu tabanındaki vektör sayısına eşittir ve $boy(U)$ ile gösterilir. U alt uzayının **projektif boyutu** da U nun boyutunun bir eksiğidir ve $pboy(U) = boy(U) - 1$ ile gösterilir.

V bir vektör uzayı ve V nin alt uzaylarının projektif boyutu i olsun. $i = 0$ iken alt uzaya projektif nokta, $i = 1$ iken alt uzaya projektif doğru, $i = 2$ iken alt uzaya projektif düzlem, $i = 3$ iken alt uzaya projektif uzaylar denilir. n-boyutlu projektif uzayda boyutu $n - 1$ olan alt uzaylar **hiperdüzlem** olarak adlandırılır.

Sonlu boyutlu bir projektif uzayda bütün doğrular eşit sayıda nokta içerir ve projektif uzayın mertebesi herhangi bir doğrusu üzerindeki nokta sayısının bir eksiğidir. Eğer q mertebeli sonlu bir cisim üzerindeki projektif uzaylarda, bir doğru üzerindeki noktaların sayısı $q + 1$ e eşittir ve projektif uzayın mertebesi q dır.

Tanım: (Kuijken ve Van Maldeghem, 1999) $\mathcal{P}$ n-boyutlu bir projektif uzay olsun. $\mathcal{P}$ de aşikar olmayan ($\emptyset$ ve $\mathcal{P}$ den farklı alt uzaylar) ve $\forall j \leq i \leq m \leq n-1$ için $U_j \subset U_i$ olacak şekilde içiçe geçmiş farklı alt uzayların $(U_0, U_1, ...,U_m)$ ayrık dizisine $\mathcal{P}$ de bir **flag** denir. Bir flagın rankı onun içerdiği alt uzayların sayısına eşitir. $\mathcal{P}$ de maksimal bir flag n uzunluğunda bir flagdir.

U_i altuzayının boyutu i olsun. $\{i, i+1, ...,m\}$ şeklinde bir flag aşikar olmayan alt uzayların ve $\forall j \leq i < k \leq m \leq n-1$ için $U_j \subset U_k$ olacak şekilde farklı alt uzayların $(U_i, U_{i+1}, ...,U_m)$ ayrık dizisidir, bu flag kısaca $[i,m]$ flag olarak da gösterilebilir.

Örneğin PG(3,q) projektif uzayında

U_0 : Bir q noktası
U_1 : q noktasından geçen bir d doğrusu
U_2 : d doğrusunu içeren bir projektif düzlem

olarak düşünüldüğünde (U_0, U_1, U_2) aşikar olmayan flagdir.

2.1.1 Afin Düzlemler

Tanım 1. *(Kaya, 2005) $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ elemanları sırası ile noktalar ve doğrular kümesi olsun.*

(1) *$N_1, N_2, N_3, ... \in \mathcal{N}$ noktaları için $N_i \circ d$ ve $i = 1, 2, 3, ...$ olacak şekilde bir $d \in \mathcal{D}$ var ise bu noktalara **doğrudaş noktalar** denir.*

(2) *$d_1, d_2, d_3, ... \in \mathcal{D}$ doğruları için $N \circ d_i$ ve $i = 1, 2, 3, ...$ olacak şekilde bir $N \in \mathcal{N}$ var ise bu doğrulara **noktadaş doğrular** denir.*

(3) *$d_1, d_2 \in \mathcal{D}$ ve $d_1 \neq d_2$ olsun. $N \circ d_1$ ve $N \circ d_2$ olacak şekilde hiçbir $N \in \mathcal{N}$ noktası yok ise d_1 ve d_2 doğrularına **paralel doğrular** denir ve $d_1 \parallel d_2$ ile gösterilir.*

Tanım 2. *(Kaya, 2005) $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ elemanları sırası ile noktalar ve doğrular olsun ve $\mathcal{N} \cap \mathcal{D} = \varnothing$ özelliğine sahip iki küme, $\circ$ da $\mathcal{N} \times \mathcal{D}$ kümesinde tanımlanan bir üzerinde bulunma bağıntısı ($\circ \subset \mathcal{N} \times \mathcal{D}$) olmak üzere aşağıda verilen A1, A2 ve A3 aksiyomlarını sağlayan $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ sistemine **afin düzlem** denir.*

(A1) *$\forall\, M, N \in \mathcal{N}$ ve $M \neq N$ noktalarından geçen tek bir $d \in \mathcal{D}$ doğrusu vardır.*

(A2) *$N \not\circ d$ olmak üzere her $N \in \mathcal{N}$ ve $d \in \mathcal{D}$ için $N \circ c$ ve $d \parallel c$ olacak şekilde tek bir $c \in \mathcal{D}$ doğrusu vardır.*

*(**A3**) Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.*

Tanım 3. *(Kaya, 2005) Paralel olmayan farklı c ve d doğrularının üzerinde bulunan noktaya bu doğruların **arakesiti** veya **kesişme noktası** denir, cd veya $c \wedge d$ ile gösterilir.*

Tanım 4. *(Kaya, 2005) Her sonlu $\mathcal{A}$ afin düzlemi için $n \geq 2$ olmak şartıyla*

*(**1**) Her doğrusu üzerinde tam olarak n tane nokta vardır.*

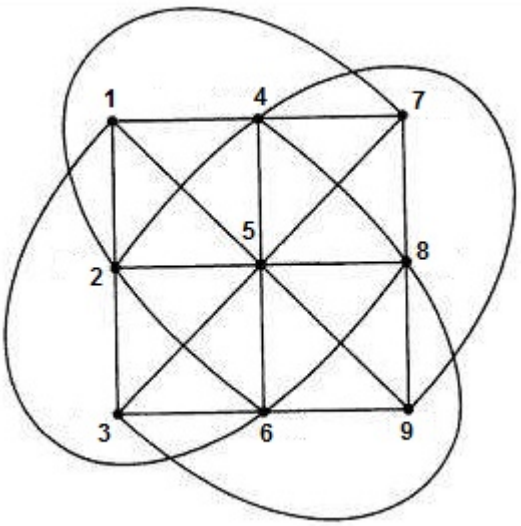
*(**2**) Her noktası tam olarak $n+1$ tane doğru üzerindedir.*

*(**3**) Toplam nokta sayısı n^2 dir.*

*(**4**) Toplam doğruların sayısı n^2+n dir.*

Örnek 1. 3. *mertebeden bir afin düzlemin toplam* 9 *noktası ve* 12 *doğrusu vardır. Şekil 2.1 de incelenecek olursa;*

$\mathcal{N} = \{N_1, N_2, N_3, ..., N_9\}$ *ve* $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, d_3, ..., d_{12}\}$ *kümelerinde* $i \neq j$ *için* $N_i \neq N_j$ *ve* $d_i \neq d_j$ *olsun.*



Şekil 2.1 Afin Düzlem

2.1.2 Projektif Düzlemler

Tanım: (Kaya, 2005) $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ elemanları sırası ile noktalar ve doğrular olan ayrık iki küme (yani $\mathcal{N} \cap \mathcal{D} = \varnothing$ özelliğine sahip iki küme) ve $\circ$ da $\mathcal{N} \times \mathcal{D}$ kümesinde tanımlanan bir üzerinde bulunma bağıntısı (yani $\circ \subset \mathcal{N} \times \mathcal{D}$) olmak üzere aşağıda verilen P1, P2 ve P3 aksiyomlarını gerçekleyen ($\mathcal{N}$,$\mathcal{D}$, $\circ$) sistemine bir **projektif düzlem** denir

P1: Her $M, N \in \mathcal{N}$, $M \neq N$ için $M \circ d$ ve $N \circ d$ olacak şekilde bir tek $d \in \mathcal{D}$ doğrusu vardır. Yani farklı iki nokta bir tek doğru belirtir.

P2: Her $c, d \in \mathcal{D}$, için $N \circ c$ ve $N \circ d$ olacak şekilde en az bir $N \in \mathcal{N}$ noktası vardır. Yani iki doğrunun en az bir ortak noktası vardır.

P3: Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

Teorem: (Kaya, 2005) Bir $\mathbb{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ projektif düzleminde farklı iki doğru üzerinde bulunan en çok bir nokta vardır.

Teorem: (Kaya, 2005) Her sonlu $\mathbb{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ projektif düzlemi için aşağıdaki koşullara uyan bir $n \geq 2$ pozitif tam sayısı vardır. (Bu tam sayıya ilgili projektif düzlemin mertebesi denir).

(1) $\mathbb{P}$ nin her doğrusu üzerinde tam olarak $n + 1$ tane nokta bulunur.

(2) $\mathbb{P}$ nin her noktası tam olarak $n + 1$ tane doğru üzerindedir.

(3) $\mathbb{P}$ deki noktaların toplam sayısı $n^2 + n + 1$ dir.

(4) $\mathbb{P}$ deki doğruların tam sayısı $n^2 + n + 1$ dir.

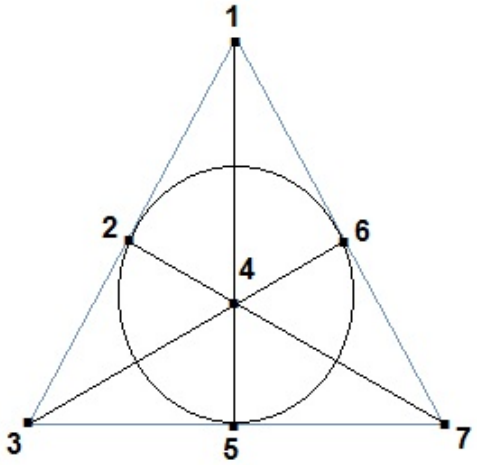
Teorem: (Kaya, 2005) Verilen her F cismi için nokta ve doğruları bu cismin elemanlarıyla cebirsel olarak belirlenebilen bir projektif düzlem vardır.

F herhangi bir cisim olsun. Elemanları noktalar olan noktalar kümesi N, elemanları doğrular olan doğrular kümesi D ve üzerinde bulunma bağıntısı $\circ$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} N=\{(x_1,x_2,x_3) : \lambda(x_1,x_2,x_3) &\equiv (x_1,x_2,x_3), \lambda \neq 0, \lambda \in \mathcal{F}\} \\ \mathcal{D}=\{[a_1,a_2,a_3] : \lambda[a_1,a_2,a_3] &\equiv [a_1,a_2,a_3], \lambda \neq 0, \lambda \in \mathcal{F}\} \\ (x_1,x_2,x_3) \circ [a_1,a_2,a_3] &\Leftrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır. Bu ($\mathcal{N}$,$\mathcal{D}$, $\circ$) sistemi bir projektif düzlemdir. F cismi yardımıyla tanımlanan bu projektif düzleme cisim düzlemi denir ve genel olarak $\mathbb{P}_2F$ ile gösterilir.

Özel olarak $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ve $\mathbb{Q}$ cisimleri için $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ gerçel projektif düzlem, $\mathbb{P}_2\mathbb{C}$ kompleks projektif düzlem, $\mathbb{P}_2\mathbb{Q}$ rasyonel projektif düzlem olarak adlandırılır. Bunlardan özellikle $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ düzlemi düzlemler teorisinin en önemli ve iyi bilinen örneğidir. Şekil 2.2 de Fano düzlemine yer verilmiştir.



Şekil 2.2 Fano Düzlemi

Örnek 2. *(Kaya, 2005) En küçük projektif düzlem 7 noktadan ve 7 doğrudan oluşur.* $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ *ve* $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7\}$ *olsun.*

$$d_1 = \{1, 2, 3\}, \quad d_2 = \{1, 4, 5\} \quad d_3 = \{1, 6, 7\}$$
$$d_4 = \{2, 5, 6\} \quad d_5 = \{3, 4, 6\} \quad d_6 = \{3, 5, 7\}$$
$$d_7 = \{2, 4, 7\}$$

Yedi noktalı böyle bir projektif düzleme ***Fano düzlemi*** *denir.*

Teorem 1. *(Kaya, 2005) Her afin düzlemin tamamlanmışı bir projektif düzlemdir.*

İspat. $\mathcal{A} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ *bir afin düzlem,* $\left(\mathcal{N}', \mathcal{D}', \circ\right)$ *da bu afin düzlemin tamamlanmışı olsun.* $\left(\mathcal{N}', \mathcal{D}', \circ\right)$ *nin projektif düzlem olması için* $P1, P2, P3$ *aksiyomlarını sağlaması gerekir.* $N, M \in \mathcal{N}'$ *alalım.* $P1$ *aksiyomu için üç durum vardır;*

(i) *Eğer* $N, M \in \mathcal{N}$ *ise* $N \notin d_\infty$ *ve* $M \notin d_\infty$ *olduğundan* $A1$ *aksiyomundan dolayı* $P1$ *aksiyomu sağlanır.*

(ii) *Eğer $N \in \mathcal{N}$ ve $M \notin \mathcal{N}$ ise $M = M_\infty$ olur. M_∞ noktasını belirleyen demetteki her doğru N den geçemeyeceğine göre $N \not\circ m$ olacak şekilde bir m doğrusu vardır ve $A2$ aksiyomundan dolayı da N noktasından geçen m doğrusuna paralel tek bir d doğrusu vardır($N \circ d$ ve $m \parallel d$). Dolayısıyla d nin genişletilmişi MN doğrusudur.*

(iii) *Eğer $N, M \notin \mathcal{N}$ ise o halde bu iki nokta ideal noktadır ve iki ideal noktadan sadece ideal doğru geçer.*

Dolayısıyla üç durumda da $P1$ aksiyomu sağlanır. $P2$ aksiyomu için $c, d \in \mathcal{D}'$ olsun. Yine üç durum vardır;

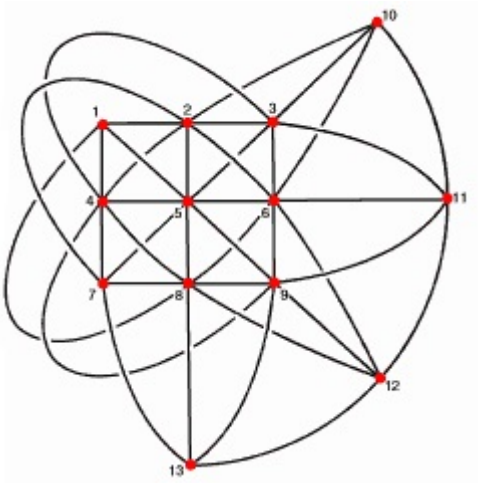
(i) *Eğer $c \neq d_\infty$, $d \neq d_\infty$ ve $c \nparallel d$ ise $cd \in \mathcal{N}$ noktası vardır.*

(ii) *Eğer $c \neq d_\infty$, $d \neq d_\infty$ ve $c \parallel d$ ise $cd = C_\infty = D_\infty$ olur.*

(iii) *Eğer $c \neq d_\infty$, $d = d_\infty$ ise o halde $cd = C_\infty$ olur.*

Dolayısıyla üç durumda da $P2$ aksiyomu sağlanır. $P3$ aksiyomu için de herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta gerekir. Bu noktalardan hiçbiri d_∞ üzerinde olmadığından bunlar $\mathbb{A}$ nın tamamlanışında da aynı özelliğe sahiptir.

Sonuç olarak projektif düzlemin üç aksiyomunu da sağladığı için afin düzlemin tamamlanmışı bir projektif düzlemdir. Şekil 2.3 de 3. mertebeden afin düzlemin tamamlanmışı olan 3. mertebeden projektif düzlem görülmektedir.



Şekil 2.3 Projektif Düzlem

2.1.3 Fuzzy Projektif Geometri

Tanım: (Zadeh, 1965) X boş kümeden farklı bir küme olsun. X kümesi üzerinde μ **fuzzy kümesi**

$$\begin{aligned} \mu: \quad & X \to [0,1] \\ & x \to \mu(x) \end{aligned}$$

dönüşümüdür. $\mu(x)$ sayısına , x noktasının **üyelik derecesi** şeklinde adlandırılır.

Tanım: (Zadeh, 1965) μ bir X kümesi üzerinde bir fuzzy kümesi olsun. O zaman $t \in (0,1]$ için

$$\mu_t = \{x \in X : \mu(x) \geq t\}$$

kümesine μ fuzzy kümesinin **seviye alt kümesi** denir.

Tanım: (Rosenfeld, 1971) $(G, \cdot)$ *bir grup olsun.* G üzerinde μ *fuzzy kümesi* $\forall x, y \in G$ için

$$(1)\mu(x \cdot y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$$
$$(2)\mu(x^{-1}) = \mu(x)$$

şartlarını sağlıyorsa μ ye G nin **fuzzy alt gurubudur** denir. Burada, $\wedge$ **minimum operatörü**nü ifade eder.

Teorem: (Rosenfeld, 1971) G bir grup ve grubun etkisiz elemanı e olsun. $\forall a \in G$ için $\mu(e) \geq \mu(a)$ dır.

İspat: $\forall a \in G$ için G'nin etkisiz elemanı $e = a \cdot a^{-1}$ şeklinde yazılabilir. Eğer $e = a \cdot a^{-1}$ ise $\mu(e) = \mu(a \cdot a^{-1})$ dir. Önceki tanımda verilen (1) ve (2) koşullarından

$$\begin{aligned} \mu(e) &= \mu(a \cdot a^{-1}) \\ &\geq \mu(a) \wedge \mu(a^{-1}) \\ &= \mu(a) \wedge \mu(a) \\ &= \mu(a) \end{aligned}$$

olur. Buradan.$\mu(e) \geq \mu(a)$ elde edilir.

Teorem: (Rosenfeld, 1971) G grubu üzerinde bir μ fuzzy kümesi G grubunun fuzzy alt grubudur ancak ve ancak $\forall x, y \in G$ için

$$\mu(x \cdot y^{-1}) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$$

dir.

İspat: G grubu üzerinde bir μ fuzzy kümesi G grubunun fuzzy alt grubu olsun $\forall x, y \in G$ için

$$\begin{aligned} \mu(x \cdot y^{-1}) &\geq \mu(x) \wedge \mu(y^{-1}) \\ &= \mu(x) \wedge \mu(y) \end{aligned}$$

olduğundan dolayı $\mu(x \cdot y^{-1}) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$ olur.

Bu durum "*G grubunun H alt kümesinin G nin alt grubu olması için gerek ve yeter şart $\forall a, b \in H$ için $a \cdot b^{-1} \in H$ olmasıdır.*" önermesine benzer bir durumdur.

Önerme: Bir G grubu üzerinde bir μ fuzzy kümesi G nin bir fuzzy alt grubudur ancak ve ancak $\forall t \in [0, \mu(e)]$ için μ_t'nin G nin bir alt grubu olmasıdır.

Eğer G_i yukarıdaki gibi bir alt gurupsa e nin üyelik derecesi $G_1 \setminus e$ nin elemanlarının üyelik dercesinden daha büyük olmalıdır. $G_1 \setminus e$ nin elemanlarının üyelik dereceside $G_2 \setminus G_1$ in elemanlarının üyelik dercesinden daha büyük olmalıdır, böyle devam edilirse $G_n \setminus G_{n-1}$ in elemanlarının üyelik derecesi en düşük olmalıdır. μ nün seviye alt kümeleri $G_i \setminus G_{i-1}$ ile verilir. G nin alt grupları zincirinin maksimum seçilmesine gerek olmadığını belirtebiliriz.

Yukarıda belirtilenler doğrultusunda $\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset ... \subset G_n = G$ altgrupları zinciri ve $[0, 1]$ aralığındaki $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$ reel sayıları için G nin μ fuzzy alt grubu

$$\begin{aligned} \mu : \ & G \longrightarrow [0,1] \\ & p \longrightarrow a_0 \quad , \ p = e = G_0 \ \text{ ise} \\ & p \longrightarrow a_1 \quad , \ p \in G_1 \setminus e \ \text{ için} \\ & p \longrightarrow a_2 \quad , \ p \in G_2 \setminus G_1 \ \text{ için} \\ & ... \\ & p \longrightarrow a_n \quad , \ p \in G_n \setminus G_{n-1} \ \text{ için} \end{aligned}$$

şeklinde oluşturulabilir. Burada a_0, a_1, a_2,..., a_n reel sayıları sırasıyla $e = G_0$, $G_1 \setminus e$, $G_2 \setminus G_1$,..., $G_n \setminus G_{n-1}$ alt kümelerinin elemanlarının üyelik dereceleridir.

Tanım: (Lubczonok, 1990) $\mathcal{P}$, n-boyutlu bir projektif uzay ve $\mathcal{P}$ üzerinde bir fuzzy kümesi λ olsun. $\mathcal{P}$ nin her p, q, r doğrudaş noktaları için

$$\lambda(p) \geq \lambda(q) \wedge \lambda(r)$$

şartı sağlanıyorsa λ ya $\mathcal{P}$ üzerinde n-**boyutlu fuzzy projektif uzayı** denir ve $[\lambda, \mathcal{P}]$ ile gösterilir. $\mathcal{P}$ projektif uzayına $[\lambda, \mathcal{P}]$ nin taban projektif uzayı denir.

Tanım: (Lubczonok, 1990) V vektör uzayı ve L, V nin bir vektör doğrusu olsun. $a_0 \geq a_1,\ a_i \in [0,1]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \lambda: \quad L &\to [0,1] \\ o &\to a_0 \\ u &\to a_1,\ u \in L \backslash \{o\} \end{aligned}$$

dönüşümüne fuzzy vektör doğru denir ve(λ, L) ile gösterilir.

Tanım: (Lubczonok, 1990) V vektör uzayı ve M, V nin bir vektör düzlemi olsun. $a_0 \geq a_1 \geq a_2,\ a_i \in [0,1]$ ve L, M de bir vektör doğru olmak üzere

$$\begin{aligned} \lambda: \quad M &\to [0,1] \\ o &\to a_0 \\ u &\to a_1,\ u \in L \backslash \{o\} \\ u &\to a_2,\ u \in M \backslash L \end{aligned}$$

dönüşümüne fuzzy vektör düzlem denir ve(λ, M) ile gösterilir.

2.1.3.1 Fuzzy Projektif Noktalar

Bir projektif nokta sadece bir vektör doğrusudur. V nin bir vektör doğrusu L olmak üzere (μ, L) fuzzy vektör doğrusundan başlayarak bir fuzzy projektif nokta inşa edilecektir. Fuzzy vektör doğrusu:
$a_0 \geq a_1\ ,\ a_i \in [0,1]$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} \mu: \quad L &\longrightarrow [0,1] \\ \vec{0} &\longmapsto a_0 \\ \vec{u} &\longmapsto a_1 \qquad ,\ \vec{u} \in L \backslash \left\{ \vec{0} \right\} \end{aligned}$$

dır. L vektör doğrusuna karşılık gelen projektif nokta p ile gösterilsin. Böylece $p \in PG(V)$ dir. p üzerinde bir μ' fuzzy projektif nokta oluşturabilmek için boyutu bir birim kadar daha küçük almak zorunda olduğumuzdan, L vektör doğrusuna karşılık gelen $\vec{0}$ vektörünün değeri seçilemez. Dolayısıyla p üzerinde bir μ' fuzzy projektif nokta aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} \mu': \quad \{p\} &\longrightarrow [0,1] \\ p &\longmapsto a_1 \end{aligned}$$

Burada fuzzy vektör uzayı notasyonundan farkı açıkca belirtmek adına, bu nokta $[\mu', p]$ köşeli parantez şeklinde gösterilecektir. (Kuijken ve Van Maldeghem, 1999)

2.1.3.2 Fuzzy Projektif Doğrular

Fuzzy projektif doğru içinde benzer şeyler yapılacaktır. $\alpha,\ V$ nin bir vektör düzlemi olsun. (μ, α) fuzzy vektör düzlemi aşağıdaki formdadır: $a_0 \geq a_1 \geq a_2\ ,\ a_i \in [0,1]$

olmak üzere;

$$\begin{array}{rlll} \mu: & \alpha & \longrightarrow [0,1] & \\ & \vec{0} & \longmapsto a_0 & \\ & \vec{u} & \longmapsto a_1 \quad , & \vec{u} \in L \\ & \vec{u} & \longmapsto a_2 \quad , & \vec{u} \in \alpha \backslash L \quad (L,\ \alpha \text{ nın vektör doğrusu}) \end{array}$$

dır. $M,\ \alpha$ vektör düzlemine karşılık gelen projektif doğru, $L \subseteq \alpha$ vektör doğrusuna da karşılık gelen projektif nokta p olsun. O halde M üzerinde bir μ' fuzzy projektif doğrusu aşağıdaki gibi tanımlanır:
$a_1 \geq a_2$ ve $a_i \in [0,1]$ olmak üzere;

$$\begin{array}{rlll} \mu': & M & \longrightarrow [0,1] & \\ & p & \longmapsto a_1 & \\ & q & \longmapsto a_2 \quad , & q \in M \backslash \{p\} \end{array}$$

dir ve bu fuzzy projektif doğru $[\mu', M]$ şeklinde gösterilecektir. Bir fuzzy projektif doğru bir fuzzy vektör doğru gibi görünüyor. Fark ise fuzzy vektör doğrusu üzerinde en büyük üyelik derecesine sahip olan V nin $\vec{0}$ orijin noktasının fuzzy projektif doğru üzerinde herhangi bir nokta olabilir, bu durum ise vektör düzlemine karşılık gelen özel bir doğruya bağlıdır. (Kuijken ve Van Maldeghem, 1999)

2.1.3.3 Fuzzy Projektif Düzlemler

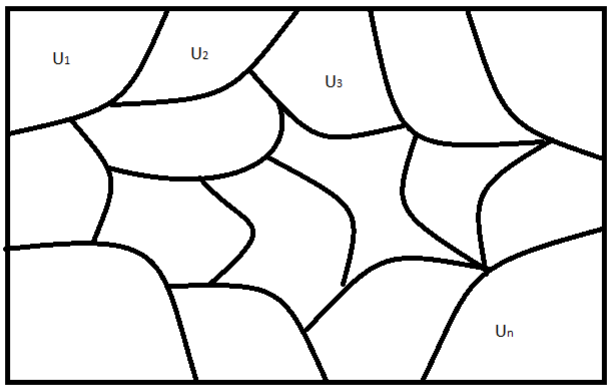
P, bir projektif düzlem olsun.

$$\begin{array}{rlll} (\lambda, \mathcal{P}): & P & \longrightarrow [0,1] & \\ & q & \longmapsto a_1 & \\ & p & \longmapsto a_2 \quad , & p \in L \backslash \{q\} \\ & p & \longmapsto a_3 \quad , & p \in P \backslash L \end{array}$$

$a_3 \geq a_2 \geq a_1$ olmak üzere (λ,P) yapısına fuzzy projektif düzlem denir. L, P projektif düzleminde belli bir doğru ve q, L üzerinde belli bir noktadır. (Kuijken ve Van Maldeghem, 1999)

3. 2. MERTEBEDEN FUZZY PROJEKTİF DÜZLEMİN FUZZY DOĞRU SPREADLERİ

Afin geometri ile projektif geometri arasında sıkı bir ilişki vardır. Bir afin uzay gerçekte, bir projektif uzayla aynı şeydir. Çünkü projektif uzaydan maximal boyutlu bir altuzay bütün altuzayları ile birlikte atıldığında geriye kalan yapı bir afin düzlemdir. Yani afin düzlem, bir doğru ve üzerindeki tüm noktalarıyla atılmış bir projektif düzlemdir. Dezargsel olmayan bir projektif düzlem elde etmenin yolu projektif uzayın spread kavramını kullanmaktır. V, herhangi bir K cismi üzerinde n+1-boyutlu vektör uzay olsun. PG(V) =PG(n,K) projektif uzayının j-spreadi, j-boyutlu projektif altuzayların bir kümesidir ki bu küme n-boyutlu projektif uzayın noktalarının Şekil 3.1 deki gibi bir parçalanmasıdır. Yani $j < n, j \in N$ ve U_i kümesi $PG(n, K)$ projektif uzayının j-boyutlu altuzayları olmak üzere $\bigcup U_i = PG(n, K)$ ve $U_i \bigcap U_k = \emptyset, i \neq k$ ise U_i kümesine j-spread (Akça vd. 2006) denir.



Şekil 3.1 n-Boyutlu Projektif Uzayın Noktalarının Bir Parçalanması

Örneğin, 3-boyutlu PG(3,K) projektif uzayının S doğru spreadini elde etmek için PG(3,K) yı 4-boyutlu PG(4,K) nın 3-boyutlu altuzayı olarak düşünmek gerekir. Bunun için bir A yapısının noktalar kümesi PG(3,K) da olmayan PG(4,K) nın noktalarıdır. A yapısının doğrular kümesi, PG(3,K) da içerilmeyen PG(4,K) nın sabit bir α düzlemindeki, A nın noktalar kümesinin bir alt kümesidir, öyleki α∩PG(3,K) S spreadinin tek bir elemanlarını

oluşturur. Böylece elde edilen bu A yapısı bir afin düzlemdir. Örneğin $K = GF(2)$ cismi üzerindeki $PG(3,2)$ nin toplam nokta sayısı 15 ve toplam doğru sayısı 35 dir. $PG(3,2)$ nin $\mathcal{N}$ noktalar kümesi

$$\mathcal{N} = \{(a,b,c,d) : a,b,c,d \in GF(2), \text{hepsi birden sıfır değil }\}$$

$$\begin{aligned} N = \; & \{(1,0,0,0), \quad (0,1,0,0), \quad (0,0,1,0), \quad (0,0,0,1), \quad (1,1,0,0), \\ & (1,0,1,0), \quad (1,0,0,1), \quad (1,1,1,0), \quad (1,1,0,1), \quad (1,0,1,1), \\ & (0,1,1,1), \quad (0,0,1,1), \quad (0,1,0,1), \quad (0,1,1,0), \quad (1,1,1,1)\} \end{aligned}$$

dır. Beş doğrulu spread için l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 doğruları şöyledir.

$$\begin{aligned} l_1 : \; & (1,0,0,0), \quad (0,1,0,0), \quad (1,1,0,0) \\ l_2 : \; & (0,0,1,0), \quad (0,0,0,1), \quad (0,0,1,1) \\ l_3 : \; & (1,0,1,0), \quad (0,1,0,1), \quad (1,1,1,1) \\ l_4 : \; & (1,1,1,0), \quad (0,1,1,1), \quad (1,0,0,1) \\ l_5 : \; & (1,0,1,1), \quad (1,1,0,1), \quad (0,1,1,0) \end{aligned}$$

dır. $l_i \cap l_j = \emptyset$ ve $\cup l_i = PG(3,2)$ olduğundan l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 doğrulu spreaddir. Projektif uzaylardaki spread kavramı fuzzy teoriye (Akça vd. 2006) ile aktarılmıştır. Fuzzy projektif noktaların doğrudaşlığı aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

Tanım 5. *(Akça vd. 2006) P, n-boyutlu projektif uzay olsun. P üzerindeki fuzzy n-boyutlu projektif uzay (λ, P) olmak üzere P deki doğrudaş p, q, r noktaları için $\lambda(p) \geq \lambda(q) \wedge \lambda(r)$ ise $\lambda(p), \lambda(q), \lambda(r)$ fuzzy noktaları fuzzy doğrudaştır denir.*

Yani bir doğru üzerindeki noktalar kümesinde, bir nokta hariç bütün elemenlar aynı üyelik derecesine sahiptir.

Tanım 6. *(Akça vd. 2006) λ, $\mathcal{P}$ projektif uzayı üzerinde fuzzy projektif uzay olsun. $\mathcal{P}$ projektif uzayının her x noktası için*

$$\lambda(x) = \sum_{\mu \in S} \mu(x)$$

olacak şekilde sabit boyutlu fuzzy projektif altuzayların bir S kümesine $(\lambda, \mathcal{P})$ fuzzy projektif uzayının bir fuzzy spreadi denir.

Örnek 3. *(Akça vd. 2006) P, s. mertebeden projektif düzlem olsun. Fuzzy projektif düzlemde bir fuzzy projektif spreadi oluşturan bütün doğruların λ_i fuzzy kümelerini inceleyelim.*

P, projektif düzlemine karşılık gelen fuzzy projektif düzlem (λ, P) *olsun. Bu*

$$\begin{aligned} \lambda: \quad P &\rightarrow (0,1] \\ q &\rightarrow a_0 \\ p &\rightarrow a_1, p \in L_\infty - \{q\} \\ p &\rightarrow a_2, p \in P - L_\infty \end{aligned}$$

$a_0 \geq a_1 \geq a_2,\ a_0, a_1, a_2 \in (0,1]$. *x, P de bir nokta olmak üzere x noktasından geçen* $l_1, l_2, ..., l_{s+1}$ *doğruları için*

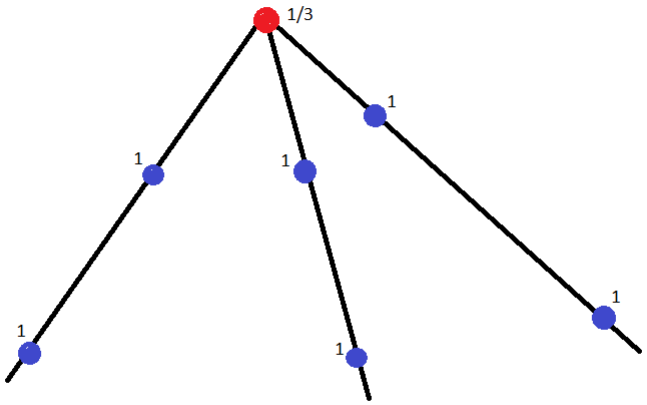
$$\lambda_i(x) = \frac{\lambda(x)}{s+1}$$

olmak üzere (λ_i, l_i) *fuzzy doğruları elde edilir.* $\{(\lambda_1, l_1), (\lambda_2, l_2), ..., (\lambda_{s+1}, l_{s+1})\}$ *kümesi bir fuzzy doğru spread oluşturur.*

2.mertebeden projektif düzlemlerde toplam 7 nokta vardır. 2. mertebeden fuzzy projektif düzlemde tüm taban noktalarının içeren en küçük konfigrasyon bir noktadan geçen 3-doğrulu yapıdır. 2. mertebeden fuzzy projektif düzlemin fuzzy doğru spreadlerinin incelenmesi bir noktadan geçen 3-doğrulu konfigrasyonlar ile başlayacaktır.

Önerme 1. *2. mertebeden projektif düzlemin en çok* 3*-doğrulu fuzzy spreadi yoktur.*

İspat. *2. mertebeden projektif düzlemin tüm noktalarını kapsayan üç doğrulu konfigrasyonu Şekil 3.2 deki gibi verilir.*



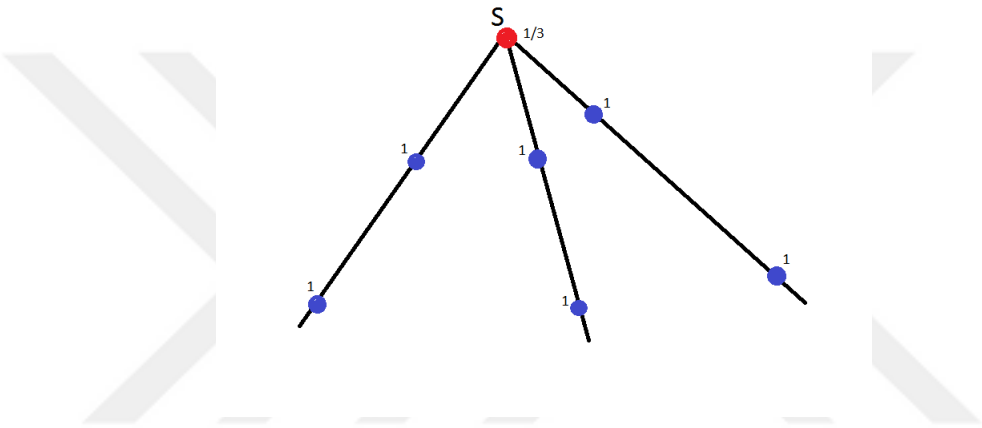
Şekil 3.2 2. Mertebeden Projektif Düzlemde 3 Doğrulu Demet

2. mertebeden projektif düzlemin tüm noktalarını üzerinde bulunduran üç doğrunun arakesit noktasının üyelik derecesi $\frac{1}{3}$ *geriye kalan bütün noktaların üyelik dereceleri* 1 *dir.*

Böylece demetteki her doğru üzerinde üyelik derecesi 1 olan iki nokta oluşur. Bu, bir doğru üzerinde üyelik derecesi 1 olan iki taban noktası olması demektir. Bu ise fuzzy doğru tanımı ile çelişir. Böylece 2. mertebeden projektif düzlemin 3-doğrulu fuzzy spreadi yoktur.

Tanım 7. *Bir noktadaki fuzzy spreadin altuzaylarının sayısına o noktanın ağırlığı denir. Maksimum ağırlığa sahip noktaya özel (special) nokta denir.*

Örneğin Şekil 3.3 görüldüğü gibi S noktasından 3 diğer noktalardan 1 doğru geçer. S nin ağırlığı 3, diğer noktaların ağırlığı 1 dir. S special(özel) noktadır.



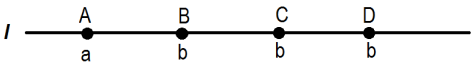
Şekil 3.3 Özel Nokta

Tanım 8. *En büyük üyelik derecesine sahip olan noktaya fuzzy altuzayının taban noktası denir.*

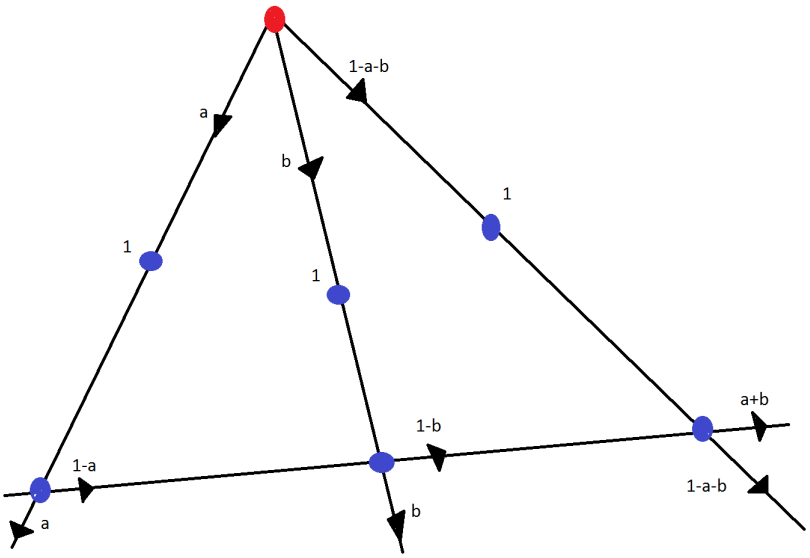
Örneğin Şekil 3.4 de l doğrusu üzerinde A noktasının üyelik derecesi a, diğer noktaların üyelik derecesi b dir. a>b olduğundan A taban noktasıdır. l doğrusu bu durumda (a,b) olarak gösterilir.

Önerme 2. *2. mertebeden projektif düzlemin tam olarak dört doğruya sahipse* $a \geq b$, $2a+b = 1$ *ve* $a \geq 2, 2a+b = 1$ *ve* $a, b \in (0,1)$ *olmak üzere* $(1,a),\ (1,b)$ *noktadaş fuzzy doğruları ile* $(1-a, 1-b)$ *fuzzy doğrularından oluşur.*

İspat: 2. mertebeden projektif düzlemin tüm noktalarını içeren 4-doğrulu konfigrasyonu Şekil 3.5 deki gibi olup aşağıdaki bağıntılar elde edilir.



Şekil 3.4 Taban Noktası



Şekil 3.5 2. Mertebeden Projektif Düzlemde 4 Doğrulu Fuzzy Spread

$$1 \geq a$$
$$1 \geq b$$

dir. Ayrıca $a \geq b$ iken $1 - b \geq 1 - a$ dir. Böylece $2a + b = 1$ elde edilir. Buna göre şekilden de görüldüğü gibi fuzzy spreaddeki fuzzy doğruları $(1, a),\ (1, a),\ (1, b), (1 - a, 1 - b)$ dir.

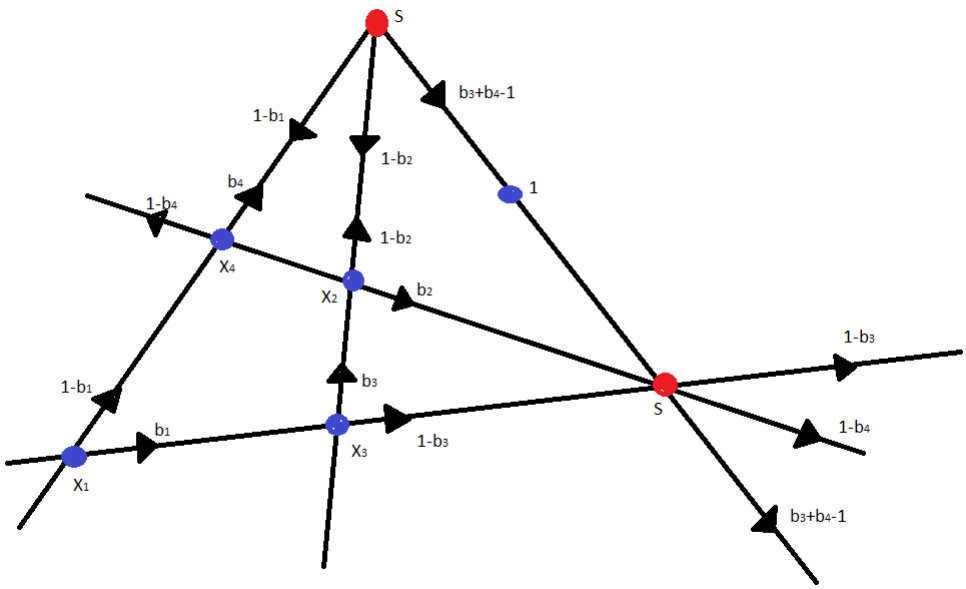
Önerme 3. *2. mertebeden projektif düzlemin* 5*-doğrulu fuzzy spreadi aşağıdaki durumlarda vardır:*

(i) *Hiçbir taban nokta, özel nokta değildir.*

(ii) *Tam olarak bir taban nokta, bir özel nokta üzerindedir.*

(iii) *İki taban nokta aynı özel nokta üzerindedir.*

İspat. ***(i)*** *Şekil 3.6 da görülüğü gibi* b_1, b_2, b_3, b_4 *dört doğrunun* X_1, X_2, X_3, X_4 *taban noktalarının üyelik dereceleri olsun.Tanımdan özel ve üyelik derecesi atanan noktalar dışında kalan noktanın üyelik derecesi 1 olur. Şekil 3.6 daki* X_1, X_2, X_3, X_4 *noktalarının herbiri özel olmayan diğer noktalar üzerinde olsun.* X_3, X_4 *Bu durumda 2. mertebeden projektif düzlemin* 5*-doğrulu ve 7 noktalı şekli aşağıdaki gibidir: Diğer noktaların üyelik*



Şekil 3.6 2. Mertebeden Projektif Düzlemde 5 Doğrulu Fuzzy Spreadin 1. Durumu

dereceleri şekilde görüldüğü gibi elde edilir ve aşağıdaki bağıntılar bulunur.

$$\begin{aligned} b_3 + b_4 - 1 + 1 - b_1 + 1 - b_2 &= 1 \\ b_1 + b_2 &= b_3 + b_4 \end{aligned}$$

ve

$$b_1 \geq 1 - b_3$$

$$b_2 \geq 1 - b_4$$

$$b_3 \geq 1 - b_2$$

$$b_4 \geq 1 - b_1$$

olup taraf tarafa toplanırsa;

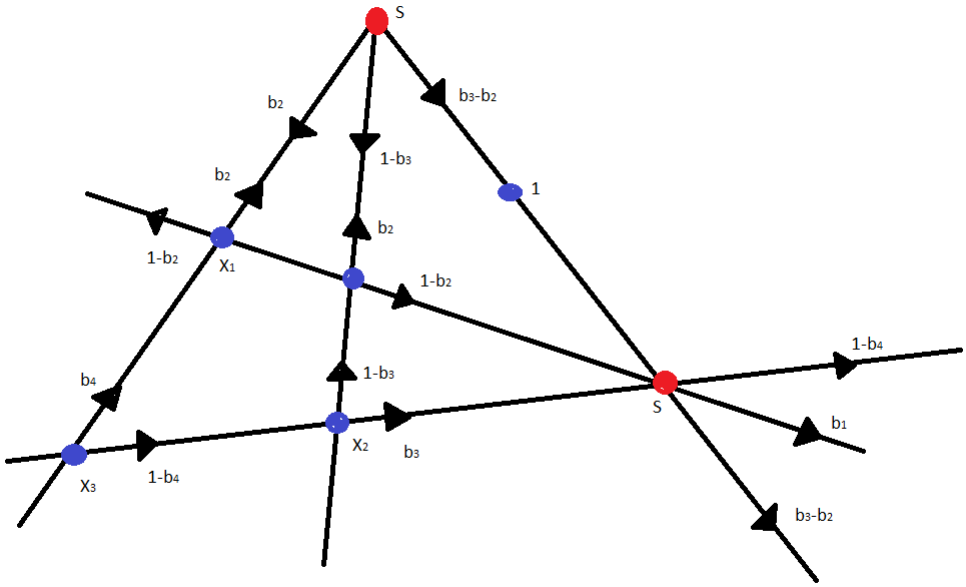
$$\sum b_i \geq 4 - \sum b_i$$

$$\sum b_i \geq 2$$

elde edilir.Bu bağıntıları sağlayan 5-doğrulu S fuzzy spereadler vardır.

Tersine bu bağıntıları sağlayan doğrulardan hiçbir taban noktası herhangi bir özel nokta üzerinde olmayan 5-doğrulu bir S fuzzy speradi elde edilir. Eğer $X_1 = X_2$, $X_3 = X_4$ *ise bütün taban noktalar aynı doğru üzerinde olup* $b_1 + b_2 = b_3 + b_4 = 1$ *olması gerekir.*

(ii) *Şekil 3.7 e görüldüğü gibi bir özel noktanın üyelik derecesi* b_1 *ve* b_2, b_3, b_4 *üç doğrunun* X_1, X_2, X_3 *taban noktalarının üyelik dereceleri olsun.Tanımdan özel nokta ve üyelik derecesi atanan noktalar dışında kalan noktanın üyelik derecesi 1 olur.*



Şekil 3.7 2. Mertebeden Projektif Düzlemde 5 Doğrulu Fuzzy Spreadin 2. Durumu

Kabul ediyoruz ki X_1, X_2 *bir özel noktadan geçen doğrunun taban noktası,* X_3 *diğer özel noktadan geçen doğrunun taban noktası olsun.Bu durumda 2. mertebeden projektif düzlemin 5-doğrulu ve 7 noktalı konfigrasyonu Şekil 3.7 deki gibidir.Diğer noktaların üyelik dereceleri şekilde görüldüğü gibi elde edilir ve aşağıdaki bağıntılar*

bulunur.

$$\begin{aligned} b_1 + b_3 - b_2 + 1 - b_4 &= 1 \\ b_1 + b_3 &= b_2 + b_4 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} b_1 &\geq 1 - b_2 \\ b_2 &\geq 1 - b_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_4 &\geq b_2 \\ b_1 &\geq 1 - b_2 \\ b_2 &\geq 1 - b_3 \\ b_3 &\geq 1 - b_4 \\ b_4 &\geq b_2 \\ b_4 &\geq b_2 \geq 1 - b_3 \end{aligned}$$

olup taraf tarafa toplanırsa;

$$\sum b_i \geq 3 - b_3 - b_4$$

elde edilir.Bu bağıntıları sağlayan 5-doğrulu S fuzzy speradler vardır.

(iii) *Şekil 3.8 de görüldüğü gibi bir özel nokta üzerindeki iki doğrunun üyelik dereceleri* b_1, b_2 *diğer herhangi iki taban noktasının üyelik dereceleri* b_3, b_4 *olsun.Tanımdan özel nokta ve üyelik derecesi atanan noktalar dışında kalan noktanın üyelik derecesi 1 olur.Hesaplamaları yapabilmemiz için geriye kalan taban noktaların üyelik derecelerine* X *diyelim.Bu durumda 2. mertebeden projektif düzlemin* 5*-doğrulu ve 7 noktalı konfigrasyonu Şekil 3.8 de görüldüğü gibidir.*

Diğer noktaların üyelik dereceleri aşağıdaki gibi elde edilir ve bağıntılar bulunur:

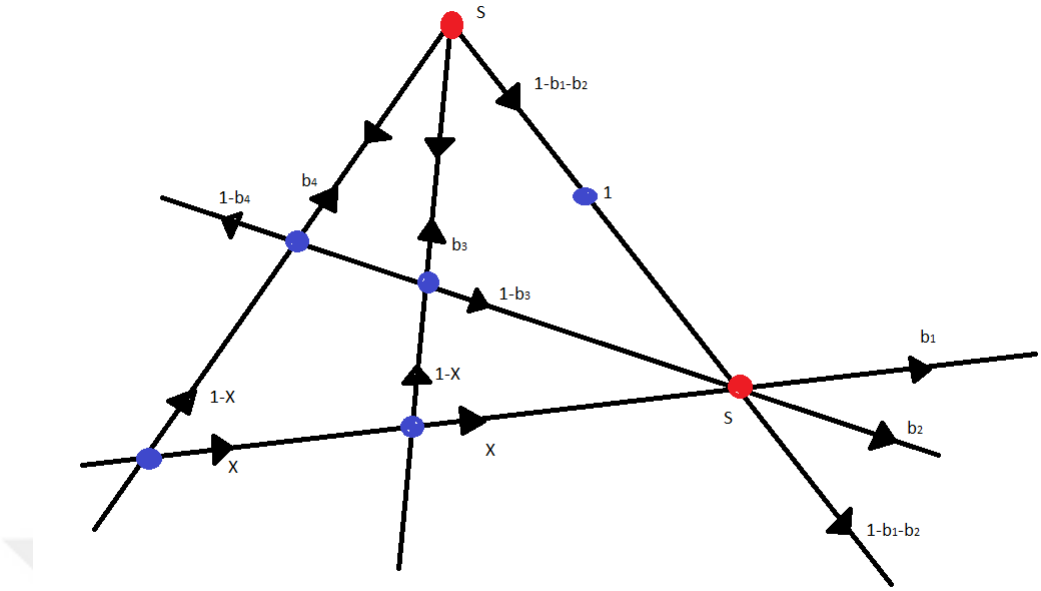
$$\begin{aligned} 1 - b_1 - b_2 + 1 - X + 1 - X &= 1 \\ X &= 1 - \frac{b_1 + b_2}{2} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} b_1 &\geq x \Rightarrow b_1 \geq 1 - \frac{b_1 + b_2}{2} \\ b_2 &\geq 1 - b_3 \\ b_3 &\geq 1 - X \Rightarrow b_3 \geq \frac{b_1 + b_2}{2} \end{aligned}$$

olup taraf tarafa toplanırsa;

$$b_1 + b_2 + b_3 \geq 2 - b_3$$



Şekil 3.8 2. Mertebeden Projektif Düzlemde 5 Doğrulu Fuzzy Spreadin 3. Durumu

her iki tarafa b_4 *eklenirse;*

$$\sum b_i \geq 2 - b_3 + b_4 \qquad (*)$$

elde edilir. Ayrıca;

$$1 - b_4 = 1 - b_3 \Rightarrow b_3 = b_4$$

olup (*) yerine konulursa;

$$\sum b_i \geq 2$$

elde edilir. Bu bağıntıları sağlayan 5-doğrulu S fuzzy speradler vardır.

Önerme 4. *2. mertebeden projektif düzlemin* 5*-doğrulu fuzzy spreadi aşağıdaki durumlarda yoktur:*

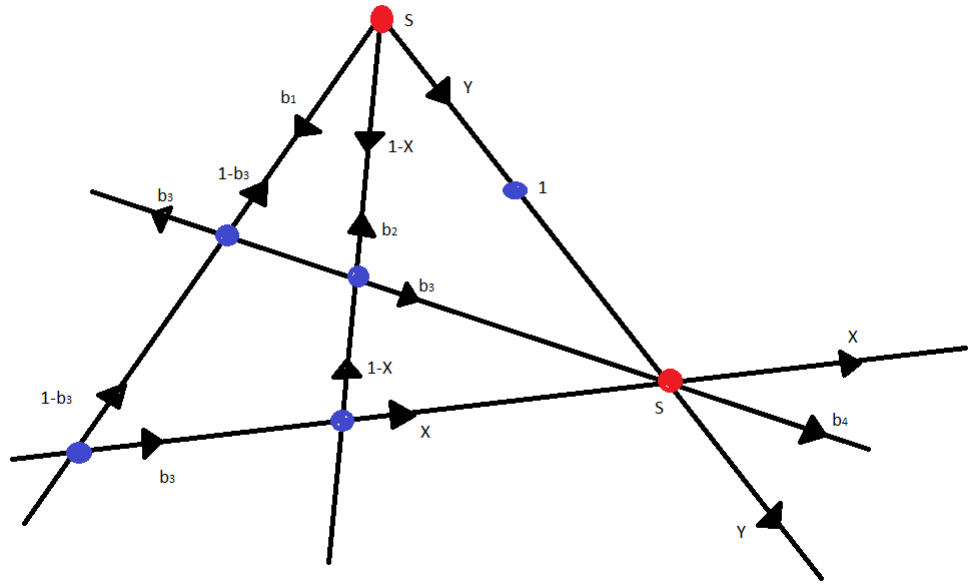
(i) *Tam olarak bir taban nokta, iki özel noktanın herbiri üzerinde olması durumu*

(ii) *İki taban nokta bir özel nokta üzerinde ise diğer taban nokta diğer özel nokta üzerinde olması durumu*

(iii) *Herbir özel nokta iki farklı taban nokta üzerinde olması durumu*

İspat. ***(i)*** *Şekil 3.9 da görüldüğü gibi iki özel nokta herbiri üzerindeki iki doğrunun üyelik dereceleri* b_1, b_4 *diğer herhangi iki taban noktasının üyelik dereceleri* b_2, b_3 *olsun.Tanımdan özel nokta ve üyelik derecesi atanan noktalar dışında kalan noktanın üyelik derecesi 1*

olur.Hesaplamaları yapabilmemiz için geriye kalan taban noktaların üyelik derecelerine X, Y *diyelim.Bu durumda 2. mertebeden projektif düzlemin* 5*-doğrulu ve 7 noktalı konfigrasyonu Şekil 3.9 daki gibidir. Diğer noktaların üyelik dereceleri şekilde görüldüğü*



Şekil 3.9 2. Mertebeden Projektif Düzlemde 5 Doğrulu Fuzzy Spreadin 4. Durumu

gibi elde edilir ve aşağıdaki bağıntılar bulunur.

$$\begin{aligned} b_2 + b_3 &= 1 \\ b_1 + 1 - X + Y &= 1 \Rightarrow X - Y = b_1 \\ X + Y + b_4 &= 1 \Rightarrow X + Y = 1 - b_4 \end{aligned}$$

olup taraf tarafa toplarsak;

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + 2Y &= 2 \\ \sum b_i + 2Y &= 2 \Rightarrow \sum b_i < 2 \qquad (*) \end{aligned}$$

diğer taraftan;

$$\begin{aligned} b_1 &\geq 1 - b_3 \\ b_2 &\geq 1 - X \\ b_3 &\geq X \\ b_4 &\geq b_3 \end{aligned}$$

olup taraf tarafa toplarsak;

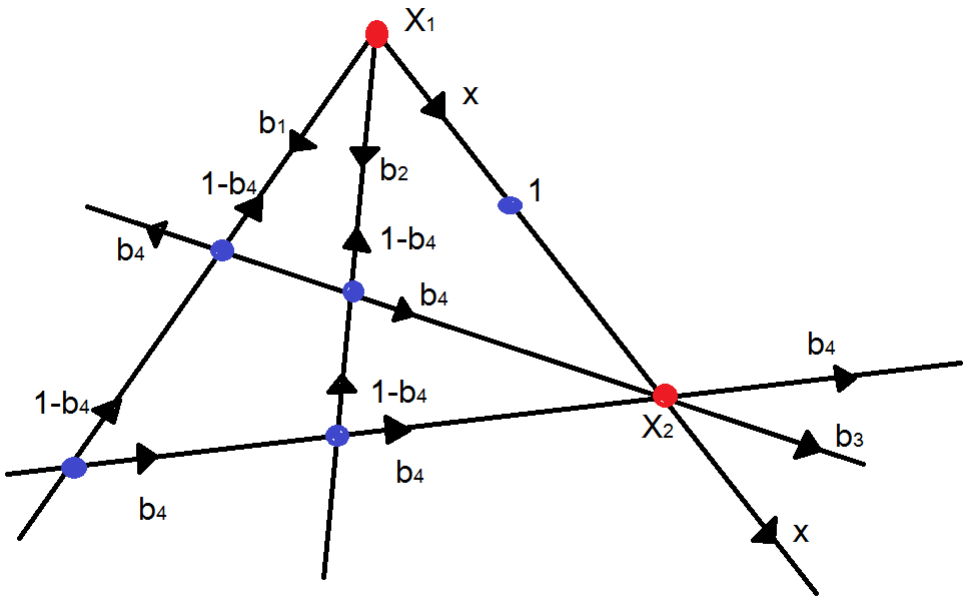
$$\sum b_i \geq 2 \qquad (*)$$

bulunarak (*) ifadelerinden;

$$2 > \sum b_i \geq 2$$

eşitsizliği elde edilir,.bu durum ise çelişkidir.

(ii) *İki taban nokta bir özel nokta ve diğer taban nokta diğer özel nokta üzerinde olsun.*



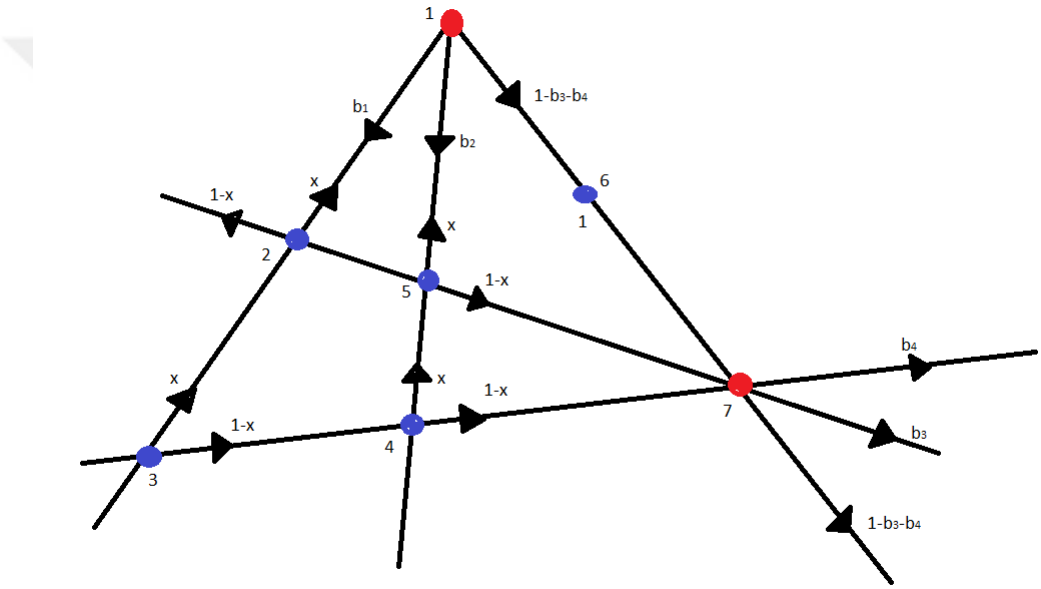
Şekil 3.10 2. Mertebeden Projektif Düzlemde 5 Doğrulu Fuzzy Spreadin 5. Durumu

b_1, b_2 *taban noktaları* x_1 *özel noktası üzerinde* b_3, x_2 *özel noktası üzerinde olsun. Bu durumda Şekil 3.10 a göre;*

$$\begin{aligned} b_1 &\geq 1 - b_4 \\ b_2 &\geq 1 - b_4 \\ b_3 &\geq b_4 \\ b_4 &= b_4 \\ b_1 + b_2 + x &= 1 \\ b_3 + b_4 + x &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $\sum b_i \geq 2$ *dir. Ayrıca,* $b_1 + b_2 = b_3 + b_4$ *dir.* $b_1 + b_2 \geq 1$ *elde edilir. Bu durum;* $b_3 + b_4 + x = 1$ *eşitliği ile çelişir.*

(iii) *Şekil 3.11 de görüldüğü gibi iki özel nokta birisinin üzerindeki iki doğrunun üyelik dereceleri* b_1, b_2 *diğer special point üzerindeki iki doğrunun üyelik dereceleri* b_3, b_4 *olsun. Tanımdan özel nokta ve üyelik derecesi atanan noktalar dışında kalan noktanın üyelik derecesi 1 olur. Hesaplamaları yapabilmemiz için geriye kalan taban noktaların üyelik derecelerine* X *diyelim. Bu durumda 2. mertebeden projektif düzlemin* 5*-doğrulu ve 7 noktalı konfigrasyonu Şekil 3.11 deki gibidir. Diğer noktaların üyelik dereceleri şekilde*



Şekil 3.11 2. Mertebeden Projektif Düzlemde 5 Doğrulu Fuzzy Spreadin 6. Durumu

görüldüğü gibi elde edilir ve aşağıdaki bağıntılar bulunur.

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + 1 - b_3 - b_4 &= 1 \\ b_1 + b_2 &= b_3 + b_4 \qquad (*) \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca;

$$\begin{aligned} b_1 &\geq x \\ b_2 &\geq x \\ b_3 &\geq 1 - x \\ b_4 &\geq 1 - x \end{aligned}$$

olup elde edilen bağıntıları taraf tarafa toplarsak;

$$\sum b_i \geq 2$$

olup (*) bağıntısını yerine yazarsak;

$$\begin{aligned} 2(b_1 + b_2) &\geq 2 \\ b_1 + b_2 &\geq 1 \\ b_3 + b_4 &\geq 1 \qquad (**) \end{aligned}$$

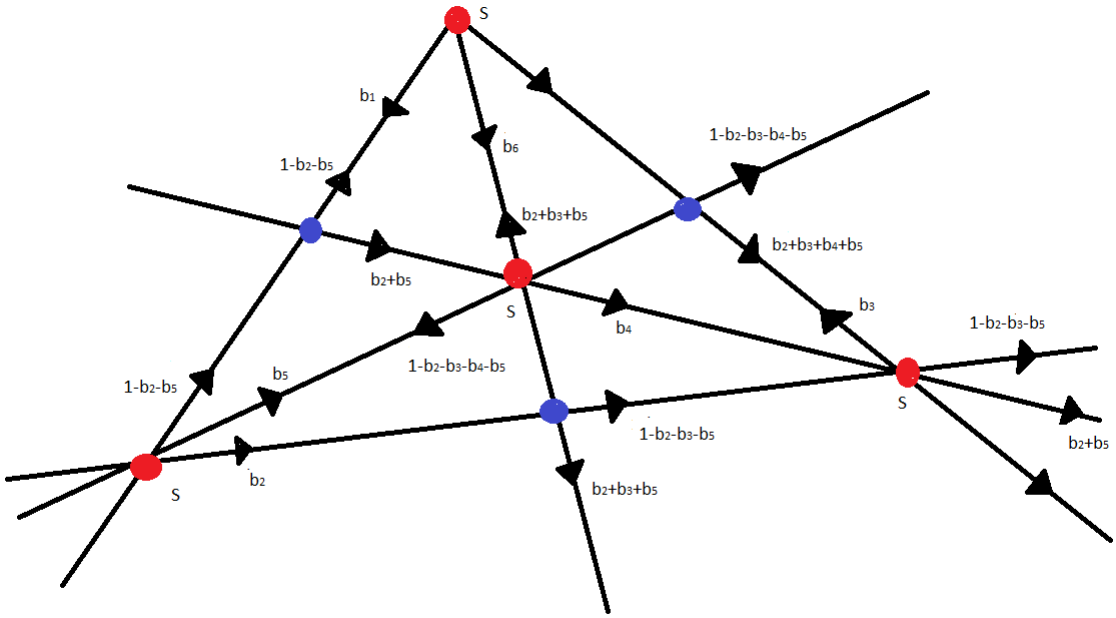
elde edilir. Fakat üyelik dereceleri (0,1) aralığında olması gerektiğinden

$$1 > 1 - (b_3 + b_4) > 0 \Rightarrow 1 > b_3 + b_4 \qquad (**)$$

olup (**) bağıntıları çelişkidir.

Önerme 5. *2. mertebeden projektif düzlemin 6 taban noktası özel nokta üzerinde iken* 6*-doğrulu fuzzy spreadi oluşmaz.*

İspat. *Taban noktalarının üyelik dereceleri* $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ *özel nokta üzerinde olsun.Bu durumda 2. mertebeden projektif düzlemin* 6*-doğrulu 7 noktalı konfigrasyonu Şekil 3.12 deki gibidir. Diğer noktaların üyelik dereceleri şekilde görüldüğü gibi elde edilir ve aşağıdaki*



Şekil 3.12 2. Mertebeden Projektif Düzlemde 6 Doğrulu Fuzzy Spreadin 1. Durumu

bağıntılar bulunur.

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 1 \qquad (*)$$

ve

$$\begin{aligned} b_1 &\geq 1 - b_2 - b_5 \\ b_2 &\geq 1 - b_2 - b_3 - b_5 \\ b_3 &\geq b_2 + b_3 + b_4 + b_5 \\ b_4 &\geq b_2 + b_5 \\ b_5 &\geq 1 - b_2 - b_3 - b_4 - b_5 \\ b_6 &\geq b_2 + b_3 + b_5 \end{aligned}$$

olup taraf tarafa toplarsak;

$$3 \leq \sum b_i \qquad (**)$$

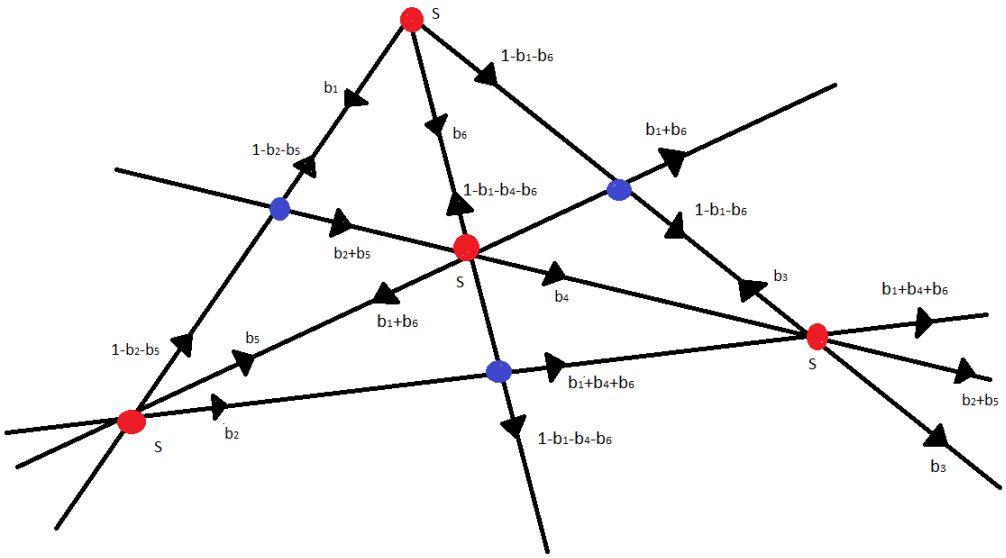
elde edilir. $(*)$ *ve* $(**)$ *dan;*

$$3 \leq \sum b_i = 1$$

olur. Böylece çelişki elde edilir. Yani; 2. mertebeden projektif düzlemin 6*-doğrulu ve 6 taban noktası özel nokta üzerinde iken fuzzy spreadi oluşmaz.*

Önerme 6. *2. mertebeden projektif düzlemin* 6*-doğrulu fuzzy projektif spread varsa, en çok* 4 *taban nokta özel noktadır, ancak en az* 1 *taban nokta özel noktadır.*

İspat. $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ *taban noktaları özel nokta üzerinde olsun. Bu taban noktaların üyelik dereceleri sırasıyla* $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ *olsun. Bu durumda 2. mertebeden projektif düzlemin* 6*-doğrulu ve 7 noktalı konfigrasyonu Şekil 3.13 deki gibidir. Şekilden*



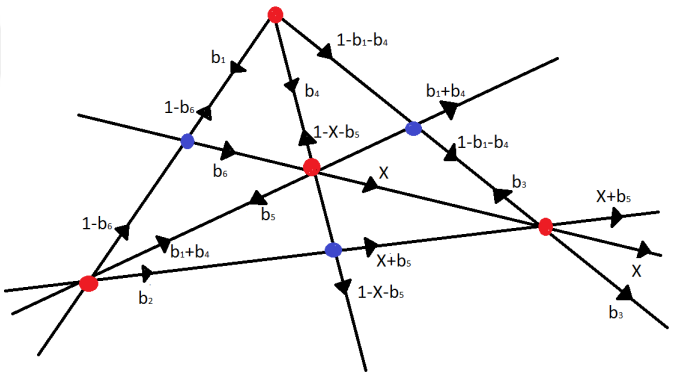
Şekil 3.13 2. Mertebeden Projektif Düzlemde 6 Doğrulu Fuzzy Spreadin 2. Durumu

aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\begin{aligned} b_1 &\geq 1 - b_2 - b_5 \\ b_2 &\geq b_1 + b_4 + b_6 \\ b_3 &\geq 1 - b_1 - b_6 \\ b_4 &\geq b_2 + b_5 \\ b_5 &\geq b_1 + b_6 \\ b_6 &\geq 1 - b_1 - b_4 - b_6 \end{aligned}$$

Bu eşitsizliklerden $\sum b_i \geq 2$ *olduğu görülür. Ayrıca şekilden görüldüğü gibi* $b_3 + b_2 + b_5 + b_1 + b_4 + b_6 = 1$ *dir. Böylece çelişki elde edilir.*

Kabul edelim ki X_1, X_1, X_3, X_4, X_5 *taban noktaları özel noktalar üzerinde, üyelik derecesi* b_6 *olan* X_6 *taban noktası özel olmayan nokta üzerinde Şekil 3.14 gibi olsun. Şekilde görüldüğü gibi üyelik dereceleri arasındaki aşağıdaki bağıntılar ve eşitsizlikler geçerlidir:*



Şekil 3.14 2. Mertebeden Projektif Düzlemde 6 Doğrulu Fuzzy Spreadin 3. Durumu

$$\begin{aligned} b_1 &\geq 1 - b_6 \\ b_2 &\geq x + b_5 \\ b_3 &\geq 1 - b_1 - b_4 \\ b_4 &\geq 1 - x - b_5 \\ b_5 &\geq b_1 + b_4 \\ b_6 &\geq x \end{aligned}$$

ve

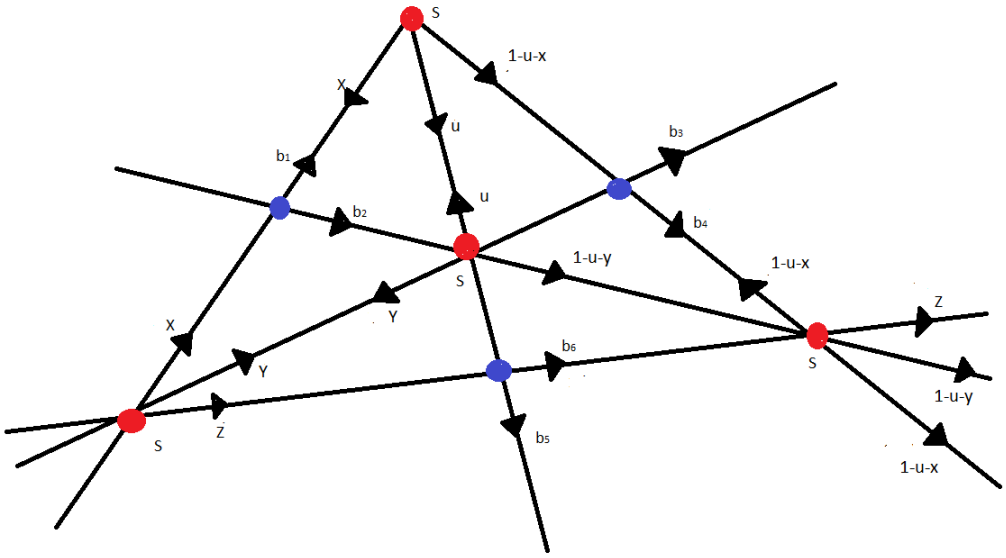
$$\begin{aligned} 1 - b_6 + b_4 + b_4 + b_2 &= 1 \\ x + b_3 + x + b_5 &= 1 \end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned} b_6 &= b_1 + b_2 + b_4 \\ x &= (1/2) - ((b_3 + b_5)/2) \end{aligned}$$

dir. Ayrıca $b_3 + b_4 \geq 1$ *olduğundan uygun* x *üyelik derecesi yoktur. Bu durum için fuzzy spread oluşmaz.*

Benzer şekilde 5 taban noktasının özel nokta üzerinde olması durumunda fuzzy spread oluşmadığı önceki önermede gösterilmiştir. Şimdi hiçbir taban noktası özel nokta üzerinde olmasın. Bu durum için Şekil 3.15 verilebilir. Şekilden görüldüğü gibi



Şekil 3.15 2. Mertebeden Projektif Düzlemde 6 Doğrulu Fuzzy Spreadin 4. Durumu

$$\begin{aligned} b_1 &\geq x \\ b_2 &\geq 1 - u - y \\ b_3 &\geq y \\ b_4 &\geq 1 - x - u \\ b_5 &\geq u \\ b_6 &\geq z \end{aligned}$$

eşitsizlikleri ve

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 &= 1 \\ b_3 + b_4 &= 1 \\ b_5 + b_6 &= 1 \\ x + y + z &= 1 \\ z &= u \end{aligned}$$

ifadeleri geçerlidir. Elde edilen bu ifadelerdende yukarıdakine benzer şekilde çelişki elde edilir.

Önerme 7. *2. mertebeden projektif düzlemin aşağıdaki durumlarda* 6*-doğrulu fuzzy projektif spreadleri ortaya çıkar:*

a) *Üç taban nokta aynı özel nokta üzerinde bulunması*

b) *İki taban nokta aynı özel nokta üzerinde bulunması*

c) *Bir taban nokta aynı özel nokta üzerinde bulunması*

d) *Dört taban noktasının iki özel nokta üzerinde bulunması*

e) *Üç taban noktanın iki özel nokta üzerinde bulunması*

f) *İki taban noktanın iki özel nokta üzerinde bulunması*

g) *Dört taban noktanın üç özel nokta üzerinde bulunması*

h) *Üç taban noktanın üç özel nokta üzerinde bulunması*

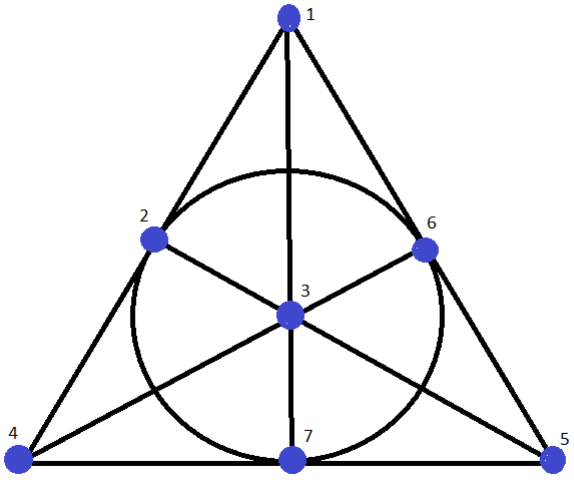
ı) *Dört taban noktanın dört özel nokta üzerinde bulunması*

Önerme 8. *Eğer fuzzy projektif spread* 7*-doğruya sahip ise doğrular kümesinden noktalar kümesine tanımlı herhangi bir* ρ *dönüşümü ile herzaman bir fuzzy spread bulmak mümkündür, öyleki herbir* (λ, L) *fuzzy doğrusu bir tek* $\rho(L)$ *taban noktasına sahiptir. Başka bir deyişle, herbir taban noktanın üyelik derecesi tam olarak doğru üzerindeki diğer noktaların üyelik derecelerinden daha büyüktür.*

İspat.

$$\begin{array}{rcc} \rho: & \mathcal{L} \to & \mathcal{N} \\ & L \mapsto & \rho(L) \\ & \{i, i+1, i+3\} \to & (i) \\ & \{1,2,4\} \to & 1 \\ & \{2,6,7\} \to & 2 \\ & \{6,4,3\} \to & 3 \\ & \{4,7,5\} \to & 4 \\ & \{7,3,1\} \to & 5 \\ & \{3,5,2\} \to & 6 \\ & \{5,1,6\} \to & 0 \end{array}$$

dönüşümü ile doğruların taban noktaları belirlenir. Böylece tüm noktalar özel nokta ve herbir taban noktası bir özel noktadadır. Yani her özel noktada bir taban noktası bulunmaktadır. Bunu açıklayıcı Şekil 3.16 biçiminde verilebilir. Buradan



Şekil 3.16 Fano Düzlemi

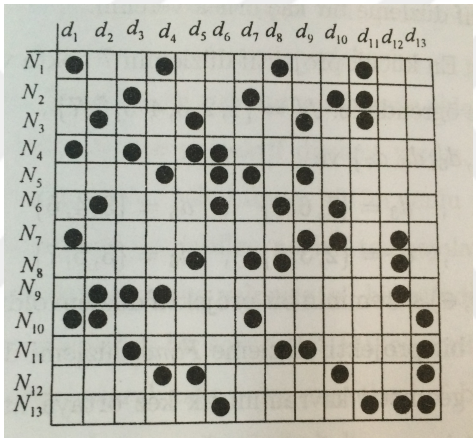
$$\sum b_i \geq \sum a_i, \sum b_i + 2\sum a_i = 7 ve \frac{7}{3} \geq \sum a_i$$

ifadeleri geçerlidir. Bu şartları sağlayan 7-doğrulu fuzzy projektif spread her zaman vardır.

4. 3. MERTEBEDEN FUZZY PROJEKTİF DÜZLEMİN FUZZY DOĞRU SPREADLERİ

Bu bölümde, 3.mertebeden fuzzy projektif düzlemin fuzzy doğru spreadleri inceleniyor.

3. mertebeden projektif düzlem örneği $N = N_1, N_2, ..., N_{13}, D = d_1, d_2, ..., d_{13}$ ve üzerinde bulunma bağıntısı Şekil 4.1 deki çizelgede $''N_i o d_j \iff$ i. satır j. kolonda $\bullet$ görülüyor.$''$ ile tanımlanmak üzere $(N, D, \circ)$ sistemini düşününüz. Bu çizelgede, herhangi



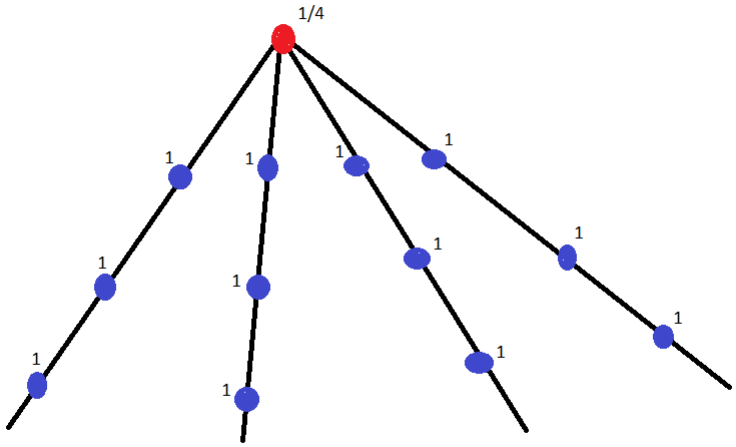
Şekil 4.1 Projektif Düzleme Örnek

iki satırda aynı kolon numaralı birer tek siyah kutu olduğundan P1 aksiyomu sağlanır. Benzer şekilde herhangi iki kolonda aynı satır numaralı birer tek siyah kutu olduğundan iki doğru bir ortak noktaya sahiptir ve dolayısıyla P2 sağlanır. Sistemde herhangi üçü doğrudaş olmayan birçok"4-nokta"bulunabilir. Örneğin; N_1, N_2, N_4, N_5 böyle bir dörtlüdür. Sonuç olarak bu sistem bir projektif düzlemdir. (Kaya, 2005)

3. mertebeden projektif düzlemin toplam 13 noktasını içeren en küçük konfigrasyon, bir noktadan geçen 4-doğrulu konfigrasyondur. 3. mertebeden projektif düzlem için fuzzy doğru spreadleri incelemesi 4-doğru içeren konfigrasyon ile başlamaktadır.

Önerme 9. *3. mertebeden projektif düzlemin en çok* 4*-doğrulu fuzzy spreadi yoktur.*

İspat. *3. mertebeden projektif düzlemin tüm noktalarını kapsayan* $4-$*doğrulu konfigrasyon Şekil 4.2 deki gibi verilir:*



Şekil 4.2 3. Mertebeden Projektif Düzlemde 4 Doğrulu Demet

Şekilden görüldüğü gibi 3. mertebeden projektif düzlemin tüm noktalarını üzerinde bulunduran dört doğrunun arakesit noktasının üyelik derecesi $\frac{1}{4}$ *geriye kalan bütün noktaların üyelik dereceleri* 1 *dir. Bu ise fuzzy doğru tanımı ile çelişir. Böylece 3. mertebeden projektif düzlem* 4*-doğrulu fuzzy spreadi yoktur.*

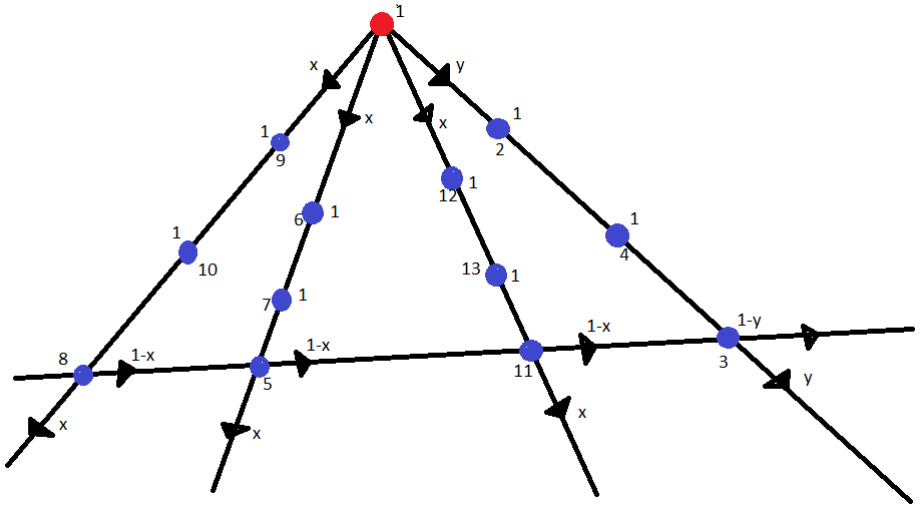
Önerme 10. *3. mertebeden projektif düzlem* 5*-doğrulu ve bir noktası dört ağırlıklı olan fuzzy spreadi yoktur.*

İspat. *3. mertebeden projektif düzlemin bir noktası dört ağırlıklı olacak şekilde* 5*-doğrulu ve 13 noktayı kapsayan konfigrasyonu Şekil 4.3 deki gibidir:* $\{1, 8, 9, 10\}$ *doğrusunu gözönüne aldığımızda, 1 noktasının üyelik derecesi* x *alınırsa 8. noktasının da üyelik derecesi* x *dir. Aynı zamanda 9 ve 10 noktaları 1-ağırlıklı nokta olduğundan üyelik derecesi 1 dir. Bu fuzzy doğru tanımı ile çelişir. O halde bir noktasının ağırlığı 4 olan* 5*-doğrulu bütün şekiller için çelişki elde ederiz. Yani bu durumlar için fuzzy spread oluşmaz.*

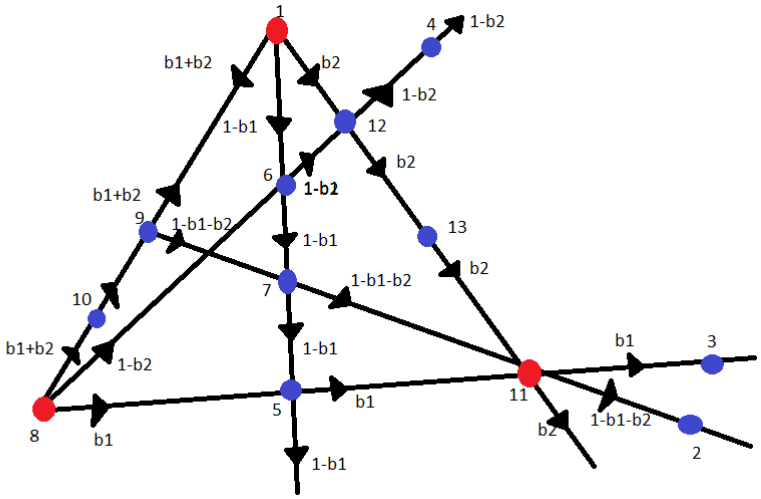
Önerme 11. *3. mertebeden projektif düzlemin* 6*-doğrulu ve üç noktası üç ağırlıklı olan fuzzy spreadi yoktur.*

İspat. *3. mertebeden projektif düzlem* 6*-doğrulu ve 13 noktalı konfigrasyonu Şekil 4.4 deki gibidir: 8. noktanın bir doğrusunun üyelik derecesi* b_1 *, 11.noktanın bir doğrusunun üyelik derecesi* b_2 *iken diğer noktaların üyelik dereceleri şekilde görüldüğü gibi elde edilir ve aşağıdaki bağıntılar bulunur.*

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + 1 - b_1 + b_2 &= 1 \\ b_2 &= 0 \end{aligned}$$



Şekil 4.3 3. Mertebeden Projektif Düzlemde 5 Doğrulu Fuzzy Spread

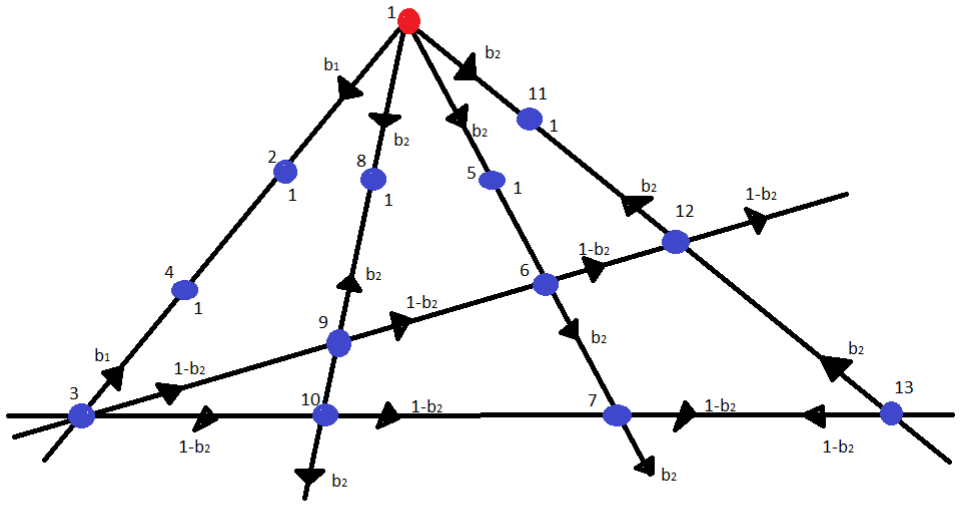


Şekil 4.4 3. Mertebeden Projektif Düzlemde 6 Doğrulu Fuzzy Spreadin 1. Durumu

olup bu durumda çelişki elde edilir. O halde üç noktasının ağırlığı 3 olan bütün şekiller için çelişki elde ederiz. Yani bu durumlar için fuzzy spread oluşmaz.

Önerme 12. *3. mertebeden projektif düzlemin* 6*-doğrulu ve bir noktası dört ağırlıklı olan fuzzy spreadi yoktur.*

İspat. *3. mertebeden projektif düzlemin* 6*-doğrulu ve bir noktası dört ağırlıklı olacak şekilde 13 noktalı konfigrasyon Şekil 4.5 deki gibidir:*



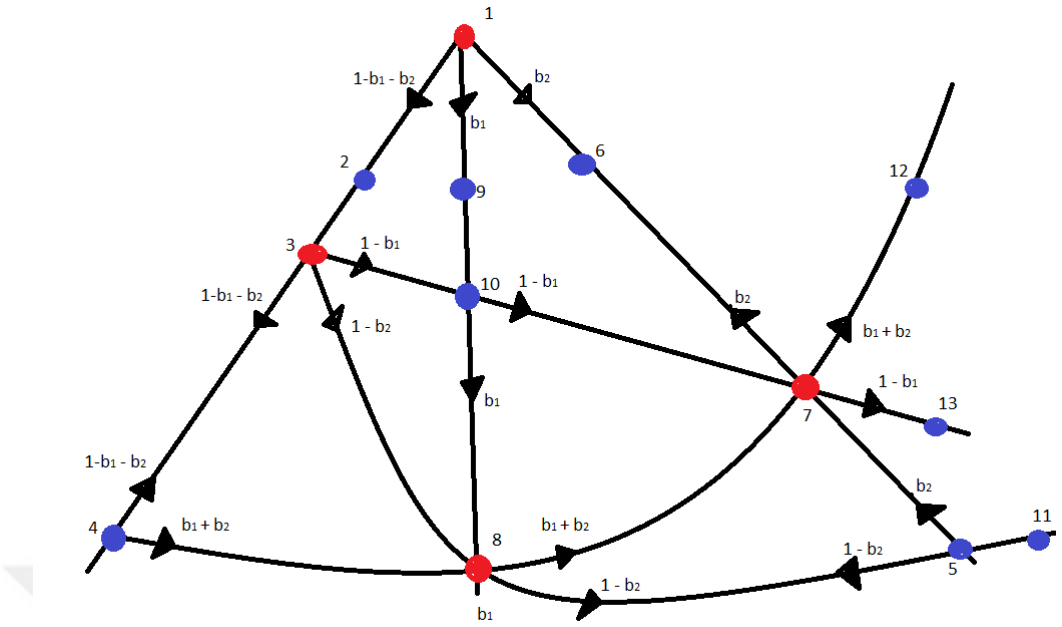
Şekil 4.5 3. Mertebeden Projektif Düzlemde 6 Doğrulu Fuzzy Spreadin 2. Durumu

$\{1,2,3,4\}$ *doğrusunu gözönüne aldığımızda, 3 noktası için doğrusunun üyelik derecesi* b_1 *seçilirse, 1.noktasının üyelik derecesi* b_1 *dir. Aynı zamanda 2 ve 4 noktaları 1-ağırlıklı nokta olduğundan üyelik derecesi 1 dir. Bu fuzzy doğru tanımı ile çelişir.*

Önerme 13. *3. mertebeden projektif düzlemin dört noktası üç ağırlıklı olan* 6*-doğrulu fuzzy spreadi yoktur.*

İspat. *3. mertebeden projektif düzlemin dört noktası üç ağırlıklı olan* 6*-doğrulu ve 13 noktayı kapsayan konfigrasyon Şekil 4.6 deki gibi verilebilir:*

8. noktanın bir doğrusunun üyelik derecesi b_1 *, 5. noktanın bir doğrusunun üyelik derecesi* b_2 *iken diğer noktaların üyelik dereceleri şekilde görüldüğü gibi elde edilir ve*



Şekil 4.6 3. Mertebeden Projektif Düzlemde 6 Doğrulu Fuzzy Spreadin 3. Durumu

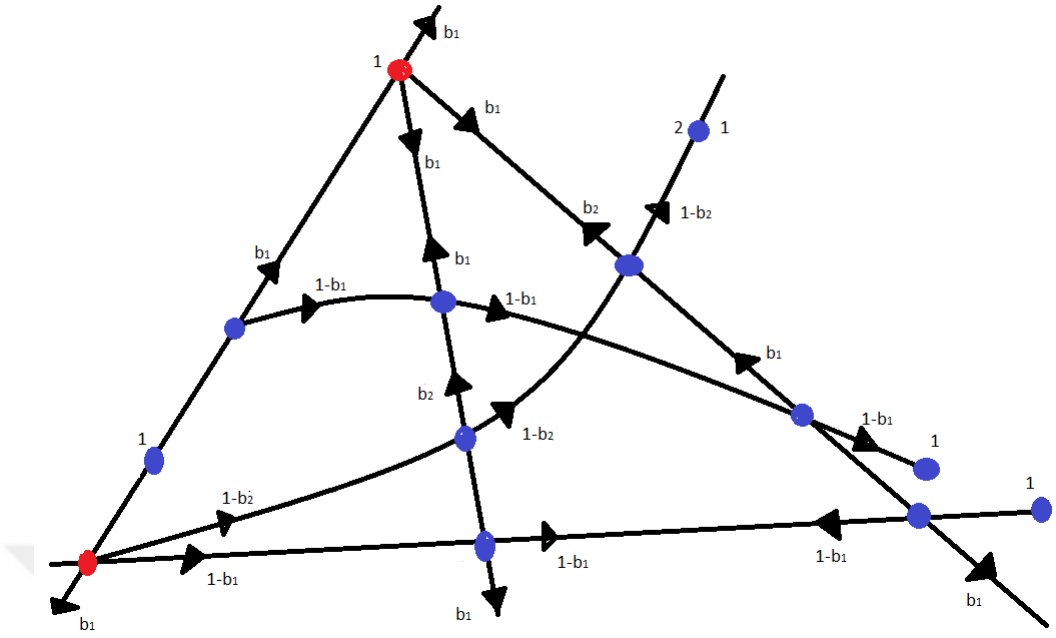
aşağıdaki bağıntılar

$$\begin{aligned} 1 - b_1 - b_2 + 1 - b_1 + 1 - b_2 &= 1 \\ b_1 + b_2 &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $b_1 = 0$ *ve benzer olarak* $b_2 = 0$ *bulunur ki bu bir çelişkidir. O halde dört noktasının ağırlığı 3 olan* 6*-doğrulu fuzzy spread oluşmaz.*

Önerme 14. *3. mertebeden projektif düzlemin iki noktası üç ağırlıklıolan* 6*-doğrulu fuzzy spreadi yoktur.*

İspat. *3. mertebeden projektif düzlemin iki noktası üç ağırlıklı olan* 6*-doğrulu ve 13 noktayı kapsayan konfigrasyon Şekil 4.7 daki gibi verilebilir:*



Şekil 4.7 3. Mertebeden Projektif Düzlemde 6 Doğrulu Fuzzy Spreadin 4. Durumu

Şekildeki gibi,üzerinde iki tane 3-ağırlıklı vebir ağırlıklı nokta bulunduran doğru üzerindeki 3-ağırlıklı noktanın birisinin üyelik derecesi b_1 *olsun. Diğer noktaların üyelik dereceleri şekildeki gibi hesaplandığında* $b_1 \geq 1 - b_2$ *iken* $b_1 = 0$ *veya* $b_1 \leq 1 - b_2$ *iken* $b_2 = 0$ *elde edilir ki bunlar çelişkidir. Yani bu durum için fuzzy spread oluşmaz.*

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, önce 2. mertebeden projektif düzlem cismi üzerindeki Projektif Düzlemini taban düzlemi kabul eden fuzzy projektif düzlemin fuzzy doğru spreadleri, incelenmiştir. Burada 2. mertebeden projektif düzlem cisminin en az 3-doğrulu en çok 6-doğrulu fuzzy doğru spreadleri olduğu, hangi durumlarda fuzzy doğru spreadlerinin oluşmadığı, projektif düzlemdeki noktaların ağırlıklarına göre incelenmiştir.

Daha sonra 3. mertebeden projektif düzlem cismi cismi üzerindeki Projektif Düzlemini taban düzlemi kabul eden fuzzy projektif düzlemin fuzzy doğru spreadleri ele alınmıştır. Aynı şekilde 3. mertebeden projektif düzlem cismi ün noktalarının ağırlıklarına göre 4-doğrulu, 5-doğrulu, 6-doğrulu fuzzy spreadlerinin oluşamadığı görülmüştür.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Akça, Z., A. Bayar, S. Ekmekçi ve H. Van Maldeghem (2006). "Fuzzy Projective Spreads of Fuzzy Projective Spaces". İn: *Fuzzy Sets and Systems* 157, 24, 3237- 3247.

Kaya, R. (2005). *Projektif Geometri*.

Kuijken, L. ve H. Van Maldeghem H. Kerre (1999). *Fuzzy Projective Geometres From Fuzzy Vector Spaces, in A. Billot at al. (Eds.), Informatron Processing and Management of Uncertainty in Knowlwdgw-Based Systems, Editions Medicales at Scientifiques*, pp. 1331 –1338.

Lubczonok, P. (1990). *Fuzzy Vector Spaces, Fuzzy Sets and Systems*, pp. 329–343.

Rosenfeld, A. (1971). *Fuzzy Group, Math Anal. Appl.* Pp. 512–517.

Zadeh (1965). *Fuzzy Sets, Inform. and Control*, pp. 338–358.