Rectangular M-Metrik Uzayda Sabit Çember Teoremleri

Sevin Çapar

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı

Ocak 2022

Fixed Circle Theorems in Rectangular M-Metric Space

Sevin Çapar

MASTER OF SCIENCE

Deparment of Mathematics - Computer

Ocak 2022

Rectangular M-Metrik Uzayda Sabit Çember Teoremleri

Sevin Çapar

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Özcan Gelişgen

Ocak 2022

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Özcan Gelişgen danışmanlığında hazırlamış olduğum "Rectangular M-Metrik Uzayda Sabit Çember Teoremleri" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 16/01/2022

Sevin Çapar

ÖZET

Yedi bölümden oluşan bu tezde, alışılmış metrik uzayların bir genelleştirilmesi olan rectangular $M-$metrik uzayda sabit çember kavramı ele alınarak bu uzayda sabit çemberlerin mevcut olması ve yeganelik araştırılmıştır.

Birinci bölümde, tezin konusunun matematik literatüründeki yeri, kullanım ve geçtiği süreçlerden bahsedilerek çalışılacak probleme giriş yapılmış ve ayrıcanın çalışmanın amacı verilmiştir.

İkinci bölümde, ele alınan problemin tarihsel süreç boyunca değişimi ve gelişimi hakkında mevcut literetüre kısaca değinilmiştir.

Üçüncü bölümde, çalışma içerisinde gerekli olacak temel kavramlara yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde, rectangular $M-$metrik uzay kavramı örnekleriyle ele alınıp bu uzayın analizsel ve topolojik özellikleriyle bazı sabit nokta teoremleri verilmiştir.

Beşinci bölümde, rectangular $M-$metrik uzaylarda sabit çemberin mevcut olması ve yegane olması şartları tespit edilerek ifade edilmiştir.

Altıncı ve yedinci bölümlerde çalışmada tespit sonuçlar özetlenmiş ve ayrıca ele alınan probleme dair muhtemel yapılabilecek çalışmalara dair önerilerden bahsedilmiştir.

Anahtar Kelimeler: metrik uzay, rectangular $M-$metrik uzaylar, sabit çember

SUMMARY

In this thesis, which consists of seven chapters, the concept of fixed circle in rectangular $M-$metric space, which is a generalization of usual metric spaces, is discussed and the existence and uniqueness conditions of fixed circle theorems in this space are investigated.

In the first chapter, the place of the subject of the thesis in the mathematics literature, its usage and the processes it goes through are mentioned and the problem to be studied is introduced and the purpose of the study is given.

In the second part, the current literature about the change and development of the handled question in the historical process is briefly mentioned.

In the third chapter, the basic concepts, definitions and theorems that will be used in the thesis are expressed

In the fourth chapter, the concept of rectangular $M-$metric space is discussed with examples and some fixed point theorems are given with the analytical and topological properties of this space

In the fifth chapter, existence and uniqueness conditions of fixed circle theorems in rectangular $M-$metric spaces are given

In the sixth and seventh chapters, the findings and results obtained in the thesis are summarized and suggestions for future studies are given.

Keywords: metric space, rectangular $M-$metric spaces, fixed circle

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET . . . . . **vi**

SUMMARY . . . . . **vii**

TEŞEKKÜR . . . . . **viii**

İÇİNDEKİLER . . . . . **ix**

ŞEKİLLER DİZİNİ . . . . . **x**

1. GİRİŞ VE AMAÇ **1**

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI **3**

3. TEMEL KAVRAMLAR **8**

3.1. METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT ÇEMBER TEOREMLERİ 8

3.2. METRİK UZAYLARDA BAZI TEKLİK TEOREMLERİ 20

3.3. SABİT ÇEMBER TEORİNİN SÜREKSİZ AKTİVASYON FONKSİYONLARINA BİR UYGULAMASI 22

4. RECTANGULAR M- METRİK UZAYLAR **25**

5. RECTANGULAR M-METRİK UZAYLARDA SABİT ÇEMBER TEOREMLERİ **33**

6. BULGULAR VE TARTIŞMA **56**

7. SONUÇ VE ÖNERİLER **58**

KAYNAKLAR DİZİNİ **59**

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil		Sayfa
3.1	(C_1^d1) koşulunun geometrik yorumu	9
3.2	(C_1^d2) koşulunun geometrik yorumu	10
3.3	$(C_1^d1) \cap (C_1^d2)$ koşulunun geometrik yorumu	10
3.4	(C_2^d1) koşulunun geometrik yorumu	12
3.5	(C_2^d2) koşulunun geometrik yorumu	13
3.6	$(C_2^d1) \cap (C_2^d2)$ koşulunun geometrik yorumu	13
3.7	(C_3^d1) koşulunun geometrik yorumu	16
3.8	(C_3^d2) koşulunun geometrik yorumu	16
3.9	$(C_3^d1) \cap (C_3^d2)$ koşulunun geometrik yorumu	17
3.10	Örnek Aktivasyon fonksiyonunun grafiği	24
4.1	X_θ kümesinin geometrik gösterimi	26
4.2	Genelleştirilmiş metrik uzayları ilişkileri	28

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Sabit nokta teorisi, başta matematik olmak üzere birçok bilim dalında çok sayıda uygulaması olan büyüleyici bir konudur. Bu nedenle literatürde bulunan birçok çalışma ile farklı yönlerde geliştirilmiş ve genişletilmiştir. Örneğin matematikde diferensiyel denklemler, integral denklemleri, potansiyel teori, yaklaşım teorisi, oyun teorisi ve kontrol sistemleri gibi alanlarda uygulanmasının yanı sıra tıpta tomografi, haberleşmede interpolasyon, sinyal sentezleri, telekominikasyon, ve matematiksel ekonomi başta olmak üzere, istatistik, mühendislik, esneklik teorisi, gibi farklı çalışma alanlarında da çeşitli uygulamalarını görülmektedir.

Sabit nokta teorisinin temelinde
$''X$ herhangi bir küme (uzay), A ile B $A \cap B \neq \emptyset$ koşulunu sağlayan X in alt kümeleri(alt uzayları) olmak üzere $T : A \to B$ dönüşümü ele alındığında $T(x) = x$ olacak şekilde $x \in A$ nın varolması için gerekli koşullar nedir?'' sorusu yatmaktadır. Soruda ifade edilen $x \in A$ ya T dönüşümünün sabit noktası adı verilirken soruya cevap veren gerekli koşulları ifade eden hipotezlere sabit nokta teremi denir.

Genel olarak sabit nokta teorisi çalışmalar için üç ana kola ayırılarak bir sınıflandırma yapılabilir. Bu ana kollar Brouwer'in 1912 yılındaki çalışmasındaki sabit nokta teoremini temele oturtan Topolojik sabit nokta teori, Banach'ın 1922 yılındaki çalışmasında ifade ettiği sabit nokta teoremini temele oturtan Metrik sabit nokta teori ve Tarski'nin 1955 yılında yayınladığı çalışmasındaki sabit nokta teoremini merkeze alan Ayrık sabit nokta teoridir.

Bu tez çalışmasında ana ekseninde Banach sabit nokta teoreminin bulunduğu ve ana hatları bu teorem ile belirlenen Metrik sabit nokta teori alanında çalışılacaktır.Bu teorinin kökenleri 19.yüzyılın ikinci yarısına kadar uzanırken özellikle diferasiyel denklemlere yönelik çözümlerin varlığını ve tekliğini belirlemek için ardışık yaklaşımların kullanılmasına dayanır. Dolayısıyla bu yöntem Cauchy, Liouville, Lipschitz, Peano, Fredholm ve özellikle Picard gibi ünlü matematikçilerin isimleri ile ilişkilidir.

Bununla birlikte, temeldeki fikirleri, temel diferansiyel ve integral denklemlerin kapsamının çok ötesinde geniş uygulamalar için uygun soyut bir çerçeveye yerleştirilen Polonyalı matematikçi Stefan Banach'tır. Banach analizde yaygın olarak kullanılan tüm uzayların ortak bir özelliği olan "metrik tamlığının" temel rolünü farketti ve bunu teorinin

merkezine yerleştirdi. Bundan sonra uzun yıllar boyunca metrik sabit nokta teorisindeki çalışmalar Banach büzülme prensibinin çeşitli uzantıları ve onların çeşitli uygulamaları ile sınırlı kaldı. Büzülme koşulunun değişmesi fikrine dayanan bu çalışmalara örnek olarak Kannan, Chaterjea, Bionehini, Reich, Hardy-Rogers gibi yazarlarların isimleri ile anılan sabit nokta teoremleri verilebilir.

Ayrıca Rhodes 1977 yılında yayımladığı çalışmasında mevcut olan büzülme koşullarını ele alarak bu koşullar arasındaki ilişkileri incelemiş ve yeni büzülme koşulları ortaya atmıştır. Günümüzde bu tarz çalışmalar yapılmaya devam etmektedir.

Bu alanda yapılan çalışmaların yoğunlaştığı bir diğer fikirde basitçe çalışılan metrik uzay kavramının genelleştirilmesidir. 1906 yılında Frachet'in ortaya attığı metrik uzay kavramı aradan geçen yüzyılı aşkın sürede çeşitli şekillerde genelleştirilmiştir. Bu çalışmalara örnek olarak 1994 yılında Matthews'ın tanımladığı kısmi metrik uzay, 2000 yılında Branciori'nin tanımladığı Branciori (veya rectangular) metrik uzay, 2007 de Mustafa ve Sims'in tanımladığı $G-$metrik uzay, 2012 de Sedgi vd tanımladığı $S-$metrik uzay, 2014 yılında Asadi vd tanımladığı $M-$metrik uzay, yine aynı yıl Shukla'nın tanımladığı kısmi rectangular metrik uzay kavramları verilebilir. Günümüzde bu tarzda çalışmalar yoğunlaşarak yapılmaya devam etmektedir. Kısa bir araştırma ile ismi burada bahsedilmeyen başka metrik uzay genelleştirilmelerinin olduğu görülebilir.

Yukarıda ifade edilen bu alanda çalışmaların yoğunlaştığı fikirlerin dışında son yıllarda çalışmaların görülüp sıklaşmaya başladığı bir temel problem daha vardır. Bu problem ise sabit nokta teorisinin temelinde yer alan sorunun çözümü (çözüm kümesi) boş küme, sonlu küme veya sayılabilir ya da sayılamaz sonsuz küme olabilir. Daha önce ifade edilen çalışma alanlarında bu kümenin tek bir elemana sahip olduğu durumlara konsantre olunmuştur. Ancak Nihal Özgür ve Nihal Taş'ın öncülük ettiği ve 2016 yılında yaptıkları çalışma ile başlattıkları problem sabit nokta kümesinin birden fazla eleman içermesi durumunda bu kümenin ne gibi geometrik özelliklerinin bulunduğunun araştırılmasıdır. 2016 yılı sonrasında başta Özgür ve Taş olmak üzere çeşitli bilim insanları tarafından bu soruya çeşitli çözümler ve açılımlar getirilmiştir.

Bu tez çalışmasında metrik sabit nokta teorisi ana kolunda yer alacak şekilde (alışılmış) metrik uzayın bir genellemesi olan rectangular(dikdörtgen) $M-$metrik uzaylarda ele alınan bir kendi üzerine dönüşümünün sabit noktalarının kümesinin birden fazla eleman ihtiva ettiği durumlarda bu noktaların geometrik özellikleri incelenecektir. Daha açıkça bu sabit noktaların ne zaman ya da hangi koşullar altında bir çember üzerinde bulundukları ve yahut da ne zaman veya hangi koşullar altında bir çemberin sabit kaldığı araştırılacaktır.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Matematik analizin teorinin çalışmatekniklerinden etkilenmiştir. Öte yandan kümelerin cebirsel özellikleri ilerlemeler kaydetmek için yetersizlik göstermeye başladığından metrik uzaylara gerek duyulmuştur. Metrik uzay ifadesi ilk olarak 20. yüzyılının hemen başında Maurice Fréchet tarafından tanıtılmıştır (Fréchet, 1906). Fréchet 20. yüzyılın aşlarında kaleme aldığı makalesinde uzaklık fonksiyonu kavramının tanımını aşağıdaki şekilde yapmıştır.

Tanım 2.1 *$X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu*

1)*Her $x, y \in X$ için $x = y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$ dır. (Özdeşlik)*
2)*Her $x, y \in X$ için $x \neq y$ ise $d(x, y) > 0$ dır. (negatif olmama)*
3)*Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$ dir. (Simetri)*
4)*Her $x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ dir. (Üçgen eşitsizliği)*

şartlarını gerçekliyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir uzaklık fonksiyonu ve $(X,\ d)$ ifadesine de metrik uzay adı verilir.

Bu d ifadesine uzaklık fonksiyonu ismi yerine metrik ismini ilk kullananan bilim insanı ünlü matematikçi Hausdorff olmuştur. Bu sayede klasik analiz alanı modernize olmuştur yani klasikten moderne geçiş sağlanmıştır. Gerçekten de reel ve kompleks uzaylarda iyi anlaşılmış olan bir çok ehemmiyetli özelliklerin bir başka uzaya aşınma yöntemleri metrik ve metrik uzay kavramı ile elde edilir. Dahası topoloji alanında oldukça soyut olan bazı kavramlar, metrik uzaylarda daha somut şekilde açıklanma fırsatı elde eder. Maurice Fréchet ayrıca lineer metrik uzay ifadesini 1926 yılındaki gerçekleştirdiği bir makalesinde tanımlamıştır (Fréchet, 1926). Daha sonra metrik uzayla ilgili sayısız çalışmalar üretilmiş ve uygulama alanları incelenmiş olup bunun neticesinde metrik uzaylar matematiğin en önemli konularından biri olmuştur.

1994' te Matthews birbine eşit noktalar arasındaki uzaklığın sıfır olmasının gerekmediği kısmi metrik uzay kavramını bilinen metrik uzayın bir genellemesi olarak tanımlamıştır.

Matthews'in 1994 te verdiği tanım aşağıdaki gibidir.

Tanım 2.2 *Boş olmayan bir X kümesi ve her $x, y, z \in X$ için*

$1) d(x,x) = d(y,y) = d(x,y) \Leftrightarrow x = y$
$2) d(x,x) \leq d(x,y)$
$3) d(x,y) = d(y,x)$
$4) d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) - d(z,z)$

şartlarını gerçekleyen $d : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonuna X üzerinde bir kısmi uzaklık fonksiyonu ve (X, d) ifadesine de kısmi metrik uzay adı verilir.

Buna göre kısmi metrik uzaylarda ilginç olan özellik metrik uzay teorisinde olanına aksine bir noktanın kendisine olan uzaklığın sıfır olmak zorunda olmamasıdır.
Kısmi metrik uzaya bir örnek olarak (X, d) bir metrik uzay ve

$$B(X) = \{B(x,r) \mid B(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r, x \in X, r > 0\}\}$$

olmak üzere her $B(x_1, r_1)$,$B(x_2, r_2) \in B(X)$ için

$$d^*(B(x_1,r_1), B(x_2,r_2)) = d(x_1,x_2) + \max\{r_1, r_2)\}$$

biçiminde tanımlanan $d^* : B(X) \times B(X) \to [0, \infty)$ ifadesi $B(X)$ üzerinde bir kısmi metriktir. Dolayısıyla $(B(X), d^*)$ bir kısmi metrik uzaydır. (Tomar vd,2020)

2000 yılında Branciari yayımladığı çalışmasında (alışılmış) klasik metrik uzaydaki üçgen eşitsizliği kavramını genişletilerek Branciari metrik uzay ya da rectangular (dikdörtgen) metrik uzay ifadesini aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

Tanım 2.3 *Boş olmayan bir X kümesi ve her $x, y \in X$ ile her $u, v \in X \setminus \{x, y\}$, $u \neq v$ için*

$1) d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
$2) d(x,y) = d(y,x)$
$3) d(x,y) \leq d(x,u) + d(u,v) + d(x,y)$

şartlarını gerçekleyen $d : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonuna X üzerinde bir Branciari (rectangular) metrik ve (X, d) ifadesine Branciari (rectangular) metrik uzay denir.

Daha sonra 2014 yılında Shukla, Branciari'nin çalışmasından esinlenerek kısmi metrik ile rectangular metrik fikirlerini birleştirerek kısmi dikdörtgen metrik uzay ifadesini aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

Tanım 2.4 *Boş olmayan bir X kümesi ve her $x, y, \in X$ ile her $u, v \in X \setminus \{x, y\}$, $u \neq v$ için*

$1)d(x, x) = d(y, y) = d(x, y) \Leftrightarrow x = y$
$2)d(x, x) \leq d(x, y)$
$3)d(x, y) = d(y, x)$
$4)d(x, y) \leq d(x, u) + d(u, v) + d(v, y) - d(u, u) - d(v, v)$

şartlarını gerçekleyen $d : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonuna X üzerinde bir kısmi rectangular metrik ve (X, d) ifadesine kısmi rectangular metrik uzay adı verilir.

Yine aynı yıl yani 2014 yılında Asadi vd yaptıkları çalışma ile kısmi metrik uzay kavramını genişleterek adına $M-$metrik uzay dedikleri kavramı aşağıdaki gibi tanımlar.

Tanım 2.5 *Boş olmayan bir X kümesi ve her $x, y, z \in X$ ve için*

$$m_{x,y} := \min\left\{m_(x, x), m_(y, y)\right\} \text{ ve } M_{x,y} := \max\left\{m_(x, x), m_r(y, y)\right\}$$

olmak üzere

$1)m_(x, x) = m_{y,y} = m_{x,y} \Leftrightarrow x = y$
$2)m_{x,y} \leq m_(x, y)$
$3)m_(x, y) = m_(y, x)$
$4)(m_(x, y) - m_{x,y}) \leq (m(x, z) - m_{x,z}) + (m(z, y) - m_{z,y})$

şartlarını gerçekleyen $m : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonuna X üzerinde bir $M-$metrik ve (X, m) ifadesine de $M-$metrik uzay denir.

2018 senesinde Özgür vd yaptıkları çalışmada Branciari'nin rectangular metrik uzay kavramı ile Asadi vd'nin $M-$metrik uzay kavramını birleştirerek rectangular $M-$metrik uzay kavramını aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

Tanım 2.6 *Boş olmayan bir X kümesi ve her $x, y, \in X$ her $u \neq v$ olacak şekildeki $u, v \in X \setminus \{x, y\}$ için*

$$m_{r_{x,y}} := \min\{m_r(x, x), m_r(y, y)\} \text{ ve } M_{r_{x,y}} := \max\{m_r(x, x), m_r(y, y)\}$$

olmak üzere

$1) m_r(x,y) = m_{r_{x,y}} = M_{r_{x,y}} \Leftrightarrow x = y$
$2) m_{r_{x,y}} \leq m_r(x,y)$
$3) m_r(x,y) = m_r(y,x)$
$4) (m_r(x,y) - m_{x,y}) \leq m_r(x,u) - m_{r_{x,u}} + m_r(u,v) - m_{r_{u,v}} + m_r(v,y) - m_{r_{v,y}}$

koşullarını sağlıyorsa m_r *ye* X *üzerinde bir rectangular* $M-$*metrik ve* (X, m_r) *ifadesine rectangular* $M-$*metrik uzay denir.*

Buraya kadar ifade edilen kavramlar $X \neq \varnothing$ kümesi için $X \times X$ üzerinde tanımlanan (alışılmış) metrik kavramının yine $X \times X$ üzerindeki genellemeleridir. Ancak 1906 metrik kavramının tanımlanmasından sonra geçen süreçte (alışılmış) metrik kavramı önceleri $X \times X \times X$ üzerinde sonrasında $X \times X \times ... \times X$ üzerinde genelleştirilmiştir. Bu kavramlara örnek olarak $2-$, $D-$, $G-$, $S-$, $A-$metrik uzay kavramları verilebilir. Fakat tez çalışmasında bu tarz genelleştirilmeler ile ilgilenilmeyeceğinden detaylandırılmayıp sadece isimlerin ifade edilmesi ile yetinilecektir. Bu kavramlara dair daha detaylı bilgiler için Gahler, 1963, Dhaye, 1994, Mustafa vd 2007, Sedhgi vd 2012 ve Abbas vd 2015 çalışmalarına bakılabilir.

Metrik uzayların genelleştirilmesine yönelik araştırmalar devam ederken 2017 yılında Nihal Özgür ve Nihal Taş standart sabit nokta teoremlerini düzenleyerek klasik metrik uzaylarda ve $S-$metrik uzaylarda sabit çember kavramını ortaya attılar ve aynı zamanda sabit çemberlerin mevcut olma ve yeganelik koşullarını araştırmışlardır.

Metrik uzayın genelleştirilmesi üzerine çalışmalar sürerken Banach'ın 1922 yılında ortaya koyduğu büzülme koşulunun genelleştirilmesi üzerine de çalışmalar yapılıyordu. Bunlara örnek olarak Meir-Keeler' ın 1969, Ćirić'in 1974 , Ekeland' ın 1974 , Caristi' nin 1976 yılında ve Rhodes'in 1977 yılında yaptıkları çalışmalar verilebilir. Elbette bu tarz çalışmalar günümüzde de metrik uzaylarda ve metrik uzayların genelleştirilmişlerinde de hızla devam etmektedir.

Bununla birlikte metrik uzaylarda ele alınan kendi üzerinde dönüşümünün tek bir sabit noktası olmak zorunda değildir. Dahası dönüşüm birden fazla sabit noktaya olabilir. Bu noktada ele alınan sabit noktaların ne gibi geometrik özellikleri olduğu akıllara gelmiş olup Özgür ve Taş' ın 2016 yılında başlattıkları çalışmalar ile sabit noktaların geometrik özellikleri incelenmeye başlanmıştır. Böylece ilk olarak sabit noktaların ne zaman bir çember oluşturacağı sorusu ile sabit çember kavramı ortaya çıkmıştır ve kısa zamanda birçok sonuç bulunmuştur. Sonralarda çalışmalar çeşitlenerek ve sabit disk, sabit elips, sabit hiperbol, sabit Cassini ovali, sabit Apollonius çemberi gibi çeşitli kavramlara ulaşılmıştır

bu konularda çalışmalar (alışılmış) metrik uzay ve metrik uzayın genelleştirilmesinde hızla devam etmektedir. Bunlar ile ilgili detaylı bilgiler için Özgür ve Taş ’ ın 2016, 2017, 2018, 2019, 2021 ve Erçınar’ın 2020 çalışmalarına ve onların referanslarına bakılabilir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tez çalışmasında ele alınarak rectangular $M-$metrik uzaylarda ele alınacak olan sabit çember konusunda verilecek kavram ve teoremleri anlaşılır kılmak adına bu kavram ve teoremlerin (alışılmış) metrik uzaydaki halleri literatürden özetlenerek verilecektir.

3.1 METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT ÇEMBER TEOREMLERİ

Bu kısımda klasik metrik uzaylarda sabit çember teorisine dair kavram, tanım ve teoremler Özgür ve Taş, 2017 makalesinden özetlenerek verilmiştir. Burada verilen teoremlerin ispatlarına Özgür ve Taş' ın, 2017 çalışmasından ulaşılabilir. Bu kısımda verilmiş olan örnekler ilgili çalışmada yer alan örneklerden faklı olup farklı örnekler için ilgili çalışmaya bakılabilir.

Bir kendi üzerine dönüşümün sabit noktalarının sayısı birden çok olduğunda bu noktaların ne zaman veya hangi koşullar altında bir çember teşkil edecekleri sorusu ile sabit çember teorisi ile ilgili çalışmalar başlamıştır. Bu bağlamda ilk olarak çember ve sabit çember tanımları verildikten sonra sabit çemberlerin varlık koşulları ile ilgili teoremler verilecektir.

Tanım 3.1 *(X, d) bir (alışılmış) metrik uzay, x_0, X de bir nokta ve r pozitif bir reel sayı olsun. Buna göre*

$$C_{x_0,r} = \{x \in X \mid d(x, x_0) = r\}$$

kümesine merkezi x_0 noktası ve yarıçapı r olan çember denir. (Özgür ve Taş, 2017)

Tanım 3.2 *(X, d) herhangi bir (klasik) metrik uzay, $C_{x_0,r}$ ilgili uzayda merkezi x_0 ve yarıçapı r olan bir çember olsun. Ayrıca T, uzayın kendi üzerine bir dönüşümü olmak üzere her $x \in C_{x_0,r}$ için $Tx = x$ ise $C_{x_0,r}$ çemberine T dönüşümünün bir sabit çemberi denir. (Özgür ve Taş, 2017)*

Bu bölümünün bundan sonraki kısmında verilecek olan teorem 3.7 -3.10 da alışılmış metrik uzayda bir T uzayın kendi üzerine bir dönüşümü için sabit çemberlerin mevcudiyetini garanti eden şartlar ifade edilmiştir.

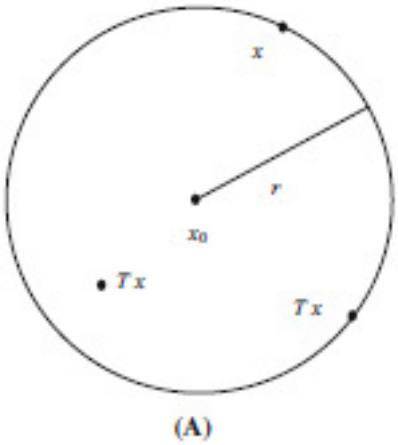
Teorem 3.1 (X, d) *bir klasik metrik uzay ve* $C_{x_0,r}$ *klasik metrik uzayda merkezi* x_0 *ve yarıçapı* r *olan çember olsun. Üstelik* $\phi : X \to [0, \infty)$ *ifadesi her* $x \in X$ *için* $\phi_x = d(x, x_0)$ *olacak şeklinde tanımlansın. O halde,* $T : X \to X$ *dönüşümü her* $x \in C_{x_0,r}$ *için,*

$(C_1^d 1) d(x, Tx) \leq \phi(x) - \phi(Tx)$
$(C_1^d 2) d(Tx, x_0) \geq r$

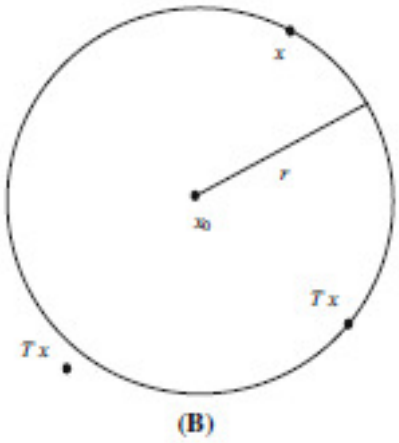
şartlarını gerçekliyorsa $C_{x_0,r}$ *çemberi* T *dönüşümünün sabit çemberidir.(Özgür ve Taş, 2017)*

Bu noktada teorem 3.7 deki $(C_1^d 1)$ koşulu x noktasının T dönüşümü altındaki görüntüsü olan Tx noktasının $C_{x_0,r}$ çemberinin içinde veya üzerinde olması gerektiğini yani Tx noktasının $C_{x_0,r}$ çemberinin içinde olmayacağını ifade eder. Benzer şekilde $(C_1^d 2)$ koşulu da Tx noktasının $C_{x_0,r}$ çemberinin dışında veya üzerinde olması gerektiğini yani Tx noktasının $C_{x_0,r}$ çemberinin içinde olmayacağını ifade eder. Doğal olarak iki koşul aynı anda geçerli olduğunda tek durum Tx noktasının çemberin üzerinde olmasıdır.

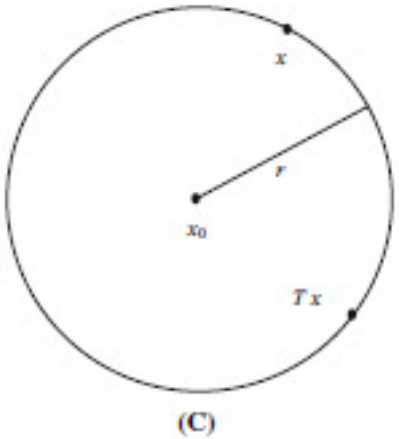
Bu noktada $(C_1^d 1)$ ve $(C_1^d 2)$ koşullarının geometrik yorumları aşağıda yer alan Şekil 3.1, Şekil 3.2 ve Şekil 3.3 de verilmektedir.



Şekil 3.1 $(C_1^d 1)$ koşulunun geometrik yorumu



Şekil 3.2 $(C_1^d 2)$ koşulunun geometrik yorumu



Şekil 3.3 $(C_1^d 1) \cap (C_1^d 2)$ koşulunun geometrik yorumu

Örnek 3.1 *$X = \mathbb{R}$ ve $d, \mathbb{R}$ üzerinde standart metrik olmak üzere $(\mathbb{R}, d)$ metrik uzayı ele alınsın. Ayrıca $(\mathbb{R}, d)$ metrik uzayında $C_{0,1}$ çemberi ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = x^3$ dönüşümü göz önüne alınsın. Buna göre açıkça*

$$C_{0,1} = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, 0) = 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 0| = 1\} = \{-1, 1\}$$

dir. Üstelik her $x \in C_{0,1}$ için $(C_1^d 1)$ koşulu

$x = -1$ *için* $|-1 - (-1)^3| \leq 1 - |-1 - 0| \Rightarrow 0 \leq 0$
$x = 1$ *için* $|1 - (1)^3| \leq 1 - |1 - 0| \Rightarrow 0 \leq 0$

olup sağlanır. Benzer şekilde her $x \in C_{0,1}$ *için* $(C_1^d 2)$ *koşulu*

$x = -1$ *için* $|(1)^3 - 0| \geq 1 \Rightarrow 1 \geq 1$
$x = 1$ *için* $|1 - 0| \geq 1 \Rightarrow 1 \geq 1$

olup sağlanır. O halde $C_{0,1}$ *çemberi* T *dönüşümünün bir sabit çemberidir.*

Örnek 3.2 *Bir önceki örnek 3.1 de alınan metrik uzay ve çember yeniden ele alınsın. Ayrıca* $T : X \to X$ *dönüşümü her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $Tx = \frac{1}{4}x^3$ *olacak şekilde tanımlansın. Buna göre her* $x \in C_{0,1}$ *için* $(C_1^d 1)$ *koşulu*

$x = -1$ *için* $\left|-1 - \frac{1}{4}(-1)^3\right| \leq 1 - \left|\frac{1}{4}(-1)^3 - 0\right| \Rightarrow \frac{3}{4} \leq \frac{3}{4}$
$x = 1$ *için* $\left|-1 - \frac{1}{4}(1)^3\right| \leq 1 - \left|\frac{1}{4}(1)^3 - 0\right| \Rightarrow \frac{3}{4} \leq \frac{3}{4}$

olup sağlanıyor iken açıkça $(C_1^d 2)$ *koşulu*

$x = -1$ *için* $\left|\frac{1}{4}(-1)^3 - 0\right| \geq 1 \Rightarrow \frac{3}{4} \leq \frac{3}{4}$
$x = 1$ *için* $\left|-1 - \frac{1}{4}(1)^3\right| \leq 1 - \left|\frac{1}{4}(1)^3 - 0\right| \Rightarrow \frac{1}{4} \geq 1$

olduğundan sağlanamaz. Dolayısıyla $C_{0,1}$ *çemberi* T *dönüşümünün bir sabit çemberi değildir*

Örnek 3.3 *Örnekte alınan metrik uzay ve çember ele alınsın. Ayrıca* $T : X \to X$ *dönüşümü her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $Tx = x^3 - 2$ *olacak şekilde tanımlansın. Buna göre her* $x \in C_{0,1}$ *için* $(C_1^d 1)$ *koşulu apaçık bir şekilde*

$x = -1$ *için* $|-1 - (-1)^3 + 2| \leq 1 - |(-1)^3 - 2| \Rightarrow 2 \leq -2$
$x = 1$ *için* $|1 - (1)^3 + 2| \leq 1 - |1^3 - 2| \Rightarrow 2 \leq 0$

olup sağlanamaz iken $(C_1^d 2)$ *koşulu*

$x = -1$ *için* $|(-1)^3 - 2 - 0| \geq 1 \Rightarrow 3 \geq 1$
$x = 1$ *için* $|1^3 - 2 - 0| \geq 1 \Rightarrow 1 \geq 1$

olacağından sağlanır. Dolayısıyla $C_{0,1}$ *çemberi* T *dönüşümünün bir sabit çemberi değildir.*

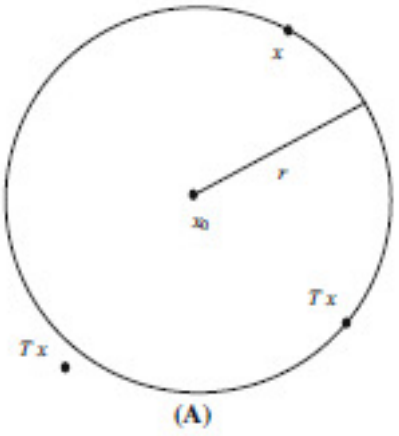
Teorem 3.2 *(X, d) bir klasik metrik uzay ve $C_{x_0,r}$ klasik metrik uzayda merkezi x_0 ve yarıçapı r olan çember olsun. Ayrıca $\phi : X \to [0, \infty)$ ifadesi her $x \in X$ için $\phi_x = d(x, x_0)$ olacak şekilde tanımlansın. O halde, $T : X \to X$ dönüşümü her $x \in C_{x_0,r}$ için,*

$(C_2^d1) d(x, Tx) \leq \phi(x) + \phi(Tx) - 2r$
$(C_2^d2)\ d(Tx, x_0) \leq r$

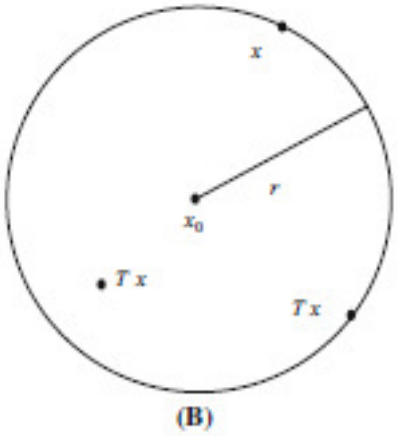
şartlarını gerçekliyorsa $C_{x_0,r}$ çemberi T dönüşümünün sabit çemberidir.(Özgür ve Taş, 2017)

Bu noktada teorem 3.8 deki (C_2^d1) koşulu x noktasının T dönüşümü altındaki görüntüsü olan Tx noktasının $C_{x_0,r}$ çemberinin içinde veya üzerinde olması gerektiğini yani Tx noktasının $C_{x_0,r}$ çemberinin içinde olmayacağını ifade eder. Benzer şeklide (C_1^d2) koşulu da Tx noktasının $C_{x_0,r}$ çemberinin dışında veya üzerinde olması gerektiğini yani Tx noktasının $C_{x_0,r}$ çemberinin içinde olmayacağını ifade eder. Doğal olarak iki koşul aynı anda geçerli olduğunda tek durum Tx noktasının çemberin üzerinde olmasıdır.

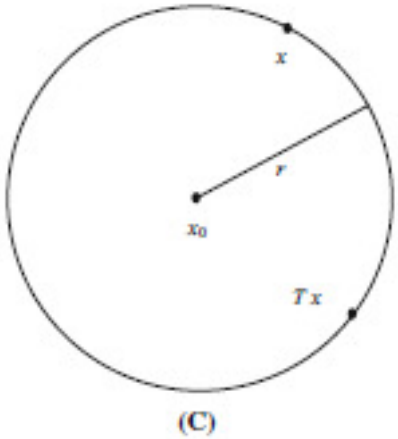
Bu noktada (C_2^d1) ve (C_2^d2) koşullarının geometrik yorumları aşağıda yer alan Şekil 3.4, Şekil 3.4 ve Şekil 3.6 de verilmektedir.



Şekil 3.4 (C_2^d1) koşulunun geometrik yorumu



Şekil 3.5 $(C_2^d 2)$ koşulunun geometrik yorumu



Şekil 3.6 $(C_2^d 1) \cap (C_2^d 2)$ koşulunun geometrik yorumu

Örnek 3.4 *$X = \mathbb{R}$ ve $d, \mathbb{R}$ üzerinde standart metrik olmak üzere $(\mathbb{R}, d)$ metrik uzayı ele alınsın. Ayrıca $(\mathbb{R}, d)$ metrik uzayında $C_{2,1}$ çemberi ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = 2x^3$ dönüşümü göz önüne alınsın. O halde*

$$C_{2,1} = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, 1) = 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| = 2\} = \{-1, 3\}$$

dir. Üstelik her $x \in C_{1,2}$ için $(C_2^d 1)$ koşulu

$x = -1$ için $|-1 + 2| \leq 1 + 4 - 2 \Rightarrow 1 \leq 3$

$x = 3$ *için* $|3 - 54| \leq 3 + 52 - 2 \Rightarrow 51 \leq 51$

olup sağlanır. Benzer şekilde her $x \in C_{2,1}$ *için* $(C_2^d 2)$ *koşulu*

$x = -1$ *için* $|2 + 2| \leq 1 \Rightarrow 4 \leq 1$
$x = 3$ *için* $|2 - 54| \leq 1 \Rightarrow 52 \leq 1$

olup sağlanmaz. O halde $C_{2,1}$ *çemberi* T *dönüşümünün bir sabit çemberi değildir.*

Örnek 3.5 $X = \mathbb{R}$ *ve* $d, \mathbb{R}$ *üzerinde standart metrik olmak üzere* $(\mathbb{R}, d)$ *metrik uzayı ele alınsın. Ayrıca* $(\mathbb{R}, d)$ *metrik uzayında* $C_{2,1}$ *çemberi ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $Tx = -\ln|x| + \frac{5}{2}$ *dönüşümü göz önüne alınsın. O halde*

$$C_{2,1} = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, 1) = 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| = 2\} = \{-1, 3\}$$

dir. Üstelik her $x \in C_{1,2}$ *için* $(C_2^d 1)$ *koşulu*

$x = -1$ *için* $|-1 - 2,5| \leq 1 + 2,5 - 2 \Rightarrow 3,5 \leq -1,5$
$x = 3$ *için* $|3 - (1,4013)| \leq 3 + 1,4013 - 2 \Rightarrow 1,5987 \leq -0,4013$

olup sağlanmaz. Benzer şekilde her $x \in C_{2,1}$ *için* $(C_2^d 2)$ *koşulu*

$x = -1$ *için* $|2,5 - 2 - 0| \leq 1 \Rightarrow 0,5 \leq 1$
$x = 3$ *için* $|1,4013 - 2 - 0| \leq 1 \Rightarrow 0,598 \leq 1$

olup sağlanır. O halde $C_{2,1}$ *çemberi* T *dönüşümünün bir sabit çemberi değildir.*

Örnek 3.6 $X = \mathbb{R}$ *ve* $d, \mathbb{R}$ *üzerinde standart metrik olmak üzere* $(\mathbb{R}, d)$ *metrik uzayı ele alınsın. Ayrıca* $(\mathbb{R}, d)$ *metrik uzayında* $C_{0,2}$ *çemberi ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $Tx = \frac{x^3 + |x| - 2}{4}$ *dönüşümü göz önüne alınsın. O halde*

$$C_{2,1} = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, 0) = 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 0| = 2\} = \{-2, 2\}$$

dir. Üstelik her $x \in C_{0,2}$ *için* $(C_2^d 1)$ *koşulu*

$x = -2$ *için* $|-2 - (-2)| \leq |-2 - 0| + |-2 - 0| - 4 \Rightarrow 0 \leq 0$
$x = 2$ *için* $|2 - 2| \leq |2 - 0| + |2 - 0| - 4 \Rightarrow 0 \leq 0$

olup sağlanır. Benzer şekilde her $x \in C_{0,2}$ *için* $(C_2^d 2)$ *koşulu*

$x = -2$ *için* $|-2-0| \leq 2 \Rightarrow 2 \leq 2$
$x = 2$ *için* $|2-0| \leq 2 \Rightarrow 2 \leq 2$

olup sağlanır. O halde $C_{0,2}$ *çemberi* T *dönüşümünün bir sabit çemberidir.*

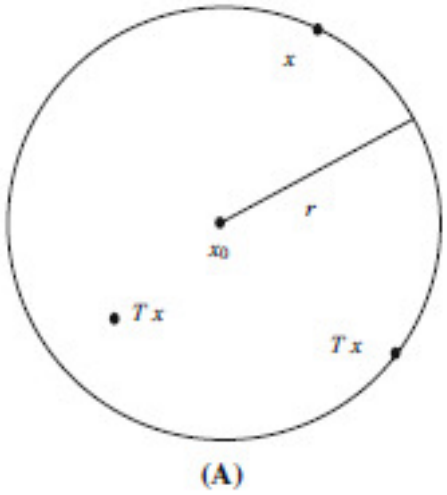
Teorem 3.3 (X, d) *bir alışılmış metrik uzay ve* $C_{x_0,r}$ *alışılmış metrik uzayda* x_0 *merkezli* r *yarıçaplı çember olsun. Üstelik* $\phi : X \to [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için* $\phi_x = d(x, x_0)$ *olacak şekilde tanımlansın. Bu taktirde,* $T : X \to X$ *dönüşümü her* $x \in C_{x_0,r}$ *ve bazı* $h \in [0, 1)$ *için*

$(C_3^d 1) d(x, Tx) \leq \phi(x) - \phi(Tx)$
$(C_3^d 2)\ hd(x, Tx) + d(Tx, x_0) \geq r$

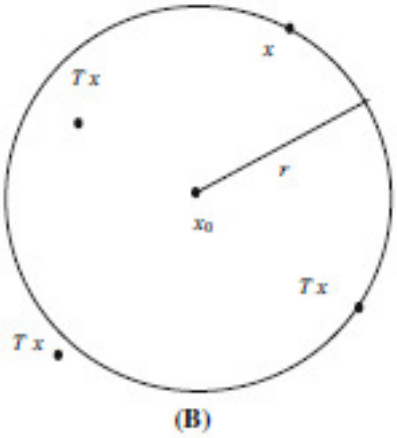
koşullarını sağlıyorsa $C_{x_0,r}$ *çemberi* T *dönüşümünün bir sabit çemberidir.(Özgür ve Taş, 2017)*

Bu noktada teorem 3.9 daki $(C_3^d 1)$ koşulu x noktasının T dönüşümü altındaki görüntüsü olan Tx noktasının $C_{x_0,r}$ çemberinin içinde veya üzerinde olması gerektiğini yani Tx noktasının $C_{x_0,r}$ çemberinin içinde olmayacağını ifade eder. Benzer şeklide $(C_3^d 2)$ koşulu da Tx noktasının $C_{x_0,r}$ çemberinin dışında veya üzerinde olması gerektiğini yani Tx noktasının $C_{x_0,r}$ çemberinin içinde olmayacağını ifade eder. Doğal olarak iki koşul aynı anda geçerli olduğunda tek durum Tx noktasının çemberin üzerinde olmasıdır.

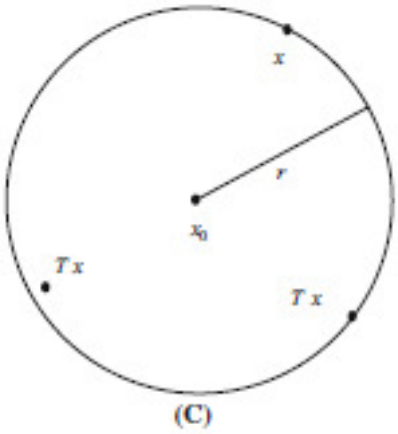
Bu noktada $(C_3^d 1)$ ve $(C_3^d 2)$ koşullarının geometrik yorumları aşağıda yer alan Şekil 3.7, Şekil 3.8 ve Şekil 3.9 de verilmektedir.



Şekil 3.7 $(C_3^d 1)$ koşulunun geometrik yorumu



Şekil 3.8 $(C_3^d 2)$ koşulunun geometrik yorumu



Şekil 3.9 $(C_3^d 1) \cap (C_3^d 2)$ koşulunun geometrik yorumu

Örnek 3.7 *$X = \mathbb{R}$ ve $d, \mathbb{R}$ üzerinde standart metrik olmak üzere $(\mathbb{R}, d)$ metrik uzayı ele alınsın. Ayrıca $(\mathbb{R}, d)$ metrik uzayında $C_{0,2}$ çemberi ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = \pi x + 20$ dönüşümü göz önüne alınsın. $h \in [0, 1)$ olmak üzere*

$$C_{0,2} = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, 0) = 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 0| = 2\} = \{-2, 2\}$$

dir. Üstelik her $x \in C_{0,2}$ için $(C_3^d 1)$ koşulu

$x = -2$ *için* $|-2 + 2\pi + 20| \leq 2 - |-2\pi + 20| \Rightarrow 22 - 2\pi \leq -18 - 2\pi$
$x = 2$ *için* $|2 - 2\pi - 20| \leq 2 - |2\pi + 20| \Rightarrow 18 + 2\pi \leq -18 - 2\pi$

olup sağlanmaz. Benzer şekilde her $x \in C_{0,2}$ için $(C_3^d 2)$ koşulu

$x = -2$ *için* $h\,|22 - 2\pi| + |20 - 2\pi| \geq 2 \Rightarrow h(22 - 2\pi) + 20 - 2\pi \geq 2$
$x = 2$ *için* $h\,|18 + 2\pi| + |20 + 2\pi| \geq 2 \Rightarrow h(18 + 2\pi) + 20 + 2\pi \geq 2$

olup sağlanır. O halde $C_{0,2}$ çemberi T dönüşümünün bir sabit çemberi değildir.

Örnek 3.8 *$X = \mathbb{R}$ ve $d, \mathbb{R}$ üzerinde standart metrik olmak üzere $(\mathbb{R}, d)$ metrik uzayı ele alınsın. Ayrıca $(\mathbb{R}, d)$ metrik uzayında $C_{0,1}$ çemberi ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = \frac{2x^3 - 1}{3}$ dönüşümü göz önüne alınsın. $h \in [0, 1)$ olmak üzere*

$$C_{0,1} = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, 0) = 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 0| = 1\} = \{-1, 1\}$$

dir. Üstelik her $x \in C_{0,1}$ için $(C_3^d 1)$ koşulu

$x = -1$ *için* $\left|-1 - \frac{2(-1)^3-1}{3}\right| \leq 1 - \left|\frac{2(-1)^3-1}{3} - 0\right| \Rightarrow 0 \leq 0$
$x = 1$ *için* $\left|1 - \frac{2(1)^3-1}{3}\right| \leq 1 - \left|\frac{2(1)^3-1}{3} - 0\right| \Rightarrow \frac{2}{3} \leq \frac{2}{3}$

olup sağlanır. Benzer şekilde her $x \in C_{0,1}$ *için* $(C_3^d 2)$ *koşulu*

$x = -1$ *için* $h\left|-1 - \frac{2(-1)^3-1}{3}\right| + \left|\frac{2(-1)^3-1}{3}\right| \geq 1 \Rightarrow 1 \geq 1$
$x = 1$ *için* $h\left|1 - \frac{2(1)^3-1}{3}\right| + \left|\frac{2(1)^3-1}{3} - 0\right| \geq 1 \Rightarrow \frac{2h}{3} + \frac{1}{3} \geq 1$

olup sağlanmaz. O halde $C_{0,1}$ *çemberi* T *dönüşümünün bir sabit çemberi değildir.*

Örnek 3.9 $X = \mathbb{R}$ *ve* $d, \mathbb{R}$ *üzerinde standart metrik olmak üzere* $(\mathbb{R}, d)$ *metrik uzayı ele alınsın. Ayrıca* $(\mathbb{R}, d)$ *metrik uzayında* $C_{0,2}$ *çemberi ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $Tx = x^3$ *dönüşümü göz önüne alınsın. Buna göre açıkça*

$$C_{0,2} = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, 0) = 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 0| = 2\} = \{-2, 2\}$$

dir. Üstelik her $x \in C_{0,2}$ *için* $(C_3^d 1)$ *koşulu*

$x = -2$ *için* $|-2 - (-1)^3| \leq 1 - |-2 - 0| \Rightarrow 0 \leq 0$
$x = 2$ *için* $|2 - (1)^3| \leq 1 - |2 - 0| \Rightarrow 0 \leq 0$

olup sağlanır. Benzer şekilde her $x \in C_{0,2}$ *için* $(C_3^d 2)$ *koşulu*

$x = -2$ *için* $h\,|-2 - (1)| + |(-2)^3 - 0| \geq 3h + 8 \Rightarrow 3h + 8 \geq 2$
$x = 2$ *için* $h\,|2 - (1)| + |(2)^3 - 0| \geq h + 8 \Rightarrow h + 8 \geq 2$

olup sağlanır. O halde $C_{0,2}$ *çemberi* T *dönüşümünün bir sabit çemberidir.*

Teorem 3.4 (X, d) *bir klasik metrik uzay ve* $C_{x_0,r}$ *klasik metrik uzayda merkezi* x_0*, yarıçapı* r *çember olsun. Ayıca* $\phi : X \to [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için* $\phi_x = d(x, x_0)$ *olacak şekilde tanımlansın. Bu taktirde,* $T : X \to X$ *dönüşümü her* $x \in C_{x_0,r}$ *için,*

$(C_4^d 1) d(x, Tx) \leq \phi(x) + \phi(Tx) - 2r$
$(C_4^d 2)\ d(x, Tx) + d(Tx, x_0) \leq r$

şartlarını gerçekleştiriyorsa $C_{x_0,r}$ *çemberi* T *dönüşümünün sabit çemberidir.(Özgür ve Taş, 2017)*

Örnek 3.10 *$X = \mathbb{R}$ ve $d, \mathbb{R}$ üzerinde standart metrik olmak üzere $(\mathbb{R}, d)$ metrik uzayı ele alınsın. Ayrıca $(\mathbb{R}, d)$ metrik uzayında $C_{0,1}$ çemberi ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = x^2$ dönüşümü göz önüne alınsın.$h \in [0, 1)$ olmak üzere*

$$C_{0,1} = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, 0) = 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 0| = 1\} = \{-1, 1\}$$

dir. Üstelik her $x \in C_{0,1}$ için $(C_4^d 1)$ koşulu

$x = -1$ *için* $|-1 - (-1)^2| \leq 1 + |1 - 0| - 2 \Rightarrow 0 \leq 0$
$x = 1$ *için* $|1 - (1)^2| \leq 1 + |1 - 0| - 2 \Rightarrow 0 \leq 0$

olup sağlanır. Benzer şekilde her $x \in C_{0,1}$ için $(C_4^d 2)$ koşulu

$x = -1$ *için* $|1 - (-1)^2)| + |1 - 0| \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1$
$x = 1$ *için* $|1 - (1)^2| + |1 - 0| \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1$

olup sağlanır. O halde $C_{0,2}$ çemberi T dönüşümünün bir sabit çemberidir.

Örnek 3.11 *$X = \mathbb{R}$ ve $d, \mathbb{R}$ üzerinde standart metrik olmak üzere $(\mathbb{R}, d)$ metrik uzayı ele alınsın. Ayrıca $(\mathbb{R}, d)$ metrik uzayında $C_{0,1}$ çemberi ve her $x \in \mathbb{R}$ için $T : X \to X$ dönüşümü her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = \frac{1}{2}x^3$ olacak şekilde tanımlansın. Buna göre her $x \in C_{0,1}$ için $(C_4^d 1)$ koşulu*

$x = -1$ *için* $\left|-1 - \frac{1}{2}(-1)^3\right| \leq 1 + \left|\frac{1}{2}(-1)^3 - 0\right| - 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{-1}{2}$
$x = 1$ *için* $\left|1 - \frac{1}{2}(1)^3\right| \leq 1 + \left|\frac{1}{2}(1)^3 - 0\right| - 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{-1}{2}$

olup sağlanmıyor iken açıkça $(C_4^d 2)$ koşulu

$x = -1$ *için* $\left|-1 - \frac{1}{2}(-1)^3\right| + \left|\frac{1}{2}(-1)^3 - 0\right| \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1$
$x = 1$ *için* $\left|1 - \frac{1}{2}(1)^3\right| + \left|0 - \frac{1}{2}(1)^3\right| \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1$

olduğundan sağlanır. Dolayısıyla $C_{0,1}$ çemberi T dönüşümünün bir sabit çemberi değildir

Örnek 3.12 *$X = \mathbb{R}$ ve $d, \mathbb{R}$ üzerinde standart metrik olmak üzere $(\mathbb{R}, d)$ metrik uzayı ele alınsın. Ayrıca $(\mathbb{R}, d)$ metrik uzayında $C_{2,1}$ çemberi ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = x^3$ olacak şekilde tanımlansın. Buna göre her $x \in C_{2,1}$ için $(C_4^d 1)$ koşulu*

$x = -1$ *için* $|-1 - (-1)^3| \leq 1 + |1 + 1| - 2 \Rightarrow 0 \leq 1$

$x = 3$ *için* $|3 - (3)^3| \leq 1 + |(3)^3 - 2| - 2 \Rightarrow 24 \leq 24$

olup sağlanır. Ve açıkça $(C_4^d 2)$ *koşulu*

$x = -1$ *için* $|1 - (-1)^3)| + |-1 - 2| \leq 1 \Rightarrow 5 \leq 1$
$x = 3$ *için* $|1 - (3)^3)| + |3^3 - 2| \leq 1 \Rightarrow 51 \leq 1$

olduğundan sağlanmaz. Dolayısıyla $C_{2,1}$ *çemberi* T *dönüşümünün bir sabit çemberi değildir*

Bu noktada teorem 3.10 daki $(C_4^d 1)$ koşulu x noktasının T dönüşümü altındaki görüntüsü olan Tx noktasının $C_{x_0,r}$ çemberinin içinde veya üzerinde olması gerektiğini yani Tx noktasının $C_{x_0,r}$ çemberinin içinde olmayacağını ifade eder. Benzer şeklide $(C_4^d 2)$ koşulu da Tx noktasının $C_{x_0,r}$ çemberinin dışında veya üzerinde olması gerektiğini yani Tx noktasının $C_{x_0,r}$ çemberinin içinde olmayacağını ifade eder. Doğal olarak iki koşul aynı anda geçerli olduğunda tek durum Tx noktasının çemberin üzerinde olmasıdır.

X boştan farklı bir küme olmak üzere X kümesi üzerinde birim dönüşüm I_x göz önüne alınırsa dönüşüm teorem ile verilen koşulları apaçık olarak sağlar. Ancak birim dönüşüm tüm uzayı sabit bıraktığından çemberlerinde sabit bırakması çok anlamlı olmayacaktır. Bu nedenle aşağıdaki hipotez sabit çembere sahip bir dönüşümünün hangi koşullarda birim dönüşüm ile çakışacağını ifade etmektedir.

Teorem 3.5 (X, d) *bir alışılmış metrik uzay ve* $C_{x_0,r}$ *alışılmış metrik uzayda* x_0 *merkezli* r *yarıçaplı çember olsun. Üstelik* $\phi : X \to [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için* $\phi_x = d(x, x_0)$ *olacak şekilde tanımlansın. Bu taktirde,* $T : X \to X$ *dönüşümü her* $x \in X$ *ve bazı* $h > 1$ *için*

$$d(x, Tx) \leq \frac{\phi(x) - \phi(Tx)}{h}$$

koşulunu sağlıyorsa $T = I_x$ *dir ve* $C_{x_0,r}$ *çemberi* T *dönüşümünün bir sabit çemberidir.(Özgür ve Taş, 2017)*

3.2 METRİK UZAYLARDA BAZI TEKLİK TEOREMLERİ

Bu bölümün başından bu noktaya kadar olan kısımda (alışılmış) merik uzayda x_0 merkezli r yarıçaplı çemberin nokta nokta sabit kalmasını sağlayan T dönüşümünün

koşulları incelenmiştir. Ayrıca $C_{x_0,r}$ çemberinin nokta nokta sabit bırakan dönüşümün hangi koşullar altında birim dönüşüm olacağı verilmiştir. Aşağıdaki önermeler alışılmış metrik uzayda birden fazla çemberi invaryant bırakan dönüşümlerin mevcut olduğunu ifade etmektedir.

Önerme 3.1 *(X,d) bir alışılmış metrik uzay ise C_{x_0,r_0} ve C_{x_1,r_1} bu metrik uzayda herhangi iki çember olsun. O halde C_{x_0,r_0} ve C_{x_1,r_1} çemberlerinin ikisini de nokta nokta sabit bırakacak şekilde (X,d) metrik uzayında en az bir $T : X \to X$ dönüşümü vardır. (Özgür ve Taş, 2017)*

Önerme 3.2 *(X,d) bir alışılmış metrik uzay ise $C_{x_1,r_1},...,C_{x_n,r_n}$ bu metrik uzayda herhangi n tane çember olsun. O halde $C_{x_1,r_1},...,C_{x_n,r_n}$ çemberinin her birini nokta nokta sabit bırakacak şekilde en az bir tane $T : X \to X$ dönüşümü vardır.*

Bu önermelerden sonra önemli bir problem gündeme gelir. Bu problem ise "bir (X,d) bir metrik uzayında $T : X \to X$ dönüşümünün hangi koşullar altında bir tek sabit çembere sahip olur ?" şeklindedir. Bu halde aşağıda ifade edilen üç teorem bu soruya yanıt vermektedir.

Teorem 3.6 *(X,d) bir alışılmış metrik uzay, $C_{x_0,r}$ bu metrik uzayda bir çember ve $T : X \to X$ dönüşümü (C_1^d1), (C_1^d2) koşullarını sağlasın. Bu durumda $x \in C_{x_0,r}, y \in C_{x_0,r}, y \in X \setminus C_{x_0,r}$ ve bazı $h \in [0,1)$ için T dönüşümü $d(Tx,Ty) \leq hd(x,y)$ koşulunu sağlıyorsa $C_{x_0,r}$ çemberi T dönüşümünün biricik sabit çemberidir.*

Teorem 3.7 *(X,d) bir alışılmış metrik uzay, $C_{x_0,r}$ bu metrik uzayda bir çember ve $T : X \to X$ dönüşümü (C_2^d1), (C_2^d2) koşullarını sağlasın. Bu durumda $x \in C_{x_0,r}, y \in X \setminus C_{x_0,r}$ ve bazı $h \in [0,1)$ için T dönüşümü $d(Tx,Ty) \leq hd(x,y)$ koşulunu sağlıyorsa $C_{x_0,r}$ çemberi T dönüşümünün biricik sabit çemberidir.*

Teorem 3.8 *(X,d) bir alışılmış metrik uzay, $C_{x_0,r}$ bu metrik uzayda bir çember ve $T : X \to X$ dönüşümü (C_3^d1), (C_3^d2) koşullarını sağlasın. Bu durumda $x \in C_{x_0,r}, y \in X \setminus C_{x_0,r}$ için T dönüşümü $(C3)^{**}$ $\max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), d(x,Ty), d(y,Tx)\}$ koşulunu sağlıyorsa $C_{x_0,r}$ çemberi T dönüşümünün biricik sabit çemberidir.*

3.3 SABİT ÇEMBER TEORİNİN SÜREKSİZ AKTİVASYON FONKSİYONLARINA BİR UYGULAMASI

Bu kısımda sabit çember teorinin bir uygulamasından bahsedilecektir. Bazı özel metrik uzaylarda sabit noktalara ait dönüşümler sinir ağlarında aktivasyon fonksiyonu olarak kullanılırlar. Örneğin $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ve $ad - bc \neq 0$ olmak üzere $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ biçminde tanımlanan $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dönüşümlerine Möbius dönüşümü denir ve Möbius dönüşümleri aktivasyon fonksiyonu olarak kullanılırlar. Möbius dönüşümünün en çok iki sabit noktası olup Mandic 2000 yılındaki çalışmasında bir aktivasyon fonksiyonunun sabit noktalarının varlığını altta yatan Möbius dönüşümü tarafından garanti edildiğini gözlemledi. 2011 yılında yaptıkları çalışmada Özdemir vd. bir kompleks değerde sinir ağı için bir çemberi sabit bırakan aktivasyon fonksiyonlarının yeni tipini tanıttılar. Aktivasyon fonksiyonlarının bu tiplerinin kullanılması kompleks değerli Hopfield sinir ağlarının sabit noktalarının varlığını garanti etmek için ışık tutar. Dolayısıyla reel değerli ve kompleks değerli sinir ağlarında süreksiz aktivasyon fonksiyonlarının bazı uygulamaları vardır.

Öncelikle Bisht ve Pant, 2017 çalışmasında yer alan bir süreksizlik teoremi hatırlatılsın.

Teorem 3.9 *: (X, d) bir tam metrik uzay ve her $x, y \in X$ için*

$$M(x, y) = \max \left\{ d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2} \right\}$$

olsun. Ayrıca $T : X \to X$ dönüşümü için T^2sürekli ve
$(i)\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, her $t > 0$ için $\phi(t) < t$ olacak şekilde dönüşümü olmak üzere $d(Tx, Ty) \leq \phi(M(x, y))$ dir.
(ii)Verilen bir $\varepsilon > 0$ için $\varepsilon < (M(x, y) < \varepsilon + \delta$ için $d(Tx, Ty) \leq \varepsilon$ olacak şekilde $\delta(\varepsilon) > 0$ vardır.
koşulları sağlansın. Bu takdirde T dönüşümü bir tek z sabit noktasına sahiptir ve her $x \in X$ için $(T^n x) \to z$ dir.Üstelik T dönüşümünün z sabit noktasında süreksiz olması için gerek ve yeter şart $\lim_{x \longrightarrow z} M(x, z) \neq 0$ olmasıdır. (Bisht vd, 2017)

Önerme 3.3 *(X, d) bir alışılmış metrik uzay, $T : X \to X$ dönüşüm ve $C_{x_0,r}$, T nin bir sabit çemberi olsun. Buna göre T dönüşümünün herhangi bir $x \in C_{x_0,r}$ noktasında süreksiz olması için gerek ve yeter koşul $\lim_{z \longrightarrow x} M(x, z) \neq 0$ olmasıdır. (Özgür ve Taş, 2017)*

Yukarıdaki önerme bir metrik uzayda sabit çembere sahip bir dönüşümün çember üzerindeki bir noktada süreksiz olasının koşulunu ifade etmektedir.

$p_i, r_i, q_i, v_i, l_{i,1}, l_{i,2}, c_{i,1}$ ve $c_{i,2}$ ifadeleri $i = 1, 2, ..., n$ için
$-\infty < p_i < r_i < q_i < +\infty$
$l_{i,1} > 0\ l_{i,2} < 0$
$u_i = l_{i,1}\ p_i + c_{i,1} = l_{i,2qi} + c_{i,2},$
$v_i > T_i r_i,$

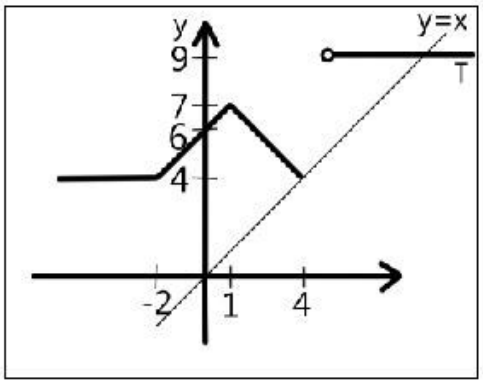
koşullarını sağlayan sabitler olmak üzere

$$T_i x = \begin{cases} u_i; & -\infty < x < p_i \text{ ise} \\ l_{i,1} + c_{i,1}; & p_i \leq x \leq r_i \text{ ise} \\ l_{i,2} + c_{i,2}; & r_i < x \leq q_i \text{ ise} \\ v_i; & q_i < x + \infty \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan süreksiz aktivasyon fonksiyonlarının genel bir sınıfı Nie vd., 2014 çalışmasında tanımlandı. O halde bu sınıfa ait bir fonksiyon olarak

$$Tx = \begin{cases} 4; & -\infty < x < -2 \text{ ise} \\ x + 6; & p_i \leq x \leq r_i \text{ ise} \\ -x + 8; & 1 < x \leq 4 \text{ ise} \\ 9; & 4 < x + \infty \text{ ise} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlı olan fonksiyonu ele alınsın. Buna göre $x_0 = \frac{13}{2}$ merkezli ve $r = \frac{5}{2}$ yarıçaplı $C_{\frac{13}{2},\frac{5}{2}} = \{4, 9\}$ çemberi açıkça T nin bir sabit çemberidir. Açıkça yukarıdaki önerme gereğince, T dönüşümü herhangi bir $x \in C_{\frac{13}{2},\frac{5}{2}}$ noktasında süreksizdir.$\Leftrightarrow \lim_{x \longrightarrow z} M(x, z) \neq 0$ dır. T dönüşümü için kolaylıkla $x = 9$ noktasında sürekli ve $x = 4$ noktasında süreksiz olduğu görülebilir. (Özgür ve Taş, 2017)



Şekil 3.10 Örnek Aktivasyon fonksiyonunun grafiği

4. RECTANGULAR M- METRİK UZAYLAR

Bu bölümde Özgür vd. 2018 yayınladıkları çalışmasında tanımladıkları rectangular(dikdörtgen) $M-$metrik uzayların tanımı, örnekleri, temel özellikleri, analizsel kavramlar, topolojik özellikleri ve bazı sabit nokta teoremleri ile ilgili çalışmadan özetlenerek verilecektir.

Özgür vd. 2018 yılındaki çalışmalarında Branciari'nin tanımladığı $M-$metrik uzay kavramından esinlenilerek rectangular $M-$metrik uzay kavramını aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

Tanım 4.1 *X boş olmayan bir küme olsun.$m_b : X^2 \to [0,\infty)$ foksiyonu her $x, y, \in X$ her $u = v$ olacak şekilde $u, v, \in X \setminus \{x, y\}$ ve*

$$m_{r_{x,y}} := \min\{m_r(x,x), m_r(y,y)\} \quad ve \quad M_{r_{x,y}} := \max\{m_r(x,x), m_r(y,y)\}$$

için,

$1)x = y \Leftrightarrow m_{r_{x,y}} = M_{r_{x,y}} = m_r(x,y)$
$2)m_{r_{x,y}} \leq m_r(x,y)$
$3)m_r(x,y) = m_r(y,x)$
$4)\left(m_r(x,y) - m_{r_{x,y}}\right) \leq m_r(x,u) - m_{r_{x,u}} + m_r(u,v) - m_{r_{u,v}} + m_r(v,y) - m_{r_{v,y}}$

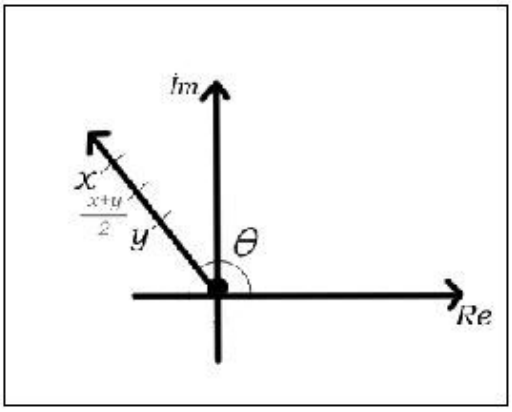
koşullarını sağlıyorsa m_r fonksiyonuna X üzerinde bir rectangular $M-$metrik ve (X, m_r) ikilisine rectangular $M-$ metrik uzay denir. (Özgür vd, 2018)
$M-$metrik uzay ve rectangular $M-$ metrik uzay kavramlarını incelendiğinde açıkça her $M-$metrik uzayın bir dikdörtgen $M-$ metrik uzay olduğu ifade edilebilir.
(X, m_r) bir rectangular $M-$ metrik uzay olsun. Bu takdirde (X, m_r) rectangular $M-$ metrik uzayın aşağıdaki özelliklere sahip olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

$1)x, y \in X$ *için* $m_{r_{x,y}} + M_{r_{x,y}} = m_r(x,x) + m_r(y,y)$
$2)x, y \in X$ *için* $0 \leq M_{r_{x,y}} - m_{r_{x,y}} = |m_r(x,x) + m_r(y,y)|$
$3)M_{r_{x,y}} - m_{r_{x,y}} \leq M_{r_{x,u}} - m_{r_{x,u}} + M_{r_{u,v}} - m_{r_{u,v}} - M_{r_{v,y}} - m_{r_{v,y}}$

Şimdi bazı rectangular $M-$ metrik uzay örnekleri verilecektir.

Örnek 4.1 $\mathbb{C}$ *kompleks sayılar kümesi ve* $0 \leq \theta < 2\pi$ *olmak üzere sabit* θ *değeri için* $X_\theta = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z) = \theta\} \cup \{0\}$ *olsun.* $m_r : X_\theta \times X_\theta \to [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x, y \in x_\theta$ *için* $m_r(x, y) = \frac{|x|+|y|}{2}$ *olarak tanımlansın. Bu takdirde* (X_θ, m_r) *bir rectangular* $M-$ *metrik uzayıdır. (Özgür vd, 2018)*

Bu örnek geometrik olarak incelenirse X_θ *kümesi kompleks düzlemde orijin uç noktalı, reel eksenle* θ *radyanlık açı yapan ışındır. Buna göre bu ışın üzerinde tanımlanan* m_r *rectangular* $M-$ *metriğinin üzerindeki iki nokta arasındaki uzaklığı onların orta noktasının orijine olan uzaklığı olarak ifade etmektedir. Aşağıdaki Şekil 4.1 bunu göstermektedir.*



Şekil 4.1 X_θ kümesinin geometrik gösterimi

Aşağıdaki önerme bir rectangular metrikden bir rectangular $M-$ *metrik üretme yöntemini ifade etmektedir. Dolayısıyla bu yöntem ile her rectangular metrikten bir rectangular* $M-$ *metrik türetilir.*

Önerme 4.1 (X, d) *bir rectangular metrik uzay,* $\xi : [0, \infty) \to [\alpha, \infty)$ *bire bir ve azalmayan fonksiyonu* $\xi(0) = \alpha$ *olmak üzere her* $x, y, z \in [0, \infty)$ *için*

$$\xi(x + y + z) \leq \xi(x) + \xi(y) + \xi(z) - 2\alpha$$

koşulunu sağlasın. Bu taktirde her $x, y \in X$ *için* $m_r : X \times X \to [0, \infty)$ *fonksiyonu bir rectangular* $M-$ *metriktir. (Özgür vd. 2018)*

Örnek 4.2 *(X, d) bir rectangular metrik uzay ve $\xi : [0, \infty) \to [\alpha, \infty)$ fonksiyonu $\xi(0) = \alpha$ olmak üzere her $t \in [0, \infty)$ için $\xi(t) = mt + n$ olacak şekilde tanımlansın O halde yukarıda önerme 4.1 gereğince*

$$m_r(x, y) = md(x, y) + n$$

şeklinde tanımlanan $m_r : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu bir rectangular $M-$ metriktir. (Özgür vd. 2018)

Yukarıdaki önerme 4.1 ve örnek 4.2 bir rectangular metrik yardımı ile bir rectangular $M-$ metrik oluşturulabileceğini ifade ediyordu. Bu durum tersinin yani bir rectangular $M-$ metrik'ten faydalanarak bir rectangular metriğin üretilebileceğini aşağıdaki iki örnek göstermektedir.

Örnek 4.3 *(X, m_r) bir rectangular $M-$ metrik uzay olsun ve $m_r^w : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $x, y \in X$ için*

$$m_r^w(x, y) = m_r(x, y) - 2m_{r_{x,y}} + M_{r_{x,y}}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde m_r^w fonksiyonu bir rectangular metrik ve (X, m_r^w) ikilisi bir rectangular metrik uzaydır. (Özgür vd., 2018)

Örnek 4.4 *(X, m_r) bir rectangular $M-$ metrik uzay olsun ve $m_r^w : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $x, y \in X$ için $m_r^s(x, y) = 0$ ise $x = y$ olacak şekilde*

$$m_r^s(x, y) = m_r(x, y) - m_{r_{x,y}}$$

şeklinde tanımlansın Bu durumda m_r^s bir rectangular metrik ve (X, m_r^s) ikilisi bir rectangular metrik uzaydır.(Özgür vd. 2018)

Aşağıdaki önerme bir rectangular kısmi metrik ile rectangular $M-$ metrik arasındaki ilişkiyi açıklamaktadır.

Önerme 4.2 *Her kısmi rectangular metrik, bir rectangular $M-$ metriktir. (Özgür vd. 2018)*

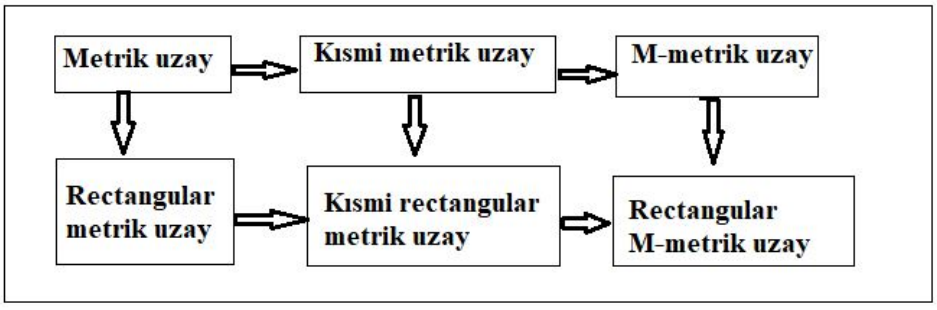
Bu önerme dolayısıyla rectangular $M-$ metrik uzay, kısmi rectangular metrik uzayı kapsamaktadır. Benzer durum $M-$ metrik uzaylar için de geçerlidir. Bu noktada yukarıdaki önermedeki ifadenin tersi doğru değildir. Yani her rectangular $M-$ metrik bir kısmi rectangular metrik değildir. Aşağıdaki örnek bu durumu açıkça göstermektedir.

Örnek 4.5 *$X = \{1, 2, 3, 4\}$ olsun. $m_r : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $x, y \in X$ için*

$$m_r(1,1) = m_r(2,2) = m_r(3,3) = 1, m_r(4,4) = 8$$
$$m_r(1,2) = m_r(2,1) = 4, m_r(1,3) = m_r(3,1) = 4$$
$$m_r(1,4) = m_r(4,1) = 4, m_r(2,3) = m_r(3,2) = 5$$
$$m_r(2,4) = m_r(4,2) = 6, m_r(3,4) = m_r(4,3) = 7$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde m_r bir rectangular $M-$ metriktir. Ancak m_r bir kısmi rectangular $M-$ metrik değildir. Çünkü $x = 4, y = 3$ olmak üzere $m_r(4,4) = 8 \leq m_r(4,3) = 7$ olup kısmi rectangular $M-$ metrik uzayın ikinci aksiyomu sağlanmamaktadır. (Özgür vd. 2018)

Her metrik uzay bir rectangular metrik uzaydır ve her rectangular metrik uzay kendine uzaklığı sıfır olan bir kısmi rectangular metrik uzaydır. Ayrıca her metrik uzay bir kısmi metrik uzay ve her kısmi metrik uzay bir $M-$ metrik uzaydır. O halde bu ifadeler bir şema ile verilirse aşağıdaki Şekil 4.2 verilen yapıya ulaşır



Şekil 4.2 Genelleştirilmiş metrik uzayları ilişkileri

Tanım 4.2 *(X, m_r) bir rectangular $M-$ metrik uzay ve $(x_n), X$ de bir dizi olsun. Bu takdirde*
(i) Verilen her $\varepsilon > 0$ değerine karşılık $n \geq n_0$ koşulunu sağlayan her $n \in \mathbb{N}$ için $m_r(x_n, x) - m_{r_{x_n,x}} < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisi $x \in X$ noktasına m_r

yakınsıyor denir ve $(x_n) \overset{m_r}{\to} x$ *ile gösterilir.*

Farklı bir şekilde ifade edilirse :
(X, m_r) *rectangular* $M-$*metrik uzayında* (x_n) *dizisinin* $x \in X$ *noktasına* m_r- *yakınsak olması için gerek ve yeter koşul* $\lim_{n\to\infty}(m_r(x_n, x) - m_{r_{x_n,x}}) = 0$ *olmasıdır.*

(ii) (X, m_r) *bir rectangular* $M-$ *metrik uzayda* (x_n) *dizisinin* m_r-*Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul* $\lim_{n,m\to\infty}(m_r(x_n, x_m) - m_{r_{x_n,x_m}})$ *ve* $\lim_{n,m\to\infty}(M_{r_{x_n,x_m}} - m_{r_{x_n,x_m}})$ *limitlerinin mevcut ve sonlu olmasıdır.*

(iii) *Her* (x_n) m_r-*Cauchy dizisi* $\lim_{n\to\infty}(m_r(x_n, x) - m_{r_{x_n,x}}) = 0$ *ve* $\lim_{n\to\infty}(M_r(x_n, x) - m_{r_{x_n,x}}) = 0$ *olacak şekilde bir* $x \in X$ *noktasına yakınsak ise* (X, m_r) *rectangular* $M-$ *metrik uzaya tamdır denir. (Özgür vd. 2018)*

Yardımcı Teorem 4.1 (X, m_r) *bir rectangular* $M-$ *metrik uzay ve* (x_n) *ile* (y_n) *bu uzayda sırasıyla* x *ve* y *noktalarına* m_r-*yakınsak iki dizi olsun. Bu takdirde*

$$\lim_{n\to\infty}(m_r(x_n, y_n) - m_{r_{x_n,y_n}}) = m_r(x, y) - m_{r_{xy}}$$

olur. (Özgür vd. 2018)

Sonuç 4.1 (X, m_r) *bir rectangular* $M-$ *metrik uzay ve* (x_n),$x \in X$ *noktasına* m_r-*yakınsak bir dizi olsun. Bu takdirde her* $y \in X$ *için*

$$\lim_{n\to\infty}(m_r(x_n, y) - m_{r_{x_n,y}}) = m_r(x, y) - m_{r_{x,y}}$$

dir. (Özgür vd. 2018)

Yardımcı Teorem 4.2 (X, m_r) *bir rectangular* $M-$ *metrik uzay ve* (x_n) *ile* (y_n) *bu uzayda sırasıyla* x *ve* y *noktalarına* m_r-*yakınsak iki dizi olsun. Bu takdirde* $m_r(x, y) = m_{r_{xy}}$ *olur. Dahası* $m_r(x, x) = m_r(y, y)$ *ise* $x = y$ *dir. (Özgür vd. 2018)*

Yardımcı Teorem 4.3 (X, m_r) *bir rectangular* $M-$ *metrik uzay ve* (x_n) *bu uzayda her* $n \in \mathbb{N}$, $m_r(x_{n+1}, x_n) \leq r m_r(x_n, x_{n-1})$ *olacak şekilde* $r \in [0, 1)$ *değeri var olan bir dizi olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler doğrudur.*

(i) $\lim_{n\to\infty} m_r(x_n, x_{n-1}) = 0$ *dır.*

$(ii)\lim_{n\to\infty} m_r(x_n, x_n) = 0$ *dır.*
$(iii)\lim_{n,m\to\infty} m_{r_{x_n,x_m}} = 0$ *dır.*
(iv) (x_n), *bir* m_r-*Cauchy dizisidir. (Özgür vd. 2018)*

Yardımcı Teorem 4.4 (X, m_r) *bir rectangular* $M-$ *metrik uzay olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler doğrudur.*

(i) (x_n) *dizisinin* (X, m_r) *bir rectangular* $M-$ *metrik uzayında bir* m_r-*Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul* (X, m_r) *rectangular metrik uzayında bir Cauchy dizisi olmasıdır.*

(ii) (X, m_r) *rectangular* $M-$ *metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter koşul* (X, m_r^w) *rectangular metrik uzayının tam olmasıdır. (Özgür vd. 2018)*

Yukarıdaki yardımcı teoremdeki ifadelerdeki (X, m_r^w) *rectangular metrik uzay kavramı* (X, m_r^s) *rectangular metrik uzay kavramı ile yer değiştirirse ifadeler doğru olur.*

Tanım 4.3 (X, m_r) *bir rectangular* $M-$ *metrik uzay,* $x \in X$ *ve* $\varepsilon > 0$ *olsun. Buna göre*

$$B(x, \varepsilon) = \left\{ y \in x \mid m_r(x, y) - m_{r_{x,y}} < \varepsilon \right\}$$

ifadesine x *merkezli,* ε *yarıçaplı açık yuvar ve*

$$B\left[x, \varepsilon\right] = \left\{ y \in x \mid m_r(x, y) - m_{r_{x,y}} \leq \varepsilon \right\}$$

ifadesine x *merkezli,* ε *yarıçaplı kapalı yuvar denir. (Özgür vd. 2018)*

Dikkat edilirse $m_r(x, x) - m_{r_{x,x}} = m_r(x, x) - m_r(x, x) = 0 < \varepsilon$ olduğundan dolayı her $\varepsilon > 0$ için açıkça $x \in B(x, \varepsilon)$ dur.

Yardımcı Teorem 4.5 (X, m_r) *bir rectangular* $M-$ *metrik uzay olsun. Bu uzaydaki tüm açık yuvarların kolleksiyonu olan*

$$B_{m_r} = \{B(x, \varepsilon) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$$

ifadesi (X, m_r) *rectangular* $M-$ *metrik uzayının bir tabanını oluşturur. (Özgür vd. 2018)*

Tanım 4.4 *(X, m_r) bir rectangular $M-$ metrik uzay ve $J_{m_r}, B(x, \varepsilon)$ açık yuvarları tarafından üretilen topoloji olsun. Bu takdirde (X, J_{m_r}) bir rectangular $M-$ metrik uzay olsun. Her farklı $x, y \in X$ nokta çifti için x noktasını içerip y noktasını içermeyen veya y noktasını içerip x noktasını içermeyen bir açık yuvar varsa (X, J_{m_r}) ye bir T_0-uzayı adı verilir. (Özgür vd. 2018)*

Teorem 4.1 *Bir rectangular $M-$ metrik uzayı bir T_0-uzayıdır. (Özgür vd. 2018)*

Şimdi rectangular $M-$ metrik uzayında bazı sabit nokta teoremleri ifade edilecektir. Ancak öncesinde bu sabit nokta teoremlerinde kullanılacak bir yardımcı teorem verilecektir.

Yardımcı Teorem 4.6 *(X, m_r) bir rectangular $M-$ metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Ayrıca (x_n) dizisi bu uzayda $x_{n+1} = Tx_n$ olacak şekilde tanımlı ve her $x, y \in X$ için $m_r(Tx, Ty) \leq km_r(x, y)$ koşulunu sağlayacak şekilde $k \in [0, 1)$ var olsun. Buna göre (x_n) dizisi u ya m_r-yakınsak ise (Tx_n) dizisi Tu ya m_r-yakınsaktır. (Özgür vd. 2018)*

Aşağıda ifade edilecek sabit nokta teoremleri alışılmış metrik uzaylarda iyi bilinen Banach büzülme prensibi, Kannan sabit nokta teoremleri ve Chaterjea sabit nokta teoreminin rectangular $M-$ metrik uzay versiyonlarıdır.

Teorem 4.2 *(X, m_r) bir tam rectangular $M-$ metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Buna göre her $x, y \in X$ için*

$$m_r(Tx, Ty) \leq km_r(x, y)$$

olacak şekilde $0 < k < 1$ değeri varsa T dönüşümü $m_r(u, u) = 0$ olmak üzere bir tek $u \in X$ sabit noktasına sahiptir. (Özgür vd. 2018)

Teorem 4.3 *(X, m_r) bir tam rectangular $M-$ metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Buna göre her $x, y \in X$ için*

$$m_r(Tx, Ty) \leq k \max \{m_r(x, y), m_r(x, Tx), m_r(y, Ty)\}$$

koşulunu sağlayacak şekilde $0 < k < 1$ değeri varsa T dönüşümü $m_r(u, u) = 0$ olacak şekilde bir tek $u \in X$ sabit noktasına sahiptir.

Teorem 4.4 *(X, m_r) bir tam rectangular $M-$ metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Buna göre her $x, y \in X$ için*

$$m_r(Tx, Ty) \leq k\,[m_r(x, Tx) + m_r(y, Ty)]$$

koşulunu sağlayacak şekilde $0 \leq k < \frac{1}{2}$ değeri varsa T dönüşümü $m_r(u, u) = 0$ olacak şekilde bir tek $u \in X$ sabit noktasına sahiptir.

Teorem 4.5 *(X, m_r) bir tam rectangular $M-$ metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Bu takdirde her $x, y \in X$ için*

$$m_r(Tx, Ty) \leq k\,[m_r(x, Tx) + m_r(y, Ty)]$$

koşulunu sağlayacak şekilde $0 \leq k < \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ değeri varsa T dönüşümü $m_r(u, u) = 0$ olacak şekilde bir tek $u \in X$ sabit noktasına sahiptir.

5. RECTANGULAR M-METRİK UZAYLARDA SABİT ÇEMBER TEOREMLERİ

Bu kısımda bir rectangular $M-$ metrik uzayda ele alınan bir kendi üzerine dönüşümünün yine bu uzayda ele alınan bir çemberi ne zaman veya hangi koşullar altında nokta-nokta sabit bırakacağı araştırılmıştır

Bu amaçla ilk olarak rectangular $M-$ metrik uzayda çember kavramı ve sabit çember kavramları tanımlanacaktır.

Tanım 5.1 *(X, m_r) bir ractengular $M-$ metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ olsun. Buna göre*

$$C_{x_0,r}^{m_r} = \left\{x \in X \mid m_r(x, x_0) - m_{r_{x,x_0}} = r\right\}$$

ifadesine rectangular $M-$ metrik uzayda x_0 merkezli, r yarıçaplı çember denir. (Özgür vd. 2018)

Tanım 5.2 *(X, m_r) bir rectangular $M-$ metrik uzay, $C_{x_0,r}^{m_r}$ bu uzayda bir çember ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x \in C_{x_0,r}^{m_r}$ için $Tx = x$ ise $C_{x_0,r}^{m_r}$ çemberine T dönüşümünün sabit çemberi denir. (Özgür vd. 2018)*

Yukarıda ifade edilen bir rectangular $M-$ metrik uzayda çember ve sabit çember tanımları ile aşağıda ifade edilecek olan sabit çemberinin varlığına dair koşullar veren teorem Özgür vd. 2018 yılındaki çalışmasından alıntılanmıştır. Özgür vd. 2018 yılındaki çalışmalarında rectangular $M-$ metrik uzay için sabit çember problemini ortaya atmışlardır. Çözüme dair sadece aşağıda verilecek olan varlık teoremini vermişlerdir.

Tezin bu bölümünde bu problem ele alınacak olup ilk teorem hariç bölümün geri kalan teorem, önerme, sonuç ve örnekleri ilk kez de bu tez çalışmasında verilmekte olup orijinaldir.

Teorem 5.1 *(X, m_r) bir rectangular $M-$ metrik uzay ve $C_{x_0,r}^{m_r}$ bu uzayda bir çember olsun. Ayrıca $\varphi : X \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için*

$$\varphi(x) = m_r(x, x_0) - m_{r_{x,x_0}}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde $T : X \to X$ *dönüşümü, her* $x \in C^{m_r}_{x_0,r}$ *için*

$(C_1^{m_r}1)$ $m_r(x, Tx) - m_{r_{x,Tx}} \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$
$(C_1^{m_r}2)$ $m_r(Tx, x_0) - m_{r_{Tx,x_0}} \geq r$
$(C_1^{m_r}3)$ $m_{r_{x,Tx}} = M_{r_{x,Tx}}$

koşullarını sağlıyorsa $C^{m_r}_{x_0,r}$ *çemberi* T *dönüşümün bir sabit çemberidir. (Özgür vd. 2018)*

İspat (X, m_r) *bir rectangular* $M-$ *metrik uzay,* $C^{m_r}_{x_0,r}$ *bu uzayda* x_0 *merkezli* r *yarıçaplı bir çember ve* $\varphi : X \to [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için* $\varphi(x) = m_r(x, x_0) - m_{r_{x,x_0}}$ *şeklinde tanımlı olsun. Ayrıca* $T : X \to X$ *dönüşüm olsun. Buna göre herhangi bir* $x \in C^{m_r}_{x_0,r}$ *için* $m_r(x, x_0) - m_{r_{x,x_0}} = r$ *dir. Bu noktada* $(C_1^{mr}1)$ *koşulundan başlayarak, rectangular* $M-$ *metrik aksiyomlarından 2. aksiyom ve* $(C_1^{mr}2)$ *koşulu yardımıyla*

$$\begin{aligned} m_r(x, Tx) - m_{r_{x,Tx}} &\leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \\ &= (m_r(x, x_0) - m_{r_{x,x_0}}) - (m_r(Tx, x_0) - m_{r_{Tx,x_0}} \\ &= r - (m_r(Tx, x_0) - m_{r_{Tx,x_0}}) \end{aligned}$$

olup $m_r(Tx, x_0) - m_{r_{Tx,x_0}} \leq r$ *elde edilir. Ancak* $(C_1^{mr}2)$ *koşulu gereğince* $m_r(Tx, x_0) - m_{r_{Tx,x_0}} \geq r$ *olduğundan açıkça* $m_r(Tx, x_0) - m_{r_{Tx,x_0}} = r$ *bulunur. Yani* $Tx \in C^{m_r}_{x_0,r}$ *dir. O halde*

$$m_r(Tx, x_0) - m_{r_{Tx,x_0}} \leq (m_r(x, x_0) - m_{r_{x,x_0}}) - (m_r(Tx, x_0) - m_{r_{Tx,x_0}}) = r - r = 0$$

olduğundan ve $m_r(x, Tx) \geq m_{r_{x,Tx}}$ *olduğundan dolayı* $m_r(x, Tx) - m_{r_{x,Tx}} = 0$ *olup* $m_r(x, Tx) = m_{r_{x,Tx}}$ *bulunur. Ayrıca* $(C_1^{mr}3)$ *koşulundan dolayı* $m_{r_{x,Tx}} = M_{r_{x,Tx}}$ *ve rectangular* $M-$ *metriğin 1. aksiyomundan dolayı apaçık olarak*

$$m_r(x, Tx) = m_{r_{x,Tx}} = M_{r_{x,Tx}} \Leftrightarrow x = Tx$$

elde edilir. Bundan dolayı da $C^{m_r}_{x_0,r}$*,* T *dönüşümün bir sabit çemberidir.*

Örnek 5.1 *4. bölümde rectangular* $M-$*metrik uzay için ele alınan ilk örnek olan örnek 4.1 deki* (X_θ, m_r) *rectangular* $M-$*metrik uzayı* $\theta = \frac{\pi}{2}$ *olmak koşulu ile ele alınsın. Yani*

$X_{\frac{\pi}{2}} = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z) = \frac{\pi}{2}\right\} \cup \{0\}$ *ve* $m_r : X_{\frac{\pi}{2}} \times X_{\frac{\pi}{2}} \to [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x, y \in X_{\frac{\pi}{2}}$ *için* $m_r(x, y) = \frac{|x|+|y|}{2}$ *şeklinde tanımlı olsun. Buna göre bu uzayda* $C_{2i,1}^{m_r}$ *çemberi ve*

$$Tz = \begin{cases} 0 & |z| \\ \frac{-16}{z} & |z| \end{cases}$$

dönüşümü göz önüne alınsın. O halde çemberin ve m_r *rectangular* $M-$ *metriğin tanımı kullanılarak hesaplama ile* $C_{2i,1}^{m_r} = \{0, 4i\}$ *olduğu görülür. Bu takdirde kolaylıkla her* $x \in C_{2i,1}^{m_r}$ *için* $(C_1^{m_r}1)$ $(C_1^{m_r}2)$ $(C_1^{m_r}3)$ *koşulları sağlandığı görülür. Dolayısıyla* $C_{2i,1}^{m_r}$ *çemberi,* T *dönüşümünün bir sabit çemberidir.*

Örnek 5.2 *Bir önceki örnekle ele alınan rectangular* $M-$ *metrik uzay ve bu uzaydaki* $C_{2i,1}^{m_r}$ *çemberi ele alınsın. Ayrıca* $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *dönüşümü* $Tz = z + 8i$ *olarak alınsın. Buna göre her* $x \in C_{2i,1}^{m_r} = \{0, 4i\}$ *için* $(C_1^{m_r}1)$ *koşulu*

$x = 0$ *için* $\frac{|0|+|8i|}{2} - \min\left\{\frac{|0|+|0|}{2}, \frac{|8i|+|8i|}{2}\right\} \leq \phi(0) - \phi(T_0) \Rightarrow 4 \leq -2$
$x = 4i$ *için* $\frac{|4i|+|2i|}{2} - \min\left\{\frac{|4i|+|4i|}{2}, \frac{|2i|+|2i|}{2}\right\} \leq \phi(4i) - \phi(T_{4i}) \Rightarrow 4 \leq -4$

olup sağlanamaz iken $(C_1^{m_r}2)$ *koşulu açık bir şekilde*

$x = 0$ *için* $\phi(T_0) \geq 1 \Rightarrow 3 \geq 1$
$x = 4i$ *için* $\phi(T_{4i}) \geq 1 \Rightarrow 5 \geq 1$

olduğundan sağlanır. Bu örnek için açıkça $(C_1^{m_r}3)$ *koşuluda sağlanmaz. Doğal olarak* $C_{2i,1}^{m_r}$ *çemberi,* T *dönüşümü altında invaryant değildir.*

Örnek 5.3 *Önceki iki örnekte ele alınan rectangular* $M-$ *metrik uzay ve çemberi yine ele alınsın. Ayrıca* $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *dönüşümü* $Tz = \frac{1}{2}z$ *olsun. Buna göre her* $x \in C_{2i,1}^{m_r} = \{0, 4i\}$ *için* $(C_1^{m_r}1)$ *koşulu*

$x = 0$ *için* $\frac{|0|+|8i|}{2} - \min\left\{\frac{|0|+|0|}{2}, \frac{|0|+|0|}{2}\right\} \leq \phi(0) - \phi(T_0) \Rightarrow 0 \leq 1 - 1 \Rightarrow 0 \leq 0$
$x = 4i$ *için* $\frac{|4i|+|2i|}{2} - \min\left\{\frac{|2i|+|2i|}{2}, \frac{|4i|+|4i|}{2}\right\} \leq \phi(4i) - \phi(T_{4i}) \Rightarrow 3 - 2 \leq 1 - 0 \Rightarrow 1 \leq$

olup sağlanıyor iken $(C_1^{m_r}2)$ *koşulu*

$x = 0$ *için* $\frac{|0|+|2i|}{2} - \min\left\{\frac{|0|+|0|}{2}, \frac{|2i|+|2i|}{2}\right\} \geq 1 \Rightarrow 1 \geq 1$
$x = 4i$ *için* $\frac{|2i|+|2i|}{2} - \min\left\{\frac{|2i|+|2i|}{2}, \frac{|2i|+|2i|}{2}\right\} \geq 1 \Rightarrow 0 \geq 1$

olduğundan sağlanamaz. Doğal olarak $C_{2i,1}^{m_r}$ çemberi, T dönüşümü altında invaryant değildir.

Teorem 5.2 *(X, m_r) bir rectangular $M-$ metrik uzay ve $C_{x_0,r}^{m_r}$ bu uzayda bir çember olsun. Ayrıca $\varphi : x \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için*

$$\varphi(x) = m_r(x, x_0) - m_{r_{x,x_0}}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde $T : X \to X$ dönüşümü, her $x \in C_{x_0,r}^{m_r}$ için

$(C_2^{m_r}1)$ $m_r(x, Tx) - m_{r_{x,Tx}} \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2r$
$(C_2^{m_r}2)$ $m_r(Tx, x_0) - m_{r_{Tx,x_0}} \leq r$
$(C_2^{m_r}3)$ $m_{r_{x,Tx}} = M_{r_{x,Tx}}$

koşullarını sağlıyorsa $C_{x_0,r}^{m_r}$ çemberi T dönüşümü altında invaryanttır.

İspat *(X, m_r) bir rectangular $M-$ metrik uzay, $C_{x_0,r}^{m_r}$ bu uzayda x_0 merkezli r yarıçaplı bir çember ve $\varphi : x \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = m_r(x, x_0) - m_{r_{x,x_0}}$ şeklinde tanımlı ve $T : X \to X$ teoremin hipotezindeki koşulları sağlayan bir dönüşüm olsun. Buna göre herhangi bir $x \in C_{x_0,r}^{m_r}$ için $m_r(x, x_0) - m_{r_{x,x_0}} = r$ dir. Bu aşamada $(C_2^{mr}1)$ koşulundan başlayarak, rectangular $M-$ metrik aksiyomlarını kullanırsak*

$$\begin{aligned} m_r(x, Tx) - m_{r_{x,Tx}} &\leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2r \\ &= (m_r(x, x_0) - m_{r_{x,x_0}}) + (m_r(Tx, x_0) - m_{r_{Tx,x_0}}) - 2r \\ &= (m_r(Tx, x_0) - m_{r_{Tx,x_0}}) - r \end{aligned}$$

elde edileceğinden dolayı $m_r(Tx, x_0) - m_{r_{Tx,x_0}} \geq r$ bulunur. Fakat $(C_2^{mr}2)$ koşulu gereğince $m_r(Tx, x_0) - m_{r_{Tx,x_0}} \leq r$ olduğundan açıkça $m_r(Tx, x_0) - m_{r_{Tx,x_0}} = r$ bulunur. Yani $Tx \in C_{x_0,r}^{m_r}$ dir. O halde

$$m_r(Tx, x_0) - m_{r_{Tx,x_0}} \leq (m_r(x, x_0) - m_{r_{x,x_0}}) - (m_r(Tx, x_0) - m_{r_{Tx,x_0}}) = r - r = 0$$

bulunacağından $m_r(x, Tx) \geq m_{r_{x,Tx}}$ olduğundan dolayı $m_r(x, Tx) - m_{r_{x,Tx}} = 0$ olup $m_r(x, Tx) = m_{r_{x,Tx}}$ bulunur. Bunun yanı sıra $(C_2^{mr}3)$ koşulundan dolayı $m_{r_{x,Tx}} = M_{r_{x,Tx}}$ ve rectangular $M-$ metriğinilk aksiyomundan dolayı aşikar olarak

$$m_r(x, Tx) = m_{r_{x,Tx}} = M_{r_{x,Tx}} \Leftrightarrow x = Tx$$

sonucuna ulaşılır. Bu nedenle de $C^{m_r}_{x_0,r}$, T dönüşümün bir sabit çemberidir.

Örnek 5.4 *4. bölümde verilen örnek 4.1 deki (X_θ, m_r) rectangular $M-$metrik uzayı $\theta = \frac{3\pi}{2}$ olmak şartıyla alınsın. Buna göre açıkça $X_{\frac{3\pi}{2}} = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z) = \frac{3\pi}{2}\right\} \cup \{0\}$ ve $m_r : X_{\frac{\pi}{2}} \times X_{\frac{\pi}{2}} \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $x, y \in X_{\frac{3\pi}{2}}$ için $m_r(x, y) = \frac{|x|+|y|}{2}$ biçiminde tanımlı olsun. Buna göre bu uzayda $C^{m_r}_{-4i,1}$çemberi ve*

$$Tz = \begin{cases} z, & |z| < 8 \\ \frac{-64}{z}, & |z| \geq 8 \end{cases}$$

dönüşümünü göz önüne alalım. Bu takdirde çember ve m_r rectangular $M-$metriğin tanımı kullanılarak hesaplamayla $C^{m_r}_{-4i,1} = \{0, -8i\}$ bulunur. Buna göre kolayca her $x \in C^{m_r}_{-4i,1}$ için $(C^{m_r}_2 1)$ $(C^{m_r}_2 2)$ $(C^{m_r}_2 3)$ koşulları sağlandığı görülür. Dolayısıyla $C^{m_r}_{-4i,1}$ çemberi, T dönüşümünün bir sabit çemberidir. Ayrıca T dönüşümünün tek sabit çemberi $C^{m_r}_{-4i,1}$ değildir. Biraz dikkatli bakılınca $C^{m_r}_{-i,\frac{1}{2}}$, $C^{m_r}_{-2i,1}$, $C^{m_r}_{-3i,\frac{3}{2}}$ çemberlerininde T nin sabit çemberi olduğu görülür. Elbetteki bu tüm çemberlerin T dönüşümü altında invaryant olduğu anlamına gelmez. Örneğin $C^{m_r}_{-6i,2}$ çemberi T dönüşümü altında invaryant kalmaz.

Örnek 5.5 *Bir önceki örnekle ele alınan rectangular $M-$metrik uzay ve çember ele alınsın. Ayrıca dönüşüm $Tz = \frac{5}{4}z$ olarak verilsin. Buna göre her $x \in C^{m_r}_{-4i,2} = \{0, -8i\}$ için $(C^{m_r}_2 1)$ koşulu*

$x = 0$ *için* $0 - 0 \leq 2 + 2 - 4 \Rightarrow 0 \leq 0$
$x = 8i$ *için* $9 - 8 \leq 2 + 7 - 4 - 4 \Rightarrow 1 \leq 1$

olup sağlanıyor iken basitçe $(C^{m_r}_2 2)$ koşulu

$x = 0$ *için* $2 - 0 \leq 2 \Rightarrow 2 \leq 2$
$x = 8i$ *için* $7 - 4 \leq 2 \Rightarrow 3 \leq 2$

olacağından sağlanmaz. Bu nedenle $C^{m_r}_{-4i,1}$ çemberi, T dönüşümü altında invaryant değildir.

Örnek 5.6 *Önceki iki örnekte ele alınan rectangular $M-$metrik uzay ve çember ele alınsın. Ayrıca dönüşüm $Tz = \frac{1}{2}z$ olsun. Buna göre her $x \in C^{m_r}_{-4i,2} = \{0, -8i\}$ için $(C^{m_r}_2 1)$ koşulu*

$x = 0$ *için* $0 - 0 \leq 2 + 2 - 4 \Rightarrow 0 \leq 0$

$x = 8i$ *için* $6 - 4 \leq 2 + 4 - 4 - 4 \Rightarrow 2 \leq -2$

olup sağlanamaz iken $(C_2^{m_r}2)$ *koşulu*

$x = 0$ *için* $2 - 0 \leq 2 \Rightarrow 2 \leq 2$
$x = 8i$ *için* $4 - 4 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq 2$

olduğundan sağlanır. Bu sebeple de $C_{-4i,1}^{m_r}$ *çemberi,* T *dönüşümü altında invaryant değildir.*

Teorem 5.3 (X, m_r) *bir rectangular* $M-$ *metrik uzay ve* $C_{x_0,r}^{m_r}$ *bu uzayda bir çember olsun. Ayrıca* $\varphi : x \to [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için*

$$\varphi(x) = m_r(x, x_0) - m_{r_{x,x_0}}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde $T : X \to X$ *dönüşümü, her* $x \in C_{x_0,r}^{m_r}$ *ve bazı* $h \in [0, 1)$ *için*

$(C_3^{m_r}1)$ $m_r(x, Tx) - m_{r_{x,Tx}} \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$
$(C_3^{m_r}2)$ $h\left[m_r(x, Tx) - m_{r_{x,Tx}}\right] + \varphi(x) \geq r$
$(C_3^{m_r}3)$ $m_{r_{x,Tx}} = M_{r_{x,Tx}}$

koşullarını sağlıyorsa $C_{x_0,r}^{m_r}$ *çemberi* T *dönüşümün bir sabit çemberidir.*

İspat (X, m_r) *bir rectangular* $M-$ *metrik uzay,* $C_{x_0,r}^{m_r}$ *bu uzayda* x_0 *merkezli* r *yarıçaplı bir çember ve* $\varphi : x \to [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için* $\varphi(x) = m_r(x, x_0) - m_{r_{x,x_0}}$ *şeklinde tanımlı ve* $T : X \to X$ *teoremin hipotezindeki koşulları sağlayan bir dönüşüm olsun. Buna göre herhangi bir* $x \in C_{x_0,r}^{m_r}$ *için* $m_r(x, x_0) - m_{r_{x,x_0}} = r$ *dir. Bu aşamada* $(C_3^{mr}1)$ *koşulundan başlayarak,* $(C_3^{mr}2)$ *koşulu yardımıyla*

$$\begin{aligned} m_r(x, Tx) - m_{r_{x,Tx}} &\leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \\ &= (m_r(x, x_0) - m_{r_{x,x_0}}) - \varphi(Tx) \\ &= r - \varphi(Tx) \\ &\leq \left(h\left[m_r(x, Tx) - m_{r_{x,Tx}}\right] + \varphi(Tx)\right) - \varphi(Tx) \\ &= h\left[m_r(x, Tx) - m_{r_{x,Tx}}\right] \end{aligned}$$

bulunur. $(1 - h)\left[m_r(x, Tx) - m_{r_{x,Tx}}\right] \leq 0$ *elde edilir. Bu noktada hipotez gereğince* $h \in [0, 1)$ *olduğundan* $m_r(x, Tx) - m_{r_{x,Tx}} = 0$ *olur. Bunun yanı sıra* $(C_2^{mr}3)$ *koşulundan*

dolayı $m_{r_{x,Tx}} = M_{r_{x,Tx}}$ *ve rectangular* $M-$ *metriğin ilk aksiyomundan dolayı* $m_{r_{x,Tx}} = M_{r_{x,Tx}}$ *ve rectangular* $M-$ *metriğin ilk. aksiyomundan dolayı*

$$m_r(x, Tx) = m_{r_{x,Tx}} = M_{r_{x,Tx}} \Leftrightarrow x = Tx$$

sonucuna ulaşılır. Böylelikle $C^{m_r}_{x_0,r}$*,* T *dönüşümün bir sabit çemberidir.*

Örnek 5.7 *4. bölümde verilen örnek 4.1 deki* (x_θ, m_r) *rectangular* $M-$*metrik uzay* $\theta = \pi$ *olmak şartıyla ele alınsın. Yani* $X_\pi = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z) = \pi\} \cup \{0\}$ *ve* $m_r : X_\pi \times X_\pi \to [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x, y \in X_\pi$ *için* $m_r(x, y) = \frac{|x|+|y|}{2}$ *biçiminde tanımlıdır. Bu uzayda* $(C^{m_r}_{-3,1})$ *çemberi ve*

$$Tz = \begin{cases} z, & |z| \leq 4 \; ise \\ \frac{-25}{z}, & |z| > 4 \; ise \end{cases}$$

dönüşümü göz önüne alınsın. Buna göre çember gerekli hesaplamalar yapılarak $C^{m_r}_{-3,1} = \{-1, -5\}$ *olarak bulunur. Bu noktada* $(C_3^{mr}1), (C_3^{mr}2), (C_3^{mr}3)$ *koşullarının sağlandığı görülür. Böylelikle* $C^{m_r}_{-3,1}$ *çemberi,* T *dönüşümünün bir sabit çemberidir. Ancak* T *dönüşümünün tek sabit çemberinin* $C^{m_r}_{-3,1}$ *olmadığı,* $C^{m_r}_{-2,1}, C^{m_r}_{-1,\frac{1}{2}}, C^{m_r}_{-\frac{5}{2},\frac{3}{4}}$ *çemberlerinin de* T *nin sabit çemberi olduğunun görülmesi ile anlaşılır. Ancak tüm çemberler* T *altında invaryant değildir. Örneğin* $C^{m_r}_{-9,2}$ *ve* $C^{m_r}_{-4,\frac{3}{2}}$ *çemberleri* T *nin sabit çemberi değildir.*

Örnek 5.8 *Bir önceki örnekte ele alınan rectangular* $M-$*metrik uzay ve çember ele alınsın. Ayrıca dönüşüm* $Tz = \frac{3}{4}(z - 1)$ *olsun. Bu halde her* $x \in C^{m_r}_{-3,1} = \{-1, -5\}$ *için* $(C_3^{m_r}1)$ *koşulu*

$x = -1$ *için* $\frac{5}{4} - 1 \leq 1 - (\frac{9}{4} - \frac{3}{2}) \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$
$x = -5$ *için* $\frac{19}{4} - \frac{9}{2} \leq 1 - (\frac{15}{4} - 3) \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$

olup sağlanıyor iken apaçık olarak $(C_3^{mr}2)$ *koşulu* $h \in [0, 1)$ *olmak üzere*

$x = -1$ *için* $h.\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \geq 1$
$x = -5$ *için* $h.\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \geq 1$

olacağından sağlanmaz. Böylelikle $C^{m_r}_{-3,1}$ *çemberi* T *dönüşümü altında invaryant değildir.*

Örnek 5.9 *Bundan önceki iki örnekte kullanılan rectangular* $M-$*metrik uzay ve çember yeniden ele alınsın. Ayrıca dönüşüm* $Tz = 5z$ *olarak verilsin. Bu takdirde her*

$x \in C^{m_r}_{-3,1}\{-1,-5\}$*için* $(C^{m_r}_3 1)$ *koşulu*

$x=-1$ *için* $3-1 \leq 1-(4-3) \Rightarrow 2 \leq 0$
$x=-5$ *için* $15-5 \leq 1-(14-3) \Rightarrow 10 \leq -10$

olacağından sağlanmaz iken $(C^{mr}_3 2)$ *koşulu açık bir şekilde* $h \in [0,1)$ *olmak üzere*

$x=-1$ *için* $h.2+1 \geq 1$
$x=-5$ *için* $h.10+11 \geq 1$

olup sağlanır. Dolayısıyla $C^{m_r}_{-3,1}$ *çemberi* T *dönüşümü altında invaryant değildir.*

Teorem 5.4 (X,m_r) *bir rectangular* $M-$*metrik uzay ve* $C^{m_r}_{x_0,r}$ *bu uzayda bir çember olsun. Ayrıca* $\varphi : X \to [0,\infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için*

$$\varphi(x) = m_r(x,x_0) - m_{r_{x,x_0}}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde $T : X \to X$ *dönüşümü her* $x \in C^{m_r}_{x_0,r}$ *için*

$(C^{mr}_4 1)$ $m_r(x,Tx) - m_{r_{x,Tx}} \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2r$
$(C^{mr}_4 2)$ $m_r(x,Tx) - m_{r_{x,Tx}} + \varphi(Tx) \leq r$
$(C^{mr}_4 3)$ $m_{r_{x,Tx}} = M_{r_{x,Tx}}$

koşullarını sağlıyorsa $C^{m_r}_{x_0,r}$*çemberi* T *dönüşümünün sabit çemberidir.*

İspat (X,m_r) *bir rectangular* $M-$*metrik uzay,* $C^{m_r}_{x_0,r}$ *bu uzayda* x_0 *merkezli,* r *yarıçaplı bir çember ve* $\varphi : X \to [0,\infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için* $\varphi(x) = m_r(x,x_0) - m_{r_{x,x_0}}$ *şeklinde tanımlı ve* $T : X \to X$ *teoremin hipotezindeki koşulları sağlayan bir dönüşüm olsun. Buna göre herhangi bir* $x \in C^{m_r}_{x_0,r}$ *için* $m_r(x,x_0) - m_{r_{x,x_0}} = r$ *dir. Bu noktada* $(C^{mr}_4 1)$ *koşulundan başlayarak ve* $(C^{mr}_4 2)$ *yardımıyla*

$$\begin{aligned} m_r(x,Tx) - m_{r_{x,Tx}} &\leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2r \\ &= m_r(x,x_0) - m_{r_{x,x_0}} + \varphi(Tx) - 2r \\ &= r + \varphi(Tx) - 2r \\ &= \varphi(Tx) - r \\ &\leq \varphi(Tx) - \left[m_r(x,Tx) - m_{r_{x,Tx}} + \varphi(Tx)\right] \\ &= -\left[m_r(x,Tx) - m_{r_{x,Tx}}\right] \end{aligned}$$

bulunur. Bu aşamada düzenleme ile $2\left[m_r(x,Tx) - m_{r_{x,Tx}}\right] \leq 0$ *elde edilir. Ayrıca rectangular* $M-$*metriğin 2. aksiyomu gereğince* $m_r(x,Tx) \geq m_{r_{x,Tx}}$ *olacağından* $\left[m_r(x,Tx) - m_{r_{x,Tx}}\right] \geq 0$ *olmalıdır. O halde açıkça* $m_r(x,Tx) - m_{r_{x,Tx}} = 0$ *olur. Üstelik* $(C_4^{mr}3)$ *koşulundan dolayı* $m_{r_{x,Tx}} = M_{r_{x,Tx}}$ *olup rectangular* $M-$*metriğin ilk aksiyomu gereğince*

$$m_r(x,Tx) = m_{r_{x,Tx}} = M_{r_{x,Tx}} \Longleftrightarrow x = Tx$$

sonucu elde edilir. Bunun neticesi olarak $C_{x_0,r}^{m_r}$, T *dönüşümü altında invaryanttır.*

Örnek 5.10 *4. bölümde verilen örnek 4.1 deki* (X_θ, m_r) *rectangular* $M-$*metrik uzay* $\theta = \frac{\pi}{4}$ *olmak şartıyla ele alınsın. Yani* $X_{\frac{\pi}{4}} = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z) = \frac{\pi}{4}\right\} \cup \{0\}$ *ve* $m_r : X_{\frac{\pi}{4}} \times X_{\frac{\pi}{4}} \to [0,\infty)$ *fonksiyonu her* $x, y \in X_{\frac{\pi}{4}}$ *için* $m_r(x,y) = \frac{|x|+|y|}{2}$ *biçiminde tanımlıdır. Bu uzayda* $C_{3+3i,1}^{m_r}$ *çemberi ve*

$$Tz = \begin{cases} z & |z| < 10 \; ise \\ 3z & |z| \geq 10 \; ise \end{cases}$$

dönüşümü göz önüne alınsın. Buna göre çember gerekli hesaplamalar yapılarak $C_{3+3i,1}^{m_r} = \left\{(3-\sqrt{2}) + (3-\sqrt{2})i, (3+\sqrt{2}) + (3+\sqrt{2})i\right\}$ *olarak bulunur. Bu moktada kolayca her* $x \in C_{3+3i,1}^{m_r}$ *için* $(C_4^{mr}1), (C_4^{mr}2), (C_4^{mr}3)$ *koşullarının sağlandığı görülür. Bu sebeple* $C_{3+3i,1}^{m_r}$ *çemberi* T *dönüşümünün sabit çemberidir. Ancak* T *dönüşümünün tek sabit çemberinin* $C_{3+3i,1}^{m_r}$ *olmadığı,* $C_{2+2i,1}^{m_r}, C_{4+4i,\frac{1}{2}}^{m_r}, C_{3+3i,2}^{m_r}$ *çemberlerinde* T *nin sabit çemberi olduğunun görülmesi ile anlaşılır. Elbetteki tüm çemberler* T *altında invaryant değildir. Örneğin* $C_{6+6i,3}^{m_r}$ *ve* $C_{5+5i,5}^{m_r}$ *çemberleri* T *nin sabit çemberi değildir.*

Örnek 5.11 *Bir önceki örnekte ele alınan rectangular* $M-$*metrik uzay ve çember ele alınsın. Ayrıca dönüşüm* $Tz = \frac{3z}{\left|\frac{-}{z}\right|}$ *olsun. Bu halde her* $x \in C_{3+3i,1}^{m_r} = \left\{(3-\sqrt{2}) + (3-\sqrt{2})i, (3+\sqrt{2}) + (3+\sqrt{2})i\right\}$ *için* $(C_4^{mr}1)$ *koşulu*

$x = (3-\sqrt{2}) + (3-\sqrt{2})i$ *için* $\frac{6\sqrt{2}+38}{28} - \frac{66-36\sqrt{2}}{14} \leq 1 + \frac{78\sqrt{2}-66}{28} - 2 \Rightarrow \frac{78\sqrt{2}-96}{28} \leq \frac{78\sqrt{2}-94}{28}$
$x = (3+\sqrt{2}) + (3+\sqrt{2})i$ *için* $\frac{94+78\sqrt{2}}{28} - (3\sqrt{2}+2) \leq 1 + \frac{66-6\sqrt{2}}{28} - 2 \Rightarrow \frac{38-6\sqrt{2}}{28} \leq \frac{38-6\sqrt{2}}{28}$

olup sağlanıyor iken açık bir şekilde $(C_4^{mr}1)$ *koşulu*

$x = (3-\sqrt{2}) + (3-\sqrt{2})i$ *için* $\frac{78\sqrt{2}-96}{28} + \frac{78\sqrt{2}-66}{28} \leq 1 \Rightarrow \frac{156\sqrt{2}-162}{28} \leq 1$
$x = (3+\sqrt{2}) + (3+\sqrt{2})i$ *için* $\frac{38-6\sqrt{2}}{28} + \frac{66-6\sqrt{2}}{28} \leq 1 \Rightarrow \frac{104-12\sqrt{2}}{28} \leq 1$

olacağından sağlanmaz. Bu nedenle $C_{3+3i,1}^{m_r}$ *çemberi,* T *dönüşümü altında invaryant değildir.*

Örnek 5.12 *Bundan önceki iki örnekte kullanılan rectangular $M-$metrik uzay ve çember yeniden ele alınsın. Ayrıca dönüşüm $Tz = \frac{|z+x_0|}{2}\frac{z}{|z|}$ olarak verilsin. Bu takdirde her $x \in C^{m_r}_{3+3i,1} = \left\{(3-\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})i, (3+\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})i\right\}$ için $(C^{mr}_4 1)$ koşulu*

$x = (3-\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})i$ *için* $\frac{6\sqrt{2}-3}{2} - (3\sqrt{2}-2)$

$\leq 1 + \frac{6\sqrt{2}-1}{2} - (3\sqrt{2}-1) - 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}$

$x = (3+\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})i$ *için* $\frac{6\sqrt{2}+3}{2} - (3\sqrt{2}+1) \leq 1 + \frac{6\sqrt{2}+1}{2} - 3\sqrt{2} - 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}$

olacağından sağlanmaz iken $(C^{mr}_4 2)$ koşulu apaçık olarak

$x = (3-\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})i$ *için* $\frac{6\sqrt{2}-3}{2} - (3\sqrt{2}-2) + \frac{6\sqrt{2}-1}{2} - (3\sqrt{2}-1) \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1$
$x = (3+\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})i$ *için* $\frac{6\sqrt{2}+3}{2} - (3\sqrt{2}+1) + \frac{6\sqrt{2}+1}{2} - 3\sqrt{2} \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1$

olup sağlanır. Bundan dolayı $C^{m_r}_{3+3i,1}$ çemberi, T dönüşümü altında invaryant değildir.

Teorem 5.5 *(X, m_r) bir rectangular $M-$metrik uzay ve $C^{m_r}_{x_0,r}$ bu uzayda bir çember olsun. $\varphi_r : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ dönüşümü her $u \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ için*

$$\varphi_r(u) = \begin{cases} u - r, & u > 0 \; ise \\ 0, & u = 0 \; ise \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde $T : X \to X$ dönüşümü her $x, y \in C^{m_r}_{x_0,r}$ için

$(C^{m_r}_5 1)$ $m_r(Tx, x_0) - m_{r_{Tx,x_0}} = r$
$(C^{m_r}_5 2)$ $x \neq y$ *olmak üzere* $m_r(Tx, Ty) - m_{r_{Tx,Ty}} > r$
$(C^{m_r}_5 3)$ $m_r(Tx, Ty) - m_{r_{Tx,Ty}} \leq m_r(x, y) - m_{r_{x,y}} - \varphi_r(m_r(x, Tx) - m_{r_{x,Tx}})$
$(C^{m_r}_5 4)$ $m_{r_{x,Tx}} = M_{r_{x,Tx}}$

koşullarını sağlıyorsa $C^{m_r}_{x_0,r}$ çemberi T dönüşümünün bir sabit çemberidir.

İspat *(X, m_r) bir rectangular $M-$metrik uzay, $C^{m_r}_{x_0,r}$ bu uzayda x_0 merkezli, r yarıçaplı bir çember ve $\varphi_r : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $u \in [0, \infty)$ için*

$$\varphi_r(u) = \begin{cases} u - r, & u > 0 \; ise \\ 0, & u = 0 \; ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlı ayrıca $T : X \to X$ teoremin hipotezindeki koşulları sağlayan bir dönüşüm olsun. Buna göre $x \in C^{m_r}_{x_0,r}$ keyfi bir nokta olmak üzere $(C^{m_r}_5 1)$ koşulu gereğince $Tx \in$

$C^{m_r}_{x_0,r}$ *olmalıdır. Şimdi* x *noktasının* T *nin bir sabit noktası olduğu ispatlanmalıdır. Bu amaç için* $x \neq Tx$ *olduğu varsayılsın. İlk olarak* $(C^{m_r}_5 2)$ *koşulunda* $x = x$ *ve* $y = Tx$ *alınarak* $m_r(Tx, T^2x) - m_{r_{Tx,T^2x}} > r$ *elde edilir. Ayrıca* $(C^{m_r}_5 3)$ *koşulu gereğince*

$$\begin{aligned} m_r(Tx, T^2x) - m_{r_{Tx,T^2x}} &\leq m_r(x, Tx) - m_{r_{x,Tx}} - \varphi_r(m_r(x, Tx) - m_{r_{x,Tx}}) \\ &= m_r(x, Tx) - m_{r_{x,Tx}} - (m_r(x, Tx) - m_{r_{x,Tx}} - r \\ &= r \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak açıkça $m_r(Tx, T^2x) - m_{r_{Tx,T^2x}} > r$ *ve* $m_r(Tx, T^2x) - m_{r_{Tx,T^2x}} \leq r$ *olduğundan çelişki elde edilir. Dolayısıyla varsayım hatalıdır. Yani* $Tx = x$ *olmalıdır. Bu takdirde* $C^{m_r}_{x_0,r}$ *çemberi* T *dönüşümü altında invaryanttır.*

Örnek 5.13 *4. bölümde verilen örnek 4.1 deki* (X_θ, m_r) *rectangular* $M-$*metrik uzayı* $\theta = \frac{\pi}{2}$ *olmak şartıyla ele alınsın. Buna göre* $X_{\frac{\pi}{2}} = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z) = \frac{\pi}{2}\right\} \cup \{0\}$ *ve* $m_r : X_{\frac{\pi}{2}} \times X_{\frac{\pi}{2}} \to [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x, y \in X_{\frac{\pi}{2}}$ *için* $m_r(x, y) = \frac{|x|+|y|}{2}$ *şeklinde tanımlıdır. Bu uzayda* $C^{m_r}_{3i,1}$ *çember ve* $Tz = \frac{1}{(\frac{|z|+3}{2} - \min\{|z|,3\})^2}.z$ *dönüşümü göz önüne alınsın. Buna göre çember için gerekli hesaplamalar yapılarak* $C^{m_r}_{3i,1} = \{i, 5i\}$ *olarak bulunur. Bu noktada kolayca her* $x \in C^{m_r}_{3i,1}$ *için* $(C^{m_r}_5 1), (C^{m_r}_5 2), (C^{m_r}_5 3), (C^{m_r}_5 4)$ *koşullarını sağladığı görülür. Bu nedenle* $C^{m_r}_{3i,1}$ *çemberi,* T *dönüşümü altında invaryanttır.*

Örnek 5.14 *Bir önceki örnekte ele alınan rectangular* $M-$*metrik uzay ve çember ele alınsın. Ayrıca dönüşüm* $Tz = \frac{5}{|z|^2}z$ *olsun. Bu durumda her* $x \in C^{m_r}_{3i,1} = \{i, 5i\}$ *için* $(C^{m_r}_5 1)$ *koşulu*

$x = i$ *için* $\frac{5+3}{2} - 3 = 1$ *ve* $x = 5i$ *için* $\frac{1+3}{2} - 1 = 1$

olup sağlanır. $(C^{m_r}_5 2)$ *koşulu her* $x, y \in C^{m_r}_{3i,1}$ *ve* $x \neq y$ *için*

$\frac{5+1}{2} - 1 = 2 > 1$

olduğundan sağlanır. $(C^{m_r}_5 3)$ *koşulu her* $x, y \in C^{m_r}_{3i,1}$ *için*

$\frac{5+1}{2} - 1 \leq \frac{1+5}{2} - 1 - \varphi_r(2) \Rightarrow 2 \leq 2 - (2 - 1) \Rightarrow 2 \leq 1$

olup sağlanmaz iken $(C^{m_r}_5 4)$ *koşulunda*

$\min\{1, 5\} = \max\{1, 5\} \Rightarrow 1 = 5$

olduğundan sağlanmaz. Bu sebeple $C^{m_r}_{3i,1}$ *çemberi,* T *dönüşümü altında invaryant değildir.*

Teorem 5.6 *(X, m_r) bir rectangular $M-$metrik uzay ve $C^{m_r}_{x_0,r}$ bu uzayda bir çember olsun. Ayrıca $\theta_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dönüşümü her $u \in \mathbb{R}$ ve $r \geq 0$ için*

$$\theta_r(u) = \begin{cases} r, & u = r \; ise \\ u + r, & u \neq r \; ise \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde $T : X \to X$ dönüşümü

$(C^{m_r}_6 1)$ Her $x \in X$ ve bazı $L \in [-\infty, 0)$ için

$$m_r(Tx, x_0) - m_{r_{Tx,x_0}} \leq \theta_r(m_r(x, x_0) - m_{r_{x,x_0}}) + L(m_r(x, Tx) - m_{r_{x,Tx}})$$

$(C^{m_r}_6 2)$ $x \in C^{m_r}_{3i,1}$ için $m_r(Tx, x_0) - m_{r_{Tx,x_0}} \geq r$

$(C^{m_r}_6 3)$ Her $x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in C^{m_r}_{x_0,r}$ için

$$m_r(Tx, Ty) - m_{Tx,Ty} \geq 2r$$

$(C^{m_r}_6 4)$ Her $x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in C^{m_r}_{x_0,r}$ için

$$m_r(Tx, Ty) - m_{Tx,Ty} < r + m_r(y, Tx) - m_{r_{y,Tx}}$$

$(C^{m_r}_6 5)$ Her $x \in C^{m_r}_{x_0,r}$ için $m_{r_{x,Tx}} = M_{r_{x,Tx}}$

koşullarını sağlıyorsa $C^{m_r}_{x_0,r}$ çemberi T dönüşümünün bir sabit çemberidir.

İspat *(X, m_r) bir rectangular $M-$metrik uzay, $C^{m_r}_{x_0,r}$ bu uzayda x_0 merkezli, r yarıçaplı bir çember ve $\theta_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dönüşümü her $u \in \mathbb{R}$ ve $r \geq 0$ için*

$$\theta_r(u) = \begin{cases} r, & u = r \; ise \\ u + r, & u \neq r \; ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlı ve ayrıca $T : X \to X$ teoremin hipotezindeki koşulları sağlayan bir dönüşüm olsun. Buna göre $x \in C^{m_r}_{x_0,r}$ keyfi bir nokta olmak üzere $(C^{m_r}_6 1)$ ve $(C^{m_r}_6 2)$ koşulları gereğince

$$\begin{aligned} m_r(Tx, x_0) - m_{r_{Tx,x_0}} &\leq \theta_r(m_r(x, x_0) - m_{r_{x,x_0}}) + L(m_r(x, Tx) - m_{r_{x,Tx}}) \\ &= r + L(m_r(x, Tx) - m_{r_{x,Tx}}) \end{aligned}$$

ve

$$m_r(Tx, x_0) - m_{r_{Tx,x_0}} \geq r$$

olacağından açıkça

$$r \leq m_r(Tx, x_0) - m_{r_{Tx,x_0}} \leq r + L(m_r(x, Tx) - m_{r_{x,Tx}})$$

elde edilir. Şimdi $L \in (-\infty, 0]$ *için durum* $L = 0$ *ve* $L \in (-\infty, 0)$ *olmak üzere iki hale ayrılacaktır.*

1.Hal: $L = 0$ olsun. Bu takdirde üstteki son eşitsizlik gereğince aşikar olarak $m_r(Tx, x_0) - m_{r_{Tx,x_0}} = r$ bulunur. Yani $Tx \in C^{m_r}_{x_0,r}$ olur. Bu takdirde $m_r(Tx, x_0) - m_{r_{Tx,x_0}} = 0$ veya $m_r(Tx, x_0) - m_{r_{Tx,x_0}} \neq 0$ olur. Bu aşamada $x \in C^{m_r}_{x_0,r}$ için $m_r(Tx, x_0) - m_{r_{Tx,x_0}} \neq 0$ olduğu varsayılsın. O halde $x \neq Tx$ olduğundan $(C^{m_r}_6 3)$ koşulu gereğince $x = x$ ve $y = Tx$ alarak $m_r(Tx, T^2x) - m_{r_{Tx,T^2x}} \geq 2r$ bulunur. Ayrıca $(C^{m_r}_6 4)$ koşulu koşulu kullanılarak,

$$m_r(Tx, T^2x) - m_{r_{Tx,T^2x}} < r + m_r(Tx, Tx) - m_{r_{Tx,Tx}}$$

olacacağından $(C^{m_r}_6 5)$ koşulu gereğince de açık bir şekilde

$$m_r(Tx, T^2x) - m_{r_{Tx,T^2x}} < r$$

elde edilir. Fakat bu ifade $m_r(Tx, T^2x) - m_{r_{Tx,T^2x}} \geq 2r$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $m_r(x, Tx) - m_{r_{x,Tx}} = 0$ olmalıdır ve böylelikle $(C^{m_r}_6 5)$ koşulu ve rectangular $M-$metrik uzayın ilk aksiyomu gereğince $x = Tx$ dir.

2.Hal: $L \in (-\infty, 0)$ olsun. $m_r(x, Tx) - m_{r_{x,Tx}} \neq 0$ ise

$$r \leq m_r(Tx, x_0) - m_{r_{Tx,x_0}} \leq r + L(m_r(x, Tx) - m_{r_{x,Tx}})$$

eşitsizliği ile çelişir. Böylelikle $m_r(x, Tx) - m_{r_{x,Tx}} = 0$ olak zorundadır. Bu nedenle $(C^{m_r}_6 5)$ koşulu ve rectangular $M-$metrik uzayın ilk aksiyomu gereğince $x = Tx$ elde edilir. Yani $C^{m_r}_{x_0,r}$ çemberi T dönüşümü altında invaryanttır. Diğer bir değişle T dönüşümünün bir sabit noktalarının kümesi $C^{m_r}_{x_0,r}$ çemberini içerir.

Örnek 5.15 *4. bölümde verilen örnek 4.1 deki* (X_θ, m_r) *rectangular* $M-$*metrik uzayı* $\theta = \pi$ *olmak şartıyla ele alınsın. Buna göre* $X_\pi = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z) = \pi\} \cup \{0\}$ *ve*

$m_r : X_\pi \times X_\pi \to [0,\infty)$ *fonksiyonu her* $x, y \in X_\pi$ *için* $m_r(x,y) = \frac{|x|+|y|}{2}$ *şeklinde tanımlıdır. Bu uzayda* $C^{m_r}_{-4,1}$ *çemberi ve* $Tz = \frac{1}{(\frac{|z|+4}{2} - \min\{|z|,4\})^2}.z$ *dönüşümü göz önüne alınsın. Buna göre* $C^{m_r}_{-4,1} = \{-2,-6\}$ *olarak bulunur. O halde kolaylıkla her* $x \in C^{m_r}_{-4,1}$ *için* $(C^{m_r}_6 1), (C^{m_r}_6 2), (C^{m_r}_6 3), (C^{m_r}_6 4)$ $(C^{m_r}_6 5)$ *koşullarını sağladığı görülür. Dolayısıyla* $C^{m_r}_{-4,1}$ *çemberi,* T *dönüşümü altında invaryanttır.*

Örnek 5.16 *Bir önceki örnekte ele alınan rectangular* $M-$*metrik uzay ve çember ele alınsın. Ayrıca dönüşüm* $Tz = \frac{12}{|z|^2}z$ *olsun. Bu durumda her* $x \in C^{m_r}_{-4,1} = \{-2,-6\}$ *için* $(C^{m_r}_6 1)$ *koşulu*

$x = -2$ *için* $\frac{6+4}{2} - 4 \leq \theta_r(1) + L(\frac{2+6}{2} - 2) \Rightarrow 1 \leq 1 + L2$
$x = -6$ *için* $\frac{2+4}{2} - 2 \leq \theta_r(1) + L(\frac{2+6}{2} - 2) \Rightarrow 1 \leq 1 + L2$

olup $L = 0$ *için sağlanır.* $(C^{m_r}_6 2)$ *koşulu*

$x = -2$ *için* $\frac{6+4}{2} - 4 = 1 \geq 1$ *ve* $x = -6$ *için* $\frac{2+4}{2} - 2 = 1 \geq 1$

olduğundan sağlanır. $(C^{m_r}_6 3)$ *koşulu her* $x, y \in C^{m_r}_{-4,1}$ *ve* $x \neq y$ *için*

$\frac{6+2}{2} - 2 = 2 \geq 2$
olup sağlanır iken $(C^{m_r}_6 4)$ *koşulu*

$\frac{6+2}{2} - 2 < 1 + \frac{6+6}{2} - 6 \Rightarrow 2 < 1$

olup sağlanmaz $(C^{m_r}_6 5)$ *koşulunda*

$\min\{2,6\} = \max\{2,6\} \Rightarrow 2 = 6$

olduğundan sağlanmaz. Bu sebeple $C^{m_r}_{-4,1}$ *çemberi,* T *dönüşümü altında invaryant değildir.*

Teorem 5.7 (X, m_r) *bir rectangular* $M-$*metrik uzay ve* $C^{m_r}_{x_0,r}$ *bu uzayda bir çember olsun. Ayrıca* $\theta_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dönüşümü her* $u \in \mathbb{R}$ *ve* $r \geq 0$ *için*

$$\theta_r(u) = \begin{cases} r, & u = r \; ise \\ u + r, & u \neq r \; ise \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde $T : X \to X$ *dönüşümü*

$(C_7^{m_r}1)$ *Her* $x \in X$ *ve bazı* $L \in (-\infty, 0]$ *için*

$$2\left[m_r(x,x_0) - m_{r_{x,x_0}}\right] - \left[m_r(Tx,x_0) - m_{r_{Tx,x_0}}\right] \leq \theta_r(m_r(x,x_0) - m_{r_{x,x_0}}) + L(m_r(x,Tx) - m_{r_{x,Tx}})$$

$(C_7^{m_r}2)$ $x \in C_{x_0,r}^{m_r}$ *için* $m_r(Tx,x_0) - m_{r_{Tx,x_0}} \leq r$

$(C_7^{m_r}3)$ *Her* $x \neq y$ *olacak şekilde* $x, y \in C_{x_0,r}^{m_r}$ *için*

$$m_r(Tx,Ty) - m_{Tx,Ty} \geq 2r$$

$(C_7^{m_r}4)$ *Her* $x \neq y$ *olacak şekilde* $x, y \in C_{x_0,r}^{m_r}$ *için*

$$m_r(Tx,Ty) - m_{Tx,Ty} < r + m_r(y,Tx) - m_{r_{y,Tx}}$$

$(C_7^{m_r}5)$ *Her* $x \in C_{x_0,r}^{m_r}$ *için* $m_{r_{x,Tx}} = M_{r_{x,Tx}}$

koşullarını sağlıyorsa $C_{x_0,r}^{m_r}$ *çemberi* T *dönüşümünün bir sabit çemberidir.*

İspat (X, m_r) *bir rectangular* $M-$*metrik uzay,* $C_{x_0,r}^{m_r}$ *bu uzayda* x_0 *merkezli,* r *yarıçaplı bir çember ve* $\theta_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dönüşümü her* $u \in \mathbb{R}$ *ve* $r \geq 0$ *için*

$$\theta_r(u) = \begin{cases} r, & u = r\ ise \\ u + r & u \neq r\ ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlı ve ayrıca $T : X \to X$ *teoremin hipotezindeki koşulları sağlayan bir dönüşüm olsun. Buna göre* $x \in C_{x_0,r}^{m_r}$ *keyfi bir nokta olmak üzere* $(C_7^{m_r}1)$ *ve* $(C_7^{m_r}2)$ *koşulları gereğince*

$$\begin{aligned} 2\left[m_r(x,x_0) - m_{r_{x,x_0}}\right] &- \left[m_r(Tx,x_0) - m_{r_{Tx,x_0}}\right] \\ &\leq \theta_r(m_r(x,x_0) - m_{r_{x,x_0}}) + L(m_r(x,Tx) - m_{r_{x,Tx}}) \\ &\Rightarrow 2r - \left[m_r(Tx,x_0) - m_{r_{Tx,x_0}}\right] \\ &\leq r + L(m_r(x,Tx) - m_{r_{x,Tx}}) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} r &\leq \left[m_r(Tx,x_0) - m_{r_{Tx,x_0}}\right] + L(m_r(x,Tx) - m_{r_{x,Tx}}) \\ &\leq r + L\left[(m_r(x,Tx) - m_{r_{x,Tx}})\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $L \in (-\infty, 0]$ *için durum* $L = 0$ *ve* $L \in (-\infty, 0)$ *olmak üzere iki hale ayrılacaktır.*

1.Hal: $L = 0$ olsun. Bu takdirde üstteki son eşitsizlik gereğince açıkça $m_r(Tx, x_0) - m_{r_{Tx,x_0}} = r$ bulunur. Yani $Tx \in C^{m_r}_{x_0,r}$ olur. Bu takdirde $m_r(x, Tx) - m_{r_{x,Tx}} = 0$ veya $m_r(x, Tx) - m_{r_{x,Tx}} \neq 0$ olur. Bu aşamada $x \in C^{m_r}_{x_0,r}$ için $m_r(x, Tx) - m_{r_{x,Tx}} \neq 0$ olduğu varsayılsın. O halde $x \neq Tx$ olduğundan $(C^{m_r}_7 3)$ koşulu gereğince $x = x$ ve $y = Tx$ alarak $m_r(Tx, T^2x) - m_{r_{Tx,T^2x}} \geq 2r$ bulunur. Ayrıca $(C^{m_r}_7 4)$ koşulu koşulu kullanılarak,

$$m_r(Tx, T^2x) - m_{r_{Tx,T^2x}} < r + m_r(Tx, Tx) - m_{r_{Tx,Tx}}$$

olacağından $(C^{m_r}_7 5)$ koşulu gereğince de apaçık olarak

$$m_r(Tx, T^2x) - m_{r_{Tx,T^2x}} < r$$

elde edilir. Fakat bu ifade $m_r(Tx, T^2x) - m_{r_{Tx,T^2x}} \geq 2r$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $m_r(x, Tx) - m_{r_{x,Tx}} = 0$ olmalıdır ve böylelikle $(C^{m_r}_7 5)$ koşulu ve rectangular $M-$metrik uzayın ilk aksiyomu gereğince $x = Tx$ dir.

2.Hal: $L \in (-\infty, 0)$ olsun. $m_r(x, Tx) - m_{r_{x,Tx}} \neq 0$ ise

$$r \leq \left[m_r(Tx, x_0) - m_{r_{Tx,x_0}}\right] + L\left[m_r(x, Tx) - m_{r_{x,Tx}}\right] \leq r + L(m_r(x, Tx) - m_{r_{x,Tx}})$$

eşitsizliği ile çelişir. Böylelikle $m_r(x, Tx) - m_{r_{x,Tx}} = 0$ olmak zorundadır. Bu nedenle $(C^{m_r}_7 5)$ koşulu ve rectangular $M-$metrik uzayın ilk aksiyomu gereğince $x = Tx$ elde edilir. Bu takdirde her $x \in C^d_{x_0,r}$ için $x = Tx$ elde edilir. Yani $C^{m_r}_{x_0,r}$ çemberi T dönüşümü altında invaryanttır. Diğer bir değişle T dönüşümünün bir sabit noktalarının kümesi $C^{m_r}_{x_0,r}$ çemberini içerir.

Örnek 5.17 *4. bölümde verilen örnek 4.1 deki* (X_θ, m_r) *rectangular* $M-$*metrik uzayı* $\theta = \frac{3\pi}{2}$ *olmak şartıyla ele alınsın. Buna göre* $X_\pi = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z) = \frac{3\pi}{2}\right\} \cup \{0\}$ *ve* $m_r : X_{\frac{3\pi}{2}} \times X_{\frac{3\pi}{2}} \to [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x, y \in X_{\frac{3\pi}{2}}$ *için* $m_r(x, y) = \frac{|x|+|y|}{2}$ *şeklinde tanımlıdır. Bu uzayda* $C^{m_r}_{-5i,2}$ *çemberi ve* $Tz = \frac{4}{(\frac{|z|+5}{2} - \min\{|z|,5\})^2}.z$ *dönüşümü göz önüne alınsın. Buna göre* $C^{m_r}_{-5i,2} = \{-i, -9i\}$ *olarak bulunur. O halde kolaylıkla her* $x \in C^{m_r}_{-5i,2}$ *için* $(C^{m_r}_7 1), (C^{m_r}_7 2), (C^{m_r}_7 3), (C^{m_r}_7 4)$ $(C^{m_r}_7 5)$ *koşullarını sağladığı görülür. Dolayısıyla* $C^{m_r}_{-5,2}$ *çemberi,* T *dönüşümü altında invaryanttır.*

Örnek 5.18 *Bir önceki örnekte ele alınan rectangular* $M-$*metrik uzay ve çember ele alınsın. Ayrıca dönüşüm* $Tz = \frac{9}{|z|^2}z$ *olsun. Bu durumda her* $x \in C^{m_r}_{-5i,2} = \{-i, -9i\}$ *için*

$(C_7^{m_r}1)$ *koşulu*

$x=-i$ *için* $2\left[\frac{1+5}{2}-1\right]-2\left[\frac{9+5}{2}-5\right]\leq\theta_r(2)+L\left[\frac{1+9}{2}-1\right]\Rightarrow 2\leq+L4$
$x=-9i$ *için* $2\left[\frac{9+5}{2}-5\right]-2\left[\frac{1+5}{2}-1\right]\leq\theta_r(2)+L\left[\frac{1+9}{2}-1\right]\Rightarrow 2\leq+L4$

olup $L=0$ *için sağlanır.* $(C_7^{m_r}2)$ *koşulu*

$x=-i$ *için* $\frac{9+5}{2}-5=2\leq 2$
$x=-9i$ *için* $\frac{1+5}{2}-5=2\leq 2$

olduğundan sağlanır. $(C_7^{m_r}3)$ *koşulu her* $x,y\in C_{-5i,2}^{m_r}$ *ve* $x\neq y$ *için*

$\frac{9+1}{2}-1=4\geq 4$

olup sağlanır iken $(C_7^{m_r}4)$ *koşulu*

$\frac{9+1}{2}-1<2+\frac{9+9}{2}-9\Rightarrow 4<2$

olduğundan sağlanmaz $(C_7^{m_r}5)$ *koşuluda*

$\min\{1,9\}=\max\{1,9\}\Rightarrow 1=9$

olduğundan sağlanmaz.

Bu sebeple $C_{-5i,2}^{m_r}$ *çemberi,* T *dönüşümü altında invaryant değildir.*

X boştan farklı bir küme olmak üzere her $x\in X$ için $I_x(x)=x$ olacak şekilde tanımlı dönüşüme x üzerinde birim dönüşüm denir. Açıkça birim dönüşüm uzaydaki bütün noktaları sabit bırakan dönüşümdür. Üstelik Teorem 5.1-5.4 teoremlerindeki koşullar birim dönüşüm tarafından sağlanır. Doğal olarak teoremin hipotezinde verilen çemberler I altında invaryanttır. Fakat birim dönüşümler tüm noktaları bıraktığı için bu sonuç çok anlamlı değildir. Bu nedenle birim olmayan dönüşümleri belirlemek önemli olacaktır. Aşağıdaki teorem ele alınan dönüşümünün hangi koşullar alında birim dönüşüm olacağını ifade etmektedir.

Teorem 5.8 (X,m_r) *bir rectangular* $M-$*metrik uzay,* $C_{x_0,r}^{m_r}$ *bu uzayda* x_0 *merkezli,* r *yarıçaplı çember olsun. Ayrıca* $\varphi:X\to[0,\infty)$ *fonksiyonu her* $x\in X$ *için*

$\varphi(x) = m_r(x, x_0) - m_{r_{x,x_0}}$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde $T : X \to X$ dönüşümü $x \neq y$ olacak şekilde her $x, y \in X$ ve bazı $h > 1$ için
$m_r(x, Tx) - m_{r_{x,Tx}} + m_r(y, Ty) - m_{r_{y,Ty}} \leq \frac{\varphi(x)-\varphi(Tx)+\varphi(y)-\varphi(y)-2\left[m_r(Tx,Ty)-m_{r_{Tx,Ty}}\right]}{h}$ ve $m_{r_{x,Tx}} = M_{r_{x,Tx}}$ koşullarını sağlıyorsa T, X üzerinde birim dönüşümüdür. Dolasıyla $C^{m_r}_{x_0,r}$, T dönüşümünün bir sabit çemberidir. Üstelik ifadenin tersi de doğrudur.

İspat *(X, m_r) bir rectangular $M-$metrik uzay, $C^{m_r}_{x_0,r}$ bu uzayda x_0 merkezli, r yarıçaplı bir çember ve $\varphi : x \to [0, \infty)$ dönüşümü her $x \in X$ için $\varphi(x) = m_r(x, x_0) - m_{r_{x,x_0}}$ şeklinde tanımlı ve $T : X \to X$ teoreminin hipotezindeki koşulları sağlayan bir dönüşüm olsun. $x, y \in X$, $x \neq y$, $x \neq Tx$ ve $y \neq Ty$ olsun. Bu takdirde teoremin hipotezindeki eşitsizlik ve rectangular $M-$metriğin 4. aksiyomu kullanılarak*

$$\begin{aligned}
h\left[m_r(x,Tx) - m_{r_{x,Tx}} + m_r(y,Ty) - m_{r_{y,Ty}}\right] &\leq \varphi(x) - \varphi(Tx) + \varphi(y) - \varphi(Ty) \\
&\quad -2\left[m_r(Tx,Ty) - m_{r_{Tx,Ty}}\right] \\
&= m_r(x,x_0) - m_{r_{x,x_0}} - m_r(Tx,x_0) \\
&\quad +m_{r_{Tx,x_0}} + m_r(y,x_0) - m_{r_{y,x_0}} \\
&\quad -m_r(Ty,x_0) - m_{r_{Ty,x_0}} \\
&\quad -2\left[m_r(Tx,Ty) - m_{r_{Tx,Ty}}\right] \\
&\leq m_r(x,Tx) - m_{r_{x,Tx}} + m_r(Tx,Ty) \\
&\quad -m_{r_{Tx,Ty}} + m_r(Ty,x_0) \\
&\quad -m_{r_{Ty,x_0}} - m_r(Tx,y_0) - m_{r_{Tx,x_0}} \\
&\quad +m_r(y,Ty) - m_{r_{y,Ty}} + m_r(Ty,Tx) \\
&\quad -m_{r_{Ty,Tx}} + m_r(x,x_0) - m_{r_{x,x_0}} \\
&\quad -m_r(Ty,x_0) - m_{r_{Ty,x_0}} \\
&\quad -2\left[m_r(Tx,Ty) - m_{r_{Tx,Ty}}\right] \\
&= m_r(x,Tx) - m_{r_{x,Tx}} + m_r(y,Ty) - m_{r_{y,Ty}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ulaşılan noktadan düzenleme ile

$$(h-1)\left[m_r(x,Tx) - m_{r_{x,Tx}} + m_r(y,Ty) - m_{r_{y,Ty}}\right] \leq 0$$

sonucuna ulaşır. Şimdi $h > 1$ olduğundan ve rectangular $M-$metriğin 2.aksiyomu gereğince

$$\begin{aligned} m_r(x,Tx) - m_{r_{x,Tx}} + m_r(y,Ty) - m_{r_{y,Ty}} &= 0 \\ &\Rightarrow \; m_r(x,Tx) - m_{r_{x,Tx}} = 0 \\ &= \; 0 \; ve \; m_r(y,Ty) - m_{r_{y,Ty}} = 0 \end{aligned}$$

olur. Ayrıca teoremin hipotezi gereğince $m_{r_{u,Tu}} = M_{r_{u,Tu}}$ *olup rectangular* $M-$*metriğin 1.aksiyomundan dolayı* $x = Tx$ *ve* $y = Ty$ *sonucuna ulaşılır. Bu nedenle* $T = I_X$ *dir ve sonuç olarak* $C^{m_r}_{x_0,r}$ *çemberi* T*nin sabit çemberidir.Tersine* $T = I_X$ *ise* I_X *birim dönüşümü hipotezdeki koşulu açıkça sağlar.*

Teorem 5.9 (X, m_r) *bir rectangular* $M-$*metrik uzay,* $C^{m_r}_{x_0,r}$ *bu uzayda bir çember olsun. Ayrıca* $C^{m_r}_{x_0,r}$, $T : X \to X$ *dönüşümünün sabit çemberi olsun. Bu takdirde* $T : X \to X$ *dönüşümünün her* $x \in X$ *için ve bazı* $\alpha \in (0,1)$ *için*

$$m_r(x,Tx) - m_{r_{x,Tx}} \leq \alpha \left[\max\left\{m_r(x,Tx) - m_{r_{x,Tx}}, m_r(x_0,Tx) - m_{r_{x_0,Tx}}\right\} - (m_r(x_0,Tx) - m_{r_{x_0,Tx}})\right]$$

ve $m_{r_{x,Tx}} = M_{r_{x,Tx}}$ *koşullarını sağlaması için gerek ve yeter koşul* $T = I_x$ *olmasıdır.*

İspat (X, m_r) *bir rectangular* $M-$*metrik uzay ve* $T : X \to X$ *dönüşümü* $C^{m_r}_{x_0,r}$ *sabit çemberine sahip olsun* $x \neq Tx$ *olacak şekilde* $x \in X$ *olsun. Teoremin hipotezindeki eşitsizlikte yer alan maksimum ifadesi gereğince iki durum söz konusudur.*

1.Durum:

$$m_r(x,Tx) - m_{r_{x,Tx}} \geq m_r(x_0,Tx) - m_{r_{x_0,Tx}}$$

olsun. Bu takdirde ifade

$$\begin{aligned} m_r(x,Tx) - m_{r_{x,Tx}} &\leq \alpha \left[m_r(x,Tx) - m_{r_{x,Tx}} - (m_r(x_0,Tx) - m_{r_{x_0,Tx}})\right] \\ &\leq \alpha(m_r(x,Tx) - m_{r_{x,Tx}}) \end{aligned}$$

olup $\alpha \in (0,1)$ olduğundan dolayı $m_r(x,Tx) - m_{r_{x,Tx}} = 0$ bulunur Bu ise $x \neq Tx$ olması ile çelişir.

2.Durum:

$$m_r(x,Tx) - m_{r_{x,Tx}} \leq m_r(x_0,Tx) - m_{r_{x_0,Tx}}$$

olsun. Bu göre ifade

$$m_r(x,Tx) - m_{r_{x,Tx}} \leq \alpha \left[(m_r(x_0,Tx) - m_{r_{x_0,Tx}} - (m_r(x,Tx) - m_{r_{x,Tx)}}) \right] = 0$$

olur. Bundan dolayı her $x \in X$ için $Tx = x$ olur ki bu ise $T = I_x$ olmasını gerektirir. Tersine I_x birim dönüşümü teoremin hipotezindeki koşulu apaçık bir şekilde sağlar.
Aşağıdaki önermeler bir ractangular $M-$metrik uzayda bu uzayının kendi dönüşümünün birden fazla sabit çemberinin varolabileceğine göstermektedir.

Önerme 5.1 *(X, m_r) bir rectangular $M-$metrik uzay ve $C^{m_r}_{x_1,r_1}$ ile $C^{m_r}_{x_2,r_2}$ bu uzayda iki çember olsun. Bu takdirde $C^{m_r}_{x_1,r_1}$ ile $C^{m_r}_{x_2,r_2}$ çemberlerini sabit bırakacak şekilde bir $T : X \to X$ dönüşümü vardır*

İspat *(X, m_r) bir rectangular $M-$metrik uzay ve $C^{m_r}_{x_1,r_1}$ ve $C^{m_r}_{x_2,r_2}$ bu uzayda sırasıyla x_1 merkezli, r_1 yarıçaplı ve x_2 merkezli, r_2 yarıçaplı çemberler olsun Ayrıca $m_r(P, x_1) - m_{r_{P,x_1}} \neq r_1$ ve $m_r(P, x_2) - m_{r_{P,x_i}} \neq r_2$ olacak şekilde bir nokta $P \in X$ olmak üzere her $x \in X$ için $T : X \to X$ dönüşümü*

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in C_{x_{1i},r_1} \cup C_{x_{2i},r_2}\ ise \\ P, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

*şeklinde tanımlansın. Bunların yanı sıra $\varphi_1, \varphi_2 : X \to [0, \infty)$ dönüşümleri her $x \in X$ için $\varphi_1(x) = m_r(x, x_1) - m_{r_1}$ ve $\varphi_2(x) = m_r(x, x_2) - m_{r_{x,x_2}}$
olacak şekilde tanımlı olsun. Bu takdirde T dönüşümü,φ_1 ve φ_2 dönüşümleri ile birlikte $C^{m_r}_{x_1,r_1}$ ile $C^{m_r}_{x_2,r_2}$ çemberleri $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ve de $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ olmak üzere $(C^{mr}_{j,i})$ koşullarını sağlar. Bu nedenle Teorem 5.j gereğince açıkca $C^{m_r}_{x_1,r_1}$ ile $C^{m_r}_{x_2,r_2}$ çemberi T dönüşümünün sabit çemberleridir. Üstelik dikkat edilirse $C^{m_r}_{x_1,r_1}$ ile $C^{m_r}_{x_2,r_2}$ çemberinin konumları ve büyüklükleri üzerinde herhangi bir kısıtlama yoktur.*

Önerme 5.2 *(X, m_r) bir rectangular $M-$metrik uzay ve $C^{m_r}_{x_1,r_1}, ..., C^{m_r}_{x_2,r_2}$ bu uzayda herhangi n çember olsun. Bu takdirde $C^{m_r}_{x_1,r_1}, ..., C^{m_r}_{x_2,r_2}$ çemberlerini sabit bırakacak şekilde bir $T : X \to X$ dönüşümü vardır*

İspat *(X, m_r) bir rectangular $M-$metrik uzay olmak üzere $C^{m_r}_{x_1,r_1}, ..., C^{m_r}_{x_2,r_2}$ bu uzayda $i = 1, ..., n$ için x_i merkezli, r_i yarıçaplı çemberler olsun. Ayrıca $i = 1, 2, ..., n$ için $m_r(P, x_i) -$*

$m_{r_{P,x_i}} \neq r_i$ *olacak şekilde bir nokta* $P \in X$ *olmak üzere her* $x \in X$ *için* $T : X \to X$ *dönüşümü*

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in \bigcup_{i=1}^{n} C_{x_i,r_i}^{m_r} \; ise \\ P, & diğer \; durumlarda \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Bunların yanı sıra $i = 1, 2, ..., n$ *için* $\varphi(x) : X \to [0.\infty)$ *dönüşümleri her* $x \in X$ *için* $\varphi_i(x) = m_r(x, x_i) - m_{r_{x,xi}}$ *olacak şekilde tanımlanmış olsun. Bu takdirde* T *dönüşümü* $i = 1, ..., n$ *olmak üzere* φ_i *dönüşümleri ile birlikte* $C_{x_i,r_i}^{m_r}$ *çemberleri için* $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *ve de* $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ *olmak üzere* $(C_j^{m_r} k)$ *koşullarını sağlar. Böylelikle Theorem 5.1 gereğince aşikar olarak* $C_{x_1,r_1}^{m_r}, ..., C_{x_n,r_n}^{m_r}$ *çemberleri* T *dönüşümünün sabit çemberleridir. Ayrıca dikkat edileceği üzere* $i = 1, ..., n$ *için* $C_{x_i,r_i}^{m_r}$ *çemberlerinin konumları ve büyüklükleri üzerinde herhangi bir kısıtlama yoktur.*

Buraya kadar olan kısımda teorem 5.1-5.7 ile rectangular $M-$*metrik uzayda bir kendi üzerine dönüşümün hangi koşullar altında sabit çemberinin varolacağı verildi. Kısaca sabit çemberin varlık koşulları verildi. Önerme 5.1 ve Önerme 5.2 ile de varlık koşullarını sağlayan bir dönüşümün birden fazla sabit çemberinin olabileceği görülmüş oldu. O halde an itibarı ile bir rectangular* $M-$*metrik uzayda bir kendi üzerine dönüşümün ne zaman bir tek sabit çemberinin olacağı sorusu önem kazanmış olur. Bu bağlamda aşağıdaki teoremler bu soruya yanıt vermektedir. Yani kısacası bir rectangular* $M-$*metrik uzayda sabit çemberin teklik koşulları verilecektir.*

Teorem 5.10 (X, m_r) *bir rectangular* $M-$*metrik uzay,* $C_{x_0,r}^{m_r}$ *bu uzayda bir çember olsun. Ayrıca* $C_{x_0,r}^{m_r}$, $T : X \to X$ *dönüşümünün sabit çemberi olsun. Bu takdirde* $T : X \to X$ *dönüşümü* $i = 1, 2, ..., 7$, $j = 1, 2, ..., 5$ *olmak üzere* $(C_i^{m_r} j)$ *koşullarını sağlasın. Bu takdirde her* $x \in C_{x_0,r}^{m_r}$, $y \in X \setminus C_{x_0,r}^{m_r}$ *ve bazı* $h \in (0, 1)$ *için* T *dönüşümü*

$$m_r(Tx, Ty) - m_{r_{Tx,Ty}} \leq h \left[m_r(x, y) - m_{r_{x,y}} \right]$$

büzülme koşulunu ve $m_{r_{x,y}} = M_{r_{x,y}}$ *koşulunu sağlıyorsa* $C_{x_0,r}^{m_r}$ *çemberi* T *dönüşümünün bir tek sabit çemberidir.*

İspat (X, m_r) *bir rectangular* $M-$*metrik uzay* $C_{x_0,r}^{m_r}$ *bu uzayda sırasıyla* x_0 *merkezli,* r *yarıçaplı bir çember ve* $T : X \to X$ *bir dönüşüm olsun. Üstelik* T *dönüşümü her* $x \in C_{x_0,r}^{m_r}$ *ve* $y \in X \setminus C_{x_0,r}^{m_r}$ *noktaları için* $h \in (0, 1)$ *olmak üzere*

$$m_r(Tx, Ty) - m_{r_{Tx,Ty}} \leq h \left[m_r(x, y) - m_{r_{x,y}} \right]$$

büzülme koşulunu sağlasın. Bunun yanı sıra $C_{x_0,r}^{m_r}$ *ve* $C_{x_0^x,r^x}^{m_r}$ *çemberlerinin* T *dönüşümünün iki farklı sabit çemberi olduğu varsayılsın.* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in C_{x_0,r}^{m_r}$ *ve* $v \in C_{x_0^x,r^x}^{m_r}$ *noktaları ele alınsın. Bu takdirde* T *dönüşümünün gerçeklediği büzülme koşulu gereğince*

$$m_r(u,v) - m_{r_{u,v}} = m_r(\bar{Tu}, Tv) - m_{r_{Tu,Tv}} \leq h\left[m_r(u,v) - m_{r_{u,v}}\right]$$

olur. Buradan da düzenleme ile $(1-h)\left[m_r(u,v) - m_{r_{u,v}}\right] \leq 0$ *sonucuna ulaşılır. Ancak her* $h \in (0,1)$ *olduğundan* $m_r(u,v) = m_{r_{u,v}}$ *ve* $m_{r_{u,v}} = M_{r_{u,v}}$ *olup dolayısıyla* $u = v$ *olmalıdır. Bu ise bir çelişkidir. O halde varsayım hatalı olup bu nedenle* $C_{x_0,r}^{m_r}$ *çemberi,* T *dönüşümünün tek sabit çemberidir.*

Teorem 5.11 (X, m_r) *bir rectangular* $M-$*metrik uzay,* $C_{x_0,r}^{m_r}$ *bu uzayda bir çember ve* $T : X \to X$ *dönüşümü* $i = 1,2,...,7$ *,* $j = 1,2,...,5$ *olmak üzere* $(C_i^{m_r} j)$ *koşullarını sağlasın. Bu takdirde her* $x \in C_{x_0,r}^{m_r},\ y \in X \setminus C_{x_0,r}^{m_r}$ *ve bazı* $h \in (0,1)$ *için* T *dönüşümü*

$$m_r(Tx,Ty) - m_{r_{Tx,Ty}} \leq h \max\left\{m_r(x,y) - m_{r_{x,y}}, m_r(x,Tx) - m_{r_{x,Tx}}, m_r(y,Ty) - m_{r_{y,Ty}}\right\}$$

büzülme ve $m_{r_{x,y}} = M_{r_{x,y}}$ *koşulunu sağlıyorsa* $C_{x_0,r}^{m_r}$*,* T *dönüşümünün bir tek sabit çemberidir.*

İspat *Teorem 5.12 nin ispatında olduğu gibi* $C_{x_0,r}^{m_r}$ *ve* $C_{x_{0^*},r^*}^{m_r}$ *çemberlerinin* T *dönüşümünün iki farklı sabit çemberi olduğu varsayılsın. O halde* $u \neq v$ *olacak şekilde* $u \in C_{x_0,r}^{m_r}$ *ve* $v \in C_{x_{0^*},r^*}^{m_r}$ *olmak üzere* T *nin sağladığı büzülme koşulu gereğince*

$$\begin{aligned} m_r(u,v) - m_{r_{u,v}} &= m_r(Tu,Tv) - m_{r_{Tu,Tv}} \leq h\left[m_r(u,Tu) - m_{r_{u,Tu}} + m_r(v,Tv) - m_{r_{v,Tv}}\right] \\ &= h\left[m_r(u,Tu) - m_{r_{u,Tu}} + m_r(v,Tv) - m_{r_{v,Tv}}\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $m_r(u,v) - m_{r_{u,v}}$ *dir. Ayrıca* $m_{r_{x,y}} = M_{r_{x,y}}$ *olduğundan dolayı* $u = v$ *sonucun ulaşır. Fakat bu bir çelişki olup varsayım hatalıdır. Böylelikle* $C_{x_0,r}^{m_r}$ *çemberi,* T *dönüşümünün bir tek sabit çemberidir.*

Teorem 5.12 (X, m_r) *bir rectangular* $M-$*metrik uzay,* $C_{x_0,r}^{m_r}$ *bu uzayda bir çember,* $T : X \to X$ *dönüşümü* $i \in \{1,2,...,7\}$ *,* $j \in \{1,2,...,5\}$ *olmak üzere* $(C_i^{m_r} j)$ *koşullarını sağlasın. Bu takdirde her* $x \in C_{x_0,r}^{m_r},\ y \in X \setminus C_{x_0,r}^{m_r}$ *ve bazı* $h \in \left[0, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$ *için* T *dönüşümü*

$$m_r(Tx,Ty) - m_{r_{Tx,Ty}} \leq h\left[m_r(x,Ty) - m_{r_{x,Ty}} + m_r(y,Tx) - m_{r_{y,Tx}}\right]$$

büzülme koşulunu ve $m_{r_{x,y}} = M_{r_{x,y}}$ koşulunu sağlıyorsa $C^{m_r}_{x_0,r}$, T dönüşümünün bir tek sabit çemberidir.

İspat *Teorem 5.10 un ispatına benzer şekilde $C^{m_r}_{x_0,r}$ ve $C^{m_r}_{x_{0^*},r^*}$ çemberleri, T dönüşümünün iki farklı sabit çemberi olduğu varsayılsın. Bu durumda $u \neq v$ olacak şekilde $u \in C^{m_r}_{x_0,r}$ ve $v \in C^{m_r}_{x_{0^*},r^*}$ noktaları için T nin gerçeklediği büzülme koşulu gereğince*

$$\begin{aligned} m_r(u,v) - m_{r_{u,v}} &= m_r(Tu,Tv) - m_{r_{Tu,Tv}} \leq h\left[m_r(u,Tv) - m_{r_{u,T_v}} + m_r(v,Tu) - m_{r_{v,T_u}}\right] \\ &= h\left[m_r(u,Tv) - m_{r_{u,T_v}} + m_r(v,Tu) - m_{r_{v,T_u}}\right] \\ &= 2h\left[m_r(u,v) - m_{r_{u,v}}\right] \end{aligned}$$

bulunur. Buradan düzenleme ile $(1-2h)\left[m_r(u,v) - m_{r_{u,v}}\right] \leq 0$ sonucuna ulaşır. Ancak $h \in \left[0, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$ olduğundan $2h < 1$ olup $m_r(u,v) - m_{r_{u,v}}$ dir. Ayrıca $m_{r_{x,y}} = M_{r_{x,y}}$ olduğundan dolayı $u = v$ elde edilir. Fakat bu bir çelişki olup varsayım hatalıdır. Böylelikle $C^{m_r}_{x_0,r}$ çemberi, T dönüşümünün bir tek sabit çemberidir.

6. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu tezde alışımış metrik uzayın bir genelleştirilmesi olan rectangular $M-$ metrik uzayda metrik sabit nokta teori alanında(kolunda) çalışılmıştır. Rectangular $M-$ metrik uzay kavramı alışılmış metrik uzayın bir genelleştirilmesi olan $M-$ metrik uzay ile alışılmış metirk uzayın bir başka genelleştirilmesi olan rectangular metrik uzay kavramlarını birleştirir. Dolayısıyla rectangular $M-$ metrik uzay, alışılmış metrik uzay, kısmi metrik uzay, $M-$ metrik uzay, rectangular metrik uzay, kısmi rectangular metrik uzay kavramlarının bir genellemesidir. Klasik sabit nokta teoremi çalışmalarında genel olarak bir uzay üzerinde ele alınarak kendi üzerine dönüşümün hangi koşullar altında sabit noktasının var ve tek olduğu sorusuna odaklanılır. Ancak bir dönüşümün sabit noktalarının kümesi boş küme veya sayılabilir ya da sayılamaz çoklukta eleman içerebilir.

Sabit nokta kümesinin birden çok eleman ihtiva ettiği durumlarda bu noktaların geometrik özelliklerinin araştırılması önemli ve güzel bir problemdir. Özgür ve Taş'ın 2016 yılındaki çalışmaları ile birleşince önemi artmıştır.

Bu tez çalışmasında Özgür vd. 2018 yılındaki çalışmaları ile literatüre kattıkları rectangular $M-$ metrik uzay kavramı ve yine bu çalışmalarda tanıttıkları rectangular $M-$ metrik uzayda çember ve sabit çember tanımlarından hareket ile bu uzayda bir üzerine dönüşümün sabit çemberleri konusu ele alınmıştır. Bu bağlamda bir rectangular $M-$ metrik uzayda bir kendi üzerine dönüşümün sabit çemberinin hangi koşullar altında varolacağı problemlemi yani sabit çemberin varlık koşulları araştırılmış ve bu soruya tespit edilen birçok varlık koşulu ile yanıt verilmiştir.

Sabit çemberin varlık koşulları verildikten sonra bu koşulları sağlayan dönüşümlerin ne zaman birim dönüşüm olacağı sorusu yanıtlanmıştır. Sonrasında rectangular $M-$ metrik uzayda kendi üzerine dönüşümün $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere n adet sabit çembere sahip olabileceği gösterilmiştir. Son olarak da bir dönüşümün hangi koşullar altında bir tek sabit çemberi olacağının yanıtı için çeşitli teoremler verilmiştir. Kısacası rectangular $M-$ metrik uzayda sabit çemberin teklik koşulları verilmiştir.

Bu bağlamda en son genelleştirilmiş metrik uzaylardan biri olan rectangular $M-$ metrik uzaylarda sabit noktaların geometrik özelliklerin incelenmesine dair bir yol açılmıştır. Ayrıca genelleştirilmiş metrik uzaylarda sabit noktaların geometrik özelliklerine

dair yeni sonuçlar bulunmuş olup bu bulgular ile literatürün bu yönüne katkıda bulunulmuştur.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında alışılmış metrik uzayın en son genellemelerinden biri olan rectangular $M-$ metrik uzaylar ele alınmış olup bu uzayda bir kendi üzerine dönüşümün sabit noktalarının kümesinin geometrik özellikleri sabit çember özelinde araştırılmıştır. Temel olarak rectangular metrik uzay ile $M-$ metrik uzay kavramlarının birleştirilmesi fikrine dayanan ve 2018 yılında Özgür vd. tarafından literatüre katılan uzayda yine yazarlar tarafından verilen çember ve sabit çember kavramları ele alınmıştır.

İlk olarak bir rectangular $M-$ metrik uzayda bir kendi üzerine dönüşümün sabit çembere sahip olma koşulları yedi ayrı teorem ile ifade edilmiştir. Bu teoremlerin dört tanesi üçer koşul, biri dört koşul, iki tanesi de beşer koşul içermektedir.

Sonrasında ifade edilen bu yedi teoremdeki koşulları sağlayan herhangi bir dönüşümün ne zaman birim dönüşüm olacağı sorusuna iki teorem ile yanıt verilmiştir. Bir başka deyişle sabit çembere sahip olan bir dönüşüm hangi koşul altında birim dönüşüm olmayacağı yanıtlanmış oldu.

Daha sonra bir rectangular metrik uzayda birden fazla hatta $n \in |n|$ olmak üzere n adet sabit çembere sahip olan dönüşümlerin var olduğu gösterildi. Bu sonuçla birlikte gündeme gelen bir başka önemli problem rectangular $M-$ metrik uzayda bir dönüşümün sabit çemberlerinin tek olması koşullarının ne olduğuna dair ayrı teoremle yanıt verilmiştir. Özetlenirse rectangular $M-$ metrik uzayda bir kendi üzerine dönüşümün sabit çembere sahip olmasına dair varlık ve teklik koşulları belirlenmiştir. Bu sayede metrik sabit nokta teoresi alanında genelleştirilmiş metrik uzayların sabit noktalarının geometrik özelliklerinin incelenmesi çalışmalarına katkıda bulunulmuş ve literatüre yeni varlık ve teklik koşulları eklenmiştir.

Bundan sonraki çalışmalar için bir rectangular $M-$ metrik uzayda diğer bazı temel eğrileri; örneğin elips, hiperbol, Cassini ovali, Apollonius çemberi parabolu gibi eğrileri baz alarak bu eğrilerin sabit kalması için varlık ve teklik koşulları araştırılabilir. Yine bu uzayda bu tezde ele alınan sabit çember konusuna burda yer almayan koşullar ve sonuçlar araştırılabilir. Bunların dışında bu tezde alınan veya yukarıda ifade edilen diğer eğrilerin sabit olması için varlık ve teklik koşulları rectangular $M-$ metrik uzaydan farklı bir başka genelleştirilmiş metrik uzayda ele alınabilir. Bu noktada ifade edilen kavramların uygulamasına yönelik uygulama alanı araştırılması yapılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Asadi, M., Karapınar, E., Salimi, P., 2014, New extension of p-metric spaces with some fixed-point results on M-metric spaces. J. Inequal. Appl. 2014, 18.

Branciari, A., 2000, A fixed point theorem of Banach–Caccioppoli type on a class of generalized metric spaces. Publ. Math. Debrecen, 57(1–2), 31–37.

Abbas, M., Ali B., Suleiman Y.I., 2015, Generalized coupled common fixed point results in partially ordered Ametric spaces. Fixed Point Theory and Applications., 2015:64.

Agarwal, R.P., Karapınar E., O'Regan, D., Francisco A., 2015, Fixed Point Theory in Metric Type Space, Springer.

Banach, S., 1922, Sur les oprations dans les ensembles abstraits et leur applications auxequations integrales, Fund. Math., 3, 133-181.

Bianchini, R.M.T., 1972, Su un problema di S. Reich aguardante la teoría dei punti fissi, Boll. Un. Mat. Ital., 5, 03-108.

Ciric, L.B., 1971, Generalized contractions and fixed-point theorems, Publications del'Institut Mathematique, 12, 19-26.

Chatterjea, S.K., 1972, Fixed point theorem, Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences, 25, 727 –730.

Dhage, B.C., 1992, Generalized metric spaces and mapping with fixed point, Bull. Cal. Math. Soc., 84, 329–336.

Dhage, B.C., 1994, Generalized metric space and topological structure II, Pure Appl. Math. Sci., 40, 37–41.

Dhage, B.C., 2000, Generalized metric space and topological structure I, An. Stiint. Univ. Al.I, Cuza. Iazi, Mat (ANS) 46, 3–24.

Khonsi, M. A., Ben-El-Mechaiekh, H., Schroeder, B., 2014, Recent Contributions to Fixed Point Theory and Its Applications, Abstract and Applied Analysis, Article ID:329815.

Fréchet, M., 1906, Sur quelques points du calcul fonctionnel, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 22, 1–74.

Fréchet, M., 1926, Les espaces abstrait topologiquement affine, Acta Math., 47, 2552.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Gähler, S., 1963, 2Metriche raume und ihre topologische strüktüre, Math. Nachr. 26, 115–148

Gähler, S., 1966, Zur geometric 2metriche raume, Revue Roumaine de Math. Pures Appl., XI, 664–669

Bucur, A.,2017 About Applications of The Fixed Point Theory, Scientific Bulletin , 22(1), 13-17

Hardy, G. E., Rogers, T. D., 1973, A generalization of a fixed point theorem of Reich, Canad. Math. Bull., 201-206.

Kannan, R., 1969, Some results on fixed points II, Am. Math. Mon., 76, 405 –408.

Kirk W.A., and Sims B., 2001, Handbook of Metric Fixed Point Theory, Kluwer Academic Publishers.

Kreyszig, E., 1978, Introductory functional analysis with applications, Wiley Classics Library.

Mlaiki, N.; Taş, N.; Özgür, N.Y., 2018, On the fixed-circle problem and Khan type contractions. Axioms, 7, 80.

Mlaiki, N.; Çelik, U.; Taş, N.; Özgür, N.Y., 2018, Mukheimer, A. Wardowski type contractions and the fixed-circle problem on S-metric spaces. J. Math. 2018, 1–9.

Mlaiki N., Ozgur N., Tas N., 2021, New fixed-circle results related to Fc-contractive and Fc-expanding mappings on metric spaces, arXiv:2101.10770.

Matthews, S. G., 1994, Partial metric topology, Proc. 8th Summer Conference on General Topology and Applications, Ann. New York Acad. Sci., 728, 183-197.

Mustafa, Z., Sims, B., 2006, A new approach to generalized metric spaces, J. Nonlinear Convex Anal. 7, 289–297.

Özgür, N.Y.; Taş, N., 2017, Some fixed-circle theorems on metric spaces. Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 1–17.

Özgür, N.Y.; Taş, N.; Çelik, U., 2017, New fixed-circle results on S-metric spaces. Bull. Math. Anal. Appl., 9, 10–23.