Bazı Geometrilerin Sonlu Projektif Uzaylara Gömülmeleri Üzerine

Proje No: 108T340

Doç. Dr. Ziya AKÇA
Prof. Dr. Rüstem KAYA
Prof. Dr. Hendrik Van MALDEGHEM
Doç. Dr. Ayşe BAYAR
Doç. Dr. Süheyla EKMEKÇİ

EKİM 2010
ESKİŞEHİR

ÖNSÖZ

Proje kapsamında, noktaları, bir projektif uzayın noktaları fakat doğruları projektif uzayın ovalleri (yada konikleri) olan sonlu projektif uzaylarda nokta-doğru geometrilerinin gömülmeleri sınıflandırılmıştır**.**

Mertebeleri q olan *n* ve *m* boyutlu projektif uzayların Veronesean gömülmesi göz önüne alınarak, sırasıyla mertebeleri q ve q' olan *n* ve *m* boyutlu projektif uzayların gömülmesini sağlayacak bir dönüşüm araştırıp bulunarak q ve q' için sınırlar belirlenmiştir.

Veronesean gömmelerdeki yapı kullanılarak, yüksek boyutlu bazı geometrilerin hangi şartlar altında sonlu projektif uzaylara gömülebileceği incelenerek elde edilen Lax-gömmeler sınıflandırılmıştır. Bu sınıflamalar sonuç raporu ekinde gönderilen manuscriptte yer almaktadır.

Sonuç olarak, bu proje yeni alt geometrilerin sonlu projektif uzaylara gömülmesine dayalı bir yorum getirme temelinde ilerlemiştir. Bu yolla elde edilen sonuçlar ve sınıflandırmalar projektif ve fuzzy projektif geometri teorilerine katkı sağlayacaktır. Bu kapsamda literatürde var olan boşluk doldurulmuştur. Böylece bu alanda önemli ve temel bir referans çalışma ortaya çıkmıştır.

Projeyi destekleyen TÜBİTAK–1001 Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Projelerini Destekleme Programına (Proje No: 108T340), en içten teşekkürlerimizi sunarız. Özellikle, proje danışmanımız, proje araştırmacılarımız ve de kendi adıma TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

Verilen destekler sayesinde proje süresince projede görev alan üç araştırmacının projede danışman olarak görev yapan Prof. Dr. Hendrik Van Maldeghem'in çalıştığı Belçika Gent Üniversitesine gidebilmeleri için yurt dışına (proje ile ilgili konuda) çıkmalarına destek verilmesi projenin başarıyla tamamlanmasında etkili olmuştur. Ayrıca bu seyahat ile Avrupa birliği üyesi bir ülkenin bir başka bilim insanı Prof. Dr. J. Thas ile ortak çalışma imkanı bulunmuş ve elde edilen bilimsel sonuçların birleştirilmesi sağlanmıştır.

Elde edilen sonuçlar ekte bir kopyası sunulan 14 sayfalık **kapsamlı bir yayın** haline getirilerek SCI INDEX te giren **Annals of Combinatorics** dergisine sunulmuştur. Böylece projemiz kapsamında planlanan geliştirmelereden daha ileri sonuçlara ulaşılmış ve proje zamanında tamamlanmıştır.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ……...2

İÇİNDEKİLER……3

ÖZET……...4

ABSTRACT……5

GİRİŞ……..6

PROJEKTİF UZAYLAR VE ALT UZAYLAR……7

PROJEKTİF UZAYDA BAZI ALT GEOMETRİLER……8

VERONESEAN GÖMME……8

LAX-GENELLEŞTİRİLMİŞ VERONESEAN GÖMME……9

SONUÇ VE ÖNERİLER……15

ÖZET

1976 yılında G. Tallini [17] indeksi 2 olan Kuadrik Veroneseanları karakterize etmek için onların konik düzlemlerinin arakesit özelliklerini kullandı.

Aynı yıl Ferri [7] indeksi 2 olan Kuadrik Veroneseanların konik düzlemlerinin arakesit büyüklüklerini kullanarak onların bir karakterizasyonunu verdi ve daha sonra 1984 yılında Mazzocca ve Melone [16] ise *q* nun tek olması durumunda indeksi *n* olan Veroneseanlar için bir karakterizasyon verdiler.

1991 yılında Hirschfeld ve Thas 'ın *Genel Galois Geometrileri* [8] kitabının yayınlanmasından sonra Thas ve Maldeghem [19-22] bu zamana kadar yapılan karakterizasyonları genelleştiren bazı karakterizasyonları verdiler.

2003 de Kuijken ve Maldeghem [14] bir fuzzy geometrinin "seviye" geometrilerinin alt geometrilere gömülebildiğini ispatladılar.

Yukarıda bazı karakterizasyonları verilen Veroneseanların önemi genel olarak şu şekilde verilebilir:

1- Veroneseanlar kullanılarak Projektif uzaylar ve bilinen nokta-doğru geometrileri kendilerine gömülebilir.

2- Yapılacak olan en yüksek boyuttaki gömmeleri sınıflandırma da kullanılır.

Bu projenin temel amacı; *noktaları*, bir projektif uzayın noktaları fakat *doğruları* projektif uzayın ovalleri (yada konikleri) olan sonlu projektif uzaylarda bu nokta-doğru geometrilerinin gömülmelerini sınıflandırmaktır**.**

Sonuç olarak, bu proje yeni alt geometrilerin sonlu projektif uzaylara gömülmesine dayalı bir yorum getirme temelinde ilerlemiştir. Bu yolla elde edilecek sonuçlar ve sınıflandırmalar projektif ve fuzzy projektif geometri teorilerine katkı sağlayacaktır.

Projemiz; dört aşamalı, yirmi dört ay süreli ve bir yürütücü, üç araştırmacı ve bir yabancı danışman olmak üzere beş kişilik bir ekip tarafından yürütülmüştür.

Anahtar Kelimeler:

Projektif Uzay, Veronesean Gömme, Altgeometri, Lax-Veronesean Gömme.

ABSTRACT

Tallini [17] used the intersection properties of the conic planes of them to characterize quadric Veroneseans of index 2 in 1976.

In the same year, Ferri [7] gave a characterization of quadric Veroneseans of index 2 by using the sizes of the intersection of the conic planes of them and then Mazzocca and Melone [16] gave a characterization of quadric Veroneseans of index n for q odd in 1984.

After General Galois Geometries book of Hirschfeld and Thas [8] was published in 1991, Thas and Maldeghem [19-22] gave some characterizations that generalize characterizations made up to that time.

Kuijken and Maldeghem [14] proved the embedding of the level geometries of a fuzzy geometry to subgeometries in 2003.

The importance of Veroneseans of which are given some characterization above can be given generally as following:

1- The projective spaces and the known point-line geometries can be embedded to themselves.

2- They are used in the classification of embeddings to be able to do in the highest dimension.

The main objective of this project is to classify the embeddings of point-line geometries in finite projective spaces where points are points of a projective space but lines are ovals (or conics) of projective space.

The project to be carried out along these objectives mentioned is to study embeddings in projective spaces of certain important geometries and to contribute implicitly to the study of fuzzy projective.

The project will continue in view of the embeddings of new subgeometries to finite projective spaces. Combining the obtained results and classifications will contribute the theories of projective and fuzzy projective geometries.

Our project has been continued by a group of five researches along 24 months period over four steps.

Keywords:

Projective Spaces, Veronesean Embedding, Subgeometry, Lax- Veronesean Embedding.

GİRİŞ

Veronesean çeşitleri uzun ve zengin bir tarihe sahiptir ve reel ve kompleks tipleri çalışılmıştır. Fakat bunlar keyfi cisimler üzerinde tanımlanmaktadır. Sonlu cisimler üzerinde tanımlananlar sonlu geometrilerin gelişmesine katkıda bulunmuştur. En basit Veronesean çeşitleri *n*. Mertebeden Kuadrik Veroneseanlardır ve V_n ile gösterilir. İspatlarda onların özelliklerini araç olarak kullanmak için çeşitlerini tanımak ve karakterizasyon teoremlerini bilmek çok önemlidir. Literatürde sonlu kuadrik Veroneseanların dört farklı tipi bulunmaktadır:

Tip 1- Tallini' nin karakterizasyonu [17] 2.mertebeden V_2 kuadrik Veroneseanların konik düzlemlerinin arakesit özelliklerini kullanır. Yani bu konik düzlemleri bir konikte V_2 ile kesişen $PG(5,q)$ nun düzlemleridir. Tallini'nin elde ettiği sonuç *q* nun tek olması durumunda geçerlidir. Thas ve Maldeghem [20] bu sonucu keyfi *n* ve *q>2* için genelleştirdiler.

Tip 2- Ferri'nin karakterizasyonu [7] $PG(5,q)$ nun hiperdüzlem ve düzlemleriyle V_2 nin arakesitlerinin büyüklüklerini kullanır. Ferri'nin sonucu ise $q \geq 5$ ve *q* nun tek olması halinde geçerlidir. Hirschfeld ve Thas [8] *q*=3 durumunu ispatladılar. Ayrıca Thas ve Maldeghem [19] keyfi $q \neq 2$ için genelleştirdiler.

Tip 3- Mazzocca ve Melone [16] *q* tek olması durumunda $PG(n(n+3)/2,q)$ deki V_n i aksiyomatik hale getirmek için V_n deki bütün koniklerin kümesinin ve bunlara teğet olan doğruların geometrik özelliklerini kullandılar. Hirschfeld ve Thas [8] de onların bir aksiyomu unuttuklarını karşıt örnek vererek gösterdiler ve keyfi *q* için onların sonucunu genelleştirdiler. Thas ve Maldeghem, Mazzocca ve Melone nın aksiyom kümesini sağlayan yapıları sınıflandırdılar.

Tip 4- Thas ve Maldeghem [20] da $PG(n,q)$ nun nokta kümesine karşılık gelen $PG(d,q)$ yu üreten $PG(d,q)$ nun noktalarının kümesi ile $q \neq 2$ için $PG(d,q)$ nun noktalarına ve düzlem ovallerine karşılık gelen $PG(n,q)$ nun nokta ve doğrularını kullanarak $d \geq n(n+3)/2$ şartı altında $PG(d,q)$ deki $PG(n,q)$ nun tek temsili olarak onların genelleştirilmiş Tallini sonucunu V_n i karakterize etmek için kullandılar.

Ayrıca Thas ve Maldeghem [21] de Tip 4 deki karakterizasyonu bütün *n*. Mertebeden Hermitian Veroneseanlar H_n için ispatladılar ve bunu H_2 de Tip 2 yi elde etmek için kullandılar.

Yukarıdaki tanım ve açıklamalar aynı cisimlerle belirlenen projektif uzaylar için verilmektedir. Proje kapsamında, iki farklı sonlu cisim üzerindeki farklı boyutlu iki projektif uzaydan birinin diğerine gömülebilmesi için gereken şartları belirlemekteyiz. Yani, $GF(q)$ ve $GF(q')$ iki Galois cismi olmak üzere $PG(n,q)$ projektif uzayının $PG(d,q')$ projektif uzayına gömülebilmesi için q ile q' arasındaki ilişkiyi incelemekteyiz.

PROJEKTİF UZAYLAR VE ALT UZAYLAR

$V = V(n+1, K)$ bir K cismi üzerinde *n+1* boyutlu bir vektör uzayı olsun. $V - \{0\}$ ın noktaları üzerinde bir denklik bağıntısı $X = (x_1, x_2, ..., x_n), Y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in V - \{0\}$ ve $\forall t \in K_0$ için $X \sim Y \Leftrightarrow y_i = tx_i$, $i = 1,2,...,n$ olmak üzere $V - \{0\}$ ın noktaları denklik sınıfları V nin orijini çıkarılmış 1-boyutlu alt uzaylarıdır. Bu denklik sınıflarının kümesine K cismi üzerinde *n*-boyutlu projektif uzay denir ve $PG(n, K)$ ile gösterilir. Eğer $K = GF(q)$ alınırsa projektif uzayın mertebesi *q* dur ve bu *n*-boyutlu projektif uzay $PG(n, q)$ ile gösterilir. $PG(n, K)$ nın elemanlarına projektif uzayın noktaları denir. $P(X)$, X vektörünün denklik sınıfı ise X e $P(X)$ i temsil eden vektör denir. $X_1, X_2, ..., X_r$ vektörlerinin kümesi lineer bağımsız ise $P(X_1), P(X_2), ..., P(X_r)$ noktaları da lineer bağımsızdır. $PG(n, K)$ nın *m*-boyutlu bir alt uzayı $V = V(n+1, K)$ nın *(m+1)*-boyutlu bir alt uzayını oluşturan vektörlerin temsil ettiği noktalar kümesidir. Yani, 0-boyutlu alt uzay bir nokta, 1- boyutlu alt uzay bir doğru, 2- boyutlu alt uzay bir düzlem, …, *(n-1)*- boyutlu alt uzay bir hiperdüzlemdir. Bir hiperdüzlem $\sum_{i=0}^{n} a_i x_i = 0$ denklemini sağlayan $X = (x_0, x_1, ..., x_n)$ vektörlerinin temsil ettiği $P(X)$ noktalar kümesidir. Bu yüzden bir *m*-uzay π_m, *(m+1)*-lineer bağımsız $X_0, X_1, ...X_m$ vektörleri ve $(t_0, t_1, ..t_m) \in K^{m+1} - \{(0,0,...,0)\}$ için $t_0X_0 + t_1X_1 + ... + t_mX_m$ vektörleri tarafından temsil edilen noktalar kümesidir.

$PG(n, K)$ nın alt uzayları için aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

a) π_r, π_s $PG(n, K)$ nın alt uzayları ise π_r ile π_s nin arakesiti $\pi_r \cap \pi_s$ de bir alt uzaydır.

b) π_r ve π_s nin birleşimi $\pi_r.\pi_s$ olup, bu alt uzay π_r ve π_s yi içeren en küçük alt uzaydır.

c) $\pi_r \cap \pi_s = \pi_t$ ve $\pi_r.\pi_s = \pi_m$ ise $r + s = t + m$ dir.

d) π_r ve $\pi_{r'}$ $PG(n, K)$ da iki r – uzay ve $\pi_r \subset \pi_{r'}$ ise $\pi_r = \pi_{r'}$ dür.

e) π_m alt uzayı *m+1* tane lineer bağımsız noktanın birleşimidir veya *n-m* tane lineer bağımsız hiperdüzlemin arakesitidir.

$PG(n, q)$ nun *r*-uzaylarının kümesi $PG^{(r)}(n, q)$ ve $\Phi(r; n, q) = \left|PG^{(r)}(n, q)\right|$ olsun. O zaman $PG^{(0)}(n, q) = PG(n, q)$ dur. Ayrıca $PG(n, q)$ nun toplam nokta sayısı

$$\theta(n) = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \Phi(0; n, q) \text{ ve } [r, s] = \begin{cases} \prod_{i=r}^{s} (q^i - 1), & s \geq r \\ 1, & s < r \end{cases} \text{ olmak üzere,}$$

1) $PG(n,q)$ da *r*-boyutlu alt uzayların sayısı $\Phi(r;n,q)=\dfrac{[n-r+1,n+1]}{[1,r+1]}$ dir.

2) $PG(n,q)$ da *s*-boyutlu alt uzayı kapsayan r-boyutlu alt uzayların sayısı

$\chi(s,r;n,q)=\dfrac{[r-s+1,n-s]}{[1,n-r]}$ dir.

PROJEKTİF UZAYDA BAZI ALT GEOMETRİLER

$PG(n,q)$ da çeşitli sonlu alt yapılar belli kombinatöryel özelliklere sahip sonlu nokta kümeleri olarak verilir. Bunlardan bazıları şöyledir.

1) $(k,l)-$ küme: $PG(n,q)$ da *k* tane π_l uzayının kümesi,

2) $(k,0)-$küme: $PG(n,q)$ da *k* tane nokta kümesi,

3) $(k,l;r,s;n,q)-$küme: $PG(n,q)$ daki her π_s uzayında olan en çok *r* –tane π_l uzayındaki $(k,l)-$ küme,

4) $(k,r,n,q)=(k;r,r-1;n,q)-$küme: *(r+1)* tanesi aynı *(r-1)*-boyutlu uzayda olmayan *k* nokta kümesi,

5) $(k;r,s,n,q)=(k,0;r,s;n,q)-$küme: $PG(n,q)$ da π_s de en çok *r*-tane olacak şekildeki k nokta kümesi. Yani *(r+1)* tanesi π_s de olamayan *k* nokta kümesi,

6) $(k,r)-$cap = $(k;r,1;n,q)-$küme: *(r+1)* tanesi doğrudaş olmayan *k* nokta kümesi,

7) $k-arc=(k;n,n-1;n,q)-$küme: *(n+1)* tanesi aynı hiperdüzlemde olmayan *k* nokta kümesi,

8) Düzlemsel $k-arc=(k;2,1;2,q)-$küme: Üçü doğrudaş olmayan *k* nokta kümesidir.

VERONESEAN GÖMME

q elemanlı sonlu bir Galois cismi $GF(q)$ üzerinde *n*-boyutlu projektif uzay $PG(n,q)$ olsun. Bir sıradan Kuadrik Veronesean dönüşüm $PG(n,q)$ nun $(x_0,x_1,...,x_n)$ koordinatlı noktasını $PG(\dfrac{n(n+3)}{2},q)$ projektif uzayının

$$(x_0{}^2,x_1{}^2,...,x_n{}^2,x_0x_1,x_0x_2,...,x_0x_n,x_1x_2,x_1x_3,...,x_1x_n,...,x_{n-1}x_n)$$

koordinatlı noktasına dönüştürür. Yani, bir Kuadrik Veronesean dönüşüm

$$\theta:PG(n,q)\ \rightarrow\ PG(\frac{n(n+3)}{2},q)$$

olmak üzere $PG(n,q)$ nun noktalar kümesinden $PG(\dfrac{n(n+3)}{2},q)$ nun noktalar kümesine bire-bir bir dönüşümdür.

Verilen bir

$$\theta : PG(n,F) \rightarrow PG(d,F)$$

gömmesi için $PG(n,F)$ nın her bir noktasının θ altındaki görüntüsünü tespit edilmektedir. θ bir i- Veronesean dönüşüm ise o zaman $PG(d,F)$ projektif uzayında θ nın görüntü uzayına i- *Veronesean* denir. $d \geq \frac{n(n+3)}{2}$ iken

$$\theta : PG(n,F) \rightarrow PG(d,F)$$

gömmesine de genelleştirilmiş Veronesean gömme denir.

Herhangi genelleştirilmiş Veronesean gömmenin uygun bir i için bir i-Veronesean gömme olduğu [22] de gösterilmiştir.

LAX-GENELLEŞTİRİLMİŞ VERONESEAN GÖMME

K ve F herhangi iki cisim olmak üzere doğrudaş noktaları düzlemdeş noktalara götüren

$$\theta : PG(n,K) \rightarrow PG(d,F)$$

tipindeki bir dönüşüme *Lax-Genelleştirilmiş Veronesean Gömme* adını veriyoruz.

Proje kapsamında Veronesean gömmeler yüksek boyutlarda karakterize edilerek, bazı geometrilerin hangi şartlar altında sonlu projektif uzaylara gömülebileceği incelenmiştir.

Bunun için öncelikle projenin 1. döneminde mertebeleri q olan 2 ve 5 boyutlu projektif uzaylar arasındaki Veronesean gömmeler göz önüne alınarak, sırasıyla mertebeleri 3 ve q' olan 2 ve 5 boyutlu projektif uzayların projektif gömülmesini sağlayacak bir dönüşüm araştırılıp bulunarak 3 ile q' arsındaki ilişki belirlenmiştir. Yani $PG(2,3)$ ün nokta kümesinden $PG(5,q')$ nun nokta kümesine tanımlanan ve $PG(2,3)$ ün her doğrusunun görüntüsünün $PG(5,q')$ nün bir düzlemsel yayı olması için gerekli şartın $q' \equiv 0 \pmod 3$ olduğu belirlenmiştir. Bu durumla ilgili aşağıdaki teoremi elde edip ispatladık.

Teorem 1: $PG(2,3)$ ün her doğrusu $PG(5,q')$ nün bir düzlemsel yayı olacak şekilde $PG(2,3)$ projektif düzlemi $PG(5,q')$ projektif uzayında gömülü ise $q' \equiv 0 \pmod 3$ dür.

Proje kapsamında ikinci olarak, yine mertebeleri q olan 2 ve 5 boyutlu projektif uzayların Veronesean gömülmesindeki yapılar göz önüne alınarak, sırasıyla mertebeleri 5 ve q' olan 2 ve 5 boyutlu projektif uzayların projektif gömülmesini sağlayacak bir dönüşüm araştırılıp bulunarak 5 ve q' arasındaki ilişki belirlenmiştir. Yani $PG(2,5)$ in nokta kümesinden $PG(5,q')$ nun nokta kümesine tanımlanan ve $PG(2,5)$ in her doğrusunun görüntüsünün $PG(5,q')$ nün bir düzlemsel yayı olması için $q' \equiv 0 \pmod 5$ olduğu belirlenmiştir. Bu durumla ilgili aşağıdaki teoremi elde edip ispatladık.

Teorem 2: $PG(2,5)$ in her doğrusu $PG(5,q')$ nün bir düzlemsel yayı olacak şekilde $PG(2,5)$ projektif düzlemi $PG(5,q')$ projektif uzayında gömülü ise $q' \equiv 0 \pmod 5$ dir.

Proje kapsamında yine bu dönemde $q = 3$ durumunda farklı gömmelerin sınıflandırılmasına imkan veren "**strange**", tuhaf, nokta tanımı verilerek yine $PG(2,3)$ projektif düzleminin doğrularını $PG(5,q')$ projektif uzayının hepsi düzlemsel 4-yay olmayan dört nokta ile elde edilen projektif düzlemlerine eşleyen gömme için gerekli durumlar belirlenerek sonuçlandırılmıştır. Yani, sırasıyla $N_1N_2N_3$ üçgeninde strange nokta içeren sadece bir, iki yada üç düzlem varsa, $PG(5,q')$ projektif uzayında projektif düzlemlerin gömülebilme şartları elde edilmiştir.

Projenin 2. döneminde ise;

Kuadrik Veronesean dönüşümler ayrıntılı olarak incelenip ilk 6 aylık dönemde elde edilen yapılar ile Kuadrik Veronesean dönüşümü kullanılarak elde edilen yapılar arasındaki ilişki araştırılarak farklılıklar belirlenmiştir.

Ayrıca yine bu dönemde $PG(2,3)$ projektif düzleminin $PG(4,q')$ projektif uzayına gömülebilme koşulları belirlenerek projenin kapsamında yapılan gömmelerin Veronesean gömmelerden bir başka farklılığı daha ortaya konulmuştur.

Limbos [15] de afin düzlemlerin projektif düzlemlerde gömülmesi ile ilgili aşağıdaki Teorem 1 vermektedir.

Teorem 1: F bir aykırı cisim, P, $PG(2,F)$ nin noktalar kümesinin bir alt kümesi ve L de her elemanı $PG(2,F)$ nin farklı bir doğrusunun bir alt kümesi olan doğrular kümesi olmak üzere $A=(P,L,\in)$ yapısı bir afin düzlem olsun. O zaman A Dezargseldir ve A nın bir paralel sınıfına ait bütün doğrularına karşılık gelen $PG(2,F)$ nin doğruları bir noktada kesişir.

Orada, projektif düzlemlerde boyut 2 olduğundan $n = 2$ dir.

Proje kapsamında 3. dönemde yaptığımız ilk iş Teorem 1' i $n \geq 3$ halleri için Teorem 2 yi vermektir. Böylece afin uzayların kapanışının projektif uzaylara gömülebileceği gösterilmektedir.

Teorem 2: F bir cisim ve $n \geq 3$ olmak üzere, P, $PG(n,F)$ nin noktalar kümesinin bir alt kümesi ve L de her elemanı $PG(n,F)$ nin farklı bir doğrusunun bir alt kümesi olan doğrular kümesi olmak üzere $A=(P,L,\in)$ yapısı bir afin düzlem olsun. Keyfi bir paralel sınıfa ait olan A nın bütün doğrularına eşleşen $PG(n,F)$ nin doğruları $PG(n,F)$ nin bir tek noktasında kesişir ve bundan dolayı A nın projektif kapanışı $PG(n,F)$ de gömülüdür. Sonuç olarak $PG(n,F)$ nin $PG(n,K)$ alt uzayından elde edilen bir afin düzlem A olacak şekilde F nin bir K alt cismi vardır.

Proje kapsamında 3. dönemde ikinci olarak $PG(2,3)$ ün $PG(5,F)$ ye Lax genelleştirilmiş Veronesean gömmelerini inceliyoruz. Genelleştirilmiş Veronesean gömmelerde olduğu gibi $d \geq n$, $|K| = 2$ iken görüntü kümesi $PG(d,F)$ yi üreten $PG(n,F)$ den $PG(d,F)$ ye tanımlanan her bire-bir dönüşüm bir Genelleştirilmiş Veronesean gömme olduğundan, Lax genelleştirilmiş Veronesean gömmeleri incelerken $PG(n,K)$ dan $PG(d,F)$ ye tanımlanan her bire-bir dönüşüm için $|K| = 2$ durumunu hariç tutmamız gerekir.

Bu durumda $d \leq 2^{n+1} - 2$ olmalıdır. Genelleştirilmiş Veronesean gömme durumunun aksine $|K| = 3$, $n = 2$ hali özel durumdur. Çünkü [15] den biliniyor ki 3. mertebeden afin düzlemler, karakteristiği 3 den farklı cisimler üzerindeki projektif uzaylara gömülebilir. Projemizin ilk gelişme raporunda özel bir durum için $PG(2,3)$ ün $PG(5,F)$ ye gömülebilme şartlarını belirlemiştik. Bu dönemde de $PG(2,3)$ ün $PG(5,F)$ ye Lax genelleştirilmiş Veronesean gömmelerini aşağıdaki üç durumda inceleyerek genelleştiriyoruz.

$PG(5,F)$ projektif uzayını geren noktalar kümesi P ve L nin her L elemanı da $PG(5,F)$ de bir düzlemin noktalarının alt kümesi alarak $S = (P,L,I)$ geometrik yapısının $PG(2,K)$ ya izomorf olduğunu kabul ediyoruz.

I. Durum: $S = (P,L,I)$ geometrik yapısının her L doğrusu için $P - L$ kümesi $PG(5,F)$ yi üretsin:

Bu durumda P, **3. mertebeden F cismi üzerindeki bir 5-boyutlu alt uzaydadır. Bu gömme derinliği boş küme olan sıradan bir Kuadrik Veronesean gömme olduğundan P, $PG(5,F)$ nin bir $PG(5,3)$ alt uzayında bir Lax 0-Veronesean dır.**

II. Durum: $S = (P,L,I)$ geometrik yapısında L_1 ve L_2 doğrularının arakesit noktası hariç noktaları $PG(4,F)$ projektif uzayının farklı iki doğrusu üzerinde, L_3 doğrusu da $PG(4,F)$ projektif uzayında bir düzlemsel yay olacak şekilde L nin noktadaş olmayan L_1, L_2, L_3 doğruları var olsun:

Bu durumda S nin bütün noktaları 3. mertebeden F asal cismi üzerindeki $PG(5,F)$ nin bir $PG(5,3)$ alt uzayında içerilir ve P bir Lax 1-Veronesean dır.

III. Durum: $S = (P,L,I)$ geometrik yapısının bütün noktaları, $PG(5,F)$ nin belli bir π düzlemi ve bu π düzleminin dışındaki bir L doğrusu üzerinde olacak şekilde bir tek $L \in L$ doğrusu var olsun:

Bu durumda S den L doğrusunu atarak elde edilen 3.mertebeden A afin düzlemi π düzleminde gömülüdür.

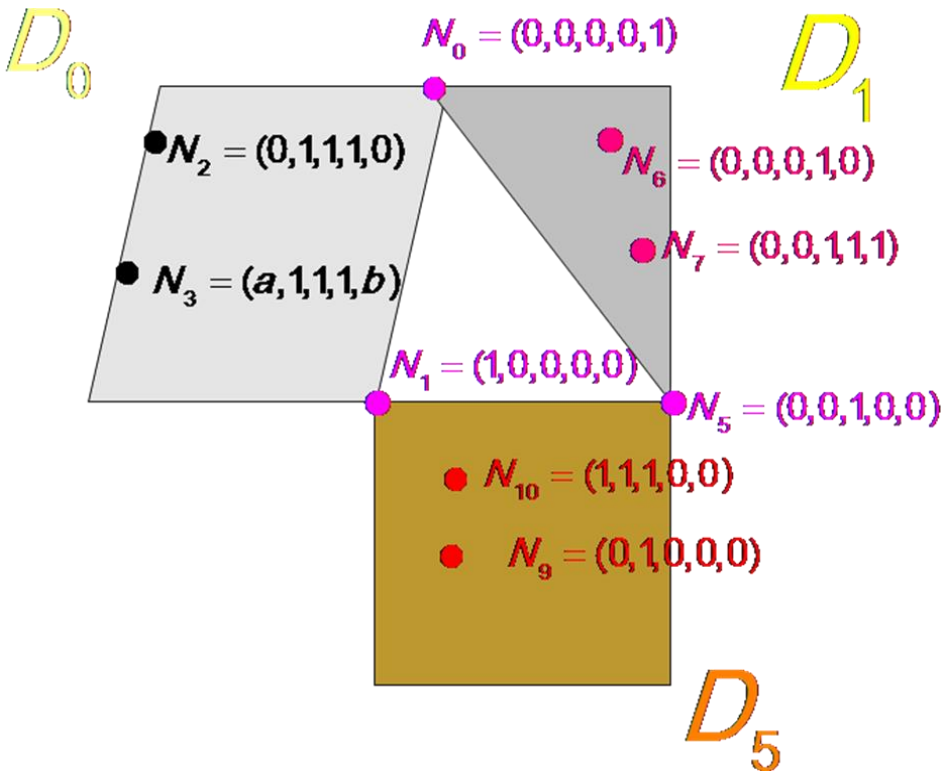
Yine bu çalışma döneminde son olarak Lax-Veronesean gömmedeki metodla, $PG(2,4)$ projektif düzleminin doğrudaş noktalarının görüntülerini projektif uzayda düzlemdeş noktalar alarak, $PG(2,4)$ projektif düzleminin $PG(4,4)$ projektif uzayına gömülemeyeceğini gösteren bir örnek vermekle yetiniyoruz. Projemiz kapsamında bu sonuçta önemli bir farklılıktır.

Örnek:

$PG(2,4)$ projektif düzleminin doğrularının $PG(4,4)$ projektif uzayında görüntüleri olan düzlemler $D_i,\ i=0,1,\ldots,20$ ve üzerlerindeki noktalar $N_i=i,\ i=0,1,\ldots,20$ aşağıdaki gibi olsun.

D_0	0	1	2	3	4
D_1	0	5	6	7	8
D_2	0	9	14	15	16
D_3	0	10	12	17	19
D_4	0	11	13	18	20
D_5	1	5	9	10	11
D_6	1	6	14	17	18
D_7	1	8	13	16	19
D_8	1	7	12	15	20
D_9	2	5	14	19	20
D_{10}	4	5	13	15	17
D_{11}	3	5	12	16	18
D_{12}	2	6	9	12	13
D_{13}	2	7	11	16	17
D_{14}	2	8	10	15	18
D_{15}	3	6	11	15	19
D_{16}	4	6	10	16	20
D_{17}	4	7	9	18	19
D_{18}	3	8	9	17	20
D_{19}	4	8	11	12	14
D_{20}	3	7	10	13	14

$PG(4,4)$ projektif uzayında seçilen üç düzlem ve 9 noktanın koordinatları aşağıdaki gibi olsun.



Şimdi yapılması gereken herhangi üçü lineer bağımsız 4 noktanın bir tek projektif düzlem belirteceğini kullanarak geriye kalan 12 noktanın mümkünse koordinatlarının belirlenmesidir. Öncelikle koordinatları bilinen 3 nokta kapsayan D_{12} ve D_{20} düzlemlerinin arakesit noktası olan N_{13} noktasının koordinatlarının belirlenmesidir. Bunun için sırasıyla D_{12} ve D_{20} düzlemlerinin denklemlerini bulalım.

D_{12} düzlemi üzerindeki herhangi bir nokta, koordinatları bilinen N_2, N_6, N_9 noktalarının lineer toplamı olacağından, yani

$$(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4) = a(0,1,1,1,0) + b(0,0,0,1,0) + c(0,1,0,0,0)$$

eşitliğinden bu düzlemin denklemi

$$\left.\begin{array}{l} y_0 = 0 \\ y_1 = a + c \\ y_2 = a \\ y_3 = a + b \\ y_4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \qquad y_0 = y_4 = 0$$

olarak bulunur.

D_{20} düzlemi üzerindeki herhangi bir nokta da koordinatları bilinen N_3, N_7, N_{10} noktalarının lineer toplamı olacağından bu düzlemin denklemi de ,

$$y_0 = (y_3 - y_2 + y_1)a + (y_2 - y_3)$$
$$y_4 = (y_3 - y_2 + y_1)b + (y_2 - y_3)$$

eşitlikleriyle verilir.

D_{12} ve D_{20} düzlemlerinin denklemlerinin ortak çözümünden arakesit noktasının koordinatları

$$N_{13} = (0, a-1, a+b-1, b-1, 0), \qquad b \neq 1$$

olarak bulunur.

Ayrıca N_4 noktasının D_0 düzlemi üzerindeki N_0, N_1, N_2, N_3 noktalarının lineer toplamı olduğu göz önüne alınarak D_0 düzleminin denklemi ve N_4 noktasının koordinatları sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir.

$$y_1 = y_2 = y_3$$

ve

$$N_4 = (c, 1, 1, 1, d),$$

olarak bu noktanın koordinatları tespit edilmiş olur.

Benzer şekilde N_8 noktasının D_1 düzlemi üzerindeki N_0, N_5, N_6, N_7 noktalarının lineer toplamı olduğu göz önüne alınarak D_1 düzleminin denklemi ve N_8 noktasının koordinatları sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir.

$$y_0 = y_1 = 0$$

ve

$$N_8 = (0, 0, 1, e, f).$$

Böylece 7 düzlem ve 12 nokta belirlenmiş olur. Geriye kalan noktalar ve düzlemler belirlenmeye devam edilirse, D_7 ve D_{16} düzlemlerinin arakesit noktası

$$N_{16} = (fbc - fb - da + d, -d(a-1), -d(a-1), d(be - b + 1), dfb)$$

şeklinde bulunur.

Benzer yolla N_{12} noktası $D_{11} = \langle N_3, N_5, N_{16} \rangle$ ve $D_{12} = \langle N_2, N_6, N_9 \rangle$ düzlemlerinin arakesit noktası olduğundan

$$N_{12} = (0, 0, y_2, 0, 0) \equiv (0, 0, 1, 0, 0) = N_5$$

olarak elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $PG(2,4)$ projektif düzleminin doğrudaş noktalarının görüntülerini düzlemdeş noktalar alarak $PG(4,4)$ projektif uzayında gömülemeyeceği elde edilmiştir.

Böylece proje başvurusunda öngörülen tüm incelemeler yapılarak elde edilen bilgiler derlenip, "Generalized Lax Veronesean Embeddings of Projective Spaces" başlıklı Manuscript incelenip yayınlanması için SCI INDEX kapsamında taranan Annals of Combinatorics dergisine gönderilmiştir. Yayına gönderilen bu çalışmanın bir kopyasını ekte ayrıca da gönderiyoruz.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Yapılan bu çalışmada, özellikle Incidence geometri alanında Veronesean gömmelerdeki yapı kullanılarak projektif uzayların Lax-Genelleştirilmiş Veronesean gömmelerinin bir sınıflaması veriliyor.

Proje kapsamında K ve F herhangi iki cisim olmak üzere doğrudaş noktaları düzlemdeş noktalara eşleyen

$$\theta : PG(n,K) \rightarrow PG(d,F)$$

Lax-Genelleştirilmiş Veronesean Gömme dönüşümü kullanılarak, $PG(n,K)$ nın her bir noktasının θ altındaki görüntüsünün oluşturduğu geometrik yapılar tespit edilmiş ve elde edilen sonuçlar incelenmeye gönderilen manuscriptte sunulmuştur.

Projede ele aldığımız çalışmada, belli bazı önemli geometrilerin sonlu projektif uzaylara gömülmeleri incelenerek çeşitli genellemeler ve bazı sınıflamalar ortaya çıkartılmıştır. Bu çalışma kapsamında Avrupa birliği üyesi bir ülkenin bilim adamları ile ortak çalışma imkanı bulunmuş ve uluslararası prestijli, birinci sınıf bilimsel dergilerde yayın yapılması hedeflenerek ülkemizin bilimsel gelişmişlik düzeyine katkıda bulunulması amaçlanmıştır.

Projemiz kapsamında Lax-Genelleştirilmiş Veronesean gömmede uyguladığımız **metodun**, Veronesean olmayan uzaylardaki gömme çalışmalarına da uygulanabileceği görüşündeyiz. Ancak bu henüz açık bir problemdir ve yeni araştırmalara konu olabilir.

KAYNAKLAR

1. Akça Z., Bayar A., Ekmekçi S., Van Maldeghem H., Fuzzy projective spreads of fuzzy projective spaces, Fuzzy Sets and Systems, 157, 24, 3237-3247 (2006).

2. Akça Z., Bayar A., Ekmekçi S., On the Classification of Fuzzy projective lines of fuzzy 3-dimensional projective spaces, Communnications Mathematics and Statistics, 55, 2, 17-23 (2006).

3. Bayar A., Ekmekçi S., Akça Z., A note on fibered projective plane geometry, Information Sciences, 178, 1257-1262 (2008).

4. Cooperstein B., Thas J. A., Maldeghem H. Van., Hermitian Veroneseans over finite fields, Forum Math. 16, 365-381 (2004).

5. Çiftçi S., Kaya R., Ferrar J., On 4-Transtitivity in the Moufang Plane, Journal of Geometry, 31, 65-68 (1998).

6. Ekmekçi S., Akça Z., Bayar A.. On the classification of fuzzy projective planes of fuzzy 3-dimensional projective space, Chaos, Solitons & Fractals, 40 2146-2151 (2009).

7. Ferri O., Su di una caratterizzazione grafica della superficie di Veronese di un $PG(5,q)$ Atti Accad. Naz. Lincei Rend, 61, 603-610 (1976).

8. Hirschfeld J. W. P., Thas J. A., General Galois Geometries, Oxford University Pres, (1991).

9. Kaya R., Projektif Geometri, Osmangazi Üniversitesi Yayınları No:111, (üçüncü baskı) (2005).

10. Kaya R., Özcan E., On the Construction of Bolyai-Lobachevsky Planes From Projective Planes, Rendiconti Del Seminario Matematico Di Brescia, 7, 427-434 (1984).

11. Kaya R., Çiftçi S., On Menelaus and Ceva 6-Figures in Moufang Projective Planes, Geometriae Dedicate, 19, 295-296 (1985).

12. Kaya R., Çiftçi S., On the Fano Subplanes in the Translation Plane of order 9, Doğa Tr. J. Math., 14, 1-7 (1990).

13. Kaya R., Olgun Ş., Construction of Some Hyperbolic Planes From Projective Planes Using Baer Subplanes, Research and Lecture Notes in Mathematics, Meterranean Pres, Italy, Combinatorics'88, Vol. 2, 141-148 (1988).

14. Kuijken L., Van Maldeghem H., On the definition and some conjectures of fuzzy projective planes by Gupta and Ray, and a new definition of fuzzy building geometries, Fuzzy Sets and Systems, 138, 667-685 (2003).

15. Limbos M., Plongement et Arcs Projectifs, Ph.D Thesis, Universite Libre de Bruxelles.

16. Mazzocca F., Melone N., Caps and Veronese varieties in projective Galois spaces, Discrete Math. 48, 243-252 (1984).

17. Tallini G., Una proprieta grafica caratteristica delle superficie di Veronese negli spazi finiti (Note I; II), Atti Accad. Naz. Lincei Rend, 24, 135-138 (1976).

18. Thas J. A., Van Maldeghem H., Characterizations of quadric and Hermitian Veroneseans over finite fields, Jour. of Geometry, 76, 282-293 (2003).

19. Thas J. A., Van Maldeghem H., Classification of finite Veronesean caps, European J. of Combin. 25, 275-285 (2004).

20. Thas J. A., Van Maldeghem H., Characterizations of the finite quadric Veroneseans $V_n^{2^n}$, Quart. J. Math, 55, 99-113 (2004).

21. Thas J. A., Van Maldeghem H., Some characterizations of finite Hermitian Veroneseans, Des. Codes Cryptogr, 34, 283-293 (2005).

22. Thas J. A., Van Maldeghem H., Generalized Veronesean embeddings of projective spaces, Manuscript.

23. Wispeleare A. D., Huizinga J., Van Maldeghem H., Veronesean embeddings of Hermitian Unitals, in preparation.

TÜBİTAK
PROJE ÖZET BİLGİ FORMU

Proje No: 108T340

Proje Başlığı:

Bazı Geometrilerin Sonlu Projektif Uzaylara Gömülmeleri Üzerine

Proje Yürütücüsü ve Araştırmacılar:

Proje Yürütücüsü : Doç. Dr. Ziya AKÇA

Araştırmacılar : Prof. Dr. Rüstem KAYA, Doç. Dr. Ayşe BAYAR, Doç. Dr. Süheyla EKMEKÇİ

Danışman: Prof. Dr. Hendrik Van MALDEGHEM

Projenin Yürütüldüğü Kuruluş ve Adresi:

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Destekleyen Kuruluş(ların) Adı ve Adresi:

Projenin Başlangıç ve Bitiş Tarihleri: 01.10.2008 – 01.10.2010

Öz (en çok 70 kelime)

Bu projenin temel amacı Veronesean gömmelerdeki yapı kullanılarak bazı geometrilerin hangi şartlar altında sonlu projektif uzaylara gömülebileceğini belirlemek ve bu konu ile ilgili literatürde var olan boşluğu doldurarak konu üzerinde yapılacak çalışmalarda bu projenin kaynak olmasıdır.

Anahtar Kelimeler:

Projektif Uzay, Veronesean Gömme, Altgeometri, Lax-Veronesean Gömme.

Fikri Ürün Bildirim Formu Sunuldu mu? **Evet** ☐ **Gerekli Değil** ☒

Fikri Ürün Bildirim Formu'nun tesliminden sonra 3 ay içerisinde patent başvurusu yapılmalıdır.

Projeden Yapılan Yayınlar:

- Z. Akça, A. Bayar, S. Ekmekçi, R. Kaya, J.A. Thas & H. Van Maldeghem, *Generalized Lax Veronesean Embeddings of Projective Spaces*, Annals of Combinatorics
- Z. Akça, A. Bayar, S. Ekmekçi, R. Kaya & H. Van Maldeghem, *Embedding of projective plane* $PG(2,3)$ *in the projective spaces* $PG(4,q')$, Ahi Evran Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, VII. Geometri Sempozyumu, 7-10 Temmuz 2009.
- S. Ekmekçi, Z. Akça, A. Bayar, R. Kaya & H. Van Maldeghem, *On embedding of projective plane* $PG(2,3)$ *in the projective spaces* $PG(5,q')$, Ahi Evran Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, VII. Geometri Sempozyumu, 7-10 Temmuz 2009.