Minkowski Uzayında Yönlü Null Eğrilerin Geometrisi Üzerine

Gamze Tarım Kandilci

DOKTORA TEZİ

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Ocak 2024

On Geometry of The Directional Null Curves in Minkowski Space

Gamze Tarım Kandilci

DOCTORAL DISSERTATION

Department of Mathematics-Computer

January 2024

Minkowski Uzayında Yönlü Null Eğrilerin Geometrisi Üzerine

Gamze Tarım Kandilci

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği Uyarınca
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Cumali Ekici

Ocak 2024

ONAY

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı DOKTORA öğrencisi Gamze Tarım Kandilci'nin DOKTORA tezi olarak hazırladığı "Minkowski Uzayında Yönlü Null Eğrilerin Geometrisi Üzerine" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Cumali Ekici

İkinci Danışman :

Doktora Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Cumali Ekici

Üye : Prof. Dr. Nedim Değirmenci

Üye : Prof. Dr. Özcan Gelişgen

Üye : Prof. Dr. Nülifer Özdemir

Üye : Prof. Dr. Ziya Akça

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fatma TÜMSEK
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Cumali Ekici danışmanlığında hazırlamış olduğum "Minkowski Uzayında Yönlü Null Eğrilerin Geometrisi Üzerine" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 05/01/2024

Gamze TARIM KANDİLCİ

ÖZET

3-boyutlu Minkowski uzayında null ve nonnull uzay eğrileri için Frenet çatısı ve Bishop çatısı kullanılarak pek çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalarda kullanılan çatılara alternatif olarak quasi-çatı kavramı ortaya çıkmış ve yapılan çalışmalarda diğer çatılardan daha kolay hesaplandığı görülmüştür.

Bu tez çalışması, bir izdüşüm vektörü yardımıyla tanımlanan quasi-çatının Minkowski 3-uzayında yönlü null ve pseudo null eğrilerin geometrisini incelemeyi amaçlamaktadır.

Beş bölümden oluşan çalışmamızın giriş ve amaç ile literatür araştırması bölümlerinde konu ile ilgili önceden yapılan çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir. Çalışmamızda kullandığımız temel tanım ve teoremlere üçüncü bölümde yer verilmiştir. Sonraki bölümlerde tezimizin orijinal kısmı yer almaktadır. Dördüncü bölümde Minkowski 3-uzayında null ve pseudo null quasi-çatı tanımlanmıştır. Tanımlanan quasi-çatı için türev denklemleri, vektörel çarpım, çeşitli teoremler ve örnekler hesaplanmıştır. Ayrıca bu bölümde, null quasi-çatı ile null Frenet çatı arasındaki bağıntılar bulunmuştur. Son olarak quasi-çatılı yönlü null ve pseudo null eğrilerin sınıflandırılması ele alınmıştır. Son bölümde ise Minkowski 3-uzayında farklı çatılar kullanılarak elde edilen eğri çiftleriyle ilgili özellikler göz önünde bulundurularak ve dördüncü bölümde hesaplanan null ve pseudo null quasi-çatı yapısı kullanılarak, yönlü null ve pseudo null Bertrand ve Mannheim eğri çiftleri ile ilgili teoremler ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Frenet çatısı, Minkowski uzayı, Null quasi-çatı, Yönlü null eğri.

SUMMARY

There have been many studies on null and nonnull curves with Frenet frame and Bishop frame in three-dimensional Minkowski space. The quasi-frame was introduced as an alternative to the frames presented in these studies and it was seen that the quasi-frame can be computed more easily than other frames.

The aim of this thesis is to investigate the geometry of directional null and pseudo null curves with the quasi-frame constructed by a projection vector in three-dimensional Minkowski space.

This thesis consists of five chapters. Firstly, introduction and objective, literature review about previous researches related to the thesis, and in the third chapter, discussion of the basic definitions and theorems used in our dissertation are presented. The following chapters contain the original part of our thesis. In the fourth chapter, the null quasi-frame and pseudo null quasi-frame are introduced in three-dimensional Minkowski space. Derivative equations, vector products, various theorems and examples of the null quasi-frame and pseudo null quasi-frame are given. Additionally, the relations between the null quasi-frame and the null Frenet frame are identified in this chapter. Finally, the classification of directional null and pseudo null curves is discussed. In the last section, the theorems about directional null and pseudo null Bertrand and Mannheim curve pairs are proved by considering the properties of the curve pairs obtained by using different frames in three-dimensional Minkowski and by using the null and pseudo null quasi-frame structure obtained in the fourth section.

Keywords: Frenet frame, Minkowski space, Null quasi-frame, Directional null curve.

TEŞEKKÜR

"Minkowski Uzayında Yönlü Null Eğrilerin Geometrisi Üzerine" adlı tez çalışmamda, tüm bilgilerini ve değerli vaktini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, tezimde büyük emeği olan ve bana inanan değerli danışmanım Sayın

Prof. Dr. Cumali Ekici

hocama teşekkür ederim.

Hayatın her alanında yanımda olan ve her koşulda desteğini esirgemeyen çok kıymetli eşime, anneme ve kardeşime teşekkürü bir borç bilirim.

ESKİŞEHİR, 2024
Gamze Tarım Kandilci

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET . . . . . **vi**

SUMMARY . . . . . **vii**

TEŞEKKÜR . . . . . **viii**

İÇİNDEKİLER . . . . . **ix**

ŞEKİLLER DİZİNİ . . . . . **x**

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ . . . . . **xi**

1. GİRİŞ VE AMAÇ **1**

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI **3**

3. TEMEL KAVRAMLAR **5**
3.1. Öklid 3-Uzayında Yapılar 5
3.2. Minkowski 3-Uzayında Yapılar 11
3.3. Minkowski 3-Uzayında Nonnull Eğriler için Quasi-Çatı 16
3.4. Minkowski 3-Uzayında Null Eğriler için Yapılar 22

4. MINKOWSKI UZAYINDA NULL VE PSEUDO NULL QUASI-ÇATI . . . **29**
4.1. Null Eğriler için Null Quasi-Çatı 29
4.2. Spacelike Eğriler için Pseudo Null Quasi-Çatı 90
4.3. Yönlü Null ve Pseudo Null Eğrilerin Sınıflandırılması 104

5. MINKOWSKI UZAYINDA YÖNLÜ NULL EĞRİ ÇİFTLERİ **120**
5.1. Yönlü Null ve Pseudo Null Bertrand Eğri Çiftleri 120
5.2. Yönlü Null ve Pseudo Null Mannheim Eğri Çiftleri 127

6. BULGULAR VE TARTIŞMA **142**

7. SONUÇ VE ÖNERİLER **143**

KAYNAKLAR DİZİNİ **145**

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil		Sayfa
3.1	Düzleme izdüşürülmüş **X** vektörü	8
3.2	Bir doğru boyunca quasi-çatı	8
3.3	Frenet çatısı ve quasi-çatı	9
3.4	Frenet çatısı ile quasi-çatı	10
3.5	Minkowski uzayında vektörler	12
3.6	Yönlü Bertrand eğri çifti	19
3.7	Yönlü Mannheim eğri çifti	20
3.8	Minkowski 3-uzayında birim küreler	22
3.9	Işık konisi (null koni)	23
4.1	**k** spacelike iken null eğrinin Frenet ve quasi-çatı vektörleri	61
4.2	**k** spacelike iken null eğrinin Frenet ve quasi-çatı vektörleri	63
4.3	**k** timelike iken null eğrinin Frenet ve quasi-çatı vektörleri	65
4.4	**k** timelike iken null eğrinin Frenet ve quasi-çatı vektörleri	67
4.5	**k** null iken null eğrinin Frenet ve quasi-çatı vektörleri	69
4.6	Pseudo null eğrinin Frenet ve quasi-çatı vektörleri	101
4.7	$\alpha(s)$ pseudo null eğrisi	104
5.1	Yönlü Bertrand eğri çifti	120
5.2	Yönlü Mannheim eğri çifti	128
5.3	α ve α_1 Mannheim eğri çifti	141

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{R}_1^3$	Üç Boyutlu Minkowski Uzayı
S_1^2	Lorentzian Birim Küre
H_0^2	Hiperbolik Birim Küre
α, β	Uzay Eğrisi
α_1	Mannheim Uzay Eğrisi
$\mathbf{t}$	Birim Teğet Vektör
$\mathbf{n}$	Birim Normal Vektör
$\mathbf{b}$	Birim Binormal Vektör
$\mathbf{n}_q$	Quasi-Normal Vektör
$\mathbf{b}_q$	Quasi-Binormal Vektör
k_1	Birinci q-Eğriliği
k_2	İkinci q-Eğriliği
k_3	Üçüncü q-Eğriliği
$\mathbf{t}^\lambda, \mathbf{n}_q^\lambda, \mathbf{b}_q^\lambda$	Bertrand Eğri Çiftinin Quasi-Çatı Vektörleri
$\mathbf{t}^\gamma, \mathbf{n}_q^\gamma, \mathbf{b}_q^\gamma$	Mannheim Eğri Çiftinin Quasi-Çatı Vektörleri
$k_1^\lambda, k_2^\lambda, k_3^\lambda$	Bertrand Eğri Çiftinin q-Eğrilikleri
$k_1^\gamma, k_2^\gamma, k_3^\gamma$	Mannheim Eğri Çiftinin q-Eğrilikleri
$\|.\|$	Norm Fonksiyonu
$<,>$	Skaler Çarpım Fonksiyonu
d	Uzaklık Fonksiyonu
$\wedge$	Vektörel Çarpım Fonksiyonu

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Diferensiyel geometrinin temel konuları arasında yer alan eğri ve çatı kavramı pek çok araştırmacı tarafından ele alınmıştır. Minkowski 3-uzayda nonnull ve null eğri çiftleri üzerine yapılan bu çalışmalarda Frenet, Bishop vb. çatı yapıları kullanılmıştır. Kullanılan bu çatıların eksik olan kısımlarını tamamlayacak bir çatı kavramının temelleri ilk olarak, 1987 yılında Coquillart tarafından bir izdüşüm vektörü kullanılarak oluşan quasi-normal vektörün tanımlanmasıyla oluşmuştur. Bu vektörün kullanılmasıyla, quasi-çatı (q-çatı) kavramı 2015 yılında Dede ve diğerleri tarafından tanımlanmıştır. Hesaplamalarda karşılaşılan kısıtlara çözüm üreten quasi-çatı kısa süre için de benimsenerek, konu ile ilgili pek çok çalışmaya yer verilmiştir. Bu çalışmalar incelendiğinde null ve pseudo null quasi-çatı yapısının incelenmediği fark edilerek çeşitli eğri çiftleri için çalışma yapılması planlanmıştır. Minkowski uzayında farklı çatılar kullanılarak yapılan çalışmalar incelendiğinde önemli sonuçlar elde edildiği görülmektedir. Quasi-çatının diğer çatılara göre hesaplama kolaylığı, eğrilik sıfır olduğunda bile eğrinin tanımlanabilmesi gibi önemli özellikleri göz önünde bulundurulduğunda null ve pseudo null eğriler için çalışma yapılarak bu çalışmada elde edilecek sonuçların öneminin literatüre ciddi katkı sağlayacağı öngörülmüştür.

Eğri teorisinde yer alan diferensiyel geometrinin önemli konularından biri de özel eğri çiftleridir. Eğri teorisi üzerine yapılan pek çok çalışmada özel eğri çiftleri ele alınmıştır. Bu özel eğri çiftlerinden biri olan Bertrand eğri kavramı 1850 yılında J.Bertrand tarafından tanımlanmıştır. Eğrilerin karşılıklı noktalarındaki birim normal vektörleri lineer bağımlı olduğunda Bertrand eğri çiftleri adını alır. Bunlar pek çok araştırmacı tarafından ele alınan ve günümüzde hala incelenen konular arasındadır.

Özel eğri çiftlerinden bir diğeri olan Mannheim eğrisi ilk kez 1878 yılında Mannheim tarafından tanımlanarak literatüre kazandırılmıştır. Eğrinin birim normal vektörünün diğer eğrinin birim binormal vektörü ile lineer bağımlı olması durumunda oluşan eğri çifti olarak karşımıza çıkan Mannheim eğri çifti üzerine farklı çatı yapıları kullanılarak Öklidyen ve Minkowski uzayında çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Mannheim eğri çiftleri günümüzde çalışılan popüler konulardan birisi olarak yer almaktadır.

Diferensiyel geometride önemli konulardan bir diğeri ise null eğrilerdir. İlk kez Bonnor tarafından oluşturulan null eğrilerin geometrisi, nonnull eğrilerden çok farklı özelliklere sahip olmasıyla günümüzde önemli bir yere sahiptir.

Bu tez çalışmasının amacı; daha önceki çalışmalarda Minkowski uzayında nonnull eğriler için verilen quasi-çatı kavramını öncelikle null ve pseudo null eğriler için tanımlamaktır. Tanımlanan null ve pseudo null quasi-çatı kavramı ile ilgili çeşitli teoriler üreterek, bu teorilerin doğruluğunu kanıtlamaktır. Ayrıca null ve pseudo null quasi-çatı ve özelliklerini kullanarak yönlü null ve pseudo null Bertrand ile Mannheim eğri çiftleri için bazı özelliklere yer vermektir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Hermann Minkowski 1907 yılında Minkowski uzayını inşa etmiştir. Bu uzay, spacetime'ı temsil etmek amacıyla üç boyutlu uzayın genel yapısı ile zamanın birleştirilmesiyle meydana gelen dört boyutlu bir manifolddur. İzafiyet teorisini formülleştirmek için kullanılan en uygun uzay Minkowski uzayıdır. İzafiyet teorisinden sonra Hermann Minkowski, uzay ile zamanı kullanarak tek bir yapı oluşturmuştur.

Bonnor (1969), ilk kez Minkowski uzayında null eğrileri çalışmış ve çalışmasında Cartan çatılarını oluşturmuştur. Ayrıca Cartan çatılarının bir null eğriyi nasıl etkilediği üzerine de çalışmıştır. Bejancu (1994), Lorentz manifoldlarında ve genel olarak yarı-Riemann manifoldlarında null eğrilerin geometrisini incelemek için bir yöntem geliştirmiştir. Ferrandez, Gimenez ve Lucas (2001 a), Cartan çatıyı Lorentz uzay formlarına genelleştirerek temel varlık ve teklik teoremlerini ispatlamışlardır. Ayrıca bir başka çalışmalarında Lorentz-Minkowski uzayında null eğrilerin karakterizasyonlarını ele almışlardır (Ferrandez vd., 2001 b). Minkowski uzayında null ve null olmayan özel eğri çiftleri ile ilgili pek çok çalışma bulunmaktadır. Bu eğri çiftlerinden Bertrand eğrisi Balgetir vd. (2004) tarafından Minkowski uzayında null yapı kullanılarak çalışılmıştır. Öztekin ve Ergüt (2011), Minkowski uzayında null Mannheim eğrileri üzerine çalışmışlardır.

Eğrilerin diferensiyel geometrisiyle ilgili Öklid 3-uzayında fazlasıyla çalışma yapılmıştır. Farklı eğriler için karşılık gelen noktalardaki Frenet çatı vektörleri kullanılarak bazı yapılar elde edilmiştir. Bir uzay eğrisi kullanılarak farklı çatı yapıları ele alınmıştır. Bunlardan ilki Bishop (1975) tarafından ortaya atılmıştır. Bir başkası ise minimize edilmiş dönme çatısı şeklinde adlandırılmıştır. Wang vd. (2008) makalesinde bu çatı ile ilgili karşılaşılan durumlar üzerine incelemeler yapmıştır. Bu çatıların dışında farklı çatı kavramları üzerine incelemeler yapılmıştır. Adına quasi-normal vektör olarak adlandırdığı bir eğri için elde edilen yeni bir vektörü Coquillart (1987) çalışmasında ortaya atmıştır. Bir uzay eğrisinin ve quasi-normal vektörün kullanılmasıyla Dede vd. (2015) çalışmalarında quasi-çatı (q-çatı) kavramını ortaya atmıştır.

Eğriler teorisi üzerine çalışmalar yapılırken genellikle eğri çiftleri göz önünde bulundurularak hesaplamalar ve teoriler ortaya atılmıştır. Yapılan çalışmaların çoğunda Frenet çatısı kullanılmıştır. Frenet çatı vektörleri hesaplamalarda genel olarak bazı kısıtlara tabi tutulmalıdır. Bu kısıtlar arasında eğriliğin sıfır olduğu durumlar için Frenet çatı vektörleri tanımlanamamaktadır. Alternatif olan çatılar içerisinde quasi-çatı, Frenet ve

Bishop gibi çatılara göre bu kısıtlar olmaksızın hesaplanabilmektedir. Eğrilik sıfır iken Frenet vektörleri hesaplanamazken bir doğru boyunca quasi-çatı vektörleri hesaplanabilmektedir.

Bu çalışmaların yanı sıra Grbović vd. (2014) tarafından yapılan çalışmada Minkowski uzayında null Mannheim eğriler üzerine çalışmışlardır. Liu ve Wang (2008) tarafından yapılan, Minkowski 3-uzayında Mannheim eğri çiftlerini inceledikleri bir çalışma mevcuttur. Bunun yanı sıra Babaarslan ve Çöken (2009), null çatı yapısını kullanarak Bertrand eğrilerini incelemişlerdir. Ayrıca Lopez (2014), Minkowski uzayında eğriler ve yüzeyler üzerine çalışmalar yapmıştır. Özellikle null (lightlike) eğriler ve yüzeyler hakkında pek çok çalışması mevcuttur.

Bu çalışmada amaçlanan, izdüşüm vektörü ile tanımlanan quasi-çatı yardımıyla Minkowski uzayında yönlü null ve pseudo null eğrileri ele alarak bazı özelliklerini incelemektir. Ayrıca tanımlanan quasi-çatı kullanılarak Bertrand ve Mannheim eğrileri üzerine çalışmalar gerçekleştirmektir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Çalışma boyunca kullanılan teoremler ile tanımlar bu bölümde ele alınmıştır.

3.1. Öklid 3-Uzayında Yapılar

Tanım 3.1.1. $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ve $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ vektörleri için Öklid iç çarpımı

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$$

şeklindedir. Buradan $\mathbb{R}^3$ Afin uzayı Öklid uzayıdır buna ek olarak $\mathbb{E}^3$ ile verilir. Ancak, reel Afin uzaylar ile Öklid uzayları arasında temel farklar bulunmaktadır. Çünkü, A afin uzayı, içinde bulunduğu V reel vektör uzayıyla ilişkilendirilen metrik özelliklere sahiptir ve bu özellikler, V uzayında seçilecek iç çarpıma dayanır. Böylece, Afin uzayları ile Öklid uzayındaki özellikler arasında farklılıklar ortaya çıkar (Hacısalioğlu, 1998).

Tanım 3.1.2. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin bir açık aralığı I olmak üzere, (I, α) haritası yardımıyla verilen

$$\begin{aligned} \alpha : \ I &\to \mathbb{E}^n, \ \ I \subseteq \mathbb{R} \\ t &\to \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), ..., \alpha_n(t)) \end{aligned}$$

parametrizasyonu ile ifade edilen $\mathbb{E}^n$ uzayının bir alt kümesi olan $M = \alpha(I)$ ya uzay eğrisi adı verilir ve buradaki M eğrisi α ile sembolize edilecektir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 3.1.3. (I, α) haritası yardımıyla verilen M eğrisi için eğer her $s \in I$ olacak şekilde $\|\alpha'(s)\| = 1$ olması durumunda M eğrisi bu koordinat komşuluğu için birim hızlı eğridir. Eğrinin parametresi olan s ise yay parametresi olarak adlandırılır (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 3.1.4. $\mathbb{E}^3$ uzayında s yay-parametresi ile verilen birim olan $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$ eğrisinin, teğet $\mathbf{t} = \mathbf{V}_1$, normal $\mathbf{n} = \mathbf{V}_2$, binormal $\mathbf{b} = \mathbf{V}_3$ vektörleri olan $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ üçlüsüne Frenet çatısı denir. Frenet çatısı

$$\mathbf{t} = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|} = \alpha'(s)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = \frac{\mathbf{t}'}{\|\mathbf{t}'\|}$$

ve

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece

$$\mathbf{b} = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

olur (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 3.1.5. $\mathbb{E}^n$ uzayında (I, α) haritası yardımıyla verilen M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasına karşılık gelen ve $s \in I$ yay parametresi olacak şekilde $\{\mathbf{V}_1(s), ..., \mathbf{V}_r(s)\}$ ile verilen Frenet r-ayaklısı olmak üzere

$$\begin{aligned} k_i : \quad I &\to \mathbb{R} \qquad 1 < i < r \\ s &\to k_i(s) = \left\langle \mathbf{V}_i'(s), \mathbf{V}_{i+1}(s) \right\rangle \end{aligned}$$

tanımlanır. k_i fonksiyonuna bu eğrinin i-yinci eğriliği denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 3.1.6. $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi s yay parametresi olacak şekilde bu eğrinin Frenet üçlüsü olan $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ vektörleri için

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= k_1 \mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &= -k_1 \mathbf{t} + k_2 \mathbf{b} \\ \mathbf{b}' &= -k_2 \mathbf{n} \end{aligned}$$

eşitlikleri Frenet türev denklemleri olarak adlandırılır. $k_1 = \kappa$ ve $k_2 = \tau$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

matrisi mevcuttur (Hacısalihoğlu, 1998). Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= \kappa \mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &= -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} \\ \mathbf{b}' &= -\tau \mathbf{n} \end{aligned}$$

şeklinde verilebilir. α eğrisinin burulması τ ile gösterilir.

Sonuç 3.1.1. Yay parametresi s olan $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin bu noktadaki eğriliği $k_1(s) = \|\alpha''(s)\|$ ile verilir (Carmo, 1976).

Bishop Çatısı

Paralel vektör alanlarına bağlı olarak 1975 yılında eğrilerin alternatif veya paralel öteleme çatısı olarak adlandırılan Bishop çatısı, Bishop tarafından tanımlanmıştır (Bishop, 1975). Böylece geometriciler bu çatı sayesinde Frenet çatısının tanımlanamadığı durumlar için (özellikle eğrinin ikinci türevi sıfır olduğu durumlarda) alternatif bir çatı olarak Bishop çatısını kullanmaya başladılar (Masal ve Azak, 2017).

Tanım 3.1.7. $\mathbb{E}^3$ uzayında s yay parametresi ile verilen regüler bir C eğrisinin Frenet ve Bishop elemanları $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}, \kappa, \tau\}$ ve $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, k_1, k_2\}$ olmak üzere C eğrisinin s yay parametresine göre Frenet ve Bishop formülleri

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= \kappa\mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &= -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' &= -\tau\mathbf{n} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= k_1\mathbf{n}_1 + k_2\mathbf{n}_2 \\ \mathbf{n}_1' &= -k_1\mathbf{t} \\ \mathbf{n}_2' &= -k_2\mathbf{t} \end{aligned}$$

şeklindedir. C eğrisinin Frenet ve Bishop elemanları arasında

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= C' \\ \mathbf{n} &= \cos\theta\mathbf{n}_1 + \sin\theta\mathbf{n}_2 \\ \mathbf{b} &= -\sin\theta\mathbf{n}_1 + \cos\theta\mathbf{n}_2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} &\mathbf{n}_2 = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_1, \tau(s) = \theta'(s) \\ &\kappa(s) = \sqrt{k_1^2(s) + k_2^2(s)} \end{aligned}$$

bağıntıları vardır. Buradan, Bishop eğrilikleri

$$\begin{aligned} k_1(s) &= \kappa(s)\cos\theta(s) \\ k_2(s) &= \kappa(s)\sin\theta(s) \end{aligned}$$

tarafından tanımlanır (Bishop, 1975).

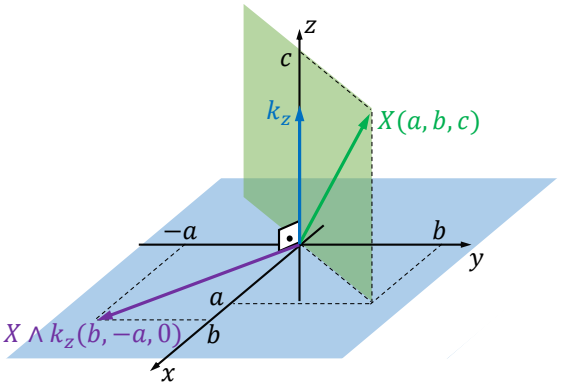
Uzay Eğrisi İçin Quasi-çatı (q-Çatı)

Dede ve diğerleri, uzay eğrisi için quasi-çatıyı tanımladılar. Quasi-çatısı diğer çatılara göre bazı avantajlar sunar. Bu avantajlar; eğrinin ikinci mertebeden türevinin sıfır olsa da tanımlanabilmesi ve eğrinin teğetinde oluşan gereksiz bükülmenin önlenmesidir.

Burada uzay eğrisinin quasi-çatı vektörleri ve eğrilikleri için $\mathbf{X} = (a, b, c)$ ile $\mathbf{k}_z = (0, 0, 1)$ alınırsa

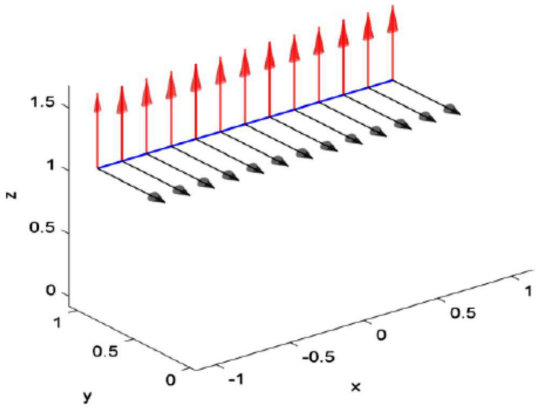
$$\mathbf{X} \wedge \mathbf{k}_z = (a, b, c) \wedge (0, 0, 1) = (b, -a, 0)$$

eşitliğine göre alınan $\mathbf{X}$ vektörü Şekil 3.1 ile verildiği gibi xy-düzlemine izdüşürülmüştür. Buradaki $\mathbf{k}$ izdüşüm vektörü birim olarak eksenler doğrultusundadır. Eğrinin izdüşüm ve teğet vektörleri lineer bağımlı olursa $\mathbf{t} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{0}$ olur.



Şekil 3.1 Düzleme izdüşürülmüş $\mathbf{X}$ vektörü

Quasi-çatıyı üç tipte sınıflandırabiliriz: x, y, z-eksenleri yönündeki quasi-çatıları sırasıyla $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q, \mathbf{k}_x\}$, $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q, \mathbf{k}_y\}$ ve $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q, \mathbf{k}_z\}$ olur. Burada izdüşüm vektörleri sırasıyla $\mathbf{k}_z = (0, 0, 1)$, $\mathbf{k}_y = (0, 1, 0)$ ve $\mathbf{k}_x = (1, 0, 0)$ olarak verilir (Dede vd., 2015).



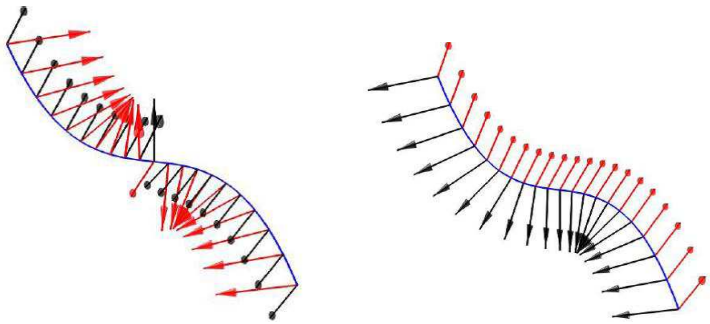
Şekil 3.2 Bir doğru boyunca quasi-çatı

Şekil 3.2 ile verilen doğrunun y-eksenindeki quasi-çatısı çizdirilmiştir.

Tanım 3.1.8. $\mathbb{R}^3$ uzayında eğrinin quasi-çatısı

$$\mathbf{t} = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \mathbf{n}_q = \frac{\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}}{\|\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}\|}, \mathbf{b}_q = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q \tag{3.1}$$

tarafından ifade edilir. İzdüşüm vektörü $\mathbf{k}$ ile eğrinin teğeti $\mathbf{t}$, quasi-normali $\mathbf{n}_q$ ve quasi-binormali $\mathbf{b}_q$ olarak isimlendirilir. Quasi-çatı kullanılarak verilen uzay eğrisi, yönlü uzay eğrisi olarak adlandırılır (Dede vd., 2015).



Şekil 3.3 Frenet çatısı ve quasi-çatı

Şekil 3.3 ile sırasıyla eğrinin Frenet ve quasi çatılarının normal düzlem vektörleri arasındaki farklılık gösterilmiştir.

Teorem 3.1.1. $\mathbb{R}^3$ uzayında ele alınan eğri için quasi-çatı vektörlerinin türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}_q' \\ \mathbf{b}_q' \end{bmatrix} = \|\alpha'\| \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & k_3 \\ -k_2 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix}$$

olur ve q-eğrilikleri

$$k_1 = \frac{\langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q \rangle}{\|\alpha'\|}, k_2 = \frac{\langle \mathbf{t}', \mathbf{b}_q \rangle}{\|\alpha'\|}, k_3 = \frac{\langle \mathbf{n}_q', \mathbf{b}_q \rangle}{\|\alpha'\|}$$

şeklindedir (Dede vd., 2015).

Quasi-Çatı ile Frenet Çatısı Arasındaki Bağıntı

3-boyutlu Öklid uzayında Şekil 3.4 ile görselleştirilen θ açısı, $\mathbf{n}$ ve $\mathbf{n}_q$ vektörleri arasındaki açıyı temsil etsin. Bu durumda Şekil 3.4 ile de görüldüğü gibi iki çatı arasında

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

bağıntısı vardır (Dede vd., 2015 a).

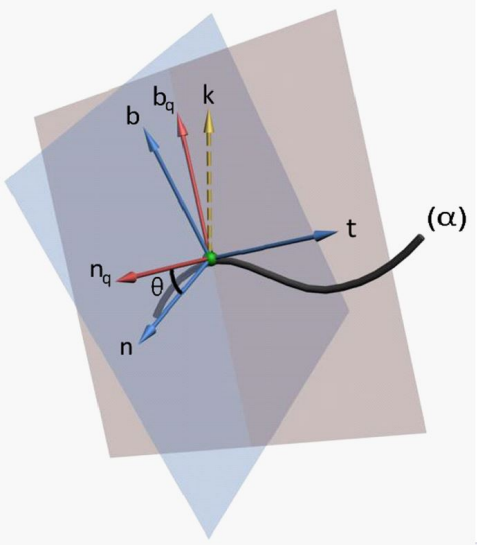
Teorem 3.1.2. $\alpha(s)$ birim hızlı eğri ve θ açısı, eğrinin normal ve quasi-normal vektörleri arasındaki açı olmak üzere k_1, k_2, k_3 q-eğrilikleri ile κ, τ Frenet eğrilikleri arasındaki bağıntı

$$\begin{aligned} k_1 &= \kappa\cos\theta \\ k_2 &= -\kappa\sin\theta \\ k_3 &= d\theta + \tau \end{aligned}$$

ise

$$\cos\theta = \frac{\det(\alpha'', \alpha', \kappa)}{\|\alpha' \wedge \mathbf{k}\|\,\|\alpha''\|}$$

şeklinde ifade edilir (Dede vd., 2018).



Şekil 3.4 Frenet çatısı ile quasi-çatı

Yönlü Bertrand Eğrileri

Tanım 3.1.9. $\alpha, \beta \subset \mathbb{E}^3$ olmak üzere quasi-çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ olarak verilen α eğrisi ile quasi-çatısı $\left\{\mathbf{t}^\lambda, \mathbf{n}_q^\lambda, \mathbf{b}_q^\lambda\right\}$ olan β eğrisinin quasi-normal vektörleri $\mathbf{n}_q$ ve $\mathbf{n}_q^\lambda$ lineer bağımlı ise α ve β eğrileri yönlü Bertrand eğri çifti olarak adlandırılır (Dede vd., 2018).

Teorem 3.1.3. Yönlü Bertrand eğri çifti olan birim hızlı $\alpha(s)$ ve $\beta(s_1)$ eğrileri için;

a) Eğri çiftinin karşılık gelen noktaları arasındaki uzaklık sabittir.

b) Yönlü Bertrand eğri çiftinin teğet vektörlerinin oluşturduğu açı, $k_3 = 0$ olması durumunda sabittir (Dede vd., 2018).

3.2. Minkowski 3-Uzayında Yapılar

Tanım 3.2.1. Reel vektör uzayı V için

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü simetrik ve 2-lineer olması durumunda g dönüşümüne V uzayında simetrik 2-lineer form adı verilir. Verilen dönüşümün ek olarak nondejenere olması halinde g dönüşümüne V uzayında skaler çarpım denir. Buradan V uzayı, skaler çarpım uzayı adını alır. Ek olarak her V uzayındaki $\overrightarrow{\mathbf{v}} \neq 0$ vektörü ve g simetrik 2-lineer formu için;

i) $g\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right) > 0 \Rightarrow g$ pozitif tanımlı,

ii) $g\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right) < 0 \Rightarrow g$ negatif tanımlı,

iii) $g\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right) \geq 0 \Rightarrow g$ yarı-pozitif tanımlı,

iv) $g\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right) \leq 0 \Rightarrow g$ yarı-negatif tanımlı olarak adlandırılır.

Bunun yanı sıra

"V uzayının elemanı olan her $\mathbf{w}$ alındığında $g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ ise $\mathbf{v} = 0$ oluyorsa g formuna nondejenere, $\mathbf{v} \neq 0$ olduğunda $g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ bulunursa g formuna dejenere denir." (O' Neill, 1983).

Tanım 3.2.2. W skaler çarpımının negatif tanımlı olması halinde ve $W \subset V$ skaler çarpım alt uzayı olacak şekilde W en büyük boyutlu alt uzay olur. Buna göre W alt uzayın boyutu, g simetrik 2-lineer formun indeksi adını alır (O' Neill, 1983).

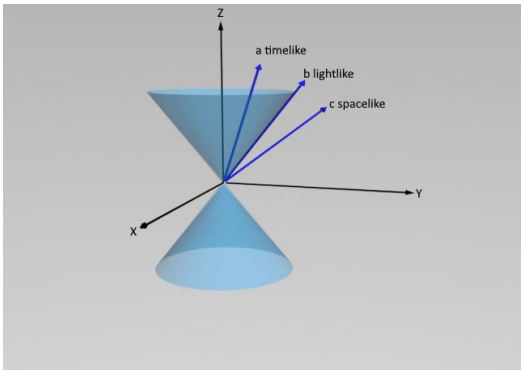
Burada indeks ν ise $0 \leq \nu \leq boyV$ şeklindedir. Bu aynı zamanda g simetrik 2-lineer formun indeksidir.

Tanım 3.2.3. İndeksi ν olan skaler çarpım uzayı V için $boyV \geq 2$ ve $\nu = 1$ ise bu durumda V, Lorentz uzayı adını alır (O' Neill, 1983).

Tanım 3.2.4. Lorentz uzayı olarak V alındığında $\mathbf{v} \in V$ iken $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$ veya $\mathbf{v} = 0$ ise, $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) < 0$ ise, $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ ve $\mathbf{v} \neq 0$ ise sırasıyla $\mathbf{v}$ spacelike vektör, timelike vektör ve null (lightlike) vektör adını alır. $\mathbf{v}$ vektörünün normu $\|\mathbf{v}\| = |g(\mathbf{v}, \mathbf{v})|^{1/2}$ reel sayısı ile verilir. V Lorentz uzayındaki bütün timelike vektörler Γ ile verilsin. $\mathbf{w} \in \Gamma$ olmak üzere

$$C(\mathbf{w}) = \{\mathbf{v} \in \Gamma \mid g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) < 0\}$$

şeklinde verilen küme $\mathbf{w}$ timelike vektörü içinde barındıran V Lorentz uzayının time-konisi adını alır (O' Neill, 1983). Şekil 3.5 ile Minkowski uzayında spacelike, timelike ve null (lightlike) vektörler gösterilmiştir.



Şekil 3.5 Minkowski uzayında vektörler

Tanım 3.2.5. $\alpha : I \to \mathbb{L}^3$ parametreli eğrisi, $\forall t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise regülerdir, bir adım daha ileri gidebilir ve $\{\alpha'(t), \alpha''(t)\}$, $\forall t \in I$ için lineer bağımsız ise α eğrisinin biregüler olduğu söylenir (Couto ve Lymberopoulos, 2021).

Tanım 3.2.6. $\alpha : I \to \mathbb{R}_v^n$ bir regüler eğri ve $t_0 \in I$ olsun.

i) $\alpha'(t_0)$ bir spacelike vektör ise $\alpha(t_0)$ da spaceliketır.

ii) $\alpha'(t_0)$ bir timelike vektör ise $\alpha(t_0)$ da timeliketır.

iii) $\alpha'(t_0)$ bir lightlike vektör ise $\alpha(t_0)$ da lightliketır.

$\forall t \in I$ için $\alpha'(t)$ vektörünün causal karakteri neyse α eğrisinin causal karakteri de o olur. $\mathbb{L}^3$ uzayındaki eğriler için bu durumları şöyle de tanımlayabiliriz.

iv) α, sırasıyla spacelike, timelike veya lightlike ise α nın ϵ_α göstergesi $1, -1$ veya 0 şeklindedir.

v) Oskülatör düzlemler sırasıyla; spacelike, timelike veya lightlike ise α nın η_α eş göstergesi $1, -1$ veya 0 alınır (Couto ve Lymberopoulos, 2021).

Teorem 3.2.1. V Lorentz uzayında **v** ve **w** timelike vektörleri için

i) $|g(\mathbf{v}, \mathbf{w})| \geq \|\mathbf{v}\| \,.\, \|\mathbf{w}\|$
eşitsizliğinin eşitlik olabilmesi için $\Leftrightarrow$ **v** ve **w** lineer bağımlı olmalıdır.

ii) Aynı time-konide olan **v** ve **w** vektörleri için

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\|\mathbf{v}\| \,.\, \|\mathbf{w}\| \cosh \varphi$$

olup yalnız bir $\varphi \geq 0$ değeri olsun, φ alınan iki timelike vektör arasındaki hiperbolik açı olarak adlandırılır.

Eğer aynı time-konide olmayan **v** ve **w** vektörleri için

$$|g(\mathbf{v}, \mathbf{w})| = \|\mathbf{v}\| \,.\, \|\mathbf{w}\| \cosh \varphi$$

şeklindedir. **v** ve **w** spacelike iki vektör alındığında

$$\cos \theta = \frac{g(\mathbf{v}, \mathbf{w})}{\|\mathbf{v}\| \,.\, \|\mathbf{w}\|}$$

şartını sağlayan yegane $0 \leq \theta \leq \pi$ açısı bulunur. Buradaki açıya, **v** ve **w** spacelike vektörleri arasındaki açı adı verilir. $g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \leq \|\mathbf{v}\| \,.\, \|\mathbf{w}\|$ eşitsizliği spacelike iki vektör için geçerlidir (O' Neill, 1983).

Tanım 3.2.7. $\mathbb{R}_1^3$ uzayı alındığında (I, α) haritası ile $M \subset \mathbb{R}_1^3$ eğrisi verilsin. Birim hızlı eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ alınsın. Bu durumda $\kappa(s) = \langle \mathbf{t}', \mathbf{n} \rangle$ şeklinde tanımlanan reel değerli κ fonksiyonu M eğrisinin eğrilik fonksiyonu ve $\kappa(s)$ sayısı da M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birinci eğriliği adı verilir (Kobayashi, 1983).

Tanım 3.2.8. $\mathbb{R}_1^3$ uzayı alındığında (I, α) haritası ile $M \subset \mathbb{R}_1^3$ eğrisi verilsin. Birim hızlı eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ alınsın. Bu durumda $\tau(s) = \langle \mathbf{n}', \mathbf{b} \rangle$ şeklinde tanımlanan reel değerli τ fonksiyonu M eğrisinin torsiyon fonksiyonu ve $\tau(s)$ sayısı da M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki ikinci eğriliği adı verilir (Kobayashi, 1983).

Tanım 3.2.9. Negatif tanımlı en büyük boyutlu alt uzayın boyutuna indeks denir. Bu aynı zamanda simetrik, nondejenere ve sabit indeksli $(0, 2)$-tipinden g metrik tensörününde indeksi olarak adlandılır (O'Neill, 1983).

Tanım 3.2.10. $\mathbb{R}^3$ uzayında alınan her p noktası için

$$\mathbf{v}_p = (v_1, v_2, v_3), \qquad \mathbf{w}_p = (w_1, w_2, w_3) \in T_p\mathbb{R}^3$$

alınırsa

$$g : \langle \mathbf{v}_p, \mathbf{w}_p \rangle = -v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

eşitliği yardımıyla 1-indeksli metrik tensörle birlikte elde edilen uzaya $\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayı denir (O' Neill, 1983).

Tanım 3.2.11. Türevlenebilir M manifoldu üzerinde sabit indeksli olarak verilen g bir metrik tensör olsun. Bu durumda (M, g) ikilisi yarı-Riemann manifoldu olarak adlandırılır (O'Neill, 1983).

Tanım 3.2.12. M yarı-Riemann manifoldu ve M üzerinde verilen g metriğinin sabit indeksi bu manifoldun indeksi adını alır (O'Neill, 1983).

Tanım 3.2.13. İndeksi 1 ve $boyM \geq 2$ olan M yarı-Riemann manifolduna Lorentz manifoldu adı verilir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.2.14. Lorentz manifoldu M ve teğet vektör alanı $\mathbf{t}$ olan $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to M$ eğrisi için; $g(\mathbf{t}, \mathbf{t}) < 0$, $g(\mathbf{t}, \mathbf{t}) > 0$, $g(\mathbf{t}, \mathbf{t}) = 0$ ve $\mathbf{t} \neq 0$ olup sırasıyla α timelike, spacelike, null eğri olarak adlandırılır (O'Neill, 1983).

Özel hal olan doğrular doğrultman vektörüne göre isimlendirilir. Doğrultman vektörü spacelike,timelike ve null olan doğrulara sırasıyla spacelike doğru, timelike doğru ve null doğru denir.

$\mathbb{R}_1^3$ Uzayında Vektörel Çarpım

Tanım 3.2.15. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ve $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ için

$$(v_2w_3 - v_3w_2, v_1w_3 - v_3w_1, v_2w_1 - v_1w_2)$$

vektörü $\mathbf{v}$ ile $\mathbf{w}$ nin vektörel çarpımı adını alır. $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ veya $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ olarak ifade edilebilir (Akutagawa ve Nishikawa, 1990). Burada

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad i = j \text{ ise} \\ 0 & , \quad i \neq j \text{ ise} \end{cases} \quad \text{ve } \mathbf{e}_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$$

olmak üzere

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\det \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

veya

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & -\mathbf{e}_2 & -\mathbf{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanabilir. Bu durumda

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_3, \ \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2$$

olur ve pozitif yön olarak saat yönünün tersi kabul edilmiştir.

Ayrıca negatif yön olarak saat yönünün tersi alınırsa

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \ \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$$

elde edilir. Buradan

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \det \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

şeklindedir (Turgut, 1995).

Teorem 3.2.2. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ ile $\mathbf{w}$ alınırsa $\langle \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = -\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$, $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = -\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{v} + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{u}$, $\langle \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0$ ve $\langle \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$, Lagrange özdeşliği ise $\langle \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \rangle = -\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + (\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2$ olur (Turgut, 1995; O'Neill, 1983).

Teorem 3.2.3. $\mathbb{R}_1^3$ uzayındaki **u** ile **v** baz vektörleri için spacelike vektörler ise $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ timelike, biri spacelike bir diğeri timelike ise $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ spacelike, birisi spacelike diğeri null vektör iken $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ ise $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ null, eğer $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$ ise $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ spacelike, ikisi null ise $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ spacelike, biri timelike diğeri null ise $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ spacelike, ikisi de timelike olması halinde $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ spacelike vektör adını alır (Turgut, 1995; O'Neill, 1983).

3.3. Minkowski 3-Uzayında Nonnull Eğriler için Quasi-Çatı

Teorem 3.3.1. $\alpha(s)$, s yay parametreli nonnull eğrisi verilsin. $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = \varepsilon_0$, $\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle = \varepsilon_1$, $\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = \varepsilon_4$, $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \varepsilon_2$, $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = \varepsilon_3$ olmak üzere quasi-çatının türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}_q' \\ \mathbf{b}_q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_1 k_1 & -\varepsilon_0 \varepsilon_1 k_2 \\ -\varepsilon_0 k_1 & 0 & -\varepsilon_0 \varepsilon_1 k_3 \\ -\varepsilon_0 k_2 & -\varepsilon_1 k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

ile verilir ve q-eğrilikleri

$$k_1 = \langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q \rangle, k_2 = \langle \mathbf{t}', \mathbf{b}_q \rangle, k_3 = \langle \mathbf{n}_q', \mathbf{b}_q \rangle$$

olur (Tarım Kandilci vd., 2023).

Teorem 3.3.2. Minkowski uzayında **t** birim teğet vektörü spacelike, **k** izdüşüm vektörü timelike (spacelike), $\mathbf{n}_q$ quasi-normal vektörü ve **n** normal vektörü spacelike (timelike), $\mathbf{b}_q$ quasi-binormal vektörü ve **b** binormal vektörü timelike (spacelike) olmak üzere spacelike eğri boyunca $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ quasi-çatısı ile $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ Frenet çatısı arasındaki bağıntı

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cosh\theta & \sinh\theta \\ 0 & \sinh\theta & \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cosh\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cosh\theta & -\sinh\theta \\ 0 & -\sinh\theta & \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cosh\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix}.$$

şeklindedir. Burada $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = \varepsilon_0, \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle = \varepsilon_1, \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = -\varepsilon_0 \varepsilon_1, \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \varepsilon_2,$
$\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = -\varepsilon_0 \varepsilon_2$ (Tarım Kandilci vd., 2023).

Teorem 3.3.3. Minkowski uzayında **t** birim teğet vektörü spacelike, **k** izdüşüm vektörü timelike (spacelike), $\mathbf{n}_q$ quasi-normal vektörü ve **n** normal vektörü spacelike

(timelike), $\mathbf{b}_q$ quasi-binormal vektörü ve $\mathbf{b}$ binormal vektörü timelike (spacelike) olmak üzere spacelike eğri boyunca $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ quasi-çatısı ile $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ Frenet çatısının eğrilikleri arasındaki ilişki $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = \varepsilon_0$, $\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle = \varepsilon_1$, $\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = -\varepsilon_0\varepsilon_1$, $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \varepsilon_2$, $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = -\varepsilon_0\varepsilon_2$ için

$$k_1 = \varepsilon_2\kappa \cosh\theta, k_2 = \varepsilon_0\varepsilon_1\kappa \sinh\theta, k_3 = -\varepsilon_0(\varepsilon_2 d\theta + \varepsilon_1\tau)$$

şeklinde ifade edilebilir (Tarım Kandilci vd., 2023).

Teorem 3.3.4. Minkowski uzayında $\mathbf{t}$ birim teğet vektörü spacelike, $\mathbf{k}$ izdüşüm vektörü timelike (spacelike), $\mathbf{n}_q$ quasi-normal vektörü ve $\mathbf{b}$ binormal vektörü spacelike (timelike), $\mathbf{b}_q$ quasi-binormal vektörü ve $\mathbf{n}$ normal vektörü timelike (spacelike) olmak üzere spacelike eğri boyunca $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ quasi-çatısı ile $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ Frenet çatısı arasındaki bağıntı

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1 \sinh\theta & \varepsilon_2 \cosh\theta \\ 0 & -\varepsilon_2 \cosh\theta & \varepsilon_1 \sinh\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 \sinh\theta & -\varepsilon_2 \cosh\theta \\ 0 & \varepsilon_2 \cosh\theta & -\varepsilon_1 \sinh\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada.$\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = \varepsilon_0, \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle = \varepsilon_1, \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = -\varepsilon_0\varepsilon_1, \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \varepsilon_2,$
$\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = -\varepsilon_0\varepsilon_2$ (Tarım Kandilci vd., 2023).

Teorem 3.3.5. Minkowski uzayında $\mathbf{t}$ birim teğet vektörü spacelike, $\mathbf{k}$ izdüşüm vektörü timelike (spacelike), $\mathbf{n}_q$ quasi-normal vektörü ve $\mathbf{b}$ binormal vektörü spacelike (timelike), $\mathbf{b}_q$ quasi-binormal vektörü ve $\mathbf{n}$ normal vektörü timelike (spacelike) olmak üzere spacelike eğri boyunca $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ quasi-çatısı ile $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ Frenet çatısının eğrilikleri arasındaki ilişki $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = \varepsilon_0$, $\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle = \varepsilon_1$, $\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = -\varepsilon_0\varepsilon_1$, $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \varepsilon_2$, $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = -\varepsilon_0\varepsilon_2$ için

$$k_1 = \kappa \sinh\theta, k_2 = \varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2\kappa \cosh\theta, k_3 = \varepsilon_0(-\varepsilon_2 d\theta + \varepsilon_1\tau)$$

şeklinde ifade edilebilir (Tarım Kandilci vd., 2023).

Teorem 3.3.6. Minkowski uzayında $\mathbf{t}$ birim teğet vektörü timelike, $\mathbf{k}$ izdüşüm vektörü spacelike, $\mathbf{n}_q$ quasi-normal vektörü ve $\mathbf{n}$ normal vektörü spacelike, $\mathbf{b}_q$ quasi-binormal vektörü ve $\mathbf{b}$ binormal vektörü spacelike olmak üzere timelike eğri boyunca $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ quasi-çatısı

ile $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ Frenet çatısı arasındaki bağıntı

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = \varepsilon_0, \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle = \varepsilon_1, \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = -\varepsilon_0\varepsilon_1, \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \varepsilon_2,$
$\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = -\varepsilon_0\varepsilon_2$ (Tarım Kandilci vd., 2023; Dede vd.,2017).

Teorem 3.3.7. Minkowski uzayında **t** birim teğet vektörü timelike, **k** izdüşüm vektörü spacelike, $\mathbf{n}_q$ quasi-normal vektörü ve **n** normal vektörü spacelike, $\mathbf{b}_q$ quasi-binormal vektörü ve **b** binormal vektörü spacelike olmak üzere timelike eğri boyunca $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ quasi-çatısı ile $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ Frenet çatısının eğrilikleri arasındaki ilişki $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = \varepsilon_0, \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle = \varepsilon_1,$
$\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = -\varepsilon_0\varepsilon_1, \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \varepsilon_2, \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = -\varepsilon_0\varepsilon_2$ için

$$k_1 = \kappa\cos\theta, k_2 = -\kappa\sin\theta, k_3 = d\theta + \tau$$

olarak verilir (Tarım Kandilci vd., 2023; Dede vd., 2017).

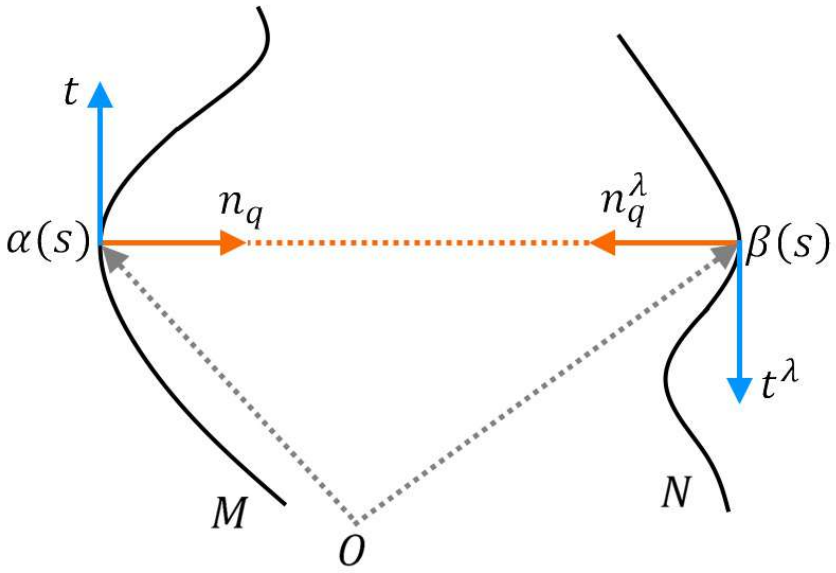
Minkowski Uzayında Yönlü Nonnull Bertrand Eğri Çiftleri

Tanım 3.3.1. (I, α) ve (I, β) haritaları yardımıyla $\mathbb{R}_1^3$ uzayında verilen iki uzay eğrisi M ve N için quasi-çatı vektörleri sırasıyla$\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ ve $\{\mathbf{t}^\lambda, \mathbf{n}_q^\lambda, \mathbf{b}_q^\lambda\}$ olsun. Eğer quasi-çatının ikinci vektörleri olan $\mathbf{n}_q$ ile $\mathbf{n}_q^\lambda$ lineer bağımlıysa bu eğrilere yönlü nonnull Bertrand eğri ikilisi adı verilir (Tarım, 2016).

Önerme 3.3.1. Yönlü nonnull Bertrand eğri çifti olan birim hızlı $\alpha(s)$ ve $\beta(s_1)$ eğrileri için; $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = \varepsilon_0, \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle = \varepsilon_1, \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = -\varepsilon_0\varepsilon_1, \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \varepsilon_2, \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = -\varepsilon_0\varepsilon_2$ ve
$\blacklozenge = |\varepsilon_0(1 - \lambda\varepsilon_0 k_1)^2 - \lambda^2\varepsilon_0\varepsilon_1 k_3^2|$ olmak üzere,

a) Yönlü nonnull Bertrand eğrilerinin $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ noktaları arasındaki uzaklık sabittir.

b) Yönlü nonnull Bertrand eğri çiftinin teğet vektörlerinin oluşturduğu açı, $k_3 = 0$ olması durumunda sabittir (Tarım Kandilci vd., 2023).



Şekil 3.6 Yönlü Bertrand eğri çifti

Şekil 3.6 ile yönlü Bertrand eğri çifti gösterilmiştir.

Teorem 3.3.8. Yönlü nonnull Bertrand eğri çifti olan birim hızlı $\alpha(s)$ ve $\beta(s_1)$ eğrilerinin quasi-çatıları arasındaki bağıntı

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}^{\lambda} \\ \mathbf{n}_q^{\lambda} \\ \mathbf{b}_q^{\lambda} \end{bmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{\blacklozenge}} \begin{bmatrix} 1-\lambda\varepsilon_0 k_1 & 0 & -\lambda\varepsilon_0\varepsilon_1 k_3 \\ 0 & \sqrt{\blacklozenge} & 0 \\ \mp\lambda\varepsilon_0 k_3 & 0 & \pm(1-\lambda\varepsilon_0 k_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = \varepsilon_0$, $\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle = \varepsilon_1$, $\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = -\varepsilon_0\varepsilon_1$, $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \varepsilon_2$, $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = -\varepsilon_0\varepsilon_2$ ve $\blacklozenge = |\varepsilon_0(1-\lambda\varepsilon_0 k_1)^2 - \lambda^2\varepsilon_0\varepsilon_1 k_3^2|$ olarak verilmiştir (Tarım Kandilci vd., 2023).

Teorem 3.3.9. Yönlü nonnull Bertrand eğri çifti olan birim hızlı $\alpha(s)$ ve $\beta(s_1)$ eğrilerinin q-eğrilikleri arasındaki bağıntı

$$k_1^{\lambda} = \frac{\lambda\varepsilon_0\varepsilon_1 k_3^2 + (1-\lambda\varepsilon_0 k_1)\, k_1}{\sqrt{|\varepsilon_0(1-\lambda\varepsilon_0 k_1)^2 - \lambda^2\varepsilon_0\varepsilon_1 k_3^2|}},$$

$$k_2^{\lambda} = \pm\frac{\lambda k_3'(1-\lambda\varepsilon_0 k_1) + \lambda^2\varepsilon_0 k_1' k_3 + \left((1-\lambda\varepsilon_0 k_1)^2 - \lambda^2\varepsilon_1 k_3^2\right) k_2}{|\varepsilon_0(1-\lambda\varepsilon_0 k_1)^2 - \lambda^2\varepsilon_0\varepsilon_1 k_3^2|},$$

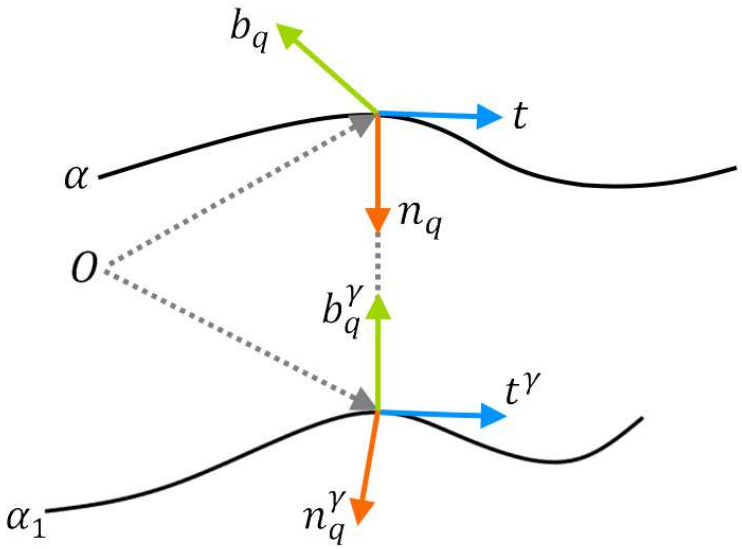
ve

$$k_3^{\lambda} = \pm \frac{k_3}{\sqrt{|\varepsilon_0(1-\lambda\varepsilon_0 k_1)^2 - \lambda^2 \varepsilon_0 \varepsilon_1 k_3^2|}},$$

bulunur. Burada $k_1^{\lambda}, k_2^{\lambda}$ ve $k_3^{\lambda}, \beta\,(s)$ eğrisinin q-eğrilikleridir. Ayrıca $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = \varepsilon_0, \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle = \varepsilon_1,$ $\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = -\varepsilon_0\varepsilon_1, \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \varepsilon_2, \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = -\varepsilon_0\varepsilon_2$ olarak verilmiştir (Tarım Kandilci vd., 2023).

Minkowski Uzayında Yönlü Nonnull Mannheim Eğri Çiftleri

Tanım 3.3.2. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında α ve α_1 birim hızlı eğrilerin quasi-çatıları sırasıyla $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ ve $\{\mathbf{t}^{\gamma}, \mathbf{n}_q^{\gamma}, \mathbf{b}_q^{\gamma}\}$ olup, $\mathbf{n}_q$ ile $\mathbf{b}_q^{\gamma}$ lineer bağımlı ise, α eğrisine yönlü nonnull Mannheim eğrisi, α_1 eğrisine de yönlü nonnull Mannheim eğri ortağı denir (Tarım, 2016). Şekil 3.7 ile yönlü Mannheim eğri çifti gösterilmiştir.



Şekil 3.7 Yönlü Mannheim eğri çifti

$\mathbb{R}_1^3$ uzayında yönlü spacelike Mannheim eğri eşleri

i) $\mathbb{R}_1^3$ uzayında birim teğet spacelike vektör **t** ve izdüşüm vektörü olan **k** timelike olduğunda $\mathbf{n}_q$ spacelike ve $\mathbf{b}_q$ timelike olur.

Teorem 3.3.10. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında **k** vektörü timelike olan birim hızlı α ile α_1 yönlü spacelike Mannheim eğrilerinin alınan noktalar arasındaki mesafesi sabit olur (Tarım, 2016).

Teorem 3.3.11. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında birim hızlı α ile α_1 eğrilerinin yönlü spacelike Mannheim eğri eşi belirtmesi için ancak ve ancak $\lambda \neq 0$ ve **k** vektörü timelike olup

$$k_2^\gamma = \mp \frac{k_1 - \lambda k_1^2 + \lambda k_3^2}{\left|(1-\lambda k_1)^2 - \lambda^2 k_3^2\right|}$$

denklemi sağlanmalıdır. α ile α_1 eğrilerinin q-eğrilikleri sırasıyla k_1, k_2, k_3 ve $k_1^\gamma, k_2^\gamma, k_3^\gamma$ şeklindedir (Tarım, 2016).

ii) $\mathbb{R}_1^3$ uzayında birim teğet spacelike vektör **t** ve izdüşüm vektörü olan **k** spacelike olduğunda $\mathbf{n}_q$ timelike ve $\mathbf{b}_q$ spacelike olur.

Teorem 3.3.12. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında **k** vektörü spacelike olan birim hızlı α ile α_1 yönlü spacelike Mannheim eğrilerinin alınan noktalar arasındaki mesafesi sabit olur (Tarım, 2016).

Teorem 3.3.13. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında birim hızlı α ile α_1 eğrilerinin yönlü spacelike Mannheim eğri eşi belirtmesi için ancak ve ancak $\lambda \neq 0$ ve **k** vektörü spacelike olup

$$k_2^\gamma = \mp \frac{k_1 - \lambda k_1^2 - \lambda k_3^2}{(1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}$$

denklemi sağlanmalıdır. α ile α_1 eğrilerinin q-eğrilikleri sırasıyla k_1, k_2, k_3 ve $k_1^\gamma, k_2^\gamma, k_3^\gamma$ şeklindedir (Tarım, 2016).

$\mathbb{R}_1^3$ uzayında yönlü timelike Mannheim eğri eşleri

$\mathbb{R}_1^3$ uzayında birim teğet timelike vektör **t** ve izdüşüm vektörü olan **k** spacelike olduğunda $\mathbf{n}_q$ spacelike ve $\mathbf{b}_q$ spacelike olur.

Teorem 3.3.14. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında **k** vektörü spacelike olan birim hızlı α ile α_1 yönlü timelike Mannheim eğrilerinin alınan noktalar arasındaki mesafesi sabit olur (Tarım, 2016).

Teorem 3.3.15. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında birim hızlı α ile α_1 eğrilerinin yönlü timelike Mannheim eğri eşi belirtmesi için ancak ve ancak $\lambda \neq 0$ ve **k** vektörü spacelike olup

$$k_2^\gamma = \pm \frac{k_1 + \lambda k_1^2 - \lambda k_3^2}{\left|\lambda^2 k_3^2 - (1+\lambda k_1)^2\right|}$$

denklemi sağlanmalıdır. α ile α_1 eğrilerinin q-eğrilikleri sırasıyla k_1, k_2, k_3 ve $k_1^\gamma, k_2^\gamma, k_3^\gamma$ şeklindedir (Tarım, 2016).

3.4. Minkowski 3-Uzayında Null Eğriler için Yapılar

Bu kısımda, Minkowski 3-uzayında null (lightlike) vektörler ile timelike vektörler arasındaki bazı özellikler ile null eğriler için null çatı ve pseudo null çatı tanıtıldı.

Tanım 3.4.1. V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun. V nin

$$RadV = \{\xi \in V : g(\xi, v) = 0, \forall v \in V\}$$

şeklinde tanımlı alt uzayına g ye göre V uzayının radikal (veya null) uzayı denir. $RadV$ alt uzayının boyutuna g simetrik bilineer formun nulluk derecesi denir ve $nullV$ ile gösterilir.

Eğer $nullV > 0$ ise g dejeneredir eğer $nullV = 0$ ise non-dejeneredir (O'Neill,1983).

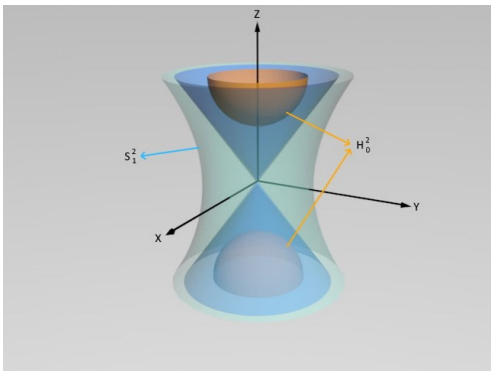
Tanım 3.4.2. $\mathbb{R}_1^n$ Minkowski uzayında Şekil 3.8 ile gösterilen

$$S_1^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}_1^n : g(x, x) = r^2\}$$

kümesine orijin merkezli pseudo küre (Lorentz küresi),

$$H_0^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}_1^n : g(x, x) = -r^2\}$$

kümesine orijin merkezli pseudo hiperbolik küre,

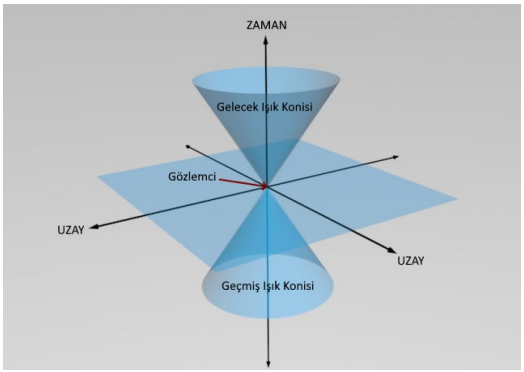


Şekil 3.8 Minkowski 3-uzayında birim küreler

Şekil 3.9 ile verilen

$$Q_q^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}_q^n : g(x - c, x - c) = 0\}$$

kümesine de lightlike koni (veya null koni) denir (O'Neill, 1983).



Şekil 3.9 Işık konisi (null koni)

Önerme 3.4.1. Minkowski uzay-zamanda herhangi bir timelike vektör ile null vektör ortogonal değildir (Physics Forums, 2013).

Önerme 3.4.2. Lightlike (null) vektörler ortogonal ise lineer bağımlıdır (O'Neill, 1983; Stack Exchange, 2017).

Pseudo Yay Uzunluğu Parametresine Göre Verilmiş Null Eğriler

Tanım 3.4.3. $\alpha : I \to \mathbb{E}_1^3, \forall s \in I$ için $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = 0$ ve $\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle_L > 0$ ise α eğrisine null eğri adı verilir. Eğer $\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle_L = 1$ ise α eğrisine pseudo yay uzunluğu parametresine göre verilmiş null eğri denir (Walrave,1995).

$\alpha : I \to \mathbb{E}_1^3$ pseudo yay uzunluğu parametresine göre verilmiş bir null eğri olsun. Bu durumda $\mathbf{t} = \alpha'(s)$ vektörü α eğrisinin teğet vektörüdür. α eğrisinin asli normal vektör alanı $\mathbf{n} = \alpha''(s)$ olup spacelike vektördür. $\mathbf{b}$ binormal vektör alanı ise α eğrisinin her $\alpha(s)$ noktasında $\mathbf{n}$ vektörüne dik olan tek null vektör alanıdır öyle ki $\langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle_L = 1$ olur. Burada α doğru ise $\kappa(s) = 0$ ve diğer durumlarda $\kappa(s) = 1$ dir. Ayrıca α eğrisinin burulma fonksiyonu $\tau(s) = \langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{b} \rangle_L$ şeklindedir (Walrave, 1995).

Teorem 3.4.1. $\alpha : I \to \mathbb{E}_1^3$ pseudo yay uzunluğu parametresine göre verilmiş bir null eğri, $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ Frenet vektör alanı olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ \tau(s) & 0 & -\kappa(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}.$$

Burada

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t},\mathbf{t}\rangle_L &= \langle \mathbf{b},\mathbf{b}\rangle_L = \langle \mathbf{t},\mathbf{n}\rangle_L = \langle \mathbf{n},\mathbf{b}\rangle_L = 0 \\ \langle \mathbf{n},\mathbf{n}\rangle_L &= \langle \mathbf{t},\mathbf{b}\rangle_L = 1 \end{aligned}$$

olarak ifade edilir. Dolayısıyla

$$\mathbf{t}\wedge\mathbf{n}=-\mathbf{t},\quad \mathbf{n}\wedge\mathbf{b}=-\mathbf{b},\quad \mathbf{b}\wedge\mathbf{t}=-\mathbf{n}$$

eşitlikleri elde edilir (Walrave, 1995).

Teorem 3.4.2. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında α null eğrisinin Frenet çatısı $\{\mathbf{t},\mathbf{n},\mathbf{b}\}$ için aşağıdaki eşitlikler

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{t}',\mathbf{b}\rangle = \langle \mathbf{t}',\mathbf{t}\rangle = \langle \mathbf{n}',\mathbf{n}\rangle = \langle \mathbf{b}',\mathbf{t}\rangle = \langle \mathbf{b}',\mathbf{b}\rangle = 0, \\ &\langle \mathbf{n}',\mathbf{t}\rangle = -1,\ \ \langle \mathbf{n}',\mathbf{b}\rangle = k_2(s), \\ &\langle \mathbf{b}',\mathbf{n}\rangle = -k_2(s),\ \ \langle \mathbf{t}',\mathbf{n}\rangle = 1 \end{aligned}$$

bulunur (İyigün, 2019).

Teorem 3.4.3. $\mathbb{R}_1^3$ de α null eğrisinin $\{\mathbf{t},\mathbf{n},\mathbf{b}\}$ vektörleri için

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{t}'',\mathbf{b}\rangle = \langle \mathbf{b}'',\mathbf{t}\rangle = k_2(s), \\ &\langle \mathbf{t}'',\mathbf{t}\rangle = -1, \langle \mathbf{n}'',\mathbf{n}\rangle = 2k_2(s), \langle \mathbf{b}'',\mathbf{b}\rangle = -k_2^2(s), \\ &\langle \mathbf{n}'',\mathbf{t}\rangle = \langle \mathbf{n}'',\mathbf{b}\rangle = \langle \mathbf{b}'',\mathbf{n}\rangle = \langle \mathbf{t}'',\mathbf{n}\rangle = 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri mevcuttur (İyigün, 2019).

Null Eğrinin Bishop Çatısı

Teorem 3.4.4. α, $\mathbb{E}_1^3$ uzayında $\kappa(s)=1$ eğriliği ve $\tau(s)$ burulması ile s pseudo yay parametresi ile parametrelenmiş null Cartan bir eğri olsun. O zaman $\{\mathbf{t}_1,\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2\}$ Bishop çatısı ve α nın $\{\mathbf{t},\mathbf{n},\mathbf{b}\}$ Cartan çatısı

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\kappa_2 & 1 & 0 \\ \frac{\kappa_2^2}{2} & -\kappa_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

olarak ilişkilendirilir (Grbović ve Nesovic,2018).

Pseudo Yay Uzunluğu Parametresine Göre Verilmiş Pseudo Null Eğriler

Tanım 3.4.4. $\alpha : I \to \mathbb{E}_1^3$ olmak üzere $\forall s \in I$ için $\left\langle \alpha'(s),\alpha'(s)\right\rangle_L > 0$ ve $\left\langle \alpha''(s),\alpha''(s)\right\rangle_L = 0$ ise α eğrisine pseudo null eğri adı verilir. Eğer $\left\langle \alpha'(s),\alpha'(s)\right\rangle_L = 1$ ise

α ya pseudo yay uzunluğu parametresine göre verilmiş pseudo null eğri denir (Walrave,1995).

$\alpha : I \to \mathbb{E}_1^3$ pseudo yay uzunluğu parametresine göre verilmiş bir pseudo null eğri olsun. Bu durumda $\mathbf{t} = \alpha^{'}(s)$ vektörü α eğrisinin teğet vektörüdür. α eğrisinin asli normal vektör alanı $\mathbf{n} = \alpha^{''}(s)$ olup null vektördür. $\mathbf{b}$ binormal vektör alanı ise α eğrisinin her $\alpha(s)$ noktasında $\mathbf{t}$ spacelike vektörüne dik olan tek null vektör alanıdır öyle ki $\langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle_L = 1$ olur. Burada α doğru ise $\kappa(s) = 0$ ve diğer durumlarda $\kappa(s) = 1$ dir. Ayrıca α eğrisinin burulma fonksiyonu $\tau(s) = \langle \mathbf{n}^{'}(s), \mathbf{b} \rangle_L$ şeklinde verilir (Walrave, 1995).

Teorem 3.4.5. $\alpha : I \to \mathbb{E}_1^3$ pseudo yay uzunluğu parametresine göre verilmiş bir pseudo null eğri ve $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ Frenet vektör alanı olmak üzere

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}^{'}(s) \\ \mathbf{n}^{'}(s) \\ \mathbf{b}^{'}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ 0 & \tau(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & -\tau(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada

$$\begin{array}{ccccccc} \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle_L & = & \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle_L & = & \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle_L & = & \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle_L & = & 0 \\ \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle_L & = & \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle_L & = & 1 & & & & \end{array}$$

olarak ifade edilir. Dolayısıyla

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{n} \quad \mathbf{n} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{t} \quad \mathbf{b} \wedge \mathbf{t} = \mathbf{b}$$

eşitlikleri elde edilir (Walrave, 1995).

Teorem 3.4.6. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında α pseudo null eğrisinin Frenet çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ için aşağıdaki

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{t}', \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{t}', \mathbf{t} \rangle = \langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{b}', \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{n}', \mathbf{t} \rangle = 0, \\ &\langle \mathbf{t}', \mathbf{b} \rangle = -\langle \mathbf{b}', \mathbf{t} \rangle, \langle \mathbf{n}', \mathbf{b} \rangle = k_2(s), \\ &\langle \mathbf{b}', \mathbf{n} \rangle = -k_2(s), \langle \mathbf{n}', \mathbf{b} \rangle = -\langle \mathbf{b}', \mathbf{n} \rangle \end{aligned}$$

eşitlikleri mevcuttur (Ovalıoğlu, 2019).

Teorem 3.4.7. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında α pseudo null eğrisinin $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ vektörleri için

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{t}'', \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{t}'', \mathbf{t} \rangle = \langle \mathbf{n}'', \mathbf{t} \rangle = \langle \mathbf{n}'', \mathbf{n} \rangle = 0, \\ &\langle \mathbf{n}'', \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}'', \mathbf{n} \rangle, \\ &\langle \mathbf{b}'', \mathbf{t} \rangle = \langle \mathbf{t}'', \mathbf{b} \rangle, \\ &\langle \mathbf{b}'', \mathbf{b} \rangle = -1 \end{aligned}$$

eşitlikleri mevcuttur (Ovalıoğlu, 2019).

Minkowski Uzayında Null ve Pseudo Null Bertrand Eğri Çiftleri

Teorem 3.4.8. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında null Bertrand eğrilerin karşılık gelen noktaları arasındaki uzaklık ve onun Bertrand çifti sabittir (Babaarslan, 2009).

Teorem 3.4.9. α, Cartan çatı ile tanımlanan null eğri olsun. O halde, α bir Bertrand eğridir ancak ve ancak α bir null geodeziktir ya da k_2 ikinci eğriliği sabit olan Cartan çatılı null eğridir (Balgetir vd., 2004).

Minkowski Uzayında Null ve Pseudo Null Mannheim Eğri Çiftleri

Teorem 3.4.10. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında null Mannheim eğri yoktur (Umurhan, 2018).

Teorem 3.4.11. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında α pseudo null bir eğri ve α^* keyfi bir eğri olsun. Eğer $\{\alpha, \alpha^*\}$ bir Mannheim eğri çifti ise;

i. α^* eğrisi pseudo null doğru ise α ve α^* eğrileri paralel pseudo null doğrulardır,

ii. α eğrisi pseudo null bir çember ise α^* eğrisi de pseudo null bir doğrudur

önermeleri geçerlidir (Umurhan, 2018).

Lineer (Doğrusal) Diferensiyel Denklemler

n-inci mertebeden bir lineer diferensiyel denklem, genel olarak $a_0 \neq 0$ olup

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x)$$

şeklindedir. Buna göre, $n = 1$ olduğu zaman, birinci mertebeden bir lineer diferensiyel denklem

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = b(x)$$

ya da $a_0(x)$ ile bölünerek, $P(x) = a_1(x)/a_0(x)$ ve $Q(x) = b(x)/a_0(x)$ olmak üzere, standart veya normal formda

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{3.3}$$

şeklindedir. Bu denkleme; eğer $Q(x) \neq 0$ ise lineer homojen olmayan diferensiyel denklem ve eğer $Q(x) = 0$ ise,

$$y' + P(x)y = 0 \tag{3.4}$$

denklemine de lineer homojen diferensiyel denklem denir (Özer ve Eser, 2010).

Sabitlerin Değişimi Metodu

Önce (3.4) lineer homojen diferensiyel denkleminin genel çözümü için dikkat edilirse, bu denklem

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

şeklinde değişkenlerine ayrılabildiğinden, genel çözüm doğrudan integral alınarak

$$y = c_1 e^{-\int P(x)dx} \tag{3.5}$$

olarak bulunur. Şimdi buradaki keyfi sabitin x değişkeninin bir fonksiyonu, yani $c_1 = c_1(x)$ olduğunu kabul ederek, *sabitlerin değişimi* metodu adı verilecek olan metoda geçilirse

$$y = c_1(x)e^{-\int P(x)dx}, y' = e^{-\int P(x)dx}\left(\frac{dc_1}{dx} - P(x)c_1\right)$$

olduğundan, bunların (3.3) lineer homojen olmayan denkleminde yerine yazılmasıyla, c_1 ve x değişkenlerine göre ayrılabilen

$$e^{-\int P(x)dx}\frac{dc_1}{dx} = Q(x) \rightarrow dc_1 = e^{\int P(x)dx}Q(x)dx$$

diferensiyel denklemi bulunur. Doğrudan integral alırsak, c_1 keyfi sabitini

$$c_1 = \int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + c$$

olarak buluruz. Bulduğumuz c_1 değerini (3.5) denkleminde yerine yazarsak, (3.3) lineer denkleminin genel çözümü

$$y = y_c + y_p = ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx$$

olarak bulunur. Buradaki $y_c = ce^{-\int P(x)dx}$ değerine (3.4) homojen lineer denkleminin *genel çözümü (ya da tamamlayıcı fonksiyonu)* ve

$$y_p = e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx$$

değerine de homojen olmayan denklemin *özel çözümü* denir (Özer ve Eser, 2010).

Örnek 3.4.1. $xy' - 2y = x^4$ lineer diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulalım.

Verilen denklem

$$y' - 2\frac{y}{x} = x^3$$

şeklinde yazılabildiğinden lineerdir. Homojen kısmı

$$\begin{aligned} y' = \frac{2}{x}y \quad &\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{2}{x}dx \\ &\Rightarrow \quad \ln y = \ln x^2 + \ln c_1 \\ &\Rightarrow \quad y = c_1 x^2 \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi $c_1 = c_1(x)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$y = c_1(x)x^2, y' = 2xc_1 + \frac{dc_1}{dx}x^2$$

değerleri homojen olmayan denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 2xc_1 + x^2\frac{dc_1}{dx} - 2\frac{c_1 x^2}{x} &= x^3 \\ \frac{dc_1}{dx}x^2 &= x^3 \\ \frac{dc_1}{dx} &= x \\ dc_1 &= xdx \\ c_1 &= \frac{x^2}{2} + c \end{aligned}$$

olur. Bunu homojen denklemin genel çözümünde yerine yazarsak, aranan genel çözüm

$$y = y_c + y_p = \left(\frac{x^2}{2} + c\right)x^2 = cx^2 + \frac{x^4}{2}$$

olarak bulunur. Daha kısa olarak

$$y_c = ce^{-\int P(x)dx}, y_p = e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx$$

formüllerini kullanalım. Buna göre

$$P(x) = -\frac{2}{x}, Q(x) = x^3$$

olup

$$\begin{aligned} y_c &= ce^{\int \frac{2}{x}dx} = ce^{2\ln x} = cx^2 \\ y_p &= e^{\int \frac{2}{x}dx}\int e^{\int -\frac{2}{x}dx}x^3 dx \\ &= e^{2\ln x}\int e^{-2\ln x}x^3 dx \\ &= x^2\int x^{-2}x^3 dx \\ &= x^2\int x dx \\ &= x^2\frac{x^2}{2} = \frac{x^4}{2} \end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$y = y_c + y_p = cx^2 + \frac{x^4}{2}$$

olur (Özer ve Eser, 2010).

4. MINKOWSKI UZAYINDA NULL VE PSEUDO NULL QUASI-ÇATI

Bu bölümde null quasi-çatı yapısının türev denklemleri ve null quasi-çatı için vektörel çarpım hesaplanmıştır. Ardından yine null quasi-çatı ile Frenet çatı arasındaki bağıntılar ve q-eğrilikleriyle ilgili bazı teoriler verilmiştir. Konu ile ilgili null quasi-çatı örnekleri incelenmiştir. Ardından pseudo null quasi-çatı içinde benzer hesaplar yapılmıştır. Ayrıca null ve pseudo null eğriler sınıflandırılmıştır.

4.1. Null Eğriler için Null Quasi-Çatı

Bu kısımda null quasi-çatı yapısı için **k** izdüşüm vektörünün spacelike, timelike, null olması durumu ile $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle \neq 0$ şartı bir arada incelendiğinde aşağıdaki **i, ii, iii, iv, vii** ve **viii** durumları oluşur. Benzer şekilde **k** izdüşüm vektörünün spacelike olması durumu ile $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle = 0$ şartı bir arada incelediğinde **v** ve **vi** durumları elde edilir. Burada $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle = 0$ şartı ile birlikte **k** izdüşüm vektörünün timelike veya null seçilmesi null quasi-çatı yapısına uymadığı için ele alınmamıştır. Aşağıda belirlenen durumlar incelenerek null quasi-çatı yapısı için türev denklemleri, vektörel çarpım hesabı, Frenet çatısıyla arasındaki bağıntı ve q-eğrilikleriyle ilgili çeşitli teoremler yer almaktadır. Ayrıca null quasi-çatı yapısı için örneklere yer verilmiştir.

Minkowski uzayında yönlü null eğrileri hesaplayabilmek için öncelikle null quasi-çatı tanımlama algoritması verilecektir. Burada kullanılacak olan yapılar; **t** birim teğet, **k** izdüşüm, $\mathbf{n}_q$ quasi-normal ve **n** normal, $\mathbf{b}_q$ quasi-binormal ve **b** binormal vektörleri şeklinde alınmıştır.

i) **t** null, **k** spacelike, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle \neq 0$ iken $\mathbf{n}_q$ spacelike, **n** spacelike, $\mathbf{b}_q$ null, **b** null

ii) **t** null, **k** spacelike, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle \neq 0$ iken $\mathbf{n}_q$ spacelike, **n** null, $\mathbf{b}_q$ null, **b** spacelike

iii) **t** null, **k** timelike, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle \neq 0$ iken $\mathbf{n}_q$ spacelike, **n** spacelike, $\mathbf{b}_q$ null, **b** null

iv) **t** null, **k** timelike, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle \neq 0$ iken $\mathbf{n}_q$ spacelike, **n** null, $\mathbf{b}_q$ null, **b** spacelike

v) **t** null, **k** spacelike, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle = 0$ iken $\mathbf{n}_q$ null, **n** null, $\mathbf{b}_q$ spacelike, **b** spacelike

vi) **t** null, **k** spacelike, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle = 0$ iken $\mathbf{n}_q$ null, **n** spacelike, $\mathbf{b}_q$ spacelike, **b** null

vii) **t** null, **k** null, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle \neq 0$ iken $\mathbf{n}_q$ spacelike, **n** spacelike, $\mathbf{b}_q$ null, **b** null

viii) **t** null, **k** null, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle \neq 0$ iken $\mathbf{n}_q$ spacelike, **n** null, $\mathbf{b}_q$ null, **b** spacelike

Şimdi bu durumları inceleyelim.

Durum i) $\mathbf{t}$ null, $\mathbf{k}$ spacelike, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle \neq 0$, $\mathbf{n}_q$ spacelike, $\mathbf{n}$ spacelike, $\mathbf{b}_q$ null, $\mathbf{b}$ null olması durumda, Lagrange özdeşliği yardımıyla

$$\langle \mathbf{t} \wedge \mathbf{k}, \mathbf{t} \wedge \mathbf{k} \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle^2 - \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle \langle \mathbf{k}, \ \mathbf{k} \rangle$$

bulunur. Burada $\mathbf{t}$ null ve $\mathbf{k}$ spacelike vektörler, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle \neq 0$ olduğundan $\langle \mathbf{t} \wedge \mathbf{k}, \mathbf{t} \wedge \mathbf{k} \rangle > 0$ olur. Yani $\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}$ spacelike vektördür. Ayrıca quasi-normal vektörün tanımı

$$\mathbf{n}_q = \frac{\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}}{\|\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}\|}$$

olduğundan $\mathbf{n}_q$ spacelike bir vektördür. Quasi-binormal vektör ise $\mathbf{t}$ null ve $\mathbf{n}_q$ spacelike vektörlerinin vektörel çarpımından null olarak karşımıza çıkar. Bu durum null çatı yapısını bozmaz.

Frenet çatısıyla arasındaki ilişkiyi gözlemlemek istediğimiz için benzer hesabı Frenet çatısına da uygularız. Buna göre, $\mathbf{t}$ null ve $\mathbf{n}$ spacelike olduğunda Lagrange özdeşliği yardımıyla

$$\langle \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}, \mathbf{t} \wedge \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle^2 - \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle \langle \mathbf{n}, \ \mathbf{n} \rangle$$

bulunur. Burada $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle = 0$ olduğundan $\langle \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}, \mathbf{t} \wedge \mathbf{n} \rangle = 0$ olur. Buna göre, $\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$ null bir vektördür. Bu durumda $\mathbf{b}$ null olur. O halde bu durumda null quasi-çatı yapısı incelenebilir.

Durum ii) $\mathbf{t}$ null, $\mathbf{k}$ spacelike, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle \neq 0$, $\mathbf{n}_q$ spacelike, $\mathbf{n}$ null, $\mathbf{b}_q$ null, $\mathbf{b}$ spacelike olması durumda, Lagrange özdeşliği yardımıyla

$$\langle \mathbf{t} \wedge \mathbf{k}, \mathbf{t} \wedge \mathbf{k} \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle^2 - \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle \langle \mathbf{k}, \ \mathbf{k} \rangle$$

bulunur. Burada $\mathbf{t}$ null ve $\mathbf{k}$ spacelike vektörler, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle \neq 0$ olduğundan $\langle \mathbf{t} \wedge \mathbf{k}, \mathbf{t} \wedge \mathbf{k} \rangle > 0$ olur. Yani $\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}$ spacelike vektördür. Ayrıca quasi-normal vektörün tanımı

$$\mathbf{n}_q = \frac{\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}}{\|\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}\|}$$

olduğundan $\mathbf{n}_q$ spacelike bir vektördür. Quasi-binormal vektör ise $\mathbf{t}$ null ve $\mathbf{n}_q$ spacelike vektörlerinin vektörel çarpımından null olarak karşımıza çıkar. Bu durum null çatı yapısını bozmaz.

Ayrıca Frenet çatısıyla arasındaki ilişkiyi gözlemlemek istediğimiz için benzer hesabı Frenet çatısına da uygularız. Buna göre, $\mathbf{t}$ null ve $\mathbf{n}$ null olduğunda Lagrange özdeşliği yardımıyla

$$\langle \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}, \mathbf{t} \wedge \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle^2 - \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle \langle \mathbf{n}, \ \mathbf{n} \rangle$$

bulunur. Burada null vektörler ortogonal ise lineer bağımlıdır önermesi gereğince $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle = 0$ olduğunda **t** ve **n** lineer bağımlı olur. Bu durumda çatı yapısı oluşmaz. Yani $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle \neq 0$ alınmalıdır. Bu durumda $\langle \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}, \mathbf{t} \wedge \mathbf{n} \rangle > 0$ olur. Buna göre, $\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$ spacelike bir vektördür. Bu durumda **b** spacelike olur. O halde bu durum incelenebilir.

Durum iii) **t** null, **k** timelike, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle \neq 0$, $\mathbf{n}_q$ spacelike, **n** spacelike, $\mathbf{b}_q$ null, **b** null olması durumu **i** durumuyla benzer sebepten null quasi-çatı yapısının incelenmesi mümkündür.

Durum iv) **t** null, **k** timelike, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle \neq 0$, $\mathbf{n}_q$ spacelike, **n** null, $\mathbf{b}_q$ null, **b** spacelike olması durumu **ii** durumuyla benzer sebepten null quasi-çatı yapısının incelenmesi mümkündür.

Durum v) **t** null, **k** spacelike, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle = 0$, $\mathbf{n}_q$ null, **n** null, $\mathbf{b}_q$ spacelike, **b** spacelike olması durumunda, Lagrange özdeşliği yardımıyla

$$\langle \mathbf{t} \wedge \mathbf{k}, \mathbf{t} \wedge \mathbf{k} \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle^2 - \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle \langle \mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle$$

bulunur. Burada **t** null ve **k** spacelike vektörler, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle = 0$ olduğundan $\langle \mathbf{t} \wedge \mathbf{k}, \mathbf{t} \wedge \mathbf{k} \rangle = 0$ olur. Bu durumda $\mathbf{n}_q = \mathbf{t} \wedge \mathbf{k}$ olarak alınır. Yani $\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}$ null olup $\mathbf{n}_q$ null vektördür. Quasi-binormal vektör ise **t** null ve $\mathbf{n}_q$ null vektörlerinin vektörel çarpımından spacelike olarak karşımıza çıkar. Bu durum null çatı yapısını bozmaz.

Ayrıca Frenet çatısıyla arasındaki ilişkiyi gözlemlemek istediğimiz için benzer hesabı Frenet çatısına da uygularız. Buna göre, **t** null ve **n** null olduğunda Lagrange özdeşliği yardımıyla

$$\langle \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}, \mathbf{t} \wedge \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle^2 - \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle$$

bulunur. Burada null vektörler ortogonal ise lineer bağımlıdır önermesi gereğince $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle = 0$ olduğunda **t** ve **n** lineer bağımlı olur. Bu durumda çatı yapısı oluşmaz. Yani $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle \neq 0$ alınmalıdır. Bu durumda $\langle \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}, \mathbf{t} \wedge \mathbf{n} \rangle > 0$ olur. Buna göre, $\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$ spacelike bir vektördür. Bu durumda **b** spacelike olur. O halde bu durum incelenebilir.

Durum vi) **t** null, **k** spacelike, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle = 0$, $\mathbf{n}_q$ null, **n** spacelike, $\mathbf{b}_q$ spacelike, **b** null olması durumunda, Lagrange özdeşliği yardımıyla

$$\langle \mathbf{t} \wedge \mathbf{k}, \mathbf{t} \wedge \mathbf{k} \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle^2 - \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle \langle \mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle$$

bulunur. Burada **t** null ve **k** spacelike vektörler, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle = 0$ olduğundan $\langle \mathbf{t} \wedge \mathbf{k}, \mathbf{t} \wedge \mathbf{k} \rangle = 0$ olur. Bu durumda $\mathbf{n}_q = \mathbf{t} \wedge \mathbf{k}$ olarak alınır. Yani $\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}$ null olup $\mathbf{n}_q$ null vektördür. Quasi-binormal vektör ise **t** null ve $\mathbf{n}_q$ null vektörlerinin vektörel çarpımından spacelike olarak karşımıza çıkar. Bu durum null çatı yapısını bozmaz.

Frenet çatısıyla arasındaki ilişkiyi gözlemlemek istediğimiz için benzer hesabı Frenet çatısına da uygularız. Buna göre, **t** null ve **n** spacelike olduğunda Lagrange özdeşliği yardımıyla

$$\langle \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}, \mathbf{t} \wedge \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle^2 - \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle$$

bulunur. Burada $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle = 0$ olduğundan $\langle \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}, \mathbf{t} \wedge \mathbf{n} \rangle = 0$ olur. Buna göre, $\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$ null bir vektördür. Bu durumda **b** null olur. O halde bu durumda null quasi-çatı yapısı incelenebilir.

Durum vii) **t** null, **k** null, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle \neq 0$, $\mathbf{n}_q$ ve **n** spacelike, $\mathbf{b}_q$ ve **b** null olması durumunda, $\mathbf{t} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ ve $\mathbf{k} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0})$ olsun. Burada

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{k} = - \begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_1(-z) + (-\mathbf{e}_2)(z) + (-\mathbf{e}_3)(x-y) = (-z, -z, y-x)$$

olup

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t} \wedge \mathbf{k}, \mathbf{t} \rangle = \langle (-z, -z, y-x), (x, y, z) \rangle &= xz - yz + yz - xz = 0 \\ \langle \mathbf{t} \wedge \mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle = \langle (-z, -z, y-x), (1, 1, 0) \rangle &= z - z + 0 = 0 \end{aligned}$$

sağlanır. O halde **k** izdüşüm vektörü null olarak alınabilir. İzdüşüm vektörü null olduğunda $\mathbf{n}_q$ vektörünü hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t} \wedge \mathbf{k}, \mathbf{t} \wedge \mathbf{k} \rangle &= \langle (-z, -z, y-x), (-z, -z, y-x) \rangle \\ &= -z^2 + z^2 + (y-x)^2 > 0 \end{aligned}$$

olup $\mathbf{n}_q$ spacelike vektördür. Quasi-binormal vektör ise **t** null ve $\mathbf{n}_q$ spacelike vektörlerinin vektörel çarpımından null olarak karşımıza çıkar, Frenet çatısı **vi** ile benzer olarak tanımlanır.

Durum viii) **t** null, **k** null, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle \neq 0$, $\mathbf{n}_q$ ve **b** spacelike, **n** ve $\mathbf{b}_q$ null olması durumunda quasi-çatısı **vii** durumuyla, Frenet çatısı **v** durumuyla benzerdir.

İzdüşüm Vektörü Spacelike Olan Null Eğrilerin Quasi-Çatısı ($\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle \neq 0$)

Bu kısımda **k** izdüşüm vektörü spacelike olan ve $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle \neq 0$ şartını sağlayan null eğriler için ele alınan iki durum incelenecektir.

i) Normal vektörü spacelike, binormal vektörü null olan null eğrilerin quasi-çatısının türev denklemleri

Teorem 4.1.1. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında $\mathbf{t}$ null, $\mathbf{k}=(0,0,1)$ spacelike, $\langle \mathbf{t},\mathbf{k}\rangle \neq 0$ olmak üzere $\mathbf{n}_q$ spacelike ve $\mathbf{b}_q$ null olması durumunda null eğri boyunca quasi-çatının türev denklemi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}_q' \\ \mathbf{b}_q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & k_1 & 0 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ 0 & -k_3 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix}$$

olup, burada

$$\langle \mathbf{t},\mathbf{t}\rangle = \langle \mathbf{b}_q,\mathbf{b}_q\rangle = \langle \mathbf{t},\mathbf{n}_q\rangle = \langle \mathbf{n}_q,\mathbf{b}_q\rangle = 0, \langle \mathbf{n}_q,\mathbf{n}_q\rangle = \langle \mathbf{t},\mathbf{b}_q\rangle = 1$$

ve

$$\langle \mathbf{b},\mathbf{b}\rangle = \langle \mathbf{t},\mathbf{n}\rangle = \langle \mathbf{n},\mathbf{b}\rangle = 0, \langle \mathbf{n},\mathbf{n}\rangle = \langle \mathbf{t},\mathbf{b}\rangle = 1$$

olarak ifade edilir.

İspat:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazıp katsayıları hesaplayalım. Öncelikle

$$\mathbf{t}' = a_{11}\mathbf{t} + a_{12}\mathbf{n} + a_{13}\mathbf{b}$$

ifadesinin her iki tarafı sırasıyla $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ ve $\mathbf{b}$ ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}',\mathbf{t}\rangle &= \langle a_{11}\mathbf{t} + a_{12}\mathbf{n} + a_{13}\mathbf{b},\mathbf{t}\rangle \\ &= a_{11}\underbrace{\langle \mathbf{t},\mathbf{t}\rangle}_{0} + a_{12}\underbrace{\langle \mathbf{n},\mathbf{t}\rangle}_{0} + a_{13}\underbrace{\langle \mathbf{b},\mathbf{t}\rangle}_{1} \\ &= a_{13} \end{aligned}$$

olup $\langle \mathbf{t}',\mathbf{t}\rangle = 0$ olduğundan $a_{13}=0$ olarak bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}',\mathbf{n}\rangle &= \langle a_{11}\mathbf{t} + a_{12}\mathbf{n} + a_{13}\mathbf{b},\mathbf{n}\rangle \\ &= a_{11}\underbrace{\langle \mathbf{t},\mathbf{n}\rangle}_{0} + a_{12}\underbrace{\langle \mathbf{n},\mathbf{n}\rangle}_{1} + a_{13}\underbrace{\langle \mathbf{b},\mathbf{n}\rangle}_{0} \\ &= a_{12} \end{aligned}$$

olup $\langle \mathbf{t}',\mathbf{n}\rangle = \kappa$ olduğundan $a_{12}=\kappa$ olarak bulunur. Ek olarak

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}',\mathbf{b}\rangle &= \langle a_{11}\mathbf{t} + a_{12}\mathbf{n} + a_{13}\mathbf{b},\mathbf{b}\rangle \\ &= a_{11}\underbrace{\langle \mathbf{t},\mathbf{b}\rangle}_{1} + a_{12}\underbrace{\langle \mathbf{n},\mathbf{b}\rangle}_{0} + a_{13}\underbrace{\langle \mathbf{b},\mathbf{b}\rangle}_{0} \\ &= a_{11} \end{aligned}$$

olup $\mathbf{t} = \alpha'(s)$ kullanılırsa

$$\mathbf{t}' = \alpha''(s) = \mathbf{n}$$

ve buradan

$$\langle \mathbf{t}', \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle = 0$$

olduğundan $a_{11} = 0$ olarak bulunur.

Şimdi de

$$\mathbf{n}' = a_{21}\mathbf{t} + a_{22}\mathbf{n} + a_{23}\mathbf{b}$$

ifadesinin her iki tarafı sırasıyla $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ ve $\mathbf{b}$ ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}', \mathbf{t} \rangle &= \langle a_{21}\mathbf{t} + a_{22}\mathbf{n} + a_{23}\mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle \\ &= a_{21}\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle}_{0} + a_{22}\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle}_{0} + a_{23}\underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle}_{1} \\ &= a_{23} \end{aligned}$$

olup

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle = 0$$

iç çarpımının her iki tarafının türevi alınırsa

$$\underbrace{\langle \mathbf{t}', \mathbf{n} \rangle}_{\kappa} + \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}' \rangle = 0$$

olduğundan $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}' \rangle = -\kappa$ olur. Böylece $a_{23} = -\kappa$ olarak bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle &= \langle a_{21}\mathbf{t} + a_{22}\mathbf{n} + a_{23}\mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle \\ &= a_{21}\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle}_{0} + a_{22}\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle}_{1} + a_{23}\underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle}_{0} \\ &= a_{22} \end{aligned}$$

olup

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 1$$

ifadesinin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle + \langle \mathbf{n}, \mathbf{n}' \rangle &= 0 \\ 2\langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $a_{22} = 0$ olarak bulunur. Ek olarak

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}', \mathbf{b} \rangle &= \langle a_{21}\mathbf{t} + a_{22}\mathbf{n} + a_{23}\mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \\ &= a_{21}\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle}_{1} + a_{22}\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle}_{0} + a_{23}\underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle}_{0} \\ &= a_{21} \end{aligned}$$

olup $\langle \mathbf{n}', \mathbf{b} \rangle = \tau$ olduğundan $a_{21} = \tau$ olarak bulunur. Son olarak

$$\mathbf{b}' = a_{31}\mathbf{t} + a_{32}\mathbf{n} + a_{33}\mathbf{b}$$

ifadesinin her iki tarafı sırasıyla $\mathbf{t}, \mathbf{n}$ ve $\mathbf{b}$ ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}', \mathbf{t} \rangle &= \langle a_{31}\mathbf{t} + a_{32}\mathbf{n} + a_{33}\mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle \\ &= a_{31}\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle}_{0} + a_{32}\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle}_{0} + a_{33}\underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle}_{1} \\ &= a_{33} \end{aligned}$$

olup

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle = 1$$

ifadesinin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\langle \mathbf{b}', \mathbf{t} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{t}' \rangle = 0$$

bulunur ve burada $\mathbf{t} = \alpha'(s)$ olduğu kullanılırsa

$$\mathbf{t}' = \alpha''(s) = \mathbf{n}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\langle \mathbf{t}', \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle = 0$$

olduğu kullanılırsa

$$\langle \mathbf{b}', \mathbf{t} \rangle + \underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{t}' \rangle}_{0} = 0$$

eşitliğinden $\langle \mathbf{b}', \mathbf{t} \rangle = 0$ olur. Böylece $a_{33} = 0$ olarak bulunur. Ek olarak

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}', \mathbf{n} \rangle &= \langle a_{31}\mathbf{t} + a_{32}\mathbf{n} + a_{33}\mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle \\ &= a_{31}\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle}_{0} + a_{32}\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle}_{1} + a_{33}\underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle}_{0} \\ &= a_{32} \end{aligned}$$

olup

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle = 0$$

iç çarpımının her iki tarafının türevi alınırsa

$$\langle \mathbf{b}', \mathbf{n} \rangle + \underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{n}' \rangle}_{\tau} = 0$$

olduğundan $\langle \mathbf{b}', \mathbf{n} \rangle = -\tau$ olur. Böylece $a_{32} = -\tau$ olarak bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}', \mathbf{b} \rangle &= \langle a_{31}\mathbf{t} + a_{32}\mathbf{n} + a_{33}\mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \\ &= a_{31}\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle}_{1} + a_{32}\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle}_{0} + a_{33}\underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle}_{0} \\ &= a_{31} \end{aligned}$$

olup

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = 0$$

iç çarpımının her iki tarafının türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}', \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b}' \rangle &= 0 \\ 2\langle \mathbf{b}', \mathbf{b} \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{b}', \mathbf{b} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $a_{31} = 0$ olarak bulunur.

Bulunan katsayılar yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ \tau(s) & 0 & -\kappa(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

olur.

İlk olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= a_{11}\mathbf{t} + a_{12}\mathbf{n}_q + a_{13}\mathbf{b}_q \\ \mathbf{n}'_q &= a_{21}\mathbf{t} + a_{22}\mathbf{n}_q + a_{23}\,\mathbf{b}_q \\ \mathbf{b}'_q &= a_{31}\mathbf{t} + a_{32}\mathbf{n}_q + a_{33}\,\mathbf{b}_q \end{aligned} \tag{4.1}$$

şeklinde yazarak katsayıları hesaplamak için (4.1) denkleminde skaler çarpım kullanılarak

$$\langle \mathbf{t}', \mathbf{t} \rangle = a_{11} \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + a_{12} \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{t} \rangle + a_{13} \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{t} \rangle = a_{13}$$

bulunur ve $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle' = 0$ olduğundan

$$a_{13} = 0$$

elde edilir. Benzer işlemler yapılarak

$$\langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q \rangle = a_{11} \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle + a_{12} \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle + a_{13} \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{n}_q \rangle = a_{12}$$

ve

$$\langle \mathbf{t}', \mathbf{b}_q \rangle = a_{11} \langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle + a_{12} \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle + a_{13} \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = a_{11}$$

olur. a_{21}, a_{22}, a_{23} değerlerini hesaplamak için benzer şekilde (4.1) denklemindeki $\mathbf{n}'_q$ ifadesi sırasıyla $\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q$ vektörleriyle skaler olarak çarpılırsa

$$\left\langle \mathbf{n}'_q, \mathbf{t} \right\rangle = a_{21} \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + a_{22} \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{t} \rangle + a_{23} \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{t} \rangle = a_{23}$$

ve

$$\left\langle \mathbf{n}'_q, \mathbf{n}_q \right\rangle = a_{21} \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle + a_{22} \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle + a_{23} \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{n}_q \rangle = a_{22}$$

olup burada $\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle' = 0$ olduğundan

$$a_{22} = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\langle \mathbf{n}'_q, \mathbf{b}_q \rangle = a_{21} \langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle + a_{22} \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle + a_{23} \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = a_{21}$$

bulunur.

Son olarak (4.1) denklemindeki $\mathbf{b}'_q$ katsayılarını hesaplamak için benzer işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}'_q, \mathbf{t} \rangle &= a_{31} \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + a_{32} \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{t} \rangle + a_{33} \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{t} \rangle = a_{33} \\ \langle \mathbf{b}'_q, \mathbf{n}_q \rangle &= a_{31} \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle + a_{32} \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle + a_{33} \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{n}_q \rangle = a_{32} \\ \langle \mathbf{b}'_q, \mathbf{b}_q \rangle &= a_{31} \langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle + a_{32} \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle + a_{33} \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = a_{31} \end{aligned}$$

olur. Burada $\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle' = 0$ olup

$$a_{31} = 0$$

bulunur. $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle = 0$ eşitliğinin türevinde $\langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q \rangle$ ile $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}'_q \rangle$ değerleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q \rangle + \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}'_q \rangle &= 0 \\ a_{12} + a_{23} &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$a_{12} = -a_{23} = k_1$$

olur. Benzer işlemler $\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 0$ eşitliğine uygulanırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}'_q, \mathbf{b}_q \rangle + \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}'_q \rangle &= 0 \\ a_{21} + a_{32} &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$a_{21} = -a_{32} = k_3$$

şeklindedir. Buna ek olarak benzer işlemler $\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle = 1$ eşitliğine uygulanırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}', \mathbf{b}_q \rangle + \langle \mathbf{t}, \mathbf{b}'_q \rangle &= 0 \\ a_{11} + a_{33} &= 0 \end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$a_{11} = -a_{33} = k_2$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\mathbf{t}' = k_2\mathbf{t} + k_1\mathbf{n}_q + 0\mathbf{b}_q$$

$$\mathbf{n}_q' = k_3\mathbf{t} + 0\mathbf{n}_q - k_1\mathbf{b}_q$$

$$\mathbf{b}_q' = 0\mathbf{t} - k_3\mathbf{n}_q - k_2\mathbf{b}_q$$

olur. Bulduğumuz formüller matris formunda yazılırsa

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}_q' \\ \mathbf{b}_q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & k_1 & 0 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ 0 & -k_3 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

elde edilir.

ii) Normal vektörü null, binormal vektörü spacelike olan null eğrilerin quasi-çatısının türev denklemleri

Teorem 4.1.2. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında $\mathbf{t}$ null, $\mathbf{k} = (0,0,1)$ spacelike, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle \neq 0$ olmak üzere $\mathbf{n}_q$ spacelike ve $\mathbf{b}_q$ null olması durumuda null eğri boyunca quasi-çatının türev denklemi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}_q' \\ \mathbf{b}_q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & k_1 & 0 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ 0 & -k_3 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix}$$

olup, burada

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle = \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 0, \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle = 1$$

ve

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle = 0, \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle = 1$$

olarak ifade edilir.

İspat:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazıp katsayıları hesaplayalım. Öncelikle

$$\mathbf{t}' = a_{11}\mathbf{t} + a_{12}\mathbf{n} + a_{13}\mathbf{b}$$

ifadesinin her iki tarafı sırasıyla $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ ve $\mathbf{b}$ ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{t}', \mathbf{t}\rangle &= \langle a_{11}\mathbf{t} + a_{12}\mathbf{n} + a_{13}\mathbf{b}, \mathbf{t}\rangle \\ &= a_{11}\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}\rangle}_{0} + a_{12}\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{t}\rangle}_{1} + a_{13}\underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{t}\rangle}_{0} \\ &= a_{12}\end{aligned}$$

olup $\langle \mathbf{t}', \mathbf{t}\rangle = 0$ olduğundan $a_{12} = 0$ olarak bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{t}', \mathbf{n}\rangle &= \langle a_{11}\mathbf{t} + a_{12}\mathbf{n} + a_{13}\mathbf{b}, \mathbf{n}\rangle \\ &= a_{11}\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}\rangle}_{1} + a_{12}\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle}_{0} + a_{13}\underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{n}\rangle}_{0} \\ &= a_{11}\end{aligned}$$

olup $\langle \mathbf{t}', \mathbf{n}\rangle = \kappa$ olduğundan $a_{11} = \kappa$ olarak bulunur. Ek olarak

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{t}', \mathbf{b}\rangle &= \langle a_{11}\mathbf{t} + a_{12}\mathbf{n} + a_{13}\mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle \\ &= a_{11}\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}\rangle}_{0} + a_{12}\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{b}\rangle}_{0} + a_{13}\underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle}_{1} \\ &= a_{13}\end{aligned}$$

olup $\mathbf{t} = \alpha'(s)$ kullanılırsa

$$\mathbf{t}' = \alpha''(s) = \mathbf{n}$$

ve buradan

$$\langle \mathbf{t}', \mathbf{b}\rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{b}\rangle = 0$$

olduğundan $a_{13} = 0$ olarak bulunur.

Şimdi de

$$\mathbf{n}' = a_{21}\mathbf{t} + a_{22}\mathbf{n} + a_{23}\mathbf{b}$$

ifadesinin her iki tarafını sırasıyla $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ ve $\mathbf{b}$ ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{n}', \mathbf{t}\rangle &= \langle a_{21}\mathbf{t} + a_{22}\mathbf{n} + a_{23}\mathbf{b}, \mathbf{t}\rangle \\ &= a_{21}\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}\rangle}_{0} + a_{22}\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{t}\rangle}_{1} + a_{23}\underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{t}\rangle}_{0} \\ &= a_{22}\end{aligned}$$

olup

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}\rangle = 1$$

iç çarpımının her iki tarafının türevi alınırsa

$$\underbrace{\langle \mathbf{t}', \mathbf{n}\rangle}_{\kappa} + \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}'\rangle = 0$$

olduğundan $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}' \rangle = -\kappa$ olur. Böylece $a_{22} = -\kappa$ olarak bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle &= \langle a_{21}\mathbf{t} + a_{22}\mathbf{n} + a_{23}\mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle \\ &= a_{21}\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle}_{1} + a_{22}\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle}_{0} + a_{23}\underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle}_{0} \\ &= a_{21} \end{aligned}$$

olup

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 0$$

iç çarpımının her iki tarafının türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle + \langle \mathbf{n}, \mathbf{n}' \rangle &= 0 \\ 2\langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $a_{21} = 0$ olarak bulunur. Ek olarak

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}', \mathbf{b} \rangle &= \langle a_{21}\mathbf{t} + a_{22}\mathbf{n} + a_{23}\mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \\ &= a_{21}\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle}_{0} + a_{22}\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle}_{0} + a_{23}\underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle}_{1} \\ &= a_{23} \end{aligned}$$

olup $\langle \mathbf{n}', \mathbf{b} \rangle = \tau$ olduğundan $a_{23} = \tau$ olarak bulunur. Son olarak

$$\mathbf{b}' = a_{31}\mathbf{t} + a_{32}\mathbf{n} + a_{33}\mathbf{b}$$

ifadesinin her iki tarafını sırasıyla $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ ve $\mathbf{b}$ ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}', \mathbf{t} \rangle &= \langle a_{31}\mathbf{t} + a_{32}\mathbf{n} + a_{33}\mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle \\ &= a_{31}\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle}_{0} + a_{32}\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle}_{1} + a_{33}\underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle}_{0} \\ &= a_{32} \end{aligned}$$

olup

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle = 0$$

ifadesinin her iki tarafının türevini alırsak

$$\langle \mathbf{b}', \mathbf{t} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{t}' \rangle = 0$$

bulunur ve burada

$$\mathbf{t} = \alpha'(s) \Longrightarrow \mathbf{t}' = \alpha''(s) = \mathbf{n}$$

$$\langle \mathbf{t}', \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle = 0$$

olduğu kullanılırsa

$$\langle \mathbf{b}', \mathbf{t} \rangle + \underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{t}' \rangle}_{0} = 0$$

olduğundan $\langle \mathbf{b}', \mathbf{t} \rangle = 0$ olur. Böylece $a_{32} = 0$ olarak bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}', \mathbf{n} \rangle &= \langle a_{31}\mathbf{t} + a_{32}\mathbf{n} + a_{33}\mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle \\ &= a_{31}\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle}_{1} + a_{32}\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle}_{0} + a_{33}\underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle}_{0} \\ &= a_{31} \end{aligned}$$

olup

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle = 0$$

iç çarpımının her iki tarafının türevi alınırsa

$$\langle \mathbf{b}', \mathbf{n} \rangle + \underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{n}' \rangle}_{\tau} = 0$$

olduğundan $\langle \mathbf{b}', \mathbf{n} \rangle = -\tau$ olur. Böylece $a_{31} = -\tau$ olarak bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}', \mathbf{b} \rangle &= \langle a_{31}\mathbf{t} + a_{32}\mathbf{n} + a_{33}\mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \\ &= a_{31}\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle}_{0} + a_{32}\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle}_{0} + a_{33}\underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle}_{1} \\ &= a_{33} \end{aligned}$$

olup

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = 1$$

iç çarpımının her iki tarafının türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}', \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b}' \rangle &= 0 \\ 2\langle \mathbf{b}', \mathbf{b} \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{b}', \mathbf{b} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $a_{33} = 0$ olarak bulunur.

Bulunan katsayılar yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa(s) & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa(s) & \tau(s) \\ -\tau(s) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

bulunur.

İlk olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= a_{11}\mathbf{t} + a_{12}\mathbf{n}_q + a_{13}\mathbf{b}_q \\ \mathbf{n}'_q &= a_{21}\mathbf{t} + a_{22}\mathbf{n}_q + a_{23}\,\mathbf{b}_q \\ \mathbf{b}'_q &= a_{31}\mathbf{t} + a_{32}\mathbf{n}_q + a_{33}\,\mathbf{b}_q \end{aligned} \tag{4.3}$$

şeklinde yazarak katsayıları hesaplamak için (4.3) denkleminde skaler çarpım kullanılarak

$$\langle \mathbf{t}', \mathbf{t} \rangle = a_{11} \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + a_{12} \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{t} \rangle + a_{13} \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{t} \rangle = a_{13}$$

bulunur ve $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle' = 0$ olduğundan

$$a_{13} = 0$$

elde edilir. Benzer işlemler yapılarak

$$\langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q \rangle = a_{11} \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle + a_{12} \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle + a_{13} \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{n}_q \rangle = a_{12}$$

ve

$$\langle \mathbf{t}', \mathbf{b}_q \rangle = a_{11} \langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle + a_{12} \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle + a_{13} \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = a_{11}$$

olur. a_{21}, a_{22}, a_{23} değerlerini hesaplamak için benzer şekilde (4.3) denklemindeki $\mathbf{n}'_q$ ifadesi sırasıyla $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}_q$,$\mathbf{b}_q$ vektörleriyle skaler olarak çarpılırsa

$$\langle \mathbf{n}'_q, \mathbf{t} \rangle = a_{21} \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + a_{22} \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{t} \rangle + a_{23} \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{t} \rangle = a_{23}$$

ve

$$\langle \mathbf{n}'_q, \mathbf{n}_q \rangle = a_{21} \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle + a_{22} \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle + a_{23} \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{n}_q \rangle = a_{22}$$

olup burada $\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle' = 0$ olduğundan

$$a_{22} = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\langle \mathbf{n}'_q, \mathbf{b}_q \rangle = a_{21} \langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle + a_{22} \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle + a_{23} \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = a_{21}$$

bulunur.

Son olarak (4.3) denklemindeki $\mathbf{b}'_q$ katsayılarını hesaplamak için benzer işlemler yapılırsa

$$\langle \mathbf{b}'_q, \mathbf{t} \rangle = a_{31} \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + a_{32} \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{t} \rangle + a_{33} \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{t} \rangle = a_{33}$$

$$\langle \mathbf{b}'_q, \mathbf{n}_q \rangle = a_{31} \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle + a_{32} \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle + a_{33} \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{n}_q \rangle = a_{32}$$

$$\langle \mathbf{b}'_q, \mathbf{b}_q \rangle = a_{31} \langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle + a_{32} \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle + a_{33} \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = a_{31}$$

olur. Burada $\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle' = 0$ olup

$$a_{31} = 0$$

bulunur. $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle = 0$ eşitliğinin türevinde $\langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q \rangle$ ile $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}'_q \rangle$ değerleri kullanılırsa

$$\langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q \rangle + \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}'_q \rangle = 0$$

$$a_{12} + a_{23} = 0$$

elde edilir. Bu durumda

$$a_{12} = -a_{23} = k_1$$

olur. Benzer işlemler $\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 0$ eşitliğine uygulanırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}_q', \mathbf{b}_q \rangle + \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q' \rangle &= 0 \\ a_{21} + a_{32} &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$a_{21} = -a_{32} = k_3$$

şeklindedir. Buna ek olarak benzer işlemler $\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle = 1$ eşitliğine uygulanırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}', \mathbf{b}_q \rangle + \langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q' \rangle &= 0 \\ a_{11} + a_{33} &= 0 \end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$a_{11} = -a_{33} = k_2$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\mathbf{t}' = k_2\mathbf{t} + k_1\mathbf{n}_q + 0\mathbf{b}_q$$

$$\mathbf{n}_q' = k_3\mathbf{t} + 0\mathbf{n}_q - k_1\mathbf{b}_q$$

$$\mathbf{b}_q' = 0\mathbf{t} - k_3\mathbf{n}_q - k_2\mathbf{b}_q$$

olur. Bulduğumuz formüller matris formunda yazılırsa

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}_q' \\ \mathbf{b}_q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & k_1 & 0 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ 0 & -k_3 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

elde edilir.

İzdüşüm Vektörü Timelike Olan Null Eğrilerin Quasi-Çatısı

Bu kısımda **k** izdüşüm vektörü timelike olan null eğriler için iki durum ele alınacaktır.

iii) Normal vektörü spacelike, binormal vektörü null olan null eğrilerin quasi-çatısının türev denklemleri

Teorem 4.1.3. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında $\mathbf{t}$ null, $\mathbf{k} = (1,0,0)$ timelike, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle \neq 0$ olmak üzere $\mathbf{n}_q$ spacelike ve $\mathbf{b}_q$ null olması durumunda null eğri boyunca quasi-çatının türev denklemi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}_q' \\ \mathbf{b}_q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & k_1 & 0 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ 0 & -k_3 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix}$$

olup, burada

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle = \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 0, \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle = 1$$

ve

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle = 0, \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle = 1$$

olarak ifade edilir.

İspat: Teorem 4.1.1 ile benzer işlem adımları uygulandığında ispat tamamlanır.

iv) Normal vektörü null, binormal vektörü spacelike olan null eğrilerin quasi-çatısının türev denklemleri

Teorem 4.1.4. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında $\mathbf{t}$ null, $\mathbf{k} = (1,0,0)$ timelike, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle \neq 0$ olmak üzere $\mathbf{n}_q$ spacelike ve $\mathbf{b}_q$ null olması durumunda null eğri boyunca quasi-çatının türev denklemi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}_q' \\ \mathbf{b}_q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & k_1 & 0 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ 0 & -k_3 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix}$$

olup, burada

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle = \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 0, \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle = 1$$

ve

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle = 0, \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle = 1$$

olarak ifade edilir.

İspat: Teorem 4.1.2 ile benzer işlem adımları uygulandığında ispat tamamlanır.

İzdüşüm Vektörü Spacelike Olan Null Eğrilerin Quasi-Çatısı ($\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle = 0$)

Bu kısımda $\mathbf{k}$ izdüşüm vektörü spacelike olan ve $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle = 0$ şartını sağlayan null eğriler için iki durum ele alınacaktır.

v) Normal vektörü null, binormal vektörü spacelike olan null eğrilerin quasi-çatısının türev denklemleri

Teorem 4.1.5. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında $\mathbf{t}$ null, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ spacelike, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle = 0$ olmak üzere $\mathbf{n}_q$ null ve $\mathbf{b}_q$ spacelike olması durumunda null eğri boyunca quasi-çatının türev denklemi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}_q' \\ \mathbf{b}_q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_1 & k_3 \\ -k_3 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix}$$

olup, burada

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle = \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 0, \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle = 1$$

ve

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle = 0, \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle = 1$$

olarak ifade edilir.

İspat:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazıp katsayıları hesaplayalım. Öncelikle

$$\mathbf{t}' = a_{11}\mathbf{t} + a_{12}\mathbf{n} + a_{13}\mathbf{b}$$

ifadesinin her iki tarafı sırasıyla $\mathbf{t}, \mathbf{n}$ ve $\mathbf{b}$ ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}', \mathbf{t} \rangle &= \langle a_{11}\mathbf{t} + a_{12}\mathbf{n} + a_{13}\mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle \\ &= a_{11}\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle}_{0} + a_{12}\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle}_{1} + a_{13}\underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle}_{0} \\ &= a_{12} \end{aligned}$$

olup $\langle \mathbf{t}', \mathbf{t} \rangle = 0$ olduğundan $a_{12} = 0$ olarak bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}', \mathbf{n} \rangle &= \langle a_{11}\mathbf{t} + a_{12}\mathbf{n} + a_{13}\mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle \\ &= a_{11}\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle}_{1} + a_{12}\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle}_{0} + a_{13}\underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle}_{0} \\ &= a_{11} \end{aligned}$$

olup $\langle \mathbf{t}', \mathbf{n} \rangle = \kappa$ olduğundan $a_{11} = \kappa$ olarak bulunur. Ek olarak

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}', \mathbf{b} \rangle &= \langle a_{11}\mathbf{t} + a_{12}\mathbf{n} + a_{13}\mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \\ &= a_{11}\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle}_{0} + a_{12}\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle}_{0} + a_{13}\underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle}_{1} \\ &= a_{13} \end{aligned}$$

olup $\mathbf{t} = \alpha'(s)$ olduğu kullanılırsa

$$\mathbf{t}' = \alpha''(s) = \mathbf{n}$$

ve buradan

$$\langle \mathbf{t}', \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle = 0$$

olduğundan $a_{13} = 0$ olarak bulunur. Şimdi de

$$\mathbf{n}' = a_{21}\mathbf{t} + a_{22}\mathbf{n} + a_{23}\mathbf{b}$$

ifadesinin her iki tarafı sırasıyla $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ ve $\mathbf{b}$ ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}', \mathbf{t} \rangle &= \langle a_{21}\mathbf{t} + a_{22}\mathbf{n} + a_{23}\mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle \\ &= a_{21}\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle}_{0} + a_{22}\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle}_{1} + a_{23}\underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle}_{0} \\ &= a_{22} \end{aligned}$$

olup

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle = 1$$

iç çarpımının her iki tarafının türevi alınırsa

$$\underbrace{\langle \mathbf{t}', \mathbf{n} \rangle}_{\kappa} + \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}' \rangle = 0$$

olduğundan $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}' \rangle = -\kappa$ olur. Böylece $a_{22} = -\kappa$ olarak bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle &= \langle a_{21}\mathbf{t} + a_{22}\mathbf{n} + a_{23}\mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle \\ &= a_{21}\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle}_{1} + a_{22}\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle}_{0} + a_{23}\underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle}_{0} \\ &= a_{21} \end{aligned}$$

olup

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 0$$

iç çarpımının her iki tarafının türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle + \langle \mathbf{n}, \mathbf{n}' \rangle &= 0 \\ 2\langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $a_{21} = 0$ olarak bulunur. Ek olarak

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{n}', \mathbf{b}\rangle &= \langle a_{21}\mathbf{t} + a_{22}\mathbf{n} + a_{23}\mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle \\ &= a_{21}\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}\rangle}_{0} + a_{22}\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{b}\rangle}_{0} + a_{23}\underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle}_{1} \\ &= a_{23}\end{aligned}$$

olup $\langle \mathbf{n}', \mathbf{b}\rangle = \tau$ olduğundan $a_{23} = \tau$ olarak bulunur. Son olarak

$$\mathbf{b}' = a_{31}\mathbf{t} + a_{32}\mathbf{n} + a_{33}\mathbf{b}$$

ifadesinin her iki tarafı sırasıyla $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ ve $\mathbf{b}$ ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{b}', \mathbf{t}\rangle &= \langle a_{31}\mathbf{t} + a_{32}\mathbf{n} + a_{33}\mathbf{b}, \mathbf{t}\rangle \\ &= a_{31}\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}\rangle}_{0} + a_{32}\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{t}\rangle}_{1} + a_{33}\underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{t}\rangle}_{0} \\ &= a_{32}\end{aligned}$$

olup

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{t}\rangle = 0$$

ifadesinin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\langle \mathbf{b}', \mathbf{t}\rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{t}'\rangle = 0$$

bulunur ve burada

$$\mathbf{t} = \alpha'(s) \Longrightarrow \mathbf{t}' = \alpha''(s) = \mathbf{n}$$

$$\langle \mathbf{t}', \mathbf{b}\rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{b}\rangle = 0$$

olduğu kullanılırsa

$$\langle \mathbf{b}', \mathbf{t}\rangle + \underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{t}'\rangle}_{0} = 0$$

olduğundan $\langle \mathbf{b}', \mathbf{t}\rangle = 0$ olur. Böylece $a_{32} = 0$ olarak bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{b}', \mathbf{n}\rangle &= \langle a_{31}\mathbf{t} + a_{32}\mathbf{n} + a_{33}\mathbf{b}, \mathbf{n}\rangle \\ &= a_{31}\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}\rangle}_{1} + a_{32}\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle}_{0} + a_{33}\underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{n}\rangle}_{0} \\ &= a_{31}\end{aligned}$$

olup

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{n}\rangle = 0$$

iç çarpımının her iki tarafının türevi alınırsa

$$\langle \mathbf{b}', \mathbf{n}\rangle + \underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{n}'\rangle}_{\tau} = 0$$

olduğundan $\langle \mathbf{b}', \mathbf{n} \rangle = -\tau$ olur. Böylece $a_{31} = -\tau$ olarak bulunur. Ek olarak

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}', \mathbf{b} \rangle &= \langle a_{31}\mathbf{t} + a_{32}\mathbf{n} + a_{33}\mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \\ &= a_{31}\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle}_{0} + a_{32}\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle}_{0} + a_{33}\underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle}_{1} \\ &= a_{33} \end{aligned}$$

olup

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = 1$$

iç çarpımının her iki tarafının türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}', \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b}' \rangle &= 0 \\ 2\langle \mathbf{b}', \mathbf{b} \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{b}', \mathbf{b} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $a_{33} = 0$ olarak bulunur.

Bulunan katsayılar yerine koyulursa

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa(s) & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa(s) & \tau(s) \\ -\tau(s) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

olur.

İlk olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= a_{11}\mathbf{t} + a_{12}\mathbf{n}_q + a_{13}\mathbf{b}_q \\ \mathbf{n}_q' &= a_{21}\mathbf{t} + a_{22}\mathbf{n}_q + a_{23}\,\mathbf{b}_q \\ \mathbf{b}_q' &= a_{31}\mathbf{t} + a_{32}\mathbf{n}_q + a_{33}\,\mathbf{b}_q \end{aligned} \tag{4.6}$$

şeklinde yazarak katsayıları hesaplamak için (4.6) denkleminde skaler olarak kullanılarak

$$\langle \mathbf{t}', \mathbf{t} \rangle = a_{11}\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + a_{12}\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{t} \rangle + a_{13}\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{t} \rangle = a_{12}$$

bulunur ve $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle' = 0$ olduğundan

$$a_{12} = 0$$

elde edilir. Benzer işlemler yapılarak

$$\langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q \rangle = a_{11}\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle + a_{12}\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle + a_{13}\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{n}_q \rangle = a_{11}$$

ve

$$\langle \mathbf{t}', \mathbf{b}_q \rangle = a_{11}\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle + a_{12}\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle + a_{13}\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = a_{13}$$

olur. a_{21}, a_{22}, a_{23} değerlerini hesaplamak için benzer şekilde (4.6) denklemindeki $\mathbf{n}'_q$ ifadesi sırasıyla $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}_q$,$\mathbf{b}_q$ vektörleriyle skaler olarak çarpılırsa

$$\left\langle \mathbf{n}'_q, \mathbf{t} \right\rangle = a_{21} \left\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \right\rangle + a_{22} \left\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{t} \right\rangle + a_{23} \left\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{t} \right\rangle = a_{22}$$

ve

$$\left\langle \mathbf{n}'_q, \mathbf{n}_q \right\rangle = a_{21} \left\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \right\rangle + a_{22} \left\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \right\rangle + a_{23} \left\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{n}_q \right\rangle = a_{21}$$

olup burada $\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle' = 0$ olduğundan

$$a_{21} = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\left\langle \mathbf{n}'_q, \mathbf{b}_q \right\rangle = a_{21} \left\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \right\rangle + a_{22} \left\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \right\rangle + a_{23} \left\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \right\rangle = a_{23}$$

bulunur.

Son olarak (4.6) denklemindeki $\mathbf{b}'_q$ katsayılarını hesaplamak için benzer işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathbf{b}'_q, \mathbf{t} \right\rangle &= a_{31} \left\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \right\rangle + a_{32} \left\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{t} \right\rangle + a_{33} \left\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{t} \right\rangle = a_{32} \\
\left\langle \mathbf{b}'_q, \mathbf{n}_q \right\rangle &= a_{31} \left\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \right\rangle + a_{32} \left\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \right\rangle + a_{33} \left\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{n}_q \right\rangle = a_{31} \\
\left\langle \mathbf{b}'_q, \mathbf{b}_q \right\rangle &= a_{31} \left\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \right\rangle + a_{32} \left\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \right\rangle + a_{33} \left\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \right\rangle = a_{33}
\end{aligned}$$

olur. Burada $\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle' = 0$ olup

$$a_{33} = 0$$

bulunur. $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle = 1$ eşitliğinin türevinde $\langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q \rangle$ ile $\left\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}'_q \right\rangle$ değerleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q \rangle + \left\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}'_q \right\rangle &= 0 \\
a_{11} + a_{22} &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$a_{11} = -a_{22} = k_1$$

olur. Benzer işlemler $\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 0$ eşitliğine uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathbf{n}'_q, \mathbf{b}_q \right\rangle + \left\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}'_q \right\rangle &= 0 \\
a_{23} + a_{31} &= 0
\end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$a_{23} = -a_{31} = k_3$$

şeklindedir. Buna ek olarak benzer işlemler $\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle = 0$ eşitliğine uygulanırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}', \mathbf{b}_q \rangle + \langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q' \rangle &= 0 \\ a_{13} + a_{32} &= 0 \end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$a_{13} = -a_{32} = k_2$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\mathbf{t}' = k_1\mathbf{t} + 0\mathbf{n}_q + k_2\mathbf{b}_q$$

$$\mathbf{n}_q' = 0\mathbf{t} - k_1\mathbf{n}_q + k_3\mathbf{b}_q$$

$$\mathbf{b}_q' = -k_3\mathbf{t} - k_2\mathbf{n}_q + 0\mathbf{b}_q$$

olur. Bulduğumuz formüller matris formunda yazılırsa

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}_q' \\ \mathbf{b}_q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_1 & k_3 \\ -k_3 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

elde edilir.

vi) Normal vektörü spacelike, binormal vektörü null olan null eğrilerin quasi-çatısının türev denklemleri

Teorem 4.1.6. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında $\mathbf{t}$ null, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ spacelike, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle = 0$ olmak üzere $\mathbf{n}_q$ null ve $\mathbf{b}_q$ spacelike olması durumunda null eğri boyunca quasi-çatının türev denklemi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}_q' \\ \mathbf{b}_q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_1 & k_3 \\ -k_3 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix}$$

olup, burada

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle = \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 0, \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle = 1$$

ve

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle = 0, \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle = 1$$

olarak ifade edilir.

İspat: Bu durum için quasi-çatının türev denklemleri Teorem 4.1.5 ile benzer işlem adımları uygulandığında ve Frenet formülleri de Teorem 4.1.1 ile benzer işlemler uygulandığında elde edilir.

İzdüşüm Vektörü Null Olan Null Eğrilerin Quasi-Çatısı

Bu kısımda **k** izdüşüm vektörü timelike olan null eğriler için iki durum ele alınacaktır.

vii) Normal vektörü spacelike, binormal vektörü null olan null eğrilerin quasi-çatısının türev denklemleri

Teorem 4.1.7. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında $\mathbf{t}$ null, $\mathbf{k} = (1,1,0)$ null, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle \neq 0$ olmak üzere $\mathbf{n}_q$ spacelike ve $\mathbf{b}_q$ null olması durumunda null eğri boyunca quasi-çatının türev denklemi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}_q' \\ \mathbf{b}_q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & k_1 & 0 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ 0 & -k_3 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix}$$

olup, burada

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle = \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 0, \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle = 1$$

ve

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle = 0, \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle = 1$$

olarak ifade edilir.

İspat: Teorem 4.1.1 ile benzer işlem adımları uygulandığında ispat tamamlanır.

viii) Normal vektörü null, binormal vektörü spacelike olan null eğrilerin quasi-çatısının türev denklemleri

Teorem 4.1.8. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında $\mathbf{t}$ null, $\mathbf{k} = (1,1,0)$ null, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle \neq 0$ olmak üzere $\mathbf{n}_q$ spacelike ve $\mathbf{b}_q$ null olması durumunda null eğri boyunca quasi-çatının türev denklemi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}_q' \\ \mathbf{b}_q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & k_1 & 0 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ 0 & -k_3 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix}$$

olup, burada

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle = \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 0, \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle = 1$$

ve

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle = 0, \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle = 1$$

olarak ifade edilir.

İspat: Teorem 4.1.2 ile benzer işlem adımları uygulandığında ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.1. Null quasi-çatı için incelenen sekiz durumda null quasi-çatının türev denklemleri için iki ayrı durum oluştuğu gözlemlenir. Bu durumlar;

1) $\mathbf{t}$ null, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle \neq 0$, $\mathbf{n}_q$ spacelike, $\mathbf{b}_q$ null ve izdüşüm vektörü $\mathbf{k}$ (spacelike, timelike veya null)

2) $\mathbf{t}$ null, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle = 0$, $\mathbf{n}_q$ null, $\mathbf{b}_q$ spacelike ve izdüşüm vektörü $\mathbf{k}$ spacelike olarak karşımıza çıkar.

Sonuç 4.1.2. Sonuç 4.1.1 in ilk durumunda da gözlemlendiği gibi $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle \neq 0$ ve quasi-normal vektörü spacelike olan null eğrinin quasi-çatısı için oluşan durumlarda türev denklemleri aynı bulunur. Bu durumda null quasi-çatının türev denklemleri $\mathbf{k}$ izdüşüm vektörünün seçiminden bağımsızdır.

Not: Sonuç 4.1.2 de belirtildiği gibi **v** ve **vi** durumları dışında quasi-çatının türev denklemleri aynı olup çalışmanın bundan sonraki kısımlarında türev denklemleri için sadece (4.2) numaralı eşitlik kullanılacaktır.

Teorem 4.1.9. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında $\mathbf{t}$ null, $\mathbf{k} = (0,0,1)$ spacelike veya $\mathbf{k} = (1,0,0)$ timelike, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle \neq 0$ olmak üzere $\mathbf{n}_q$ spacelike ve $\mathbf{b}_q$ null olması durumunda null quasi-çatı için vektörel çarpım

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{b}_q = \varepsilon_k \mathbf{n}_q, \quad \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q = -\varepsilon_k \mathbf{t}, \quad \mathbf{n}_q \wedge \mathbf{b}_q = -\varepsilon_k \mathbf{b}_q$$

şeklinde verilir. Burada $\langle \mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle = \varepsilon_k = \pm 1$ olarak alınmıştır.

İspat: Null iki vektörün vektörel çarpımının bir spacelike vektörü verdiği bilinmektedir. Buna göre

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{b}_q = \varepsilon_k \mathbf{n}_q$$

olur. Burada

$$\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$$
$$\mathbf{n}_q = (n_1, n_2, n_3)$$
$$\mathbf{b}_q = (b_1, b_2, b_3)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\mathbf{t}\wedge\mathbf{b}_q &= -\begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{e}_1(t_2b_3 - t_3b_2) + (-\mathbf{e}_2)(t_3b_1 - t_1b_3) + (-\mathbf{e}_3)(t_1b_2 - t_2b_1)\end{aligned}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\mathbf{t}\wedge\mathbf{b}_q = (t_2b_3 - t_3b_2, t_1b_3 - t_3b_1, t_2b_1 - t_1b_2) \tag{4.8}$$

olur. $\mathbf{t}\wedge\mathbf{b}_q = \varepsilon_k\mathbf{n}_q$ olduğundan (4.8) vektörü $\varepsilon_k\mathbf{n}_q = (\varepsilon_k n_1, \varepsilon_k n_2, \varepsilon_k n_3)$ ile eşitlenir ve

$$\begin{aligned}\varepsilon_k n_1 &= t_2b_3 - t_3b_2 \\ \varepsilon_k n_2 &= t_1b_3 - t_3b_1 \\ \varepsilon_k n_3 &= t_2b_1 - t_1b_2\end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} n_1 &= \varepsilon_k t_2b_3 - \varepsilon_k t_3b_2 \\ n_2 &= \varepsilon_k t_1b_3 - \varepsilon_k t_3b_1 \\ n_3 &= \varepsilon_k t_2b_1 - \varepsilon_k t_1b_2\end{aligned} \tag{4.9}$$

elde edilir. Buna göre $\mathbf{t}\wedge\mathbf{n}_q$ vektörünün eşiti

$$\begin{aligned}\mathbf{t}\wedge\mathbf{n}_q &= -\begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{e}_1(t_2n_3 - t_3n_2) + (-\mathbf{e}_2)(t_3n_1 - t_1n_3) + (-\mathbf{e}_3)(t_1n_2 - t_2n_1)\end{aligned}$$

olarak bulunur. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\mathbf{t}\wedge\mathbf{n}_q = (t_2n_3 - t_3n_2, t_1n_3 - t_3n_1, t_2n_1 - t_1n_2) \tag{4.10}$$

olur. İlk olarak (4.9) eşitliklerini kullanarak (4.10) vektörünün ilk bileşeninin eşiti

$$\begin{aligned}t_2n_3 - t_3n_2 &= t_2(\varepsilon_k t_2b_1 - \varepsilon_k t_1b_2) - t_3(\varepsilon_k t_1b_3 - \varepsilon_k t_3b_1) \\ &= \varepsilon_k t_2^2b_1 - \varepsilon_k t_1t_2b_2 - \varepsilon_k t_1t_3b_3 + \varepsilon_k t_3^2b_1 \\ &= \varepsilon_k b_1(t_2^2 + t_3^2) - \varepsilon_k t_1(b_2t_2 + b_3t_3)\end{aligned}$$

olup ayrıca $\langle\mathbf{t},\mathbf{t}\rangle = 0$ ve $\langle\mathbf{t},\mathbf{b}_q\rangle = 1$ olduğundan sırasıyla

$$-t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 0 \tag{4.11}$$

ve

$$-t_1b_1 + t_2b_2 + t_3b_3 = 1 \tag{4.12}$$

elde edilir. Buna göre (4.11) ve (4.12) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}t_2n_3 - t_3n_2 &= \varepsilon_k b_1t_1^2 - \varepsilon_k t_1(1 + b_1t_1) \\ &= \varepsilon_k b_1t_1^2 - \varepsilon_k t_1 - \varepsilon_k b_1t_1^2 \\ &= -\varepsilon_k t_1\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$t_2 n_3 - t_3 n_2 = -\varepsilon_k t_1$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.9) eşitliklerini kullanarak (4.10) vektörünün ikinci bileşeninin eşiti

$$\begin{aligned} t_1 n_3 - t_3 n_1 &= t_1(\varepsilon_k t_2 b_1 - \varepsilon_k t_1 b_2) - t_3(\varepsilon_k t_2 b_3 - \varepsilon_k t_3 b_2) \\ &= \varepsilon_k t_1 t_2 b_1 - \varepsilon_k t_1^2 b_2 - \varepsilon_k t_2 t_3 b_3 + \varepsilon_k t_3^2 b_2 \\ &= \varepsilon_k b_2(t_3^2 - t_1^2) + \varepsilon_k t_2(b_1 t_1 - b_3 t_3) \end{aligned}$$

olup (4.11) ve (4.12) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} t_1 n_3 - t_3 n_1 &= \varepsilon_k b_2(-t_2^2) + \varepsilon_k t_2(t_2 b_2 - 1) \\ &= -\varepsilon_k b_2 t_2^2 + \varepsilon_k b_2 t_2^2 - \varepsilon_k t_2 \\ &= -\varepsilon_k t_2 \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$t_1 n_3 - t_3 n_1 = -\varepsilon_k t_2$$

bulunur. Son olarak (4.9) eşitlikleri yardımıyla (4.10) vektörünün üçüncü bileşeninin eşiti

$$\begin{aligned} t_2 n_1 - t_1 n_2 &= t_2(\varepsilon_k t_2 b_3 - \varepsilon_k t_3 b_2) - t_1(\varepsilon_k t_1 b_3 - \varepsilon_k t_3 b_1) \\ &= \varepsilon_k t_2^2 b_3 - \varepsilon_k t_2 t_3 b_2 - \varepsilon_k t_1^2 b_3 + \varepsilon_k t_1 t_3 b_1 \\ &= \varepsilon_k b_3(t_2^2 - t_1^2) - \varepsilon_k t_3(b_2 t_2 - b_1 t_1) \end{aligned}$$

olup (4.11) ve (4.12) denklemleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} t_2 n_1 - t_1 n_2 &= \varepsilon_k b_3(-t_3^2) - \varepsilon_k t_3(1 - t_3 b_3) \\ &= -\varepsilon_k b_3 t_3^2 + \varepsilon_k b_3 t_3^2 - \varepsilon_k t_3 \\ &= -\varepsilon_k t_3 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$t_2 n_1 - t_1 n_2 = -\varepsilon_k t_3$$

olur. Bu durumda $\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q = -\varepsilon_k \mathbf{t}$ olarak bulunur.

Şimdi $\mathbf{n}_q \wedge \mathbf{b}_q$ vektörünün eşiti

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_q \wedge \mathbf{b}_q &= -\begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{e}_1(n_2 b_3 - n_3 b_2) + (-\mathbf{e}_2)(n_3 b_1 - n_1 b_3) + (-\mathbf{e}_3)(n_1 b_2 - n_2 b_1) \end{aligned}$$

olup, gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\mathbf{n}_q \wedge \mathbf{b}_q = (n_2 b_3 - n_3 b_2, n_1 b_3 - n_3 b_1, n_2 b_1 - n_1 b_2) \tag{4.13}$$

olur. İlk olarak (4.9) eşitliklerini kullanarak (4.13) vektörünün ilk bileşeninin eşiti

$$\begin{aligned} n_2b_3 - n_3b_2 &= b_3(\varepsilon_k t_1 b_3 - \varepsilon_k t_3 b_1) - b_2(\varepsilon_k t_2 b_1 - \varepsilon_k t_1 b_2) \\ &= \varepsilon_k t_1 b_3^2 - \varepsilon_k t_3 b_1 b_3 - \varepsilon_k t_2 b_1 b_2 + \varepsilon_k t_1 b_2^2 \\ &= \varepsilon_k t_1 (b_2^2 + b_3^2) - \varepsilon_k b_1 (b_2 t_2 + b_3 t_3) \end{aligned}$$

olup ayrıca $\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 0$ olduğundan

$$-b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 0 \tag{4.14}$$

elde edilir. Buna göre (4.12) ve (4.14) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} n_2b_3 - n_3b_2 &= \varepsilon_k b_1^2 t_1 - \varepsilon_k b_1 (1 + b_1 t_1) \\ &= \varepsilon_k b_1^2 t_1 - \varepsilon_k b_1 - \varepsilon_k b_1^2 t_1 \\ &= -\varepsilon_k b_1 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$n_2b_3 - n_3b_2 = -\varepsilon_k b_1$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.9) eşitliklerini kullanarak (4.13) vektörünün ikinci bileşeninin eşiti

$$\begin{aligned} n_1b_3 - n_3b_1 &= b_3(\varepsilon_k t_2 b_3 - \varepsilon_k t_3 b_2) - b_1(\varepsilon_k t_2 b_1 - \varepsilon_k t_1 b_2) \\ &= \varepsilon_k t_2 b_3^2 - \varepsilon_k t_3 b_2 b_3 - \varepsilon_k t_2 b_1^2 + \varepsilon_k t_1 b_1 b_2 \\ &= \varepsilon_k t_2 (b_3^2 - b_1^2) + \varepsilon_k b_2 (b_1 t_1 - b_3 t_3) \end{aligned}$$

olup (4.12) ve (4.14) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} n_1b_3 - n_3b_1 &= \varepsilon_k t_2 (-b_2^2) + \varepsilon_k b_2 (t_2 b_2 - 1) \\ &= -\varepsilon_k t_2 b_2^2 + \varepsilon_k t_2 b_2^2 - \varepsilon_k b_2 \\ &= -\varepsilon_k b_2 \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$n_1b_3 - n_3b_1 = -\varepsilon_k b_2$$

bulunur. Son olarak (4.9) eşitlikleri yardımıyla (4.13) vektörünün üçüncü bileşeninin eşiti

$$\begin{aligned} n_2b_1 - n_1b_2 &= b_1(\varepsilon_k t_1 b_3 - \varepsilon_k t_3 b_1) - b_2(\varepsilon_k t_2 b_3 - \varepsilon_k t_3 b_2) \\ &= \varepsilon_k t_1 b_1 b_3 - \varepsilon_k t_3 b_1^2 - \varepsilon_k t_2 b_2 b_3 + \varepsilon_k t_3 b_2^2 \\ &= \varepsilon_k t_3 (b_2^2 - b_1^2) + \varepsilon_k b_3 (b_1 t_1 - b_2 t_2) \end{aligned}$$

olup (4.12) ve (4.14) denklemleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} n_2b_1 - n_1b_2 &= \varepsilon_k t_3 (-b_3^2) + \varepsilon_k b_3 (t_3 b_3 - 1) \\ &= -\varepsilon_k t_3 b_3^2 + \varepsilon_k t_3 b_3^2 - \varepsilon_k b_3 \\ &= -\varepsilon_k b_3 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$n_2b_1 - n_1b_2 = -\varepsilon_k b_3$$

olur. Bu durumda $\mathbf{n}_q \wedge \mathbf{b}_q = -\varepsilon_k \mathbf{b}_q$ olarak bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 4.1.3. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında $\mathbf{t}$ ve $\mathbf{k}$ null, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle \neq 0$ olmak üzere $\mathbf{n}_q$ spacelike ve $\mathbf{b}_q$ null olması durumunda null quasi-çatı için vektörel çarpım

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{b}_q = -\mathbf{n}_q, \quad \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q = \mathbf{t}, \quad \mathbf{n}_q \wedge \mathbf{b}_q = \mathbf{b}_q$$

şeklinde verilir.

Teorem 4.1.10. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında $\mathbf{t}$ null, $\mathbf{k}$ spacelike, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle = 0$ olmak üzere $\mathbf{n}_q$ null ve $\mathbf{b}_q$ spacelike olması durumunda null quasi-çatı için vektörel çarpım

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q = \mathbf{b}_q, \quad \mathbf{t} \wedge \mathbf{b}_q = -\mathbf{t}, \quad \mathbf{b}_q \wedge \mathbf{n}_q = -\mathbf{n}_q$$

şeklinde verilir.

İspat: Null iki vektörün vektörel çarpımının bir spacelike vektörü verdiği bilinmektedir. Buna göre

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q = \mathbf{b}_q$$

olur. Burada

$$\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$$
$$\mathbf{n}_q = (n_1, n_2, n_3)$$
$$\mathbf{b}_q = (b_1, b_2, b_3)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q &= -\begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{e}_1(t_2 n_3 - t_3 n_2) + (-\mathbf{e}_2)(t_3 n_1 - t_1 n_3) + (-\mathbf{e}_3)(t_1 n_2 - t_2 n_1) \end{aligned}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q = (t_2 n_3 - t_3 n_2, t_1 n_3 - t_3 n_1, t_2 n_1 - t_1 n_2) \tag{4.15}$$

olur. $\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q = \mathbf{b}_q$ olduğundan (4.15) vektörü $\mathbf{b}_q = (b_1, b_2, b_3)$ ile eşitlenir ve

$$\begin{aligned} b_1 &= t_2 n_3 - t_3 n_2 \\ b_2 &= t_1 n_3 - t_3 n_1 \\ b_3 &= t_2 n_1 - t_1 n_2 \end{aligned} \tag{4.16}$$

elde edilir. Buna göre $\mathbf{t} \wedge \mathbf{b}_q$ vektörünün eşiti

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \wedge \mathbf{b}_q &= -\begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{e}_1(t_2 b_3 - t_3 b_2) + (-\mathbf{e}_2)(t_3 b_1 - t_1 b_3) + (-\mathbf{e}_3)(t_1 b_2 - t_2 b_1) \end{aligned}$$

olup, gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{b}_q = (t_2 b_3 - t_3 b_2, t_1 b_3 - t_3 b_1, t_2 b_1 - t_1 b_2) \tag{4.17}$$

bulunur. İlk olarak (4.16) eşitliklerini kullanarak (4.17) vektörünün ilk bileşeninin eşiti

$$\begin{aligned} t_2 b_3 - t_3 b_2 &= t_2(t_2 n_1 - t_1 n_2) - t_3(t_1 n_3 - t_3 n_1) \\ &= t_2^2 n_1 - t_1 t_2 n_2 - t_1 t_3 n_3 + t_3^2 n_1 \\ &= n_1(t_2^2 + t_3^2) - t_1(n_2 t_2 + n_3 t_3) \end{aligned}$$

olup ayrıca $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = 0$ ve $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle = 1$ olduğundan sırasıyla

$$-t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 0 \tag{4.18}$$

ve

$$-t_1 n_1 + t_2 n_2 + t_3 n_3 = 1 \tag{4.19}$$

elde edilir. Buna göre (4.18) ve (4.19) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} t_2 b_3 - t_3 b_2 &= n_1 t_1^2 - t_1(1 + n_1 t_1) \\ &= n_1 t_1^2 - t_1 - n_1 t_1^2 \\ &= -t_1 \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$t_2 b_3 - t_3 b_2 = -t_1$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.18) eşitliklerini kullanarak (4.17) vektörünün ikinci bileşeninin eşiti

$$\begin{aligned} t_1 b_3 - t_3 b_1 &= t_1(t_2 n_1 - t_1 n_2) - t_3(t_2 n_3 - t_3 n_2) \\ &= t_1 t_2 n_1 - t_1^2 n_2 - t_2 t_3 n_3 + t_3^2 n_2 \\ &= n_2(t_3^2 - t_1^2) + t_2(n_1 t_1 - n_3 t_3) \end{aligned}$$

olup (4.18) ve (4.19) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} t_1 b_3 - t_3 b_1 &= n_2(-t_2^2) + t_2(t_2 n_2 - 1) \\ &= -n_2 t_2^2 + n_2 t_2^2 - t_2 \\ &= -t_2 \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$t_1 b_3 - t_3 b_1 = -t_2$$

bulunur. Son olarak (4.16) eşitlikleri yardımıyla (4.17) vektörünün üçüncü bileşeninin eşiti

$$\begin{aligned} t_2 b_1 - t_1 b_2 &= t_2(t_2 n_3 - t_3 n_2) - t_1(t_1 n_3 - t_3 n_1) \\ &= t_2^2 n_3 - t_2 t_3 n_2 - t_1^2 n_3 + t_1 t_3 n_1 \\ &= n_3(t_2^2 - t_1^2) - t_3(n_2 t_2 - n_1 t_1) \end{aligned}$$

olup (4.18) ve (4.19) denklemleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} t_2b_1 - t_1b_2 &= n_3(-t_3^2) - t_3(1 - t_3n_3) \\ &= -n_3t_3^2 + n_3t_3^2 - t_3 \\ &= -t_3 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$t_2b_1 - t_1b_2 = -t_3$$

olur. Bu durumda $\mathbf{t} \wedge \mathbf{b}_q = -\mathbf{t}$ olarak bulunur.

Şimdi $\mathbf{b}_q \wedge \mathbf{n}_q$ vektörünün eşiti

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_q \wedge \mathbf{n}_q &= -\begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{e}_1(b_2n_3 - b_3n_2) + (-\mathbf{e}_2)(b_3n_1 - b_1n_3) + (-\mathbf{e}_3)(b_1n_2 - b_2n_1) \end{aligned}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\mathbf{b}_q \wedge \mathbf{n}_q = (b_2n_3 - b_3n_2, b_1n_3 - b_3n_1, b_2n_1 - b_1n_2) \tag{4.20}$$

olur. İlk olarak (4.16) eşitliklerini kullanarak (4.20) vektörünün ilk bileşeninin eşiti

$$\begin{aligned} b_2n_3 - b_3n_2 &= n_3(t_1n_3 - t_3n_1) - n_2(t_2n_1 - t_1n_2) \\ &= t_1n_3^2 - t_3n_1n_3 - t_2n_1n_2 + t_1n_2^2 \\ &= t_1(n_2^2 + n_3^2) - n_1(n_2t_2 + n_3t_3) \end{aligned}$$

olup ayrıca $\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle = 0$ olduğundan,

$$-n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 0 \tag{4.21}$$

elde edilir. Buna göre (4.19) ve (4.21) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} b_2n_3 - b_3n_2 &= n_1^2t_1 - n_1(1 + n_1t_1) \\ &= n_1^2t_1 - b_1 - n_1^2t_1 \\ &= -n_1 \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$b_2n_3 - b_3n_2 = -n_1$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.16) eşitliklerini kullanarak (4.20) vektörünün ikinci bileşeninin eşiti

$$\begin{aligned} b_1n_3 - b_3n_1 &= n_3(t_2n_3 - t_3n_2) - n_1(t_2n_1 - t_1n_2) \\ &= t_2n_3^2 - t_3n_2n_3 - t_2n_1^2 + t_1n_1n_2 \\ &= t_2(n_3^2 - n_1^2) + n_2(n_1t_1 - n_3t_3) \end{aligned}$$

olup (4.19) ve (4.21) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} b_1b_3 - b_3n_1 &= t_2(-n_2^2) + n_2(t_2n_2 - 1) \\ &= -t_2n_2^2 + t_2n_2^2 - n_2 \\ &= -n_2 \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$b_1n_3 - b_3n_1 = -n_2$$

bulunur. Son olarak (4.16) eşitlikleri yardımıyla (4.20) vektörünün üçüncü bileşeninin eşiti

$$\begin{aligned} b_2n_1 - b_1n_2 &= n_1(t_1n_3 - t_3n_1) - n_2(t_2n_3 - t_3n_2) \\ &= t_1n_1n_3 - t_3n_1^2 - t_2n_2n_3 + t_3n_2^2 \\ &= t_3(n_2^2 - n_1^2) + n_3(n_1t_1 - n_2t_2) \end{aligned}$$

olup (4.19) ve (4.21) denklemleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} b_2n_1 - b_1n_2 &= t_3(-n_3^2) + n_3(t_3n_3 - 1) \\ &= -t_3n_3^2 + t_3n_3^2 - n_3 \\ &= -n_3 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$n_2b_1 - n_1b_2 = -n_3$$

olur. Bu durumda $\mathbf{b}_q \wedge \mathbf{n}_q = -\mathbf{n}_q$ olarak bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek 4.1.1. $\mathbb{R}_1^3 : \mathbb{R}^3; (-,+,+)$ işaretli uzayda $\alpha(s) = (\sinh s, s, \cosh s)$ eğrisi verilsin. Eğrinin türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = (\cosh s, 1, \sinh s)$$

bulunur. Burada

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = -\cosh^2 s + 1 + \sinh^2 s = 0$$

olup $\alpha(s)$ null eğridir. Eğrinin ikinci türevi alınırsa

$$\alpha''(s) = (\sinh s, 0, \cosh s)$$

ve

$$\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle = -\sinh^2 s + 0 + \cosh^2 s = 1$$

olarak bulunur. Buna göre $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet çatısı,

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= (\cosh s, 1, \sinh s) \\ \mathbf{n} &= (\sinh s, 0, \cosh s) \\ \mathbf{b} &= \frac{1}{2}(-\cosh s, 1, -\sinh s) \end{aligned}$$

olur (İyigün, 2019). Burada $\mathbf{b}$, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle = 1$ ve $\langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle = 0$ olacak şekilde seçilir.

Şimdi $\alpha(s)$ eğrisinin $\mathbf{k} = (0, 1, 0)$ spacelike ve $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle \neq 0$ olacak şekilde null quasi-çatısı hesaplanır. Bunun için öncelikle

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{k} = - \begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \cosh s & 1 & \sinh s \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

hesaplanırsa

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{k} = (-\sinh s, 0, -\cosh s)$$

ve

$$\|\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}\| = \sqrt{\left| -\sinh^2 s + 0 + \cosh^2 s \right|} = 1$$

olur. Buradan

$$\mathbf{n}_q = (-\sinh s, 0, -\cosh s)$$

bulunur. $\mathbf{b}_q$ vektörü $\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle = 1$ ve $\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 0$ olacak şekilde belirlenir. Bu durumda null quasi-çatı

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= (\cosh s, 1, \sinh s) \\ \mathbf{n}_q &= (-\sinh s, 0, -\cosh s) \\ \mathbf{b}_q &= \frac{1}{2}(-\cosh s, 1, -\sinh s) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada belirlenen quasi-binormal vektör $\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle = 1$ ve $\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 0$ koşullarını sağlamalıdır. Buna göre

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle &= \langle (\cosh s, 1, \sinh s), (-\frac{1}{2}\cosh s, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sinh s) \rangle \\ &= \frac{1}{2}\cosh^2 s + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sinh^2 s \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

olup $\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle = 1$ durumu sağlanır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle &= \langle (-\sinh s, 0, -\cosh s), (-\frac{1}{2}\cosh s, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sinh s) \rangle \\ &= -\frac{1}{2}\sinh s \cosh s + 0 + \frac{1}{2}\sinh s \cosh s \\ &= 0 \end{aligned}$$

olup $\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 0$ durumu sağlanır. Son olarak q-eğrilikleri hesaplanırsa $\mathbf{t}'$ ve $\mathbf{n}_q'$ vektörleri

$$\mathbf{t}' = (\sinh s, 0, \cosh s)$$

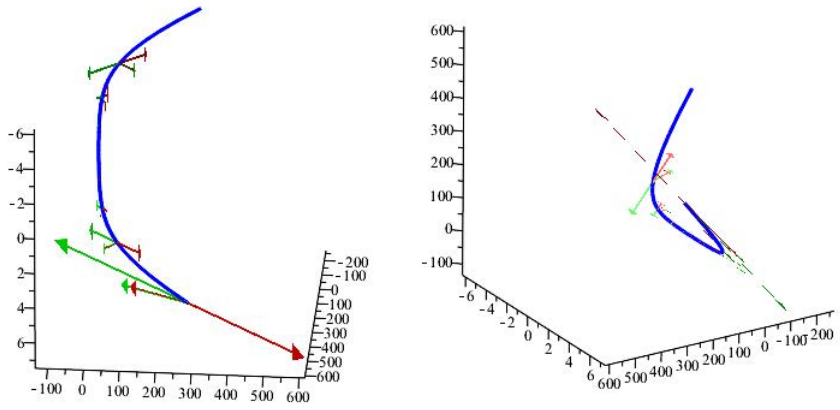
ve

$$\mathbf{n}_q' = (-\cosh s, 0, -\sinh s)$$

olup buradan

$$\begin{aligned}
k_1 = \langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q \rangle &= \langle (\sinh s, 0, \cosh s), (-\sinh s, 0, -\cosh s) \rangle \\
&= -\sinh^2 s + 0 - \cosh^2 s = -1 \\
k_2 = \langle \mathbf{t}', \mathbf{b}_q \rangle &= \langle (\sinh s, 0, \cosh s), (-\frac{1}{2}\cosh s, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sinh s) \rangle \\
&= \frac{1}{2}\sinh s \cosh s + 0 - \frac{1}{2}\sinh s \cosh s = 0 \\
k_3 = \langle \mathbf{n}_q', \mathbf{b}_q \rangle &= \langle (-\cosh s, 0, -\sinh s), (-\frac{1}{2}\cosh s, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sinh s) \rangle \\
&= -\frac{1}{2}\cosh^2 s + 0 + \frac{1}{2}\sinh^2 s \\
&= -\frac{1}{2}(\cosh^2 s - \sinh^2 s) = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Şekil 4.1 ile farklı açılarla görseli verilen null eğrinin Frenet çatı vektörleri kırmızı ile, quasi-çatı vektörleri ise yeşil ile gösterilmiştir.



Şekil 4.1 **k** spacelike iken null eğrinin Frenet ve quasi-çatı vektörleri

Teorem 4.1.9 ile verilen vektörel çarpım tanımı kullanılarak

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{b}_q = -\begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \cosh s & 1 & \sinh s \\ -\frac{1}{2}\cosh s & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sinh s \end{vmatrix} = (-\sinh s, 0, -\cosh s) = \mathbf{n}_q$$

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q = -\begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \cosh s & 1 & \sinh s \\ -\sinh s & 0 & -\cosh s \end{vmatrix} = (-\cosh s, -1, -\sinh s) = -\mathbf{t}$$

$$\mathbf{n}_q \wedge \mathbf{b}_q = -\begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -\sinh s & 0 & -\cosh s \\ -\frac{1}{2}\cosh s & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sinh s \end{vmatrix} = (\frac{1}{2}\cosh s, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sinh s) = -\mathbf{b}_q$$

elde edilir.

Örnek 4.1.2. $\mathbb{R}^3_1 : \mathbb{R}^3; (-,+,+)$ işaretli uzayda, $s\rangle 0$ için $\alpha(s) = (\sinh s, s, \cosh s)$ eğrisi verilsin. Örnek 4.1.1 ile verilen bu eğrinin izdüşüm vektörü $\mathbf{k} = (0,0,1)$ spacelike olarak seçilip null quasi-çatı vektörleri tekrar hesaplanırsa

$$\alpha'(s) = (\cosh s, 1, \sinh s)$$

bulunur. Önceki örnekte de gösterildiği gibi eğri nulldur. Buradan

$$\mathbf{t} = (\cosh s, 1, \sinh s)$$

olur. Şimdi $\alpha(s)$ eğrisinin $\mathbf{k} = (0,0,1)$ spacelike ve $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle \neq 0$ olacak şekilde null quasi-çatısını bulmak için öncelikle

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{k} = - \begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \cosh s & 1 & \sinh s \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

hesaplanırsa

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{k} = (1, \cosh s, 0)$$

ve

$$\|\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}\| = \sqrt{|-1 + \underbrace{\cosh^2 s}_{1+\sinh^2 s}|} = |\sinh s|$$

olur. Buradan

$$\mathbf{n}_q = (\frac{1}{\sinh s}, \frac{\cosh s}{\sinh s}, 0)$$

bulunur. $\mathbf{b}_q$ vektörü $\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle = 1$ ve $\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 0$ olacak şekilde belirlenir. Bu durumda null quasi-çatı

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= (\cosh s, 1, \sinh s) \\ \mathbf{n}_q &= (\frac{1}{\sinh s}, \frac{\cosh s}{\sinh s}, 0) \\ \mathbf{b}_q &= \frac{1}{2\sinh s}(\frac{-\cosh s}{\sinh s}, \frac{-1}{\sinh s}, 1) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Son olarak q-eğrilikleri için öncelikle $\mathbf{t}'$ ve $\mathbf{n}'_q$ vektörleri

$$\mathbf{t}' = (\sinh s, 0, \cosh s)$$

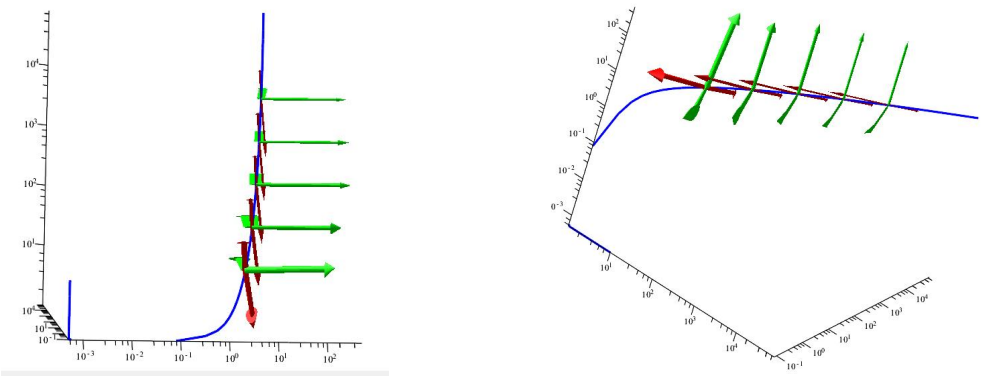
ve

$$\mathbf{n}'_q = (\frac{-\cosh s}{\sinh^2 s}, \frac{-1}{\sinh^2 s}, 0)$$

olup buradan

$$\begin{aligned} k_1 = \langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q \rangle &= \langle (\sinh s, 0, \cosh s), (\frac{1}{\sinh s}, \frac{\cosh s}{\sinh s}, 0) \rangle = -1 \\ k_2 = \langle \mathbf{t}', \mathbf{b}_q \rangle &= \langle (\sinh s, 0, \cosh s), \frac{1}{2\sinh s}(\frac{-\cosh s}{\sinh s}, \frac{-1}{\sinh s}, 1) \rangle = \coth s \\ k_3 = \langle \mathbf{n}'_q, \mathbf{b}_q \rangle &= \langle (\frac{-\cosh s}{\sinh^2 s}, \frac{-1}{\sinh^2 s}, 0), \frac{1}{2\sinh s}(\frac{-\cosh s}{\sinh s}, \frac{-1}{\sinh s}, 1) \rangle = \frac{-1}{2\sinh^2 s} \end{aligned}$$

bulunur. Şekil 4.2 ile farklı açılarla görseli verilen null eğrinin Frenet çatı vektörleri kırmızı ile, quasi-çatı vektörleri ise yeşil ile gösterilmiştir.



Şekil 4.2 **k** spacelike iken null eğrinin Frenet ve quasi-çatı vektörleri

Teorem 4.1.9 ile verilen vektörel çarpım tanımı kullanılarak

$$\mathbf{t}\wedge\mathbf{b}_q=-\begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \cosh s & 1 & \sinh s \\ \dfrac{-\cosh s}{2\sinh^2 s} & \dfrac{-1}{2\sinh^2 s} & \dfrac{1}{2\sinh s} \end{vmatrix}=\left(\frac{1}{\sinh s},\frac{\cosh s}{\sinh s},0\right)=\mathbf{n}_q$$

$$\mathbf{t}\wedge\mathbf{n}_q=-\begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \cosh s & 1 & \sinh s \\ \dfrac{1}{\sinh s} & \dfrac{\cosh s}{\sinh s} & 0 \end{vmatrix}=(-\cosh s,-1,-\sinh s)=-\mathbf{t}$$

$$\mathbf{n}_q\wedge\mathbf{b}_q=-\begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \dfrac{1}{\sinh s} & \dfrac{\cosh s}{\sinh s} & 0 \\ \dfrac{-\cosh s}{2\sinh^2 s} & \dfrac{-1}{2\sinh^2 s} & \dfrac{1}{2\sinh s} \end{vmatrix}=\left(\frac{\cosh s}{2\sinh^2 s},\frac{1}{2\sinh^2 s},\frac{-1}{2\sinh s}\right)=-\mathbf{b}_q$$

elde edilir.

Örnek 4.1.3. $\mathbb{R}^3_1:\mathbb{R}^3;(-,+,+)$ işaretli uzayda $\alpha(s)=(s,\cos s,\sin s)$ eğrisi verilsin. Eğrinin türevi alınırsa

$$\alpha'(s)=(1,-\sin s,\cos s)$$

bulunur. Burada

$$\langle\alpha'(s),\alpha'(s)\rangle=-1+\sin^2 s+\cos^2 s=0$$

olup $\alpha(s)$ null eğridir. Eğrinin ikinci türevi

$$\alpha''(s) = (0, -\cos s, -\sin s)$$

ve buradan

$$\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle = 0 + \cos^2 s + \sin^2 s = 1$$

olarak bulunur. Buna göre $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet çatısı,

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= (1, -\sin s, \cos s) \\ \mathbf{n} &= (0, -\cos s, -\sin s) \\ \mathbf{b} &= -\frac{1}{2}(1, \sin s, -\cos s) \end{aligned}$$

olur (Özerdem, 2018). Burada $\mathbf{b}$, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle = 1$ ve $\langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle = 0$ olacak şekilde seçilir.

Şimdi $\alpha(s)$ eğrisinin $\mathbf{k} = (1, 0, 0)$ timelike ve $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle \neq 0$ olacak şekilde null quasi-çatısını bulmak için öncelikle

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{k} = - \begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & -\sin s & \cos s \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

hesaplanırsa

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{k} = (0, -\cos s, -\sin s)$$

ve

$$\|\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}\| = \sqrt{\left|0 + \cos^2 s + \sin^2 s\right|} = 1$$

olur. Buradan

$$\mathbf{n}_q = (0, -\cos s, -\sin s)$$

bulunur. $\mathbf{b}_q$ vektörü $\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle = 1$ ve $\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 0$ olacak şekilde belirlenir. Bu durumda null quasi-çatı

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= (1, -\sin s, \cos s) \\ \mathbf{n}_q &= (0, -\cos s, -\sin s) \\ \mathbf{b}_q &= \frac{1}{2}(-1, -\sin s, \cos s) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada belirlenen quasi-binormal vektör $\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle = 1$ ve $\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 0$ koşullarını sağlamalıdır. Buna göre

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle &= \langle (1, -\sin s, \cos s), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sin s, \frac{1}{2}\cos s) \rangle \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin^2 s + \frac{1}{2}\cos^2 s \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

olup $\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle = 1$ durumu sağlanır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle &= \langle (0, -\cos s, -\sin s), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sin s, \frac{1}{2}\cos s) \rangle \\ &= 0 + \frac{1}{2}\sin s \cos s - \frac{1}{2}\sin s \cos s \\ &= 0 \end{aligned}$$

olup $\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 0$ durumu sağlanır. Son olarak q-eğriliklerini bulmak için $\mathbf{t}'$ ve $\mathbf{n}_q'$ vektörleri

$$\mathbf{t}' = (0, -\cos s, -\sin s)$$

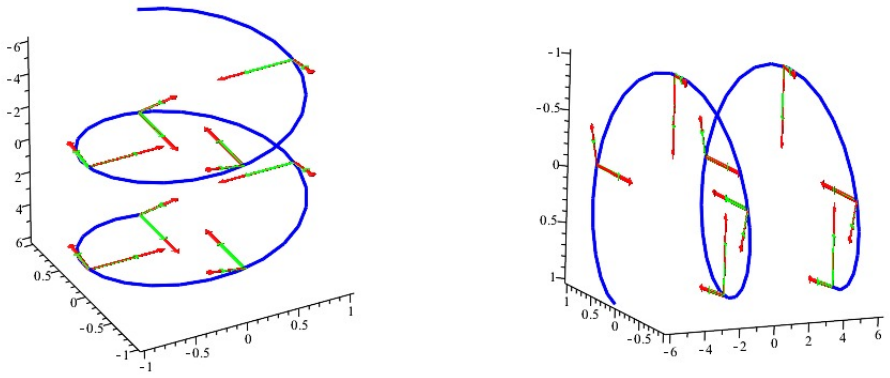
ve

$$\mathbf{n}_q' = (0, \sin s, -\cos s)$$

olup buradan

$$\begin{aligned} k_1 = \langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q \rangle &= \langle (0, -\cos s, -\sin s), (0, -\cos s, -\sin s) \rangle \\ &= 0 + \cos^2 s + \sin^2 s = 1 \\ k_2 = \langle \mathbf{t}', \mathbf{b}_q \rangle &= \langle (0, -\cos s, -\sin s), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sin s, \frac{1}{2}\cos s) \rangle \\ &= 0 + \frac{1}{2}\sin s \cos s - \frac{1}{2}\sin s \cos s = 0 \\ k_3 = \langle \mathbf{n}_q', \mathbf{b}_q \rangle &= \langle (0, \sin s, -\cos s), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sin s, \frac{1}{2}\cos s) \rangle \\ &= 0 - \frac{1}{2}\sin^2 s - \frac{1}{2}\cos^2 s = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

bulunur. Şekil 4.3 ile farklı açılarla görseli verilen null eğrinin Frenet çatı vektörleri kırmızı ile, quasi-çatı vektörleri ise yeşil ile gösterilmiştir.



Şekil 4.3 **k** timelike iken null eğrinin Frenet ve quasi-çatı vektörleri

Teorem 4.1.9 ile verilen vektörel çarpım tanımını kullanarak

$$\mathbf{t}\wedge\mathbf{b}_q=-\begin{vmatrix}-\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ 1 & -\sin s & \cos s\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sin s & \frac{1}{2}\cos s\end{vmatrix}=(0,\cos s,\sin s)=-\mathbf{n}_q$$

$$\mathbf{t}\wedge\mathbf{n}_q=-\begin{vmatrix}-\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ 1 & -\sin s & \cos s\\ 0 & -\cos s & -\sin s\end{vmatrix}=(1,-\sin s,\cos s)=\mathbf{t}$$

$$\mathbf{n}_q\wedge\mathbf{b}_q=-\begin{vmatrix}-\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ 0 & -\cos s & -\sin s\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sin s & \frac{1}{2}\cos s\end{vmatrix}=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\sin s,\frac{1}{2}\cos s)=\mathbf{b}_q$$

bulunur.

Örnek 4.1.4. $\mathbb{R}^3_1:\mathbb{R}^3;(-,+,+)$ işaretli uzayda $\alpha(s)=(\sinh s,s,\cosh s)$ eğrisi verilsin. Örnek 4.1.1 ile verilen bu eğrinin izdüşüm vektörü $\mathbf{k}=(1,0,0)$ timelike olarak seçilip null quasi-çatı vektörleri tekrar hesaplanırsa

$$\alpha'(s)=(\cosh s,1,\sinh s)$$

bulunur. Önceki örnekte de gösterildiği gibi eğri nulldur. Buradan

$$\mathbf{t}=(\cosh s,1,\sinh s)$$

olur. Şimdi $\alpha(s)$ eğrisinin $\mathbf{k}=(1,0,0)$ timelike ve $\langle\mathbf{t},\mathbf{k}\rangle\neq 0$ olacak şekilde null quasi-çatısını bulmak için öncelikle

$$\mathbf{t}\wedge\mathbf{k}=-\begin{vmatrix}-\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ \cosh s & 1 & \sinh s\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

hesaplanırsa

$$\mathbf{t}\wedge\mathbf{k}=(0,-\sinh s,1)$$

ve

$$\|\mathbf{t}\wedge\mathbf{k}\|=\sqrt{\left|-0+\sinh^2 s+1\right|}=\cosh s$$

olur. Buradan

$$\mathbf{n}_q=(0,-\frac{\sinh s}{\cosh s},\frac{1}{\cosh s})$$

bulunur. $\mathbf{b}_q$ vektörü $\langle\mathbf{t},\mathbf{b}_q\rangle=1$ ve $\langle\mathbf{n}_q,\mathbf{b}_q\rangle=0$ olacak şekilde belirlenir. Bu durumda null quasi-çatı

$$\mathbf{t}=(\cosh s,1,\sinh s)$$

$$\mathbf{n}_q=(0,-\frac{\sinh s}{\cosh s},\frac{1}{\cosh s})$$

$$\mathbf{b}_q=\frac{1}{2\cosh s}(-1,\frac{1}{\cosh s},\frac{\sinh s}{\cosh s})$$

şeklinde elde edilir. q-eğriliklerini bulmak için öncelikle $\mathbf{t}'$ ve $\mathbf{n}_q'$ vektörleri

$$\mathbf{t}' = (\sinh s, 0, \cosh s)$$

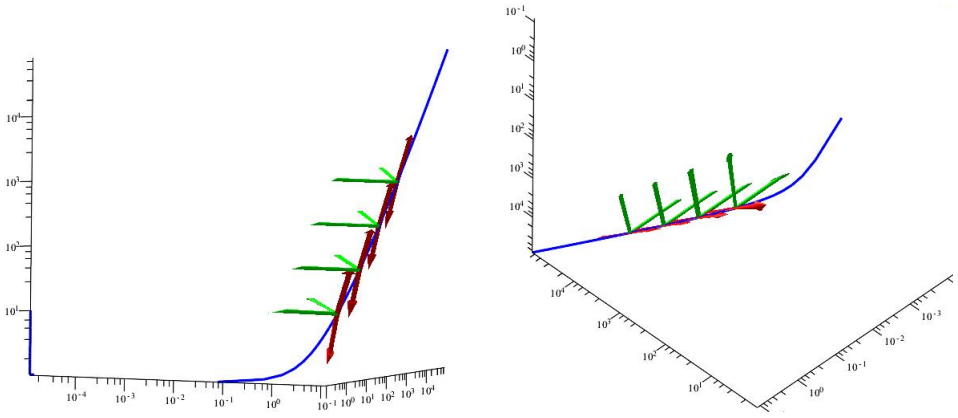
ve

$$\mathbf{n}_q' = (0, -\frac{1}{\cosh^2 s}, -\frac{1}{\cosh s})$$

olup buradan

$$\begin{aligned} k_1 = \langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q \rangle &= \langle (\sinh s, 0, \cosh s), (0, -\frac{\sinh s}{\cosh s}, \frac{1}{\cosh s}) \rangle = 1 \\ k_2 = \langle \mathbf{t}', \mathbf{b}_q \rangle &= \langle (\sinh s, 0, \cosh s), (\frac{-1}{2\cosh s}, \frac{1}{2\cosh^2 s}, \frac{\sinh s}{2\cosh^2 s}) \rangle = \tanh s \\ k_3 = \langle \mathbf{n}_q', \mathbf{b}_q \rangle &= \langle (0, -\frac{1}{\cosh^2 s}, -\frac{1}{\cosh s}), (\frac{-1}{2\cosh s}, \frac{1}{2\cosh^2 s}, \frac{\sinh s}{2\cosh^2 s}) \rangle \\ &= -\frac{1}{2\cosh^3 s}(\frac{1}{\cosh s} - \sinh s) \end{aligned}$$

bulunur. Şekil 4.4 ile farklı açılarla görseli verilen null eğrinin Frenet çatı vektörleri kırmızı ile, quasi-çatı vektörleri ise yeşil ile gösterilmiştir.



Şekil 4.4 **k** timelike iken null eğrinin Frenet ve quasi-çatı vektörleri

Teorem 4.1.9 ile verilen vektörel çarpım tanımı kullanılırsa

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{b}_q = -\begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \cosh s & 1 & \sinh s \\ -\frac{1}{2\cosh s} & \frac{1}{2\cosh^2 s} & \frac{\sinh s}{2\cosh^2 s} \end{vmatrix} = (0, \frac{\sinh s}{\cosh s}, -\frac{1}{\cosh s}) = -\mathbf{n}_q$$

olur. Ayrıca

$$\mathbf{t}\wedge\mathbf{n}_q=-\begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \cosh s & 1 & \sinh s \\ 0 & -\dfrac{\sinh s}{\cosh s} & \dfrac{1}{\cosh s} \end{vmatrix}=(\cosh s,1,\sinh s)=\mathbf{t}$$

$$\mathbf{n}_q\wedge\mathbf{b}_q=-\begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & -\dfrac{\sinh s}{\cosh s} & \dfrac{1}{\cosh s} \\ -\dfrac{1}{2\cosh s} & \dfrac{1}{2\cosh^2 s} & \dfrac{\sinh s}{2\cosh^2 s} \end{vmatrix}=(\frac{-1}{2\cosh s},\frac{1}{2\cosh^2 s},\frac{\sinh s}{2\cosh^2 s})=\mathbf{b}_q$$

bulunur.

Örnek 4.1.5. $\mathbb{R}^3_1:\mathbb{R}^3;(-,+,+)$ işaretli uzayda $\alpha(s)=(\frac{4}{3}s^3+s,2s^2,\frac{4}{3}s^3-s)$ eğrisi verilsin. Eğrinin türevi alınırsa

$$\alpha'(s)=(4s^2+1,4s,4s^2-1)$$

bulunur. Burada

$$\langle\alpha'(s),\alpha'(s)\rangle=-16s^4-8s^2-1+16s^2+16s^4-8s^2+1=0$$

olup $\alpha(s)$ null eğridir. Bu durumda

$$\mathbf{t}=(4s^2+1,4s,4s^2-1)$$

olur. $\alpha(s)$ eğrisinin $\mathbf{k}=(1,0,1)$ null ve $\langle\mathbf{t},\mathbf{k}\rangle\neq 0$ olacak şekilde quasi-normal ve quasi-binormal vektörlerini hesaplamak için öncelikle

$$\mathbf{t}\wedge\mathbf{k}=-\begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 4s^2+1 & 4s & 4s^2-1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

hesaplanırsa

$$\mathbf{t}\wedge\mathbf{k}=(4s,2,4s)$$

ve

$$\|\mathbf{t}\wedge\mathbf{k}\|=\sqrt{|-16s^2+4+16s^2|}=2$$

olur. Buradan

$$\mathbf{n}_q=(2s,1,2s)$$

bulunur. $\mathbf{b}_q$ vektörü $\langle\mathbf{t},\mathbf{b}_q\rangle=1$ ve $\langle\mathbf{n}_q,\mathbf{b}_q\rangle=0$ olacak şekilde belirlenir. Bu durumda null quasi-çatı

$$\mathbf{t}=(4s^2+1,4s,4s^2-1)$$
$$\mathbf{n}_q=(2s,1,2s)$$
$$\mathbf{b}_q=(-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2})$$

şeklinde elde edilir. Burada belirlenen quasi-binormal vektör $\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle = 1$ ve $\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 0$ koşullarını sağlamalıdır. Buna göre

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle = \langle (4s^2+1, 4s, 4s^2-1), (-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}) \rangle = 1$$

olup $\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle = 1$ durumunu sağlar. Benzer şekilde

$$\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle = \langle (2s, 1, 2s), (-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}) \rangle = 0$$

olup $\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 0$ durumunu sağlar. Son olarak q-eğriliklerini bulmak için öncelikle $\mathbf{t}'$ ve $\mathbf{n}_q'$

$$\mathbf{t}' = (8s, 4, 8s)$$

ve

$$\mathbf{n}_q' = (2, 0, 2)$$

olup buradan

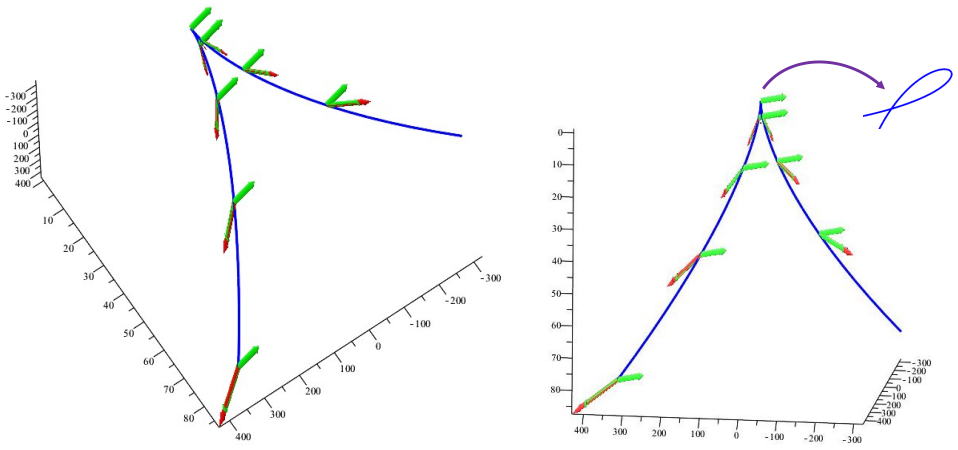
$$k_1 = \langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q \rangle = \langle (8s, 4, 8s), (2s, 1, 2s) \rangle = 4$$

$$k_2 = \langle \mathbf{t}', \mathbf{b}_q \rangle = \langle (8s, 4, 8s), (-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}) \rangle = 0$$

$$k_3 = \langle \mathbf{n}_q', \mathbf{b}_q \rangle = \langle (2, 0, 2), (-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}) \rangle = 0$$

bulunur.

Şekil 4.5 ile farklı açılarla görseli verilen null eğrinin Frenet çatı vektörleri kırmızı ile, quasi-çatı vektörleri ise yeşil ile gösterilmiştir. Dikkat edilirse sağdaki görselde köşe gibi gözüken kısmın büyültülerek köşe olmadığı verilmiştir.



Şekil 4.5 **k** null iken null eğrinin Frenet ve quasi-çatı vektörleri

Sonuç 4.1.3 ile verilen vektörel çarpım tanımı kullanılırsa

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{b}_q = - \begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 4s^2+1 & 4s & 4s^2-1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = (-2s, -1, -2s) = -\mathbf{n}_q$$

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q = - \begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 4s^2+1 & 4s & 4s^2-1 \\ 2s & 1 & 2s \end{vmatrix} = (4s^2+1, 4s, 4s^2-1) = \mathbf{t}$$

$$\mathbf{n}_q \wedge \mathbf{b}_q = - \begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 2s & 1 & 2s \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = (-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}) = \mathbf{b}_q$$

bulunur.

Null Quasi-Çatı ile Null Frenet Çatı Arasındaki Bağıntılar

Yukarıda verilen **i, iii, v** ve **vii** durumları için **n** ile $\mathbf{n}_q$ birim normal vektör alanlarının aynı sınıftan olmaları sebebiyle null quasi-çatı ile null Frenet çatısı arasındaki bağıntılar aşağıdaki teoremler yardımıyla verilmiştir.

Teorem 4.1.11. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında **t** null, $\mathbf{k} = (0,0,1)$ spacelike, $\mathbf{k} = (1,0,0)$ timelike veya $\mathbf{k} = (1,1,0)$ null, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle \neq 0$ olmak üzere $\mathbf{n}_q$ spacelike ve $\mathbf{b}_q$ null olması durumunda oluşan null quasi-çatı ile **n** spacelike, **b** null olması durumunda oluşan Frenet çatısı arasındaki bağıntı

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 1 & 0 \\ -\frac{k_2^2}{2} & k_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

olarak verilir. Burada k_2 q-eğriliğidir.

İspat: İlk olarak

$$\mathbf{n}_q = \lambda \mathbf{t} + \beta \mathbf{n} + \gamma \mathbf{b} \tag{4.22}$$

olarak verilsin. (4.22) eşitliği **t** ile skaler çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad & \langle \mathbf{t}, \lambda \mathbf{t} + \beta \mathbf{n} + \gamma \mathbf{b} \rangle = 0 \\ & \lambda \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle}_{0} + \beta \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle}_{0} + \gamma \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle}_{1} = \gamma \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\gamma = 0$$

olur. Buna göre (4.22) denklemi tekrar düzenlenirse

$$\mathbf{n}_q = \lambda\mathbf{t} + \beta\mathbf{n} \tag{4.23}$$

bulunur. (4.23) denklemi kendisiyle skaler çarpılırsa

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q\rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad & \langle \lambda\mathbf{t} + \beta\mathbf{n}, \lambda\mathbf{t} + \beta\mathbf{n}\rangle = 1 \\ & \lambda^2\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}\rangle}_{0} + 2\lambda\beta\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}\rangle}_{0} + \beta^2\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle}_{1} = 1\end{aligned}$$

olur. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\beta^2 = 1 \text{ ve } \beta = \pm 1$$

bulunur. Burada $\beta = 1$ alınırsa

$$\mathbf{n}_q = \lambda\mathbf{t} + \mathbf{n}$$

olur. Benzer şekilde

$$\mathbf{b}_q = \lambda\mathbf{t} + \beta\mathbf{n} + \gamma\mathbf{b} \tag{4.24}$$

alınıp $\mathbf{t}$ ile skaler çarpılırsa

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q\rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad & \langle \mathbf{t}, \lambda\mathbf{t} + \beta\mathbf{n} + \gamma\mathbf{b}\rangle = 1 \\ & \lambda\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}\rangle}_{0} + \beta\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}\rangle}_{0} + \gamma\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}\rangle}_{1} = \gamma\end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$\gamma = 1$$

olarak bulunur. Buna göre (4.24) denklemi tekrar düzenlenirse

$$\mathbf{b}_q = \lambda\mathbf{t} + \beta\mathbf{n} + \mathbf{b} \tag{4.25}$$

bulunur. (4.25) denklemi kendisiyle skaler çarpılırsa

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad & \langle \lambda\mathbf{t} + \beta\mathbf{n} + \mathbf{b}, \lambda\,\mathbf{t} + \beta\mathbf{n} + \mathbf{b}\rangle = 0 \\ & \lambda^2\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}\rangle}_{0} + \lambda\beta\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}\rangle}_{0} + \lambda\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}\rangle}_{1} + \lambda\beta\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}\rangle}_{0} + \beta^2\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle}_{1} \\ & +\beta\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{b}\rangle}_{0} + \lambda\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}\rangle}_{1} + \beta\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{b}\rangle}_{0} + \underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle}_{0} = 0\end{aligned}$$

bulunur. Gerekli işlemler yapılırsa

$$2\lambda + \beta^2 = 0$$

olur. Buradan

$$\lambda = -\frac{\beta^2}{2}$$

elde edilir. Bu durumda (4.25) denklemi tekrar düzenlenirse

$$\mathbf{b}_q = -\frac{\beta^2}{2}\mathbf{t} + \beta\mathbf{n} + \mathbf{b} \tag{4.26}$$

olarak elde edilir. Tüm hesaplamaların sonucu olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q &= \lambda\mathbf{t} + \mathbf{n} \\ \mathbf{b}_q &= -\tfrac{\beta^2}{2}\mathbf{t} + \beta\mathbf{n} + \mathbf{b} \end{aligned} \tag{4.27}$$

bulunur. (4.27) deki $\mathbf{n}_q$ kullanılarak

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_q - \lambda\mathbf{t} \tag{4.28}$$

olur. Buna göre

$$\mathbf{t}' = \mathbf{n} = \mathbf{n}_q - \lambda\mathbf{t}$$

ve (4.2) eşitlikleri incelenirse

$$k_1 = 1, k_2 = -\lambda$$

olduğu görülür. O halde (4.28) tekrar düzenlenirse

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_q + k_2\mathbf{t} \tag{4.29}$$

bulunur. Son olarak (4.26) eşitliğinde (4.29) yerine yazılarak $\mathbf{b}$ yalnız bırakılırsa

$$\mathbf{b} = \frac{\beta^2}{2}\mathbf{t} - \beta(\mathbf{n}_q + k_2\,\mathbf{t}) + \mathbf{b}_q$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\mathbf{b} = (\frac{\beta^2}{2} - \beta k_2)\mathbf{t} - \beta\mathbf{n}_q + \mathbf{b}_q \tag{4.30}$$

bulunur. $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = 0$ olup (4.30) eşitliği bu ifadede yerine yazılırsa

$$\langle ((\frac{\beta^2}{2} - \beta k_2)\mathbf{t} - \beta\mathbf{n}_q + \mathbf{b}_q), ((\frac{\beta^2}{2} - \beta k_2)\mathbf{t} - \beta\mathbf{n}_q + \mathbf{b}_q) \rangle = 0$$

olur. Skaler çarpım yapılırsa

$$\begin{aligned} &(\frac{\beta^2}{2} - \beta k_2)^2 \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle}_{0} - \beta(\frac{\beta^2}{2} - \beta k_2)\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle}_{0} + (\frac{\beta^2}{2} - \beta k_2)\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle}_{1} - \beta(\frac{\beta^2}{2} - \beta k_2)\underbrace{\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{t} \rangle}_{0} \\ &+\beta^2 \underbrace{\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle}_{1} - \beta\underbrace{\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle}_{0} + (\frac{\beta^2}{2} - \beta k_2)\underbrace{\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{t} \rangle}_{1} - \beta\underbrace{\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{n}_q \rangle}_{0} + \underbrace{\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle}_{0} = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned} 2(\frac{\beta^2}{2} - \beta k_2) + \beta^2 &= 0 \\ \beta^2 - 2\beta k_2 + \beta^2 &= 0 \\ 2\beta^2 - 2\beta k_2 &= 0 \\ \beta^2 - \beta k_2 &= 0 \\ \beta(\beta - k_2) &= 0 \\ \beta = 0 \text{ veya } \beta &= k_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $\beta = k_2$ olması durumunda (4.26) eşitliği düzenlenirse

$$\mathbf{b}_q = -\frac{k_2^2}{2}\mathbf{t} + k_2\mathbf{n} + \mathbf{b}$$

olarak yazılır. O halde null quasi-çatı ve null Frenet çatı arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 1 & 0 \\ -\frac{k_2^2}{2} & k_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Ayrıca $\beta = 0$ olarak kabul edilirse $\mathbf{b}_q = \mathbf{b}$ olup bu durumda iki çatı çakışık olarak bulunur.

Örnek 4.1.6. $\mathbb{R}_1^3 : \mathbb{R}^3; (-,+,+)$ işaretli uzayda $\alpha(s) = (\sinh s, s, \cosh s)$ eğrisi verilsin. Eğrinin Frenet vektörleri önceki örneklerde hesaplanarak

$$\mathbf{t} = (\cosh s, 1, \sinh s)$$
$$\mathbf{n} = (\sinh s, 0, \cosh s)$$
$$\mathbf{b} = \frac{1}{2}(-\cosh s, 1, -\sinh s)$$

olarak bulundu. Burada $\mathbf{k} = (1,0,0)$ timelike olarak seçildiğinde null quasi-çatı vektörleri ve q-eğrilikleri sırasıyla

$$\mathbf{t} = (\cosh s, 1, \sinh s)$$
$$\mathbf{n}_q = (0, -\frac{\sinh s}{\cosh s}, \frac{1}{\cosh s})$$
$$\mathbf{b}_q = \frac{1}{2\cosh s}(-1, \frac{1}{\cosh s}, \frac{\sinh s}{\cosh s})$$

ve

$$k_1 = \langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q \rangle = 1$$
$$k_2 = \langle \mathbf{t}', \mathbf{b}_q \rangle = \tanh s$$
$$k_3 = \langle \mathbf{n}_q', \mathbf{b}_q \rangle = -\frac{1}{2\cosh^3 s}(\frac{1}{\cosh s} - \sinh s)$$

olur. Teorem 4.1.11 ile null eğriler için verilen Frenet çatı ile quasi-çatı arasındaki bağıntılar

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}$$
$$\mathbf{n}_q = -k_2\mathbf{t} + \mathbf{n}$$
$$\mathbf{b}_q = -\frac{k_2^2}{2}\mathbf{t} + k_2\mathbf{n} + \mathbf{b}$$

şeklindedir. Buna göre, $\mathbf{n}_q = -k_2\mathbf{t} + \mathbf{n}$ bağıntısı sağlanmalı. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_q &= -\frac{\sinh s}{\cosh s}(\cosh s, 1, \sinh s) + (\sinh s, 0, \cosh s) \\
&= (-\sinh s + \sinh s, -\frac{\sinh s}{\cosh s}, \frac{-\sinh^2 s + \cosh^2 s}{\cosh s}) \\
&= (0, -\frac{\sinh s}{\cosh s}, \frac{1}{\cosh s})
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde $\mathbf{b}_q = -\frac{k_2^2}{2}\mathbf{t} + k_2\mathbf{n} + \mathbf{b}$ bağıntısı da sağlanmalı. Buna göre

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_q &= -\frac{\sinh^2 s}{2\cosh^2 s}(\cosh s, 1, \sinh s) + \frac{\sinh s}{\cosh s}(\sinh s, 0, \cosh s) \\
&\quad +(-\frac{\cosh s}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sinh s}{2}) \\
&= (\frac{-\sinh^2 s + 2\sinh^2 s - \cosh^2 s}{2\cosh s}, \frac{-\sinh^2 s + \cosh^2 s}{2\cosh^2 s}, \\
&\quad \frac{-\sinh^3 s + \cosh^2 s \sinh s}{2\cosh^2 s}) \\
&= (\frac{-1}{2\cosh s}, \frac{1}{2\cosh^2 s}, \frac{\sinh s(\cosh^2 s - \sinh^2 s)}{2\cosh^2 s}) \\
&= (-\frac{1}{2\cosh s}, \frac{1}{2\cosh^2 s}, \frac{\sinh s}{2\cosh^2 s})
\end{aligned}$$

olur.

Teorem 4.1.12. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında $\mathbf{t}$ null, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ spacelike, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle = 0$ olmak üzere $\mathbf{n}_q$ null ve $\mathbf{b}_q$ spacelike olması durumunda oluşan null quasi-çatı ile $\mathbf{n}$ null, $\mathbf{b}$ spacelike olması durumunda oluşan Frenet çatısı arasındaki bağıntı

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-(k_3 - \tau)^2}{2} & 1 & k_3 - \tau \\ \tau - k_3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

olarak verilir. Burada k_3 q-eğriliği ve τ Frenet eğriliğidir.

İspat: İlk olarak

$$\mathbf{b}_q = \lambda\mathbf{t} + \beta\mathbf{n} + \gamma\mathbf{b} \tag{4.31}$$

olarak verilsin. (4.31) eşitliği $\mathbf{t}$ ile skaler çarpılırsa

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle = 0 \quad &\Rightarrow \quad \langle \mathbf{t}, \lambda\mathbf{t} + \beta\mathbf{n} + \gamma\mathbf{b} \rangle = 0 \\
&\lambda\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle}_{0} + \beta\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle}_{1} + \gamma\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle}_{0} = \beta
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\beta = 0$$

olur. Buna göre (4.31) denklemi tekrar düzenlenirse

$$\mathbf{b}_q = \lambda\mathbf{t} + \gamma\mathbf{b} \tag{4.32}$$

bulunur. (4.32) denklemi kendisiyle skaler çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad & \langle \lambda\mathbf{t} + \gamma\mathbf{b}, \lambda\mathbf{t} + \gamma\mathbf{b} \rangle = 1 \\ & \lambda^2 \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle}_{0} + 2\lambda\gamma \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle}_{0} + \gamma^2 \underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle}_{1} = 1 \end{aligned}$$

olur. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\gamma^2 = 1 \text{ ve } \gamma = \pm 1$$

bulunur. Burada $\gamma = 1$ alınırsa

$$\mathbf{b}_q = \lambda\mathbf{t} + \mathbf{b}$$

olur. Benzer şekilde

$$\mathbf{n}_q = \lambda\mathbf{t} + \beta\mathbf{n} + \gamma\mathbf{b} \tag{4.33}$$

alınıp $\mathbf{t}$ ile skaler çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad & \langle \mathbf{t}, \lambda\mathbf{t} + \beta\mathbf{n} + \gamma\mathbf{b} \rangle = 1 \\ & \lambda \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle}_{0} + \beta \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle}_{1} + \gamma \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle}_{0} = \beta \end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$\beta = 1$$

olarak bulunur. Buna göre (4.33) denklemi tekrar düzenlenirse

$$\mathbf{n}_q = \lambda\mathbf{t} + \mathbf{n} + \gamma\mathbf{b} \tag{4.34}$$

bulunur. (4.34) denklemi kendisiyle skaler çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad & \langle \lambda\mathbf{t} + \mathbf{n} + \gamma\mathbf{b}, \lambda\mathbf{t} + \mathbf{n} + \gamma\mathbf{b} \rangle = 0 \\ & \lambda^2 \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle}_{0} + \lambda \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle}_{1} + \lambda\gamma \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle}_{0} + \lambda \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle}_{1} + \underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle}_{0} \\ & + \gamma \underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle}_{0} + \lambda\gamma \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle}_{0} + \gamma \underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle}_{0} + \gamma^2 \underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle}_{1} = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Gerekli işlemler yapılırsa

$$2\lambda + \gamma^2 = 0$$

olur. Buradan

$$\lambda = -\frac{\gamma^2}{2}$$

elde edilir. Bu durumda (4.34) denklemi tekrar düzenlenirse

$$\mathbf{n}_q = -\frac{\gamma^2}{2}\mathbf{t} + \mathbf{n} + \gamma\mathbf{b} \tag{4.35}$$

olarak elde edilir. Tüm hesaplamaların sonucu olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q &= -\frac{\gamma^2}{2}\mathbf{t} + \mathbf{n} + \gamma\mathbf{b} \\ \mathbf{b}_q &= \lambda\mathbf{t} + \mathbf{b} \end{aligned} \tag{4.36}$$

bulunur. (4.36) eşitliklerindeki $\mathbf{n}_q$ ve $\mathbf{b}_q$ kullanılırsa, sırasıyla

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_q + \frac{\gamma^2}{2}\mathbf{t} - \gamma\mathbf{b} \tag{4.37}$$

ve

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_q - \lambda\mathbf{t} \tag{4.38}$$

olarak elde edilir. Buna göre, (4.5) gereğince

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= \mathbf{t} \\ \mathbf{n}' &= -\mathbf{n} + \tau\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' &= -\tau\mathbf{t} \end{aligned} \tag{4.39}$$

olur. Bu durumda (4.36) eşitliklerinden $\mathbf{n}_q$ eşitliğinin türevi alınırsa

$$\mathbf{n}_q' = -\frac{\gamma^2}{2}\mathbf{t}' + \mathbf{n}' + \gamma\mathbf{b}'$$

olarak bulunur. $\mathbf{n}_q' = -k_1\mathbf{n}_q + k_3\mathbf{b}_q$ eşitliği ve (4.39) değerleri son eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} -k_1\mathbf{n}_q + k_3\mathbf{b}_q &= -\frac{\gamma^2}{2}\mathbf{t} - \mathbf{n} + \tau\mathbf{b} - \gamma\tau\mathbf{t} \\ &= (-\frac{\gamma^2}{2} - \gamma\tau)\mathbf{t} - \mathbf{n} + \tau\mathbf{b} \end{aligned} \tag{4.40}$$

olur. (4.37) ve (4.38) eşitlikleri (4.40) eşitliğinde uygun yerlere yazılırsa

$$\begin{aligned} -k_1\mathbf{n}_q + k_3\mathbf{b}_q &= (-\frac{\gamma^2}{2} - \gamma\tau)\mathbf{t} - \mathbf{n}_q - \frac{\gamma^2}{2}\mathbf{t} + \gamma\mathbf{b} + \tau\mathbf{b}_q - \tau\lambda\mathbf{t} \\ &= (-\frac{\gamma^2}{2} - \gamma\tau)\mathbf{t} - \mathbf{n}_q - \frac{\gamma^2}{2}\mathbf{t} + \gamma\mathbf{b}_q - \gamma\lambda\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}_q - \tau\lambda\mathbf{t} \\ &= (-\frac{\gamma^2}{2} - \gamma\tau - \frac{\gamma^2}{2} - \gamma\lambda - \tau\lambda)\mathbf{t} - \mathbf{n}_q + (\gamma+\tau)\mathbf{b}_q \\ &= (-\gamma^2 - \gamma\tau - \gamma\lambda - \tau\lambda)\mathbf{t} - \mathbf{n}_q + (\gamma+\tau)\mathbf{b}_q \\ &= (-\gamma(\gamma+\tau) - \lambda(\gamma+\tau))\mathbf{t} - \mathbf{n}_q + (\gamma+\tau)\mathbf{b}_q \\ &= (\gamma+\tau)(-\gamma-\lambda))\mathbf{t} - \mathbf{n}_q + (\gamma+\tau)\mathbf{b}_q \end{aligned}$$

olup ve burada

$$\begin{aligned} &k_1 = 1 \\ &k_3 = \gamma + \tau \quad \Rightarrow \quad \gamma = k_3 - \tau \\ &-\gamma - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\gamma \end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde (4.36) tekrar düzenlenirse

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q &= -\frac{(k_3-\tau)^2}{2}\mathbf{t} + \mathbf{n} + (k_3-\tau)\mathbf{b} \\ \mathbf{b}_q &= (\tau - k_3)\mathbf{t} + \mathbf{b} \end{aligned} \tag{4.41}$$

bulunur. Buna göre null quasi-çatı ve null Frenet çatı arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{-(k_3-\tau)^2}{2} & 1 & (k_3-\tau) \\ \tau - k_3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.1.13. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında α bir null eğri ve α nın null quasi-çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ olsun. O halde $\mathbf{n}_q$ spacelike ve $\mathbf{b}_q$ null olduğunda null quasi-çatı için

1) $\langle \mathbf{t}', \mathbf{t} \rangle = \langle \mathbf{n}_q', \mathbf{n}_q \rangle = \langle \mathbf{b}_q', \mathbf{b}_q \rangle = 0$
2) $\langle \mathbf{t}', \mathbf{b}_q \rangle = k_2$ ve $\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q' \rangle = -k_2$
3) $\langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q \rangle = k_1$ ve $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q' \rangle = -k_1$
4) $\langle \mathbf{n}_q', \mathbf{b}_q \rangle = k_3$ ve $\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q' \rangle = -k_3$

eşitlikleri mevcuttur.

İspat: 1) Null quasi-çatı tanımından $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = 0$ olur. Bu ifadenin türevi alınarak

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}', \mathbf{t} \rangle + \langle \mathbf{t}, \mathbf{t}' \rangle &= 0 \\ 2\langle \mathbf{t}', \mathbf{t} \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{t}', \mathbf{t} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle = 1$ ifadesinin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}_q', \mathbf{n}_q \rangle + \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q' \rangle &= 0 \\ 2\langle \mathbf{n}_q', \mathbf{n}_q \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{n}_q', \mathbf{n}_q \rangle &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Son olarak $\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 0$ ifadesinde her iki tarafın türevi alınarak

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}_q', \mathbf{b}_q \rangle + \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q' \rangle &= 0 \\ 2\langle \mathbf{b}_q', \mathbf{b}_q \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{b}_q', \mathbf{b}_q \rangle &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

2) q-eğriliklerin tanımından $\langle \mathbf{t}', \mathbf{b}_q \rangle = k_2$ olur. Bu durumda null quasi-çatı tanımına göre $\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle = 1$ olup bu ifade de eşitliğin türevi alınırsa

$$\underbrace{\langle \mathbf{t}', \mathbf{b}_q \rangle}_{k_2} + \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q' \rangle}_{-k_2} = 0$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

3) q-eğriliklerin tanımından $\langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q \rangle = k_1$ olur. Bu durumda null quasi-çatı tanımına göre $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle = 0$ olup bu ifade de eşitliğin türevi alınırsa

$$\underbrace{\langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q \rangle}_{k_1} + \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q' \rangle}_{-k_1} = 0$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

4) q-eğriliklerin tanımından $\langle \mathbf{n}_q', \mathbf{b}_q \rangle = k_3$ olur. Bu durumda null quasi-çatı tanımına göre $\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 0$ olup bu ifade de eşitliğin türevi alınırsa

$$\underbrace{\langle \mathbf{n}_q', \mathbf{b}_q \rangle}_{k_3} + \underbrace{\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q' \rangle}_{-k_3} = 0$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.14. $\mathbb{R}_1^3$ de bir null eğrinin teğet, $\mathbf{n}_q$ spacelike ve $\mathbf{b}_q$ null vektörleri arasında

1) $\langle \mathbf{t}'', \mathbf{b}_q \rangle = \langle \mathbf{b}_q'', \mathbf{t} \rangle = k_1 k_3 + k_2^2$
2) $\langle \mathbf{t}'', \mathbf{n}_q \rangle = \langle \mathbf{n}_q'', \mathbf{t} \rangle = k_1 k_2$
3) $\langle \mathbf{n}_q'', \mathbf{b}_q \rangle = \langle \mathbf{b}_q'', \mathbf{n}_q \rangle = k_2 k_3$
4) $\langle \mathbf{t}'', \mathbf{t} \rangle = -k_1^2$
5) $\langle \mathbf{n}_q'', \mathbf{n}_q \rangle = 2k_1 k_3$
6) $\langle \mathbf{b}_q'', \mathbf{b}_q \rangle = -k_3^2$

bağıntıları vardır. Burada k_1, k_2, k_3 sabit q-eğrilikleridir.

İspat: 1) Teorem 4.1.13, **2** şıkkından

$$\langle \mathbf{t}', \mathbf{b}_q \rangle = k_2 \tag{4.42}$$

ve

$$\langle \mathbf{b}_q', \mathbf{t} \rangle = -k_2 \tag{4.43}$$

olduğu biliniyor. (4.42) ve (4.43) eşitliğinde her iki tarafın türevi alınırsa sırasıyla

$$\langle \mathbf{t}'', \mathbf{b}_q \rangle + \langle \mathbf{t}', \mathbf{b}_q' \rangle = 0$$

ve

$$\langle \mathbf{b}_q'', \mathbf{t} \rangle + \langle \mathbf{b}_q', \mathbf{t}' \rangle = 0$$

bulunur. Son iki eşitlikte $\langle \mathbf{t}', \mathbf{b}_q' \rangle$ ifadeleri birbirine eşit olduğundan

$$\langle \mathbf{t}'', \mathbf{b}_q \rangle = \langle \mathbf{b}_q'', \mathbf{t} \rangle$$

olduğu sonucuna varılır. Buna göre $\langle \mathbf{t}'', \mathbf{b}_q \rangle$ hesaplamak için (4.2) den yararlanılırsa

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{t}'', \mathbf{b}_q \rangle &= \langle (k_2\mathbf{t} + k_1\mathbf{n}_q)', \mathbf{b}_q \rangle \\
&= \langle (k_2\mathbf{t}' + k_1\mathbf{n}_q'), \mathbf{b}_q \rangle \\
&= \langle k_2(k_2\mathbf{t} + k_1\mathbf{n}_q) + k_1(k_3\mathbf{t} - k_1\mathbf{b}_q), \mathbf{b}_q \rangle \\
&= \langle (k_2^2\mathbf{t} + k_1k_2\mathbf{n}_q + k_1k_3\mathbf{t} - k_1^2\mathbf{b}_q), \mathbf{b}_q \rangle \\
&= k_2^2\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle}_{1} + k_1k_2\underbrace{\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle}_{0} + k_1k_3\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle}_{1} - k_1^2\underbrace{\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle}_{0} \\
&= k_2^2 + k_1k_3
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\langle \mathbf{t}'', \mathbf{b}_q \rangle = \langle \mathbf{b}_q'', \mathbf{t} \rangle = k_2^2 + k_1k_3$$

elde edilir.

2) Teorem 4.1.13, **3** şıkkından

$$\langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q \rangle = k_1 \tag{4.44}$$

ve

$$\langle \mathbf{n}_q', \mathbf{t} \rangle = -k_1 \tag{4.45}$$

olduğu biliniyor. (4.44) ve (4.45) eşitliklerinin her iki tarafının türevi alınırsa sırasıyla

$$\langle \mathbf{t}'', \mathbf{n}_q \rangle + \langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q' \rangle = 0$$

ve

$$\langle \mathbf{n}_q'', \mathbf{t} \rangle + \langle \mathbf{n}_q', \mathbf{t}' \rangle = 0$$

bulunur. Son iki eşitlikte $\langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q' \rangle$ ifadeleri birbirine eşit olduğundan

$$\langle \mathbf{t}'', \mathbf{n}_q \rangle = \langle \mathbf{n}_q'', \mathbf{t} \rangle$$

olduğu sonucuna varılır. Buna göre $\langle \mathbf{t}'', \mathbf{n}_q \rangle$ hesaplamak için (4.2) den yararlanılırsa

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{t}'', \mathbf{n}_q \rangle &= \langle (k_2\mathbf{t} + k_1\mathbf{n}_q)', \mathbf{n}_q \rangle \\
&= \left\langle (k_2\mathbf{t}' + k_1\mathbf{n}_q'), \mathbf{n}_q \right\rangle \\
&= \langle k_2(k_2\mathbf{t} + k_1\mathbf{n}_q) + k_1(k_3\mathbf{t} - k_1\mathbf{b}_q), \mathbf{n}_q \rangle \\
&= \langle (k_2^2\mathbf{t} + k_1k_2\mathbf{n}_q + k_1k_3\mathbf{t} - k_1^2\mathbf{b}_q), \mathbf{n}_q \rangle \\
&= k_2^2\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle}_{0} + k_1k_2\underbrace{\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle}_{1} + k_1k_3\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle}_{0} - k_1^2\underbrace{\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{n}_q \rangle}_{0} \\
&= k_1k_2
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\langle \mathbf{t}'', \mathbf{n}_q \rangle = \left\langle \mathbf{n}_q'', \mathbf{t} \right\rangle = k_1k_2$$

elde edilir.

3) Teorem 4.1.13, **4** şıkkından

$$\left\langle \mathbf{n}_q', \mathbf{b}_q \right\rangle = k_3 \tag{4.46}$$

ve

$$\left\langle \mathbf{b}_q', \mathbf{n}_q \right\rangle = -k_3 \tag{4.47}$$

olduğu biliniyor. (4.46) ve (4.47) eşitliğinde her iki tarafın türevi alınırsa sırasıyla

$$\left\langle \mathbf{n}_q'', \mathbf{b}_q \right\rangle + \left\langle \mathbf{n}_q', \mathbf{b}_q' \right\rangle = 0$$

ve

$$\left\langle \mathbf{b}_q'', \mathbf{n}_q \right\rangle + \left\langle \mathbf{b}_q', \mathbf{n}_q' \right\rangle = 0$$

bulunur. Son iki eşitlikte $\left\langle \mathbf{n}_q', \mathbf{b}_q' \right\rangle$ ifadeleri birbirine eşit olduğundan

$$\left\langle \mathbf{n}_q'', \mathbf{b}_q \right\rangle = \left\langle \mathbf{b}_q'', \mathbf{n}_q \right\rangle$$

olduğu sonucuna varılır. Buna göre $\left\langle \mathbf{n}_q'', \mathbf{b}_q \right\rangle$ hesaplamak için (4.2) den yararlanılırsa

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathbf{n}_q'', \mathbf{b}_q \right\rangle &= \langle (k_3\mathbf{t} - k_1\mathbf{b}_q)', \mathbf{b}_q \rangle \\
&= \left\langle (k_3\mathbf{t}' - k_1\mathbf{b}_q'), \mathbf{b}_q \right\rangle \\
&= \langle k_3(k_2\mathbf{t} + k_1\mathbf{n}_q) - k_1(-k_3\mathbf{n}_q - k_2\mathbf{b}_q), \mathbf{b}_q \rangle \\
&= \langle (k_2k_3\mathbf{t} + k_1k_3\mathbf{n}_q + k_1k_3\mathbf{n}_q + k_1k_2\mathbf{b}_q), \mathbf{b}_q \rangle \\
&= k_2k_3\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle}_{1} + k_1k_3\underbrace{\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle}_{0} + k_1k_3\underbrace{\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle}_{0} + k_1k_2\underbrace{\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle}_{0} \\
&= k_2k_3
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\left\langle \mathbf{n}_q'', \mathbf{b}_q \right\rangle = \left\langle \mathbf{b}_q'', \mathbf{n}_q \right\rangle = k_2k_3$$

elde edilir.

4) Teorem 4.1.13, **1** şıkkından

$$\langle \mathbf{t}', \mathbf{t} \rangle = 0 \tag{4.48}$$

olduğu biliniyor. (4.48) eşitliğinin türevi alınırsa

$$\langle \mathbf{t}'', \mathbf{t} \rangle + \langle \mathbf{t}', \mathbf{t}' \rangle = 0$$

elde edilir. Son eşitlikte $\langle \mathbf{t}', \mathbf{t}' \rangle$ ifadesinin eşiti

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}', \mathbf{t}' \rangle &= \langle k_2\mathbf{t} + k_1\mathbf{n}_q, k_2\mathbf{t} + k_1\mathbf{n}_q \rangle \\ &= k_2^2 \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle}_{0} + k_1k_2 \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle}_{0} + k_1k_2 \underbrace{\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{t} \rangle}_{0} + k_1^2 \underbrace{\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle}_{1} \\ &= k_1^2 \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre $\langle \mathbf{t}'', \mathbf{t} \rangle = -k_1^2$ olmalıdır. O halde $\langle \mathbf{t}'', \mathbf{t} \rangle$ hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}'', \mathbf{t} \rangle &= \langle (k_2\mathbf{t} + k_1\mathbf{n}_q)', \mathbf{t} \rangle \\ &= \big\langle (k_2\mathbf{t}' + k_1\mathbf{n}_q'), \mathbf{t} \big\rangle \\ &= \langle (k_2(k_2\mathbf{t} + k_1\mathbf{n}_q) + k_1(k_3\mathbf{t} - k_1\mathbf{b}_q), \mathbf{t} \rangle \\ &= \langle (k_2^2\mathbf{t} + k_1k_2\mathbf{n}_q + k_1k_3\mathbf{t} - k_1^2\mathbf{b}_q), \mathbf{t} \rangle \\ &= k_2^2 \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle}_{0} + k_1k_2 \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle}_{0} + k_1k_3 \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle}_{0} - k_1^2 \underbrace{\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{t} \rangle}_{1} \\ &= -k_1^2 \end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

5) Teorem 4.1.13, **1** şıkkından

$$\big\langle \mathbf{n}_q', \mathbf{n}_q \big\rangle = 0 \tag{4.49}$$

olduğu biliniyor. (4.49) eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\big\langle \mathbf{n}_q'', \mathbf{n}_q \big\rangle + \big\langle \mathbf{n}_q', \mathbf{n}_q' \big\rangle = 0$$

olur. Son eşitlikte $\big\langle \mathbf{n}_q', \mathbf{n}_q' \big\rangle$ ifadesinin eşiti

$$\begin{aligned} \big\langle \mathbf{n}_q', \mathbf{n}_q' \big\rangle &= \langle k_3\mathbf{t} - k_1\mathbf{b}_q, k_3\mathbf{t} - k_1\mathbf{b}_q \rangle \\ &= k_3^2 \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle}_{0} - k_1k_3 \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle}_{1} - k_1k_3 \underbrace{\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{t} \rangle}_{1} + k_1^2 \underbrace{\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle}_{0} \\ &= -2k_1k_3 \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre $\langle \mathbf{n}_q'',\ \mathbf{n}_q\rangle = 2k_1k_3$ olmalıdır. O halde $\langle \mathbf{n}_q'', \mathbf{n}_q\rangle$ hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{n}_q'', \mathbf{n}_q\rangle &= \langle (k_3\mathbf{t} - k_1\mathbf{b}_q)', \mathbf{n}_q\rangle \\
&= \langle (k_3\mathbf{t}' - k_1\mathbf{b}_q'), \mathbf{n}_q\rangle \\
&= \langle (k_3(k_2\mathbf{t} + k_1\mathbf{n}_q) - k_1(-k_3\mathbf{n}_q - k_2\mathbf{b}_q), \mathbf{n}_q\rangle \\
&= \langle (k_2k_3\mathbf{t} + k_1k_3\mathbf{n}_q + k_1k_3\mathbf{n}_q + k_1k_2\mathbf{b}_q), \mathbf{n}_q\rangle \\
&= k_2k_3\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q\rangle}_{0} + k_1k_3\underbrace{\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q\rangle}_{1} + k_1k_3\underbrace{\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q\rangle}_{1} + k_1k_2\underbrace{\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{n}_q\rangle}_{0} \\
&= 2k_1k_3
\end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

6) Teorem 4.1.13, **1** şıkkından

$$\langle \mathbf{b}_q', \mathbf{b}_q\rangle = 0 \tag{4.50}$$

olduğu biliniyor. (4.50) eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\langle \mathbf{b}_q'', \mathbf{b}_q\rangle + \langle \mathbf{b}_q', \mathbf{b}_q'\rangle = 0$$

olur. Son eşitlikte $\langle \mathbf{b}_q', \mathbf{b}_q'\rangle$ ifadesinin eşiti

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{b}_q', \mathbf{b}_q'\rangle &= \langle -k_3\mathbf{n}_q - k_2\mathbf{b}_q, -k_3\mathbf{n}_q - k_2\mathbf{b}_q\rangle \\
&= k_3^2\underbrace{\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q\rangle}_{1} + k_2k_3\underbrace{\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\rangle}_{0} + k_2k_3\underbrace{\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{n}_q\rangle}_{0} + k_2^2\underbrace{\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q\rangle}_{0} \\
&= k_3^2
\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre $\langle \mathbf{b}_q'',\ \mathbf{b}_q\rangle = -k_3^2$ olmalıdır. O halde $\langle \mathbf{b}_q'', \mathbf{b}_q\rangle$ hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{b}_q'', \mathbf{b}_q\rangle &= \langle (-k_3\mathbf{n}_q - k_2\mathbf{b}_q)', \mathbf{b}_q\rangle \\
&= \langle (-k_3\mathbf{n}_q' - k_2\mathbf{b}_q'), \mathbf{b}_q\rangle \\
&= \langle (-k_3(k_3\mathbf{t} - k_1\mathbf{b}_q) - k_2(-k_3\mathbf{n}_q - k_2\mathbf{b}_q), \mathbf{b}_q\rangle \\
&= \langle (-k_3^2\mathbf{t} + k_1k_3\mathbf{b}_q + k_2k_3\mathbf{n}_q + k_2^2\mathbf{b}_q), \mathbf{b}_q\rangle \\
&= -k_3^2\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q\rangle}_{1} + k_1k_3\underbrace{\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q\rangle}_{0} + k_2k_3\underbrace{\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\rangle}_{0} + k_2^2\underbrace{\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q\rangle}_{0} \\
&= -k_3^2
\end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.15. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında bir null eğrinin teğet, $\mathbf{n}_q$ null ve $\mathbf{b}_q$ spacelike vektörleri arasında

1) $\langle \mathbf{t}'', \mathbf{b}_q\rangle = k_1k_2 + k_2'$ ve $\langle \mathbf{b}_q'', \mathbf{t}\rangle = -k_2' + k_1k_2$

2) $\langle \mathbf{t}'', \mathbf{n}_q\rangle = k_1' + k_1^2 - k_2k_3$ ve $\langle \mathbf{n}_q'', \mathbf{t}\rangle = -k_1' + k_1^2 - k_2k_3$

3) $\langle \mathbf{n}_q'', \mathbf{b}_q\rangle = -k_1k_3 + k_3'$ ve $\langle \mathbf{b}_q'', \mathbf{n}_q\rangle = -k_3' - k_1k_3$

4) $\langle \mathbf{t}'', \mathbf{t}\rangle = -k_2^2$

5) $\langle \mathbf{n}_q'', \mathbf{n}_q\rangle = -k_3^2$

6) $\langle \mathbf{b}_q'', \mathbf{b}_q\rangle = -2k_2k_3$

bağıntıları vardır. Burada k_1, k_2, k_3 q-eğrilikleridir.

İspat: 1) Teorem 4.1.13, **2** şıkkından

$$\langle \mathbf{t}', \mathbf{b}_q \rangle = k_2 \tag{4.51}$$

ve

$$\langle \mathbf{b}_q', \mathbf{t} \rangle = -k_2 \tag{4.52}$$

olduğu biliniyor. (4.51) ve (4.52) eşitliğinde her iki tarafın türevi alınırsa sırasıyla

$$\langle \mathbf{t}'', \mathbf{b}_q \rangle + \langle \mathbf{t}', \mathbf{b}_q' \rangle = k_2' \tag{4.53}$$

ve

$$\langle \mathbf{b}_q'', \mathbf{t} \rangle + \langle \mathbf{b}_q', \mathbf{t}' \rangle = -k_2' \tag{4.54}$$

bulunur. (4.53) ve (4.54) eşitliğinde $\langle \mathbf{t}'', \mathbf{b}_q \rangle$ ve $\langle \mathbf{b}_q'', \mathbf{t} \rangle$ yalnız bırakılarak

$$\langle \mathbf{t}'', \mathbf{b}_q \rangle = k_2' - \langle \mathbf{t}', \mathbf{b}_q' \rangle \tag{4.55}$$

ve

$$\langle \mathbf{b}_q'', \mathbf{t} \rangle = -k_2' - \langle \mathbf{t}', \mathbf{b}_q' \rangle \tag{4.56}$$

elde edilir. Buna göre $\langle \mathbf{t}'', \mathbf{b}_q \rangle$ skaler çarpımını hesaplamak için (4.7) eşitliklerinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{t}'', \mathbf{b}_q \rangle &= \langle (k_1\mathbf{t}+k_2\mathbf{b}_q)', \mathbf{b}_q \rangle \\
&= \langle (k_1'\mathbf{t}+k_1\mathbf{t}'+k_2'\mathbf{b}_q + k_2\mathbf{b}_q'), \mathbf{b}_q \rangle \\
&= \langle (k_1'\mathbf{t}+k_1(k_1\mathbf{t}+k_2\mathbf{b_q})+k_2'\mathbf{b}_q + k_2(-k_3\mathbf{t} - k_2\mathbf{n}_q)), \mathbf{b}_q \rangle \\
&= \langle (k_1'\mathbf{t}+k_1^2\mathbf{t} + k_1k_2\mathbf{b}_q + k_2'\mathbf{b}_q - k_2k_3\mathbf{t} - k_2^2\mathbf{n}_q), \mathbf{b}_q \rangle \\
&= \langle ((k_1'+k_1^2 - k_2k_3)\mathbf{t} + (-k_2^2)\mathbf{n}_q + (k_1k_2 + k_2')\mathbf{b}_q), \mathbf{b}_q \rangle \\
&= k_1k_2 + k_2'
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde $\langle \mathbf{b}_q'', \mathbf{t} \rangle$ skaler çarpımını hesaplarsak

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{b}_q'', \mathbf{t} \rangle &= \langle (-k_3\mathbf{t}-k_2\mathbf{n}_q)', \mathbf{t} \rangle \\
&= \langle (-k_3'\mathbf{t}-k_3\mathbf{t}'-k_2'\mathbf{n}_q - k_2\mathbf{n}_q'), \mathbf{t} \rangle \\
&= \langle (-k_3'\mathbf{t}-k_3(k_1\mathbf{t}+k_2\mathbf{b_q})-k_2'\mathbf{n}_q - k_2(-k_1\mathbf{n}_q + k_3\mathbf{b}_q)), \mathbf{t} \rangle \\
&= \langle (-k_3'\mathbf{t}-k_1k_3\mathbf{t} - k_2k_3\mathbf{b}_q - k_2'\mathbf{n}_q + k_1k_2\mathbf{n}_q - k_2k_3\mathbf{b}_q), \mathbf{t} \rangle \\
&= \langle ((-k_3'-k_1k_3)\mathbf{t} + (-k_2' + k_1k_2)\mathbf{n}_q + (-k_2k_3 - k_2k_3)\mathbf{b}_q), \mathbf{t} \rangle \\
&= k_1k_2 - k_2'
\end{aligned}$$

olur. Son olarak $\langle \mathbf{t}', \mathbf{b}_q' \rangle$ skaler çarpımını hesaplarsak

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{t}', \mathbf{b}_q' \rangle &= \langle (k_1\mathbf{t}+k_2\mathbf{b}_q), (-k_3\mathbf{t} - k_2\mathbf{n}_q) \rangle \\
&= -k_1k_3 \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle - k_1k_2 \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle - k_2k_3 \langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle - k_2^2 \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle \\
&= -k_1k_2
\end{aligned}$$

olup bulunan değerler (4.55) ve (4.56) eşitliklerinde yerine yazılırsa sırasıyla

$$k_1k_2 + k_2' = k_2' - (-k_1k_2)$$

ve

$$k_1k_2 - k_2' = -k_2' - (-k_1k_2)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

2) Teorem 4.1.13, **3** şıkkından

$$\langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q \rangle = k_1 \tag{4.57}$$

ve

$$\langle \mathbf{n}_q', \mathbf{t} \rangle = -k_1 \tag{4.58}$$

olduğu biliniyor. (4.57) ve (4.58) eşitliğinde her iki tarafın türevi alınırsa sırasıyla

$$\langle \mathbf{t}'', \mathbf{n}_q \rangle + \langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q' \rangle = k_1' \tag{4.59}$$

ve

$$\langle \mathbf{n}_q'', \mathbf{t} \rangle + \langle \mathbf{n}_q', \mathbf{t}' \rangle = -k_1' \tag{4.60}$$

bulunur. (4.59) ve (4.60) eşitliğinde $\langle \mathbf{t}'', \mathbf{n}_q \rangle$ ve $\langle \mathbf{n}_q'', \mathbf{t} \rangle$ yalnız bırakılarak

$$\langle \mathbf{t}'', \mathbf{n}_q \rangle = k_1' - \langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q' \rangle \tag{4.61}$$

ve

$$\langle \mathbf{n}_q'', \mathbf{t} \rangle = -k_1' - \langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q' \rangle \tag{4.62}$$

elde edilir. Buna göre $\langle \mathbf{t}'', \mathbf{n}_q \rangle$ skaler çarpımını hesaplamak için (4.7) eşitliklerinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{t}'', \mathbf{n}_q \rangle &= \langle (k_1\mathbf{t}+k_2\mathbf{b}_q)', \mathbf{n}_q \rangle \\
&= \langle (k_1'\mathbf{t}+k_1\mathbf{t}'+k_2'\mathbf{b}_q + k_2\mathbf{b}_q'), \mathbf{n}_q \rangle \\
&= \langle (k_1'\mathbf{t}+k_1(k_1\mathbf{t}+k_2\mathbf{b_q})+k_2'\mathbf{b}_q + k_2(-k_3\mathbf{t} - k_2\mathbf{n}_q)), \mathbf{n}_q \rangle \\
&= \langle (k_1'\mathbf{t}+k_1^2\mathbf{t} + k_1k_2\mathbf{b}_q + k_2'\mathbf{b}_q - k_2k_3\mathbf{t} - k_2^2\mathbf{n}_q), \mathbf{n}_q \rangle \\
&= \langle ((k_1'+k_1^2 - k_2k_3)\mathbf{t} + (-k_2^2)\mathbf{n}_q + (k_1k_2 + k_2')\mathbf{b}_q), \mathbf{n}_q \rangle \\
&= k_1'+k_1^2 - k_2k_3
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{n}_q'', \mathbf{t} \rangle &= \langle (-k_1\mathbf{n}_q+k_3\mathbf{b}_q)', \mathbf{t} \rangle \\
&= \langle (-k_1'\mathbf{n}_q - k_1\mathbf{n}_q'+k_3'\mathbf{b}_q+k_3\mathbf{b}_q'), \mathbf{t} \rangle \\
&= \langle (-k_1'\mathbf{n}_q - k_1(- k_1\mathbf{n_q} + k_3\mathbf{b_q})+k_3'\mathbf{b}_q+k_3(- k_3\mathbf{t} - k_2\mathbf{n_q})), \mathbf{t} \rangle \\
&= \langle (-k_1'\mathbf{n}_q+k_1^2\mathbf{n}_q - k_1k_3\mathbf{b}_q + k_3'\mathbf{b}_q - k_3^2\mathbf{t} - k_2k_3\mathbf{n}_q), \mathbf{t} \rangle \\
&= \langle ((-k_3^2)\mathbf{t} + (-k_1'+k_1^2 - k_2k_3)\mathbf{n}_q + (-k_1k_3 + k_3')\mathbf{b}_q), \mathbf{t} \rangle \\
&= -k_1'+k_1^2 - k_2k_3
\end{aligned}$$

olur. Son olarak

$$\begin{aligned}\left\langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q' \right\rangle &= \langle (k_1\mathbf{t}+k_2\mathbf{b}_q), (-k_1\mathbf{n}_q+k_3\mathbf{b}_q) \rangle \\ &= -k_1^2\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle + k_1k_3\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle - k_1k_2\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle + k_2k_3\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle \\ &= -k_1^2 + k_2k_3\end{aligned}$$

olup bulunan değerler (4.61) ve (4.62) eşitliklerinde yerine yazılırsa sırasıyla

$$k_1'+k_1^2 - k_2k_3 = k_1' - (-k_1^2 + k_2k_3)$$

ve

$$-k_1'+k_1^2 - k_2k_3 = -k_1' - (-k_1^2 + k_2k_3)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

3) Teorem 4.1.13, **4** şıkkından

$$\left\langle \mathbf{n}_q', \mathbf{b}_q \right\rangle = k_3 \tag{4.63}$$

ve

$$\left\langle \mathbf{b}_q', \mathbf{n}_q \right\rangle = -k_3 \tag{4.64}$$

olduğu biliniyor. (4.63) ve (4.64) eşitliğinde her iki tarafın türevi alınırsa sırasıyla

$$\left\langle \mathbf{n}_q'', \mathbf{b}_q \right\rangle + \left\langle \mathbf{n}_q', \mathbf{b}_q' \right\rangle = k_3' \tag{4.65}$$

ve

$$\left\langle \mathbf{b}_q'', \mathbf{n}_q \right\rangle + \left\langle \mathbf{b}_q', \mathbf{n}_q' \right\rangle = -k_3' \tag{4.66}$$

bulunur. (4.65) ve (4.66) eşitliğinde $\left\langle \mathbf{n}_q'', \mathbf{b}_q \right\rangle$ ve $\left\langle \mathbf{b}_q'', \mathbf{n}_q \right\rangle$ yalnız bırakılarak

$$\left\langle \mathbf{n}_q'', \mathbf{b}_q \right\rangle = k_3' - \left\langle \mathbf{n}_q', \mathbf{b}_q' \right\rangle \tag{4.67}$$

ve

$$\left\langle \mathbf{b}_q'', \mathbf{n}_q \right\rangle = -k_3' - \left\langle \mathbf{n}_q', \mathbf{b}_q' \right\rangle \tag{4.68}$$

elde edilir. Buna göre $\left\langle \mathbf{n}_q'', \mathbf{b}_q \right\rangle$ skaler çarpımını hesaplamak için (4.7) eşitliklerinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned}\left\langle \mathbf{n}_q'', \mathbf{b}_q \right\rangle &= \langle (-k_1\mathbf{n}_q+k_3\mathbf{b}_q)', \mathbf{b}_q \rangle \\ &= \left\langle (-k_1'\mathbf{n}_q - k_1\mathbf{n}_q'+k_3'\mathbf{b}_q+k_3\mathbf{b}_q'), \mathbf{b}_q \right\rangle \\ &= \langle (-k_1'\mathbf{n}_q - k_1(-k_1\mathbf{n_q}+k_3\mathbf{b_q})+k_3'\mathbf{b}_q+k_3(-k_3\mathbf{t}-k_2\mathbf{n_q})), \mathbf{b}_q \rangle \\ &= \langle (-k_1'\mathbf{n}_q+k_1^2\mathbf{n}_q - k_1k_3\mathbf{b}_q + k_3'\mathbf{b}_q - k_3^2\mathbf{t} - k_2k_3\mathbf{n}_q), \mathbf{b}_q \rangle \\ &= \langle ((-k_3^2)\mathbf{t} + (-k_1'+k_1^2 - k_2k_3)\mathbf{n}_q + (-k_1k_3 + k_3')\mathbf{b}_q), \mathbf{b}_q \rangle \\ &= -k_1k_3 + k_3'\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\left\langle \mathbf{b}_q'', \mathbf{n}_q \right\rangle &= \langle (-k_3\mathbf{t}-k_2\mathbf{n}_q)', \mathbf{n}_q \rangle \\ &= \left\langle (-k_3'\mathbf{t}-k_3\mathbf{t}'-k_2'\mathbf{n}_q - k_2\mathbf{n}_q'), \mathbf{n}_q \right\rangle \\ &= \langle (-k_3'\mathbf{t}-k_3(k_1\mathbf{t}+k_2\mathbf{b_q})-k_2'\mathbf{n}_q - k_2(-k_1\mathbf{n}_q + k_3\mathbf{b}_q)), \mathbf{n}_q \rangle \\ &= \langle (-k_3'\mathbf{t}-k_1k_3\mathbf{t} - k_2k_3\mathbf{b}_q - k_2'\mathbf{n}_q + k_1k_2\mathbf{n}_q - k_2k_3\mathbf{b}_q), \mathbf{n}_q \rangle \\ &= \langle ((-k_3'-k_1k_3)\mathbf{t} + (-k_2' + k_1k_2)\mathbf{n}_q + (-k_2k_3 - k_2k_3)\mathbf{b}_q), \mathbf{n}_q \rangle \\ &= -k_3'-k_1k_3\end{aligned}$$

olur. Son olarak

$$\begin{aligned}\left\langle \mathbf{n}_q', \mathbf{b}_q' \right\rangle &= \langle (-k_1\mathbf{n}_q + k_3\mathbf{b}_q), (-k_3\mathbf{t} - k_2\mathbf{n}_q) \rangle \\ &= k_1k_3 \left\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \right\rangle + k_1k_2 \left\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \right\rangle - k_3^2 \left\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \right\rangle - k_2k_3 \left\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \right\rangle \\ &= k_1k_3\end{aligned}$$

olup bulunan değerler (4.67) ve (4.68) eşitliklerinde yerine yazılırsa sırasıyla

$$-k_1k_3 + k_3' = k_3' - (k_1k_3)$$

ve

$$-k_3'-k_1k_3 = -k_3' - (k_1k_3)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

4) Teorem 4.1.13, **1** şıkkından

$$\langle \mathbf{t}', \mathbf{t} \rangle = 0 \tag{4.69}$$

olduğu biliniyor. (4.69) eşitliğinin türevi alınırsa

$$\langle \mathbf{t}'', \mathbf{t} \rangle + \langle \mathbf{t}', \mathbf{t}' \rangle = 0$$

elde edilir. Son eşitlikte

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{t}', \mathbf{t}' \rangle &= \langle (k_1\mathbf{t} + k_2\mathbf{b}_q), (k_1\mathbf{t} + k_2\mathbf{b}_q) \rangle \\ &= k_1^2\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle}_{0} + k_1k_2\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle}_{0} + k_1k_2\underbrace{\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{t} \rangle}_{0} + k_2^2\underbrace{\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle}_{1} \\ &= k_2^2\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre $\langle \mathbf{t}'', \mathbf{t} \rangle = -k_2^2$ olmalıdır. O halde

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{t}'', \mathbf{t} \rangle &= \langle (k_1\mathbf{t} + k_2\mathbf{b}_q)', \mathbf{t} \rangle \\ &= \left\langle (k_1'\mathbf{t}+k_1\mathbf{t}' + k_2'\mathbf{b}_q+k_2\mathbf{b}_q'), \mathbf{t} \right\rangle \\ &= \langle k_1'\mathbf{t}+k_1(k_1\mathbf{t} + k_2\mathbf{b}_q) + k_2'\mathbf{b}_q+k_2(-k_3\mathbf{t}-k_2\mathbf{n}_q), \mathbf{t} \rangle \\ &= \langle ((k_1' + k_1^2 - k_2k_3)\mathbf{t} + (-k_2^2)\mathbf{n}_q + (k_1k_2 + k_2')\mathbf{b}_q), \mathbf{t} \rangle \\ &= (k_1' + k_1^2 - k_2k_3)\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle}_{0} + (-k_2^2)\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle}_{1} + (k_1k_2 + k_2')\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle}_{0} \\ &= -k_2^2\end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

5) Teorem 4.1.13, **1** şıkkından

$$\langle \mathbf{n}_q', \mathbf{n}_q \rangle = 0 \tag{4.70}$$

olduğu biliniyor. (4.70) eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\langle \mathbf{n}_q'', \mathbf{n}_q \rangle + \langle \mathbf{n}_q', \mathbf{n}_q' \rangle = 0$$

olur. Son eşitlikte

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}_q', \mathbf{n}_q' \rangle &= \langle (-k_1\mathbf{n}_q + k_3\mathbf{b}_q), (-k_1\mathbf{n}_q + k_3\mathbf{b}_q) \rangle \\ &= k_1^2 \underbrace{\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle}_{0} - 2k_1k_3 \underbrace{\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle}_{0} + k_3^2 \underbrace{\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle}_{1} \\ &= k_3^2 \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre $\langle \mathbf{n}_q'',\ \mathbf{n}_q \rangle = -k_3^2$ olmalıdır. O halde

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}_q'', \mathbf{n}_q \rangle &= \langle (-k_1\mathbf{n}_q + k_3\mathbf{b}_q)', \mathbf{n}_q \rangle \\ &= \langle (-k_1'\mathbf{n}_q - k_1\mathbf{n}_q' + k_3'\mathbf{b}_q + k_3\mathbf{b}_q'), \mathbf{n}_q \rangle \\ &= \langle (-k_1'\mathbf{n}_q - k_1(-k_1\mathbf{n}_q + k_3\mathbf{b}_q) + k_3'\mathbf{b}_q + k_3(-k_3\mathbf{t} - k_2\mathbf{n}_q)), \mathbf{n}_q \rangle \\ &= \langle (-k_3^2\mathbf{t} + (-k_1' + k_1^2 - k_2k_3)\mathbf{n}_q + (k_1k_3 + k_3')\mathbf{b}_q), \mathbf{n}_q \rangle \\ &= -k_3^2 \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle}_{1} + (-k_1' + k_1^2 - k_2k_3) \underbrace{\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle}_{0} + (k_1k_3 + k_3') \underbrace{\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{n}_q \rangle}_{0} \\ &= -k_3^2 \end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

6) Teorem 4.1.13, **1** şıkkından

$$\langle \mathbf{b}_q', \mathbf{b}_q \rangle = 0 \tag{4.71}$$

olduğu biliniyor. (4.71) eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\langle \mathbf{b}_q'', \mathbf{b}_q \rangle + \langle \mathbf{b}_q', \mathbf{b}_q' \rangle = 0$$

olur. Son eşitlikte

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}_q', \mathbf{b}_q' \rangle &= \langle (-k_3\mathbf{t} - k_2\mathbf{n}_q), (-k_3\mathbf{t} - k_2\mathbf{n}_q) \rangle \\ &= k_3^2 \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle}_{0} + k_2k_3 \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle}_{1} + k_2k_3 \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle}_{1} + k_2^2 \underbrace{\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle}_{0} \\ &= 2k_2k_3 \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre $\langle \mathbf{b}_q'',\ \mathbf{b}_q \rangle = -2k_2k_3$ olmalıdır. O halde

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{b}_q'', \mathbf{b}_q \rangle &= \langle (-k_3\mathbf{t} - k_2\mathbf{n}_q)', \mathbf{b}_q \rangle \\
&= \langle (-k_3'\mathbf{t} - k_3\mathbf{t}' - k_2'\mathbf{n}_q - k_2\mathbf{n}_q'), \mathbf{b}_q \rangle \\
&= \langle (-k_3'\mathbf{t} - k_3(k_1\mathbf{t}+k_2\mathbf{b}_q) - k_2'\mathbf{n}_q - k_2(-k_1\mathbf{n}_q + k_3\mathbf{b}_q)), \mathbf{b}_q \rangle \\
&= \langle ((-k_3' - k_1k_3)\mathbf{t} + (-k_2' + k_1k_2)\mathbf{n}_q + (-k_2k_3 - k_2k_3)\mathbf{b}_q), \mathbf{b}_q \rangle \\
&= (-k_3' - k_1k_3)\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle}_{0} + (-k_2' + k_1k_2)\underbrace{\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle}_{0} + (-k_2k_3 - k_2k_3)\underbrace{\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle}_{1} \\
&= -2k_2k_3
\end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.16. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında bir null eğrinin $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}_q$ null ve $\mathbf{b}_q$ spacelike vektörleri arasında

1) $\langle \mathbf{t}'', \mathbf{b}_q \rangle = \langle \mathbf{b}_q'', \mathbf{t} \rangle = k_1k_2$
2) $\langle \mathbf{t}'', \mathbf{n}_q \rangle = \langle \mathbf{n}_q'', \mathbf{t} \rangle = k_1^2 - k_2k_3$
3) $\langle \mathbf{n}_q'', \mathbf{b}_q \rangle = \langle \mathbf{b}_q'', \mathbf{n}_q \rangle = -k_1k_3$
4) $\langle \mathbf{t}'', \mathbf{t} \rangle = -k_2^2$
5) $\langle \mathbf{n}_q'', \mathbf{n}_q \rangle = -k_3^2$
6) $\langle \mathbf{b}_q'', \mathbf{b}_q \rangle = -2k_2k_3$

bağıntıları vardır. Burada k_1, k_2, k_3 sabit q-eğrilikleridir.

İspat: 1) k_2 eğriliği sabit olduğundan $k_2' = 0$ olur. Bu durumda Teorem 4.1.15, **1** şıkkında genel hali

$$\langle \mathbf{t}'', \mathbf{b}_q \rangle = k_1k_2 + k_2' \ ve\ \langle \mathbf{b}_q'', \mathbf{t} \rangle = -k_2' + k_1k_2$$

olarak verilen ifadede $k_2' = 0$ değeri yerine yazılarak

$$\langle \mathbf{t}'', \mathbf{b}_q \rangle = \langle \mathbf{b}_q'', \mathbf{t} \rangle = k_1k_2$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

2) k_1 eğriliği sabit olduğundan $k_1' = 0$ olur. Bu durumda Teorem 4.1.15, **2** şıkkında genel hali

$$\langle \mathbf{t}'', \mathbf{n}_q \rangle = k_1' + k_1^2 - k_2k_3 \ ve\ \langle \mathbf{n}_q'', \mathbf{t} \rangle = -k_1' + k_1^2 - k_2k_3$$

olarak verilen ifadede $k_1' = 0$ değeri yerine yazılarak

$$\langle \mathbf{t}'', \mathbf{n}_q \rangle = \langle \mathbf{n}_q'', \mathbf{t} \rangle = k_1^2 - k_2k_3$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

3) k_3 eğriliği sabit olduğundan $k_3' = 0$ olur. Bu durumda Teorem 4.1.15, **3** şıkkında genel hali

$$\left\langle \mathbf{n}_q'', \mathbf{b}_q \right\rangle = -k_1 k_3 + k_3' \; ve \; \left\langle \mathbf{b}_q'', \mathbf{n}_q \right\rangle = -k_3' - k_1 k_3$$

olarak verilen ifadede $k_3' = 0$ değeri yerine yazılarak

$$\left\langle \mathbf{n}_q'', \mathbf{b}_q \right\rangle = \left\langle \mathbf{b}_q'', \mathbf{n}_q \right\rangle = -k_1 k_3$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

4) Teorem 4.1.15, **4** şıkkındaki işlem adımları uygulandığında k_1 ve k_2 sabit olduğu için türevi sıfırdır ve bu durumda

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{t}'', \mathbf{t} \rangle &= \langle (k_1 \mathbf{t} + k_2 \mathbf{b}_q)', \mathbf{t} \rangle \\
&= \left\langle (k_1 \mathbf{t}' + k_2 \mathbf{b}_q'), \mathbf{t} \right\rangle \\
&= \langle k_1(k_1 \mathbf{t} + k_2 \mathbf{b}_q) + k_2(-k_3 \mathbf{t} - k_2 \mathbf{n}_q), \mathbf{t} \rangle \\
&= \langle ((k_1^2 - k_2 k_3)\mathbf{t} + (-k_2^2)\mathbf{n}_q + (k_1 k_2)\mathbf{b}_q), \mathbf{t} \rangle \\
&= (k_1^2 - k_2 k_3)\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle}_{0} + (-k_2^2)\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle}_{1} + (k_1 k_2)\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle}_{0} \\
&= -k_2^2
\end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

5) Teorem 4.1.15, **5** şıkkındaki işlem adımları uygulandığında k_1 ve k_3 sabit olduğu için türevi sıfırdır ve bu durumda

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathbf{n}_q'', \mathbf{n}_q \right\rangle &= \langle (-k_1 \mathbf{n}_q + k_3 \mathbf{b}_q)', \mathbf{n}_q \rangle \\
&= \left\langle (-k_1 \mathbf{n}_q' + k_3 \mathbf{b}_q'), \mathbf{n}_q \right\rangle \\
&= \langle (-k_1(-k_1 \mathbf{n}_q + k_3 \mathbf{b}_q) + k_3(-k_3 \mathbf{t} - k_2 \mathbf{n}_q)), \mathbf{n}_q \rangle \\
&= \langle (-k_3^2 \mathbf{t} + (k_1^2 - k_2 k_3)\mathbf{n}_q + (-k_1 k_3)\mathbf{b}_q), \mathbf{n}_q \rangle \\
&= -k_3^2 \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle}_{1} + (k_1^2 - k_2 k_3)\underbrace{\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle}_{0} + (-k_1 k_3)\underbrace{\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{n}_q \rangle}_{0} \\
&= -k_3^2
\end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

6) Teorem 4.1.15, **6** şıkkındaki işlem adımları uygulandığında k_2 ve k_3 sabit olduğu için türevi sıfırdır ve bu durumda

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathbf{b}_q'', \mathbf{b}_q \right\rangle &= \langle (-k_3 \mathbf{t} - k_2 \mathbf{n}_q)', \mathbf{b}_q \rangle \\
&= \left\langle (-k_3 \mathbf{t}' - k_2 \mathbf{n}_q'), \mathbf{b}_q \right\rangle \\
&= \langle (-k_3(k_1 \mathbf{t} + k_2 \mathbf{b}_q) - k_2(-k_1 \mathbf{n}_q + k_3 \mathbf{b}_q)), \mathbf{b}_q \rangle \\
&= \langle ((-k_1 k_3)\mathbf{t} + (k_1 k_2)\mathbf{n}_q + (-k_2 k_3 - k_2 k_3)\mathbf{b}_q), \mathbf{b}_q \rangle \\
&= (-k_1 k_3)\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle}_{0} + (k_1 k_2)\underbrace{\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle}_{0} + (-k_2 k_3 - k_2 k_3)\underbrace{\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle}_{1} \\
&= -2 k_2 k_3
\end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

4.2. Spacelike Eğriler için Pseudo Null Quasi-Çatı

Bu kısımda pseudo null quasi-çatı yapısı için **k** izdüşüm vektörünün null olması durumu ile $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle = 0$ şartı bir arada incelediğinde $\mathbf{n}_q$ null ve $\mathbf{b}_q$ null olacak şekilde bir tek durum elde edilir. Bu durum incelenerek pseudo null quasi-çatı yapısı için türev denklemleri ve vektörel çarpım hesabı yer almaktadır. Ayrıca pseudo null quasi-çatı yapısı için örneklere yer verilmiştir**.**

Minkowski uzayında yönlü pseudo null eğrileri hesaplayabilmek için öncelikle pseudo null quasi-çatı tanımlama algoritması verilecektir.

Teorem 4.2.1. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında **t** spacelike, **n** ve **b** null, **k** null, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle = 0$ olmak üzere $\mathbf{n}_q$ ve $\mathbf{b}_q$ null olması durumunda pseudo null eğri boyunca quasi-çatının türev denklemi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}_q' \\ \mathbf{b}_q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_2 & k_1 \\ -k_1 & k_3 & 0 \\ -k_2 & 0 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix}$$

olup, burada

$$\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle = \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle = 0, \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 1$$

ve

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle = 0, \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle = 1$$

olarak ifade edilir.

İspat:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazıp katsayıları hesaplayalım. Öncelikle

$$\mathbf{t}' = a_{11}\mathbf{t} + a_{12}\mathbf{n} + a_{13}\mathbf{b}$$

ifadesinin her iki tarafını sırasıyla **t**, **n** ve **b** ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}', \mathbf{t} \rangle &= \langle a_{11}\mathbf{t} + a_{12}\mathbf{n} + a_{13}\mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle \\ &= a_{11}\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle}_{1} + a_{12}\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle}_{0} + a_{13}\underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle}_{0} \\ &= a_{11} \end{aligned}$$

olup $\langle \mathbf{t}', \mathbf{t} \rangle = 0$ olduğundan $a_{11} = 0$ olarak bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}', \mathbf{n} \rangle &= \langle a_{11}\mathbf{t} + a_{12}\mathbf{n} + a_{13}\mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle \\ &= a_{11}\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle}_{0} + a_{12}\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle}_{0} + a_{13}\underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle}_{1} \\ &= a_{13} \end{aligned}$$

olur. Ek olarak

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}', \mathbf{b} \rangle &= \langle a_{11}\mathbf{t} + a_{12}\mathbf{n} + a_{13}\mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \\ &= a_{11}\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle}_{0} + a_{12}\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle}_{1} + a_{13}\underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle}_{0} \\ &= a_{12} \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi de

$$\mathbf{n}' = a_{21}\mathbf{t} + a_{22}\mathbf{n} + a_{23}\mathbf{b}$$

ifadesinin her iki tarafını sırasıyla $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ ve $\mathbf{b}$ ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}', \mathbf{t} \rangle &= \langle a_{21}\mathbf{t} + a_{22}\mathbf{n} + a_{23}\mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle \\ &= a_{21}\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle}_{1} + a_{22}\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle}_{0} + a_{23}\underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle}_{0} \\ &= a_{21} \end{aligned}$$

olup

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle = 0$$

iç çarpımının her iki tarafının türevi alınırsa

$$\underbrace{\langle \mathbf{t}', \mathbf{n} \rangle}_{a_{13}} + \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}' \rangle}_{a_{21}} = 0$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}', \mathbf{n} \rangle &= \langle \kappa\mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \\ &= \kappa \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece $a_{13} = 0$ ve $a_{21} = 0$ olarak bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle &= \langle a_{21}\mathbf{t} + a_{22}\mathbf{n} + a_{23}\mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle \\ &= a_{21}\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle}_{0} + a_{22}\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle}_{0} + a_{23}\underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle}_{1} \\ &= a_{23} \end{aligned}$$

olup

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 0$$

iç çarpımının her iki tarafının türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle + \langle \mathbf{n}, \mathbf{n}' \rangle &= 0 \\ 2\langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $a_{23} = 0$ olarak bulunur. Ek olarak

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}', \mathbf{b} \rangle &= \langle a_{21}\mathbf{t} + a_{22}\mathbf{n} + a_{23}\mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \\ &= a_{21}\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle}_{0} + a_{22}\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle}_{1} + a_{23}\underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle}_{0} \\ &= a_{22} \end{aligned}$$

olup $\langle \mathbf{n}', \mathbf{b} \rangle = \tau$ olduğundan $a_{22} = \tau$ olarak bulunur.

Son olarak

$$\mathbf{b}' = a_{31}\mathbf{t} + a_{32}\mathbf{n} + a_{33}\mathbf{b}$$

ifadesinin her iki tarafını sırasıyla $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ ve $\mathbf{b}$ ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}', \mathbf{t} \rangle &= \langle a_{31}\mathbf{t} + a_{32}\mathbf{n} + a_{33}\mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle \\ &= a_{31}\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle}_{1} + a_{32}\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle}_{0} + a_{33}\underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle}_{0} \\ &= a_{31} \end{aligned}$$

olup

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle = 0$$

ifadesinin her iki tarafının türevini alırsak

$$\underbrace{\langle \mathbf{b}', \mathbf{t} \rangle}_{a_{31}} + \underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{t}' \rangle}_{a_{12}} = 0$$

bulunur ve burada

$$\langle \mathbf{t}', \mathbf{b} \rangle = \kappa$$

olduğundan

$$a_{12} = \kappa \text{ ve } a_{31} = -\kappa$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}', \mathbf{n} \rangle &= \langle a_{31}\mathbf{t} + a_{32}\mathbf{n} + a_{33}\mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle \\ &= a_{31}\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle}_{0} + a_{32}\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle}_{0} + a_{33}\underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle}_{1} \\ &= a_{33} \end{aligned}$$

olup

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle = 0$$

iç çarpımının her iki tarafının türevi alınırsa

$$\langle \mathbf{b}', \mathbf{n} \rangle + \underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{n}' \rangle}_{\tau} = 0$$

olduğundan $\langle \mathbf{b}', \mathbf{n} \rangle = -\tau$ olur. Böylece $a_{33} = -\tau$ olarak bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}', \mathbf{b} \rangle &= \langle a_{31}\mathbf{t} + a_{32}\mathbf{n} + a_{33}\mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \\ &= a_{31}\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle}_{0} + a_{32}\underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle}_{1} + a_{33}\underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle}_{0} \\ &= a_{32} \end{aligned}$$

olup

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = 0$$

iç çarpımının her iki tarafının türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}', \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b}' \rangle &= 0 \\ 2\langle \mathbf{b}', \mathbf{b} \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{b}', \mathbf{b} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $a_{32} = 0$ olarak bulunur.

Bulunan katsayılar yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ 0 & \tau(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & -\tau(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \tag{4.72}$$

olur.

İlk olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= a_{11}\mathbf{t} + a_{12}\mathbf{n}_q + a_{13}\mathbf{b}_q \\ \mathbf{n}_q' &= a_{21}\mathbf{t} + a_{22}\mathbf{n}_q + a_{23}\,\mathbf{b}_q \\ \mathbf{b}_q' &= a_{31}\mathbf{t} + a_{32}\mathbf{n}_q + a_{33}\,\mathbf{b}_q \end{aligned} \tag{4.73}$$

şeklinde yazarak katsayıları hesaplamak için (4.73) denkleminde skaler çarpım kullanılırsa

$$\langle \mathbf{t}', \mathbf{t} \rangle = a_{11}\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + a_{12}\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{t} \rangle + a_{13}\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{t} \rangle = a_{11}$$

bulunur ve $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle' = 0$ olduğundan

$$a_{11} = 0$$

elde edilir. Benzer işlemler yapılarak

$$\langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q \rangle = a_{11}\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle + a_{12}\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle + a_{13}\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{n}_q \rangle = a_{13}$$

ve

$$\langle \mathbf{t}', \mathbf{b}_q \rangle = a_{11}\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle + a_{12}\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle + a_{13}\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = a_{12}$$

olur. a_{21}, a_{22}, a_{23} değerlerini hesaplamak için benzer şekilde (4.73) denklemindeki $\mathbf{n}'_q$ ifadesi sırasıyla $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}_q$,$\mathbf{b}_q$ vektörleriyle skaler olarak çarpılırsa

$$\left\langle \mathbf{n}'_q, \mathbf{t} \right\rangle = a_{21} \left\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \right\rangle + a_{22} \left\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{t} \right\rangle + a_{23} \left\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{t} \right\rangle = a_{21}$$

ve

$$\left\langle \mathbf{n}'_q, \mathbf{n}_q \right\rangle = a_{21} \left\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \right\rangle + a_{22} \left\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \right\rangle + a_{23} \left\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{n}_q \right\rangle = a_{23}$$

olup burada $\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle' = 0$ olduğundan

$$a_{23} = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\left\langle \mathbf{n}'_q, \mathbf{b}_q \right\rangle = a_{21} \left\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \right\rangle + a_{22} \left\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \right\rangle + a_{23} \left\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \right\rangle = a_{23}$$

bulunur.

Son olarak (4.73) denklemindeki $\mathbf{b}'_q$ katsayılarını hesaplamak için benzer işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathbf{b}'_q, \mathbf{t} \right\rangle &= a_{31} \left\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \right\rangle + a_{32} \left\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{t} \right\rangle + a_{33} \left\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{t} \right\rangle = a_{31} \\
\left\langle \mathbf{b}'_q, \mathbf{n}_q \right\rangle &= a_{31} \left\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \right\rangle + a_{32} \left\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \right\rangle + a_{33} \left\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{n}_q \right\rangle = a_{33} \\
\left\langle \mathbf{b}'_q, \mathbf{b}_q \right\rangle &= a_{31} \left\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \right\rangle + a_{32} \left\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \right\rangle + a_{33} \left\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \right\rangle = a_{32}
\end{aligned}$$

olur. Burada $\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle' = 0$ olup

$$a_{32} = 0$$

bulunur. $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle = 0$ eşitliğinin türevinde $\langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q \rangle$ ile $\left\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}'_q \right\rangle$ değerleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q \rangle + \left\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}'_q \right\rangle &= 0 \\
a_{13} + a_{21} &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$a_{13} = -a_{21} = k_1$$

olur. Benzer işlemler $\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 1$ eşitliğine uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathbf{n}'_q, \mathbf{b}_q \right\rangle + \left\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}'_q \right\rangle &= 0 \\
a_{22} + a_{33} &= 0
\end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$a_{22} = -a_{33} = k_3$$

şeklindedir. Buna ek olarak benzer işlemler $\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle = 0$ eşitliğine uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{t}', \mathbf{b}_q \rangle + \left\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}'_q \right\rangle &= 0 \\
a_{12} + a_{31} &= 0
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$a_{12} = -a_{31} \quad = \quad k_2$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\mathbf{t}' = 0\mathbf{t} + k_2\mathbf{n}_q + k_1\mathbf{b}_q$$

$$\mathbf{n}_q' = -k_1\mathbf{t} + k_3\mathbf{n}_q + 0\mathbf{b}_q$$

$$\mathbf{b}_q' = -k_2\mathbf{t} + 0\mathbf{n}_q - k_3\mathbf{b}_q$$

olur. Bulunan formüller matris formunda yazılırsa

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}_q' \\ \mathbf{b}_q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_2 & k_1 \\ -k_1 & k_3 & 0 \\ -k_2 & 0 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix} \tag{4.74}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.2. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında $\mathbf{t}$ spacelike, $\mathbf{k}$ null, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle = 0$ olmak üzere $\mathbf{n}_q$ null ve $\mathbf{b}_q$ null olması durumunda pseudo null quasi-çatı için vektörel çarpım

$$\mathbf{n}_q \wedge \mathbf{t} = \mathbf{n}_q \quad \mathbf{b}_q \wedge \mathbf{n}_q = \mathbf{t} \quad \mathbf{t} \wedge \mathbf{b}_q = \mathbf{b}_q$$

şeklinde verilir.

İspat: Null iki vektörün vektörel çarpımının bir spacelike vektörü verdiği bilinmektedir. Buna göre

$$\mathbf{b}_q \wedge \mathbf{n}_q = \mathbf{t}$$

olur. Burada

$$\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$$
$$\mathbf{n}_q = (n_1, n_2, n_3)$$
$$\mathbf{b}_q = (b_1, b_2, b_3)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_q \wedge \mathbf{n}_q &= -\begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{e}_1(n_3b_2 - n_{3-2}b_3) + (-\mathbf{e}_2)(n_1b_3 - n_3b_1) + (-\mathbf{e}_3)(n_2b_1 - n_1b_2) \end{aligned}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\mathbf{b}_q \wedge \mathbf{n}_q = (n_3b_2 - n_2b_3, n_3b_1 - n_1b_3, n_1b_2 - n_2b_1) \tag{4.75}$$

olur. $\mathbf{b}_q \wedge \mathbf{n}_q = \mathbf{t}$ olduğundan (4.75) vektörü $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$ ile eşitlenir ve

$$\begin{aligned} t_1 &= n_3 b_2 - n_2 b_3 \\ t_2 &= n_3 b_1 - n_1 b_3 \\ t_3 &= n_1 b_2 - n_2 b_1 \end{aligned} \tag{4.76}$$

elde edilir. Buna göre

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_q \wedge \mathbf{t} &= -\begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{e}_1(t_3 n_2 - t_2 n_3) + (-\mathbf{e}_2)(t_1 n_3 - t_3 n_1) + (-\mathbf{e}_3)(t_2 n_1 - t_1 n_2) \end{aligned}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\mathbf{n}_q \wedge \mathbf{t} = (t_3 n_2 - t_2 n_3, t_3 n_1 - t_1 n_3, t_1 n_2 - t_2 n_1) \tag{4.77}$$

olur. İlk olarak (4.76) eşitliklerini kullanarak (4.77) vektörünün ilk bileşeninin eşiti

$$\begin{aligned} t_3 n_2 - t_2 n_3 &= n_2(n_1 b_2 - n_2 b_1) - n_3(n_3 b_1 - n_1 b_3) \\ &= n_1 n_2 b_2 - n_2^2 b_1 - n_3^2 b_1 + n_1 n_3 b_3 \\ &= n_1(n_2 b_2 + n_3 b_3) - b_1(n_2^2 + n_3^2) \end{aligned}$$

olup ayrıca $\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle = 0$ ve $\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 1$ olduğundan sırasıyla

$$-n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 0 \tag{4.78}$$

ve

$$-n_1 b_1 + n_2 b_2 + n_3 b_3 = 1 \tag{4.79}$$

elde edilir. Buna göre (4.78) ve (4.79) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} t_3 n_2 - t_2 n_3 &= n_1(n_2 b_2 + n_3 b_3) - b_1(n_2^2 + n_3^2) \\ &= n_1(1 + n_1 b_1) - b_1(n_1^2) \\ &= n_1 \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$t_3 n_2 - t_2 n_3 = n_1$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.76) eşitliklerini kullanarak (4.77) vektörünün ikinci bileşeninin eşiti

$$\begin{aligned} t_3 n_1 - t_1 n_3 &= n_1(n_1 b_2 - n_2 b_1) - n_3(n_3 b_2 - n_2 b_3) \\ &= n_1^2 b_2 - n_1 n_2 b_1 - n_3^2 b_2 + n_2 n_3 b_3 \\ &= n_2(n_3 b_3 - n_1 b_1) + b_2(n_1^2 - n_3^2) \end{aligned}$$

olup (4.78) ve (4.79) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} t_3n_1 - t_1n_3 &= n_2(n_3b_3 - n_1b_1) + b_2(n_1^2 - n_3^2) \\ &= n_2(1 - n_2b_2) + b_2n_2^2 \\ &= n_2 \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$t_3n_1 - t_1n_3 = n_2$$

bulunur. Son olarak (4.76) eşitlikleri yardımıyla (4.77) vektörünün üçüncü bileşeninin eşiti

$$\begin{aligned} t_1n_2 - t_2n_1 &= n_2(n_3b_2 - n_2b_3) - n_1(n_3b_1 - n_1b_3) \\ &= n_2n_3b_2 - n_2^2b_3 - n_1n_3b_1 + n_1^2b_3 \\ &= n_3(n_2b_2 - n_1b_1) + b_3(n_1^2 - n_2^2) \end{aligned}$$

olup (4.78) ve (4.79) denklemleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} t_1n_2 - t_2n_1 &= n_3(n_2b_2 - n_1b_1) + b_3(n_1^2 - n_2^2) \\ &= n_3(1 - n_3b_3) + b_3(n_3^2) \\ &= n_3 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$t_1n_2 - t_2n_1 = n_3$$

olur. Bu durumda $\mathbf{n}_q \wedge \mathbf{t} = \mathbf{n}_q$ olarak bulunur.

Şimdi

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \wedge \mathbf{b}_q &= -\begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{e}_1(b_3t_2 - b_2t_3) + (-\mathbf{e}_2)(b_1t_3 - b_3t_1) + (-\mathbf{e}_3)(b_2t_1 - b_1t_2) \end{aligned}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{b}_q = (b_3t_2 - b_2t_3, b_3t_1 - b_1t_3, b_1t_2 - b_2t_1) \tag{4.80}$$

olur. İlk olarak (4.76) eşitliklerini kullanarak (4.80) vektörünün ilk bileşeninin eşiti

$$\begin{aligned} b_3t_2 - b_2t_3 &= b_3(n_3b_1 - n_1b_3) - b_2(n_1b_2 - n_2b_1) \\ &= n_3b_1b_3 - n_1b_3^2 - n_1b_2^2 + n_2b_1b_2 \\ &= b_1(n_2b_2 + n_3b_3) - n_1(b_2^2 + b_3^2) \end{aligned}$$

olup ayrıca $\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 0$ olduğundan

$$-b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 0 \tag{4.81}$$

elde edilir. Buna göre (4.79) ve (4.81) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} b_3t_2 - b_2t_3 &= b_1(1 + n_1b_1) - n_1(b_1^2) \\ &= b_1 + n_1b_1^2 - n_1b_1^2 \\ &= b_1 \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$b_3t_2 - b_2t_3 = b_1$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.76) eşitliklerini kullanarak (4.80) vektörünün ikinci bileşeninin eşiti

$$\begin{aligned} b_3t_1 - b_1t_3 &= b_3(n_3b_2 - n_2b_3) - b_1(n_1b_2 - n_2b_1) \\ &= n_3b_2b_3 - n_2b_3^2 - n_1b_1b_2 + n_2b_1^2 \\ &= n_2(b_1^2 - b_3^2) + b_2(n_3b_3 - n_1b_1) \end{aligned}$$

olup (4.79) ve (4.81) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} b_3t_1 - b_1t_3 &= n_2(b_2^2) + b_2(1 - n_2b_2) \\ &= n_2b_2^2 + b_2 - n_2b_2^2 \\ &= b_2 \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$b_3t_1 - b_1t_3 = b_2$$

bulunur. Son olarak(4.76) eşitlikleri yardımıyla (4.80) vektörünün üçüncü bileşeninin eşiti

$$\begin{aligned} b_1t_2 - b_2t_1 &= b_1(n_3b_1 - n_1b_3) - b_2(n_3b_2 - n_2b_3) \\ &= n_3b_1^2 - n_1b_1b_3 - n_3b_2^2 + n_2b_2b_3 \\ &= n_3(b_1^2 - b_2^2) + b_3(n_2b_2 - n_1b_1) \end{aligned}$$

olup (4.79) ve (4.81) denklemleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} b_1t_2 - b_2t_1 &= n_3(b_3^2) + b_3(1 - n_3b_3) \\ &= n_3b_3^2 + b_3 - n_3b_3^2 \\ &= b_3 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$b_1t_2 - b_2t_1 = b_3$$

olur. Bu durumda $\mathbf{t} \wedge \mathbf{b}_q = \mathbf{b}_q$ olarak bulunur.

Örnek 4.2.1. $\mathbb{R}_1^3 : \mathbb{R}^3; (-,+,+)$ işaretli uzayda $\alpha(s) = (\frac{s^2}{2}, \frac{s^2}{2}, s)$ eğrisi verilsin. Eğrinin türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = (s, s, 1)$$

bulunur. Burada

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = -s^2 + s^2 + 1 = 1$$

olup **t** spacelike olur. Ek olarak

$$\alpha''(s) = (1, 1, 0)$$

ve

$$\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle = -1 + 1 + 0 = 0$$

bulunur. Buna göre

$$\mathbf{t} = (s, s, 1)$$
$$\mathbf{n} = (1, 1, 0)$$

olur. Burada $\mathbf{b}$, $\langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle = 1$, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle = 0$ ve $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = 0$ olacak şekilde seçilir. Bu durumda $\mathbf{b} = (\lambda, \beta, \gamma)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle &= -\lambda s + \beta s + \gamma = 0 \\ \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle &= -\lambda + \beta = 1 \\ \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle &= -\lambda^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Elde edilen denklem sistemi çözülürse

$$\mathbf{b} = \left(\frac{-1 - s^2}{2}, \frac{1 - s^2}{2}, -s \right)$$

ve buradan

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle &= \frac{-(-1 - s^2)^2}{4} + \frac{(1 - s^2)^2}{4} + s^2 \\ &= \frac{-(1 + 2s^2 + s^4) + (1 - 2s^2 + s^4) + 4s^2}{4} = 0 \end{aligned}$$

olup **b** null olur.

Şimdi $\alpha(s)$ eğrisinin $\mathbf{k} = (1, 1, 0)$ null ve

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle &= \langle (s, s, 1), (1, 1, 0) \rangle \\ &= -s + s + 0 = 0 \end{aligned}$$

olacak şekilde pseudo null quasi-çatısını hesaplayalım. Bunun için

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{k} = - \begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ s & s & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

hesaplanırsa

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{k} = (-1, -1, 0)$$

ve

$$\|\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}\| = \sqrt{|\langle \mathbf{t} \wedge \mathbf{k}, \mathbf{t} \wedge \mathbf{k} \rangle|} = \sqrt{-1 + 1 + 0} = 0$$

olup bu durumda $\mathbf{n}_q = \mathbf{t} \wedge \mathbf{k}$ olarak alınır. Yani

$$\mathbf{n}_q = (-1, -1, 0)$$

olur. Burada

$$\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle = \langle (-1,-1,0), (-1,-1,0) \rangle = 0$$

olduğundan $\mathbf{n}_q$ nulldur.

Buna göre $\mathbf{b}_q$, $\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 1$, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle = 0$ ve $\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 0$ olacak şekilde seçilir. Bu durumda $\mathbf{b}_q = (\lambda, \beta, \gamma)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle &= -\lambda s + \beta s + \gamma = 0 \\ \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle &= \lambda - \beta = 1 \\ \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle &= -\lambda^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Elde edilen denklem sistemi çözülürse

$$\mathbf{b}_q = \left(\frac{1+s^2}{2}, \frac{-1+s^2}{2}, s \right)$$

ve buradan

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle &= \langle \left(\frac{1+s^2}{2}, \frac{-1+s^2}{2}, s \right), \left(\frac{1+s^2}{2}, \frac{-1+s^2}{2}, s \right) \rangle \\ &= \frac{-(1+2s^2+s^4)+(1-2s^2+s^4)+4s^2}{4} = 0 \end{aligned}$$

olup $\mathbf{b}_q$ null olur. q-eğrilikleri için

$$\mathbf{t}' = (1,1,0)$$

ve

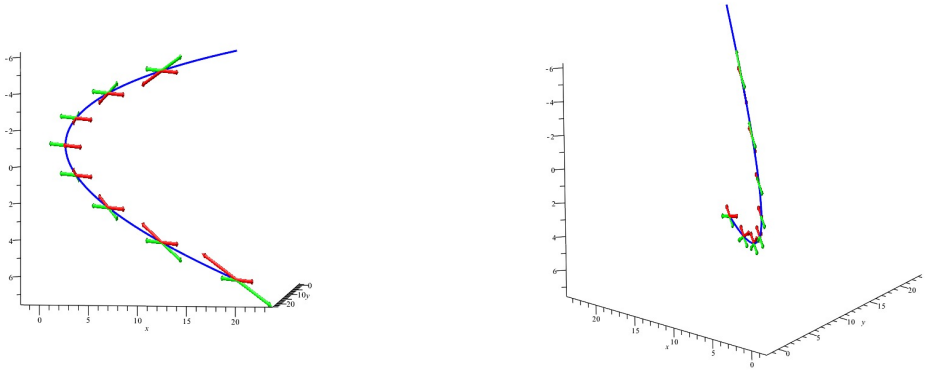
$$\mathbf{n}_q' = (0,0,0)$$

olup, buradan

$$\begin{aligned} k_1 = \langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q \rangle &= \langle (1,1,0), (-1,-1,0) \rangle = 1 - 1 + 0 = 0 \\ k_2 = \langle \mathbf{t}', \mathbf{b}_q \rangle &= \langle (1,1,0), \left(\frac{1+s^2}{2}, \frac{-1+s^2}{2}, s \right) \rangle \\ &= \frac{-1-s^2-1+s^2}{2} = -1 \\ k_3 = \langle \mathbf{n}_q', \mathbf{b}_q \rangle &= \langle (0,0,0), \left(\frac{1+s^2}{2}, \frac{-1+s^2}{2}, s \right) \rangle = 0 \end{aligned}$$

bulunur.

Şekil 4.6 ile farklı açılarla görseli verilen pseudo null eğrinin Frenet çatı vektörleri kırmızı ile, quasi-çatı vektörleri ise yeşil ile gösterilmiştir.



Şekil 4.6 Pseudo null eğrinin Frenet ve quasi-çatı vektörleri

Teorem 4.2.2 ile verilen vektörel çarpım tanımı kullanılarak

$$\mathbf{n}_q \wedge \mathbf{t} = -\begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -1 & -1 & 0 \\ s & s & 1 \end{vmatrix} = (-1,-1,0) = \mathbf{n}_q$$

$$\mathbf{b}_q \wedge \mathbf{n}_q = -\begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{1+s^2}{2} & \frac{-1+s^2}{2} & s \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (s,s,1) = \mathbf{t}$$

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{b}_q = -\begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ s & s & 1 \\ \frac{1+s^2}{2} & \frac{-1+s^2}{2} & s \end{vmatrix} = (\frac{1+s^2}{2}, \frac{-1+s^2}{2}, s) = \mathbf{b}_q$$

bulunur.

Örnek 4.2.2. $\mathbb{R}^3_1 : \mathbb{R}^3; (-,+,+)$ işaretli uzayda $\alpha(s) = -\frac{1}{4}(e^{2s}, 4s, e^{2s})$ eğrisi verilsin. Eğrinin türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = (-\frac{e^{2s}}{2}, -1, -\frac{e^{2s}}{2})$$

bulunur. Burada

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = -\frac{e^{4s}}{4} + 1 + \frac{e^{4s}}{4} = 1$$

olup **t** spacelike olur. Ek olarak

$$\alpha''(s) = (-e^{2s}, 0, -e^{2s})$$

ve

$$\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle = -e^{4s} + 0 + e^{4s} = 0$$

bulunur. Buna göre

$$\mathbf{t} = (-\frac{e^{2s}}{2}, -1, -\frac{e^{2s}}{2})$$
$$\mathbf{n} = (-e^{2s}, 0, -e^{2s})$$

olur. Burada $\mathbf{b}$, $\langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle = 1$, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle = 0$ ve $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = 0$ olacak şekilde seçilir. Bu durumda $\mathbf{b} = (\lambda, \beta, \gamma)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle &= \lambda \frac{e^{2s}}{2} - \beta - \gamma \frac{e^{2s}}{2} = 0 \\ \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle &= \lambda e^{2s} - \gamma e^{2s} = 1 \\ \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle &= -\lambda^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Elde edilen denklem sistemi çözülürse

$$\mathbf{b} = \left(\frac{4 + e^{4s}}{8e^{2s}}, \frac{1}{2}, \frac{e^{4s} - 4}{8e^{2s}} \right)$$

ve buradan

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = 0$$

olup $\mathbf{b}$ null olur.

Şimdi $\alpha(s)$ eğrisinin $\mathbf{k} = (1, 0, 1)$ null ve

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle &= \langle (-\frac{e^{2s}}{2}, -1, -\frac{e^{2s}}{2}), (1, 0, 1) \rangle \\ &= \frac{e^{2s}}{2} - \frac{e^{2s}}{2} = 0 \end{aligned}$$

olacak şekilde pseudo null quasi-çatısını hesaplayalım. Bunun için öncelikle

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{k} = - \begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -\frac{e^{2s}}{2} & -1 & -\frac{e^{2s}}{2} \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

hesaplanırsa

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{k} = (-1, 0, -1)$$

ve

$$\|\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}\| = \sqrt{|\langle \mathbf{t} \wedge \mathbf{k}, \mathbf{t} \wedge \mathbf{k} \rangle|} = \sqrt{-1 + 0 + 1} = 0$$

olup bu durumda $\mathbf{n}_q = \mathbf{t} \wedge \mathbf{k}$ olarak alınır. Yani

$$\mathbf{n}_q = (-1, 0, -1)$$

olur. Burada

$$\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle = 0$$

olduğundan $\mathbf{n}_q$ nulldur.

Buna göre $\mathbf{b}_q$, $\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 1$, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle = 0$ ve $\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 0$ olacak şekilde seçilir. Bu durumda $\mathbf{b}_q = (\lambda, \beta, \gamma)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle &= \lambda \frac{e^{2s}}{2} - \beta - \gamma \frac{e^{2s}}{2} = 0 \\ \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle &= \lambda - \gamma = 1 \\ \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle &= -\lambda^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Elde edilen denklem sistemi çözülürse

$$\mathbf{b}_q = \left(\frac{e^{4s}}{8} + \frac{1}{2}, \frac{e^{2s}}{2}, \frac{e^{4s}}{8} - \frac{1}{2} \right)$$

ve buradan

$$\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 0$$

olup $\mathbf{b}_q$ null olur. q-eğriliklerini hesaplamak için

$$\mathbf{t}' = (-e^{2s}, 0, -e^{2s})$$

ve

$$\mathbf{n}_q' = (0, 0, 0)$$

olup, buradan

$$\begin{aligned} k_1 = \langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q \rangle &= \langle (-e^{2s}, 0, -e^{2s}), (-1, 0, -1) \rangle = 0 \\ k_2 = \langle \mathbf{t}', \mathbf{b}_q \rangle &= \langle (-e^{2s}, 0, -e^{2s}), \left(\frac{e^{4s}}{8} + \frac{1}{2}, \frac{e^{2s}}{2}, \frac{e^{4s}}{8} - \frac{1}{2} \right) \rangle = e^{2s} \\ k_3 = \langle \mathbf{n}_q', \mathbf{b}_q \rangle &= \langle (0, 0, 0), \left(\frac{e^{4s}}{8} + \frac{1}{2}, \frac{e^{2s}}{2}, \frac{e^{4s}}{8} - \frac{1}{2} \right) \rangle = 0 \end{aligned}$$

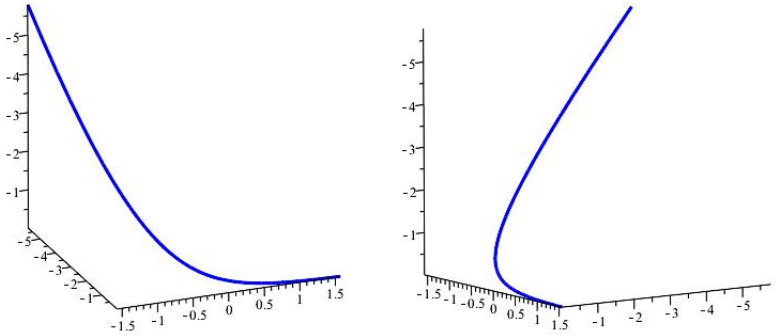
bulunur. Teorem 4.2.2 ile verilen vektörel çarpım tanımı kullanılarak

$$\mathbf{n}_q \wedge \mathbf{t} = - \begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -\frac{e^{2s}}{2} & -1 & -\frac{e^{2s}}{2} \end{vmatrix} = (-1, 0, -1) = \mathbf{n}_q$$

$$\mathbf{b}_q \wedge \mathbf{n}_q = - \begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{e^{4s}}{8} + \frac{1}{2} & \frac{e^{2s}}{2} & \frac{e^{4s}}{8} - \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-\frac{e^{2s}}{2}, -1, -\frac{e^{2s}}{2}) = \mathbf{t}$$

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{b}_q = - \begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -\frac{e^{2s}}{2} & -1 & -\frac{e^{2s}}{2} \\ \frac{e^{4s}}{8} + \frac{1}{2} & \frac{e^{2s}}{2} & \frac{e^{4s}}{8} - \frac{1}{2} \end{vmatrix} = (\frac{e^{4s}}{8} + \frac{1}{2}, \frac{e^{2s}}{2}, \frac{e^{4s}}{8} - \frac{1}{2}) = \mathbf{b}_q$$

bulunur. Şekil 4.7 ile pseudo null eğrinin grafiği gösterilmiştir.



Şekil 4.7 $\alpha(s)$ pseudo null eğrisi

4.3. Yönlü Null ve Pseudo Null Eğrilerin Sınıflandırılması

Minkowski Uzayında Yönlü Null Eğrilerin Sınıflandırılması

Bu kısımda quasi-çatılı null eğrileri yönlü null eğriler olarak adlandırıp, yönlü null eğrilerin quasi-çatı ile oluşturulan düzlemlerden hangisinde bulunduğu araştırılmıştır.

Teorem 4.3.1. $\alpha, \mathbb{R}_1^3$ uzayında bir null eğri ve $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ eğrinin quasi-çatısı olsun. Bu çatının $Sp\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q\}$ alt uzayında yatan eğrisi $\mu \neq 0$ ve $k_1 = 0$ ise

$$\alpha(s) = \left(\frac{1 - c_1 k_3}{k_2} + ce^{-k_2 s}\right)\mathbf{t} + c_1 \mathbf{n}_q$$

veya $\mu = 0$, $k_1 = 0$ ise

$$\alpha(s) = \left(ce^{-k_2 s} + \frac{1}{k_2}\right)\mathbf{t}$$

şeklindedir. Burada c ve c_1 integral sabiti, μ lineer toplamdaki $\mathbf{n}_q$ vektörünün katsayısıdır.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)\mathbf{t} + \mu(s)\mathbf{n}_q$ eşitliğinde s parametresine göre eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)\mathbf{t} + \lambda(s)\mathbf{t}' + \mu'(s)\mathbf{n}_q + \mu(s)\mathbf{n}_q'$$

elde edilir. $\alpha'(s) = \mathbf{t}$ olmak üzere (4.2) eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\mathbf{t} &= \lambda'(s)\mathbf{t} + \lambda(s)\left(k_2(s)\mathbf{t} + k_1(s)\mathbf{n}_q\right) \\
&\quad + \mu'(s)\mathbf{n}_q + \mu(s)\left(k_3(s)\mathbf{t} - k_1(s)\mathbf{b}_q\right) \\
&= \left(\lambda'(s) + \lambda(s)k_2(s) + \mu(s)k_3(s)\right)\mathbf{t} \\
&\quad + \left(\lambda(s)k_1(s) + \mu'(s)\right)\mathbf{n}_q + \left(-\mu(s)k_1(s)\right)\mathbf{b}_q
\end{aligned}$$

olur. Böylece iki tarafın eşitliğinden

$$\begin{aligned} \lambda'(s) + \lambda(s)k_2(s) + \mu(s)k_3(s) &= 1 \\ \lambda(s)k_1(s) + \mu'(s) &= 0 \\ -\mu(s)k_1(s) &= 0 \end{aligned}$$

bulunur.

i) $\mu \neq 0$ ve $k_1(s) = 0$ olsun.

Buna göre

$$\begin{aligned} \lambda(s)k_1(s) + \mu'(s) &= 0 \\ \mu'(s) &= 0 \\ \mu(s) = sabit &= c_1 \end{aligned}$$

olur.

Burada

$$\lambda'(s) + \lambda(s)k_2(s) + \mu(s)k_3(s) = 1$$

olup μ değeri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \lambda'(s) + \lambda(s)k_2(s) + c_1k_3(s) &= 1 \\ \lambda'(s) + \lambda(s)k_2(s) &= 1 - c_1k_3 \end{aligned}$$

lineer diferensiyel denklemi bulunur.

Öncelikle lineer homojen diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunursa

$$\begin{aligned} \lambda'(s) + \lambda(s)k_2(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad & \frac{d\lambda}{ds} = -\lambda(s)k_2(s) \\ & \frac{d\lambda}{\lambda} = -k_2(s)ds \\ & \ln\lambda = -k_2s + \ln c_2 \\ & \lambda = e^{-k_2s+\ln c_2} \\ & \lambda = e^{-k_2s}.e^{\ln c_2} \end{aligned}$$

ve buradan

$$\lambda = e^{-k_2s}.c_2 \tag{4.82}$$

olur. (4.82) eşitliğinin s ye göre türevi alınırsa

$$\lambda' = \frac{dc_2}{ds}e^{-k_2s} - c_2k_2e^{-k_2s}$$

bulunur. Elde ettiğimiz λ ve λ' eşitlikleri lineer homojen olmayan diferensiyel denkleminde yazılmasıyla

$$\begin{aligned}
\lambda'(s)+\lambda(s)k_2(s) &= 1-c_1k_3\\
\frac{dc_2}{ds}e^{-k_2s}-c_2k_2e^{-k_2s}+c_2e^{-k_2s}k_2 &= 1-c_1k_3\\
\frac{dc_2}{ds}e^{-k_2s} &= 1-c_1k_3\\
\frac{dc_2}{ds} &= e^{k_2s}(1-c_1k_3)\\
dc_2 &= (e^{k_2s}-e^{k_2s}c_1k_3)ds
\end{aligned}$$

olur. Eşitliğin her iki tarafının integrali alınırsa

$$c_2=\frac{e^{k_2s}}{k_2}-\frac{e^{k_2s}}{k_2}c_1k_3+c$$

bulunur. Elde edilen c_2 değeri (4.82) eşitliğinde yazılırsa

$$\begin{aligned}
\lambda &= e^{-k_2s}.\left(\frac{e^{k_2s}}{k_2}-\frac{e^{k_2s}}{k_2}c_1k_3+c\right)\\
&= \frac{1}{k_2}-\frac{c_1k_3}{k_2}+ce^{-k_2s}
\end{aligned}$$

olur. Bulunan $\lambda(s)$ ve $\mu(s)$, $\alpha(s)=\lambda(s)\mathbf{t}+\mu(s)\mathbf{n}_q$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\alpha(s)=\left(\frac{1-c_1k_3}{k_2}+ce^{-k_2s}\right)\mathbf{t}+c_1\mathbf{n}_q$$

olarak elde edilir. $\lambda(s)$ değeri

$$\begin{aligned}
\lambda_c &= ce^{-\int P(s)ds}\\
\lambda_p &= e^{-\int P(s)ds}\int e^{\int P(s)ds}Q(s)ds
\end{aligned}$$

denklemleri yardımıyla da bulunabilir.

Buna göre

$$\lambda'(s)+\lambda(s)\underbrace{k_2(s)}_{P(s)}=\underbrace{1-c_1k_3}_{Q(s)}$$

olup

$$\begin{aligned}
\lambda_c &= ce^{-\int k_2ds}\\
&= ce^{-k_2s}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\lambda_p &= e^{-\int k_2ds}\int e^{\int k_2ds}(1-c_1k_3)ds\\
&= e^{-k_2s}\int(e^{k_2s}-e^{k_2s}c_1k_3)ds\\
&= e^{-k_2s}\left(\frac{e^{k_2s}}{k_2}-\frac{e^{k_2s}}{k_2}c_1k_3\right)\\
&= \frac{1}{k_2}-\frac{c_1k_3}{k_2}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda $\lambda = \lambda_c + \lambda_p$ olup

$$\lambda(s) = ce^{-k_2 s} + \frac{1}{k_2} - \frac{c_1 k_3}{k_2}$$

elde edilir. Bulunan $\lambda(s)$ ve $\mu(s)$ denklemde yerine yazılırsa

$$\alpha(s) = \left(\frac{1 - c_1 k_3}{k_2} + ce^{-k_2 s} \right) \mathbf{t} + c_1 \mathbf{n}_q$$

olarak bulunur.

ii) $\mu = 0$ ve $k_1(s) \neq 0$ olsun.

Buna göre

$$\begin{aligned} \lambda(s)k_1(s) + \mu'(s) &= 0 \\ \lambda(s)k_1(s) &= 0 \\ \lambda(s) &= 0 \end{aligned}$$

olur. Bu durumda $\lambda(s) = 0$ olacağından eğri $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q\}$ düzleminde yatmaz.

iii) $\mu = 0$ ve $k_1(s) = 0$ olsun.

Buna göre

$$\begin{aligned} \lambda(s)k_1(s) + \mu'(s) &= 0 \\ \lambda(s).0 + 0 &= 0 \end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} \lambda(s) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda'(s) + \lambda(s)k_2(s) + \mu(s)k_3(s) &= 1 \\ \lambda'(s) + \lambda(s)k_2(s) + 0 &= 1 \\ \lambda'(s) + \lambda(s)\underbrace{k_2(s)}_{P(s)} &= \underbrace{1}_{Q(s)} \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} \lambda_c &= ce^{-\int k_2 ds} \\ &= ce^{-k_2 s} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \lambda_p &= e^{-\int k_2 ds} \int e^{\int k_2 ds}.1.ds \\ &= e^{-k_2 s} \int e^{k_2 s} ds \\ &= e^{-k_2 s} \frac{e^{k_2 s}}{k_2} \\ &= \frac{1}{k_2} \end{aligned}$$

bulunur.

Bu durumda

$$\lambda(s) = ce^{-k_2 s} + \frac{1}{k_2}$$

olur. Buna göre $\lambda(s)$ ve $\mu(s)$ denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \left(ce^{-k_2 s} + \frac{1}{k_2}\right)\mathbf{t} + 0\mathbf{n}_q \\ \alpha(s) &= \left(ce^{-k_2 s} + \frac{1}{k_2}\right)\mathbf{t} \end{aligned}$$

olur.

Teorem 4.3.2. $\alpha, \mathbb{R}_1^3$ uzayında bir null eğri ve $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ eğrinin quasi-çatısı olsun. $k_1 = k_3 = 0$ olmak üzere bu çatının $Sp\{\mathbf{t}, \mathbf{b}_q\}$ alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s) = \left(ce^{-k_2 s} + \frac{1}{k_2}\right)\mathbf{t} + ce^{k_2 s}\mathbf{b}_q$$

şeklindedir. Burada c integral sabitidir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)\mathbf{t} + \mu(s)\mathbf{b}_q$ eşitliğinde s parametresine göre eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)\mathbf{t} + \lambda(s)\mathbf{t}' + \mu'(s)\mathbf{b}_q + \mu(s)\mathbf{b}_q'$$

elde edilir. $\alpha'(s) = \mathbf{t}$ olmak üzere (4.2) eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \lambda'(s)\mathbf{t} + \lambda(s)\left(k_2(s)\mathbf{t} + k_1(s)\mathbf{n}_q\right) \\ &\quad + \mu'(s)\mathbf{b}_q + \mu(s)\left(-k_3(s)\mathbf{n}_q - k_2(s)\mathbf{b}_q\right) \\ &= \left(\lambda'(s) + \lambda(s)k_2(s)\right)\mathbf{t} + \left(\lambda(s)k_1(s) - \mu(s)k_3(s)\right)\mathbf{n}_q \\ &\quad + \left(\mu'(s) - \mu(s)k_2(s)\right)\mathbf{b}_q \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} \lambda'(s) + \lambda(s)k_2(s) &= 1 \\ \lambda(s)k_1(s) - \mu(s)k_3(s) &= 0 \\ \mu'(s) - \mu(s)k_2(s) &= 0 \end{aligned} \tag{4.83}$$

bulunur.

Buna göre, (4.83) eşitliğinden

$$\lambda'(s) + \lambda(s)\underbrace{k_2(s)}_{P(s)} = \underbrace{1}_{Q(s)}$$

$$\begin{aligned} \lambda_c &= ce^{-\int P(s)ds} \\ &= ce^{-\int k_2 ds} \\ &= ce^{-k_2 s} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\lambda_p &= e^{-\int P(s)ds}\int e^{\int P(s)ds}Q(s)ds \\ &= e^{-\int k_2 ds}\int e^{\int k_2 ds}.1.ds \\ &= e^{-k_2 s}\int e^{k_2 s}ds \\ &= e^{-k_2 s}\frac{e^{k_2 s}}{k_2} \\ &= \frac{1}{k_2}\end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$\lambda(s) = \lambda_c + \lambda_p = ce^{-k_2 s} + \frac{1}{k_2}$$

olarak bulunur. Ayrıca (4.83) eşitliğinden

$$\mu'(s) - \mu(s)\underbrace{k_2(s)}_{-P(s)} = \underbrace{0}_{Q(s)}$$

$$\begin{aligned}\mu_c &= ce^{-\int P(s)ds} \\ &= ce^{-\int -k_2 ds} \\ &= ce^{k_2 s}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mu_p &= e^{-\int P(s)ds}\int e^{\int P(s)ds}Q(s)ds \\ &= e^{-\int -k_2 ds}\int e^{\int -k_2 ds}.0.ds \\ &= 0\end{aligned}$$

olur. Bu durumda $\mu(s) = \mu_c + \mu_p$ olup

$$\mu(s) = ce^{k_2 s}$$

elde edilir. Burada $k_1 = k_3 = 0$ olması durumunda (4.83) denklemi sağlanır. O halde $k_1 = k_3 = 0$ olmak üzere elde edilen $\lambda(s)$ ve $\mu(s)$ eşitlikleri denklemde yerine yazılırsa

$$\alpha(s) = \left(ce^{-k_2 s} + \frac{1}{k_2}\right)\mathbf{t} + (ce^{k_2 s})\mathbf{b}_q$$

bulunur.

Teorem 4.3.3. $\alpha, \mathbb{R}_1^3$ uzayında bir null eğri ve $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ eğrinin quasi-çatısı olsun. $\alpha(s)$ null eğrisi $Sp\{\mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ nin gerdiği alt uzayda yatmaz.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)\mathbf{n}_q + \mu(s)\mathbf{b}_q$ eşitliğinde s parametresine göre eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)\mathbf{n}_q + \lambda(s)\mathbf{n}_q' + \mu'(s)\mathbf{b}_q + \mu(s)\mathbf{b}_q'$$

elde edilir. $\alpha'(s) = \mathbf{t}$ olmak üzere (4.2) eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\mathbf{t} &= \lambda'(s)\mathbf{n}_q + \lambda(s)\left(k_3(s)\mathbf{t} - k_1(s)\mathbf{b}_q\right) \\ &\quad +\mu'(s)\mathbf{b}_q + \mu(s)\left(-k_3(s)\mathbf{n}_q - k_2(s)\mathbf{b}_q\right) \\ &= (\lambda(s)k_3(s))\mathbf{t} + (\lambda'(s) - \mu(s)k_3(s))\mathbf{n}_q \\ &\quad +(-\lambda(s)k_1(s) + \mu'(s) - \mu(s)k_2(s))\mathbf{b}_q\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}\lambda(s)k_3(s) &= 1 \\ \lambda'(s) - \mu(s)k_3(s) &= 0 \\ -\lambda(s)k_1(s) + \mu'(s) - \mu(s)k_2(s) &= 0\end{aligned} \tag{4.84}$$

bulunur.

Buna göre, (4.84) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\lambda(s)k_3(s) &= 1 \\ \lambda(s) &= \frac{1}{k_3(s)}\end{aligned}$$

olup $-\lambda(s)k_1(s) + \mu'(s) - \mu(s)k_2(s) = 0$ denkleminde $\lambda(s)$ değeri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}-\frac{k_1(s)}{k_3(s)} + \mu'(s) - \mu(s)k_2(s) &= 0 \\ \mu'(s) - \mu(s)\underbrace{k_2(s)}_{-P(s)} &= \underbrace{\frac{k_1(s)}{k_3(s)}}_{Q(s)}\end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}\mu_c &= ce^{-\int P(s)ds} \\ &= ce^{-\int -k_2 ds} \\ &= ce^{k_2 s}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mu_p &= e^{-\int P(s)ds}\int e^{\int P(s)ds}Q(s)ds \\ &= e^{-\int -k_2 ds}\int e^{\int -k_2 ds}\frac{k_1}{k_3}ds \\ &= e^{k_2 s}\int e^{-k_2 s}\frac{k_1}{k_3}ds \\ &= e^{k_2 s}\frac{k_1}{k_3}\frac{e^{-k_2 s}}{-k_2} \\ &= -\frac{k_1}{k_2 k_3}\end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda $\mu(s) = \mu_c + \mu_p$ olup

$$\mu(s) = ce^{k_2 s} - \frac{k_1}{k_2 k_3}$$

elde edilir. Bulunan $\lambda(s)$ ve $\mu(s)$ eşitlikleri (4.84) denkleminin ikinci eşitliğini sağlamadığından $\alpha(s)$ null eğrisi $\{\mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ ile gerilen alt uzayda yatmaz.

Minkowski Uzayında Yönlü Pseudo Null Eğrilerin Sınıflandırılması

Bu kısımda quasi-çatılı pseudo null eğriler, yönlü pseudo null eğriler olarak adlandırılıp, yönlü pseudo null eğrilerin quasi-çatı ile oluşturulan düzlemlerden hangisinde bulunduğu araştırılmıştır.

Teorem 4.3.4. $\alpha, \mathbb{R}_1^3$ uzayında bir pseudo null eğri ve $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ eğrinin quasi-çatısı olsun. Bu çatının $Sp\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q\}$ alt uzayında yatan eğrisi $\lambda(s) \neq 0$ ve $k_1 = 0$ ise

$$\alpha(s) = (s + c_1)\,\mathbf{t} + (ce^{-k_3 s} - \frac{sk_2}{k_3} + \frac{k_2}{k_3^2} - \frac{c_1 k_2}{k_3})\mathbf{n}_q$$

veya $\lambda(s) = 0, k_1 \neq 0$ ise

$$\alpha(s) = -\frac{1}{k_1}\mathbf{n}_q$$

şeklindedir. Burada c ve c_1 integral sabiti, λ lineer toplamdaki $\mathbf{t}$ vektörünün katsayısıdır.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)\mathbf{t} + \mu(s)\mathbf{n}_q$ eşitliğinde s parametresine göre eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)\mathbf{t} + \lambda(s)\mathbf{t}' + \mu'(s)\mathbf{n}_q + \mu(s)\mathbf{n}_q'$$

elde edilir. $\alpha'(s) = \mathbf{t}$ olmak üzere (4.74) denkleminden $\mathbf{t}'$ ve $\mathbf{b}_q'$ eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\mathbf{t} &= \lambda'(s)\mathbf{t} + \lambda(s)\,(k_2(s)\mathbf{n}_q + k_1(s)\mathbf{b}_q) \\
&\quad + \mu'(s)\mathbf{n}_q + \mu(s)\,(-k_1(s)\mathbf{t} + k_3(s)\mathbf{n}_q) \\
&= (\lambda'(s) - \mu(s)k_1(s))\mathbf{t} + (\lambda(s)k_2(s) + \mu'(s) + \mu(s)k_3(s))\mathbf{n}_q \\
&\quad + (\lambda(s)k_1(s))\mathbf{b}_q
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
\lambda'(s) - \mu(s)k_1(s) &= 1 \\
\lambda(s)k_2(s) + \mu'(s) + \mu(s)k_3(s) &= 0 \\
\lambda(s)k_1(s) &= 0
\end{aligned}$$

bulunur.

i) $\lambda \neq 0$ ve $k_1(s) = 0$ olsun.

Buna göre

$$\begin{aligned}
\lambda'(s) - \mu(s)k_1(s) &= 1 \\
\lambda'(s) - 0 &= 1 \\
\lambda'(s) &= 1 \\
\lambda(s) &= s + c_1
\end{aligned}$$

olur.

Burada

$$\lambda(s)k_2(s) + \mu'(s) + \mu(s)k_3(s) = 0$$

olup λ değeri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}(s + c_1)k_2(s) + \mu'(s) + \mu(s)k_3(s) &= 0\\ \mu'(s) + \mu(s)k_3(s) &= -(s + c_1)k_2(s)\end{aligned}$$

lineer diferensiyel denklemi bulunur.

Öncelikle lineer homojen diferensiyel denkleminin genel çözümü

$$\begin{aligned}\mu'(s) + \mu(s)k_3(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad & \frac{d\mu}{ds} = -\mu(s)k_3(s)\\ & \frac{d\mu}{\mu} = -k_3(s)ds\\ & \ln\mu = -k_3 s + \ln c_2\\ & \mu = e^{-k_3 s + \ln c_2}\\ & \mu = e^{-k_3 s}.e^{\ln c_2}\end{aligned}$$

ve buradan

$$\mu = e^{-k_3 s}.c_2 \tag{4.85}$$

olur. (4.85) eşitliğinin s ye göre türevi alınarak

$$\mu' = \frac{dc_2}{ds}e^{-k_3 s} - c_2 k_3 e^{-k_3 s}$$

bulunur. Elde ettiğimiz μ ve μ' eşitlikleri lineer homojen olmayan diferensiyel denkleminde yazılırsa

$$\begin{aligned}\mu'(s) + \mu(s)k_3(s) &= -(s + c_1)k_2(s)\\ \frac{dc_2}{ds}e^{-k_3 s} - c_2 k_3 e^{-k_3 s} + c_2 e^{-k_3 s}k_3 &= -(s + c_1)k_2(s)\\ \frac{dc_2}{ds}e^{-k_3 s} &= -(s + c_1)k_2(s)\\ \frac{dc_2}{ds} &= -e^{k_3 s}(s + c_1)k_2\\ dc_2 &= (-e^{k_3 s}sk_2 - c_1 k_2\, e^{k_3 s})ds\end{aligned}$$

olur. Eşitliğin her iki tarafının integrali alınırsa

$$\begin{aligned}c_2 &= \int(-e^{k_3 s}sk_2)ds - \int(c_1 k_2\, e^{k_3 s})ds\\ &= k_2\int(-e^{k_3 s}s)ds - c_1 k_2\,\frac{e^{k_3 s}}{k_3} + c\end{aligned}$$

olup kısmi integrasyon yöntemi kullanılırsa

$$u = s \quad \text{ve} \quad -e^{k_3 s}ds = dv$$

seçilirse

$$du = ds \quad \text{ve} \quad -\frac{e^{k_3 s}}{k_3} = v$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} c_2 &= k_2\left(s\left(-\frac{e^{k_3 s}}{k_3}\right) + \int \frac{e^{k_3 s}}{k_3} ds\right) - c_1 k_2 \frac{e^{k_3 s}}{k_3} + c \\ &= -s k_2 \frac{e^{k_3 s}}{k_3} + \frac{e^{k_3 s}}{k_3^2} k_2 - c_1 k_2 \frac{e^{k_3 s}}{k_3} + c \\ &= \frac{e^{k_3 s} k_2}{k_3}\left(-s + \frac{1}{k_3} - c_1\right) + c \end{aligned}$$

bulunur. Elde edilen c_2 değeri (4.85) eşitliğinde yazılırsa

$$\begin{aligned} \mu &= e^{-k_3 s}.\left(\frac{e^{k_3 s} k_2}{k_3}\left(-s + \frac{1}{k_3} - c_1\right) + c\right) \\ &= \frac{k_2}{k_3}\left(-s + \frac{1}{k_3} - c_1\right) + c e^{-k_3 s} \\ &= -\frac{s k_2}{k_3} + \frac{k_2}{k_3^2} - \frac{c_1 k_2}{k_3} + c e^{-k_3 s} \end{aligned}$$

olur. Bulunan $\lambda(s)$ ve $\mu(s)$ denklemde yerine yazılırsa

$$\alpha(s) = (s + c_1)\,\mathbf{t} + \left(-\frac{s k_2}{k_3} + \frac{k_2}{k_3^2} - \frac{c_1 k_2}{k_3} + c e^{-k_3 s}\right)\mathbf{n}_q$$

olarak elde edilir. $\mu(s)$ değeri

$$\begin{aligned} \mu_c &= c e^{-\int P(s) ds} \\ \mu_p &= e^{-\int P(s) ds} \int e^{\int P(s) ds} Q(s) ds \end{aligned}$$

denklemleri yardımıyla da bulunabilir.

Buna göre

$$\mu'(s) + \mu(s)\underbrace{k_3(s)}_{P(s)} = \underbrace{-(s + c_1)k_2}_{Q(s)}$$

olup

$$\begin{aligned} \mu_c &= c e^{-\int k_3 ds} \\ &= c e^{-k_3 s} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \mu_p &= e^{-\int k_3 ds} \int e^{\int k_3 ds}(-s - c_1) k_2 ds \\ &= e^{-k_3 s}\left(\int e^{k_3 s}(-s k_2 - c_1 k_2) ds\right) \\ &= e^{-k_3 s}\left(\int e^{k_3 s}(-s) k_2 ds - \int c_1 e^{k_3 s} k_2 ds\right) \end{aligned}$$

olur. Son eşitlikte kısmi integrasyon yöntemi kullanılırsa

$$u = s \quad \text{ve} \quad -e^{k_3 s} ds = dv$$

seçilirse

$$du = ds \quad \text{ve} \quad -\frac{e^{k_3 s}}{k_3} = v$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\mu_p &= e^{-k_3 s}\left(-s\frac{e^{k_3 s}}{k_3} + \int \frac{e^{k_3 s}}{k_3} ds - c_1 \frac{e^{k_3 s}}{k_3}\right) k_2 \\
&= e^{-k_3 s}\left(-s\frac{e^{k_3 s}}{k_3} + \frac{e^{k_3 s}}{k_3^2} - c_1 \frac{e^{k_3 s}}{k_3}\right) k_2 \\
&= -\frac{sk_2}{k_3} + \frac{k_2}{k_3^2} - \frac{c_1 k_2}{k_3}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda $\mu = \mu_c + \mu_p$ olup

$$\mu(s) = ce^{-k_3 s} - \frac{sk_2}{k_3} + \frac{k_2}{k_3^2} - \frac{c_1 k_2}{k_3}$$

elde edilir. Bulunan $\lambda(s)$ ve $\mu(s)$ denklemde yerine yazılırsa

$$\alpha(s) = (s + c_1)\,\mathbf{t} + \left(ce^{-k_3 s} - \frac{sk_2}{k_3} + \frac{k_2}{k_3^2} - \frac{c_1 k_2}{k_3}\right)\mathbf{n}_q$$

olarak bulunur.

ii) $\lambda = 0$ ve $k_1(s) \neq 0$ olsun.

Buna göre

$$\begin{aligned}
\lambda'(s) &= 0 \\
\lambda'(s) - \mu(s)k_1(s) &= 1 \\
0 - \mu(s)k_1(s) &= 1
\end{aligned}$$

bulunur. Yani

$$\mu(s) = -\frac{1}{k_1}$$

olur. Bu durumda $\lambda(s)$ ve $\mu(s)$ denklemde yerine yazılırsa

$$\alpha(s) = -\frac{1}{k_1}\mathbf{n}_q$$

bulunur.

iii) $\lambda = 0$ ve $k_1(s) = 0$ olsun.

Buna göre

$$\lambda'(s) - \mu(s)k_1(s) = 1$$

eşitliğinde $\lambda(s)$ ve $k_1(s)$ değerleri yerine yazılırsa

$$0 - \mu(s)0 = 1 \Rightarrow 0 = 1$$

olur. O halde $\alpha(s)$ pseudo null eğrisi $\lambda = 0$ ve $k_1 = 0$ olması durumunda $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q\}$ ile gerilen alt uzayda yatmaz.

Teorem 4.3.5. $\alpha, \mathbb{R}_1^3$ uzayında bir pseudo null eğri ve $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ eğrinin quasi-çatısı olsun. Bu çatının $Sp\{\mathbf{t}, \mathbf{b}_q\}$ alt uzayında yatan eğrisi $\lambda(s) \neq 0$ ve $k_2(s) = 0$ ise

$$\alpha(s) = (s + c_1)\,\mathbf{t} + \left(ce^{k_3 s} + \frac{sk_1}{k_3} + \frac{k_1}{k_3^2} + \frac{c_1 k_1}{k_3} \right) \mathbf{b}_q$$

veya $\lambda(s) = 0$, $k_2(s) \neq 0$ ise

$$\alpha(s) = -\frac{1}{k_2}\mathbf{b}_q$$

şeklindedir. Burada c ve c_1 integral sabiti, λ lineer toplamdaki $\mathbf{t}$ vektörünün katsayısıdır.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)\mathbf{t} + \mu(s)\mathbf{b}_q$ eşitliğinde s parametresine göre eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)\mathbf{t} + \lambda(s)\mathbf{t}' + \mu'(s)\mathbf{b}_q + \mu(s)\mathbf{b}_q'$$

elde edilir. $\alpha'(s) = \mathbf{t}$ olmak üzere (4.74) denkleminden $\mathbf{t}'$ ve $\mathbf{b}_q'$ eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \lambda'(s)\mathbf{t} + \lambda(s)\left(k_2(s)\mathbf{n}_q + k_1(s)\mathbf{b}_q\right) \\ &\quad + \mu'(s)\mathbf{b}_q + \mu(s)\left(-k_2(s)\mathbf{t} - k_3(s)\mathbf{b}_q\right) \\ &= \left(\lambda'(s) - \mu(s)k_2(s)\right)\mathbf{t} + \left(\lambda(s)k_2(s)\right)\mathbf{n}_q \\ &\quad + \left(\lambda(s)k_1(s) + \mu'(s) - \mu(s)k_3(s)\right)\mathbf{b}_q \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} \lambda'(s) - \mu(s)k_2(s) &= 1 \\ \lambda(s)k_2(s) &= 0 \\ \lambda(s)k_1(s) + \mu'(s) - \mu(s)k_3(s) &= 0 \end{aligned}$$

bulunur.

i) $\lambda \neq 0$ ve $k_2 = 0$ olsun.

Buna göre

$$\begin{aligned} \lambda'(s) - \mu(s)k_2(s) &= 1 \\ \lambda'(s) - \mu(s)0 &= 1 \\ \lambda'(s) &= 1 \\ \lambda(s) &= s + c_1 \end{aligned}$$

olur.

$$\lambda(s)k_1(s) + \mu'(s) - \mu(s)k_3(s) = 0$$

olup $\lambda(s)$ değeri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}(s+c_1)k_1(s)+\mu'(s)-\mu(s)k_3(s) &= 0\\ \mu'(s)-\mu(s)\underbrace{k_3(s)}_{-P(s)} &= \underbrace{-(s+c_1)k_1(s)}_{Q(s)}\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre

$$\begin{aligned}\mu_c &= ce^{-\int P(s)ds}\\ &= ce^{-\int -k_3 ds}\\ &= ce^{k_3 s}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mu_p &= e^{-\int P(s)ds}\int e^{\int P(s)ds}Q(s)ds\\ &= e^{-\int -k_3 ds}\int e^{\int -k_3 ds}(-sk_1-c_1k_1)ds\\ &= e^{k_3 s}\left(\int e^{-k_3 s}(-sk_1-c_1k_1)ds\right)\\ &= e^{k_3 s}\left(-\int e^{-k_3 s}sk_1 ds-\int e^{-k_3 s}c_1k_1)ds\right)\end{aligned}$$

olup kısmi integrasyon yöntemi kullanılarak

$$u=s \quad \text{ve} \quad e^{-k_3 s}ds=dv$$

seçilirse

$$du=ds \quad \text{ve} \quad -\frac{e^{-k_3 s}}{k_3}=v$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}\mu_p &= e^{k_3 s}\left(s\frac{e^{-k_3 s}}{k_3}k_1-\int\frac{e^{-k_3 s}}{k_3}k_1 ds+c_1k_1\frac{e^{-k_3 s}}{k_3}\right)\\ &= e^{k_3 s}\left(s\frac{e^{-k_3 s}}{k_3}k_1+\frac{e^{-k_3 s}}{k_3^2}k_1+c_1k_1\frac{e^{-k_3 s}}{k_3}\right)\\ &= \frac{sk_1}{k_3}+\frac{k_1}{k_3^2}+\frac{c_1k_1}{k_3}\end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda

$$\mu(s)=\mu_c+\mu_p$$

olup

$$\mu(s)=ce^{k_3 s}+\frac{sk_1}{k_3}+\frac{k_1}{k_3^2}+\frac{c_1k_1}{k_3}$$

elde edilir. Bulunan $\lambda(s)$ ve $\mu(s)$ eşitlikleri denklemde yerine yazılırsa

$$\alpha(s)=(s+c_1)\,\mathbf{t}+\left(ce^{k_3 s}+\frac{sk_1}{k_3}+\frac{k_1}{k_3^2}+\frac{c_1k_1}{k_3}\right)\mathbf{b}_q$$

olarak bulunur.

ii) $\lambda=0$ ve $k_2\neq 0$ olsun.

Buna göre

$$\begin{aligned}\lambda'(s) - \mu(s)k_2(s) &= 1\\ 0 - \mu(s)k_2(s) &= 1\end{aligned}$$

olur. Burada

$$\mu(s) = -\frac{1}{k_2(s)}$$

bulunur. Bu durumda

$$\alpha(s) = -\frac{1}{k_2(s)}\mathbf{b}_q$$

olur. Elde edilen $\mu(s)$ değeri $k_3 = 0$ iken $\lambda(s)k_1(s) + \mu'(s) - \mu(s)k_3(s) = 0$ denklemini sağlar. Yani $k_3 = 0$ olması durumunda bu durum sağlanır.

iii) $\lambda = 0$ ve $k_2 = 0$ olsun.

Buna göre

$$\begin{aligned}\lambda'(s) - \mu(s)k_2(s) &= 1\\ 0 - \mu(s)0 &= 1\end{aligned}$$

bulunur. O halde $\alpha(s)$, pseudo null eğrisi $\lambda = 0$ ve $k_2 = 0$ olması durumunda $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}_q\}$ ile gerilen alt uzayda yatmaz.

Teorem 4.3.6. $\alpha, \mathbb{R}_1^3$ uzayında bir pseudo null eğri ve $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ eğrinin quasi-çatısı olsun. Bu çatının $Sp\{\mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ alt uzayında yatan eğrisi $k_1 + k_2 = 1$ ve $k_3 = 0$ olduğunda

$$\alpha(s) = \left(ce^{-k_3 s}\right)\mathbf{n}_q + (ce^{k_3 s})\mathbf{b}_q$$

şeklindedir. Burada c integral sabitidir.

İspat. $\alpha(s) = \lambda(s)\mathbf{n}_q + \mu(s)\mathbf{b}_q$ eşitliğinde s parametresine göre eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)\mathbf{n}_q + \lambda(s)\mathbf{n}_q' + \mu'(s)\mathbf{b}_q + \mu(s)\mathbf{b}_q'$$

elde edilir. $\alpha'(s) = \mathbf{t}$ olmak üzere (4.74) denkleminden $\mathbf{n}_q'$ ve $\mathbf{b}_q'$ eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\mathbf{t} &= \lambda'(s)\mathbf{n}_q + \lambda(s)\left(-k_1(s)\mathbf{t} + k_3(s)\mathbf{n}_q\right)\\ &\quad +\mu'(s)\mathbf{b}_q + \mu(s)\left(-k_2(s)\mathbf{t} - k_3(s)\mathbf{b}_q\right)\\ &= (-\lambda(s)k_1(s) - \mu(s)k_2(s))\mathbf{t} + (\lambda'(s) + \lambda(s)k_3(s))\mathbf{n}_q\\ &\quad +(\mu'(s) - \mu(s)k_3(s))\mathbf{b}_q\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}-\lambda(s)k_1(s) - \mu(s)k_2(s) &= 1\\ \lambda'(s) + \lambda(s)k_3(s) &= 0\\ \mu'(s) - \mu(s)k_3(s) &= 0\end{aligned} \tag{4.86}$$

bulunur.

Buna göre, (4.86) eşitliğinden

$$\lambda'(s) + \lambda(s)\underbrace{k_3(s)}_{P(s)} = \underbrace{0}_{Q(s)}$$

$$\begin{aligned} \lambda_c &= ce^{-\int P(s)ds} \\ &= ce^{-\int k_3 ds} \\ &= ce^{-k_3 s} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \lambda_p &= e^{-\int P(s)ds} \int e^{\int P(s)ds} Q(s)ds \\ &= e^{-\int k_3 ds} \int e^{\int k_3 ds} 0 ds \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$\lambda(s) = \lambda_c + \lambda_p = ce^{-k_3 s}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde (4.86) eşitliğinden

$$\mu'(s) - \mu(s)\underbrace{k_3(s)}_{-P(s)} = \underbrace{0}_{Q(s)}$$

$$\begin{aligned} \mu_c &= ce^{-\int P(s)ds} \\ &= ce^{-\int -k_3 ds} \\ &= ce^{k_3 s} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \mu_p &= e^{-\int P(s)ds} \int e^{\int P(s)ds} Q(s)ds \\ &= e^{-\int -k_3 ds} \int e^{\int -k_3 ds} 0 ds \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$\mu(s) = \mu_c + \mu_p = ce^{k_3 s}$$

bulunur. Elde edilen $\lambda(s)$ ve $\mu(s)$ değerleri (4.86) denkleminin birinci eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} -\lambda(s)k_1(s) - \mu(s)k_2(s) &= 1 \\ -ce^{-k_3 s}k_1 - ce^{k_3 s}k_2 &= 1 \\ \frac{k_1}{e^{k_3 s}} + k_2 e^{k_3 s} &= 1 \\ k_1 + k_2 e^{2k_3 s} &= e^{k_3 s} \\ k_2 &= \frac{e^{k_3 s} - k_1}{e^{2k_3 s}} \\ k_2 &= e^{-k_3 s} - k_1 e^{-2k_3 s} \end{aligned}$$

olup $k_3 = 0$ alınırsa

$$k_2 = 1 - k_1$$

olur. Bu durumda $k_1 + k_2 = 1$ ve $k_3 = 0$ olduğunda

$$\alpha(s) = \lambda(s)\mathbf{n}_q + \mu(s)\mathbf{b}_q$$
$$\alpha(s) = (ce^{-k_3 s})\mathbf{n}_q + (ce^{k_3 s})\mathbf{b}_q$$

bulunur.

5. MINKOWSKI UZAYINDA YÖNLÜ NULL EĞRİ ÇİFTLERİ

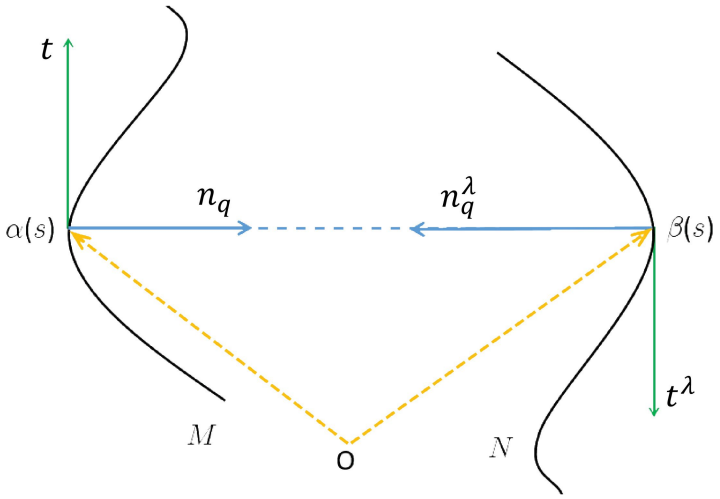
Bu bölüm $\mathbb{R}_1^3$ uzayında, dördüncü bölümde bir uzay eğrisi için tanımlanan quasi-çatı yapısı kullanılarak elde edilen yönlü null ve pseudo null Bertrand ve Mannheim eğri çiftleri için bazı teoremlerden oluşmaktadır.

5.1. Yönlü Null ve Pseudo Null Bertrand Eğri Çiftleri

Minkowski Uzayında Yönlü Null Bertrand Eğri Çiftleri

Bu kısımda, $\mathbb{R}_1^3$ uzayında null bir eğrinin $\mathbf{n}_q$ vektörü yardımıyla yönlü null Bertrand eğri çiftleri tanımlanmıştır. Burada quasi-çatı vektörleri **t** null, **k** (spacelike, timelike, null), $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle \neq 0$ olup bu durumda $\mathbf{n}_q$ spacelike ve $\mathbf{b}_q$ null şeklinde kullanılmıştır.

Tanım 5.1.1. (I, α) ve (I, β) haritaları yardımıyla $\mathbb{R}_1^3$ uzayında verilen iki uzay eğrisi M ve N için null quasi-çatı vektörleri sırasıyla $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ ve $\{\mathbf{t}^\lambda, \mathbf{n}_q^\lambda, \mathbf{b}_q^\lambda\}$ olsun. Eğer null quasi-çatının ikinci vektörleri olan $\mathbf{n}_q$ ile $\mathbf{n}_q^\lambda$ lineer bağımlıysa bu eğrilere yönlü null Bertrand eğri ikilisi adı verilir.



Şekil 5.1 Yönlü Bertrand eğri çifti

Teorem 5.1.1. Yönlü null Bertrand eğri çifti olan birim hızlı $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ eğrileri için yönlü null Bertrand eğrilerinin karşılıklı noktalar arasında bulunan uzaklığı sabittir.

İspat: $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ ve $\left\{\mathbf{t}^\lambda, \mathbf{n}_q^\lambda, \mathbf{b}_q^\lambda\right\}$, sırasıyla $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ Bertrand eğri çiftlerinin quasi-çatılarını göstersin. Şekil 5.1 ile

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda \mathbf{n}_q \tag{5.1}$$

elde edilir. (5.1) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\beta(s)}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} = \frac{d\alpha(s)}{ds} + \lambda \mathbf{n}_q' + \lambda' \mathbf{n}_q \tag{5.2}$$

bulunur. $\dfrac{d\beta(s)}{ds_1} = \mathbf{t}^\lambda$ olmak üzere (4.2) eşitliklerinde yer alan $\mathbf{n}_q'$ değeri (5.2) denkleminde yazılırsa

$$\mathbf{t}^\lambda \frac{ds_1}{ds} = \mathbf{t} + \lambda\left(k_3 \mathbf{t} - k_1 \mathbf{b}_q\right) + \lambda' \mathbf{n}_q$$

olur. Bulunan bu eşitlik düzenlenirse

$$\mathbf{t}^\lambda \frac{ds_1}{ds} = (1 + \lambda k_3)\mathbf{t} + \lambda' \mathbf{n}_q - \lambda k_1 \mathbf{b}_q \tag{5.3}$$

sonucuna ulaşılır. $\mathbf{n}_q$ ile (5.3) eşitliği skaler olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{t}^\lambda, \mathbf{n}_q \right\rangle \frac{ds_1}{ds} &= (1 + \lambda k_3)\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle}_{0} + \lambda' \underbrace{\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle}_{1} - \lambda k_1 \underbrace{\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{n}_q \rangle}_{0} \\ &= \lambda' \end{aligned}$$

bulunur. α ve β Bertrand eğri çifti olduğundan $\mathbf{n}_q$ ile $\mathbf{n}_q^\lambda$ lineer bağımlıdır. Bu durumda null quasi-çatı yapısının özelliği gereğince $\left\langle \mathbf{t}^\lambda, \mathbf{n}_q^\lambda \right\rangle = 0$ olup $\mathbf{n}_q$ ile $\mathbf{n}_q^\lambda$ lineer bağımlılığı birlikte ele alınırsa $\left\langle \mathbf{t}^\lambda, \mathbf{n}_q \right\rangle = 0$ olarak bulunur. Bu durumda

$$\lambda' = 0$$

olur. O halde $\lambda =$ sabittir. Uzaklık fonksiyonu tanımı gereğince

$$d\left(\alpha(s), \beta(s)\right) = \left\|\beta(s) - \alpha(s)\right\|$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} \left\|\beta(s) - \alpha(s)\right\| &= \left\|\lambda \mathbf{n}_q(s)\right\| \\ &= |\lambda| \left\|\mathbf{n}_q(s)\right\| \\ &= |\lambda| \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak, α ve β eğrilerinin karşılıklı noktalar arasında bulunan uzaklığı sabittir.

Teorem 5.1.2. α, null quasi-çatılı yönlü bir null eğri olsun. O zaman, α yönlü bir Bertrand eğrisidir bu durumda α bir null geodeziktir ya da k_3 üçüncü eğriliği sabit olan yönlü null eğridir.

İspat: (α, β) bir yönlü Bertrand çifti olsun. O zaman $\lambda \neq 0$ fonksiyonu, α eğrisi s parametresi ile β eğrisi $s_1 = s_1(s)$ parametresi ile olmak üzere

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda(s)\mathbf{n}_q \tag{5.4}$$

şeklinde ifade edilebilir. (5.4) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\beta(s)}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} &= \frac{d\alpha(s)}{ds} + \lambda'(s)\mathbf{n}_q + \lambda(s)\mathbf{n}_q' \\ \mathbf{t}^\lambda \frac{ds_1}{ds} &= \mathbf{t} + \lambda'(s)\mathbf{n}_q + \lambda(s)\mathbf{n}_q' \end{aligned}$$

olur. Burada s_1, β eğrisinin parametresidir. (4.2) eşitliğinden $\mathbf{n}_q'$ değeri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^\lambda \frac{ds_1}{ds} &= \mathbf{t} + \lambda'(s)\mathbf{n}_q + \lambda(s)(k_3\mathbf{t} - k_1\mathbf{b}_q) \\ &= (1+\lambda k_3)\mathbf{t} + \lambda'(s)\mathbf{n}_q - \lambda(s)k_1\mathbf{b}_q \end{aligned} \tag{5.5}$$

bulunur. $\mathbf{t}^\lambda$ null olduğundan

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{t}^\lambda, \mathbf{t}^\lambda \right\rangle &= \langle (1+\lambda k_3)\mathbf{t} + \lambda'\mathbf{n}_q - \lambda k_1 \mathbf{b}_q, (1+\lambda k_3)\mathbf{t} + \lambda'\mathbf{n}_q - \lambda k_1 \mathbf{b}_q \rangle \\ &= -2\lambda k_1(1+\lambda k_3)\left\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \right\rangle + (\lambda')^2 \left\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \right\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

olup buradan

$$\begin{aligned} -2\lambda k_1(1+\lambda k_3) + (\lambda')^2 &= 0 \\ 2\lambda k_1(1+\lambda k_3) &= (\lambda')^2 \end{aligned} \tag{5.6}$$

elde edilir.

Ayrıca β, α eğrisinin Bertrand çifti olduğundan $\mathbf{n}_q^\lambda$, $\mathbf{n}_q$ nun yönündedir. Böylece

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{t}^\lambda, \mathbf{n}_q^\lambda \right\rangle &= \left\langle \mathbf{t}^\lambda, \mathbf{n}_q \right\rangle = 0 \\ \left\langle \mathbf{t}^\lambda, \mathbf{n}_q \right\rangle &= (1+\lambda k_3)\left\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \right\rangle + \lambda' \left\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \right\rangle - \lambda k_1 \left\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{n}_q \right\rangle \\ &= \lambda' \end{aligned}$$

eşitliğinden $\lambda' = 0 \Rightarrow \lambda = sabit$ bulunur. Bu değer (5.6) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\lambda k_1(1+\lambda k_3) = 0$$

ve böylece $k_1 = 0$ ya da $k_3 = -\dfrac{1}{\lambda} = sabit$ bulunur.

(α, β) Bertrand çiftini $k_1 = 0$ ya da $k_3 = -\dfrac{1}{\lambda} = sabit$ olması durumuna göre daha detaylı inceleyelim.

Durum 1. $k_1 = 0$ ise α bir null geodeziktir.

Durum 2. $k_3 = -\dfrac{1}{\lambda}$ ise (5.5) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\mathbf{t}^{\lambda}\frac{ds_1}{ds} &= (1+\lambda k_3)\mathbf{t} + \lambda'\mathbf{n}_q - \lambda k_1\mathbf{b}_q \\ &= (1+\lambda k_3)\mathbf{t} - \lambda k_1\mathbf{b}_q \\ &= (1+\lambda k_3)\mathbf{t} - \lambda k_1\mathbf{b}_q \\ &= -\lambda k_1\mathbf{b}_q\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\mathbf{t}^{\lambda} = -\lambda k_1\mathbf{b}_q\frac{ds}{ds_1}$$

bulunur. Buradan

$$\mu(s) = -\lambda k_1\frac{ds}{ds_1}(s) \neq 0$$

için

$$\mathbf{t}^{\lambda}(s_1(s)) = \mu(s)\mathbf{b}_q \tag{5.7}$$

olur.

İki null çatı arasında μ_1 sabiti için

$$\mathbf{t}^{\lambda} = \mu_1\mathbf{t}, \quad \mathbf{n}_q^{\lambda} = \mathbf{n}_q, \quad \mathbf{b}_q^{\lambda} = \mu_1^{-1}\mathbf{b}_q \tag{5.8}$$

olacak şekilde bir bağıntı vardır (Duggal ve Bejancu, 1996).

(5.7) eşitliği (5.8) bağıntıları kullanılarak düzenlenirse

$$\mathbf{b}_q^{\lambda}(s_1(s)) = \mu^{-1}\mathbf{t}, \quad \mathbf{n}_q^{\lambda}(s_1(s)) = -\mathbf{n}_q$$

bulunur. (5.7) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{t}^{\lambda}}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} &= \frac{d\mu}{ds}\mathbf{b}_q + \mu\mathbf{b}_q' \\ &= \frac{d\mu}{ds}\mathbf{b}_q + \mu(-k_3\mathbf{n}_q - k_2\mathbf{b}_q) \\ &= (\frac{d\mu}{ds} - \mu k_2)\mathbf{b}_q - \mu k_3\mathbf{n}_q\end{aligned}$$

olur. α ve β için (4.2) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{ds_1}{ds}(k_2^{\lambda}\mathbf{t}^{\lambda} + k_1^{\lambda}\mathbf{n}_q^{\lambda}) &= (\frac{d\mu}{ds} - \mu k_2)\mathbf{b}_q - \mu k_3\mathbf{n}_q \\ &= -\mu k_2\mathbf{b}_q + \frac{\mu}{\lambda}\mathbf{n}_q\end{aligned}$$

bulunur. μ sabit olup

$$\mathbf{t}^{\lambda} = -\lambda k_1\mathbf{b}_q\frac{ds}{ds_1}$$

yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{ds_1}{ds}\left(k_2^\lambda\left(-\lambda k_1\mathbf{b}_q\frac{ds}{ds_1}\right)\right)+\frac{ds_1}{ds}k_1^\lambda\mathbf{n}_q^\lambda &= -\mu k_2\mathbf{b}_q+\frac{\mu}{\lambda}\underbrace{\mathbf{n}_q}_{-\mathbf{n}_q^\lambda}\\ -\lambda k_1k_2^\lambda\mathbf{b}_q+\frac{ds_1}{ds}k_1^\lambda\mathbf{n}_q^\lambda &= -\mu k_2\mathbf{b}_q-\frac{\mu}{\lambda}\mathbf{n}_q^\lambda\end{aligned}$$

olur, son eşitlikten

$$\begin{aligned}-\lambda k_1k_2^\lambda\mathbf{b}_q=-\mu k_2\mathbf{b}_q &\Rightarrow \lambda k_1k_2^\lambda=\mu k_2\\ &\Rightarrow \frac{\mu}{\lambda}=\frac{k_1k_2^\lambda}{k_2}\end{aligned}\tag{5.9}$$

ve

$$\frac{ds_1}{ds}k_1^\lambda\mathbf{n}_q^\lambda=-\frac{\mu}{\lambda}\mathbf{n}_q^\lambda \Rightarrow k_1^\lambda=\frac{-\frac{\mu}{\lambda}}{\frac{ds_1}{ds}}\tag{5.10}$$

bulunur. $\mu(s)=-\lambda k_1\dfrac{ds}{ds_1}$ eşitliği (5.9) denkleminde yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{-\lambda k_1\frac{ds}{ds_1}}{\lambda}=\frac{k_1k_2^\lambda}{k_2} &\Rightarrow -\frac{ds}{ds_1}=\frac{k_2^\lambda}{k_2}\\ &\Rightarrow k_2^\lambda=-k_2\frac{ds}{ds_1}\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde $\mu(s)=-\lambda k_1\dfrac{ds}{ds_1}$ eşitliği (5.10) denkleminde yazılırsa

$$\begin{aligned}k_1^\lambda &= \frac{-\frac{-\lambda k_1\frac{ds}{ds_1}}{\lambda}}{\frac{ds_1}{ds}}\\ &= \frac{k_1\frac{ds}{ds_1}}{\frac{ds_1}{ds}}\\ &= k_1\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2\end{aligned}$$

bulunur.

Daha önce $\mathbf{b}_q^\lambda(s_1(s))=\mu^{-1}\mathbf{t}$ olarak verilen eşitliğin s ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{b}_q^\lambda}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} &= (\mu^{-1})'\mathbf{t}+\mu^{-1}\mathbf{t}'\\ &= \mu^{-1}\mathbf{t}'\\ (-k_3^\lambda\underbrace{\mathbf{n}_q^\lambda}_{-\mathbf{n}_q}-k_2^\lambda\mathbf{b}_q^\lambda)\frac{ds_1}{ds} &= \frac{1}{\mu}(k_2\mathbf{t}+k_1\mathbf{n}_q)\\ (k_3^\lambda\mathbf{n}_q-k_2^\lambda\mathbf{b}_q^\lambda)\frac{ds_1}{ds} &= \frac{1}{\mu}(k_2\mathbf{t}+k_1\mathbf{n}_q)\end{aligned}$$

olur. $k_2^\lambda = -k_2\dfrac{ds}{ds_1}$ değeri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\left(k_3^\lambda \mathbf{n}_q + k_2\frac{ds}{ds_1}\underbrace{\mathbf{b}_q^\lambda}_{\mu^{-1}\mathbf{t}}\right)\frac{ds_1}{ds} &= \frac{1}{\mu}k_2\mathbf{t} + \frac{1}{\mu}k_1\mathbf{n}_q \\
k_3^\lambda \mathbf{n}_q\frac{ds_1}{ds} + \frac{1}{\mu}k_2\mathbf{t}\frac{ds}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} &= \frac{1}{\mu}k_2\mathbf{t} + \frac{1}{\mu}k_1\mathbf{n}_q \\
k_3^\lambda \mathbf{n}_q\frac{ds_1}{ds} + \frac{1}{\mu}k_2\mathbf{t} &= \frac{1}{\mu}k_2\mathbf{t} + \frac{1}{\mu}k_1\mathbf{n}_q \\
k_3^\lambda \mathbf{n}_q\frac{ds_1}{ds} &= \frac{1}{\mu}k_1\mathbf{n}_q \\
k_3^\lambda\frac{ds_1}{ds} &= \frac{1}{\mu}k_1
\end{aligned}$$

bulunur. $\mu = -\lambda k_1\dfrac{ds}{ds_1}$ eşitliği son denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
k_3^\lambda\frac{ds_1}{ds} &= \frac{1}{-\lambda k_1\dfrac{ds}{ds_1}}k_1 \\
&= -\frac{ds_1}{\lambda k_1 ds}k_1 \\
k_3^\lambda &= -\frac{1}{\lambda} = k_3
\end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.1.3. Yönlü null Bertrand eğri çifti olan birim hızlı $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ eğrilerinin **k** vektörü (spacelike, timelike, null) ve $\lambda \neq 0$ olmak üzere $k_1 = 0$ ise **t** ve $\mathbf{t}^\lambda$ vektörleri lineer bağımlıdır.

İspat: $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ yönlü null Bertrand eğri çiftinin null quasi-çatıları sırasıyla $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ ve $\{\mathbf{t}^\lambda, \mathbf{n}_q^\lambda, \mathbf{b}_q^\lambda\}$ ile verilsin. Şekil 5.1 ile

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda\mathbf{n}_q \tag{5.11}$$

eşitliği elde edilir. (5.11) eşitliği s parametresine göre türevlenirse

$$\frac{d\beta(s_1)}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} = \frac{d\alpha(s)}{ds} + \lambda\mathbf{n}_q' + \lambda'\mathbf{n}_q$$

bulunur. Bu durumda (4.2) denklemi kullanılarak $\mathbf{n}_q'$ değeri yerine yazılırsa

$$\mathbf{t}^\lambda\frac{ds_1}{ds} = \mathbf{t} + \lambda(k_3\mathbf{t} - k_1\mathbf{b}_q) + \lambda'\mathbf{n}_q$$

olur. Son eşitlik düzenlenirse

$$\mathbf{t}^\lambda\frac{ds_1}{ds} = (1 + \lambda k_3)\mathbf{t} + \lambda'\mathbf{n_q} - \lambda k_1\mathbf{b}_q \tag{5.12}$$

eşitliği elde edilir. (5.12) denkleminde $\lambda' = 0$ değeri yerine yazılırsa

$$\mathbf{t}^{\lambda}\frac{ds_1}{ds} = (1+\lambda k_3)\mathbf{t} - \lambda k_1 \mathbf{b}_q$$

olur. Son eşitliğin **t** ile skaler olarak çarpımından

$$\left\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}^{\lambda} \right\rangle \frac{ds_1}{ds} = (1+\lambda k_3)\left\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \right\rangle - \lambda k_1 \left\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \right\rangle \tag{5.13}$$

bulunur. α eğrisi null olduğundan $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = 0$ ve $\left\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \right\rangle = 1$ olup (5.13) eşitliği

$$\left\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}^{\lambda} \right\rangle \frac{ds_1}{ds} = -\lambda k_1$$

olur. $\lambda' = 0$ olmak üzere $\lambda = sabit \neq 0$ olup teoremin ifadesi gereğince $k_1 = 0$ olmak üzere

$$\left\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}^{\lambda} \right\rangle \frac{ds_1}{ds} = 0$$

bulunur. Burada $\dfrac{ds_1}{ds} = sabit \neq 0$ olduğundan

$$\left\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}^{\lambda} \right\rangle = 0$$

olur. Bu ise **t** ile $\mathbf{t}^{\lambda}$ vektörlerinin ortogonal olduğunu gösterir. Bu durumda null vektörler ortogonal ise lineer bağımlıdır teoremi gereğince **t** ve $\mathbf{t}^{\lambda}$ lineer bağımlıdır.

Minkowski Uzayında Yönlü Pseudo Null Bertrand Eğri Çiftleri

Bu kısımda, $\mathbb{R}_1^3$ uzayında pseudo null bir eğrinin $\mathbf{n}_q$ vektörü yardımıyla yönlü pseudo null Bertrand eğri çiftleri tanımlanmıştır. Burada quasi-çatı vektörleri **t** spacelike, **k** null, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle = 0$ olup bu durumda $\mathbf{n}_q$ ve $\mathbf{b}_q$ null şeklinde kullanılmıştır.

Teorem 5.1.4. Yönlü pseudo null Bertrand eğri çifti olan birim hızlı $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ eğrileri için yönlü pseudo null Bertrand eğrilerinin karşılıklı noktalarında bulunan **t** ve $\mathbf{t}^{\lambda}$ vektörleri arasındaki açı sabittir.

İspat. Şekil 5.1 kullanılırsa

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda \mathbf{n}_q$$

eşitliği yazılır. Eşitliğin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\beta(s_1)}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} = \frac{d\alpha(s)}{ds} + \lambda \mathbf{n}_q' + \lambda' \mathbf{n}_q \tag{5.14}$$

bulunur. (5.14) eşitliğinde (4.74) yerine yazılırsa

$$\mathbf{t}^{\lambda}\frac{ds_1}{ds} = \mathbf{t} + \lambda(-k_1\mathbf{t}+k_3\mathbf{n}_q)+\lambda'\mathbf{n}_q$$

elde edilir. Son eşitlik düzenlenirse

$$\mathbf{t}^{\lambda}\frac{ds_1}{ds} = (1-\lambda k_1)\mathbf{t}+(\lambda k_3+\lambda')\mathbf{n_q} \tag{5.15}$$

olur. (5.15) denkleminin normu alınırsa

$$\sqrt{\left|\langle \mathbf{t}^{\lambda}, \mathbf{t}^{\lambda}\rangle \left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2\right|} = \sqrt{\left|(1-\lambda k_1)^2\langle \mathbf{t},\mathbf{t}\rangle + (\lambda k_3+\lambda')^2\langle \mathbf{n}_q,\mathbf{n}_q\rangle\right|}$$

olup ve buradan

$$\frac{ds_1}{ds} = \pm(1-\lambda k_1) \tag{5.16}$$

bulunur. O halde (5.16) denklemi (5.15) denkleminde yerine yazılırsa

$$\mathbf{t}^{\lambda} = \pm\frac{(1-\lambda k_1)\mathbf{t}+(\lambda k_3+\lambda')\mathbf{n_q}}{1-\lambda k_1} \tag{5.17}$$

eşitliğine ulaşılır. Ayrıca φ, $\mathbf{t}$ ve $\mathbf{t}^{\lambda}$ spacelike vektörleri arasındaki açıyı temsil etsin. Bu durumda

$$\left\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}^{\lambda}\right\rangle = \cos\varphi$$

olur. (5.17) denkleminin $\mathbf{t}$ ile skaler çarpımından

$$\cos\varphi = \pm\frac{(1-\lambda k_1)}{(1-\lambda k_1)}\langle \mathbf{t},\mathbf{t}\rangle$$

bulunur. O halde $\cos\varphi = \pm 1$ sonucuna ulaşılır. Buradan $\varphi = 0$ veya $\varphi = \pi$ olur. Yani teğet vektörler arasındaki açı sabittir.

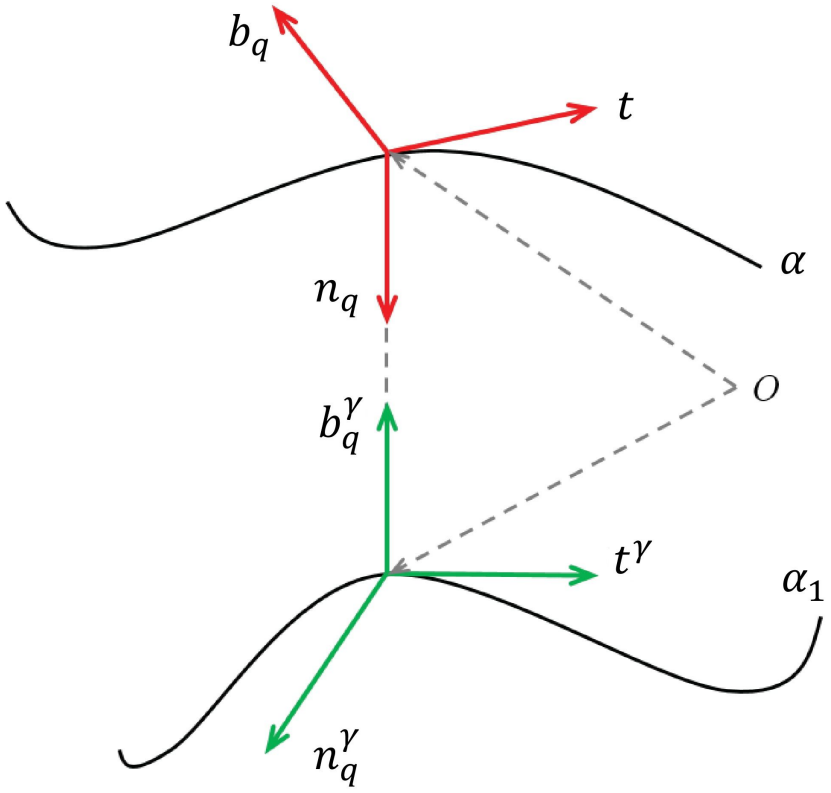
5.2. Yönlü Null ve Pseudo Null Mannheim Eğri Çiftleri

Minkowski Uzayında Yönlü Null Mannheim Eğri Çiftleri

Bu kısımda, $\mathbb{R}_1^3$ uzayında null bir eğrinin $\mathbf{n}_q$ vektörü yardımıyla yönlü null Mannheim eğri çiftleri tanımlanmıştır. Burada quasi-çatı vektörleri $\mathbf{t}$ null, $\mathbf{k}$ (spacelike,timelike,null), $\langle \mathbf{t},\mathbf{k}\rangle \neq 0$ olup bu durumda $\mathbf{n}_q$ spacelike ve $\mathbf{b}_q$ null şeklinde kullanılmıştır.

Tanım 5.2.1. α ve α_1, 3-boyutlu Minkowski uzayında birim hızlı eğriler olsun. α eğrisinin yay uzunluğu parametresi veya pseudo yay uzunluğu parametresi s olmak üzere α

eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki quasi-çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ ve α_1 eğrisinin yay uzunluğu parametresi veya pseudo yay uzunluğu parametresi s_1 olmak üzere α_1 eğrisinin, $\alpha_1(s_1)$ noktasındaki quasi-çatısı $\{\mathbf{t}^\gamma, \mathbf{n}_q^\gamma, \mathbf{b}_q^\gamma\}$ olsun. α eğrisinin quasi-normali ile α_1 eğrisinin quasi-binormali lineer bağımlı ise α eğrisine yönlü Mannheim eğrisi, α_1 eğrisine α eğrisinin yönlü Mannheim partner eğrisi ve $\{\alpha, \alpha_1\}$ ikilisine yönlü Mannheim eğri çifti denir.



Şekil 5.2 Yönlü Mannheim eğri çifti

Bu tanıma göre

$$\alpha_1(s_1) = \alpha(s) + \lambda(s)\mathbf{n}_q$$

veya

$$\alpha(s) = \alpha_1(s_1) + \lambda(s_1)\mathbf{b}_q^\gamma(s_1)$$

Mannheim eğri eşinin denklemidir.

Teorem 5.2.1. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında $k_3^\gamma = 0$ ya da $k_3^\gamma \neq 0$ ve $k_2^\gamma = \dfrac{1}{\lambda\varepsilon_0}$ olduğunda yönlü null Mannheim eğri yoktur. Burada $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = \varepsilon_0$, α_1 eğrisinin eğrilikleri k_3^γ ve k_2^γ alınmıştır.

İspat: $\alpha, \mathbb{R}_1^3$ uzayında yönlü null eğri olsun. Kabul edelim ki α_1, α eğrisinin Mannheim partner eğrisi olsun. Bu durumda α eğrisinin quasi-normali $\mathbf{n}_q$ ile α_1 eğrisinin quasi-binormali $\mathbf{b}_q^\gamma$ lineer bağımlıdır. O halde $\mathbf{b}_q^\gamma$ spacelike vektördür. Dolayısıyla α_1 timelike ya da spacelike eğridir ve quasi-çatının türev denklemlerini sağlar. Şekil 5.2 ile verilen $\{\alpha, \alpha_1\}$ Mannheim eğri çifti olduğundan

$$\alpha(s) = \alpha_1(s_1) + \lambda(s_1)\mathbf{b}_q^\gamma(s_1) \tag{5.18}$$

denklemini sağlar. Şimdi $k_3^\gamma(s_1) = 0$ ve $k_3^\gamma(s_1) \neq 0, k_2^\gamma = \dfrac{1}{\lambda\varepsilon_0}$ durumlarını inceleyeceğiz.

(1) $k_3^\gamma(s_1) = 0$ ise;

(5.18) eşitliğinin s_1 parametresine göre türevi alınarak (3.2) quasi-çatı türev denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{ds_1} &= \alpha_1' + \lambda'\mathbf{b}_q^\gamma + \lambda\mathbf{b}_q^{\gamma\prime} \\
\mathbf{t}\frac{ds}{ds_1} &= \mathbf{t}^\gamma + \lambda'\mathbf{b}_q^\gamma + \lambda\mathbf{b}_q^{\gamma\prime} \\
&= \mathbf{t}^\gamma + \lambda'\mathbf{b}_q^\gamma + \lambda(-\varepsilon_0 k_2^\gamma\mathbf{t}^\gamma - \varepsilon_1 k_3^\gamma\mathbf{n}_q^\gamma) \\
&= (1 - \lambda\varepsilon_0 k_2^\gamma)\mathbf{t}^\gamma - \lambda\varepsilon_1 k_3^\gamma\mathbf{n}_q^\gamma + \lambda'\mathbf{b}_q^\gamma
\end{aligned}$$

olup $k_3^\gamma(s_1) = 0$ olduğundan

$$\mathbf{t}\frac{ds}{ds_1} = (1 - \lambda\varepsilon_0 k_2^\gamma)\mathbf{t}^\gamma + \lambda'\mathbf{b}_q^\gamma \tag{5.19}$$

elde edilir. $\mathbf{n}_q$ ile $\mathbf{b}_q^\gamma$ vektörü çakışık olduğundan $\mathbf{n}_q \perp \mathbf{n}_q^\gamma$ bulunur. (5.19) denkleminin her iki tarafının $\mathbf{n}_q$ ile skaler çarpımı alınarak

$$\underbrace{\langle\mathbf{t}, \mathbf{n}_q\rangle}_{0}\frac{ds}{ds_1} = (1 - \lambda\varepsilon_0 k_2^\gamma)\langle\mathbf{t}^\gamma, \mathbf{n}_q\rangle + \lambda'\langle\mathbf{b}_q^\gamma, \mathbf{n}_q\rangle \tag{5.20}$$

ifadesinden

$$(1 - \lambda\varepsilon_0 k_2^\gamma)\langle\mathbf{t}^\gamma, \mathbf{n}_q\rangle + \lambda'\langle\mathbf{b}_q^\gamma, \mathbf{n}_q\rangle = 0$$

olur ve buradan $\lambda' = 0$ bulunur.

Bu durumda (5.19) eşitliğinde $\lambda' = 0$ değeri yerine yazılırsa

$$\mathbf{t}\frac{ds}{ds_1} = (1 - \lambda\varepsilon_0 k_2^\gamma)\mathbf{t}^\gamma$$

olur. Yani $\mathbf{t}$ ile $\mathbf{t}^\gamma$ vektörleri lineer bağımlıdır. Ancak $\mathbf{t}$ null vektör ve $\mathbf{t}^\gamma$ null olmayan bir vektör olduğundan bu bir çelişkidir.

(2) $k_3^\gamma(s_1) \neq 0$ ise;

(5.18) eşitliğinin s_1 parametresine göre türevi alınıp (3.2) yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{ds_1} &= \frac{d\alpha_1}{ds_1} + \lambda'\mathbf{b}_q^\gamma + \lambda\mathbf{b}_q^{\gamma\prime} \\ \mathbf{t}\frac{ds}{ds_1} &= \mathbf{t}^\gamma + \lambda'\mathbf{b}_q^\gamma + \lambda(-\varepsilon_0 k_2^\gamma \mathbf{t}^\gamma - \varepsilon_1 k_3^\gamma \mathbf{n}_q^\gamma) \end{aligned} \tag{5.21}$$

elde edilir. (5.21) eşitliğinin her iki tarafı $\mathbf{n}_q$ ile skaler çarpılırsa

$$\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q\rangle}_{0}\frac{ds}{ds_1} = \langle \mathbf{t}^\gamma, \mathbf{n}_q\rangle + \lambda'\langle \mathbf{b}_q^\gamma, \mathbf{n}_q\rangle - \lambda\varepsilon_0 k_2^\gamma\langle \mathbf{t}^\gamma, \mathbf{n}_q\rangle - \lambda\varepsilon_1 k_3^\gamma\langle \mathbf{n}_q^\gamma, \mathbf{n}_q\rangle \tag{5.22}$$

eşitliği bulunur. (5.22) eşitliği

$$(1-\lambda\varepsilon_0 k_2^\gamma)\langle \mathbf{t}^\gamma, \mathbf{n}_q\rangle + \lambda' \underbrace{\langle \mathbf{b}_q^\gamma, \mathbf{n}_q\rangle}_{lin.\,bağımlı} - \lambda\varepsilon_1 k_3^\gamma \underbrace{\langle \mathbf{n}_q^\gamma, \mathbf{n}_q\rangle}_{\langle \mathbf{n}_q^\gamma, \mu\mathbf{b}_q^\gamma\rangle = 0} = 0$$

olarak düzenlenirse

$$(1-\lambda\varepsilon_0 k_2^\gamma)\langle \mathbf{t}^\gamma, \mathbf{n}_q\rangle + \lambda'\langle \mathbf{b}_q^\gamma, \mathbf{n}_q\rangle = 0$$

olur. Burada $\lambda' = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $\lambda = sabit \neq 0$ olur. $\lambda = sabit \neq 0$, (5.21) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\mathbf{t}\frac{ds}{ds_1} = (1-\lambda\varepsilon_0 k_2^\gamma)\mathbf{t}^\gamma - \lambda\varepsilon_1 k_3^\gamma \mathbf{n}_q^\gamma \tag{5.23}$$

bulunur. (5.23) eşitliğinin her iki tarafının iç çarpımı yapılıp (3.2) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}\frac{ds}{ds_1}, \mathbf{t}\frac{ds}{ds_1}\rangle &= \left\langle (1-\lambda\varepsilon_0 k_2^\gamma)\mathbf{t}^\gamma - \lambda\varepsilon_1 k_3^\gamma \mathbf{n}_q^\gamma, (1-\lambda\varepsilon_0 k_2^\gamma)\mathbf{t}^\gamma - \lambda\varepsilon_1 k_3^\gamma \mathbf{n}_q^\gamma \right\rangle \\ 0 &= (1-\lambda\varepsilon_0 k_2^\gamma)^2 \underbrace{\langle \mathbf{t}^\gamma, \mathbf{t}^\gamma\rangle}_{\varepsilon_0} - 2\lambda\varepsilon_1 k_3^\gamma(1-\lambda\varepsilon_0 k_2^\gamma)\underbrace{\left\langle \mathbf{t}^\gamma, \mathbf{n}_q^\gamma\right\rangle}_{0} + \lambda^2\varepsilon_1^2 k_3^{\gamma 2}\underbrace{\left\langle \mathbf{n}_q^\gamma, \mathbf{n}_q^\gamma\right\rangle}_{\varepsilon_1} \\ &= (1-\lambda\varepsilon_0 k_2^\gamma)^2\varepsilon_0 + \lambda^2 k_3^{\gamma 2}\varepsilon_1 \end{aligned}$$

buradan

$$\lambda^2 k_3^{\gamma 2}\varepsilon_1 = -\varepsilon_0(1-\lambda\varepsilon_0 k_2^\gamma)^2$$

olup

$$\lambda^2 k_3^{\gamma 2} = -\varepsilon_0\varepsilon_1(1-\lambda\varepsilon_0 k_2^\gamma)^2 \tag{5.24}$$

eşitliği elde edilir.

(**2.a**) (5.24) denkleminde $k_2^\gamma = \dfrac{1}{\lambda\varepsilon_0}$ alınırsa

$$\lambda^2 k_3^{\gamma 2} = -\varepsilon_0\varepsilon_1(1-\lambda\varepsilon_0\frac{1}{\lambda\varepsilon_0})^2 = 0$$

olur. $\lambda = sabit \neq 0$ olduğundan $k_3^\gamma = 0$ bulunur. Bu ise çelişkidir.

Dikkat edilirse;

(2.b) Nonnull eğri için ε_0 ve ε_1 aynı causal karakterine sahip ise yönlü null Mannheim eğri eşi yoktur.

Yani $\langle \mathbf{t}^\gamma, \mathbf{t}^\gamma \rangle = \varepsilon_0$ ve $\langle \mathbf{n}_q^\gamma, \mathbf{n}_q^\gamma \rangle = \varepsilon_1$ olup ikisi de timelike veya spacelike olduğunda $-\varepsilon_0\varepsilon_1 = -1$ bulunur. Bu durumda (5.24) eşitliği

$$\lambda^2 k_3^{\gamma 2} = \underbrace{-\varepsilon_0\varepsilon_1}_{-1}(1 - \lambda\varepsilon_0 k_2^\gamma)^2$$

olur. Buradan

$$\lambda^2 k_3^{\gamma 2} < 0 \Rightarrow k_3^\gamma \neq 0$$

olup reel kök yoktur.

(2.c) $k_2^\gamma = 0$ olması halindeki bu durumda quasi-çatı ile Frenet çatısı aynı anlama geleceğinden yönlü null Mannheim eğri eşi yoktur.

$\langle \mathbf{t}^\gamma, \mathbf{t}^\gamma \rangle = \varepsilon_0$ ve $\langle \mathbf{n}_q^\gamma, \mathbf{n}_q^\gamma \rangle = \varepsilon_1$ olup biri timelike diğeri spacelike olduğunda $-\varepsilon_0\varepsilon_1 = 1$ bulunur. Bu durumda

$$\lambda^2 k_3^{\gamma 2} = \underbrace{-\varepsilon_0\varepsilon_1}_{1}(1 - \lambda\varepsilon_0 k_2^\gamma)^2 = (1 - \lambda\varepsilon_0 k_2^\gamma)^2$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \lambda^2 k_3^{\gamma 2} &= (1 - \lambda\varepsilon_0 k_2^\gamma)^2 \\ k_3^\gamma &= \frac{1 - \lambda\varepsilon_0 k_2^\gamma}{\lambda} \end{aligned}$$

bulunur. Burada $k_2^\gamma = 0$ olmak üzere

$$k_3^\gamma = \frac{1}{\lambda} = sabit \neq 0 \tag{5.25}$$

elde edilir.

α null olduğundan $k_1(s) = 0$ ve $k_1(s) = 1$ durumları ele alınır.

i) $k_1(s) = 0$ ise;

(4.2) denkleminden $\mathbf{t}' = k_2\mathbf{t} + k_1\mathbf{n}_q$ olup $k_1 = 0$ değeri yerine yazılırsa

$$\mathbf{t}' = k_2\mathbf{t}$$

olarak bulunur. (5.23) denkleminin s_1 parametresine göre türevi alınarak (3.2) ve (5.25) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'\frac{ds}{ds_1}+\mathbf{t}\frac{d^2s}{ds_1^2} &= (1-\lambda\varepsilon_0 k_2^\gamma)\mathbf{t}^{\gamma\prime}-\lambda\varepsilon_1 k_3^\gamma \mathbf{n}_q^{\gamma\prime} \\ k_2\mathbf{t}\frac{ds}{ds_1}+\mathbf{t}\frac{d^2s}{ds_1^2} &= (1-\lambda\varepsilon_0 k_2^\gamma)(\varepsilon_1 k_1^\gamma \mathbf{n}_q^\gamma-\varepsilon_0\varepsilon_1 k_2^\gamma \mathbf{b}_q^\gamma)-\lambda\varepsilon_1 k_3^\gamma(-\varepsilon_0 k_1^\gamma \mathbf{t}^\gamma-\varepsilon_0\varepsilon_1 k_3^\gamma \mathbf{b}_q^\gamma) \end{aligned} \tag{5.26}$$

olur. $k_2^\gamma=0$ alınırsa (5.25) eşitliğinden $k_3^\gamma=\dfrac{1}{\lambda}$ olup (5.26) denkleminde yerine yazılırsa

$$k_2\mathbf{t}\frac{ds}{ds_1}+\ \mathbf{t}\frac{d^2s}{ds_1^2} = \varepsilon_1 k_1^\gamma \mathbf{n}_q^\gamma+\varepsilon_0\varepsilon_1 k_1^\gamma \mathbf{t}^\gamma+\varepsilon_0 k_3^\gamma \mathbf{b}_q^\gamma \tag{5.27}$$

bulunur. (5.27) kendisiyle skaler çarpılıp, (3.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left(k_2\frac{ds}{ds_1}+\frac{d^2s}{ds_1^2}\right)^2 \underbrace{\langle \mathbf{t},\mathbf{t}\rangle}_{0} &= \varepsilon_1^2 k_1^{\gamma 2}\underbrace{\langle \mathbf{n}_q^\gamma,\mathbf{n}_q^\gamma\rangle}_{\varepsilon_1}+\varepsilon_0^2\varepsilon_1^2 k_1^{\gamma 2}\underbrace{\langle \mathbf{t}^\gamma,\mathbf{t}^\gamma\rangle}_{\varepsilon_0}+\varepsilon_0^2 k_3^{\gamma 2}\underbrace{\langle \mathbf{b}_q^\gamma,\mathbf{b}_q^\gamma\rangle}_{-\varepsilon_0\varepsilon_1} \\ 0 &= \varepsilon_1 k_1^{\gamma 2}+\varepsilon_0 k_1^{\gamma 2}-\varepsilon_0\varepsilon_1 k_3^{\gamma 2} \\ 0 &= (\varepsilon_1+\varepsilon_0)k_1^{\gamma 2}-\varepsilon_0\varepsilon_1 k_3^{\gamma 2} \\ \varepsilon_0\varepsilon_1 k_3^{\gamma 2} &= k_1^{\gamma 2}\underbrace{(\varepsilon_1+\varepsilon_0)}_{0} \\ \varepsilon_0\varepsilon_1 k_3^{\gamma 2} &= 0 \Rightarrow k_3^{\gamma 2}=0 \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $k_3^\gamma=0$ olur. Bu ise (5.25) ile çelişir.

ii) $k_1(s)=1$ ise;

(5.25) eşitliği , (5.23) te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{t}\frac{ds}{ds_1} &= (1-\lambda\varepsilon_0.0)\mathbf{t}^\gamma-\lambda\varepsilon_1\frac{1}{\lambda}\mathbf{n}_q^\gamma \\ \mathbf{t}\frac{ds}{ds_1} &= \mathbf{t}^\gamma-\varepsilon_1\mathbf{n}_q^\gamma \end{aligned}$$

olur. Bu denklemin s_1 parametresine göre türevi alınarak

$$\mathbf{t}'\frac{ds}{ds_1}\frac{ds}{ds_1}+\mathbf{t}\frac{d^2s}{ds_1^2}=\mathbf{t}^{\gamma\prime}-\varepsilon_1\mathbf{n}_q^{\gamma\prime}$$

bulunur. Burada (4.2) ve (3.2) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} (k_2\mathbf{t}+\underbrace{k_1}_{1}\mathbf{n}_q)\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+\mathbf{t}\frac{d^2s}{ds_1^2} &= \varepsilon_1 k_1^\gamma \mathbf{n}_q^\gamma-\varepsilon_0\varepsilon_1 k_2^\gamma \mathbf{b}_q^\gamma-\varepsilon_1(-\varepsilon_0 k_1^\gamma \mathbf{t}^\gamma-\varepsilon_0\varepsilon_1 k_3^\gamma \mathbf{b}_q^\gamma) \\ (k_2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+\frac{d^2s}{ds_1^2})\mathbf{t}+\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2\mathbf{n}_q &= \varepsilon_1 k_1^\gamma \mathbf{n}_q^\gamma+(\varepsilon_0 k_3^\gamma-\varepsilon_0\varepsilon_1 k_2^\gamma)\mathbf{b}_q^\gamma+\varepsilon_0\varepsilon_1 k_1^\gamma \mathbf{t}^\gamma \end{aligned} \tag{5.28}$$

bulunur. Son olarak $k_2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+\frac{d^2s}{ds_1^2}=\triangle$ ve $\varepsilon_0 k_3^\gamma-\varepsilon_0\varepsilon_1 k_2^\gamma=\blacktriangle$ olarak kullanılırsa

$$\langle\triangle\mathbf{t}+\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2\mathbf{n}_q,\triangle\mathbf{t}+\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2\mathbf{n}_q\rangle=\left\langle\varepsilon_1k_1^\gamma\mathbf{n}_q^\gamma+\blacktriangle\mathbf{b}_q^\gamma+\varepsilon_0\varepsilon_1k_1^\gamma\mathbf{t}^\gamma,\varepsilon_1k_1^\gamma\mathbf{n}_q^\gamma+\blacktriangle\mathbf{b}_q^\gamma+\varepsilon_0\varepsilon_1k_1^\gamma\mathbf{t}^\gamma\right\rangle$$

yazılır. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned}\langle\triangle\mathbf{t}+\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2\mathbf{n}_q,\triangle\mathbf{t}+\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2\mathbf{n}_q\rangle &= \langle\triangle\mathbf{t},\triangle\mathbf{t}\rangle+2\langle\triangle\mathbf{t},\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2\mathbf{n}_q\rangle\\ &\quad+\langle\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2\mathbf{n}_q,\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2\mathbf{n}_q\rangle\end{aligned}$$

olur. Buna göre

$$\begin{aligned}\langle\varepsilon_1k_1^\gamma\mathbf{n}_q^\gamma+\blacktriangle\mathbf{b}_q^\gamma+\varepsilon_0\varepsilon_1k_1^\gamma\mathbf{t}^\gamma,\varepsilon_1k_1^\gamma\mathbf{n}_q^\gamma+\blacktriangle\mathbf{b}_q^\gamma+\varepsilon_0\varepsilon_1k_1^\gamma\mathbf{t}^\gamma\rangle = &\ \varepsilon_1^2(k_1^\gamma)^2\left\langle\mathbf{n}_q^\gamma,\mathbf{n}_q^\gamma\right\rangle\\ &+\varepsilon_1k_1^\gamma\blacktriangle\left\langle\mathbf{n}_q^\gamma,\mathbf{b}_q^\gamma\right\rangle\\ &+\varepsilon_0\varepsilon_1^2(k_1^\gamma)^2\left\langle\mathbf{n}_q^\gamma,\mathbf{t}^\gamma\right\rangle\\ &+\blacktriangle\varepsilon_1k_1^\gamma\left\langle\mathbf{b}_q^\gamma,\mathbf{n}_q^\gamma\right\rangle\\ &+\blacktriangle^2\left\langle\mathbf{b}_q^\gamma,\mathbf{b}_q^\gamma\right\rangle\\ &+\blacktriangle\varepsilon_0\varepsilon_1k_1^\gamma\left\langle\mathbf{b}_q^\gamma,\mathbf{t}^\gamma\right\rangle\\ &+\varepsilon_0\varepsilon_1^2(k_1^\gamma)^2\left\langle\mathbf{t}^\gamma,\mathbf{n}_q^\gamma\right\rangle\\ &+\varepsilon_0\varepsilon_1k_1^\gamma\blacktriangle\left\langle\mathbf{t}^\gamma,\mathbf{b}_q^\gamma\right\rangle\\ &+\varepsilon_0^2\varepsilon_1^2(k_1^\gamma)^2\left\langle\mathbf{t}^\gamma,\mathbf{t}^\gamma\right\rangle\end{aligned}$$

ve buradan (3.2), (5.25) ve (5.28) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4 &= \varepsilon_1k_1^{\gamma2}+\varepsilon_0k_1^{\gamma2}+(\varepsilon_0k_3^\gamma-\varepsilon_0\varepsilon_1k_2^\gamma)^2(-\varepsilon_0\varepsilon_1)\\ &= \varepsilon_1k_1^{\gamma2}+\varepsilon_0k_1^{\gamma2}+(k_3^{\gamma2}-2\varepsilon_1k_2^\gamma k_3^\gamma+k_2^{\gamma2})(-\varepsilon_0\varepsilon_1)\\ &= \varepsilon_1k_1^{\gamma2}+\varepsilon_0k_1^{\gamma2}-\varepsilon_0\varepsilon_1k_3^{\gamma2}+2\varepsilon_0k_2^\gamma k_3^\gamma-\varepsilon_0\varepsilon_1k_2^{\gamma2}\end{aligned}$$

olur. $\left\langle\mathbf{t}_q^\gamma,\mathbf{t}_q^\gamma\right\rangle=\varepsilon_0,\left\langle\mathbf{n}_q^\gamma,\mathbf{n}_q^\gamma\right\rangle=\varepsilon_1$ olup biri timelike diğeri spacelike vektörler olduğundan $\varepsilon_0+\varepsilon_1=0$ olur. $\varepsilon_0+\varepsilon_1=0$ eşitliği ve (5.25) gereğince $k_2^\gamma=0$ eşitliği, son denklem düzenlenerek yerine yazılırsa

$$\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4=(\varepsilon_0+\varepsilon_1)k_1^{\gamma^2}-\varepsilon_0\varepsilon_1k_3^{\gamma2}+2\varepsilon_0k_2^\gamma k_3^\gamma-\varepsilon_0\varepsilon_1k_2^{\gamma2}\Rightarrow\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4=k_3^{\gamma2}=sabit\neq0 \tag{5.29}$$

olur. (5.28) denkleminin $\mathbf{n}_q^\gamma$ ile skaler çarpımı alınarak

$$\begin{aligned}(k_2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+\frac{d^2s}{ds_1^2})\left\langle\mathbf{t},\mathbf{n}_q^\gamma\right\rangle+\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2\left\langle\mathbf{n}_q,\mathbf{n}_q^\gamma\right\rangle &= \varepsilon_1k_1^\gamma\left\langle\mathbf{n}_q^\gamma,\mathbf{n}_q^\gamma\right\rangle\\ &\quad+(\varepsilon_0k_3^\gamma-\varepsilon_0\varepsilon_1k_2^\gamma)\left\langle\mathbf{b}_q^\gamma,\mathbf{n}_q^\gamma\right\rangle\\ &\quad+\varepsilon_0\varepsilon_1k_1^\gamma\left\langle\mathbf{t}^\gamma,\mathbf{n}_q^\gamma\right\rangle\end{aligned}$$

ve (3.2) eşitlikleri kullanılırsa

$$\left(k_2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+\frac{d^2s}{ds_1^2}\right)\left\langle \mathbf{t},\mathbf{n}_q^\gamma\right\rangle+\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2\left\langle \mathbf{n}_q,\mathbf{n}_q^\gamma\right\rangle=k_1^\gamma \tag{5.30}$$

olur. Burada $\mathbf{n}_q$ ile $\mathbf{b}_q^\gamma$ çakışık olduğundan $\mathbf{n}_q\perp\mathbf{n}_q^\gamma$ bulunur. Dolayısıyla $\left\langle \mathbf{n}_q,\mathbf{n}_q^\gamma\right\rangle=0$ olur.

Ayrıca (5.29) gereğince

$$\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4=k_3^{\gamma 2}=sabit\neq 0$$

olup

$$\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2=k_3^\gamma\Rightarrow\frac{ds}{ds_1}=\sqrt{k_3^\gamma}=sabit\neq 0$$

bulunur. Burada son eşitliğin her iki tarafının türevi alınarak

$$\frac{d^2s}{ds_1^2}=\frac{k_3^{\gamma\prime}}{2\sqrt{k_3^\gamma}}=0$$

olur. Bu durumda (5.30) denklemi

$$(k_2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2+\underbrace{\frac{d^2s}{ds_1^2}}_{0})\left\langle \mathbf{t},\mathbf{n}_q^\gamma\right\rangle+\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2\underbrace{\left\langle \mathbf{n}_q,\mathbf{n}_q^\gamma\right\rangle}_{0}=k_1^\gamma$$

olup (5.29) kullanılır, $\dfrac{d^2s}{ds_1^2}=0$ ve $\left\langle \mathbf{n}_q,\mathbf{n}_q^\gamma\right\rangle=0$ değerleri yerine yazılırsa

$$k_2k_3^\gamma\left\langle \mathbf{t},\mathbf{n}_q^\gamma\right\rangle=k_1^\gamma$$

olur. Burada $k_2=0$ olarak alınırsa

$$k_1^\gamma=0$$

bulunur. Dolayısıyla $k_3^\gamma=0$ bulunur. Bu ise (5.25) ile çelişir.

Minkowski Uzayında Yönlü Pseudo Null Mannheim Eğri Çiftleri

Bu kısımda, $\mathbb{R}_1^3$ uzayında pseudo null bir eğrinin $\mathbf{n}_q$ vektörü yardımıyla yönlü pseudo null Mannheim eğri çiftleri tanımlanmıştır. Burada quasi-çatı vektörleri **t** spacelike, **k** null, $\langle \mathbf{t},\mathbf{k}\rangle=0$ olup bu durumda $\mathbf{n}_q$ null ve $\mathbf{b}_q$ null şeklinde kullanılmıştır.

Teorem 5.2.2. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında α pseudo null bir yönlü düzlemsel eğri ve α_1 keyfi bir eğri olsun. Eğer $\{\alpha,\alpha_1\}$ bir Mannheim eğri çifti ise;

i. α_1 eğrisi yönlü pseudo null doğru ise α ve α_1 eğrileri paralel yönlü pseudo null doğrulardır,

ii. α eğrisi yönlü pseudo null bir çember ise α_1 eğrisi de yönlü pseudo null bir doğrudur

önermeleri geçerlidir.

İspat: α, $\mathbb{R}_1^3$ uzayında pseudo null bir yönlü eğri olsun. Kabul edelim ki α_1 eğrisi α eğrisinin yönlü Mannheim partner eğrisi olsun. Bu takdirde α eğrisinin quasi-normali $\mathbf{n}_q$ ile α_1 in quasi-binormali $\mathbf{b}_q^\gamma$ lineer bağımlıdır.

Bu durumda $\mathbf{b}_q^\gamma$ null vektör olacağından α_1 pseudo null veya null bir yönlü eğridir.

(1) Kabul edelim ki α_1 yönlü pseudo null eğri olsun. $\{\alpha, \alpha_1\}$ Mannheim eğri çifti olduğundan

$$\alpha_1(s_1) = \alpha(s) + \lambda(s)\mathbf{n}_q \tag{5.31}$$

olur. (5.31) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha_1' = \mathbf{t} + \lambda'\mathbf{n}_q + \lambda\mathbf{n}_q'$$

bulunur. (4.74) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \alpha_1' &= \mathbf{t} + \lambda'\mathbf{n}_q + \lambda(-k_1\mathbf{t} + k_3\mathbf{n}_q) \\ \alpha_1' &= (1-\lambda k_1)\mathbf{t} + (\lambda' + \lambda k_3)\mathbf{n}_q \end{aligned} \tag{5.32}$$

elde edilir. (5.32) ve (4.74) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1', \alpha_1' \rangle &= \langle (1-\lambda k_1)\mathbf{t} + (\lambda' + \lambda k_3)\mathbf{n}_q, (1-\lambda k_1)\mathbf{t} + (\lambda' + \lambda k_3)\mathbf{n}_q \rangle \\ &= (1-\lambda k_1)^2 \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + 2(1-\lambda k_1)(\lambda' + \lambda k_3) \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle \\ &\quad +(\lambda' + \lambda k_3)^2 \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle \\ &= (1-\lambda k_1)^2 \end{aligned}$$

bulunur.

$$\mathbf{t}^\gamma = \frac{\alpha_1'}{\|\alpha_1'\|} = \frac{1}{\sqrt{|(1-\lambda k_1)^2|}} \left((1-\lambda k_1)\mathbf{t} + (\lambda' + \lambda k_3)\mathbf{n}_q\right)$$

elde edilir. Yani

$$\mathbf{t}^\gamma = \frac{1}{1-\lambda k_1} \left((1-\lambda k_1)\mathbf{t} + (\lambda' + \lambda k_3)\mathbf{n}_q\right) \tag{5.33}$$

olur. Şimdi $k_3 = 0$ ve $k_3 \neq 0$ durumlarını inceleyelim.

(1.a) $k_3 = 0$ ise (5.33) eşitliğinden

$$\mathbf{t}^\gamma = \mathbf{t} + \frac{\lambda'}{1-\lambda k_1}\mathbf{n}_q$$

olur. Bu denklemin **t** ile skaler çarpımı alınarak

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}^\gamma \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + \frac{\lambda'}{1-\lambda k_1} \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle$$

eşitliğinden

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}^\gamma \rangle = 1 \tag{5.34}$$

bulunur.

α yönlü pseudo null eğri olduğundan $k_1 = 0$ ve $k_1 = 1$ durumlarını ele alacağız.

(1.a.1) Eğer $k_1(s) = 0$ ise $\mathbf{n}_q$ ile $\mathbf{b}_q^\gamma$ lineer bağımlı olduğundan $\mathbf{t} \perp \mathbf{n}_q^\gamma$ dır. Dolayısıyla $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q^\gamma \rangle = 0$ eşitliğinin türevi alınarak (4.74) ve (5.34) ile verilen eşitlikler kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q^\gamma \rangle + \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q^{\gamma'} \rangle &= 0 \\
\langle (k_2\mathbf{n}_q + k_1\mathbf{b}_q), \mathbf{n}_q^\gamma \rangle + \langle \mathbf{t}, (-k_1^\gamma \mathbf{t}^\gamma + k_3^\gamma \mathbf{n}_q^\gamma) \rangle &= 0 \\
k_2 \underbrace{\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q^\gamma \rangle}_{1} + \underbrace{k_1 \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{n}_q^\gamma \rangle}_{0} - k_1^\gamma \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}^\gamma \rangle}_{1} + k_3^\gamma \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q^\gamma \rangle}_{0} &= 0 \\
k_2 - k_1^\gamma &= 0 \\
k_1^\gamma &= k_2
\end{aligned}$$

olup α düzlemsel eğri olduğundan $\mathbf{k}_1^\gamma = 0$ bulunur. Bu durumda α_1 yönlü Mannheim eğri eşi bir doğrudur. $\mathbf{n}_q^\gamma$ ve $\mathbf{b}_q^\gamma$ lineer bağımsız null vektörler ve $\mathbf{n}_q = \pm\mathbf{b}_q^\gamma$ olduğundan $\mathbf{b}_q = \pm\mathbf{n}_q^\gamma$ olacaktır. Bu nedenle $\mathbf{t} = \pm\mathbf{t}^\gamma$ olur ki bu durumda α ve α_1 yönlü paralel doğrulardır. Dolayısıyla (i) ifadesi ispatlanmış olur.

(1.a.2) Eğer $k_1(s) = 1$ ise α yönlü eğrisi, $\mathbb{R}_1^3$ uzayının lightlike düzleminde yatan yönlü pseudo null bir çemberdir. $\mathbf{t} \perp \mathbf{n}_q^\gamma$ olup $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q^\gamma \rangle$ denkleminin türevi alınarak (4.74) ile verilen eşitlikler kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q^\gamma \rangle + \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q^{\gamma'} \rangle &= 0 \\
\langle (k_2\mathbf{n}_q + k_1\mathbf{b}_q), \mathbf{n}_q^\gamma \rangle + \langle \mathbf{t}, (-k_1^\gamma \mathbf{t}^\gamma + k_3^\gamma \mathbf{n}_q^\gamma) \rangle &= 0
\end{aligned} \tag{5.35}$$

elde edilir. (5.35) eşitliğinde (5.34) eşitliği kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$k_2 \underbrace{\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q^\gamma \rangle}_{1} + k_1 \underbrace{\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{n}_q^\gamma \rangle}_{0} - k_1^\gamma \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}^\gamma \rangle}_{1} + k_3^\gamma \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q^\gamma \rangle}_{0} = 0$$

bulunur. Buradan

$$k_2 - k_1^\gamma = 0$$

olur. α düzlemsel eğri olduğundan $k_1^\gamma = 0$ bulunur. Bu ise α_1 eğrisinin pseudo null bir yönlü doğru olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla (**ii**) ifadesi ispatlanmış olur.

(1.b) Eğer $k_3 \neq 0$ ise (5.33) eşitliğinin her iki tarafının **t** ile skaler çarpımı alınarak gerekli işlemler yapılırsa

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}^\gamma \rangle = \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle}_{1} + \frac{\lambda' + \lambda k_3}{1 - \lambda k_1} \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle}_{0}$$

olur. Buradan

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}^\gamma \rangle = 1 \tag{5.36}$$

elde edilir. $\mathbf{t} \perp \mathbf{n}_q^\gamma$ olup $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q^\gamma \rangle = 0$ eşitliğinin türevi alınarak (5.36) eşitliği kullanılırsa

$$\langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q^\gamma \rangle + \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q^{\gamma'} \rangle = 0$$

$$\langle (k_2 \mathbf{n}_q + k_1 \mathbf{b}_q), \mathbf{n}_q^\gamma \rangle + \langle \mathbf{t}, (-k_1^\gamma \mathbf{t}^\gamma + k_3^\gamma \mathbf{n}_q^\gamma) \rangle = 0$$

$$k_2 \underbrace{\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q^\gamma \rangle}_{1} + k_1 \underbrace{\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{n}_q^\gamma \rangle}_{0} - k_1^\gamma \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}^\gamma \rangle}_{1} + k_3^\gamma \underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q^\gamma \rangle}_{0} = 0$$

olup α düzlemsel eğri olduğundan $k_1^\gamma = 0$ bulunur.

Bu nedenle $\mathbf{b}_q^\gamma = sabit$ ve $\mathbf{n}_q = \pm \mathbf{b}_q^\gamma$ olduğundan $\mathbf{n}_q = sabit$ ve $\mathbf{n}_q' = 0$ olur. O halde $k_3 = \langle \mathbf{n}_q', \mathbf{b}_q \rangle = 0$ olur, bu ise bir çelişkidir.

(2) Kabul edelim ki α_1 yönlü null bir eğri olsun. $\{\alpha, \alpha_1\}$ Mannheim eğri çifti olduğundan

$$\alpha(s) = \alpha_1(s_1) + \mu(s_1) \mathbf{b}_q^\gamma(s_1) \tag{5.37}$$

eşitliği sağlanır. **(1)** durumunda incelediğimiz gibi $k_1^\gamma(s_1) = 0$ ve $k_1^\gamma(s_1) = 1$ koşullarını inceleyelim.

(2.a) Eğer $k_1^\gamma(s_1) = 0$ ise $\mathbf{b}_q^\gamma = sabit$ vektör olup $\mathbf{b}_q^{\gamma\prime} = 0$ olur. (5.37) eşitliğinin s_1 parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\alpha}{ds} \frac{ds}{ds_1} = \mathbf{t}^\gamma + \mu' \mathbf{b}_q^\gamma + \mu \underbrace{\mathbf{b}_q^{\gamma\prime}}_{0}$$

$$\mathbf{t} \frac{ds}{ds_1} = \mathbf{t}^\gamma + \mu' \mathbf{b}_q^\gamma$$

elde edilir. Bu denklemin her iki tarafının $\mathbf{n}_q$ ile skaler çarpımı alınarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle}_{0} \frac{ds}{ds_1} = \langle \mathbf{t}^\gamma, \mathbf{n}_q \rangle + \mu' \underbrace{\langle \mathbf{b}_q^\gamma, \mathbf{n}_q \rangle}_{0}$$

olur ve buradaki eşitlikten dolayı $\langle \mathbf{t}^\gamma, \mathbf{n}_q \rangle = 0$ olmalıdır. Oysa $\mathbf{n}_q = \pm \mathbf{b}_q^\gamma$ olduğundan $\langle \mathbf{t}^\gamma, \mathbf{b}_q^\gamma \rangle = 0$ olduğu görülür. Bu ise α_1 eğrisinin yönlü null bir eğri olması ile çelişir.

(2.b) Eğer $k_1^\gamma(s_1) = 1$ ise (5.37) eşitliğinin s_1 parametresine göre türevi alınarak (4.2) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{ds_1} &= \mathbf{t}^\gamma + \mu' \mathbf{b}_q^\gamma + \mu \mathbf{b}_q^{\gamma\prime} \\ \mathbf{t}\frac{ds}{ds_1} &= \mathbf{t}^\gamma + \mu' \mathbf{b}_q^\gamma + \mu(-k_3^\gamma \mathbf{n}_q^\gamma - k_2^\gamma \mathbf{b}_q^\gamma) \\ \mathbf{t}\frac{ds}{ds_1} &= \mathbf{t}^\gamma + (-\mu k_3^\gamma)\mathbf{n}_q^\gamma + (\mu' - \mu k_2^\gamma)\mathbf{b}_q^\gamma \end{aligned} \tag{5.38}$$

bulunur. (5.38) denkleminin her iki tarafının $\mathbf{n}_q$ ile skaler çarpımı alınırsa

$$\underbrace{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle}_{0}\frac{ds}{ds_1} = \langle \mathbf{t}^\gamma, \mathbf{n}_q \rangle - \mu k_3^\gamma \underbrace{\langle \mathbf{n}_q^\gamma, \mathbf{n}_q \rangle}_{0} + (\mu' - \mu k_2^\gamma)\underbrace{\langle \mathbf{b}_q^\gamma, \mathbf{n}_q \rangle}_{0}$$

olur ve buradaki eşitlikten dolayı $\langle \mathbf{t}^\gamma, \mathbf{n}_q \rangle = 0$ olmalıdır. Oysa $\mathbf{n}_q = \pm \mathbf{b}_q^\gamma$ olduğundan $\langle \mathbf{t}^\gamma, \mathbf{b}_q^\gamma \rangle = 0$ olduğu görülür ki, bu ise α_1 eğrisinin yönlü null bir eğri olması ile çelişir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Örnek 5.2.1. $\mathbb{R}_1^3 : \mathbb{R}^3; (-,+,+)$ işaretli uzayda $\alpha(s) = (1,1,s)$ ve $\alpha_1(s) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, s\right)$ parametrik denklemleri ile verilen pseudo null doğrularını ele alalım. α eğrisinin türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = (0,0,1)$$

bulunur. Burada

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1$$

olup **t** spacelike olur.

Benzer şekilde

$$\alpha_1'(s) = (0,0,1)$$

olup

$$\langle \alpha_1'(s), \alpha_1'(s) \rangle = 1$$

bulunur. Bu durumda

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}^\gamma = (0,0,1)$$

elde edilir. $\alpha(s)$ eğrisinin $\mathbf{k} = (1,1,0)$ (null) ve

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle &= \langle (0,0,1), (1,1,0) \rangle \\ &= 0 + 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

olacak şekilde null quasi-çatısını hesaplamak için öncelikle

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{k} = - \begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

hesaplanırsa

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{k} = (-1, -1, 0)$$

ve

$$\|\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}\| = \sqrt{|\langle \mathbf{t} \wedge \mathbf{k}, \mathbf{t} \wedge \mathbf{k} \rangle|} = \sqrt{-1 + 1 + 0} = 0$$

olup bu durumda $\mathbf{n}_q = \mathbf{t} \wedge \mathbf{k}$ olarak alınır. Yani

$$\mathbf{n}_q = (-1, -1, 0)$$

olur. Burada $\mathbf{n}_q$ ve $\mathbf{b}_q^\gamma$ lineer bağımlı olduğundan

$$\mathbf{n}_q = \mathbf{b}_q^\gamma = (-1, -1, 0)$$

bulunur.

Buna göre $\mathbf{b}_q$, $\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 1$, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle = 0$ ve $\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 0$ olacak şekilde seçilir. Bu durumda $\mathbf{b}_q = (\lambda, \beta, \gamma)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle &= \gamma = 0 \\ \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle &= \lambda - \beta = 1 \\ \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle &= -\lambda^2 + \beta^2 + \underbrace{\gamma^2}_{0} = 0 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada

$$\beta^2 - \lambda^2 = 0$$

olup

$$\underbrace{(\beta - \lambda)}_{-1}\underbrace{(\beta + \lambda)}_{0} = 0$$

bulunur. Bu durumda

$$\beta - \lambda = -1$$

$$\beta + \lambda = 0$$

eşitliklerinde gerekli işlemler yapılarak

$$\beta = -\frac{1}{2} \text{ ve } \lambda = \frac{1}{2}$$

bulunur. Bu durumda

$$\mathbf{b}_q = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right)$$

olur ve buradan

$$\mathbf{b}_q = \mathbf{n}_q^{\gamma} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$$

bulunur.

Buna göre

$$\alpha_1 = \alpha + \frac{1}{2}\mathbf{n}_q$$

olur. Dolayısıyla $\{\alpha, \alpha_1\}$ bir Mannheim eğri çiftidir.

Örnek 5.2.2. $\mathbb{R}_1^3 : \mathbb{R}^3; (-,+,+)$ işaretli uzayda $\alpha(s) = \left(\frac{s^2}{2}, \frac{s^2}{2}, s\right)$ ve $\alpha_1(s) = (c, c, s)$, $c \in \mathbb{R}$ parametrik denklemleri ile verilen pseudo null çemberini ele alalım. α eğrisinin türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = (s, s, 1)$$

bulunur. Burada

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1$$

olup **t** spacelike olur.

Benzer şekilde

$$\alpha_1'(s) = (0, 0, 1)$$

olup

$$\langle \alpha_1'(s), \alpha_1'(s) \rangle = 1$$

bulunur. Bu durumda

$$\mathbf{t} = (s, s, 1) \text{ ve } \mathbf{t}^{\gamma} = (0, 0, 1)$$

elde edilir. $\alpha(s)$ eğrisinin $\mathbf{k} = (1, 1, 0)$ (null) ve

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}, \mathbf{k} \rangle &= \langle (s, s, 1), (1, 1, 0) \rangle \\ &= -s + s + 0 = 0 \end{aligned}$$

olacak şekilde null quasi-çatısını hesaplamak için öncelikle

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{k} = -\begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ s & s & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

hesaplanırsa

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{k} = (-1, -1, 0)$$

ve

$$\|\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}\| = \sqrt{|\langle \mathbf{t} \wedge \mathbf{k}, \mathbf{t} \wedge \mathbf{k} \rangle|} = \sqrt{-1 + 1 + 0} = 0$$

olup bu durumda $\mathbf{n}_q = \mathbf{t} \wedge \mathbf{k}$ olarak alınır. Yani

$$\mathbf{n}_q = (-1, -1, 0)$$

olur. Burada $\mathbf{n}_q$ ve $\mathbf{b}_q^\gamma$ lineer bağımlı olduğundan

$$\mathbf{n}_q = \mathbf{b}_q^\gamma = (-1, -1, 0)$$

bulunur.

Buna göre $\mathbf{b}_q$, $\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 1$, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle = 0$ ve $\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 0$ olacak şekilde seçilir. Bu durumda $\mathbf{b}_q$=(λ, β, γ) olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle &= -\lambda s + \beta s + \gamma = 0 \\ \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle &= \lambda - \beta = 1 \\ \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle &= -\lambda^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Elde edilen denklem sistemi çözülürse

$$\mathbf{b}_q = \left(\frac{1+s^2}{2}, \frac{-1+s^2}{2}, s \right)$$

bulunur ve buradan

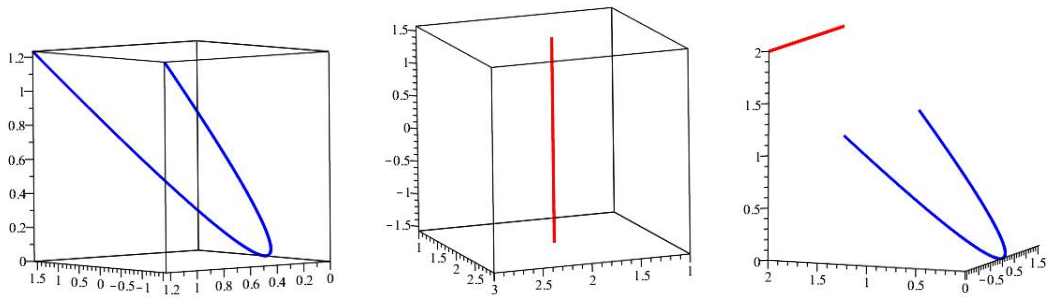
$$\mathbf{b}_q = \mathbf{n}_q^\gamma = \left(\frac{1+s^2}{2}, \frac{-1+s^2}{2}, s \right)$$

olur.

Buna göre

$$\alpha_1 = \alpha - \left(c - \frac{s^2}{2} \right) \mathbf{n}_q$$

olur. Dolayısıyla $\{\alpha, \alpha_1\}$ bir Mannheim eğri çiftidir. α ve α_1 eğrisi sırasıyla Şekil 5.3 ile gösterilmiştir.



Şekil 5.3 α ve α_1 Mannheim eğri çifti

Not: Bu tez çalışması boyunca verilen şekiller maple programı ile çizdirilmiştir.

6. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada kullanılan quasi-çatı yapısının temeli olan quasi-normal vektör tanımı ilk olarak, 1987 yılında Coquillart tarafından bir izdüşüm vektörü kullanılarak verilmiştir. Dede vd., 2015 yılında bu quasi-normal vektör tanımını kullanarak quasi-çatı kavramını tanımlamıştır. Quasi-çatının Frenet, Bishop vb. çatılardan daha fazla avantaja sahip olduğu pek çok çalışmada açıklanmıştır. Yapılan bu çalışmalarda Öklidyen ve Minkowski uzayında eğri ve yüzey teorisi ile ilgili pek çok yapı incelenmesine rağmen null ve pseudo null eğriler için quasi-çatı kavramının incelenmediği görülmüştür.

Çalışmamızda öncelikle diğer çatılardan kullanışlı olmasıyla bilinen quasi-çatı yapısını kullanarak, Minkowski 3-uzayında null ve pseudo null quasi-çatı tanımlama algoritması verilmiştir. Verilen tanımlama algoritmasında null eğrinin quasi-normal vektörünün teorik olarak spacelike veya null olabileceği ispatlanmış, tezin tamamında null eğri için quasi-normal vektör spacelike olarak alınmıştır. Ayrıca null quasi-çatı için; türev denklemleri, vektörel çarpım tanımı ve ispatı, null quasi-çatı yapısını görselleştiren örnekler, Frenet çatı ile arasındaki bağıntılar ve q-eğrilikleriyle ilgili çeşitli teoremler verilmiştir. Benzer şekilde pseudo null quasi-çatı için; türev denklemi, vektörel çarpım tanımı ve ispatı, pseudo null quasi-çatı yapısını görselleştiren örnekler yer almaktadır. Bunun yanı sıra yönlü null ve pseudo null eğrilerin quasi-çatı ile oluşturulan düzlemlerden hangisinde bulunduğu araştırılmıştır. $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ bir null eğrinin quasi-çatısı olmak üzere eğrinin $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q\}$ ve $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}_q\}$ alt uzayında bulunduğu, benzer olarak $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ bir pseudo null eğrinin quasi-çatısı olmak üzere eğrinin $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}_q\}$, $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q\}$ ve $\{\mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ alt uzaylarında bulunduğu ispatlanmıştır. Ardından türev denklemleri hesaplanan null ve pseudo null quasi-çatı yapısı kullanılarak yönlü null ve pseudo null Bertrand ve Mannheim eğri çiftleriyle ilgili çeşitli teoremlere yer verilmiştir.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, diferensiyel geometri de temel olarak ele alınan çatı kavramı ve eğri teorisi üzerine çalışılmıştır. Literatür araştırması yapıldığında pek çok çatı ele alınarak çeşitli eğri çiftleriyle ilgili hem Öklidyen hem de Minkowski uzayında çalışmalar yapıldığı görülmüştür. Bu çalışmalarda kullanılan klasik çatı yapılarına alternatif olarak; hesaplama kolaylığı, ikinci türevi sıfır olan eğrinin tanımlanabilmesi, birim teğet vektörün gereksiz bükülmesini önlemesi gibi ayrıcalıklarla karşımıza çıkan quasi-çatı kavramı için çeşitli çalışmaların olduğu görülmüştür. Yapılan bu çalışmalarda null ve pseudo null eğriler için quasi-çatı tanımlamasının araştırılmadığı, bu alanda gerçekleştirilecek bir çalışmanın daha anlamlı olacağı düşünülerek, odak noktası null ve pseudo null eğri çiftlerine yönlendirilmiştir. Tez konusu kapsamında kullanılan temel kavramlar incelenerek, çalışmaya katkı sağlayacağı düşünülen tanım, teorem, önerme ve ispatlara yer verilmiştir.

Çalışmanın orijinal hesaplarının yer aldığı dördüncü bölümde öncelikle null quasi-çatı tanımlama algoritması ele alınmış ve sekiz ayrı durum incelenmiştir. Bu sekiz durumda **i-ii, iii-iv, v-vi, vii-viii** ikililerinin null quasi-çatı algoritması değişmemesine rağmen, Frenet vektörlerinde yer alan spacelike ve null olma durumları her ikili için yer değiştirecek şekilde ayrı ayrı ele alınmıştır. Bunun amacı Frenet çatısı ile quasi-çatı arasındaki bağıntılara ayrı ayrı yer vermektir. Fakat yapılan hesaplarda normal ve quasi-normal vektörü aynı karakterde olan vektörler için iki çatı arasındaki bağıntılar hesaplanabilmiştir. Ayrıca null quasi-çatı için quasi-normal vektörün spacelike ve null olma durumu incelenmiş, quasi-normal vektörün null olması durumu uygulamada gösterilemediğinden, çalışmada yer alan null quasi-çatı için quasi-normal vektör spacelike olacak şekilde hesaplamalar yapılmıştır. Bunun yanı sıra pseudo null quasi-çatı tanımlama algoritmasında tek bir durum ele alınabileceği tespit edilmiştir. Null ve pseudo null quasi-çatı yapısı için türev denklemleri, vektörel çarpım, çeşitli örnekler ve teoremler verilmiştir. Dördüncü bölümde son olarak, null ve pseudo null eğriler sınıflandırılarak eğrilerin quasi-çatı ile oluşturulan düzlemlerden hangisinde yer aldığı incelenmiştir.

Çalışmanın orijinal hesaplarının yer aldığı diğer bölüm olan beşinci bölümde, dördüncü bölümde tanımlanan null ve pseudo null quasi-çatı kavramı kullanılarak, yönlü null ve pseudo null Bertrand ve Mannheim eğri çiftleri ele alınmıştır. Null ve pseudo null quasi-çatı kullanılarak tanımlanan eğri çiftleri için çeşitli teoremler ele alınmış ve belli koşullar altında yönlü null Mannheim eğrinin olmadığı ispatlanmıştır.

Benzer hesaplar Minkowski spacetime için Bertrand, Mannheim ve benzeri eğri çiftleri için yapılabilir. Ayrıca verilen null ve pseudo null quasi-çatı yapısı kullanılarak null ve pseudo null eğrili yüzeyler üzerine de çalışılabilir. Bunların yanı sıra Minkowski 3-uzayda null ve pseudo null quasi-çatı ile farklı eğri çiftleri incelenebilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Akutagawa, K. & Nishikawa, S. (1990). *The Gauss map and spacelike surfaces with prescribed mean curvature in Minkowski 3-space.* Tohoku Mathematical Journal, 42, 67-82.

Babaarslan, M. (2009). *Null Bertrand eğriler üzerine* [Yüksek Lisans tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü]. YÖK Ulusal Tez Merkezi. https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/TezGoster?key =UPP _Zu9isEmWGFXFCB YasdSh3o0giHf7mUTpPCXIyPaymMfxT7lPIzSd8UbTy4Ow

Balgetir, H., Bektaş, M. & Inoguchi, J. (2004). *Null Bertrand curves in Minkowski 3-space and their characterizations*. Note di Metamatica, 23(1), 7-13. https://doi.org/10.1285 /i15900932v23n1p7.

Bejancu, A. (1994). *Lightlike curves in Lorentz manifolds*. Publicationes Mathematicae Debrecen, 44, 145-155.

Bishop, R. L. (1975). *There is more than one way to frame a curve*. The American Mathematical Monthly, 82, 246-251.

Bonnor, W. (1969). *Null curves in Minkowski space-time*. Tensor N.S., 20, 229-242.

Carmo, do M.P. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

Coquillart, S. (1987). *Computing offsets of B-spline curves*. Computer-Aided Design, 19(6), 305-309.

Couto, I. T. & Lymberopoulos, A. (2021). *Introduction to Lorentz Geometry Curves and Surfaces*. CRC Press.

Dede, M., Ekici, C. & Görgülü, A. (2015). *Directional q-frame along a space curve*. International Journal of Advanced Research in Computer Science and Software Engineering, 5(12), 775-780.

Dede, M., Ekici, C. & Tozak, H. (2015 a). *Directional tubular surfaces.* International Journal of Algebra, 9(12), 527-535.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Dede, M., Ekici, C. & Arslan Güven, İ. (2018). *Directional Bertrand curves.* Gazi University Journal of Science, (31)1, 202-211.

Dede, M., Tarım, G. & Ekici, C. (2017). *Timelike Directional Bertrand Curves in Minkowski Space.* 15th International Geometry Symposium, s 77-78. Amasya-Turkey.

Duggal L., K. & Bejancu A. (1996). *Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications*. Kluver Academic Publishers, AH, Dordrecht.

Grbović, M. & Nesovic, E. (2018). *On the Bishop frames of pseudo null and null Cartan curves in Minkowski 3-space.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 461, 219-233.

Grbović, M., Nesovic, E. & İlarslan, K. (2014). *On null and pseudo null Mannheim curves in Minkowski 3-space*. Journal of Geometry, 105(1), 177-183. https://doi.org/10.1007/s00022-013-0205-z.

Ferrandez, A., Gimenez, A. & Lucas, P. (2001 a). *Null helices in Lorentzian space forms*. International Journal of Modern Physics A, 16, 4845-4863.

Ferrandez, A., Gimenez, A. & Lucas, P. (2001 b). *Characterization of null curves in Lorentz-Minkowski spaces*. 3, 221-226.

Hacısalihoğlu, H.H. (1998). *Diferensiyel Geometri*. Ankara Üniversitesi.

İyigün, E. (2019). *On timelike and null curves in* $\mathbb{R}_1^3$. Pioneer Journal of Advances in Applied Mathematics, 25(1-2), 9-20.

Kobayashi, S. & Nomizu, K. (1983). *Foundations of Differential Geometry*. A Wiley-Interscience Publication, New York.

Lopez, R. (2014). *Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski space*. International Electronic Journal of Geometry, 7(1), 44-107. https://doi.org/10.36890/iejg.594497.

Liu, H., & Wang, F. (2008). *Mannheim Partner Curves in 3-Space.* Journal of Geometry, 11(2007), 25-31. https://doi.org/10.1007/s00022-007-1949-0.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Masal, M. & Azak, A.Z. (2017). *3-boyutlu Öklid uzayında Bertrand eğriler ve Bishop çatısı*. Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 21(6), 1140-1145.

O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. Academic Press.

Ovalıoğlu, E. (2019). *Yarı-Öklidyen uzayda null eğriler ve null eğrilerin sınıflandırılması*. [Yüksek Lisans tezi, Bursa Uludağ Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü]. YÖK Ulusal Tez Merkezi. https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/TezGoster?key =aEzj_IdWAs jiSAfK3qwrBnx34Q9hDH44mHHRdcRoQ6Q8Ubh42Myl0ByzHnsUOVKT

Özer, M.N. & Eser, D. (2010). *Diferensiyel Denklemler (Teori ve Uygulamalar)*. Ayrıntı Basımevi.

Özerdem, Ö. (2018). *Minkowski 3-uzayında Tzitzeica eğrileri*. [Yüksek Lisans tezi, Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü]. YÖK Ulusal Tez Merkezi. https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/TezGoster?key =MzP7PYssFqdb3WIjlroAkcSEg Fyo1Ve4LQXc4ncrjjD8ZSUBmKabM6ZWhwdp5Fyk

Öztekin, H. & Ergüt, M. (2011). *Null Mannheim curves in the Minkowski 3-space* E_1^3. Turkish Journal of Mathematics, 35, 107-114. https://doi.org/10.3906/mat-0907-105.

Physics Forums. (2013). *Orthogonality of timelike and null vector*. Erişim: https://www.physicsforums.com/threads/orthogonality-of-timelike-and-null-vector. 719372, Erişim tarihi: 21.10.2019.

Stack Exchange. (2017). *Orthogonal lightlike (null) vectors are colinear*. Erişim: https://math.stackexchange.com/questions/2354787/orthogonal-lightlike-null-vectors -are-colinear, Erişim tarihi: 22.10.2019.

Tarım, G. (2016). *Minkowski uzayında yönlü eğriler üzerine.* [Yüksek Lisans tezi, Eskişehir Osmangazi Ü https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/TezGoster?key =q3-d9QtLoVA2OMExHSkJpSlN1zwy47TCEhstoicMDwwOM2qv8SU2xrWIuYKMjjnM

Tarım Kandilci, G., Ekici, C. & Dede, M. (2023). *Directional Bertrand Curves in Minkowski Space*, Innovative Reserch in Natural Science and Mathematics (s. 15-38), Duvar Yayınları.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Turgut, A. (1995). *3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike ve timelike regle yüzeyler*. [Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü]. YÖK Ulusal Tez Merkezi. https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/TezGoster?key =DPTyuy3wRPq _qvCPSqUB6xziOh6Eu-2t72wppH8hbhCK_vsUBLgZGg-vZkEwHQJ5

Umurhan, N. (2018). *Minkowski uzayında null Mannheim eğrileri üzerine.* [Yüksek Lisans tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü]. YÖK Ulusal Tez Merkezi. https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/TezGoster?key =fS4sqEZr79C_n60Rk6Mj Fb3RMA0Ajj1ugGbjj1ZoXgJGT5gKsufXGTTgFuxRgSuM

Walrave, J. (1995). *Curves and surfaces in Minkowski space.* K.U. Leuven, Faculteit Der Wetenschappen.

Wang, W., Jüttler, B., Zheng, D. & Liu, Y. (2008). *Computation of rotation minimizing frames.* ACM Transactions on Graphics, 27(1), 1-18.