n. Mertebeden Tam G ve $S-$Metrik Uzaylardan Yeni Tam n. Mertebeden G ve $S-$Metrik Uzayların Elde Edilişi Üzerine

Esengül Telli

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı

Haziran 2022

On Obtaining New Complete n th Order G and $S-$Metric Spaces From n th Order Complete G and $S-$Metric Spaces

Esengül Telli

MASTER OF SCIENCE

Deparment of Mathematics - Computer

June 2022

n. Mertebeden Tam G ve $S-$Metrik Uzaylardan Yeni Tam n. Mertebeden G ve $S-$Metrik Uzayların Elde Edilişi Üzerine

Esengül Telli

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Temel Ermiş

Haziran 2022

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Temel Ermiş danışmanlığında hazırlamış olduğum "$n.$ Mertebeden Tam G ve $S-$Metrik Uzaylardan Yeni Tam $n.$ Mertebeden G ve $S-$Metrik Uzayların Elde Edilişi Üzerine" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 21/06/2022

Esengül Telli

ÖZET

Tam bir metrik uzayda tanımlanan sürekli bir H dönüşümü için bazı $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere H^n büzülme dönüşümü iken H dönüşümünün bir tek sabit noktası olduğu iyi bilinen bir gerçek (Bonsall, 1962; Edwards, 1965; Kolmogorov, 1957) olmasına rağmen, 1968 yılında V. B. Bryant (Bryant, 1968) bu ifade de kullanılan süreklilik varsayımının gerekli olmadığını ispatlamıştır. 2018 yılında Yaé Ulrich O. Gaba ise bu ifadeyi $G-$metrik uzaya taşımış, ayrıca H dönüşümünün de büzülme olacağı yeni bir $G-$metrik uzay inşa etmiştir. Dahası H dönüşümünün düzgün sürekli olması durumunda yeni inşa ettiği $G-$metrik uzayının da tam olacağını ispatlamıştır (Gaba, 2018). Bu tez çalışmasında, Gaba tarafından verilen teknikler kullanılarak bu ifadenin G_n ve A_b-metrik uzaylarda da geçerli olduğu ispatlanacak, ayrıca tam bir G_n ve A_b-metrik uzaydan sırasıyla yeni tam G_n ve A_b-metrik uzaylar inşa edilecektir. Bu amaç doğrultusunda tez aşağıdaki şekilde organize edilmiştir;

Birinci bölümde genelleştirilmiş metrik uzaylardan olan G_n-metrik ve A_b-metrik uzayların ortaya çıkışının tarihsel gelişimine yer verilmiştir.

İkinci kısımda bu tezin amacı doğrultusunda yöntem olarak kullanılacak temel teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü kısımda tezde kullanılan temel kavramlar, tanım ve teoremler verilmiştir.

Dördüncü kısımda tam bir G_n-metrik uzaydan başka tam bir G_n-metrik uzayın nasıl elde edildiği gösterilmiştir. Ayrıca beşinci bölümde de bu inceleme A_b-metrik uzay için yapılmıştır.

Altıncı ve yedinci bölümlerde tezde elde edilen bulgular ve sonuçlar ifade edilmiş ve ilerde yapılabilecek çalışmalar için tavsiyelerde bulunulmuştur.

Anahtar kelimeler: $G-$Metrik Uzay, $S-$Metrik Uzay, $A-$Metrik Uzay, A_b-Metrik Uzay, G_n-Metrik Uzay, Tamlaştırma

SUMMARY

Although it is a well-known fact that the continuous mapping H has a single fixed point (Bonsall, 1962; Edwards, 1965; Kolmogorov, 1957) when the H^n is the contraction in a complete metric space, in 1968 V. B. Bryant (Bryant, 1968) proved that the continuity assumption used in this statement is not necessary. In 2018, Yaé Ulrich O. Gaba carried this statement to the $G-$metric space and constructed a new $G-$metric space where the mapping H would also be contraction. Moreover, he proved that the newly constructed $G-$metric space would be complete if the mapping H was uniformly continuous (Gaba, 2018). In this thesis, it will be proved that this statement is valid in G_n and A_b-metric spaces using the techniques given by Gaba, and a new complete G_n and A_b-metric spaces will be constructed from a complete G_n and A_b-metric space, respectively.

In the first part, the historical development of the G_n-metric and A_b-metric spaces which are generalized metric spaces, is given.

In the second part, the fundamental theorems to be used as method for the purpose of this thesis are given.

In the third part the fundamental concepts, definitions and theorems used in the thesis are given.

In the fourth part it is shown how to obtain a complete G_n-metric space other than a complete G_n-metric space. In addition, in the fifth part, this examination is made for A_b-metric space.

In the sixth and seventh part, the findings and results obtained in the thesis are explained and recommendations for future studies are given.

Key Words: $G-$Metric Space, $S-$Metric Space, $A-$Metric Space, A_b-Metric Space, G_n-Metric Space, Completeness

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET . . . . . **vi**

SUMMARY . . . . . **vii**

TEŞEKKÜR . . . . . **viii**

İÇİNDEKİLER . . . . . **ix**

1. GİRİŞ VE AMAÇ **1**

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI **3**

3. TEMEL KAVRAMLAR **4**

4. TAM BİR G_n-METRİK UZAYDAN YENİ TAM BİR G_n-METRİK UZAY ELDE EDİLİŞİ **34**

5. TAM BİR A_b-METRİK UZAYDAN YENİ TAM BİR A_b-METRİK UZAY ELDE EDİLİŞİ **39**

6. BULGULAR VE TARTIŞMA **44**

7. SONUÇ VE ÖNERİLER **45**

KAYNAKLAR DİZİNİ **46**

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Uzaklığın nasıl ölçüleceği matematiğin hep ilgi çekici konularından birisi olmuştur. Öncelikle noktalar arasındaki uzaklık kavramı verilmiş, zamanla noktaların sayısı artarak yada noktalar yerine farklı öğeler alınarak bu kavram genelleştirilmiştir (Ughade vd., 2016; Choi vd., 2018). Günümüzde çok büyük ve karmaşık veri kümeleri nedeniyle de uzaklık fonksiyonunun tanım kümesinin genelleştirilmesi gerekmiştir. Literatürde her ne kadar ikiden fazla öğe arasındaki uzaklığı aynı anda ölçme fikriyle olmasada, Banach sabit nokta teoremini genelleştirmek adına genelleştirilmiş metrik uzaylar inşa edilmiştir. Amacı dışında da olsa, bu genelleştirilmiş metrik uzaylarda ikiden fazla öğe arasındaki uzaklığın aynı anda ölçülebilme imkanı doğmuştur. G_n ve A_b-metrik uzaylar aynı anda n tane nokta arasındaki uzaklığın ölçülebildiği alışılmış metrik uzayların en son genelleştirmeleri olduğu bilinmektedir. Bu tez kapsamında G_n ve A_b-metrik uzayların temel özellikleri verilecektir.

Metrik uzayları genelleştirme Siegfried Gähler ile 1963 yılında başlamıştır (Gähler, 1963). $2-$metrik olarak tanımlanan bu uzaklık fonksiyonunun tanım kümesi aynı kümenin kendisi ile üç kez kartezyen çarpımı olarak alınmış ve aksiyomatik yapısı alışılmış metrik uzaydan farklı olarak verilmiştir. Böylece Siegfried Gähler ikiden fazla nokta arasındaki uzaklığı aynı anda ölçebilmenin temelini atmıştır. Ancak vermiş olduğu $2-$metrik uzayda uzaklık fonksiyonun her zaman sürekli olmadığı gösterilmiştir (Ha vd., 1987). Dolayısıyla $2-$metriğin alışılmış metrik uzayın bir genellemesi olmadığı düşünülmektedir.

Daha sonra 1992 yıllında Bapure Dhage, $2-$metrik uzayının aksiyomatik yapısına benzer olarak $D-$metrik uzayı literatüre kazandırmıştır (Dhage, 1992). Fakat 2003 yılında Zead Mustafa ve Brailey Sims $D-$metrik uzayda süreklilik ve yakınsaklık gibi bazı topolojik kavramlarda problemler olduğunu göstermiştir (Mustafa vd., 2003).

$2-$metrik ve $D-$metrik uzayların birbirine benzeyen aksiyomatik yapılarından kaynaklanan, bilinen bazı topolojik kavramlardaki eksiklikler ve hatalardan dolayı bu uzayların aksiyomatik yapılardan tamamen bağımsız olarak, 2006 yılında $G-$metrik kavramı verilmiştir (Mustafa vd., 2006). $G-$metrik uzayda da 2 ve $D-$metrik uzaylarda olduğu gibi ikiden fazla nokta arasındaki uzaklığın aynı anda ölçülebilmesi oldukça önemli ve değerlidir.

2006 dan 2012 yılına gelindiğinde Shaban Sedghi vd. $S-$metrik uzayı tanıtmışlardır (Sedghi vd., 2012). Kuşkusuz, $S-$metrik uzay alışılmış metrik uzayın bir genellemesi olup

literatürde $G-$metrik uzayın her zaman simetrik olmayışının bir eksiklik olduğu bu eksikliğin ise $S-$metrik uzayla giderilebileceğine dair bazı görüşler mevcuttur. 2015 yılında ise Mujahid Abbas vd. $S-$metrik uzayı n mertebeye genelleyerek n tane nokta arasındaki uzaklığın aynı anda ölçülebildiği bir metrik uzay olan $A-$metrik uzay kavramını tanıtmışlardır. Bu uzay $S-$metrik uzayın genellemesi ve aynı zamanda literatürdeki alışılmış metrik uzayın en son genellemelerden biridir (Abbas vd., 2015). Monoj Ughade vd. 2016 yılında ise $A-$metrik uzay kavramını A_b-metrik uzay kavramına genişletmişlerdir (Ughade vd., 2016).

2014 yılında ise Antonio Francisco Roldan vd. $G-$metrik uzay kavramını genelleştirerek $n.$ mertebeden $G-$metrik uzay kavramını tanıtmışlardır (Roldan vd., 2014). Bu genelleştirmeye benzer olarak aksiyomatik yapısı aynı olmayan farklı bir tip genelleştirme Hayoung Choi vd. tarafından verilmiştir (Choi vd., 2018).

Alışılmış metrik uzayın tüm bu genelleştirme sürecinde yapılan genellemeler sadece burada bahsedilen uzaylarla sınırlı değildir. Halen bu uzaylar üzerine çalışmalar devam etmektedir. Burada hemen belirtmek gerekir ki günümüze kadar devam eden bu genellemeler ile ilgili literatürdeki çalışmalar incelendiğinde, bu genellemelerin arkasında yatan temel mantığın aynı anda n tane nokta arasındaki uzaklığı ölçebilme fikri olduğu değil, ünlü Banach sabit nokta teoremini genellemek adına yapıldığı görülmektedir. Banach sabit nokta teoreminin birçok genellemesi çeşitli genelleştirilmiş metrik uzaylarda incelenmiştir.

Örneğin tam bir metrik uzayda tanımlanan sürekli bir H dönüşümü için bazı $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere H^n büzülme dönüşümü iken H dönüşümünün bir tek sabit noktası olduğu iyi bilinen bir gerçek (Bonsall, 1962; Edwards, 1965; Kolmogorov, 1957) olmasına rağmen, 1968 yılında V. B. Bryant (Bryant, 1968) bu ifade de kullanılan süreklilik varsayımının gerekli olmadığını ispatlamıştır. 2018 yılında Yaé Ulrich O. Gaba ise bu teoremi $G-$metrik uzaya taşımış ayrıca H dönüşümünün de büzülme olacağı yeni bir $G-$metrik uzay inşa etmiştir. Dahası H dönüşümünün düzgün sürekli olması durumunda yeni inşa ettiği $G-$metrik uzayınında tam olacağını ispatlamıştır (Gaba, 2018). Benzer olarak bu tez çalışmasının temel motivasyonu Yaé Ulrich O. Gaba'nın bu çalışmasını A_b ve G_n-metrik uzaylara genelleştirilebileceğini göstermektir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Bu bölümde, bir önceki bölümde bahsedilen Yaé Ulrich O. Gaba'nın 2018 yılındaki "Related $G-$metrics and Fixed Points" başlıklı makalesinden elde edilen temel sonuçlar verilecektir.

Teorem 2.1 (Gaba, 2018 Corollary 1.2) *(M,d) bir tam $G-$metrik uzay ve $H : M \to M$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $n \in (1,\infty)$ ve her $k,l,m \in M$ için*

$$d\left(H^n k, H^n l, H^n m\right) \leq \lambda d\left(k,l,m\right)$$

olacak şekilde $\lambda \in [0,1)$ varsa H dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

Bu teorem bir dönüşümün herhangi bir kuvveti büzülme dönüşümü ise dönüşümün kendisinin de bir tek sabit noktaya sahip olduğunu ortaya koyar. Üstelik dönüşüm için gerekli olan süreklilik gibi koşullar yoktur. Aşağıdaki teorem (Gaba, 2018) referansında verilen Teorem 2.1 ve Teorem 2.3 şeklinde verilmiştir. Bu tez çalışmasının temel amacı bu teoremi G_n ve A_b-metrik uzaylara taşımak olacaktır.

Teorem 2.2 (Gaba, 2018) *(M,d) bir $G-$metrik uzay olsun. $H : (M,d) \to (M,d)$ dönüşümü her $k,l,m \in M$ ve herhangi bir $n > 1$ için, $\beta \in (0,1)$ olmak üzere*

$$d\left(H^n k, H^n l, H^n m\right) \leq \beta d\left(k,l,m\right)$$

eşitsizliğini sağlasın. Ayrıca $\lambda \in \mathbb{R}^+$ ve $\beta^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{\lambda} < 1$ olarak alınsın,

$$d^* \;:\; M \times M \times M \longrightarrow [0,\infty)$$

$$(k,l,m) \longmapsto d^*\left(k,l,m\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i d\left(H^i k, H^i l, H^i m\right)$$

şeklinde tanımlı d^* uzaklık fonksiyonu verilsin. Bu takdirde;
(i) d^*, X üzerine bir $G-$metriktir,
(ii) H büzülme katsayısı $\frac{1}{\lambda}$ olacak şekilde (M,d^*) $G-$metrik uzayında bir büzülme dönüşümüdür,
(iii) H büzülme dönüşümü düzgün sürekli ve (M,d) tam $G-$metrik uzayı ise (M,d^*) da tam bir $G-$metrik uzaydır.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamız doğrultusunda ilerleyen aşamalarda kullanılacak olan tanım, teorem ve bazı kavramlar hatırlatılmıştır. Bu hatırlatmalar sadelik ve tezi sıkıcı kılmamak adına özet niteliğinde verilmiş olup bu kısımda yer verilen hükümlerin ispatlarına değinilmemiştir. Detaylı bilgi için ilgili referanslara bakılabilir.

Uzaklık belirli bir kümenin alınan herhangi iki elemanının birbirlerinden ne kadar uzakta olduğunun bir ölçüsüdür. Matematikte ve diğer birçok bilimsel alanda uzaklık fonksiyonu oldukça önemli bir kavramdır.

Uzaklık fonksiyonu tanımı ilk kez Maurice Fréchet tarafından 1906 yılında tanımlanmıştır (Frechet, 1906). Daha sonrasında Hausdorff belirli şartları sağlayan bu uzaklık fonksiyonuna metrik, çalışılan uzay ve uzaklık fonksiyonundan oluşan sıralı ikiliye metrik uzay adını vermiştir. Bu şekilde başlayan metrik kavramını genelleştirmek için birçok çalışma yapılmıştır. Alışılmış uzaklık fonksiyonunu genelleştirmeye yönelik ilk girişim 1963 yılında Siegfried Gähler tarafından yapılmıştır (Gähler, 1963). Banach sabit nokta teoremini genellemek adına alışılmış metrik uzayın tanım kümesinde verilen kümenin ikili kartezyen çarpımı $2-$metrik uzayda kümenin üçlü kartezyen çarpımı alınarak aşağıdaki gibi tanımlanmıştır. Burada bahsedilen kümeler farklı olmayıp aynı kümelerdir.

Tanım 3.1 *$M \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $d : M \times M \times M \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $k, l, m, a \in X$ için*
(i) Herhangi $k \neq l$ elemanı için $d(k, l, m) \neq 0$ olacak şekilde en az bir $m \in X$ vardır.
(ii) $k = l$ veya $l = m$ veya $k = m$ ise $d(k, l, m) = 0$
(iii) $d(k, l, m) = d(k, m, l) = d(l, k, m) = d(l, m, k) = d(m, k, l) = d(m, l, k)$
(iv) $d(k, l, m) \leq d(k, l, a) + d(k, a, m) + d(a, l, m)$
şartlarını sağlıyorsa d fonksiyonuna $2-$metrik, (M, d) ikilisine de $2-$metrik uzay denir.

Siegfried Gähler'in tanımladığı $2-$metrik fonksiyonunun her zaman sürekli olmadığından alışılmış metrik uzayın bir genellemesi olmadığı gösterilmiştir (Ha vd., 1987). Böylece $2-$metrik uzay, alışılmış metrik uzayın bir genellemesi olmadığı söylenebilir.

Daha Sonra Bapure Dhage 1992 yılında alışılmış metrik uzayları genellemek adına aşağıdaki gibi $D-$metrik kavramını tanıtmıştır (Dhage, 1992).

Tanım 3.2 *$M \neq \emptyset$ bir küme olsun. $d : M \times M \times M \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $k, l, m, a \in X$ için*
$(D1)\ d(k,l,m) = 0 \Longleftrightarrow k = l = m$
$(D2)\ d(k,l,m) = d(k,m,l) = d(l,k,m) = d(l,m,k) = d(m,k,l) = d(m,l,k)$
$(D3)\ d(k,l,m) \leq d(k,l,a) + d(k,a,m) + d(a,l,m)$
şartlarını sağlıyorsa d fonksiyonuna $D-$metrik, (M,d) ikilisine de $D-$metrik uzay denir.

$D-$metrik uzayın topolojik yapısı incelendiğinde, bazı temel topolojiksel kavramlarda sıkıntılar olduğu tespit edilmiştir. Örneğin açık yuvar tanımının tek türlü olmamasından kaynaklı, bu $D-$metrik uzay birbirine denk olmayan farklı topolojik uzaylar üretmektedir (Mustafa vd., 2003). Dolayısıyla, $D-$metrik uzay üzerine kuşkular uyanmaktadır. Bunun üzerine Zead Mustafa ve Brailey Sims 2006 yılında $G-$metrik uzayı tanıtmışlardır (Mustafa vd., 2006).

Tanım 3.3 *$M \neq \emptyset$ bir küme olsun. $d : M \times M \times M \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $k, l, m, a \in X$ için*
$(G1)\ d(k,l,m) = 0$ *ise* $k = l = m$
$(G2)\ k \neq l$ *için* $d(k,k,l) > 0$
$(G3)\ l \neq m$ *için* $d(k,k,l) \leq d(k,l,m)$
$(G4)\ d(k,l,m) = d(k,m,l) = d(l,k,m) = d(l,m,k) = d(m,k,l) = d(m,l,k)$
$(G5)\ d(k,l,m) \leq d(k,a,a) + d(a,l,m)$
şartlarını sağlıyorsa d fonksiyonuna $G-$metrik, (X,d) ikilisine ise $G-$metrik uzay denir.

Örnek 3.1 *$M \neq \emptyset$ bir küme olsun. $d_1 : M \times M \times M \to [0, \infty)$ fonksiyonu*

$$d_1(k,l,m) = \begin{cases} 0, & k = l = m \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı ise M üzerinde $G-$metriktir. Özel olarak bu metriğe ayrık $G-$metrik adı verilir (Önçırak, 2020).

Örnek 3.2 *$M \neq \emptyset$ bir küme olsun. $d_2 : M \times M \times M \to [0, \infty)$ fonksiyonu*

$$d_2(k,l,m) = \begin{cases} 0, & \text{değişkenlerin hepsi eşit} \\ 1, & \text{değişkenlerin herhangi ikisi eşit} \\ 2, & \text{değişkenlerin hepsi farklı} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı ise M üzerinde $G-$metriktir (Önçırak, 2020).

Örnek 3.3 $M = \mathbb{R}^+$ *olsun.* $d_3 : M \times M \times M \to [0, \infty)$ *fonksiyonu*

$$d_3(k,l,m) = \begin{cases} 0, & k = l = m \\ \max\{k,l,m\}, & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı ise M *üzerinde* $G-$*metriktir (Önçırak,* 2020*).*

Aşağıda verilen örnekte bir $G-$metrik uzay verildiğinde yeni bir $G-$metrik uzayın nasıl elde edileceğine dair bazı örnekler verilmiştir.

Örnek 3.4 *Bir* (M,d) $G-$*metrik uzayı alınsın.* $\lambda \in [0,\infty)$ *olmak üzere her* $k,l,m \in X$ *için*

$$d_4(k,l,m) = \lambda d(k,l,m)$$

$$d_5(k,l,m) = \min\{\lambda, d(k,l,m)\}$$

$$d_6(k,l,m) = \frac{d(k,l,m)}{\lambda + d(k,l,m)}$$

şeklinde tanımlansın. Verilen $d_4,\ d_5,\ d_6$ *fonksiyonları* M *uzayı üzerinde* $G-$*metriktirler (Önçırak,* 2020*).*

Aşağıdaki örnek bir alışılmış metrik uzay yardımıyla bir $G-$metrik uzayın nasıl türetilebileceğine dairdir.

Örnek 3.5 (M,d) *bir alışılmış metrik uzay olsun. Her* $k,l,m,a \in X$ *için*

$$\begin{aligned} d_7 :\ M \times M \times M &\to [0,\infty) \\ (k,l,m) &\longmapsto d_7(k,l,m) := \max\{d(k,l), d(l,m), d(m,k)\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d_8 :\ M \times M \times M &\to [0,\infty) \\ (k,l,m) &\longmapsto d_8(k,l,m) := d(k,l) + d(l,m) + d(m,k) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı fonksiyonlar M *üzerinde birer* $G-$ *metriklerdir. Ayrıca bu* $G-$*metrikler*

$$d_7(k,l,m) \leq d_8(k,l,m) \leq 3d_7(k,l,m)$$

eşitsizliklerini sağlar. Dolayısıyla d_7 *ve* d_8 *denk* $G-$*metriklerdir (Önçırak,* 2020*).*

Herhangi bir $G-$metrik uzay verildiğinde bir alışılmış metrik uzay tanımlamak adına aşağıdaki örnek verilmiştir.

Örnek 3.6 *(M,d) bir $G-$metrik uzay olsun. Her $k,l,m,a \in M$ için*

$$\begin{aligned} d_9: \quad M \times M \quad &\to \quad [0,\infty) \\ (k,l) \quad &\longmapsto \quad d_9(k,l) := \max\{d(k,k,l), d(k,l,l)\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d_{10}: \quad M \times M \quad &\to \quad [0,\infty) \\ (k,l) \quad &\longmapsto \quad d_{10}(k,l) := d(k,k,l) + d(k,l,l) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı fonksiyonlar M üzerinde birer alışılmış metriklerdir. Ayrıca bu alışılmış metrikler için

$$d_9(k,l,m) \leq d_{10}(k,l,m) \leq 2d_9(k,l,m)$$

eşitsizliklerini sağlar. Dolayısıyla d_9 ve d_{10} denk metriklerdir (Önçırak, 2020*).*

Örnek 3.7 *$M = \{k,l\}$ olmak üzere $d_{11}: M \times M \times M \to [0,\infty)$ fonksiyonu*

$$\begin{aligned} d_{11}(k,k,k) &= d_{11}(l,l,l) = 0 \\ d_{11}(k,k,l) &= 1 \\ d_{11}(k,l,l) &= 2 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan d_{11} fonksiyonu M üzerinde bir $G-$ metriktir. Ancak bir alışılmış metrik uzaydan türetilmez (Önçırak, 2020*). Dolayısıyla her $G-$metrik uzayın bir alışılmış metrik uzaydan üretildiği söylenemez.*

Tanım 3.4 *(M,d) bir $G-$metrik uzayı olmak üzere her $k,l \in M$ için*

$$d(k,k,l) = d(k,l,l)$$

eşitliği sağlanıyorsa (M,d) $G-$metrik uzayına simetrik $G-$metrik uzay denir (Önçırak, 2020*).*

Not: Yukarıda verilen örneklerdeki (M,d_1), (M,d_2), (M,d_3), (M,d_9) ve (M,d_{10}) $G-$metrik uzayları simetriktir. Örnek 3.4 teki (M,d) $G-$metrik uzayı simetrik ise

bu $G-$metrik yardımıyla üretilen (M,d_4), (M,d_5), (M,d_6) $G-$metrik uzayları da simetriktir. Örnek 3.7 de verilen d_{11} fonksiyonu tanımından $1=d_{11}(k,k,l)\neq d_{11}(k,l,l)=2$ olduğundan (M,d_{11}) $G-$metrik uzayı simetrik değildir.

Bundan sonraki kısımda $G-$metrik uzayın topolojik yapısıyla ilgili temel kavramlar Zead Mustafa ve Brailey Sims'in (Mustafa vd., 2006) referansındaki makalesinden alınarak verilecektir.

Tanım 3.5 *(M,d) bir $G-$metrik uzay olmak üzere $a\in M$ ve $r>0$ reel sayısı için*

$$B(a,r)=\{l\in M: d(a,l,l)<r\}$$

kümesine a merkezli r yarıçaplı açık yuvar,

$$D(a,r)=\{l\in X: d(a,l,l)\leq r\}$$

kümesine a merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar,

$$S(a,r)=\{l\in X: d(a,l,l)=r\}$$

kümesine de a merkezli r yarıçaplı yuvarın yüzeyi denir.

Tanım 3.6 *(M,d) bir $G-$metrik uzay, olmak üzere (k_p), $G-$metrik uzayda bir dizi olsun;*
(i) Her $\varepsilon>0$ ve $k_0\leq p,r$ özelliğindeki her $p,r\in\mathbb{N}$ için $d(k_p,k_r,k)\leq\varepsilon$ olacak şekilde bir $k_0\in\mathbb{N}$ sayısı varsa (k_p) dizisine $k\in M$ noktasına $G-$yakınsaktır denir. Kısaca,

$$\lim_{p,r\to\infty} d(k_p,k_r,k)=0 \text{ veya } (k_p)\to k$$

gösterimlerinden herhangi biri ile gösterilir.
(ii) Her $\varepsilon>0$ ve $k_0\leq p,r,s$ özelliğindeki her $p,r,s\in\mathbb{N}$ için

$$d(k_p,k_r,k_s)\leq\varepsilon$$

biçiminde bir $k_0\in\mathbb{N}$ sayısı varsa (k_p) dizisine $G-$Cauchy dizisi denir.
(iii) Her $G-$Cauchy dizisi $G-$yakınsak diziyse (M,d) $G-$metrik uzayına tam $G-$metrik uzay denir.

Örnek 3.8 *Örnek 3.5 te verilen d_7 uzaklık fonksiyonu için $(\mathbb{R},d_7)$ sıralı ikilisi bir $G-$metriktir. Bu uzayda $(k_p)=\frac{1}{p}$ kuralı ile verilen (k_p) dizisi $G-$yakınsaktır. Çünkü $p<r$*

olmak üzere

$$\begin{aligned} d_7(k_p, k_r, 0) &= d_7\left(\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{r}, 0\right) \\ &= \max\left\{d\left(\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{r}\right), d\left(\tfrac{1}{r}, 0\right), d\left(0, \tfrac{1}{p}\right)\right\} \\ &= d\left(\tfrac{1}{p}, 0\right) \end{aligned}$$

olur. $p \to \infty$ *iken* $\lim d\left(\frac{1}{p}, 0\right) = 0$ *olduğundan* (k_p) *dizisi* 0 *a* $G-$*yakınsaktır.*

Örnek 3.9 *Örnek* 3.5 *te verilen* d_7 *uzaklık fonksiyonu için* $(\mathbb{R}, d_7)$ *sıralı ikilisi bir* $G-$*metriktir. Bu uzayda* $(k_p) = \frac{1}{p}$ *kuralı ile verilen* (k_p) *dizisi* $G-$*Cauchy dizisidir. Çünkü* $p < r < s$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} d_7(k_p, k_r, k_s) &= d_7\left(\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{r}, \tfrac{1}{s}\right) \\ &= \max\left\{d\left(\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{r}\right), d\left(\tfrac{1}{r}, \tfrac{1}{s}\right), d\left(\tfrac{1}{s}, \tfrac{1}{p}\right)\right\} \\ &= d\left(\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{s}\right) \end{aligned}$$

olur. $p \to \infty$ *iken* $\lim d\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{s}\right) = 0$ *olduğundan* (k_p) *dizisi* $G-$*Cauchy dizisidir.*

Yardımcı Teorem 3.1 *(Önçırak,* 2020*, Yardımcı Teorem* 4.7*)* (M, d) *bir* $G-$*metrik uzay olsun. Bu uzaydaki her* $G-$*yakınsak dizinin limiti tektir.*

Yardımcı Teorem 3.2 *(Önçırak,* 2020*, Yardımcı Teorem* 4.10*)* (M, d) *bir* $G-$*metrik uzay olsun. Bu uzaydaki her* $G-$*yakınsak dizisi aynı zamanda bir* $G-$*Cauchy dizisidir.*

Tanım 3.7 (M, d) *ve* (M^*, d^*) *birer* $G-$*metrik uzay olsun.* $f : M \to M^*$ *fonksiyonu* $a \in M$ *noktası alınsın. Her* $\varepsilon > 0$ *ve her* $B_{d^*}(f(a), \varepsilon)$*,* G *açık yuvarı için* $f(B_d(a, \delta)) \subseteq B_{d^*}(f(a, \varepsilon))$ *olacak şekilde bir* $\delta > 0$ *varsa* f *fonksiyonuna* $a \in M$ *noktasında* $G-$*süreklidir denir. Eğer* f *fonksiyonu* M *kümesinin tüm noktalarında* $G-$*sürekli ise* M *kümesi üzerinde* $G-$*süreklidir denir. Yani her* $\varepsilon > 0$ *ve* $a \in M$ *için* $d(k_0, a, a) < \delta$ *iken* $d^*(f(k_0), f(a), f(a)) < \varepsilon$ *olacak şekilde* $\delta > 0$ *varsa* $f : M \to M^*$ *fonksiyonu* $a \in M$ *noktasında* $G-$*süreklidir.*

Tanım 3.8 *(M,d) ve (M^*,d^*) birer $G-$metrik uzay olmak üzere bir $f : M \to M^*$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $d(k_0,a,a) < \delta$ olduğunda $d^*(f(k_0),f(a),f(a)) < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu a noktasında düzgün süreklidir denir.*

Tanım 3.9 *Bir (M,d) $G-$metrik uzayında H bir dönüşüm olsun. Eğer her $k,l \in M$ için*

$$d(Hk,Hl,Hm) \leq \lambda d(k,l,m)$$

olacak şekilde $\lambda \in [0,1)$ sabiti var ise H dönüşümüne bir büzülme dönüşümü denir.

Teorem 3.1 *($G-$metrik uzaylarda Banach Sabit Nokta Teoremi) (M,d) tam bir $G-$metrik uzay ve $H : M \to M$ bir büzülme dönüşümü olsun. O halde H dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.*

İspat *$H : M \to M$ büzülme dönüşümü M tanım kümesinin her bir elemanı bir kural ile M değer kümesinin en az bir elemanı ile eşleşeceğinden her $p \in \mathbb{N}$ için $k_{p+1} = H(k_p)$ eşitliği yazılabilir. Bu eşitlik için aşağıdaki iki durum söz konusudur;*

1. Durum : $k_{p+1} = k_p$ ise k_p noktası H dönüşümünün sabit noktasıdır.

2. Durum : $k_{p+1} \neq k_p$ ise H büzülme dönüşümü olduğundan

$$\begin{aligned} d(k_{p+1},k_{p+2},k_{p+3}) &\leq d(Hk_p,Hk_{p+1},Hk_{p+2}) \\ &\leq \lambda d(k_p,k_{p+1},k_{p+2}) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\leq \lambda^{p+1} d(k_0,k_1,k_2) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $\lambda \in [0,1)$ olduğundan $p \to \infty$ iken $d(k_{p+1},k_{p+2},k_{p+3}) \to 0$ yakınsadığı elde edilir. Dolayısıyla (k_p) dizisi, (M,d) uzayında bir $G-$Cauchy dizisidir (∴ Yardımcı Teorem 3.2). Ayrıca (M,d) tam bir $G-$metrik uzay olduğundan $\lim_{p\to\infty} k_p = L$ olacak şekilde bir $L \in M$ vardır.
H büzülme dönüşümü olduğundan $d(k_p,H(L),H(L)) \leq \lambda d(k_p,L,L)$ eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin $p \to \infty$ iken her iki tarafında limiti alınırsa $d(L,H(L),H(L)) \leq d(L,L,L) = 0$ eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikten $d(L,H(L),H(L)) = 0$ sonucu elde edilir ki $(G1)$ aksiyomundan bu $H(L) = L$ olması

demektir. Böylece L nin H büzülme dönüşümünün sabit noktası olduğu bulunur. Bu sabit noktanın tekliği ise aşağıdaki gibi gösterilecektir;

H büzülme dönüşümünün birbirinden farklı L_1 ve L_2 gibi iki tane sabit noktası olduğu varsayılsın. Yani, $L_1 \neq L_2$ olmak üzere $H(L_1) = L_1$ ve $H(L_2) = L_2$ olsun.

$$\begin{aligned} d(L_1, L_1, L_2) &= d(H(L_1), H(L_1), H(L_2)) \\ &\leq \lambda d(L_1, L_1, L_2) \qquad \because \text{ } H \text{ büzülme dönüşümü} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik $\lambda \in [0,1)$ olduğu için ancak $d(L_1, L_1, L_2) = 0$ olması ile sağlanır. Bu ise $L_1 = L_2$ anlamına gelir. Ancak başlangıçta bu elemanlar birbirinden farklı alındığından bu bir çelişki olup, H büzülme dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

Alışılmış metrik uzay ve $G-$metrik uzaydan elde edilen topolojiler birbirine denktir. Dolayısıyla $G-$metrik uzay üzerinde yapılan çalışmalar topolojik olarak değerli olmadığı düşünülebilir. Ancak burada hemen belirtmek gerekir ki bu yapılarda izometrik denklik yoktur. Böylece alışılmış metrik uzay ve $G-$metrik uzayın geometrileri birbirlerinden farklıdır. Dolayısıyla bu uzayda çalışmak geometri açısından önemlidir.

$G-$metriği $n.$ mertebeye taşımak için literatürde iki tane çalışma bulunmaktadır. İlki 2014 yılında Antonio Francisco Roldan vd. nin "$G-$Metric spaces in any number of arguments and related fixed-point theorems" başlıklı eseridir (Roldan vd., 2014). Diğeri ise Hayoung Choi vd. nin 2018 de yaptığı "Structure for $g-$Metric Spaces and Related Fixed Point Theorems" başlıklı eseridir (Choi vd., 2018). İkisi arasındaki benzerlikler ve farklılıkların görülmesi adına bu makalelerdeki temel kavramlara aşağıdaki gibi sırasıyla yer verilmiştir.

Tanım 3.10 *$M \neq \emptyset$ bir küme ve $d : \overbrace{M \times M \times \ldots \times M}^{n \text{ tane}} \to [0, \infty)$ fonksiyonu*
(G_n^*1) $d(k, k, \ldots, k) = 0$
(G_n^*2) $k_1 \neq k_2$ *ise* $d(k_1, k_2, \ldots, k_n) > 0$
(G_n^*3) *σ bir permütasyon fonksiyonu olmak üzere*

$$d\left(k_{\sigma(1)}, k_{\sigma(2)}, \ldots, k_{\sigma(n)}\right) = d(k_1, k_2, \ldots, k_n)$$

(G_n^*4) $d(k_1, k_2, \ldots, k_n) \leq d(k_1, a, \ldots, a) + d(a, k_2, \ldots, k_n)$
(G_n^*5) $k \neq l \neq k_3 \neq k_4 \neq \ldots \neq k_{n-1} \neq k_n$ *ise* $d(k, k, \ldots, k, l) \leq d(k, l, k_3, k_4, \ldots, k_n)$
(G_n^*1), (G_n^*2), (G_n^*3), (G_n^*4) *aksiyomunu sağlıyorsa d fonksiyonuna G_n^*-metriği denir.*

Ayrıca (G_n^*5) *aksiyomunu da sağlarsa* d *fonksiyonunun* n *değişken üzerinde bir* $G-$*metrik olduğu söylenir. Yani* n *değişken üzerinde önceki tanımlanan* $G-$*metriktir.*

Bu tanımdan yararlanarak G_2^*-metrik uzayın bir alışılmış metrik uzay ve G_3^*-metriğinin de Zead Mustafa ve Brailey Sims'in tanımladığı $G-$metriğe karşılık geldiği görülebilir. Bununla birlikte bir G_n^*-metriği G_{n-1}^*-metriğini üretmez. Çünkü d, M üzerinde G_n^*-metriği olsun. $d_{12}, d_{13} : M^{n-1} \to [0,\infty)$ fonksiyonu her $(k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}) \in M^{n-1}$ ve m_0 sabiti için

$$d_{12}(k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}) = d(k_1, k_1, k_2, \ldots, k_{n-1})$$

$$d_{13}(k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}) = d(m_0, k_1, k_2, \ldots, k_{n-1})$$

şeklinde tanımlansın. d_{12} ve d_{13} fonksiyonları G_{n-1}^*-metrik değillerdir. Dolayısıyla d_{12} fonksiyonunun (G_n^*3) aksiyomunu d_{13} fonksiyonunda (G_n^*3) aksiyomunu sağlaması gerekmez.

Örnek 3.10 (M,d) *herhangi bir metrik uzay olsun.* $d : \overbrace{M \times M \times \ldots \times M}^{n \text{ tane}} \to [0,\infty)$ *fonksiyonu*

$$d_{14}(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d(k_i, k_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d(k_i, k_j)$$

şeklinde tanımlansın. Böylece d_{14} *fonksiyonu* n*. mertebeden bir* $G-$*metrik denir.*

Yardımcı Teorem 3.3 (M,d) *bir* G_n^*-*metrik ve* $d : M \times M \to [0,\infty)$ *fonksiyonu her* $k, l \in M$ *için*

$$d_{15}(k,l) = \max\{d(k,l,\ldots,l), d(l,k,\ldots,k)\}$$

şeklinde tanımlı d_{15} *fonksiyonu* M *üzerinde bir alışılmış metriktir.*

Tanım 3.11 (M,d) *bir* G_n^*-*metrik uzay,* $k \in M$ *elemanı için* (k_p) G_n^*-*metrik uzayda bir dizi olarak seçilsin.*
(i) *Her* $\varepsilon > 0$ *sayısına karşılık* $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1} \geq i_0$ *şeklindeki her bir* $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$ *doğal sayısı için* $d\left(k_{i_1}, k_{i_2}, \ldots, k_{i_{n-1}}, k\right) < \varepsilon$ *olacak şekilde bir* $i_0 \in \mathbb{N}$ *sayısı varsa* (k_p) *dizisine* G_n^*-*yakınsaktır denir. Bu*

$$\lim_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1} \to \infty} d\left(k_{i_1}, k_{i_2}, \ldots, k_{i_{n-1}}, k\right) = 0$$

şeklinde gösterilir.
(ii) *Verilen her* $\varepsilon > 0$ *sayısına karşılık* $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1} \geq i_0$ *için*

$$d\left(k_{i_1}, k_{i_2}, \ldots, k_{i_n}\right) < \varepsilon$$

biçiminde bir $i_0 \in \mathbb{N}$ *sayısı varsa* (k_p) *dizisine* G_n^*-*Cauchy dizisi denir.*
(iii) *Her* G_n^*-*Cauchy dizisi* G_n^*-*yakınsak diziyse* (M, d) G_n^*-*metrik uzayına tam* G_n^*-*metrik uzay denir.*

2018 yılında Hayoung Choi vd. G_n-metrik uzayı tanıtmışlardır. Bu uzayda $G-$metriğin tanım kümesi boştan farklı bir kümenin kendisiyle n defa kartezyen çarpılarak oluşturulmuştur. Bundan sonraki kısımda verilecek olan tanım, teorem ve örnekler "Structure for $g-$Metric Spaces and Related Fixed Point Theorems" başlıklı makalesinden alınarak verilmiştir (Choi vd., 2018).

Tanım 3.12 $M \neq \emptyset$ *bir küme olsun.* $d : \overbrace{M \times M \times \ldots \times M}^{n \text{ tane}} \to [0, \infty)$ *fonksiyonu*
$(G_n 1)$ *Her* $k_1, k_2, \ldots, k_n \in M$ *için*

$$d\left(k_1, k_2, \ldots, k_n\right) = 0 \Longleftrightarrow k_1 = k_2 = \ldots = k_n$$

$(G_n 2)$ σ *bir permütasyon fonksiyonu olmak üzere*

$$d\left(k_1, k_2, \ldots, k_n\right) = d\left(k_{\sigma(1)}, k_{\sigma(2)}, \ldots, k_{\sigma(n)}\right)$$

$(G_n 3)$ $\{k_i : i = 1, 2, \ldots, n\} \subsetneq \{l_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$ *olmak üzere her* $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, $(l_1, l_2, \ldots, l_n) \in M^n$ *için*

$$d\left(k_1, k_2, \ldots, k_n\right) \leq d\left(l_1, l_2, \ldots, l_n\right)$$

$(G_n 4)$ *Her* $s, t \in \mathbb{N}$ *için* $s + t = n$ *ve* $k_1, k_2, \ldots, k_s, l_1, l_2, \ldots, l_t, a \in M$ *için*

$$d\left(k_1, , \ldots, k_s, l_1, \ldots, l_t\right) \leq d\left(k_1, , \ldots, k_s, a, a, \ldots, a\right) + d\left(a, a, \ldots, a, l_1, \ldots, l_t\right)$$

şartlarını sağlıyorsa d *fonksiyonuna* G_n-*metrik,* (M, d) *ikilisine ise* G_n-*metrik uzay denir.*

G_n-metrik uzay $G-$metriğin bir genellemesidir. Eğer $n = 3$ alınırsa G_n-metrik, $G-$metrik olacaktır.

Örnek 3.11 *(Ayrık G_n-metrik)*

$M \neq \emptyset$ bir küme olsun. Her $k_1, k_2, \ldots, k_n \in X$ için $d_{16} : \overbrace{M \times M \times \ldots \times M}^{n \text{ tane}} \to [0, \infty)$ fonksiyonu

$$d_{16}(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \begin{cases} 0, & k_1 = k_2 = \ldots = k_n \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan d_{16},fonksiyonu bir G_n-metriktir. Özel olarak ayrık G_n-metrik denir.

Örnek 3.12 *(G_n-çap metrik)*

$$\begin{aligned} d_{17} : \ \mathbb{R}^+ \times \ldots \times \mathbb{R}^+ &\to [0, \infty) \\ (k_1, k_2, \ldots, k_n) &\longmapsto d_{17}(k_1, k_2, \ldots, k_n) := \max_{0 \leq i \leq n} k_i - \min_{0 \leq j \leq n} k_j \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı d_{17} fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ üzerinde bir G_n-metriktir.

Örnek 3.13 *$(M, \|.\|)$ normlu bir uzay olsun.*

$$\begin{aligned} d_{18} : \ \overbrace{M \times M \times \ldots \times M}^{n \text{ tane}} &\to [0, \infty) \\ (k_1, k_2, \ldots, k_n) &\longmapsto d_{18}(k_1, k_2, \ldots, k_n) := \max_{0 \leq i \leq n} \|k_i\| - \min_{0 \leq j \leq n} \|k_j\| \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan d_{18} fonksiyonu bir G_n-metrik değildir. Çünkü verilen d_{18} fonksiyonu $(G_n 2), (G_n 3), (G_n 4)$ aksiyomlarını sağlar ancak $(G_n 1)$ aksiyomunu her zaman sağlamaz (Önçırak, 2020).

Aşağıdaki örnek bir G_n-metrik uzaydan alışılmış bir metrik uzayın üretilmesine dairdir.

Örnek 3.14 *(M, d) bir G_n-metrik uzay olmak üzere*

$$\begin{aligned} d_{19}(k, l) &= d(k, l, \ldots, l) + d(l, k, \ldots, k) \\ d_{20}(k, l) &= d(k, l, \ldots, l) + d(k, k, l, \ldots, l) + \ldots + d(k, \ldots, k, l) \\ d_{21}(k, l) &= \max\{d(k_1, k_2, \ldots, k_n)\} \end{aligned}$$

Verilen d_{19}, d_{20}, d_{21} uzaklık fonksiyonları M üzerinde birer metriklerdir (Önçırak, 2020).

Örnek 3.15 *(Ortalama G_n-metrik)*

(M,d) *bir metrik uzay olmak üzere* $d_{22}:\overbrace{M\times M\times\ldots\times M}^{n\ tane}\to[0,\infty)$ *fonksiyonu*

$$d_{22}(k_1,k_2,\ldots,k_n):=\frac{1}{n^2}\sum_{J=1}^{n}d(k_i,k_j)$$

şeklinde verilsin. O halde d_{22} *fonksiyonu* M *üzerinde bir* G_n-*metriktir.*

Örnek 3.16 *(Maksimum G_n-metrik)*

(M,d) *bir metrik uzay olmak üzere* $d_{23}:\overbrace{M\times M\times\ldots\times M}^{n\ tane}\to[0,\infty)$ *fonksiyonu*

$$d_{23}(k_1,k_2,\ldots,k_n):=\max_{1\leq i,j\leq n}\{d(k_i,k_j)\}$$

şeklinde tanımlanan d_{23} *fonksiyonu* M *üzerinde bir* G_n- *metriktir (Öngırak,* 2020*).*

Tanım 3.13 (M,d) *bir* G_n-*metrik uzay olsun.* $a\in M$ *ve* $r>0$ *reel sayısı için*

$$B(a,r)=\{l\in X:d(a,l,\ldots,l)<r\}$$

kümesine a *merkezli* r *yarıçaplı açık yuvar,*

$$D(a,r)=\{l\in X:d(a,l,\ldots,l)\leq r\}$$

kümesine a *merkezli* r *yarıçaplı kapalı yuvar,*

$$S(a,r)=\{l\in X:d(a,l,\ldots,l)=r\}$$

kümesine de a *merkezli* r *yarıçaplı yuvarın yüzeyi denir.*

Yardımcı Teorem 3.4 (M,d) *bir* G_n-*metrik uzay olsun. Bu takdirde* $k,l,a\in\mathbb{N}$ *için*

$$d(k,\ldots,k,l)\leq(n-1)\,d(k,l,\ldots,l)$$

ve

$$d(k_1,k_2,\ldots,k_n)\leq\sum_{i=1}^{n}d(k_i,a,\ldots,a)$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Tanım 3.14 (M,d) *bir* G_n-*metrik uzay,* (k_p)*,* G_n-*metrik uzayda bir dizi olarak verilsin;*
(i) *Her* $\varepsilon>0$ *sayısına karşılık* $i_1,i_2,\ldots,i_{n-1}\geq i_0$ *şeklindeki her bir* $i_1,i_2,\ldots,i_{n-1}$ *doğal*

sayısı için $d\left(k_{i_1}, k_{i_2}, \ldots, k_{i_{n-1}}, k\right) < \varepsilon$ *olacak şekilde bir* $i_0 \in \mathbb{N}$ *sayısı varsa* (k_p) *dizisine* G_n-*yakınsaktır denir ve* $k \in M$ *noktasına da bu dizinin limiti denir. Kısaca,*

$$\lim_{p\to\infty} d\left(k_p, k_p, \ldots, k_p, k\right) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{p\to\infty} k_p = k$$

şeklinde gösterilir,
(ii) *Verilen her* $\varepsilon > 0$ *sayısına karşılık* $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1} \geq i_0$ *için*

$$d\left(k_{i_1}, k_{i_2}, \ldots, k_{i_n}\right) < \varepsilon$$

biçiminde bir $i_0 \in \mathbb{N}$ *sayısı varsa* (k_p) *dizisine* G_n-*Cauchy dizisi denir,*
(iii) *Her* G_n-*Cauchy dizisi* G_n-*yakınsak diziyse* (M, d) G_n-*metrik uzayına tam* G_n-*metrik uzay denir.*

Örnek 3.17 *Örnek* 3.16 *da verilen* d_{23} *uzaklık fonksiyonu için* $(\mathbb{R}, d_{23})$ *sıralı ikilisi bir* G_n-*metriktir. Bu uzayda* $(k_p) = \frac{1}{p}$ *kuralı ile verilen* (k_p) *dizisi* G_n-*yakınsaktır. Çünkü*

$$\begin{aligned} d_{23}\left(k_p, k_p, \ldots, k_p, 0\right) &= d_{23}\left(\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{p}, \ldots, \tfrac{1}{p}, 0\right) \\ &= \max\left\{d\left(\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{p}\right), \ldots, d\left(\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{p}\right), d\left(\tfrac{1}{p}, 0\right), \ldots, d\left(\tfrac{1}{p}, 0\right)\right\} \\ &= d\left(\tfrac{1}{p}, 0\right) \end{aligned}$$

olur. $p \to \infty$ *iken* $\lim d\left(\frac{1}{p}, 0\right) = 0$ *olduğundan* (k_p) *dizisi* 0 *a* G_n-*yakınsaktır.*

Örnek 3.18 *Örnek* 3.16 *da verilen* d_{23} *uzaklık fonksiyonu için* $(\mathbb{R}, d_{23})$ *sıralı ikilisi bir* G_n-*metriktir. Bu uzayda* $(k_p) = \frac{1}{p}$ *kuralı ile verilen* (k_p) *dizisi* G_n-*Cauchy dizisidir. Çünkü* $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} d_{23}\left(k_{i_1}, k_{i_2}, \ldots, k_{i_n}\right) &= d_{23}\left(\tfrac{1}{i_1}, \tfrac{1}{i_2}, \ldots, \tfrac{1}{i_n}\right) \\ &= \max\left\{d\left(\tfrac{1}{i_1}, \tfrac{1}{i_2}\right), d\left(\tfrac{1}{i_1}, \tfrac{1}{i_3}\right), \ldots, d\left(\tfrac{1}{i_{n-1}}, \tfrac{1}{i_n}\right)\right\} \\ &= d\left(\tfrac{1}{i_1}, \tfrac{1}{i_n}\right) \end{aligned}$$

olur. $p \to \infty$ *iken* $\lim d\left(\frac{1}{i_1}, \frac{1}{i_n}\right) = 0$ *olduğundan* (k_p) *dizisi* G_n- *Cauchy dizisidir.*

Yardımcı Teorem 3.5 *(Önçırak,* 2020*, Yardımcı Teorem* 5.7 *) Bir* (M, d) G_n-*metrik uzayında* G_n- *yakınsak her dizinin limiti tektir.*

İspat *(M,d) bir G_n-metrik uzay olsun. Bu uzayda (k_p) dizisini birbirinden farklı k ve l noktalarına G_n-yakınsak olduğunu varsayalım.*

$(k_p) \to k \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ için $\exists \alpha \leq i_1, i_2, \ldots, i_n$ öyle ki $\alpha \leq i_1, i_2, \ldots, i_n$ özelliğindeki her $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1} \in \mathbb{N}$ için $d\left(k_{i_1}, k, \ldots, k_{i_{n-1}}, k\right) \leq \frac{\varepsilon}{n}$ dir.
Benzer şekilde,

$(k_p) \to l \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ için $\exists \beta \leq i_1, i_2, \ldots, i_n$ öyle ki $\beta \leq i_1, i_2, \ldots, i_n$ özelliğindeki her $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1} \in \mathbb{N}$ için $d\left(k_{i_1}, k_{i_2}, \ldots, k_{i_{n-1}}, k\right) \leq \frac{\varepsilon}{n}$ dir. Eğer $i_0 = \max\{\alpha, \beta\}$ olarak alınırsa $i_0 \leq p$ özelliğindeki her $p \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(k,l,\ldots,l) &\leq d(k,k_p,\ldots,k_p) + d(k_p,l,\ldots,l) && [\because\ (G_n4)\ \text{aksiyomu}] \\ &\leq d(k,k_p,\ldots,k_p) + (n-1)\,d(l,k_p,\ldots,k_p) && (\because \text{Yardımcı teorem } 3.4) \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{n} + \tfrac{(n-1)\varepsilon}{n} = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak ε keyfi olduğundan $d(k,l,\ldots,l) = 0$ olmalıdır. Bu da $k = l$ anlamına gelir ve dolayısıyla varsayımla çelişir.

Yardımcı Teorem 3.6 *(Önçırak, 2020, Yardımcı Teorem 5.8) Bir (M,d) G_n-metrik uzay alınsın. Bu uzaydaki her G_n-yakınsak dizisi bir G_n-Cauchy dizisidir.*

İspat *(M,d) bir G_n-metrik uzay olsun. Bu uzayda $(k_p) \to k$ olacak şekilde bir (k_p) dizisi verilsin. Dolayısıyla $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ve $i_0 \leq i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$ özelliğindeki her $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1} \in \mathbb{N}$ için $d\left(k_{i_1}, k_{i_2}, \ldots, k_{i_{n-1}}, k\right) \leq \frac{\varepsilon}{n}$ olacak şekilde bir $i_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Her $i_0 \leq i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$ için (G_n4) aksiyomundan*

$$\begin{aligned} d(k_{i_1}, k_{i_2}, \ldots, k_{i_n}) &\leq d\left(k_{i_1}, k_{i_2}, \ldots, k_{i_{n-1}}, k\right) + d(k,k,\ldots,k,k_{i_n}) && [\because\ (G_n4)\ \text{aksiyomu}] \\ &\leq d\left(k_{i_1}, k_{i_2}, \ldots, k_{i_{n-1}}, k\right) + (n-1)\,d(k_{i_n},k,\ldots,k) && (\because \text{Yardımcı teorem } 3.4) \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{n} + \tfrac{(n-1)\varepsilon}{n} = \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Bu da (k_p) dizisinin G_n-Cauchy dizisi olduğu anlamına gelir.

Yardımcı Teorem 3.7 *(Önçırak, 2020, Yardımcı Teorem 5.10) (M,d) bir G_n-metrik uzay ve (k_p) dizisi bu uzayda bir G_n-Cauchy dizisi ise*

$$\lim_{p\to\infty} d(k_p, k_{p+1}, \ldots, k_{p+1}) = 0$$

olmalıdır.

Tanım 3.15 (M,d) *ve* (M^*,d^*) *birer* G_n-*metrik uzay olsun.* $f : M \to M^*$ *fonksiyonu* $a \in M$ *noktası alınsın. Her* $\varepsilon > 0$ *ve her* $B_{d^*}(f(a),\varepsilon)$, G_n *açık yuvarı için* $f(B_d(a,\delta)) \subseteq B_{d^*}(f(a,\varepsilon))$ *olacak şekilde bir* $\delta > 0$ *varsa* f *fonksiyonuna* $a \in M$ *noktasında* G_n-*süreklidir denir. Eğer* f *fonksiyonu* M *kümesinin tüm noktalarında* G_n-*sürekli ise* M *kümesi üzerinde* G_n-*süreklidir denir. Yani her* $\varepsilon > 0$ *ve* $a \in M$ *için* $d(k_0,a,\ldots,a) < \delta$ *iken* $d^*(f(k_0),f(a),\ldots,f(a)) < \varepsilon$ *olacak şekilde* $\delta > 0$ *varsa* $f : M \to M^*$ *fonksiyonu* $a \in M$ *noktasında* G_n-*süreklidir.*

Tanım 3.16 (M,d) *ve* (M^*,d^*) *birer* G_n-*metrik uzay olmak üzere bir* $f : M \to M^*$ *fonksiyonu verilsin. Eğer her* $\varepsilon > 0$ *için* $d(k_0,a,\ldots,a) < \delta$ *olduğunda* $d^*(f(k_0),f(a),\ldots,f(a)) < \varepsilon$ *olacak şekilde* ε *a bağlı bir* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *sayısı varsa* f *fonksiyonu* a *noktasında düzgün süreklidir denir.*

Tanım 3.17 (M,d) *bir* G_n-*metrik uzay ve* $H : M \to M$ *bir dönüşüm olsun. Eğer her* $k,l \in M$ *için*

$$d(H(k),\ldots,H(k),H(l)) \leq \lambda d(k,\ldots,k,l)$$

biçiminde $\lambda \in [0,1)$ *sabiti var ise* H *dönüşümüne bir büzülme dönüşümü denir.*

Shaban Sedghi vd. 2012 yılında metrik uzayın bir genellemesi olarak $S-$metrik uzay kavramını tanıtmıştır. Bundan sonraki kısımda, Shaban Sedghi vd. nin "A Generalization Of Fixed Point Theorems In $S-$metric Spaces" başlıklı makalesinden alınan temel kavramlar verilmiştir (Sedghi vd., 2012).

Tanım 3.18 $M \neq \emptyset$ *bir küme olsun.* $d : M \times M \times M \to [0,\infty)$ *fonksiyonu her* $k,l,m,a \in M$ *için*
$(S1)\ d(k,l,m) = 0 \Longleftrightarrow k = l = m$
$(S2)\ d(k,l,m) \leq d(k,k,a) + d(l,l,a) + d(m,m,a)$
koşullarını sağlıyorsa d *fonksiyonuna* $S-$*metrik,* (M,d) *ikilisine de* $S-$*metrik uzay adı verilir.*

Yardımcı Teorem 3.8 (M,d) *bir* $S-$*metrik uzay olmak üzere her* $k,l \in X$ *için*

$$d(k,k,l) = d(l,l,k)$$

eşitliği sağlanır.

Örnek 3.19 $M = \mathbb{R}$ *ve* $|.|$ *mutlak değer olarak alınsın.* $d_{24} : M \times M \times M \to [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $k, l, m \in \mathbb{R}$ *için*

$$d_{24}(k, l, m) = |k - m| + |l - m|$$

şeklinde tanımlansın. Verilen d_{24} *fonksiyonu* $\mathbb{R}$ *üzerinde bir* $S-$*metriktir (Taş,* 2017*).*

Örnek 3.20 (M, d) *bir metrik uzay olsun.* $d_{25} : M \times M \times M \to [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $k, l, m \in M$ *için*

$$d_{25}(k, l, m) = d(k, m) + d(l, m)$$

biçiminde tanımlansın. Bu şekilde verilen d_{25} *fonksiyonu* M *kümesinde bir* $S-$*metriktir (Erçınar,* 2020*).*

Yukarıdaki örnek bir alışılmış metrik uzaydan bir $S-$metrik uzay elde edilebilmek için bir yol gösterir. Dolayısıyla bu yolla her alışılmış metrik uzaydan bir $S-$metrik üretilebilir.

Örnek 3.21 $M = \mathbb{R}$ *olarak alınsın. Her* $k, l, m \in M$ *için*

$$d_{26}(k, l, m) = \left|k^2 - l^2\right| + \left|k^2 + l^2 - 2m^2\right|$$

şeklinde mutlak değer yardımıyla tanımlanan d_{26} *fonksiyonu bir* $S-$*metriktir (Erçınar,* 2020*).*

Bu örnekte tanımlanan d_{26} $S-$metriği, d_{25} uzaklık fonksiyonunda olduğu gibi bir alışılmış metrikten üretilemez. Dolayısıyla her $S-$metrik bir alışılmış metrik yardımıyla üretilmek zorunda değildir.

Aşağıda verilen örnek bir $S-$metrik yardımıyla alışılmış bir metrik üretilebileceğine dair bir yol göstermektedir.

Örnek 3.22 (M, d) *herhangi bir* $S-$*metrik uzay olmak üzere her* $k, l \in M$ *için*

$$d_{27}(k, l) = d(k, k, l) + d(l, l, k)$$

şeklindeki d_{27} *fonksiyonu bir metrik tanımlar (Taş,* 2017*).*

Shaban Sedghi vd. (Sedghi vd., 2012) çalışmasında $S-$metrik uzayı tanımladıktan sonra literatürde her $G-$metrik uzayın bir $S-$metrik uzay olduğu düşünülmüştür. Ancak Dung vd. (Dung vd., 2014) referansındaki çalışmasında bu durumun böyle olmadığını göstermek adına aşağıdaki örnekleri vermişlerdir.

Örnek 3.23 *Örnek* 3.7 *de verilen* d_{11} *uzaklık fonksiyonu için* $(\{k,l\},d_{11})$ *sıralı ikilisi bir* $G-$*metriktir.*

$$2=d_{11}(k,l,l)\not\leq d_{11}(k,k,l)+d_{11}(l,l,l)+d_{11}(l,l,l)=1$$

olduğundan bu $G-$*metriğin* $S-$*metrik olmadığını gösterir.*

Örnek 3.24 $M=\mathbb{R}$ *ve her* $k,l,m\in M$ *için*

$$d_{28}(k,l,m)=|l+m-2k|+|l-m|$$

şeklinde mutlak değer ile verilen $d_{28}:M\times M\times M\to[0,\infty)$ *fonksiyonu bir* $S-$*metriktir.*

$$\begin{aligned} d_{28}(1,0,2) &= |0+2-2|+|0-2|=2 \\ d_{28}(2,0,1) &= |0+1-4|+|0-1|=4 \end{aligned}$$

ve $d_{28}(1,0,2)\neq d_{28}(2,0,1)$ *olduğundan bu* d_{28}, $S-$*metriği bir* $G-$*metrik değildir.*

Dolayısıyla $S-$metrik uzay, $G-$metrik uzayın bir genellemesi değildir. Bu metrik uzaylar alışılmış metrik uzayın farklı genellemeleridir.

Tanım 3.19 (M,d) *bir* $S-$*metrik uzay olsun.* $a\in M$ *ve* $r>0$ *reel sayısı için*

$$B(a,r)=\{l\in X:d(l,l,a)<r\}$$

kümesine a *merkezli* r *yarıçaplı açık yuvar,*

$$D(a,r)=\{l\in X:d(l,l,a)\leq r\}$$

kümesine a *merkezli* r *yarıçaplı kapalı yuvar,*

$$S(a,r)=\{l\in X:d(l,l,a)=r\}$$

kümesine de a *merkezli* r *yarıçaplı yuvarın yüzeyi denir.*

Tanım 3.20 *(M,d) bir $S-$metrik uzay olsun. (k_p) bu uzaydaki bir dizi olmak üzere*
(i) Herhangi verilen $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $p \geq p_0$ için

$$d(k_p, k_p, k) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $p_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Ayrıca $\lim_{p\to\infty} k_p = k$ ile gösterilir.
(ii) Herhangi verilen $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $p, r \geq p_0$ için

$$d(k_p, k_p, k_r) < \varepsilon$$

biçiminde bir $p_0 \in \mathbb{N}$ varsa M kümesindeki (k_p) dizisine bir Cauchy dizisi denir.
(iii) (M,d) $S-$metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise (M,d) $S-$metrik uzayına tam $S-$metrik uzay denir.

Örnek 3.25 *$(\mathbb{R},d)$ bir metrik uzay olmak üzere $d_{29} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to [0,\infty)$ fonksiyonu her $k,l,m \in M$ için*

$$d_{29}(k,l,m) = \max\{d(k,l), d(l,m), d(m,k)\}$$

şeklinde tanımlansın. Verilen d_{29} uzaklık fonksiyonu için $(\mathbb{R}, d_{29})$ sıralı ikilisi bir $S-$metriktir. Bu uzayda $(k_p) = \frac{1}{p}$ kuralı ile verilen (k_p) dizisi $S-$yakınsaktır. Çünkü

$$\begin{aligned} d_{29}(k_p, k_p, 0) &= d_{23}\left(\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{p}, 0\right) \\ &= \max\left\{d\left(\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{p}\right), d\left(\tfrac{1}{p}, 0\right), d\left(0, \tfrac{1}{p}\right)\right\} \\ &= d\left(\tfrac{1}{p}, 0\right) \end{aligned}$$

olur. $p \to \infty$ iken $\lim d\left(\frac{1}{p}, 0\right) = 0$ olduğundan (k_p) dizisi 0 a $S-$yakınsaktır.

Örnek 3.26 *Yukarıdaki örnekte verilen d_{29} uzaklık fonksiyonu için $(\mathbb{R}, d_{29})$ sıralı ikilisi bir $S-$metriktir. Bu uzayda $(k_p) = \frac{1}{p}$ kuralı ile verilen (k_p) dizisi $S-$Cauchy dizisidir. Çünkü $p < r$ olmak üzere*

$$\begin{aligned} d_{29}(k_p, k_p, k_r) &= d_{29}\left(\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{r}\right) \\ &= \max\left\{d\left(\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{p}\right), d\left(\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{r}\right), d\left(\tfrac{1}{r}, \tfrac{1}{p}\right)\right\} \\ &= d\left(\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{r}\right) \end{aligned}$$

olur. $p \to \infty$ iken $\lim d\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{r}\right) = 0$ olduğundan (k_p) dizisi $S-$Cauchy dizisidir.

Yardımcı Teorem 3.9 *(Sedghi vd., 2012, Yardımcı Teorem 2.10) Bir (M,d) $S-$metrik uzay olsun. Bu uzaydaki her $S-$yakınsak dizinin limiti tektir.*

Yardımcı Teorem 3.10 *(Sedghi vd., 2012, Yardımcı Teorem 2.11) Bir (M,d) $S-$metrik uzay olmak üzere bu uzaydaki her $S-$yakınsak dizisi bir $S-$Cauchy dizisidir.*

Tanım 3.21 *(M,d) ve (M^*,d^*) birer $S-$metrik uzay olsun. $f : M \to M^*$ fonksiyonu $a \in M$ noktası alınsın. Her $\varepsilon > 0$ ve her $B_{d^*}(f(a),\varepsilon)$, S açık yuvarı için $f(B_d(a,\delta)) \subseteq B_{d^*}(f(a,\varepsilon))$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ varsa f fonksiyonuna $a \in M$ noktasında $S-$süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu M kümesinin tüm noktalarında $S-$sürekli ise M kümesi üzerinde $S-$süreklidir denir. Yani her $\varepsilon > 0$ ve $a \in M$ için $d(k_0,a,a) < \delta$ iken $d^*(f(k_0),f(a),f(a)) < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ varsa $f : M \to M^*$ fonksiyonu $a \in M$ noktasında $S-$süreklidir.*

Tanım 3.22 *(M,d) ve (M^*,d^*) birer $S-$metrik uzay olmak üzere bir $f : M \to M^*$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $d(k_0,a,a) < \delta$ olduğunda $d^*(f(k_0),f(a),f(a)) < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu a noktasında düzgün süreklidir denir.*

Tanım 3.23 *(M,d) bir $S-$metrik uzay olmak üzere H bu uzayda bir dönüşüm olsun. Her $k,l,m \in M$ için*

$$d(Hk,Hk,Hl) \leq \lambda d(k,k,l)$$

biçiminde bir $\lambda \in [0,1)$ sabiti var ise o zaman H dönüşümüne bir büzülme dönüşümü denir.

Teorem 3.2 *($S-$metrik uzaylarda Banach Sabit Nokta Teoremi) Bir (M,d) tam $S-$metrik uzayında $H : M \to M$ dönüşümü bir büzülme dönüşümü olsun. O halde H dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.*

İspat *$H : M \to M$ dönüşümü M tanım kümesinin her bir elemanı bir kural ile M değer kümesinin en az bir elemanı ile eşleyeceğinden her $p \in \mathbb{N}$ için $k_{p+1} = H(k_p)$ eşitliği yazılabilir. Bu eşitlik için aşağıdaki gibi iki durum söz konusudur;*

1. Durum : $k_{p+1} = k_p$ ise k_p noktası H büzülme dönüşümünün sabit noktasıdır.

2. Durum : $k_{p+1} \neq k_p$ ise H büzülme dönüşümü olduğundan

$$\begin{aligned} d(k_{p+1}, k_{p+1}, k_{p+2}) &= d(Hk_p, Hk_p, Hk_{p+1}) \\ &\leq \lambda d(k_p, k_p, k_{p+1}) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\leq \lambda^{p+1} d(k_0, k_0, k_1) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $\lambda \in [0,1)$ olduğundan $p \to \infty$ iken $d(k_{p+1}, k_{p+1}, k_{p+2}) \to 0$ yakınsaklığı elde edilir. Dolayısıyla (k_p) dizisi, (M,d) uzayında bir $S-$Cauchy dizisidir ($\because$ Yardımcı Teorem 3.10). Ayrıca (M,d) tam bir $S-$metrik uzay olduğundan $\lim_{p\to\infty} k_p = L$ olacak şekilde bir $L \in M$ vardır. H büzülme dönüşümü olduğundan $d(k_p, H(L), H(L)) \leq \lambda d(k_p, L, L)$ eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin $p \to \infty$ iken her iki tarafında limit alınırsa $d(L, H(L), H(L)) \leq d(L, L, L) = 0$ eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikten $d(L, H(L), H(L)) = 0$ sonucu elde edilir ki $(S1)$ aksiyomundan bu $H(L) = L$ olması demektir. Böylece L nin H büzülme dönüşümünün sabit noktası olduğu bulunur. Bu sabit noktanın tekliği ise aşağıdaki gibi gösterilecektir;

H büzülme dönüşümünün birbirinden farklı L_1 ve L_2 gibi iki tane sabit noktası olduğu varsayılsın. Yani, $L_1 \neq L_2$ olmak üzere $H(L_1) = L_1$ ve $H(L_2) = L_2$ olsun.

$$\begin{aligned} d(L_1, L_1, L_2) &= d(H(L_1), H(L_1), H(L_2)) \\ &\leq \lambda d(L_1, L_1, L_2) \qquad \because H \text{ büzülme dönüşümü} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik $\lambda \in [0,1)$ olduğu için ancak $d(L_1, L_1, L_2) = 0$ olması ile sağlanır. Bu ise $L_1 = L_2$ anlamına gelir. Ancak başlangıçta bu elemanlar birbirinden farklı alındığından bu bir çelişki olup, H büzülme dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

2015 yılında Mujahid Abbas vd. $S-$metrik kavramını genelleştirerek $A-$metrik kavramını vermişlerdir. $S-$metrik uzay üç nokta arasındaki uzaklığı ölçmekteyken $A-$metrik uzay n tane nokta arasındaki uzaklığı aynı anda ölçebilmektedir. Bundan sonraki kısımda Mujahid Abbas vd. nin "Generalized coupled common fixed point results in partially ordered $A-$metric spaces" başlıklı makalesinden alınan temel kavramlar verilecektir (Abbas vd., 2015).

Tanım 3.24 *$M \neq \emptyset$ bir küme ve $n \geq 3$ olmak üzere $d : \overbrace{M \times M \times \ldots \times M}^{n \text{ tane}} \to [0,\infty)$ fonksiyonu her $k_i, a \in M$ için*

$(A1)\ d(k_1, k_2, \ldots, k_n) = 0 \Longleftrightarrow k_1 = k_2 = \ldots = k_n$
$(A2)\ d(k_1, k_2, \ldots, k_n) \leq \sum_{i=1}^{n} d(k_i, k_i, \ldots k_i, a)$
şartlarını sağlıyorsa d *fonksiyonuna* $A-$*metrik ve* (M, d) *ikilisine de* $A-$*metrik uzay denir.*

Burada belirtmek gerekir ki $S-$metrik uzay, 3. mertebeden bir $A-$metrik uzay olup $A-$metrik uzay ise $n.$ mertebeden bir $S-$metrik uzaydır.

Yardımcı Teorem 3.11 (M, d) *bir* $A-$*metrik uzay olmak üzere her* $k, l \in M$ *için*

$$d(k, \ldots, k, l) = d(l, \ldots, l, k)$$

eşitliği sağlanır.

Örnek 3.27 $M = \mathbb{R}$ *ve* $d_{30},\ d_{31} : \overbrace{M \times M \times \ldots \times M}^{n\ tane} \to [0, \infty)$ *fonksiyonu verilsin. Her* $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$ *ve* $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *için* $d : M \times M \to [0, \infty)$ *fonksiyonu* $d(k_i, k_j) = |k_i - k_j|$ *şeklinde tanımlı olsun. Bu takdirde*

$$d_{30}(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i<j} |k_i - k_j|$$

şeklinde tanımlanan d_{30} *fonksiyonu* $\mathbb{R}$ *üzerinde bir* $A-$*metriktir.*

Örnek 3.28 *Boştan farklı bir* M *kümesi ve* M *üzerindeki bir* d *alışılmış metriği verilsin.* $d_{31} : \overbrace{M \times M \times \ldots \times M}^{n\ tane} \to [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $k_1, k_2, \ldots, k_n \in M$ *için*

$$d_{31}(k_1, k_2, \ldots, k_n) = d(k_1, k_n) + d(k_2, k_n) + \ldots + d(k_{n-1}, k_n)$$

biçiminde tanımlansın. Bu şekilde verilen d_{31} *fonksiyonu* M *kümesinde bir* $A-$*metriktir (Erçınar,* 2020*).*

Yukarıdaki örnek bir alışılmış metrik uzaydan bir $A-$metrik uzay elde edilebilmek için bir yol gösterir. Dolayısıyla bu yöntemle her alışılmış metrik uzaydan bir $A-$metrik üretilebilir.

Örnek 3.29 $M = \mathbb{R}$ *alınsın.* $d_{32} : M^n \to [0, \infty)$ *fonksiyonu verilsin.her* $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$ *ve* $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *için* $d : M \times M \to [0, \infty)$ *fonksiyonu* $d(k_i - k_j) = |k_i - k_j|$ *şeklinde*

tanımlı olsun. Bu takdirde

$$d_{32}(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \sum_{i=1}^{n-1} |k_i - k_n| + |k_1 + \ldots + k_{n-1} - (n-1)\, k_n|$$

şeklinde tanımlanan d_{32} fonksiyonu bir $A-$metriktir (Erçınar, 2020*).*

Bu örnekte tanımlanan d_{32} $A-$metriği, d_{31} uzaklık fonksiyonunda olduğu gibi bir alışılmış metrikten üretilemez. Dolayısıyla her $A-$metrik bir alışılmış metrik yardımıyla üretilmek zorunda değildir.

Örnek 3.30 *(M, d) herhangi bir $A-$metrik uzay olmak üzere her $k, l \in M$ için*

$$d_{33}(k, l) = d(k, \ldots, k, l) + d(l, \ldots, l, k)$$

şeklindeki d_{33} fonksiyonu bir alışılmış metriktir.

Yukarıdaki örnekte ise bir $A-$metrik uzaydan alışılmış metrik uzayın elde edileceğine dair bir yol gösterilmiştir.

Tanım 3.25 *(M, d) bir $A-$metrik uzay olsun. $a \in M$ ve $r > 0$ reel sayısı için*

$$B(a, r) = \{l \in X : d(l, \ldots, l, a) < r\}$$

kümesine a merkezli r yarıçaplı açık yuvar,

$$D(a, r) = \{l \in X : d(l, \ldots, l, a) \leq r\}$$

kümesine a merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar,

$$S(a, r) = \{l \in X : d(l, \ldots, l, a) = r\}$$

kümesine de a merkezli r yarıçaplı yuvarın yüzeyi denir.

Tanım 3.26 *(M, d) bir $A-$metrik uzay ve (k_p) bu uzaydaki bir dizi olmak üzere*
(i) $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $p_0 \leq p$ şeklindeki her n doğal sayısı için

$$d(k_p, \ldots, k_p, k) < \varepsilon$$

biçiminde bir $p_0 \in \mathbb{N}$ *varsa* (k_p) *dizisine* $k \in M$ *noktasına* $A-$*yakınsak denir ve* $\lim_{p\to\infty} k_p = k$ *şeklinde gösterilir.*
(ii) *Herhangi verilen* $\varepsilon > 0$ *sayısı ve her* $p, r \geq p_0$ *için*

$$d(k_p, \ldots, k_p, k_r) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $p_0 \in \mathbb{N}$ *varsa* M *kümesindeki* (k_p) *dizisine bir* $A-$*Cauchy dizisi denir.*
(iii) (M, d) $A-$*metrik uzayındaki her* $A-$ *Cauchy dizisi* $A-$*yakınsak ise* (M, d) $A-$*metrik uzayına tam* $A-$*metrik uzay denir.*

Örnek 3.31 $(\mathbb{R}, d)$ *bir metrik uzay olmak üzere* $d_{34} : \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $k, l, m \in M$ *için*

$$d_{34}(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \max_{1\leq i,j\leq n} \{d(k_i, k_j)\}$$

şeklinde tanımlansın. Verilen d_{34} *uzaklık fonksiyonu için* $(\mathbb{R}, d_{34})$ *sıralı ikilisi bir* $A-$*metriktir. Bu uzayda* $(k_p) = \frac{1}{p}$ *kuralı ile verilen* (k_p) *dizisi* $A-$*yakınsaktır. Çünkü*

$$\begin{aligned} d_{34}(k_p, \ldots, k_p, 0) &= d_{34}\left(\tfrac{1}{p}, \ldots, \tfrac{1}{p}, 0\right) \\ &= \max\left\{d\left(\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{p}\right), , \ldots, d\left(\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{p}\right), d\left(\tfrac{1}{p}, 0\right), \ldots, d\left(\tfrac{1}{p}, 0\right)\right\} \\ &= d\left(\tfrac{1}{p}, 0\right) \end{aligned}$$

olur. $p \to \infty$ *iken* $\lim d\left(\frac{1}{p}, 0\right) = 0$ *olduğundan* (k_p) *dizisi* 0 *a* $A-$*yakınsaktır.*

Örnek 3.32 *Yukarıdaki örnekte verilen* d_{34} *uzaklık fonksiyonu için* $(\mathbb{R}, d_{34})$ *sıralı ikilisi bir* $A-$*metriktir. Bu uzayda* $(k_p) = \frac{1}{p}$ *kuralı ile verilen* (k_p) *dizisi* $A-$*Cauchy dizisidir. Çünkü* $p < r$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} d_{34}(k_p, \ldots, k_p, k_r) &= d_{34}\left(\tfrac{1}{p}, \ldots, \tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{r}\right) \\ &= \max\left\{d\left(\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{p}\right), , \ldots, d\left(\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{p}\right), d\left(\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{r}\right), \ldots, d\left(\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{r}\right)\right\} \\ &= d\left(\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{r}\right) \end{aligned}$$

olur. $p \to \infty$ *iken* $\lim d\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{r}\right) = 0$ *olduğundan* (k_p) *dizisi* $A-$*Cauchy dizisidir.*

Yardımcı Teorem 3.12 *(Abbas vd.,* 2015*, Yardımcı Teorem* 2.15*) Bir* (M, d) $A-$*metrik uzay olmak üzere bu uzaydaki her* $A-$*yakınsak dizinin limiti tektir.*

Yardımcı Teorem 3.13 *(Abbas vd.,* 2015*, Yardımcı Teorem* 2.17*) Bir* (M,d) $A-$*metrik uzay olmak üzere bu uzaydaki her* $A-$*yakınsak dizisi bir* $A-$*Cauchy dizisidir.*

Tanım 3.27 (M,d) *ve* (M^*,d^*) *birer* $A-$*metrik uzay olsun.* $f:M\to M^*$ *fonksiyonu* $a\in M$ *noktası alınsın. Her* $\varepsilon>0$ *ve her* $B_{d^*}(f(a),\varepsilon)$, G_n *açık yuvarı için* $f(B_d(a,\delta))\subseteq B_{d^*}(f(a,\varepsilon))$ *olacak şekilde bir* $\delta>0$ *varsa* f *fonksiyonuna* $a\in M$ *noktasında* $A-$*süreklidir denir. Eğer* f *fonksiyonu* M *kümesinin tüm noktalarında* $A-$*sürekli ise* M *kümesi üzerinde* $A-$*süreklidir denir.*

Tanım 3.28 (M,d) *ve* (M^*,d^*) *birer* $A-$*metrik uzay olsun. Eğer her* $\varepsilon>0$ *ve* $a\in M$ *için* $d(k_0,a,\ldots,a)<\delta$ *iken* $d^*(f(k_0),f(a),\ldots,f(a))<\varepsilon$ *olacak şekilde* $\delta>0$ *varsa* $f:M\to M^*$ *fonksiyonu* $a\in M$ *noktasında* $A-$*süreklidir. Yani her* $\varepsilon>0$ *için* $d(k_0,a,\ldots,a)<\delta$ *olduğunda* $d^*(f(k_0),f(a),\ldots,f(a))<\varepsilon$ *olacak şekilde* ε *a bağlı bir* $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ *sayısı varsa* f *fonksiyonu* a *noktasında düzgün süreklidir denir.*

Tanım 3.29 (M,d) *bir* $A-$*metrik uzay ve* $H:M\to M$ *bir dönüşüm olsun. Her* $x,y\in M$ *için*

$$d(Hk,\ldots,Hk,Hl)\leq\lambda d(k,\ldots,k,l)$$

biçiminde bir $\lambda\in[0,1)$ *sabiti var ise o zaman* H *dönüşümüne bir büzülme dönüşümü denir.*

Teorem 3.3 *(*$A-$*metrik uzaylarda Banach Sabit Nokta Teoremi)* (M,d) *tam bir* $A-$*metrik uzay ve* $H:M\to M$ *dönüşümü bir büzülme dönüşümü olsun. Bu takdirde* H *dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.*

İspat $H:M\to M$ *dönüşümü* M *tanım kümesinin her bir elemanı bir kural ile* M *değer kümesinin en az bir elemanı ile eşleyeceğinden her* $p\in\mathbb{N}$ *için* $k_{p+1}=H(k_p)$ *eşitliği yazılabilir. Bu eşitlik için aşağıdaki gibi iki durum söz konusudur;*

1. Durum : $k_{p+1}=k_p$ *ise* k_p *noktası* H *büzülme dönüşümünün sabit noktasıdır.*

2. Durum : $k_{p+1} \neq k_p$ ise$H$ büzülme dönüşümü olduğundan

$$\begin{aligned} d(k_{p+1}, \ldots, k_{p+1}, k_{p+2}) &= d(Hk_p, \ldots, Hk_p, Hk_{p+1}) \\ &\leq \lambda d(k_p, \ldots, k_p, k_{p+1}) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\leq \lambda^{p+1} d(k_0, \ldots, k_0, k_1) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $\lambda \in [0,1)$ olduğundan $p \to \infty$ iken $d(k_{p+1}, \ldots, k_{p+1}, k_{p+2}) \to 0$ yakınsaklığı elde edilir. Dolayısıyla (k_p) dizisi, (M,d) uzayında bir $A-$Cauchy dizisidir ($\because$ Yardımcı Teorem 3.13). Ayrıca (M,d) tam bir $A-$ metrik uzay olduğundan $\lim\limits_{p\to\infty} k_p = L$ olacak şekilde bir $L \in M$ vardır.

H büzülme dönüşümü olduğundan $d(k_p, \ldots, k_p, H(L)) \leq \lambda d(k_p, \ldots, k_p, L)$ eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin $p \to \infty$ iken her iki tarafında limit alınırsa $d(L, \ldots, L, H(L)) \leq d(L, \ldots, L, L) = 0$ eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikten $d(L, \ldots, L, H(L)) = 0$ sonucu elde edilir ki $(A1)$ aksiyomundan bu $H(L) = L$ olması demektir. Böylece L nin H büzülme dönüşümünün sabit noktası olduğu bulunur. Bu sabit noktanın tekliği ise aşağıdaki gibi gösterilecektir;

H büzülme dönüşümünün birbirinden farklı L_1 ve L_2 gibi iki tane sabit noktası olduğu varsayılsın. Yani, $L_1 \neq L_2$ olmak üzere $H(L_1) = L_1$ ve $H(L_2) = L_2$ olsun.

$$\begin{aligned} d(L_1, \ldots, L_1, L_2) &= d(H(L_1), \ldots, H(L_1), H(L_2)) \\ &\leq \lambda d(L_1, \ldots, L_1, L_2) \qquad \because H \text{ büzülme dönüşümü} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik $\lambda \in [0,1)$ olduğu için ancak $d(L_1, \ldots, L_1, L_2) = 0$ olması ile sağlanır. Bu ise $L_1 = L_2$ anlamına gelir. Ancak başlangıçta bu elemanlar birbirinden farklı alındığından bu bir çelişki olup, H büzülme dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

Bundan sonraki kısımda ise $A-$metrik uzayın genellemesi olan A_b-metrik uzaylar tanıtılacak ve bu uzaylar ile ilgili temel kavramlar Monoj Ughade vd. nin "Some Fixed Point Theorems In A_b-Metric Space" adlı makalesinden alınarak verilecektir (Ughade vd., 2016).

Tanım 3.30 *$M \neq \emptyset$ bir küme ve $d : \overbrace{M \times M \times \ldots \times M}^{n \text{ tane}} \to [0,\infty)$ fonksiyonu her $k_i, a \in M$ ve $b \geq 1$ için*
(A_b1) $d(k_1, k_2, \ldots, k_n) = 0 \iff k_1 = k_2 = \ldots = k_n$

$(A_b 2)$ $d(k_1, k_2, \ldots, k_n) \leq b\sum_{i=1}^{n} d(k_i, k_i, \ldots k_i, a)$
şartlarını sağlıyorsa d *fonksiyonuna* A_b-*metrik ve* (M, d) *ikilisine ise* A_b-*metrik uzay denir.*

A_b-metrik uzayların $A-$metrik uzayların bir genellemesi olduğu görülebilir. Eğer her A_b-metrik uzayda $b = 1$ alınırsa $A-$metrik uzay olur. Ayrıca $b = 1$ ve $n = 3$ alınırsa $S-$metrik uzay olduğu rahatlıkla görülebilir.

Yardımcı Teorem 3.14 (M, d) *bir* $b \geq 1$ *için* A_b-*metrik uzay olsun. Her* $k, l, m \in M$ *için*

$$\begin{aligned} d(k, \ldots, k, l) &\leq bd(l, \ldots, l, k) \\ d(k, \ldots, k, m) &\leq b[(n-1)d(k, \ldots, k, l) + d(m, \ldots, m, l)] \\ d(k, \ldots, k, m) &\leq b[(n-1)d(k, \ldots, k, l) + bd(l, \ldots, l, m)] \end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Örnek 3.33 $M = \mathbb{R}$ *ve* $d_{35} : \overbrace{M \times M \times \ldots \times M}^{n \text{ tane}} \to [0, \infty)$ *fonksiyonu verilsin. Her* $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$ *ve* $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *için* $d : M \times M \to [0, \infty)$ *fonksiyonu* $d(k_i, k_j) = |k_i - k_j|$ *şeklinde tanımlı olsun. Bu takdirde*

$$\begin{aligned} d_{35}(k_1, k_2, \ldots, k_n) &= |k_n + \ldots + k_2 - (n-1)k_1|^2 + |k_n + \ldots + k_3 - (n-2)k_2|^2 \\ &\quad + \ldots + |k_n + k_{n-1} - 2k_{n-2}|^2 + |k_n - k_{n-1}|^2 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan d_{35} *fonksiyonu* $\mathbb{R}$ *üzerinde birer* A_b-*metriktir (Erçınar, 2020).*

Örnek 3.34 *Boştan farklı bir* M *kümesi ve* M *üzerindeki bir* d *alışılmış metriği verilsin.* $d_{36} : \overbrace{M \times M \times \ldots \times M}^{n \text{ tane}} \to [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $k_1, k_2, \ldots, k_n \in M$ *için*

$$d_{36}(k_1, k_2, \ldots, k_n) = d(k_1, k_n) + d(k_2, k_n) + \ldots + d(k_{n-1}, k_n)$$

şeklinde tanımlansın. d_{36} *fonksiyonu* M *üzerinde bir* A_b-*metriktir. (Erçınar, 2020)*

Yukarıdaki örnek bir alışılmış metrik uzaydan bir A_b-metrik uzay elde edilebilmek için bir yol gösterir. Böylece bu yöntemle her alışılmış metrik uzaydan bir A_b-metrik uzay üretilebilir.

Örnek 3.35 $M = \mathbb{R}$ *ve* $d_{37} : \overbrace{M \times M \times \ldots \times M}^{n \text{ tane}} \to [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$ *ve* $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *için* $d : M \times M \to [0, \infty)$ *fonksiyonu yardımıyla taımlansın. Ayrıca* $d(k_i, k_j) = |k_i - k_j|$ *şeklinde tanımlı olsun. Bu takdirde*

$$d_{37}(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \left|k_i^2 - k_n^2\right| + \left|k_1^2 + \ldots + k_{n-1}^2 - (n-1)\, k_n^2\right|$$

şeklinde tanımlanan d_{37} *fonksiyonu bir* A_b- *metriktir (Erçınar, 2020).*

Yukarıdaki örnekteki d_{37} A_b- metriği, d_{36} uzaklık fonksiyonunda olduğu gibi bir alışılmış metrikten üretilmez. Dolayısıyla her A_b- metrik bir alışılmış metrik yardımıyla üretilmek zorunda değildir.

Tanım 3.31 (M, d) *bir* A_b-*metrik uzay olsun.* $a \in M$ *ve* $r > 0$ *reel sayısı için*

$$B(a, r) = \{l \in X : d(l, \ldots, l, a) < r\}$$

kümesine a *merkezli* r *yarıçaplı açık yuvar,*

$$D(a, r) = \{l \in X : d(l, \ldots, l, a) \leq r\}$$

kümesine a *merkezli* r *yarıçaplı kapalı yuvar,*

$$S(a, r) = \{l \in X : d(l, \ldots, l, a) = r\}$$

kümesine de a *merkezli* r *yarıçaplı yuvarın yüzeyi denir.*

Tanım 3.32 (M, d) *bir* A_b-*metrik uzay ve* (k_p) *bu uzaydaki bir dizi olmak üzere*
(i) $\varepsilon > 0$ *sayısına karşılık* $p_0 \leq p$ *şeklindeki her* n *doğal sayısı için*

$$d(k_p, \ldots, k_p, k) < \varepsilon$$

biçiminde bir $p_0 \in \mathbb{N}$ *varsa* (k_p) *dizisi* $k \in M$ *noktasına* A_b-*yakınsak denir ve* $\lim_{p \to \infty} k_p = k$ *şeklinde gösterilir.*
(ii) *Herhangi verilen* $\varepsilon > 0$ *sayısı ve her* $p, r \geq p_0$ *için*

$$d(k_p, \ldots, k_p, k_r) < \varepsilon$$

biçiminde bir $p_0 \in \mathbb{N}$ *varsa* M *kümesindeki* (k_p) *dizisine bir* A_b- *Cauchy dizisi denir.*
(iii) (M, d) A_b-*metrik uzayındaki her* A_b-*Cauchy dizisi* A_b-*yakınsak ise* (M, d) A_b-*metrik uzayına tam* A_b-*metrik uzay denir.*

Örnek 3.36 $(\mathbb{R}, d)$ *bir metrik uzay olmak üzere* $d_{38} : \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $k, l, m \in M$ *için*

$$d_{38}(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \max_{1 \leq i,j \leq n} \{d(k_i, k_j)\}$$

şeklinde tanımlansın. Verilen d_{38} *uzaklık fonksiyonu için* $(\mathbb{R}, d_{38})$ *sıralı ikilisi bir* A_b-*metriktir. Bu uzayda* $(k_p) = \frac{1}{p}$ *kuralı ile verilen* (k_p) *dizisi* A_b-*yakınsaktır. Çünkü*

$$\begin{aligned} d_{38}(k_p, \ldots, k_p, 0) &= d_{38}\left(\tfrac{1}{p}, \ldots, \tfrac{1}{p}, 0\right) \\ &= \max\left\{d\left(\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{p}\right), , \ldots, d\left(\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{p}\right), d\left(\tfrac{1}{p}, 0\right), \ldots, d\left(\tfrac{1}{p}, 0\right)\right\} \\ &= d\left(\tfrac{1}{p}, 0\right) \end{aligned}$$

olur. $p \to \infty$ *iken* $\lim d\left(\frac{1}{p}, 0\right) = 0$ *olduğundan* (k_p) *dizisi* 0 *a* A_b-*yakınsaktır.*

Örnek 3.37 *Yukarıdaki örnekte verilen* d_{38} *uzaklık fonksiyonu için* $(\mathbb{R}, d_{38})$ *sıralı ikilisi bir* A_b-*metriktir. Bu uzayda* $(k_p) = \frac{1}{p}$ *kuralı ile verilen* (k_p) *dizisi* A_b-*Cauchy dizisidir. Çünkü* $p < r$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} d_{38}(k_p, \ldots, k_p, k_r) &= d_{38}\left(\tfrac{1}{p}, \ldots, \tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{r}\right) \\ &= \max\left\{d\left(\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{p}\right), , \ldots, d\left(\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{p}\right), d\left(\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{r}\right), \ldots, d\left(\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{r}\right)\right\} \\ &= d\left(\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{r}\right) \end{aligned}$$

olur. $p \to \infty$ *iken* $\lim d\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{r}\right) = 0$ *olduğundan* (k_p) *dizisi* A_b-*Cauchy dizisidir.*

Yardımcı Teorem 3.15 *(Ughade vd., 2016, Yardımcı Teorem* 3.9 *) Bir* (M, d) A_b-*metrik uzay olmak üzere bu uzaydaki* A_b- *yakınsak her dizinin limiti tektir.*

İspat (M, d) *bir* A_b-*metrik uzay olsun. Bu uzayda* (k_p) *dizisini birbirinden farklı* k *ve* l *noktalarına* A_b-*yakınsak olduğunu varsayılsın. Her* $\varepsilon > 0$ *değerine karşılık* $p \geq i_1$ *şartını sağlayan her* $p \in \mathbb{N}$ *için*

$$d\left(k_p, k_p, \ldots, k_{p(i-1)}, k\right) < \frac{\varepsilon}{2b^2(i-1)}$$

olacak şekilde $i_1 \in \mathbb{N}$ *ve* $p \geq i_2$ *şartını sağlayan her* $p \in \mathbb{N}$ *için*

$$d\left(k_p, k_p, \ldots, k_{p(i-1)}, l\right) < \frac{\varepsilon}{2b^2}$$

olacak şekilde $i_2 \in \mathbb{N}$ *değerleri vardır.* $i_0 = \max\{i_1, i_2\}$ *alınsın. Bu takdirde her* $p \geq i_0$ *için*

$$\begin{aligned} d(k,\ldots,k,l) &< b\left[\begin{array}{c} d(k,\ldots,k,k_p)+d(k,\ldots,k,k_p)+d(k,\ldots,k,k_p) \\ +\ldots+\left(d(k,\ldots,k,k_p)\right)_{n-1}+d(l,\ldots,l,k_p) \end{array}\right] \\ &\leq b(n-1)\,d(k,\ldots,k,k_p)+bd(l,\ldots,l,k_p) \\ &\leq b^2(i-1)\,d(k_p,\ldots,k_p,k)+b^2 d(k_p,\ldots,k_p,l) \\ &< b^2(i-1)\tfrac{\varepsilon}{2b^2(i-1)}+b^2\tfrac{\varepsilon}{2b^2}=\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak ε *keyfi olduğundan* $d(k,\ldots,k,l)=0$ *olmalıdır. Bu da* $k=l$ *anlamına gelir ve dolayısıyla varsayımla çelişir.*

Yardımcı Teorem 3.16 *(Ughade vd., 2016, Yardımcı Teorem* 3.10 *) Bir* (M,d) A_b-*metrik uzay olmak üzere bu uzaydaki her* A_b-*yakınsak dizisi bir* A_b-*Cauchy dizisidir.*

İspat (M,d) *bir* A_b-*metrik uzay olsun. Bu uzayda* $(k_p)\to k$ *olacak şekilde bir* (k_p) *dizisi verilsin. Bu durumda her* $\varepsilon>0$ *değerine karşılık* $p\geq i_1$ *şartını sağlayan her* $p\in\mathbb{N}$ *için*

$$d(k_p,\ldots,k_p,k)<\frac{\varepsilon}{2b(p-1)}$$

olacak şekilde bir $i_1\in\mathbb{N}$ *ve* $m\geq i_2$ *şartını sağlayan her* $m\in\mathbb{N}$ *için*

$$d(k_m,\ldots,k_m,k)<\frac{\varepsilon}{2b}$$

olacak şekilde $i_2\in\mathbb{N}$ *değeri vardır.* $i_0=\max\{i_1,i_2\}$ *alınsın. Bu takdirde her* $p,m\geq i_0$ *için*

$$\begin{aligned} d(k_p,\ldots,k_p,k_m) &\leq b(n-1)\,d(k_p,\ldots,k_p,k)+bd(k_m,\ldots,k_m,k) \\ &\leq b(i-1)\tfrac{\varepsilon}{2b(i-1)}+b\tfrac{\varepsilon}{2b}=\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da (k_p) *dizisinin Cauchy olmasını gerektirir.*

Yardımcı Teorem 3.17 *(Ughade vd., 2016, Yardımcı Teorem* 4.1 *)* (M,d) *bir* A_b-*metrik uzay olmak üzere* (k_p) *dizisi bu uzayda* $\lambda\in\left[0,\frac{1}{b^2}\right)$ *ve* $i=1,2,\ldots$ *için*

$$d(k_i,\ldots,k_i,k_{i+1})\leq\lambda d(k_{i-1},\ldots,k_{i-1},k_i)$$

şartlarını sağlayan bir diziyse (k_p) *dizisi bu uzayda* A_b-*Cauchy dizisidir.*

Tanım 3.33 (M,d) *ve* (M^*,d^*) *birer* A_b-*metrik uzay olsun.* $f : M \to M^*$ *fonksiyonu* $a \in M$ *noktası alınsın. Her* $\varepsilon > 0$ *ve her* $B_{d^*}(f(a),\varepsilon)$, G_n *açık yuvarı için* $f(B_d(a,\delta)) \subseteq B_{d^*}(f(a,\varepsilon))$ *olacak şekilde bir* $\delta > 0$ *varsa* f *fonksiyonuna* $a \in M$ *noktasında* A_b-*süreklidir denir. Eğer* f *fonksiyonu* M *kümesinin tüm noktalarında* A_b-*sürekli ise* M *kümesi üzerinde* A_b-*süreklidir denir. Yani her* $\varepsilon > 0$ *ve* $a \in M$ *için* $d(k_0,a,\ldots,a) < \delta$ *iken* $d^*(f(k_0),f(a),\ldots,f(a)) < \varepsilon$ *olacak şekilde* $\delta > 0$ *varsa* $f : M \to M^*$ *fonksiyonu* $a \in M$ *noktasında* A_b-*süreklidir.*

Tanım 3.34 (M,d) *ve* (M^*,d^*) *birer* A_b-*metrik uzay olmak üzere bir* $f : M \to M^*$ *fonksiyonu verilsin. Eğer her* $\varepsilon > 0$ *için* $d(k_0,a,\ldots,a) < \delta$ *olduğunda* $d^*(f(k_0),f(a),\ldots,f(a)) < \varepsilon$ *olacak şekilde* ε *a bağlı bir* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *sayısı varsa* f *fonksiyonu* a *noktasında düzgün süreklidir denir.*

Tanım 3.35 (M,d) *bir* A_b-*metrik uzayında* $H : M \to M$ *bir dönüşüm olsun. Her* $k,l \in M$ *için*

$$d(Hk,\ldots,Hk,Hl) \leq \lambda d(k,\ldots,k,l)$$

biçiminde bir $\lambda \in \left[0,\frac{1}{b^2}\right)$ *sabiti var ise o zaman* H *dönüşümüne bir büzülme dönüşümü denir.*

4. TAM BİR G_n-METRİK UZAYDAN YENİ TAM BİR G_n-METRİK UZAY ELDE EDİLİŞİ

Bu bölüm ve bundan sonraki bölüm bu tez çalışmasının orijinal bölümüdür. Bu bölümde, bir G_n-metrik uzayda tanımlanan herhangi bir H dönüşümü için bazı $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere H^n büzülme dönüşümü iken H dönüşümünün de büzülme dönüşümü olacağı yeni bir G_n-metrik uzay inşa edilecektir. Üstelik bu H dönüşümü düzgün sürekli ve ilk baştaki G_n-metrik uzayı tam ise yeni inşa edilen G_n-metrik uzayının da tam olacağı ispatlanacaktır.

Öncelikle G_n-metrik uzaylarda Banach Sabit Nokta Teoremi verilmiştir.

Teorem 4.1 *(G_n-metrik uzaylarda Banach Sabit Nokta Teoremi) (M,d) bir tam G_n-metrik uzay ve $H : M \to M$ bir büzülme dönüşümü olsun. Bu taktirde H dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.*

İspat *$H : M \to M$ büzülme dönüşümü M tanım kümesinin her bir elemanı bir kural ile M değer kümesinin en az bir elemanı ile eşleşeceğinden her $p \in \mathbb{N}$ için $k_{p+1} = H(k_p)$ eşitliği yazılabilir. Bu eşitlik için aşağıdaki iki durum söz konusudur;*

1. Durum : $k_{p+1} = k_p$ ise k_p noktası H fonksiyonunun sabit noktasıdır.

2. Durum : $k_{p+1} \neq k_p$ ise H büzülme dönüşümü olduğundan

$$\begin{aligned} d(k_{p+1}, k_{p+2}, \ldots, k_{p+n+1}) &\leq d(Hk_p, Hk_{p+1}, \ldots, Hk_{p+n}) \\ &\leq \lambda d(k_p, k_{p+1}, \ldots, k_{p+n}) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\leq \lambda^{p+1} d(k_0, k_1, \ldots, k_n) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $\lambda \in [0,1)$ olduğundan $p \to \infty$ iken $d(k_{p+1}, k_{p+2}, \ldots, k_{p+n+1}) \to 0$ yakınsadığı elde edilir. Dolayısıyla (k_p) dizisi, (M,d) uzayında bir G_n-Cauchy dizisidir ($\because$ Yardımcı Teorem 3.6). Ayrıca (M,d) tam bir G_n- metrik uzay olduğundan $\lim_{p\to\infty} k_p = L$ olacak şekilde bir $L \in M$ vardır.
H büzülme dönüşümü olduğundan $d(k_p, H(L), \ldots, H(L)) \leq \lambda d(k_p, L, \ldots, L)$ eşitsizliği

elde edilir. Bu eşitsizliğin $p \to \infty$ *iken her iki tarafında limiti alınırsa* $d(L, H(L), \ldots, H(L)) \leq d(L, L, \ldots, L) = 0$ *eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikten* $d(L, H(L), \ldots, H(L)) = 0$ *sonucu elde edilir ki* $(G_n 1)$ *aksiyomundan bu* $H(L) = L$ *olması demektir. Böylece* L *nin* H *büzülme dönüşümünün sabit noktası olduğu bulunur. Bu sabit noktanın tekliği ise aşağıdaki gibi gösterilecektir;*

H büzülme dönüşümünün birbirinden farklı L_1 *ve* L_2 *gibi iki tane sabit noktası olduğu varsayılsın. Yani,* $L_1 \neq L_2$ *olmak üzere* $H(L_1) = L_1$ *ve* $H(L_2) = L_2$ *olsun.*

$$\begin{aligned} d(L_1, \ldots, L_1, L_2) &= d(H(L_1), \ldots, H(L_1), H(L_2)) \\ &\leq \lambda d(L_1, \ldots, L_1, L_2) \qquad \because \text{ H büzülme dönüşümü} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik $\lambda \in [0, 1)$ *olduğu için ancak* $d(L_1, \ldots, L_1, L_2) = 0$ *olması ile sağlanır. Bu ise* $L_1 = L_2$ *anlamına gelir. Ancak başlangıçta bu elemanlar birbirinden farklı alındığından bu bir çelişki olup,* H *büzülme dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.*

Teorem 4.2 (M, d) *tam bir* G_n-*metrik uzay ve bu uzayda* $H : M \to M$ *dönüşümü verilsin. Ayrıca* H^n *büzülme katsayısı* $\lambda \in [0, 1)$ *olan bir büzülme dönüşümü olsun Bu takdirde* H *dönüşümünün* (M, d) *tam* A_b-*metrik uzayda bir tek sabit noktası vardır.*

İspat *Keyfi* $k \in M$ *ve* $n \in \{0, 1, \ldots\}$ *için* $H^n(x)$ *dönüşümünü* $H^0(k) = k$ *ve* $H^{n+1}(k) = H(H^n(k))$ *olacak şekilde tanımlansın.* H^n*,* (M, d) *tam* A_b-*metrik uzayında bir büzülme dönüşümü olduğundan Teorem* 4.1 *gereği* $H^n(k) = k$ *olacak şekilde bir tek sabit noktası vardır. Ayrıca* $H^{n+1}(k) = H(H^n(k)) = H(k)$ *ve* $H^{n+1}(k) = H^n(H(k)) = H(k)$ *eşitliklerinden* $H(k)$ *de* H^n *büzülme dönüşümünün sabit noktası olur. Fakat Teorem* 4.1 *gereği sabit noktanın tekliğinden* $H(k) = k$ *elde edilir. Bu ise* H *dönüşümünün bir tek sabit noktası olduğunu gösterir.*

Bu sonuç bir dönüşümün herhangi bir kuvveti büzülme dönüşümü iken dönüşümün kendisinin de bir tek sabit noktaya sahip olduğunu ortaya koyar. Üstelik dönüşüm için gerekli olan bir koşul yoktur.

Teorem 4.3 (M,d) *bir* G_n-*metrik uzay ve* $H : (M,d) \to (M,d)$ *dönüşüm olsun.* H^n *dönüşümü* (M,d) *uzayında* μ *sabitli bir büzülme dönüşümü olsun.* d^* *fonksiyonu da*

$$d^* : \overbrace{M \times M \times \ldots \times m}^{n \text{ tane}} \to [0,\infty)$$

$$(k_1,k_2,\ldots,k_n) \mapsto d^*(k_1,k_2,\ldots,k_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i d\left(H^i(k_1), H^i(k_2), \ldots, H^i(k_n)\right)$$

şeklinde tanımlansın. Buradaki $\lambda \in [0,1)$ *ve* $\mu < \frac{1}{\lambda} < 1$ *olsun.*
(i) (M,d^*) *bir* G_n-*metrik uzaydır,*
(ii) H *dönüşümü* (M,d^*) G_n- *metrik uzayında* $\frac{1}{\lambda}$ *sabitli bir büzülme dönüşümüdür,*
(iii) H *büzülme dönüşümü düzgün sürekli ve* (M,d) *tam* $G-$*metrik uzayı ise* (M,d^*) *tam* $G-$*metrik uzaydır.*

İspat (i) *Öncelikle* d^* *fonksiyonunun bir* G_n-*metrik olduğu ispatlanacaktır. Her* $k_1,k_2,\ldots,k_n \in M$ *için*

(G_n1) d *fonksiyonu* M *üzerinde bir* G_n-*metrik olduğu için*

$$d(k_1,k_2,\ldots,k_n) = 0 \iff k_1 = k_2 = \ldots = k_n \text{ dir.}$$

$$d^*(k_1,k_2,\ldots,k_n) = 0 \iff \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i d\left(H^i(k_1), H^i(k_2), \ldots, H^i(k_n)\right) = 0$$

$$\iff d(k_1,k_2,\ldots,k_n) = 0$$

$$\iff k_1 = k_2 = \ldots = k_n$$

elde edilir.

(G_n2) $\sigma; k_1,k_2,\ldots,k_n$ *üzerinde herhangi bir permütasyon olmak üzere*

$$\begin{aligned} d^*(k_1,k_2,\ldots,k_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i d\left(H^i(k_1), H^i(k_2), \ldots, H^i(k_n)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i d\left(\sigma\left\{H^i(k_1), H^i(k_2), \ldots, H^i(k_1)\right\}\right) \\ &\quad [\because d,\ G_n - \text{metrik}\ (G_n2)\ \text{koşulunu karşılar.}] \\ &= d^*\left(\sigma\left\{k_1,k_2,\ldots,k_n\right\}\right) \end{aligned}$$

(G_n3) $\{k_i : i \in \{1,2,\ldots,n\}\} \subsetneq \{l_i : i \in \{1,2,\ldots,n\}\}$ *olsun.*

$$\begin{aligned} d^*\left((k_1,k_2,\ldots,k_n)\right) &= \sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i d\left(H^i(k_1),H^i(k_2),\ldots,H^i(k_n)\right) \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i d\left(H^i(l_1),H^i(l_2),\ldots,H^i(l_n)\right) \\ &= d^*\left(l_1,l_2,\ldots,l_n\right) \end{aligned}$$

(G_n4) *Her* $1 \leq s \leq n$ *için* $k_1,k_2,\ldots,k_s,k_{s+1},k_{s+2},\ldots,k_n,w \in M$

$$\begin{aligned} d^*\left(k_1,k_2,\ldots,k_n\right) &= \sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i d\left(H^i(k_1),H^i(k_2),\ldots,H^i(k_s),H^i(k_{s+1}),H^i(k_{s+2}),\ldots,H^i(k_n)\right) \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i \left[\begin{array}{c} d\left(H^i(k_1),H^i(k_2),\ldots,H^i(k_s),w,\ldots,w\right) \\ +d\left(H^i(k_{s+1}),H^i(k_{s+2}),\ldots,H^i(k_n),w,\ldots,w\right) \end{array}\right] \\ &= \begin{array}{l} \sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i d\left(H^i(k_1),H^i(k_2),\ldots,H^i(k_s),w,\ldots,w\right) \\ +\sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i d\left(H^i(k_{s+1}),H^i(k_{s+2}),\ldots,H^i(K_n),w,\ldots,w\right) \end{array} \\ &= \begin{array}{l} d^*\left(k_1,k_2,\ldots,k_s,w,,w\ldots,w\right) \\ +d^*\left(k_{s+1},k_{s+2},\ldots,k_n,w,w,\ldots,w\right) \end{array} \end{aligned}$$

Böylece d^*, M *üzerinde bir* G_n-*metriktir. Dolayısıyla* (M,d^*) *ikilisi de* G_n-*metrik uzaydır.*

(ii) H *dönüşümünün* (M,d^*) *uzayında* $\frac{1}{\lambda}$ *sabiti ile* $\mu^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{\lambda} < 1$ *olacak şekilde bir büzülme dönüşümü olduğu gösterilecektir.*

d^* *tanımı kullanılarak*

$$d^*\left(H(k_1),H(k_2),\ldots,H(k_n)\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i d\left(H^iH(k_1),H^iH(k_2),\ldots,H^iH(k_n)\right)$$

ve ayrıca

$$d^*\left(k_1,k_2,\ldots,k_n\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i d\left(H^i(k_1),H^i(k_2),\ldots,H^i(k_n)\right)$$

$$\begin{aligned} \lambda d^*\left(H(k_1),H(k_2),\ldots,H(k_n)\right) - d^*\left(k_1,k_2,\ldots,k_n\right) &= -d\left(k_1,k_2,\ldots,k_n\right) \\ &\quad +\lambda^n d\left(H(k_1),H(k_2),\ldots,H(k_n)\right) \end{aligned}$$

elde edilir. H^n *dönüşümü* (M,d) *uzayında* μ *sabitli ve* $\mu^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{\lambda} < 1$ *olacak şekilde bir büzülme dönüşümü olduğundan*

$$\begin{aligned} d^*\left(H\left(k_1\right),H\left(k_2\right),\ldots,H\left(k_n\right)\right) &= \frac{1}{\lambda}\left[d^*\left(k_1,k_2,\ldots,k_n\right)-d\left(k_1,k_2,\ldots,k_n\right)\right] \\ &\quad +\lambda^{n-1}d\left(H\left(k_1\right),H\left(k_2\right),\ldots,H\left(k_n\right)\right) \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\left[d^*\left(k_1,k_2,\ldots,k_n\right)-d\left(k_1,k_2,\ldots,k_n\right)\right] \\ &\quad +\mu\lambda^{n-1}d\left(k_1,k_2,\ldots,k_n\right) \\ &= \frac{1}{\lambda}d^*\left(k_1,k_2,\ldots,k_n\right) \\ &\quad +\left[\mu+\frac{1}{\lambda^n}\right]\lambda^{n-1}d\left(k_1,k_2,\ldots,k_n\right) \\ &\leq \frac{1}{\lambda}d^*\left(k_1,k_2,\ldots,k_n\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle H *dönüşümü* (M,d^*) *uzayında* $\frac{1}{\lambda}$ *sabitli büzülme dönüşümüdür.*

(iii) (k_p) *dizisi* (M,d^*) *uzayında herhangi bir* G_n-*Cauchy dizisi olsun. O halde* (k_p) *dizisi* $d^*\left(k_1,k_2,\ldots,k_n\right)\leq d\left(k_1,k_2,\ldots,k_n\right)$ *nedeniyle* (M,d) *uzayındaki bir* G_n-*Cauchy dizisidir. O halde* (M,d) G_n-*metrik uzayı tam olduğundan* $(k_p)\to L$ *olacak şekilde en az bir* $L\in M$ *noktası vardır.* $\beta=\max\left\{\lambda^i : i=1,2,\ldots,n-1\right\}$, $\beta\geq\lambda>1$ *olsun. Ayrıca* H *dönüşümü düzgün sürekli olduğundan* $H\left(k_p\right)\to H\left(L\right)$ *olur.* H *dönüşümünün tüm bileşkeleri* (M,d) G_n-*metrik uzayında düzgün sürekli olduğundan herhangi bir* $\varepsilon>0$ *için* $\delta>0$ *vardır. Öyle ki tüm* $k_1,k_2,\ldots,k_n\in M$ *ve* $i=0,1,\ldots,n-1$ *için* $d\left(k_1,k_2,\ldots,k_n\right)<\delta$ *ise* $d\left(H^i\left(k_1\right),H^i\left(k_2\right),\ldots,H^i\left(k_n\right)\right)<\frac{\varepsilon}{\beta^n}$ *olur. Ayrıca* $(x_p)\to L$ *ise her* $\delta>0$ *için her* $r\geq n_0$ *özelliğindeki* $d\left(k_r,\ldots,k_r,L\right)<\delta$ *olacak şekilde* $n_0\in\mathbb{N}$ *doğal sayısı vardır. Böylece* $i=1,2,\ldots,n-1$ *için* $r\geq n_0$ *ise* $d\left(H^i\left(k_r\right),\ldots,H^i\left(k_r\right),H^i\left(L\right)\right)<\frac{\varepsilon}{\beta^n}$ *olur. Öyleyse* $d^*\left(k_r,\ldots,k_r,L\right)<\frac{\varepsilon}{n}\left[\frac{1}{\beta}+\frac{\lambda}{\beta}+\ldots+\frac{\lambda^{n-1}}{\beta}\right]<\varepsilon$ *olur. Sonuç olarak* (k_p) *bir* G_n-*Cauchy dizisidir ve* L *noktasına* G_n-*yakınsaktır. Dolayısıyla* (M,d^*) *bir tam* G_n-*metrik uzaydır.*

5. TAM BİR A_b-METRİK UZAYDAN YENİ TAM BİR A_b-METRİK UZAY ELDE EDİLİŞİ

Bu bölümde, bir A_b-metrik uzayda tanımlanan herhangi bir H dönüşümü için bazı $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere H^n büzülme dönüşümü iken H dönüşümünün de büzülme dönüşümü olacağı yeni bir A_b-metrik uzay inşa edilecektir. Üstelik bu H dönüşümü düzgün sürekli ve ilk baştaki A_b-metrik uzayı tam ise yeni inşa edilen A_b-metrik uzayının da tam olacağı ispatlanacaktır.

Öncelikle A_b-metrik uzaylarda Banach Sabit Nokta Teoremi verilmiştir.

Teorem 5.1 *(A_b-metrik uzaylarda Banach Sabit Nokta Teoremi) (M,d) tam bir A_b-metrik uzay ve $H:(M,d)\to(M,d)$ büzülme katsayısı $\lambda\in[0,1)$ olan bir büzülme dönüşümü olsun. Bu taktirde H dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.*

İspat *$H:M\to M$ dönüşümü M tanım kümesinin her bir elemanı bir kural ile M değer kümesinin en az bir elemanı ile eşleyeceğinden her $p\in\mathbb{N}$ için $k_{p+1}=H(k_p)$ eşitliği yazılabilir. Bu eşitlik için aşağıdaki gibi iki durum söz konusudur;*

1. Durum : $k_{p+1}=k_p$ ise k_p noktası H büzülme dönüşümünün sabit noktasıdır.

2. Durum : $k_{p+1}\neq k_p$ ise H büzülme dönüşümü olduğundan

$$\begin{aligned} d(k_{p+1},k_{p+2},\ldots,k_{p+n+1}) &= d(Hk_p,Hk_{p+1},\ldots,Hk_{p+n}) \\ &\leq \lambda d(k_p,k_{p+1},\ldots,k_{p+n}) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\leq \lambda^{p+1}d(k_0,k_1,\ldots,k_n) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $\lambda\in[0,1)$ olduğundan $p\to\infty$ iken $d(k_{p+1},k_{p+2},\ldots,k_{p+n+1})\to 0$ yakınsaklığı elde edilir. Dolayısıyla (k_p) dizisi, (M,d) uzayında bir A_b-Cauchy dizisidir ($\because$ Yardımcı Teorem 3.16). Ayrıca (M,d) tam bir A_b-metrik uzay olduğundan $\lim\limits_{p\to\infty}k_p=L$ olacak şekilde bir $L\in M$ vardır.

H büzülme dönüşümü olduğundan $d(k_p, H(L), \ldots, H(L)) \leq \lambda d(k_p, L, \ldots, L)$ eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin $p \to \infty$ iken her iki tarafında limit alınırsa $d(L, H(L), \ldots, H(L)) \leq d(L, L, \ldots, L) = 0$ eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikten $d(L, H(L), \ldots, H(L)) = 0$ sonucu elde edilir ki $(A_b 1)$ aksiyomundan bu $H(L) = L$ olması demektir. Böylece L nin H büzülme dönüşümünün sabit noktası olduğu bulunur. Bu sabit noktanın tekliği ise aşağıdaki gibi gösterilecektir;

H büzülme dönüşümünün birbirinden farklı L_1 ve L_2 gibi iki tane sabit noktası olduğu varsayılsın. Yani, $L_1 \neq L_2$ olmak üzere $H(L_1) = L_1$ ve $H(L_2) = L_2$ olsun.

$$\begin{aligned} d(L_1, \ldots, L_1, L_2) &= d(H(L_1), \ldots, H(L_1), H(L_2)) \\ &\leq \lambda d(L_1, \ldots, L_1, L_2) \qquad \because \text{ } H \text{ büzülme dönüşümü} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik $\lambda \in [0, 1)$ olduğu için ancak $d(L_1, \ldots, L_1, L_2) = 0$ olması ile sağlanır. Bu ise $L_1 = L_2$ anlamına gelir. Ancak başlangıçta bu elemanlar birbirinden farklı alındığından bu bir çelişki olup, H büzülme dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 5.2 *(M, d) tam bir A_b-metrik uzay ve bu uzayda $H : M \to M$ dönüşümü verilsin. Ayrıca, H^n büzülme katsayısı $\lambda \in [0, 1)$ olan bir büzülme dönüşümü olsun Bu takdirde H dönüşümünün (M, d) A_b-metrik uzayında bir tek sabit noktası vardır.*

İspat *Keyfi $k \in M$ ve $n \in \{0, 1, \ldots\}$ için $H^n(k)$ dönüşümünü $H^0(k) = k$ ve $H^{n+1}(k) = H(H^n(k))$ olacak şekilde tanımlansın. H^n, (M, d) tam A_b-metrik uzayında bir büzülme dönüşümü olduğundan Teorem 5.1 gereği $H^n(k) = k$ olacak şekilde bir tek sabit noktası vardır. Ayrıca $H^{n+1}(k) = H(H^n(k)) = H(k)$ ve $H^{n+1}(k) = H^n(H(k)) = H(k)$ eşitliklerinden $H(k)$ de H^n büzülme dönüşümünün sabit noktası olur. Fakat Teorem 5.1 gereği sabit noktanın tekliğinden $H(k) = k$ elde edilir. Bu ise H dönüşümünün bir tek sabit noktası olduğunu gösterir.*

Bu sonuç bir dönüşümün herhangi bir kuvveti büzülme dönüşümü iken dönüşümün kendisinin de bir tek sabit noktaya sahip olduğunu ortaya koyar. Üstelik dönüşüm için gerekli olan bir koşul yoktur.

Teorem 5.3 *(M,d) bir A_b-metrik uzay olmak üzere $H:(M,d)\to(M,d)$ dönüşüm olsun. H^n dönüşümü (M,d) uzayında μ sabitli bir büzülme dönüşümü olsun. d^* fonksiyonu da*

$$d^* \;:\; \overbrace{M\times M\times\ldots\times M}^{n\ tane} \;\to\; [0,\infty)$$

$$(k_1,k_2,\ldots,k_n) \;\mapsto\; d^*(k_1,k_2,\ldots,k_n)=\sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i d\left(H^i(k_1),H^i(k_2),\ldots,H^i(k_n)\right)$$

şeklinde tanımlansın. Buradaki $\lambda\in[0,1)$ ve $\mu<\frac{1}{\lambda}<1$ olsun.
(i) (M,d^*) bir A_b-metrik uzaydır,
(ii) H dönüşümü (M,d^*) A_b- metrik uzayında $\frac{1}{\lambda}$ sabitli bir büzülme dönüşümüdür,
(iii) H büzülme dönüşümü düzgün sürekli ve (M,d) tam A_b-metrik uzayı ise (M,d^*) tam A_b-metrik uzaydır.

İspat *(i) İlk olarak d^* fonksiyonunun bir A_b-metrik olduğu ispatlanacaktır. Her $k_1,k_2,\ldots,k_n\in M$ ve $I=\{0,1,\ldots,n-1\}$ için*

(A_b1) d fonksiyonu M üzerinde bir A_b-metriği olduğundan

$$k_1=k_2=\ldots=k_n \iff \text{Her } i\in I,\ d\left(H^i(k_1),H^i(k_2),\ldots,H^i(k_n)\right)=0$$

$$\iff \sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i d\left(H^i(k_1),H^i(k_2),\ldots,H^i(k_n)\right)=0$$

$$\iff d^*(k_1,k_2,\ldots,k_n)=0$$

elde edilir.

(A_b2) d^* fonksiyonu tanımı kullanılarak ve $b\geq 1$ için

$$d^*(k_1,\ldots,k_1,w)=b\sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i d\left(H^i(k_1),\ldots,H^i(k_1),H^i(w)\right)$$

$$d^*(k_2,\ldots,k_2,w)=b\sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i d\left(H^i(k_2),\ldots,H^i(k_2),H^i(w)\right)$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$d^*(k_n,\ldots,k_n,w)=b\sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i d\left(H^i(k_n),\ldots,H^i(k_n),H^i(w)\right)$$

olur. Kısa olması için $d^*(k_1,\ldots,k_1,w)+d^*(k_2,\ldots,k_2,w)+\ldots+d^*(k_n,\ldots,k_n,w)=K$ şeklinde gösterilsin.

$$K=b\sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i\left[\begin{array}{c} d\left(H^i(k_1),\ldots,H^i(k_1),H^i(w)\right)+\ldots \\ +d\left(H^i(k_n),\ldots,H^i(k_n),H^i(w)\right)\end{array}\right]$$

d fonksiyonu M uzayı üzerinde bir A_b-metrik olduğundan

$$\begin{aligned} K &= b\sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i \left[\begin{array}{c} d\left(H^i\left(k_1\right),\ldots,H^i\left(k_1\right),H^i\left(w\right)\right)+\ldots \\ +d\left(H^i\left(k_n\right),\ldots,H^i\left(k_n\right),H^i\left(w\right)\right) \end{array} \right] \\ &\geq b\sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i d\left(H^i\left(k_1\right),\ldots,H^i\left(k_n\right)\right) \\ &= d^*\left(k_1,\ldots,k_n\right) \end{aligned}$$

Sonuç olarak d^* fonksiyonu M üzerinde bir A_b-metriktir. Dolayısıyla (M,d^*) sıralı ikilisi de bir A_b-metrik uzaydır.

(ii) Şimdi de H dönüşümünün (M,d^*) uzayında $\frac{1}{\lambda}$ sabiti ile $\mu^{\frac{1}{n}}<\frac{1}{\lambda}<1$ olacak şekilde bir büzülme dönüşümü olduğu gösterilecektir.
d^* tanımı kullanılarak

$$d^*\left(H\left(k_1\right),H\left(k_2\right),\ldots,H\left(k_n\right)\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i d\left(H^iH\left(k_1\right),H^iH\left(k_2\right),\ldots,H^iH\left(k_n\right)\right)$$

ve ayrıca

$$d^*\left(k_1,k_2,\ldots,k_n\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i d\left(H^i\left(k_1\right),H^i\left(k_2\right),\ldots,H^i\left(k_n\right)\right)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \lambda d^*\left(H\left(k_1\right),H\left(k_2\right),\ldots,H\left(k_n\right)\right)-d^*\left(k_1,k_2,\ldots,k_n\right) &= -d\left(k_1,k_2,\ldots,k_n\right) \\ &\quad +\lambda^n d\left(H\left(k_1\right),H\left(k_2\right),\ldots,H\left(k_n\right)\right) \end{aligned}$$

basit bir hesaplama ile bulunabilir. H^n dönüşümü (M,d) uzayında μ sabitli ve $\mu^{\frac{1}{n}}<\frac{1}{\lambda}<1$ olacak şekilde bir büzülme dönüşümü olduğundan

$$\begin{aligned} d^*\left(H\left(k_1\right),H\left(k_2\right),\ldots,H\left(k_n\right)\right) &= \begin{array}{l} \frac{1}{\lambda}\left[d^*\left(k_1,k_2,\ldots,k_n\right)-d\left(k_1,k_2,\ldots,k_n\right)\right] \\ +\lambda^{n-1}d\left(H\left(k_1\right),H\left(k_2\right),\ldots,H\left(k_n\right)\right) \end{array} \\ &\leq \begin{array}{l} \frac{1}{\lambda}\left[d^*\left(k_1,k_2,\ldots,k_n\right)-d\left(k_1,k_2,\ldots,k_n\right)\right] \\ +\mu\lambda^{n-1}d\left(k_1,k_2,\ldots,k_n\right) \end{array} \\ &= \begin{array}{l} \frac{1}{\lambda}d^*\left(k_1,k_2,\ldots,k_n\right) \\ +\left[\mu+\frac{1}{\lambda^n}\right]\lambda^{n-1}d\left(k_1,k_2,\ldots,k_n\right) \end{array} \\ &\leq \frac{1}{\lambda}d^*\left(k_1,k_2,\ldots,k_n\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle H dönüşümü (M,d^*) uzayında $\frac{1}{\lambda}$ sabitli büzülme dönüşümüdür.

(iii) (k_n) *dizisi* (M, d^*) *uzayında herhangi bir* A_b-*Cauchy dizisi olsun. O halde* (k_n) *dizisi* $d^*(k_1, k_2, \ldots, k_n) \leq d(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ *nedeniyle* (M, d) *uzayındaki bir* A_b-*Cauchy dizisidir. O halde* (M, d) A_b-*metrik uzayı tam olduğundan* $(k_n) \to L$ *olacak şekilde en az bir* $L \in M$ *noktası vardır.* $\beta = \max\{\lambda^i : i = 1, 2, \ldots, n-1\}$, $\beta \geq \lambda > 1$ *olsun. Ayrıca* H *dönüşümü düzgün sürekli olduğundan* $H(k_n) \to H(L)$ *olur.* H *dönüşümünün tüm bileşkeleri* (M, d) A_b-*metrik uzayında düzgün sürekli olduğundan herhangi bir* $\varepsilon > 0$ *için* $\delta > 0$ *vardır. Öyle ki tüm* $k_1, k_2, \ldots, k_n \in M$ *ve* $i = 0, 1, \ldots, n-1$ *için* $d(k_1, k_2, \ldots, k_n) < \delta$ *ise* $d(H^i(k_1), H^i(k_2), \ldots, H^i(k_n)) < \frac{\varepsilon}{\beta^n}$ *olur. Ayrıca* $(k_p) \to L$ *ise her* $\delta > 0$ *için her* $r \geq n_0$ *özelliğindeki* $d(k_r, \ldots, k_r, L) < \delta$ *olacak şekilde* $n_0 \in \mathbb{N}$ *doğal sayısı vardır. Böylece* $i = 1, 2, \ldots, n-1$ *için* $r \geq n_0$ *ise* $d(H^i(k_r), \ldots, H^i(k_r), H^i(L)) < \frac{\varepsilon}{\beta^n}$ *olur. Öyleyse* $d^*(k_r, \ldots, k_r, L) < \frac{\varepsilon}{n}\left[\frac{1}{\beta} + \frac{\lambda}{\beta} + \ldots + \frac{\lambda^{n-1}}{\beta}\right] < \varepsilon$ *olur. Sonuç olarak* (k_p) *bir* A_b-*Cauchy dizisidir ve* L *noktasına* A_b-*yakınsaktır. Dolayısıyla* (M, d^*) *tam bir* A_b-*metrik uzaydır.*

6. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu tez kapsamında alışılmış metrik uzayların bazı genelleştirilmeleri tarihsel sırayla verilmiştir. Bu genellemelerin yapılmasının temel amacı n tane nokta arasındaki uzaklığı aynı anda ölçebilme fikri olduğundan daha çok, ünlü Banach sabit nokta teoremini genellemek olduğu görülmektedir. Bahsedilen bütün genelleştirilmiş metrik uzayların özelliklerine değinilmiş ve bu uzaylar için temel tanım, teorem ve örnekler verilmiştir. Ayrıca bu uzayların birbiri ile olan ilişkisi incelenmiştir.

Çalışmadaki asıl irdelenen uzaylar olan G_n-metrik uzay ve A_b-metrik uzay daha detaylı incelenmiştir. Literatürde iyi bilinen Banach sabit nokta teoremi bahsedilen tüm uzaylarda ifade edilmiş ve ispatlanmıştır.

Tam bir metrik uzayda tanımlanan sürekli bir H dönüşümü için bazı $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere H^n büzülme dönüşümü iken H dönüşümünün bir tek sabit noktası olduğu iyi bilinen bir teoremdir. Fakat 1968 yılında V. B. Bryant, bu ifade de kullanılan süreklilik varsayımının gerekli olmadığını göstermiştir. Yaé Ulrich O. Gaba ise 2018 yılında "Related $G-$metrics and Fixed Points" başlıklı makalesinde bu teoremi $G-$metrik uzaya taşımış ve H dönüşümünün de büzülme olacağı yeni bir $G-$metrik uzay elde etmiştir. Ayrıca H dönüşümünün düzgün sürekli olması durumunda yeni elde ettiği $G-$metrik uzayının da tam olacağını göstermiştir. Benzer olarak bu tez çalışmasında bir G_n-metrik uzayda tanımlanan herhangi bir H dönüşümü için bazı $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere H^n büzülme dönüşümü iken H dönüşümünün de büzülme dönüşümü olacağı yeni bir G_n-metrik uzay inşa edilmiştir. Verilen H dönüşümü düzgün sürekli olduğunda G_n-metrik uzayının tam olduğu ispatlanmıştır. Benzer inşa A_b-metrik uzayda da verilmiştir.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, alışılmış metrik uzayların genellemelerinden bahsedilmiştir. Genellemelerin alışılmış metrik uzaydan nasıl elde edilebileceği yahut bu genellemelerden alışılmış metrik uzayın nasıl elde edilebileceğine dair örnekler incelenmiştir. Bu genellemelerden G_n-metrik uzay ve A_b-metrik uzayın özellikleri ayrıntılı olarak ifade edilmiş ve bazı önemli teoremlerin yanı sıra Banach sabit nokta teoremi bu uzaylarda ispatlanmıştır. Ayrıca, Yaé Ulrich O. Gaba'nın 2018 yılındaki "Related $G-$metrics and Fixed Points" adlı makalesinde herhangi bir tam $G-$metrik uzaydan yeni bir tam $G-$metrik uzayın nasıl elde edildiği verilmiştir. Ve yine bu çalışmada Gaba'nın verdiği inşa yönteminden yararlanarak tam bir G_n ve A_b-metrik uzaydan yeni tam bir G_n ve A_b-metrik uzay inşa edilmiştir.

Bundan sonraki metrik sabit nokta teorisi çalışmalarında metrik uzayın başka genellemeleri olan genelleştirilmiş metrik uzaylarda Gaba tarafından verilen yöntemin işleyip işlemediği ile ilgili bazı sonuçlar elde edilebilir ve bu sonuçlar genelleştirilmiş metrik uzaylarda tamlık karakterizasyonu için yol gösterici olabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Abbas M., Ali B., Suleiman Y. I., 2015, Generalized coupled common fixed point results in partially ordered $A-$metric spaces. Fixed Point Theory and Applications., 2015:64.

Bonsall, F. F., 1962, Lectures on Some Fixed-point Theorems of Functional Analysis, Bombay: Tata Institute of Fundamental Research.

Bryant, V. W., 1968, A remark on a fixed-point theorem for iterated mappings, American Mathematical Monthly, Vol: 75, 399-400.

Choi, H., Kim, S., Yang, S.,Y., 2018, Structure for $g-$ Metric Spaces and Related Fixed Point Theorems, arXiv:1804.03651.

Dhage, B.C., 1984, A study of some fixed point theorem, Ph.D. Thesis. Marathwada Univ. Aurangabad.

Dhage, B. C., 1992, Generalized metric spaces and mapping with fixed points. Bull. Calcutta Math. Soc., 84:329–336.

Dung, N. V., 2014, Radojevic S. Fixed point theorems for $g-$monotone maps on partially ordered $S-$metric spaces, Filomat;28(9):1885-1898.

Edwards, R. E., 1965, Functional Analysis, Theory and Applications, New York: Holt, Rinehart and Winston.

Erçınar, G. Z., 2020, Sabit Noktaların Bazı Geometrik Özellikleri, Doktora tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

Fréchet, M., 1906, Sur quelques points du calcul fonctionnel, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 22, 1–74.

Gähler, S., 1963, 2-Metriche raume und ihre topologische strukture. Math. Nachr. 26, 115–148.

Gaba, Y. U. O., 2018, Related G-Metrics and Fixed Points, Analele Universitatii de Vest, Timişoara Seria Matematica-Informatica, Vol: LVI(1), 64–72.

Ha, B. K., Cho, Y. J., Kim, S. S., Khan, M. S. , 1987, Strictly Convex Linear $2-$Normed Spaces, Math. Nachr. 146.

Kolmogorov, A., 1957, S. V. Fomin, Introduction to Functional Analysis 1, New York, Graylock Press.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Mustafa, Z., Sims, B., 2003, Some remarks concerning $D-$metric spaces, Proc. Int. Conf. on Fixed Point Theory and Appl., Valencia (Spain), July, 189-198.

Mustafa, Z., Sims, B., 2006, A new approach to generalized metric spaces. J. Nonlinear Convex Anal. 7(2), 289–297.

Önçırak, S., 2020, Genelleştirilmiş Metrik Uzaylarda Kapalı Bağıntıları Sağlayan Dönüşümlerin Sabit Noktaları, Yüksek lisans tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 118s.

Roldán, A., Karapınar, E. and Kumam, P., 2014, $G-$Metric spaces in any number of arguments and related fixed-point theorems, Fixed Point Theory and Applications, 2014:13.

Sedghi, S., Shobe, N., Aliouche, A., 2012, A generalization of fixed point theorems in S – metric spaces, Mat. Vesnik, 64 (3), 258 – 266.

Sedghi, S., Dung, N.V., 2014, Fixed point theorems on S – metric spaces, Mat. Vesnik, 66 (1), 113 – 124.

Taş, N., 2017, Sabit Nokta Teoremleri Ve Çeşitli Uygulamaları, Doktora tezi, Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

Ughade, M., Türkoğlu, D., Singh, S. K. and Daheriya, R. D., 2016, Some fixed point theorems in Ab – metric space, British Journal of Mathematics and Computer Science, 19 (6), 1 – 24.