Üç Boyutlu Uzayın TD Metriğine Göre İzometri Grubu Üzerine

Mustafa Çolak

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Ağustos 2018

On The Isometry Group Of Three Dimensional Space With Resptect To TD Metric

Mustafa Çolak

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics and Computer Science

Aug 2018

Üç Boyutlu Uzayın TD Metriğine Göre İzometri Grubu Üzerine

Mustafa Çolak

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Temel Ermiş

Ağustos 2018

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS öğrencisi Mustafa Çolak'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı " Üç Boyutlu Uzayın TD Metriğine Göre İzometri Grubu Üzerine " başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Temel Ermiş

İkinci Danışman : -

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Temel Ermiş

Üye : Prof. Dr. Özcan Gelişgen

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Ümit Ziya Savcı

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Dr. Öğr. Üyesi Temel Ermiş danışmanlığında hazırlamış olduğum "Üç Boyutlu Uzayın TD Metriğine Göre İzometri Grubu Üzerine" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 16/08/2018

Mustafa Çolak

ÖZET

Bu tezde, birim küresi truncated dodecahedron olan metrik tanıtılmıştır. Bu metrik sayesinde truncated dodecahedron ile metrik geometri arasındaki ilişki verilmiştir.

Üçüncü bölümde benzer ilişkinin Platonik cisimler içinde geçerli olduğu hatırlatılmıştır.

Son bölümde birim küresi truncated dodecahedron olan metriğe göre, üç boyutlu analitik uzayın izometri grubunun ötelemeler grubu ile truncated dodecahedronun simetri grubunun yarı direk çarpımı olduğu analitik olarak ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Uzaklık Fonksiyonu, Metrik, Metrik Geometri, Truncated Dodecahedron, İzometri, İzometri Grup

SUMMARY

In this thesis, a new metric of which unit sphere is the truncated dodecahedron is introduced. So, the relation between truncated dodecahedron and metric geometry is given by this metric.

In the third chapter, it is reminded that a similar relation applies to Platonic solids.

In the last chapter, we analytically prove that the group of isometries of the three-dimensional analytic space furnished by truncated icosahedron metric is the semi-direct product of symmetry group of truncated dodecahedron and the group of all translations of the 3-dimensional space.

Keywords: Distance Function, Metric, Metric Geometry, Truncated Dodecahedron, Isometry, Isometry Group.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisansa başladığım ilk andan itibaren her konuda yardımını esirgemeyen, özveriyle bilgisini her daim aktaran danışman hocam

Dr. Öğr. Üyesi Temel ERMİŞ'e

tez çalışmam sırasında bana bilimsel katkısını ve desteğini esirgemeyen değerli hocam

Prof. Dr. Özcan GELİŞGEN' e

maddi ve manevi her türlü desteklerini gördüğüm, varlıkları ile bana güç veren aileme teşekkürlerimi sunarım.

Eskişehir, 2018
Mustafa Çolak

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET . . . . . **vi**

SUMMARY . . . . . **vii**

TEŞEKKÜR . . . . . **viii**

İÇİNDEKİLER . . . . . **ix**

ŞEKİLLER DİZİNİ . . . . . **x**

1. GİRİŞ VE AMAÇ **1**

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI **8**

3. DÜZGÜN ÇOKYÜZLÜLER VE METRİKLERİ **13**

3.1. Düzgün Dört Yüzlü (Tetrahedron) 13

3.2. Düzgün Altı Yüzlü (Küp-Hexahedron) 14

3.3. Düzgün Sekiz Yüzlü (Octahedron) 15

3.4. Düzgün On İki Yüzlü (Dodecahedron) 17

3.5. Düzgün Yirmi Yüzlü (Icosahedron) 18

4. DÜZGÜN ON İKİ YÜZLÜDEN ELDE EDİLEN ARCHİMEDEAN OTUZ İKİ YÜZLÜSÜ: TRUNCATED DODECAHEDRON **20**

5. $\mathbb{R}^3_{TD}$ ÜN İZOMETRİ GRUBU **40**

6. BULGULAR VE TARTIŞMA **60**

7. SONUÇ VE ÖNERİLER **61**

KAYNAKLAR DİZİNİ **62**

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil		Sayfa
1.1	Platonik Cisimler	2
1.2	Platonik cisimlerin ilk örnekleri	3
1.3	Archimed ve Catalan Cisimler	4
1.4	Archimed ve Catalan Cisimler	5
1.5	Platonik Cisimlerde Duallik	6
3.1	Tetrahedron	14
3.2	Hexahedron	15
3.3	Octahedron	17
3.4	Dodecahedron	18
3.5	Icosahedron	19
4.1	Dodecahedron ve Truncated Dodecahedron	21
4.2	Dodecahedron İnşası	22
4.3	Dodecahedron İnşası	22
4.4	Dodecahedronun bir yüzeyi	24
4.5	Yönlendirme	39
5.1	Birim Normal Vektörleri Verilen Yansıma Düzlemlerine Göre Truncated Dodecahedronun Köşe Nokta Görüntüleri	44
5.2	Dönme Eksenleri ve Açıları Verilen Dönme Dönüşümüne Göre Truncated Dodecahedronun Köşe Nokta Görüntüleri	47
5.3	Dönme Eksenleri ve Açıları Verilen Dönme Dönüşümüne Göre Truncated Dodecahedronun Köşe Nokta Görüntüleri	48
5.4	İnversiyonu Dönüşümü Altında Truncated Dodecahedronun Köşe Nokta Görüntüleri	49
5.5	Dönme-Yansıma Dönüşümüne Göre Truncated Dodecahedronun Köşe Nokta Görüntüleri	51
5.6	Dönme-İnversiyon Altında Nokta Görüntüleri	55
5.7	Dönme-İnversiyon Altında Nokta Görüntüleri	56
5.8	Minimum uzaklık kümesi	57
5.9	Minimum uzaklık kümesi ve Truncated dodecahedron birim küresi	59

1. GİRİŞ VE AMAÇ

İnsanoğlu doğayı keşfetmek ve anlamak adına bilime, doğadaki güzeli bulmak adına ise sanata yönelmiştir. Bu yöneliş içerisinde, bilim bilinmeyeni öğrenmek, doğruları bulmak olarak özetlenebilir iken, sanat güzelliği yakalama çabası olarak özetlenebilir. Bu anlamda doğadaki güzelliği açıklayan dile sanat, doğanın kanunlarını açıklayan dile ise matematik denir. Burada " güzellik kavramı matematiksel bir dille ifade edilebilir mi ? " sorusu yerinde olacaktır. Güzelliği ifade etmek adına yapılması gereken matematiğin ne olduğu tartışılabilir, fakat güzellikten bahsedibilmek adına bir ölçütün olması gerektiği savunulabilir. Bu ölçüt oran, uyum ve en önemlisi simetri gibi matematiksel kavramlarla açıklanabilir. Sonuç olarak, Ermiş (2014) doktora tezinde şunlardan bahsetmektedir; estetik ve simetri matematiksel dünyada oldukça karşılık bulan kavramlardır. Özellikle simetri insanoğlunun estetik anlayışının en önemli unsuru olması sebebiyle matematik, fizik, kimya, mimari gibi birçok sanat ve bilimdalında üzerinde titizlikle çalışılan bir olgu olmuştur [Atiyah vd., 2003; Lopez vd., 2006; Griffiths., 1987]. Sahip oldukları birden çok simetri özelliğinden dolayı, çokyüzlüler matematiksel ve estetik açıdan insanların ilgisini üzerine çeken objeler olmuşlardır. Bu anlamda kimileri çokyüzlüleri kullanarak yaşamı, doğayı anlamaya çalışırken, kimileri sanatlarıyla çokyüzlüleri birleştirmiştir. Sahip olduklari harika estetik ve simetrilerden dolayı, matematik, fizik, kimya, biyoloji, mimari gibi birçok disiplinde yer bulan çokyüzlüler genel olarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 1.1 *[Lauritzen, 2009]* a_{ij} *ve* b_i *herhangi reel sayılar ve* $x_1, \ldots, x_n$ *de bilinmeyenler olmak üzere,*

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{gathered}$$

sonlu lineer eşitsizlikten oluşan sistemin

$$P = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\}$$

çözüm kümesine $\mathbb{R}^n$ *de çokyüzlü denir.*

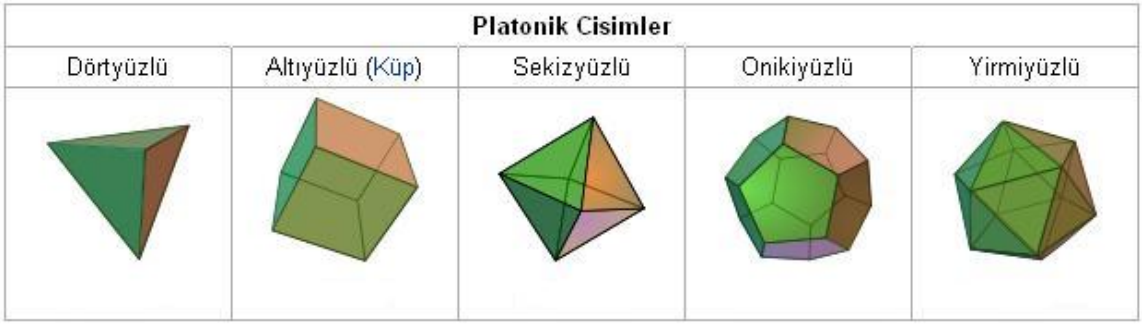
Kısaca $\mathbb{R}^3$ her bir yüzü düzlemsel çokgenler ile sınırlanan cisimlere çokyüzlü denir. Temel olarak çokyüzlüler dış bükey (konveks) ve iç bükey (konkav) olmak üzere iki ana

sınıfa ayrılır. Eğer bir çokyüzlünün herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasının tamamı, çokyüzlünün yüzeyinde (bir yüzünde) veya içinde kalıyorsa bu çokyüzlüye **dış bükey**, aksi halde **iç bükey** denilmektedir. Konveks ve konkav çokyüzlülerde kendi içinde bir çok alt sınıfa ayrılabilir. Fakat $\mathbb{R}^3$ te en çok bilinen konveks çokyüzlüler; Platonik cisimler (düzgün çokyüzlüler), Archimed cisimler (yarı-düzgün çokyüzlüler) ve Catalan cisimleridir.

Tüm ayrıt ve yüzleri eş ve her köşeden aynı sayıda yüz geçen çokyüzlülere **düzgün çokyüzlü** denir. Ünlü Euler formülü yardımıyla

Köşe Sayısı + Yüzey Sayısı - Ayrıt Sayısı = 2

düzgün çokyüzlülerin sayısının sadece beş tane olduğu rahatlıkla ispatlanabilmektedir [Ermiş, 2014].



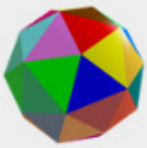
Şekil 1.1 Platonik Cisimler

Her ne kadar bazı arkeolojik kazılarda, İskoçya da, cilalı taş devrinden (late Neolithic) kalan düzgün çokyüzlü örnekleri (Bkz. Şekil 1.2) bulunmuş olsada M.Ö. yaklaşık 360 lı yıllarda ”Timaus” adlı eserinde düzgün çokyüzlülerden bahseden Platon (Eflâtûn)’ na itafen düzgün çokyüzlülere Platonik cisimler adıda verilir.

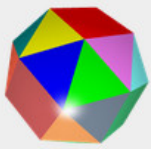
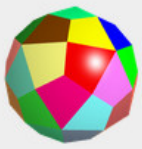
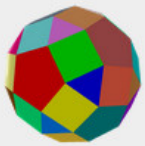
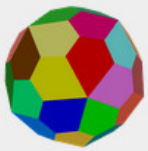
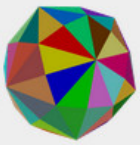


Şekil 1.2 Platonik cisimlerin ilk örnekleri

Düzgün çok yüzlülerin sayısı sadece beş olmasına rağmen düzgün olmayan çokyüzlülerin sayısı oldukça fazladır. Düzgün olmayan çokyüzlüler sınıfından en çok bilinenleri Archimed cisimleri (yarı-düzgün çokyüzlüler) ve Catalan cisimleridir. Archimed cisimleri tam olarak on üç tanedir ve en belirgin özellikleri herbir köşesinden geçen ayrıt ve yüzey sayıları aynı iken yüzeyleri oluşturan çokgenlerin düzgün çokgenler olmasına rağmen hepsinin aynı tipten olmamasıdır (Bkz. Şekil 1.3 - 1.4). Pappus un ilk olarak bu yarı düzgün cisimlerin varlığını bilen ve listesini verenin Archimed olduğunu belirtmesiyle, bu çokyüzlülere Archimed cisimleri adı verilir. Düzgün olmayan çokyüzlüler içerisinden yüzeyleri oluşturan çokyüzlülerin hepsinin eş (aynı tip) olmasına rağmen, her bir köşeden geçen yüzey ve ayrıt sayısının farklı olması ile elde edilen düzgün olmayan çok yüzlülere Catalan cisimleri denir. Bu şekilde isimlendirilmesinin sebebi ise ilk olarak 1865 yılında Belçikalı matematikçi Eugène Charles Catalan (30 Mayıs 1814-14 Şubat 1894) tarafından tanımlanmış olmalarındandır.

TRIAKIS TETRAHEDRON F = 12 V = 8 E = 18			**TRUNCATED TETRAHEDRON** V = 12 F = 8 (4 Triangles + 4 Hexagons) E = 18
TRIAKIS OCTAHEDRON F = 24 V = 14 E = 38			**TRUNCATED CUBE** V = 24 F = 14 (8 Triangles + 6 Octagons) E = 38
TETRAKIS HEXAHEDRON F = 24 V = 14 E = 36			**TRUNCATED OCTAHEDRON** V = 24 F = 14 (8 Hexagons + 6 Squares) E = 36
TRIAKIS ICOSAHEDRON F = 60 V = 32 E = 90			**TRUNCATED DODECAHEDRON** V = 60 F = 32 (20 Triangles + 12 Decagons) E = 90
PENTAKIS DODECAHEDRON F = 60 V = 32 E = 90			**TRUNCATED ICOSAHEDRON** V = 60 F = 32 (12 Pentagons + 20 Hexagons) E = 90
RHOMBIC DODECAHEDRON F = 12 V = 14 E = 24			**CUBOCTAHEDRON** V = 12 F = 14 (8 Triangles + 6 Squares) E = 24
DISDYAKIS DODECAHEDRON F = 48 V = 26 E = 72			**TRUNCATED CUBOCTAHEDRON** V = 48 F = 26 (8 Hexa. + 12 Squa. + 6 Octa.) E = 72

Şekil 1.3 Archimed ve Catalan Cisimler

RHOMBIC TRIACONTAHEDRON F = 30 V = 32 E = 60			**ICOSIDODECAHEDRON** V = 30 F = 32 (20 Triangles + 12 Pentagons) E = 60
DELTOIDAL ICOSITETRAHEDRON F = 24 V = 26 E = 48			**RHOMBICUBOCTAHEDRON** V = 24 F = 26 (8 Triangles + 18 Squares) E = 48
PENTAGONAL ICOSITETRAHEDRON F = 24 V = 38 E = 60			**SNUB CUBE** V = 24 F = 38 (32 Triangles + 6 Squares) E = 60
DELTOIDAL HEXECONTAHEDRON F = 60 V = 62 E = 120			**RHOMBICOSIDODECAHEDRON** V = 60 F = 62 (20 Tria. + 30 Squa. + 12 Pent.) E = 120
PENTAGONAL HEXECONTAHEDRON F = 60 V = 92 E = 150			**SNUB DODECAHEDRON** V = 60 F = 92 (80 Triangles + 12 Pentagons) E = 150
DISDYAKIS TRIACONTAHEDRON F = 120 V = 62 E = 180			**TRUNCATED ICOSIDODECAHEDRON** V = 120 F = 62 (30 Squa. + 20 Hexa. + 12 Deca.) E = 180

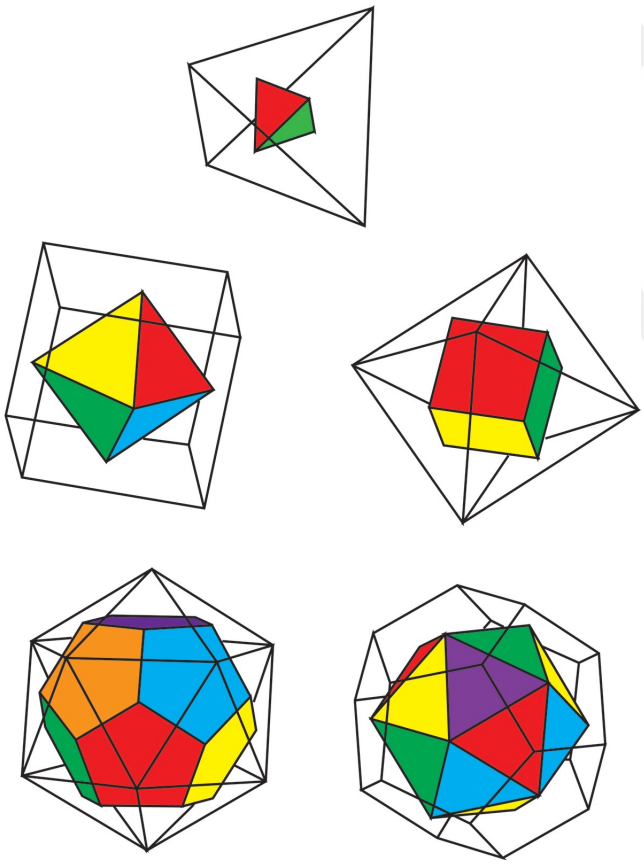
Şekil 1.4 Archimed ve Catalan Cisimler

Aynı zamanda Archimed ve Catalan cisimler birbirlerinin dualleridir. Duallikten kastedilen şey birbirlerinin duali olan iki çokyüzlünün ayrıt sayılarının aynı olması, fakat yüz ve köşe noktalarının sayılarının karşılıklı yer değiştirmesidir. Örneğin, Platonik

cisimlerden küp ile sekiz yüzlünün birbirlerinin duali iki çokyüzlüdür; oniki olan ayrıt sayıları aynı iken altı ve sekiz olan yüz sayıları ile köşe sayıları karşılıklı olarak yer değiştirmektedir.

	Altı Yüzlü	Sekiz Yüzlü
Köşe Sayısı	8	6
Ayrıt Sayısı	12	12
Yüz Sayısı	6	8

Sonuç olarak aralarında duallik ilişkisi bulunan çokyüzlülerden herhangi birisinin yüzlerinin simetri merkezleri birleştirildiğinde diğer çokyüzlü elde edilir. Aralarında duallik ilişkisi bulunan Platonik cisimler aşağıdaki gibi resmedilebilir.



Şekil 1.5 Platonik Cisimlerde Duallik

Çok yüzlülerin birbirleriyle duallik ilişkisini vermek gibi çok yüzlülerin farklı matematiksel özellikleride verilebilir. Bu matematiksel ve geometriksel özellikleri vermek adına çokyüzlerin metrik geometri ile ilişkisini kurmak yararlı olacaktır. Bu ilişki birim küresi istenilen çokyüzlü olacak şekilde bir metriğin inşası ile yapılabilir. Özellikle

çokyüzlülerin metrik yapılarını tanımlamak, matematik ve diğer bilimdalları açısından üzerlerinde daha kolay çalışma imkanı sağlayacaktır. Çokyüzlülerin önemli bir kısmının Platonik cisimlerden elde edilmiş olması nedeniyle, Platonik cisimler en temel çokyüzlüler olarak düşünülebilir. Bu anlamda, üçüncü bölümde birim küresi Platonik cisimler olan metrikler hatırlatılacaktır. Daha sonra tezin temel amacı olan, birim küresi truncated dodecahedron olan metriğin inşası verilerek bu metrik sayesinde truncated dodecahedron ve metrik geometri arasındaki köprü kurulmuş olacaktır. Son olarak ise bu metriğe göre uzayın izometri grubu araştırılacaktır.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Tezin temel amacı truncated dodecahedronun metrik geometri ile ilişkisini kurmaktır. Bu ilişkiyi kurabilmek adına birim küresi truncated dodecahedron olan metrik inşa edilecektir. (Thompson, 1996) referansından, $\mathbb{R}^n$ uzayında verilen keyfi konveks simetrik bir yapı için, birim küresi bu yapı olacak şekilde bir normun var olduğu bilinmektedir. Özel olarak $\mathbb{R}^3$ teki konveks simetrik çok yüzlüler içinde bu normun varlığı söylenebilir. Fakat istenilen her konveks simetrik çokyüzlü için varlığı bilinen bu normun, kartezyen uzaydaki tanımı nasıl yapılacaktır? Bu basit soruya Ermiş, 2014 yılındaki doktora çalışmasında, çokyüzlülerin genel tanımını kullanarak basit birkaç adımla verilen bir çokyüzlü için metriğin nasıl tanımlanacağından bahsederek cevap vermiştir. Metrik geometri ile çokyüzlüler arasıdaki ilişki kurulmadan önce, metrik geometri nedir ? sorusuna cevap vermek gerekir. Literatürde yer alan ve sıklıkla kullanılan tanımı (Ermiş, 2014) referansına birebir sadık kalınarak aşağıdaki sekilde verilecektir. Böylece metrik geometri hakkında genel bilgiler elde edinilmiş olacaktır. (Thompson, 1996) da ifade edildiği gibi, Minkowski geometrisi, eliptik ve hiperbolik geometriden farklı sonlu boyutlu bir Öklidyen olmayan geometridir. Ayrıca Space-time Minkowskian geometrisinden de farklıdır. Minkowski geometrisindeki lineer yapı Öklidyen geometrideki ile hemen hemen aynıdır. Noktalar ve doğrular Öklidyen geometrinin nokta ve doğruları, açı ölçümü Öklidyen geometrideki ile aynı yolla yapılmaktadır. Yalnızca bir fark vardır. Bu fark uzaklığın tüm yönlerde aynı olmamasıdır. Bu farklılık da alınan metrikle ilgili kavramları değiştirmektedir. Dolayısıyla Minkowski geometrilerinde uzaklıkla ilgili kavramların incelenmesi oldukça ilgi çekici sonuçlar ortaya çıkarmaktadır. Örneğin Öklidyen uzaydaki alışılmış kürenin yerine alınan ”yeni birim küre” değişebilen bir genel simetrik konveks kümedir, ve paralellik aksiyomu geçerli olmasına rağmen, Pisagor teoremi geçerli değildir. Bu geometrilere örnek olarak Taksi geometri, Çin Dama geometrisi ve α-geometrileri verilebilir (Akça, Z. and Kaya, R., 2004; Gelişgen, Ö. and Kaya, R., 2006).

Önceki paragrafta bahsedilen Minkowski geometrilerine geçmeden Öklid geometrisinin aksiyomları verilmek istenirse, aşağıda verilen on üç aksiyom antik çağda Öklid tarafından düzlemsel geometri için verilen bir aksiyomlar kümesinin çağımızda indirgenmiş son -belki de en kullanışlı- şeklidir. Buna göre,

$\mathbb{P}$: noktalar kümesi,
$\mathbb{L}$: $\mathbb{P}$ nin bazı alt kümelerinin bir ailesi olan doğrular kümesi,
m : açı ölçüm fonksiyonu,
d_E : uzaklık fonksiyonu
olmak üzere aşağıda verilen on üç aksiyomu (E1-E13) sağlayan $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d_E, m]$ matematiksel yapısı *düzlem* olarak düşünülebilir.

[**E1**] Verilen iki noktayı içeren bir tek doğru vardır.

[**E2**] Her doğru en az iki nokta içerir. $\mathbb{P}$ kümesi doğrusal olmayan en az üç nokta içerir.

[**E1**] ve [**E2**] aksiyomları *üzerinde olma* aksiyomları olarak bilinir.

Bunları izleyen dört aksiyom uzaklık fonksiyonunun sırayla *pozitif tanımlılık, simetri* ve *üçgen eşitsizliğini* sağlamasıyla ilgilidir. Ayrıca *cetvel aksiyomu* denilen aksiyomu da sağlar. d_E için bu dört aksiyom aşağıdaki gibidir:

[**E3**] Her sıralı (A, B) nokta çifti için d_E negatif olmayan bir $d_E(A, B)$ sayısını belirtir. Ayrıca $d_E(A, B) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $A = B$ olmasıdır.

[**E4**] $d_E(A, B) = d_E(B, A)$ dır.

[**E5**] $d_E(A, B) + d_E(B, C) \geq d_E(A, C)$ dir.

[**E6**] Verilen bir l doğrusu için bir $f_l : l \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır öyleki tüm $A, B \in l$ noktaları için;

$$|f_l(A) - f_l(B)| = d_E(A, B)$$

sağlanır.

Aşağıdaki aksiyom *düzlem ayırma aksiyomu*dur.

[**E7**] Verilen bir l doğrusu için $\mathbb{P}$ nin H_1 ve H_2 gibi yarı düzlem şeklinde adlandırılan iki alt kümesi vardır öyleki,

i) H_1 ve H_2 konvekstir

ii) $H_1 \cup H_2 = \mathbb{P} - l$ ($\mathbb{P}$ den l nin atılmışı demektir).

iii) $A \in H_1$ ve $B \in H_2$ ise $\overleftrightarrow{AB} \cap l \neq \varnothing$

olur.

Şimdi verilecek dört özelik *açı ölçüm aksiyomu* diye anılır:

[**E8**] m, her bir açı için 0 ile 180 arasında değişen bir reel sayı ile belirtilir.

[**E9**] H yarı düzlemin kenarı üzerinde bir $\overrightarrow{AB}$ ışını ve 0 ile 180 arasında herhangi bir r reel sayısı verilsin. Bu durumda $P \in H$ olmak üzere $m\angle PAB = r$ olacak şekilde bir tek $\overrightarrow{AP}$ ışını vardır.

[**E10**] Eğer D noktası $\angle ABC$ nin iç bölgesinde ise,

$$m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC$$

olur.

[**E11**] Eğer B, A ile C arasında ve $D \notin \overleftrightarrow{AC}$ ise,

$$m\angle ABD + m\angle DBC = 180$$

olur.

Sıradaki aksiyom $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d_E, m]$ sisteminin "*kenar-açı-kenar*" aksiyomudur.

[**E12**] İki üçgenin köşe noktaları arasında bire-bir bir eşleme verilsin. Eğer birinci üçgenin iki kenarı ve aralarındaki açı, ikinci üçgenin karşılık gelen kenarlarına ve açıya eş ise bu üçgenler eştir.

Son olarak $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d_E, m]$ sistemi için ünlü *paralellik aksiyomunu* ifade edelim:

[**E13**] l doğrusu dışında bir P noktası verilsin. Bu durumda P noktasından geçen ve l doğrusuna paralel olan bir tek doğru vardır.

Şimdi geometrik yapıların incelenmesinde izlenen yolu takiple, daha basit yapılı geometriler üzerinde durarak Minkowski geometrisine geçişi sağlayan bilgiler (Martin, 1998) ve (Millmann and Parker, 1991) den özetle verilmektedir.

Tanım 2.1 *: $\mathbb{P}$ elemanları noktalar olan bir küme ve $\mathbb{L}$ de $\mathbb{P}$ nin boş olmayan alt kümelerinden oluşan doğrular kümesi olmak üzere aşağıdaki iki aksiyomu sağlayan $\mathcal{A} = [\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ sistemine soyut geometri adı verilir.*
i) *Her $A, B \in \mathbb{P}$ için $A \in l$ ve $B \in l$ olacak şekilde en az bir $l \in \mathbb{L}$ doğrusu vardır.*
ii) *Her doğru en az iki noktaya sahiptir.*

Tanım 2.2 *: $\mathcal{A} = [\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ soyut geometri olmak üzere aşağıdaki aksiyomları sağlarsa $\mathcal{A}$ sistemine incidence geometri denir.*
i) *$\mathbb{P}$ deki her farklı iki nokta bir tek doğru üzerindedir.*
ii) *Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.*

Buna göre bir $\mathcal{A} = [\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ sisteminin incidence geometri olması için aşağıdaki üç aksiyomu sağlamalıdır:

i) Her doğru en az iki noktaya sahiptir.
ii) Her farklı iki nokta bir tek doğru üzerindedir.
iii) Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.

Öklid geometrisine metrik yaklaşım "A Set of Postulates for Plane Geometry Based on Scale and Protractor $[1932]$" çalısmasıyla Amerikan matematikçisi George David Birkhoff (1884-1944) a dayanır. Yukarıdaki E1 - E13 aksiyomları düzlemsel Öklid geometrisini metrik yaklaşımla düzenlemektedir. Bir incidence geometrinin metrik yaklaşımla incelenebilir olması için aşağıdaki kavramlara ihtiyaç vardır:

Tanım 2.3 *: $\mathcal{X}$ boş olmayan bir küme olmak üzere $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki üç koşulu sağlarsa $\mathcal{X}$ kümesi üzerinde bir metriktir denir. Her $P, Q, R \in \mathcal{X}$ için,*
i) $d(P,Q) \geq 0$ *ve* $d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$
ii) $d(P,Q) = d(Q,P)$
iii) $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$.

Tanım 2.4 *: l, $[\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ incidence geometrinin bir doğrusu olsun. d de $\mathbb{P}$ üzerinde uzaklık fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanırsa $f : l \to \mathbb{R}$ fonksiyonu l için cetveldir denir.*

i) *f fonksiyonu $1:1$ ve örtendir.*
ii) *l üzerindeki her P,Q nokta çifti için,*

$$|f(P)-f(Q)|=d(P,Q)$$

dir. ii) şıkkındaki eşitliğe cetvel denklemi ve $f(P)$ ye de P nin f ye bağlı koordinatı denir.

Tanım 2.5 ***:*** *$[\mathbb{P},\mathbb{L}]$ incidence geometri olmak üzere d uzaklık fonksiyonu cetvel aksiyomunu sağlarsa ve her $l\in\mathbb{L}$ doğrusu cetvele sahipse $\mathcal{M}=[\mathbb{P},\mathbb{L},d]$ sistemine metrik geometri denir.*

Minkowski geometrisi, $\mathbb{P}$ Öklid geometrisindeki noktalar kümesi, $\mathbb{L}$ Öklid geometrisindeki doğrular kümesi ve d herhangi bir uzaklık fonksiyonu olmak üzere $[\mathbb{P},\mathbb{L},d]$ metrik geometrisidir. O halde Minkowski geometrileri Öklidyen nokta ve doğrularla inşa edilen metrik geometrilerdir. Ancak açı ölçüm fonksiyonu ilavesi ve sağladıkları aksiyomlar ile aşağıdaki tanımları verilen geometrilerle de ilişkilendirilebilirler.

Tanım 2.6 ***:*** *Düzlem ayırma aksiyomunu sağlayan bir metrik geometriye bir Pasch geometrisi denir.*

Tanım 2.7 ***:*** *$[\mathbb{P},\mathbb{L},d]$ Pasch geometrisi ile birlikte m açı ölçüm fonksiyonu ile oluşturulan $[\mathbb{P},\mathbb{L},d,m]$ sistemine Protractor (iletki) geometri denir. Kenar-Açı-Kenar aksiyomunu sağlayan Protractor geometriye Absolute (mutlak) geometri denir.*

Konveks simetrik çokyüzlülerin önemli bir kısmının Platonik cisimlerden elde edilmesinden dolayı, bir sonraki bölümde Platonik cisimler ve birim küreleri bu çokyüzlüler olan metrikler hatırlatılacaktır.

3. DÜZGÜN ÇOKYÜZLÜLER VE METRİKLERİ

3.1 Düzgün Dört Yüzlü (Tetrahedron)

Her bir köşesinde üç eş üçgenin buluştuğu, dört köşesi, dört yüzü ve altı ayrıtı olan düzgün çokyüzlüye düzgün dört yüzlü (tetrahedron) denir. Düzgün dört yüzlünün 24 tane simetrisi olup, simetri grubu T_d ile gösterilir. Bu simetriler şu şekilde özetlenebilir;

◦ birim dönüşüm,

◦ karşılıklı yüzlerin merkezlerinden geçen dönme eksenine göre, $90°,\ 180°$ ve $270°$ derecelik açılarda toplamda 9 tane dönme dönüşümü,

◦ karşılıklı ayrıtların orta noktalarından geçen dönme eksenine göre, $180°$ derecelik açıda 6 tane dönme dönüşümü,

◦ karşılıklı köşelerden geçen dönme eksenine göre, $120°$ ve $240°$ derecelik açılarda toplamda 8 tane dönme dönüşümü,

◦ 9 tane yansıma dönüşümü,

◦ (x, y, z) noktasını $(-x, -y, -z)$ noktasına dönüştüren inversiyon dönüşümü,

◦ dokuz dönme ekseni ve yansıma düzlemleri ile tanımlı 6 tane dönme-yansıma dönüşümü,

◦ dört dönme ekseni ve inversiyon ile tanımlı 8 tane dönme-inversiyon dönüşümü.

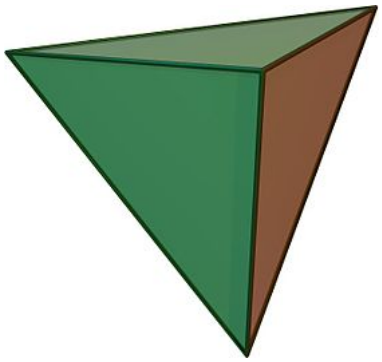
Birim küresi düzgün dört yüzlü olan uzaklık fonksiyonu $d_{\mathbf{t}}$ ile gösterilir, tanımı aşağıdaki gibidir.

Tanım 3.1 ***:*** *$X = (x_1, y_1, z_1)$ ve $Y = (x_2, y_2, z_2)$, $\mathbb{R}^3$ te keyfi noktalar olmak üzere,*
$d_{\mathbf{t}} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$ uzaklık fonksiyonu

$$d_{\mathbf{t}}(X, Y) = \max\{|(x_1 - x_2) + (z_1 - z_2)| + (y_1 - y_2), |(x_1 - x_2) - (z_1 - z_2)| - (y_1 - y_2)\}$$

şeklinde tanımlanır [Richter, vd, 2014].

Sonuç 3.1 *:* d_t *uzaklık fonksiyonuna göre birim küre düzgün dört yüzlüdür [Richter, vd, 2014].*



Şekil 3.1 Tetrahedron

3.2 Düzgün Altı Yüzlü (Küp-Hexahedron)

Her bir köşesinde birbirine dik ve eş üç karenin buluştuğu, sekiz köşesi, altı yüzü ve on iki ayrıtı olan düzgün çokyüzlüye küp (hexahedron) denir. Kübün 48 tane simetrisi olup, simetri grubu O_h ile gösterilir. Bu simetriler şu şekilde özetlenebilir;

○ birim dönüşüm,

○ karşılıklı yüzlerin merkezlerinden geçen dönme eksenine göre, $90°,\ 180°$ ve $270°$ derecelik açılarda toplamda 9 tane dönme dönüşümü,

○ karşılıklı ayrıtların orta noktalarından geçen dönme eksenine göre, $180°$ derecelik açıda 6 tane dönme dönüşümü,

○ karşılıklı köşelerden geçen dönme eksenine göre, $120°$ ve $240°$ derecelik açılarda toplamda 8 tane dönme dönüşümü,

○ 9 tane yansıma dönüşümü,

○ (x, y, z) noktasını $(-x, -y, -z)$ noktasına dönüştüren inversiyon dönüşümü,

○ dokuz dönme ekseni ve yansıma düzlemleri ile tanımlı 6 tane dönme-yansıma dönüşümü,

◦ dört dönme ekseni ve inversiyon ile tanımlı 8 tane dönme-inversiyon dönüşümü.

Birim küresi düzgün altı yüzlü olan uzaklık fonksiyonu maksimum metriği olup, $d_{\mathbf{M}}$ ile gösterilir, tanımı aşağıdaki gibidir.

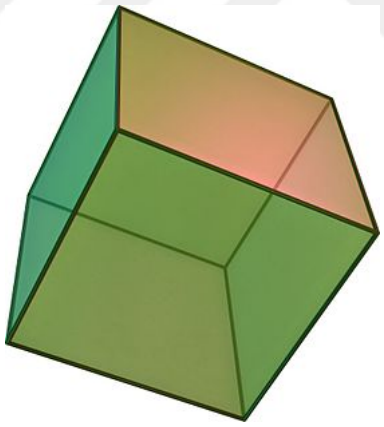
Tanım 3.2 *:* $X = (x_1, y_1, z_1)$ *ve* $Y = (x_2, y_2, z_2)$, $\mathbb{R}^3$ *te keyfi noktalar olmak üzere,* $d_{\mathbf{M}} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$ *maksimum uzaklık fonksiyonu*

$$d_{\mathbf{M}}(X, Y) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}$$

şeklinde tanımlanır [Salihova, 2006; Ermiş, 2015].

Teorem 3.1 *:* $d_{\mathbf{M}}$ *uzaklık fonksiyonu metriktir [Salihova, 2006].*

Sonuç 3.2 *:* $d_{\mathbf{M}}$ *metriğine göre birim küre küptür [Salihova, 2006].*



Şekil 3.2 Hexahedron

3.3 Düzgün Sekiz Yüzlü (Octahedron)

Sekiz tane eşkenar üçgenin bir araya gelerek oluşturduğu, altı köşesi, on iki ayrıtı ve sekiz yüzü olan düzgün çokyüzlüye düzgün sekiz yüzlü (octahedron) denir. Sekiz yüzlü 48 tane simetrisi olup, simetri grubu O_h ile gösterilir. Bu simetriler şu şekilde özetlenebilir;

◦ birim dönüşüm,

○ karşılıklı yüzlerin merkezlerinden geçen dönme eksenine göre, $120°$ ve $240°$ derecelik açılarda toplamda 8 tane dönme dönüşümü,

○ karşılıklı ayrıtların orta noktalarından geçen dönme eksenine göre, $180°$ derecelik açıda 6 tane dönme dönüşümü,

○ karşılıklı köşelerden geçen dönme eksenine göre, $90°,\ 180°$ ve $270°$ derecelik açılarda toplamda 9 tane dönme dönüşümü,

○ 9 tane yansıma dönüşümü,

○ (x, y, z) noktasını $(-x, -y, -z)$ noktasına dönüştüren inversiyon dönüşümü,

○ dokuz dönme ekseni ve yansıma düzlemleri ile tanımlı 6 tane dönme-yansıma dönüşümü,

○ dört dönme ekseni ve inversiyon ile tanımlı 8 tane dönme-inversiyon dönüşümü.

Birim küresi düzgün sekiz yüzlü olan uzaklık fonksiyonu taksi metriği olup, $d_{\mathbf{T}}$ ile gösterilir, tanımı aşağıdaki gibidir

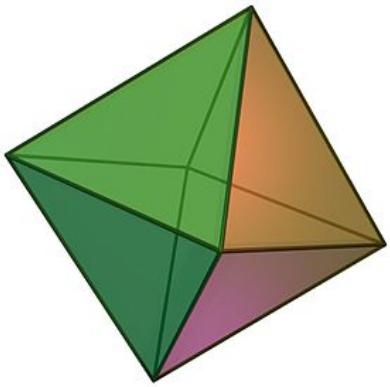
Tanım 3.3 *:* $X = (x_1, y_1, z_1)$ *ve* $Y = (x_2, y_2, z_2)$, $\mathbb{R}^3$ *te keyfi noktalar olmak üzere,* $d_{\mathbf{T}} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$ *taksi uzaklık fonksiyonu*

$$d_{\mathbf{T}}(X, Y) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|$$

şeklinde tanımlanır [Akça vd., 2004; Gelişgen vd., 2009].

Teorem 3.2 *:* $d_{\mathbf{T}}$ *uzaklık fonksiyonu metriktir [Akça vd., 2004; Gelişgen vd., 2009].*

Sonuç 3.3 *:* $d_{\mathbf{T}}$ *metriğine göre birim küre düzgün sekiz yüzlüdür [Akça vd., 2004; Gelişgen vd., 2009].*



Şekil 3.3 Octahedron

3.4 Düzgün On İki Yüzlü (Dodecahedron)

On iki tane eş düzgün beşgenin bir araya gelerek oluşturduğu, yirmi köşesi olup, otuz ayrıtı ve on iki yüzü olan düzgün çokyüzlüye düzgün on iki yüzlü (dodecahedron) denir. Düzgün on iki yüzlü 120 tane simetrisi olup, simetri grubu I_h ile gösterilir. Bu simetriler şu şekilde özetlenebilir;

- birim dönüşüm,

- karşılıklı yüzlerin merkezlerinden geçen dönme eksenine göre, $72°,\ 144°,\ 216°$ ve $288°$ derecelik açılarda toplamda 24 tane dönme dönüşümü,

- karşılıklı ayrıtların orta noktalarından geçen dönme eksenine göre, $180°$ derecelik açıda 15 tane dönme dönüşümü,

- karşılıklı köşelerden geçen dönme eksenine göre, $120°$ ve $240°$ derecelik açılarda toplamda 20 tane dönme dönüşümü,

- 15 tane yansıma dönüşümü,

- (x, y, z) noktasını $(-x, -y, -z)$ noktasına dönüştüren inversiyon dönüşümü,

- dört dönme ekseni ve inversiyon ile tanımlı 44 tane dönme-inversiyon dönüşümü.

Birim küresi düzgün on iki yüzlü olan uzaklık fonksiyonu dodecahedron metriği olup, $d_{\mathbf{D}}$ ile gösterilir, tanımı aşağıdaki gibidir.

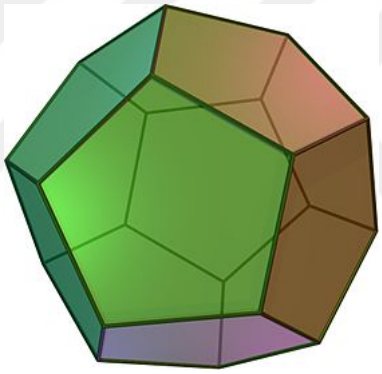
Tanım 3.4 *:* $\mathbb{R}^3$ *te* $X = (x_1, y_1, z_1)$, $Y = (x_2, y_2, z_2)$ *keyfi noktalar ve.* $\mathbf{X}_{12} = |x_1 - x_2|$, $\mathbf{Y}_{12} = |y_1 - y_2|$ *ve* $\mathbf{Z}_{12} = |z_1 - z_2|$ *olarak verilisin.* $\varphi = \left(1 + \sqrt{5}\right)/2 \cong 1.618$ *altın oran olmak üzere* $\lambda = \varphi - 1$ *ise,* $d_{\mathbf{D}} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$ *dodecahedron uzaklık fonksiyonu*

$$d_{\mathbf{D}}(X, Y) = \max\left\{\lambda \mathbf{X}_{12} + \mathbf{Y}_{12}, \lambda \mathbf{Y}_{12} + \mathbf{Z}_{12}, \lambda \mathbf{Z}_{12} + \mathbf{X}_{12}\right\}$$

şeklinde tanımlanır [Ermiş, 2014; Richter, vd, 2014].

Teorem 3.3 *:* $d_{\mathbf{D}}$ *uzaklık fonksiyonu metriktir [Ermiş, 2014].*

Sonuç 3.4 *:* $d_{\mathbf{D}}$ *metriğine göre birim küre düzgün on iki yüzlüdür [Ermiş, 2014].*



Şekil 3.4 Dodecahedron

3.5 Düzgün Yirmi Yüzlü (Icosahedron)

On iki tane eş yirmi tane eşkenar üçgenin bir araya gelerek oluşturduğu, on iki köşesi olup, otuz ayrıtı ve yirmi yüzü olan düzgün çokyüzlüye düzgün yirmi yüzlü (icosahedron) denir. Düzgün yirmi yüzlü 120 tane simetrisi olup, simetri grubu I_h ile gösterilir. Bu simetriler şu şekilde özetlenebilir;

○ birim dönüşüm,

○ karşılıklı yüzlerin merkezlerinden geçen dönme eksenine göre, $72°$, $144°$, $216°$ ve $288°$ derecelik açılarda toplamda 24 tane dönme dönüşümü,

∘ karşılıklı ayrıtların orta noktalarından geçen dönme eksenine göre, $180°$ derecelik açıda 15 tane dönme dönüşümü,

∘ karşılıklı köşelerden geçen dönme eksenine göre, $120°$ ve $240°$ derecelik açılarda toplamda 20 tane dönme dönüşümü,

∘ 15 tane yansıma dönüşümü,

∘ (x, y, z) noktasını $(-x, -y, -z)$ noktasına dönüştüren inversiyon dönüşümü,

∘ dört dönme ekseni ve inversiyon ile tanımlı 44 tane dönme-inversiyon dönüşümü.

Birim küresi düzgün yirmi yüzlü olan uzaklık fonksiyonu icosahedron metriği olup, $d_{\mathbf{I}}$ ile gösterilir, tanımı aşağıdaki gibidir.

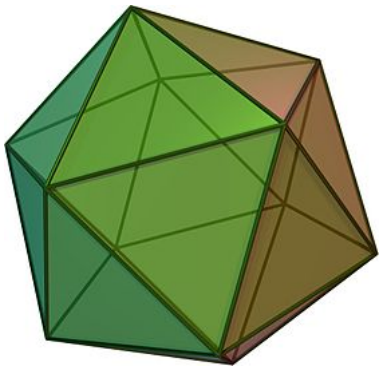
Tanım 3.5 *:* $\mathbb{R}^3$ *te* $X = (x_1, y_1, z_1)$*,* $Y = (x_2, y_2, z_2)$ *keyfi noktalar ve.* $\mathbf{X}_{12} = |x_1 - x_2|$*,* $\mathbf{Y}_{12} = |y_1 - y_2|$ *ve* $\mathbf{Z}_{12} = |z_1 - z_2|$ *olarak verilisin.* $\varphi = \left(1 + \sqrt{5}\right)/2 \cong 1.618$ *altın oran olmak üzere* $\lambda = \varphi - 1$*,* $\mu = 2\varphi - 3$*, ve* $\delta = (2 - \varphi)$ *ise,* $d_{\mathbf{I}} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$ *icosahedron uzaklık fonksiyonu*

$$d_{\mathbf{I}}(X, Y) = \max\left\{\mu\mathbf{X}_{12} + \lambda\mathbf{Y}_{12}, \mu\mathbf{Y}_{12} + \lambda\mathbf{Z}_{12}, \mu\mathbf{Y}_{12} + \lambda\mathbf{X}_{12}, \delta\left(\mathbf{X}_{12} + \mathbf{Y}_{12} + \mathbf{Z}_{12}\right)\right\}$$

şeklinde tanımlanır [Ermiş, 2014; Richter, vd, 2014].

Teorem 3.4 *:* $d_{\mathbf{I}}$ *uzaklık fonksiyonu metriktir [Ermiş, 2014].*

Sonuç 3.5 *:* $d_{\mathbf{I}}$ *metriğine göre birim küre düzgün yirmi yüzlüdür [Ermiş, 2014].*



Şekil 3.5 Icosahedron

4. DÜZGÜN ON İKİ YÜZLÜDEN ELDE EDİLEN ARCHİMEDEAN OTUZ İKİ YÜZLÜSÜ: TRUNCATED DODECAHEDRON

$\mathbb{R}^n$ uzayında verilen keyfi konveks yapılar için, birim küreleri bu konveks yapılar olan normların varlığı bilinmektedir [Thompson, 1996]. Özel olarak $\mathbb{R}^3$ te Platonik cisimler için, varlıkları bilinen normaların kartezyen formdaki tanımları bir önceki bölümde verildi. Bu kısımda her ne kadar varlığı bilinsede, kartezyen hali bilinmeyen, birim küresi truncated dodecahedron olan metrik tanımlanacaktır [Özcan vd., 2017]. Bu metriği tanımlamak adına [Ermiş, 2014] referansında verilen adımlar sırasıyla aşağıdaki gibi takip edilecektir;

Adım 1 : Truncated dodecahedron kartezyen koordinat sistemine en iyi simetriye sahip olacak şekilde yerleştirilmelidir. Böylece verilecek uzaklık fonksiyonunun, simetri özelliğini sağlaması garanti altına alınır. Ayrıca bir sonraki adımda yapılacak olan çokyüzlünün köşe noktalarının koordinatlanması işlemlerinde önemli ölçüde kısalık sağlayacaktır.

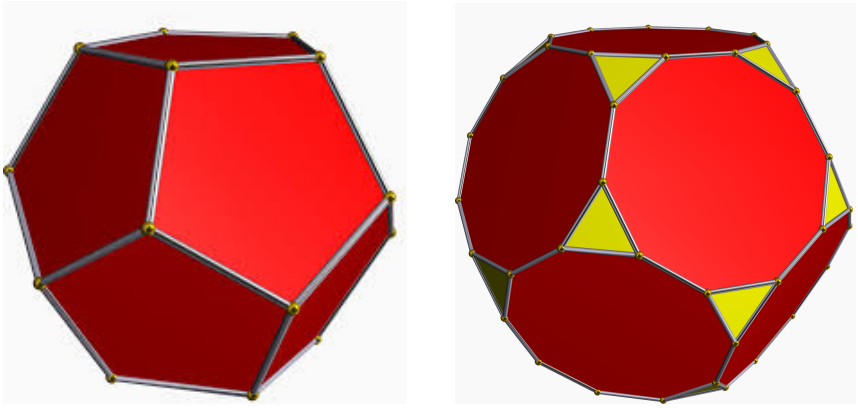
Adım 2 : En iyi simetri ile koordinat eksenlerine yerleştirilen truncated dodecahedronun köşe noktalarının koordinatları bulunacaktır.

Adım 3 : Tanım 1.1 de verilen çok yüzlünün genel tanımı gereği, köşe noktalarından geçen yüzey düzlem denklemleri hesaplanacaktır.

Adım 4 : Truncated dodecahedronu oluşturmak için yüzeylerinden geçen yüzey düzlemler ile yapıyı sınırlandırmak adına, bulunan yüzey düzlem denklemlerinin kümesinin maksimumu alınacaktır.

Bütün bu adımlar gerçekleştirmeden önce, truncated dodecahedron hakkında genel bilgileri aşağıdaki verilecektir.

Truncated dodecahedron Platonik cisimlerden biri olan düzgün on iki yüzlünün (dodecahedron) köşelerinin kesilmesi ile elde edilir. Bu kesilme işlemi dodecahedronun her bir köşesinde eşkenar üçgen oluşacak şekilde gerçekleştirilir. Böylece dodecahedronun düzgün beşgenlerden oluşan yüzeyleri düzgün ongenlere döner (Bkz. Şekil 4.1).



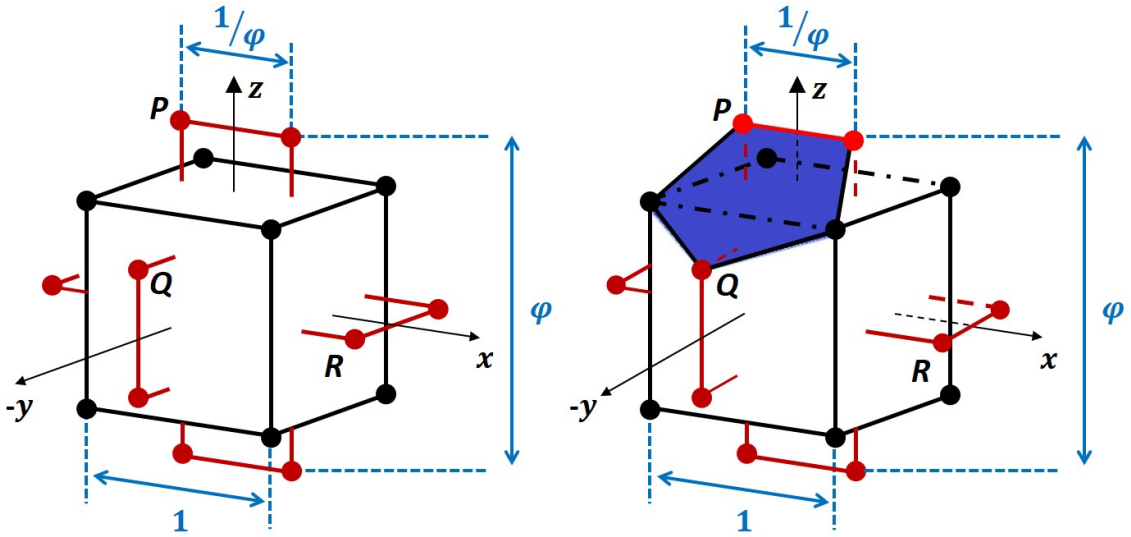
Şekil 4.1 Dodecahedron ve Truncated Dodecahedron

Sonuç olarak köşe, yüzey ve ayrıt sayılarına ilişkin aşağıdaki tablo elde edilir;

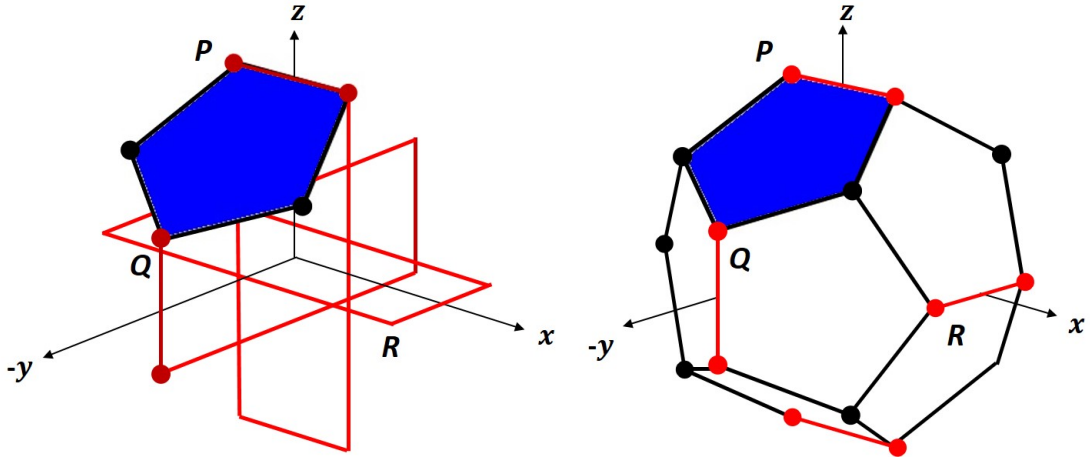
	Dodecahedron	**Truncated Dodecahedron**
Köşe Sayısı	20	Dodecahedronun herbir köşesinde eşkenar üçgen oluştuğu için ; $20x3 = 60$
Yüz Sayısı	12	Dodecahedronun 20 köşesinde eşkenar üçgen olan bir yüz oluştuğu için ; $12 + 20 = 32$
Ayrıt Sayısı	30	Dodecahedronun herbir köşesinde 3 ayrıta sahip eşkenar üçgen oluştuğu için; $30 + 20x3 = 90$

Truncated dodecahedronun, dodecahedron dan elde edildiği için, truncated dodecahedronun köşe noktaları dodecahedronun köşe noktaları yardımıyla hesaplanabilir. Dolayısıyla öncelikle dodecahedronun köşe noktaları bulunup, truncated dodecahedronun köşe noktaları aşağıdaki şekilde hesaplanacaktır.

Bir dodecahedron, köşe noktalarının koordinatları $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ olan bir küpten yararlanılarak aşağıdaki şekillerde resmedildiği gibi inşa edilebilir (Bkz. Şekil 4.2 - 4.3).



Şekil 4.2 Dodecahedron İnşası



Şekil 4.3 Dodecahedron İnşası

$a \in \mathbb{R}^+$ ve $\lambda \in (1, \infty)$ olmak üzere; dodecahedronun R köşesinin koordinatları $R = (\lambda a, -a, 0)$, Q köşesinin koordinatları $Q = (0, -\lambda a, a)$ ve P köşesinin koordinatları $P = (-a, 0, \lambda a)$ dır. Dodecahedronun P, Q ve R köşesinde köşeleri olan içteki küp düşünülürse,

$$\left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \left\|\overrightarrow{QR}\right\| = 2 \text{ ve } \left\|\overrightarrow{PR}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{PQ}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{QR}\right\|^2$$

dir. Buna göre

$$\left.\begin{aligned} \left\|\overrightarrow{PQ}\right\|^2 = 4 \;&\Rightarrow\; (a)^2 + (-\lambda a)^2 + (a-\lambda a)^2 = 4 \\ &\Rightarrow\; 2a^2\left(\lambda^2 - \lambda + 1\right) = 4 \\ &\Rightarrow\; a^2\left(\lambda^2 - \lambda + 1\right) = 2 \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

$$\left.\begin{aligned} \left\|\overrightarrow{PR}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{PQ}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{QR}\right\|^2 \;&\Rightarrow\; a^2\left(\lambda^2 - 3\lambda + 1\right) = 0 \\ &\Rightarrow\; \left(\lambda^2 - 3\lambda + 1\right) = 0 \quad (\because a \in \mathbb{R}^+) \\ &\Rightarrow\; \lambda = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ veya } \lambda = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

$\lambda = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \notin (1,\infty)$ olduğundan $\lambda = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ eşitliği gözönüne alınır. (1.2) deki $a^2\left(\lambda^2 - \lambda + 1\right) = 2$ eşitliğinde $\lambda = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ yerine yazılırsa,

$$a^2 = \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{1}{\varphi^2} \Rightarrow a = \frac{1}{\varphi}$$

bulunur. Ayrıca altın oranın özellliğinden $\lambda = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \varphi = \varphi^2$ olarak yazılabilir. O halde

$$R = (\lambda a, -a, 0) = \left(\varphi, -\frac{1}{\varphi}, 0\right),$$

$$Q = (0, -\lambda a, a) = \left(0, -\varphi, \frac{1}{\varphi}\right)$$

ve

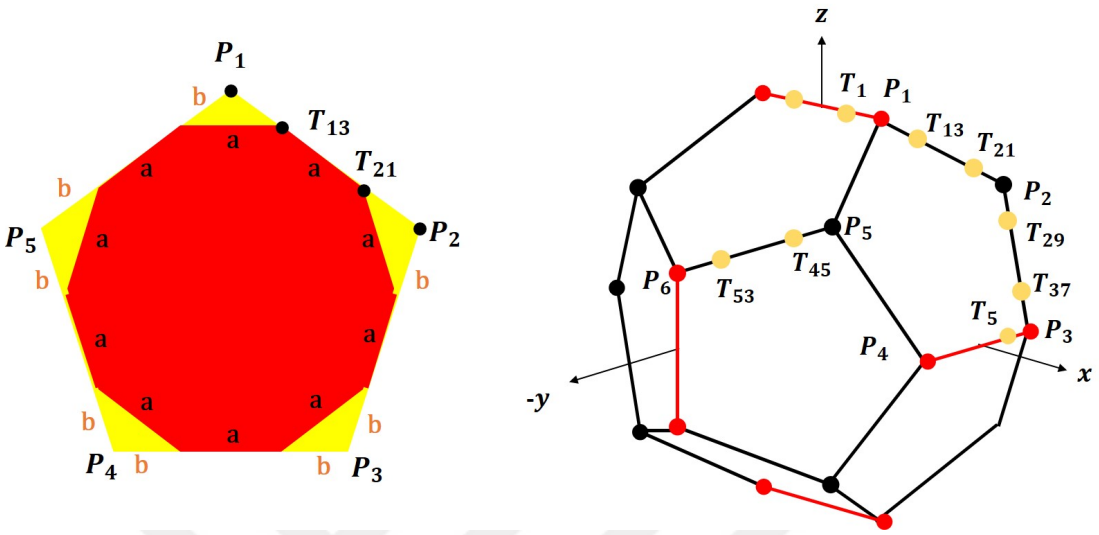
$$P = (-a, 0, \lambda a) = \left(-\frac{1}{\varphi}, 0, \varphi\right)$$

olarak elde edilir. Burada dodecahedronu birim küre olarak düşünebilmek adına R noktasının apsisi 1 olarak alınmalıdır. Bu anlamda $R = \left(\varphi, -\dfrac{1}{\varphi}, 0\right)$ noktasının apsisinin 1 olabilmesi için herbir koordinat bileşeni φ ye bölünürse R nin koordinatları $\left(1, -\dfrac{1}{\varphi^2}, 0\right)$ olarak bulunur. Sonuç olarak merkezil dodecahedronun (merkezi orjin, yarı çapı 1 birim) köşe noktalarının koordinatları

$$\left(\pm\frac{1}{\varphi}, \pm\frac{1}{\varphi}, \pm\frac{1}{\varphi}\right), \quad \left(\pm 1, \pm\frac{1}{\varphi^2}, 0\right), \quad \left(\pm\frac{1}{\varphi^2}, 0, \pm 1\right), \quad \left(\pm 1, \pm\frac{1}{\varphi^2}, 0\right)$$

dır. Aşağıdaki şekildeki merkezil dodecahedronun P_1, P_2 ve P_5 köşe noktalarının koordinatları; $P_1 = \left(\dfrac{1}{\varphi^2}, 0, 1\right)$, $P_2 = \left(\dfrac{1}{\varphi}, \dfrac{1}{\varphi}, \dfrac{1}{\varphi}\right)$ ve $P_5 = \left(\dfrac{1}{\varphi}, -\dfrac{1}{\varphi}, \dfrac{1}{\varphi}\right)$ dir.

Dodecahedron her bir köşesi eşkenar üçgen oluşacak şekilde kesilmesi ile dodecahedronun düzgün beşgenlerden oluşan yüzeyleri düzgün ongenlere döner (Bkz. Şekil 4.4).



Şekil 4.4 Dodecahedronun bir yüzeyi

O halde merkezil dodecahedronun bir kenarının uzunluğu $\|P_1P_2\| = a + 2b$ dir. Burdan

$$\begin{aligned} \|P_1P_2\| &= \sqrt{\left(\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi} - 1\right)^2} \\ &= \frac{8}{\left(1+\sqrt{5}\right)^2} = \frac{2}{\varphi^2} \\ \Longrightarrow \quad & a + 2b = \frac{2}{\varphi^2} \end{aligned} \tag{1.3}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \|P_2P_5\| &= \sqrt{\left(\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi}\right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi} - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi}\right)^2} \\ &= \frac{2}{\varphi} \end{aligned} \tag{1.4}$$

olup,

$$\frac{b}{a} = \frac{\|P_1P_2\|}{\|P_2P_5\|} = \frac{\frac{2}{\varphi^2}}{\frac{2}{\varphi}} = \frac{1}{\varphi} \tag{1.5}$$

bulunur. (1.3) ve (1.5) den

$$\left.\begin{aligned} a+2b &= \frac{2}{\varphi^2} \\ \frac{b}{a} &= \frac{1}{\varphi} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} a &= \frac{2}{\varphi\left(\varphi+2\right)} = \frac{8}{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(5+\sqrt{5}\right)} \\ b &= \frac{2}{\varphi^2\left(\varphi+2\right)} = \frac{16}{\left(1+\sqrt{5}\right)^2\left(5+\sqrt{5}\right)} \end{aligned}$$

olarak bulunur. a ve b nin değerleri yardımıyla truncated dodecahedronun koordinat eksenlerine paralel kenarları üzerindeki noktaları $T_1, \ldots T_{12}$ aşağıdaki gibi bulunur (koordinatlanır). P_1 noktası yardımıyla T_1 in koordinatları;

$$P_1 = \left(\frac{1}{\varphi^2}, 0, 1\right) \implies T_1 = \left(\frac{1}{\varphi^2} - b, 0, 1\right)$$

$$\implies T_1 = \left(\frac{1}{\varphi^2} - \frac{2}{\varphi^2\left(\varphi+2\right)}, 0, 1\right)$$

$$\implies T_1 = \left(\frac{1}{\varphi\left(\varphi+2\right)}, 0, 1\right)$$

dır. T_1 noktası ve çok yüzlünün simetrisi kullanılarak, truncated dodecahedronun diğer üç noktası aşağıdaki gibi koordinatlanabilir.

$$T_1 = \left(\frac{1}{\varphi\left(\varphi+2\right)}, 0, 1\right) \qquad T_2 = \left(\frac{-1}{\varphi\left(\varphi+2\right)}, 0, 1\right)$$

$$T_3 = \left(\frac{-1}{\varphi\left(\varphi+2\right)}, 0, -1\right) \qquad T_4 = \left(\frac{1}{\varphi\left(\varphi+2\right)}, 0, -1\right)$$

Benzer şekilde, P_3 noktası yardımıyla T_5 in koordinatları;

$$P_3 = \left(1, \frac{1}{\varphi^2}, 0\right) \implies T_5 = \left(1, \frac{1}{\varphi^2} - b, 0\right)$$

$$\implies T_5 = \left(1, \frac{1}{\varphi^2} - \frac{2}{\varphi^2\left(\varphi+2\right)}, 0\right)$$

$$\implies T_5 = \left(1, \frac{1}{\varphi\left(\varphi+2\right)}, 0\right)$$

dır. T_5 noktası ve çok yüzlünün simetrisi kullanılarak, truncated dodecahedronun diğer üç noktası aşağıdaki gibi koordinatlanabilir.

$$T_5 = \left(1, \frac{1}{\varphi\left(\varphi+2\right)}, 0\right) \qquad T_6 = \left(1, \frac{-1}{\varphi\left(\varphi+2\right)}, 0\right)$$

$$T_7 = \left(-1, \frac{-1}{\varphi\left(\varphi+2\right)}, 0\right) \qquad T_8 = \left(-1, \frac{1}{\varphi\left(\varphi+2\right)}, 0\right)$$

Son olarak P_6 noktası yardımıyla T_{12} in koordinatları;

$$P_6 = \left(0, -1, \frac{1}{\varphi^2}\right) \implies T_{12} = \left(0, -1, \frac{1}{\varphi^2} - b\right)$$

$$\implies T_{12} = \left(0, -1, \frac{1}{\varphi^2} - \frac{2}{\varphi^2(\varphi+2)}\right)$$

$$\implies T_{12} = \left(0, -1, \frac{1}{\varphi(\varphi+2)}\right)$$

dır. T_{12} noktası ve çok yüzlünün simetrisi kullanılarak, truncated dodecahedronun diğer üç noktası aşağıdaki gibi koordinatlanabilir.

$$T_9 = \left(0, 1, \frac{1}{\varphi(\varphi+2)}\right) \qquad T_{10} = \left(0, 1, \frac{-1}{\varphi(\varphi+2)}\right)$$

$$T_{11} = \left(0, -1, \frac{-1}{\varphi(\varphi+2)}\right) \qquad T_{12} = \left(0, -1, \frac{1}{\varphi(\varphi+2)}\right)$$

Koordinat eksenlerine paralel olmayan kenarlar üzerindeki noktaların koordinatlarını aşağıdaki şekilde bulunur. Şekilde gösterilen T_{13} ün koordinatları aşağıdaki gibi hesaplanır.

$\lambda \in \mathbb{R}$ keyfi bir parametre olmak üzere, $P_1 = \left(\frac{1}{\varphi^2}, 0, 1\right)$ ve $P_2 = \left(\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi}\right)$ noktalarından geçen doğrunun parametrik denklemi

$$x = \lambda\frac{\varphi - 1}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi^2}$$

$$y = \lambda\frac{1}{\varphi}$$

$$z = \lambda\frac{1-\varphi}{\varphi} + 1$$

dir. T_{13} noktası bu doğrunun üzerinde yer aldığı için

$$T_{13} = \left(\lambda\frac{\varphi-1}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi^2}, \lambda\frac{1}{\varphi}, \lambda\frac{1-\varphi}{\varphi} + 1\right)$$

formunda olup, $\|T_{13}P_1\| = b$ eşitliğinden

$$\left(\lambda\frac{\varphi-1}{\varphi^2}\right)^2 + \left(\lambda\frac{1}{\varphi}\right)^2 + \left(\lambda\frac{1-\varphi}{\varphi}\right)^2 = b^2$$

denklemi elde edilir. Bu denklemden

$$\lambda = \sqrt{\frac{4}{(\varphi+2)^2(\varphi^4 - 2\varphi^3 + 3\varphi^2 - 2\varphi + 1)}} = \frac{2}{5+\sqrt{5}}$$

olup, $T_{13} = \left(\frac{b\left(2+\sqrt{5}\right)}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{a}{2}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ olarak bulunur. Çokyüzlünün simetrisinden yararlanarak diğer noktaların koordinatları

$$T_{13} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{a}{2}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \qquad T_{14} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{a}{2}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$T_{15} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{a}{2}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \qquad T_{16} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{a}{2}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$T_{17} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{a}{2}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \qquad T_{18} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{a}{2}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$T_{19} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{a}{2}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \qquad T_{20} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{a}{2}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

dır. Benzer şekilde T_{21} noktası P_1 ve P_2 noktalarından geçen doğrunun üzerinde yer aldığı için, $\mu \in \mathbb{R}$ keyfi bir parametre olmak üzere;

$$T_{21} = \left(\mu\frac{\varphi-1}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi^2}, \mu\frac{1}{\varphi}, \mu\frac{1-\varphi}{\varphi} + 1\right)$$

formunda olup, $\|T_{21}P_2\| = b$ eşitliğinden

$$\left(\mu\frac{\varphi-1}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi^2} - \frac{1}{\varphi}\right)^2 + \left(\mu\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi}\right)^2 + \left(\mu\frac{1-\varphi}{\varphi} + 1 - \frac{1}{\varphi}\right)^2 = b^2$$

denklemi elde edilir. Bu denklemden

$$\mu = -\sqrt{\frac{4}{(\varphi+2)\left[(\varphi-1)^2 + \varphi^2 + (1-\varphi)^2\varphi^2\right]}} + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}$$

olup, $T_{21} = \left(\frac{b\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{a\left(2+\sqrt{5}\right)}{2}\right)$ olarak bulunur. Çokyüzlünün simetrisinden yararlanarak diğer noktaların koordinatları

$$T_{21} = \left(\frac{b\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{a\left(2+\sqrt{5}\right)}{2}\right) \qquad T_{22} = \left(\frac{b\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}, \frac{-\sqrt{5}}{5}, \frac{a\left(2+\sqrt{5}\right)}{2}\right)$$

$$T_{23} = \left(\frac{b\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}, \frac{-\sqrt{5}}{5}, \frac{-a\left(2+\sqrt{5}\right)}{2}\right) \qquad T_{24} = \left(\frac{b\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{-a\left(2+\sqrt{5}\right)}{2}\right)$$

$$T_{25} = \left(\frac{-b\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{a\left(2+\sqrt{5}\right)}{2}\right) \qquad T_{26} = \left(\frac{-b\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}, \frac{-\sqrt{5}}{5}, \frac{a\left(2+\sqrt{5}\right)}{2}\right)$$

$$T_{27} = \left(\frac{-b\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}, \frac{-\sqrt{5}}{5}, \frac{-a\left(2+\sqrt{5}\right)}{2}\right) \quad T_{28} = \left(\frac{-b\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{-a\left(2+\sqrt{5}\right)}{2}\right)$$

dır. Benzer şekilde T_{29} un koordinatları aşağıdaki gibi hesaplanır.

$\beta \in \mathbb{R}$ keyfi bir parametre olmak üzere, $P_2 = \left(\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi}\right)$ ve $P_3 = \left(1, \frac{1}{\varphi^2}, 0\right)$ noktalarından geçen doğrunun parametrik denklemi

$$x = \beta\frac{\varphi - 1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi}$$

$$y = \beta\frac{1 - \varphi}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi}$$

$$z = \beta\frac{-1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi}$$

dir. T_{29} noktası bu doğrunun üzerinde yer aldığı için

$$T_{29} = \left(\beta\frac{\varphi - 1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi}, \beta\frac{1 - \varphi}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi}, \beta\frac{-1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi}\right)$$

formunda olup, $\|T_{29}P_2\| = b$ eşitliğinden

$$\left(\beta\frac{\varphi - 1}{\varphi}\right)^2 + \left(\beta\frac{1 - \varphi}{\varphi^2}\right)^2 + \left(\beta\frac{-1}{\varphi}\right)^2 = b^2$$

denklemi elde edilir. Bu denklemden

$$\beta = \sqrt{\frac{4}{(\varphi + 2)^2\left[\varphi^2(\varphi - 1)^2 + (1 - \varphi)^2 + \varphi^2\right]}} = \frac{2}{5 + \sqrt{5}}$$

olup, $T_{29} = \left(\frac{a\left(2 + \sqrt{5}\right)}{2}, \frac{b\left(3 + \sqrt{5}\right)}{2}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ olarak bulunur. Çokyüzlünün simetrisinden yararlanarak diğer noktaların koordinatları

$$T_{29} = \left(\frac{a\left(2 + \sqrt{5}\right)}{2}, \frac{b\left(3 + \sqrt{5}\right)}{2}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \qquad T_{30} = \left(\frac{a\left(2 + \sqrt{5}\right)}{2}, \frac{-b\left(3 + \sqrt{5}\right)}{2}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$T_{31} = \left(\frac{a\left(2 + \sqrt{5}\right)}{2}, \frac{-b\left(3 + \sqrt{5}\right)}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \qquad T_{32} = \left(\frac{a\left(2 + \sqrt{5}\right)}{2}, \frac{b\left(3 + \sqrt{5}\right)}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$T_{33} = \left(\frac{-a\left(2 + \sqrt{5}\right)}{2}, \frac{b\left(3 + \sqrt{5}\right)}{2}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \qquad T_{34} = \left(\frac{-a\left(2 + \sqrt{5}\right)}{2}, \frac{-b\left(3 + \sqrt{5}\right)}{2}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$T_{35} = \left(\frac{-a\left(2 + \sqrt{5}\right)}{2}, \frac{-b\left(3 + \sqrt{5}\right)}{2}, \frac{-\sqrt{5}}{5}\right) \quad T_{36} = \left(\frac{-a\left(2 + \sqrt{5}\right)}{2}, \frac{b\left(3 + \sqrt{5}\right)}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

dır. Benzer şekilde T_{37} noktası P_2 ve P_3 noktalarından geçen doğrunun üzerinde yer aldığı için, $\delta \in \mathbb{R}$ keyfi bir parametre olmak üzere;

$$T_{37} = \left(\delta\frac{\varphi - 1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi}, \delta\frac{1 - \varphi}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi}, \delta\frac{-1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi}\right)$$

formunda olup, $\|T_{37}P_3\| = b$ eşitliğinden

$$\left(\delta\frac{\varphi-1}{\varphi}+\frac{1}{\varphi}-1\right)^2+\left(\delta\frac{1-\varphi}{\varphi^2}-\frac{1}{\varphi^2}\right)^2+\left(\delta\frac{-1}{\varphi}+\frac{1}{\varphi}-0\right)^2=b^2$$

denklemi elde edilir. Bu denklemden

$$\delta=-\sqrt{\frac{4}{(\varphi+2)^2\left[\varphi^2(\varphi-1)^2+(1-\varphi)^2+\varphi^2\right]}}+1=\frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}$$

olup, $T_{37}=\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{b\left(2+\sqrt{5}\right)}{2},\frac{a}{2}\right)$ olarak bulunur. Çokyüzlünün simetrisinden yararlanarak diğer noktaların koordinatları

$$T_{37}=\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{b\left(2+\sqrt{5}\right)}{2},\frac{a}{2}\right) \qquad T_{38}=\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{-b\left(2+\sqrt{5}\right)}{2},\frac{a}{2}\right)$$

$$T_{39}=\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{-b\left(2+\sqrt{5}\right)}{2},-\frac{a}{2}\right) \qquad T_{40}=\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{b\left(2+\sqrt{5}\right)}{2},-\frac{a}{2}\right)$$

$$T_{41}=\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{b\left(2+\sqrt{5}\right)}{2},\frac{a}{2}\right) \qquad T_{42}=\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{-b\left(2+\sqrt{5}\right)}{2},\frac{a}{2}\right)$$

$$T_{43}=\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{-b\left(2+\sqrt{5}\right)}{2},-\frac{a}{2}\right) \qquad T_{44}=\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{b\left(2+\sqrt{5}\right)}{2},-\frac{a}{2}\right)$$

dır. T_{45} in koordinatları aşağıdaki gibi hesaplanır.

$\psi\in\mathbb{R}$ keyfi bir parametre olmak üzere, $P_5=\left(\frac{1}{\varphi},-\frac{1}{\varphi},\frac{1}{\varphi}\right)$ ve $P_6=\left(0,-1,\frac{1}{\varphi^2}\right)$ noktalarından geçen doğrunun parametrik denklemi

$$x=\psi\frac{-1}{\varphi}+\frac{1}{\varphi}$$

$$y=\psi\frac{1-\varphi}{\varphi}-\frac{1}{\varphi}$$

$$z=\psi\frac{1-\varphi}{\varphi^2}+\frac{1}{\varphi}$$

dir. T_{45} noktası bu doğrunun üzerinde yer aldığı için

$$T_{13}=\left(\psi\frac{-1}{\varphi}+\frac{1}{\varphi},\psi\frac{1-\varphi}{\varphi}-\frac{1}{\varphi},\psi\frac{1-\varphi}{\varphi^2}+\frac{1}{\varphi}\right)$$

formunda olup, $\|T_{45}P_5\| = b$ eşitliğinden

$$\left(\psi\frac{-1}{\varphi}\right)^2+\left(\psi\frac{1-\varphi}{\varphi}\right)^2+\left(\psi\frac{1-\varphi}{\varphi^2}\right)^2=b^2$$

denklemi elde edilir. Bu denklemden

$$\psi = \sqrt{\frac{4}{(\varphi+2)^2\left[\varphi^2+\varphi^2(1-\varphi)^2+(1-\varphi)^2\right]}} = \frac{2}{5+\sqrt{5}}$$

olup, $T_{45} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{-a\left(2+\sqrt{5}\right)}{2}, \frac{b\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}\right)$ olarak bulunur. Çokyüzlünün simetrisinden yararlanarak diğer noktaların koordinatları

$$T_{45} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{-a\left(2+\sqrt{5}\right)}{2}, \frac{b\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}\right) \qquad T_{46} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{-a\left(2+\sqrt{5}\right)}{2}, \frac{b\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}\right)$$

$$T_{47} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{-a\left(2+\sqrt{5}\right)}{2}, \frac{-b\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}\right) \quad T_{48} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{-a\left(2+\sqrt{5}\right)}{2}, \frac{-b\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}\right)$$

$$T_{49} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{a\left(2+\sqrt{5}\right)}{2}, \frac{b\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}\right) \qquad T_{50} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{a\left(2+\sqrt{5}\right)}{2}, \frac{b\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}\right)$$

$$T_{51} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{a\left(2+\sqrt{5}\right)}{2}, \frac{-b\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}\right) \qquad T_{52} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{a\left(2+\sqrt{5}\right)}{2}, \frac{-b\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}\right)$$

dir. Benzer şekilde T_{53} noktası P_5 ve P_6 noktalarından geçen doğrunun üzerinde yer aldığı için, $\gamma \in \mathbb{R}$ keyfi bir parametre olmak üzere;

$$T_{13} = \left(\gamma\frac{-1}{\varphi}+\frac{1}{\varphi}, \gamma\frac{1-\varphi}{\varphi}-\frac{1}{\varphi}, \gamma\frac{1-\varphi}{\varphi^2}+\frac{1}{\varphi}\right)$$

formunda olup, $\|T_{53}P_6\| = b$ eşitliğinden

$$\left(\gamma\frac{-1}{\varphi}+\frac{1}{\varphi}\right)^2 + \left(\gamma\frac{1-\varphi}{\varphi}-\frac{1}{\varphi}+1\right)^2 + \left(\gamma\frac{1-\varphi}{\varphi^2}+\frac{1}{\varphi}-\frac{1}{\varphi^2}\right)^2 = b^2$$

denklemi elde edilir. Bu denklemden

$$\gamma = -\sqrt{\frac{4}{(\varphi+2)^2\left[\varphi^2(\varphi-1)^2+(1-\varphi)^2+\varphi^2\right]}}+1 = \frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}$$

olup, $T_{53} = \left(\frac{a}{2}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ olarak bulunur. Çokyüzlünün simetrisinden yararlanarak diğer noktaların koordinatları

$$T_{53} = \left(\frac{a}{2}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \qquad T_{54} = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$T_{55} = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \qquad T_{56} = \left(\frac{a}{2}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$T_{57} = \left(-\frac{a}{2}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \qquad T_{58} = \left(\frac{a}{2}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$T_{59} = \left(\frac{a}{2}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \qquad T_{60} = \left(-\frac{a}{2}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

dır. Sonuç olarak truncated dodecahedron köşe noktalarının tamamının sade hali aşağıdaki gibidir:

$$T_1 = \left(\frac{3\sqrt{5}-5}{10}, 0, 1\right) \qquad T_2 = \left(-\frac{3\sqrt{5}-5}{10}, 0, 1\right)$$

$$T_3 = \left(-\frac{3\sqrt{5}-5}{10}, 0, -1\right) \qquad T_4 = \left(\frac{3\sqrt{5}-5}{10}, 0, -1\right)$$

$$T_5 = \left(1, \frac{3\sqrt{5}-5}{10}, 0\right) \qquad T_6 = \left(1, -\frac{3\sqrt{5}-5}{10}, 0\right)$$

$$T_7 = \left(-1, -\frac{3\sqrt{5}-5}{10}, 0\right) \qquad T_8 = \left(-1, \frac{3\sqrt{5}-5}{10}, 0\right)$$

$$T_9 = \left(0, 1, \frac{3\sqrt{5}-5}{10}\right) \qquad T_{10} = \left(0, 1, -\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\right)$$

$$T_{11} = \left(0, -1, -\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\right) \qquad T_{12} = \left(0, -1, \frac{3\sqrt{5}-5}{10}\right)$$

$$T_{13} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{3\sqrt{5}-5}{10}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \qquad T_{14} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{3\sqrt{5}-5}{10}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$T_{15} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{3\sqrt{5}-5}{10}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \qquad T_{16} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{3\sqrt{5}-5}{10}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$T_{17} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{3\sqrt{5}-5}{10}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \qquad T_{18} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{3\sqrt{5}-5}{10}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$T_{19} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{3\sqrt{5}-5}{10}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \qquad T_{20} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{3\sqrt{5}-5}{10}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$T_{21} = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{5+\sqrt{5}}{10}\right) \qquad T_{22} = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{5}, \frac{-\sqrt{5}}{5}, \frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)$$

$$T_{23} = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{5}, \frac{-\sqrt{5}}{5}, -\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right) \qquad T_{24} = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)$$

$$T_{25} = \left(-\frac{5-\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{5+\sqrt{5}}{10}\right) \qquad T_{26} = \left(-\frac{5-\sqrt{5}}{5}, \frac{-\sqrt{5}}{5}, \frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)$$

$$T_{27} = \left(-\frac{5-\sqrt{5}}{5}, \frac{-\sqrt{5}}{5}, -\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right) \qquad T_{28} = \left(-\frac{5-\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)$$

$$T_{29} = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}, \frac{5-\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \qquad T_{30} = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}, -\frac{5-\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$T_{31} = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}, -\frac{5-\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \qquad T_{32} = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}, \frac{5-\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$T_{33} = \left(-\frac{5+\sqrt{5}}{10}, \frac{5-\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \qquad T_{34} = \left(-\frac{5+\sqrt{5}}{10}, -\frac{5-\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$T_{35} = \left(-\frac{5+\sqrt{5}}{10}, -\frac{5-\sqrt{5}}{5}, \frac{-\sqrt{5}}{5}\right) \qquad T_{36} = \left(-\frac{5+\sqrt{5}}{10}, \frac{5-\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$T_{37} = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{3\sqrt{5}-5}{10} \right) \qquad T_{38} = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{3\sqrt{5}-5}{10} \right)$$

$$T_{39} = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{3\sqrt{5}-5}{10} \right) \qquad T_{40} = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{3\sqrt{5}-5}{10} \right)$$

$$T_{41} = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{3\sqrt{5}-5}{10} \right) \qquad T_{42} = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{3\sqrt{5}-5}{10} \right)$$

$$T_{43} = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{3\sqrt{5}-5}{10} \right) \qquad T_{44} = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{3\sqrt{5}-5}{10} \right)$$

$$T_{45} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{5+\sqrt{5}}{10}, \frac{5-\sqrt{5}}{5} \right) \qquad T_{46} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{5+\sqrt{5}}{10}, \frac{5-\sqrt{5}}{5} \right)$$

$$T_{47} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{5+\sqrt{5}}{10}, -\frac{5-\sqrt{5}}{5} \right) \qquad T_{48} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{5+\sqrt{5}}{10}, -\frac{5-\sqrt{5}}{5} \right)$$

$$T_{49} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{5+\sqrt{5}}{10}, \frac{5-\sqrt{5}}{5} \right) \qquad T_{50} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{5+\sqrt{5}}{10}, \frac{5-\sqrt{5}}{5} \right)$$

$$T_{51} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{5+\sqrt{5}}{10}, -\frac{5-\sqrt{5}}{5} \right) \qquad T_{52} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{5+\sqrt{5}}{10}, -\frac{5-\sqrt{5}}{5} \right)$$

$$T_{53} = \left(\frac{3\sqrt{5}-5}{10}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \qquad T_{54} = \left(-\frac{3\sqrt{5}-5}{10}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5} \right)$$

$$T_{55} = \left(-\frac{3\sqrt{5}-5}{10}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5} \right) \qquad T_{56} = \left(\frac{3\sqrt{5}-5}{10}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5} \right)$$

$$T_{57} = \left(-\frac{3\sqrt{5}-5}{10}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \qquad T_{58} = \left(\frac{3\sqrt{5}-5}{10}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5} \right)$$

$$T_{59} = \left(\frac{3\sqrt{5}-5}{10}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5} \right) \qquad T_{60} = \left(-\frac{3\sqrt{5}-5}{10}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5} \right)$$

Bu köşe noktalardan geçen yüzey düzlem denklemleride aşağıdaki şekilde verilebilir.

Köşe Noktalar	Yüzey Düzlem Denklemleri
$T_5, T_6, T_{13}, T_{14}, T_{21}$ $T_{22}, T_{29}, T_{30}, T_{37}, T_{38}$	$-x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}z + 1 = 0$
$T_7, T_8, T_{19}, T_{20}, T_{27}$ $T_{28}, T_{35}, T_{36}, T_{43}, T_{44}$	$x + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}z + 1 = 0$
$T_5, T_6, T_{15}, T_{16}, T_{23}$ $T_{24}, T_{31}, T_{32}, T_{39}, T_{40}$	$-x + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}z + 1 = 0$
$T_7, T_8, T_{17}, T_{18}, T_{25}$ $T_{26}, T_{33}, T_{34}, T_{41}, T_{42}$	$x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}z + 1 = 0$
$T_9, T_{10}, T_{29}, T_{32}, T_{37}$ $T_{40}, T_{50}, T_{51}, T_{58}, T_{59}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}x - y + 1 = 0$
$T_{11}, T_{12}, T_{34}, T_{35}, T_{42}$ $T_{43}, T_{46}, T_{47}, T_{54}, T_{55}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x + y + 1 = 0$
$T_{11}, T_{12}, T_{30}, T_{31}, T_{38}$ $T_{39}, T_{45}, T_{48}, T_{53}, T_{56}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}x - y + 1 = 0$
$T_9, T_{10}, T_{33}, T_{36}, T_{41}$ $T_{44}, T_{49}, T_{52}, T_{57}, T_{60}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x - y + 1 = 0$
$T_1, T_2, T_{13}, T_{17}, T_{21}$ $T_{25}, T_{49}, T_{50}, T_{57}, T_{58}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}y - z + 1 = 0$
$T_3, T_4, T_{15}, T_{19}, T_{23}$ $T_{27}, T_{47}, T_{48}, T_{55}, T_{56}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}y + z + 1 = 0$
$T_1, T_2, T_{14}, T_{18}, T_{22}$ $T_{26}, T_{45}, T_{46}, T_{53}, T_{54}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}y - z + 1 = 0$
$T_3, T_4, T_{16}, T_{20}, T_{24}$ $T_{28}, T_{51}, T_{52}, T_{59}, T_{60}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}y + z + 1 = 0$

Köşe Noktalar	Yüzey Düzlem Denklemleri
T_1, T_{13}, T_{14}	$\frac{5-4\sqrt{5}}{11}x - \frac{5+7\sqrt{5}}{22}z + 1 = 0$
T_3, T_{19}, T_{20}	$\frac{-5+4\sqrt{5}}{11}x + \frac{5+7\sqrt{5}}{22}z + 1 = 0$
T_2, T_{17}, T_{18}	$\frac{-5+4\sqrt{5}}{11}x - \frac{5+7\sqrt{5}}{22}z + 1 = 0$
T_4, T_{15}, T_{16}	$\frac{5-4\sqrt{5}}{11}x + \frac{5+7\sqrt{5}}{22}z + 1 = 0$
T_9, T_{57}, T_{58}	$-\frac{5+7\sqrt{5}}{22}y + \frac{5-4\sqrt{5}}{11}z + 1 = 0$
T_{11}, T_{55}, T_{56}	$\frac{5+7\sqrt{5}}{22}y + \frac{-5+4\sqrt{5}}{11}z + 1 = 0$
T_{12}, T_{53}, T_{54}	$\frac{5+7\sqrt{5}}{22}y + \frac{5-4\sqrt{5}}{11}z + 1 = 0$
T_{10}, T_{59}, T_{60}	$-\frac{5+7\sqrt{5}}{22}y + \frac{-5+4\sqrt{5}}{11}z + 1 = 0$

Köşe Noktalar	Yüzey Düzlem Denklemleri
T_6, T_{38}, T_{39}	$-\frac{5+7\sqrt{5}}{22}x+\frac{-5+4\sqrt{5}}{11}y+1=0$
T_8, T_{41}, T_{44}	$\frac{5+7\sqrt{5}}{22}x+\frac{5-4\sqrt{5}}{11}y+1=0$
T_5, T_{37}, T_{40}	$-\frac{5+7\sqrt{5}}{22}x+\frac{5-4\sqrt{5}}{11}y+1=0$
T_7, T_{42}, T_{43}	$\frac{5+7\sqrt{5}}{22}x+\frac{-5+4\sqrt{5}}{11}y+1=0$
T_{21}, T_{29}, T_{50}	$-\frac{15+\sqrt{5}}{22}x+\frac{-15+\sqrt{5}}{22}y+\frac{-15+\sqrt{5}}{22}z+1=0$
T_{27}, T_{35}, T_{47}	$\frac{15-\sqrt{5}}{22}x+\frac{15-\sqrt{5}}{22}y+\frac{15-\sqrt{5}}{22}z+1=0$
T_{23}, T_{31}, T_{48}	$\frac{-15+\sqrt{5}}{22}x+\frac{15-\sqrt{5}}{22}y+\frac{15-\sqrt{5}}{22}z+1=0$
T_{26}, T_{34}, T_{46}	$\frac{15-\sqrt{5}}{22}x+\frac{15-\sqrt{5}}{22}y+\frac{-15+\sqrt{5}}{22}z+1=0$

Köşe Noktalar	Yüzey Düzlem Denklemleri
T_{24}, T_{32}, T_{54}	$\frac{-15+\sqrt{5}}{22}x + \frac{-15+\sqrt{5}}{22}y + \frac{15-\sqrt{5}}{22}z + 1 = 0$
T_{22}, T_{30}, T_{45}	$\frac{-15+\sqrt{5}}{22}x + \frac{15-\sqrt{5}}{22}y + \frac{-15+\sqrt{5}}{22}z + 1 = 0$
T_{28}, T_{36}, T_{52}	$\frac{15-\sqrt{5}}{22}x + \frac{-15+\sqrt{5}}{22}y + \frac{15-\sqrt{5}}{22}z + 1 = 0$
T_{25}, T_{33}, T_{49}	$\frac{15-\sqrt{5}}{22}x + \frac{-15+\sqrt{5}}{22}y + \frac{-15+\sqrt{5}}{22}z + 1 = 0$

Buraya kadar olan kısımda truncated dodecahedronun köşe noktaları hesaplandı ve bu noktalarda geçen yüzey düzlem denklemleri tespit edildi. Elde edilen 32 tane yüzey düzlem denklemi incelendiğinde mutlak değer yardımıyla, aşağıdaki şekilde yüzey düzlem denklemleri için genel bir bağıntının verileceği görülür

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)|x| + |y| + 1 = 0$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)|y| + |z| + 1 = 0$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)|z| + |x| + 1 = 0$$

$$\left(\frac{15-\sqrt{5}}{22}\right)(|x| + |y| + |z|) + 1 = 0$$

$$\left(\frac{5+7\sqrt{5}}{22}\right)|x|+\left(\frac{5-4\sqrt{5}}{11}\right)|y|+1=0$$

$$\left(\frac{5+7\sqrt{5}}{22}\right)|y|+\left(\frac{5-4\sqrt{5}}{11}\right)|z|+1=0$$

$$\left(\frac{5+7\sqrt{5}}{22}\right)|z|+\left(\frac{5-4\sqrt{5}}{11}\right)|x|+1=0$$

Son olarak bu genel olarak elde edilen yüzey düzlem denklemlerin kümesinin maksimumu alındığında truncated dodecahedron elde edilecektir. Artık bu tezin temel amacı olan, birim küresi truncated dodecahedron olan metriğin tanımı aşağıdaki şekilde verilebilir.

Tanım 4.1 $\mathbb{R}^3$ *te* $X=(x_1,y_1,z_1)$, $Y=(x_2,y_2,z_2)$ *keyfi noktalar ve* $\mathbf{X}_{12}=|x_1-x_2|$, $\mathbf{Y}_{12}=|y_1-y_2|$ *ve* $\mathbf{Z}_{12}=|z_1-z_2|$ *olarak verilisin.* $d_{\mathbf{TD}}:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to[0,\infty)$ *truncated dodecahedron uzaklık fonksiyonu*

$$d_{\mathbf{TD}}(X,Y)=\max\left\{\begin{array}{c}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\mathbf{X}_{12}+\mathbf{Y}_{12},\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\mathbf{Y}_{12}+\mathbf{Z}_{12},\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\mathbf{Z}_{12}+\mathbf{X}_{12}\\ ,\ \left(\frac{5+7\sqrt{5}}{22}\right)\mathbf{X}_{12}+\left(\frac{4\sqrt{5}-5}{11}\right)\mathbf{Y}_{12},\left(\frac{5+7\sqrt{5}}{22}\right)\mathbf{Y}_{12}+\left(\frac{4\sqrt{5}-5}{11}\right)\mathbf{Z}_{12},\\ ,\ \left(\frac{5+7\sqrt{5}}{22}\right)\mathbf{Z}_{12}+\left(\frac{4\sqrt{5}-5}{11}\right)\mathbf{X}_{12},\left(\frac{15-\sqrt{5}}{22}\right)(\mathbf{X}_{12}+\mathbf{Y}_{12}+\mathbf{Z}_{12})\end{array}\right\}$$

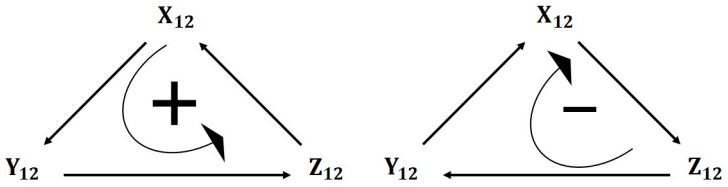
şeklinde tanımlanır.

Böylece buraya kadar olan kısımda tezin temel amaçlarından biri olan $d_{\mathbf{TD}}$ uzaklık fonsiyonunun uzayda analitik olarak tanımı verilmiştir. Fakat bu tanım oldukça uzun olup, verilen uzaklık fonksiyonunun üçgen eşitsizliğini sağlaması ya da uzayın bu uzaklık fonksiyonuna göre izometri grubunun hesaplanmasında işlemleri zorlaştıracaktır. Bu gibi işlemsel dezavantajlardan dolayı işlemlerde kısalık sağlaması adına $d_{\mathbf{TD}}$ uzaklık fonsiyonu alternatif olarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir;

Üç boyutlu uzayda keyfi $X=(x_1,y_1,z_1)$, $Y=(x_2,y_2,z_2)$ ve $Z=(x_3,y_3,z_3)$ noktaları verilsin. $\mathbf{X}_{12}=|x_1-x_2|$, $\mathbf{Y}_{12}=|y_1-y_2|$ ve $\mathbf{Z}_{12}=|z_1-z_2|$ olmak üzere;

$$\mathbf{M}:=\max\{\mathbf{X}_{12},\ \mathbf{Y}_{12},\ \mathbf{Z}_{12}\}$$

katsayısı tanımlansın. Bu katsayı üzerinde



Şekil 4.5 Yönlendirme

şekildeki gibi bir yönlendirme yapılırsa; örneğin $\mathbf{M} = \mathbf{Y}_{12}$ ise $\mathbf{M}^{+} = \mathbf{Z}_{12}$ olacaktır, benzer mantıkla $\mathbf{M} = \mathbf{X}_{12}$ ise $\mathbf{M}^{-} = \mathbf{Z}_{12}$ olacaktır. Buna göre $d_{\mathbf{TD}}$ uzaklık fonsiyonu aşağıdaki gibi kısaca alternatif olarak tanımlanabilir; $k_1 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $k_2 = \dfrac{5+7\sqrt{5}}{22}$, $k_3 = \dfrac{4\sqrt{5}-5}{11}$ ve $k_4 = \dfrac{15-\sqrt{5}}{22}$ olmak üzere

$$d_{\mathbf{TD}}(X,Y) = \max\left\{\mathbf{M} + k_1\mathbf{M}^{-}, k_2\mathbf{M} + k_3\mathbf{M}^{+}, k_4\left(\mathbf{M} + \mathbf{M}^{+} + \mathbf{M}^{-}\right)\right\}$$

dir.

Teorem 4.1 *:* $d_{\mathbf{TD}}$ *uzaklık fonksiyonu metriktir [Gelişgen vd., 2017].*

Sonuç 4.1 *:* $d_{\mathbf{TD}}$ *metriğine göre birim küre truncated dodecahedrondur.*

5. $\mathbb{R}^3_{TD}$ ÜN İZOMETRİ GRUBU

Geometrik objelerin kendileri üzerine olan dönüşümler oldukça önemli olup, bu dönüşümler ile bir grup yapısı oluşturulabilir. Bu grupların çoğu ise geometrik objenin simetrileri ve ilgili uzayın izometrilerinden oluşur.

$\mathbb{P}$ noktalar kümesi, $\mathbb{L}$ doğrular kümesi ve d herhangi bir uzaklık fonksiyonu olmak üzere $\mathcal{M} = [\mathbb{P}, \mathbb{L}, d]$ metrik geometrisi verilsin. $\forall A, B \in \mathbb{P}$ için $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ dönüşümü d uzaklığını koruyorsa, yani

$$d(A, B) = d(f(A), f(B))$$

ise f dönüşümüne izometri denir. İzometri grubu, genellikle o uzaydaki matematiksel objelerin simetrilerinden ve öteleme dönüşümlerinden oluşan küme ile temsil edilir. $\mathcal{M}$ metrik geometrisinde bir F şeklinin (objesinin) simetrisi, $f(F) = F$ özelliğinin sağlayan $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ izometri dönüşümüdür.

- Birim dönüşüm (*identity*),
- Öteleme (*translation*),
- Yansıma (*reflection*),
- Dönme (*rotation*),
- Noktaya göre yansıma (*inversiyon*),
- Dönme-Yansıma (*rotary-reflection*),
- Dönme-İnversiyon (*rotary-inversiyon*).

dönüşümleri $\mathbb{R}^3$ de izometrik dönüşümlerdir. $\mathbb{R}^3$ de bu dönüşümlerin oluşturduğu küme, fonksiyonlarda bileşke işlemi ile birlikte izometri grubunu oluşturur. Bundan sonraki kısımda (Gelişgen, Ö. and Kaya, R., 2009) numaralı referansa tamamen sadık kalınarak birim küresi truncated dodecahedron olan $d_{\mathbf{TD}}$ metriği ile donatılmış $\mathbb{R}^3$ ün izometri grubu verilecektir.

Bu bölümde $\mathbb{R}^3$ ün 4. bölümde tanımlanan $d_{\mathbf{TD}}$ metriğine göre izometri grubu analitik bir yöntem izlenerek verilecektir.

Teorem 5.1 : $\mathbb{R}^3_{\mathbf{TD}}$ uzayında keyfi her öteleme $d_{\mathbf{TD}}$ metriğini korur. Yani bir izometridir.

İspat

$$\begin{array}{rccl} T_A & : & \mathbb{R}^3_{\mathbf{TD}} & \rightarrow & \mathbb{R}^3_{\mathbf{TD}} \\ & & X & \rightarrow & T_A(X) = A + X \end{array}$$

şeklinde tanımlı dönüşüm $\mathbb{R}^3_{\mathbf{TD}}$ *uzayında bir öteleme dönüşümü olarak tanımlanır.*

$\mathbb{R}^3_{\mathbf{TD}}$ *uzayında keyfi* $X = (x_1, y_1, z_1)$, $Y = (x_2, y_2, z_2)$ *noktalarının görüntüleri,* $A = (x_a, y_a, z_a) \in \mathbb{R}^3_{\mathbf{D}}$ *için*

$$\begin{array}{rcccl} T_A(X) & = & A + X & = & (x_a + x_1, y_a + y_1, z_a + z_1) \\ T_A(Y) & = & A + Y & = & (x_a + x_2, y_a + y_2, z_a + z_2) \end{array}$$

şeklindedir.

$|x_1 + x_a - x_a - x_2| = |x_1 - x_2| = \mathbf{X}_{12}$, $|y_1 + y_a - y_a - y_2| = |y_1 - y_2| = \mathbf{Y}_{12}$ *ve* $|z_1 + z_a - z_a - z_2| = |z_1 - z_2| = \mathbf{Z}_{12}$ *olmak üzere* $\mathbf{M} := \max\{\mathbf{X}_{12}, \mathbf{Y}_{12}, \mathbf{Z}_{12}\}$ *için*

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{TD}}(T_A(X), T_A(Y)) &= \max\{\mathbf{M} + k_1\mathbf{M}^-, k_2\mathbf{M} + k_3\mathbf{M}^+, k_4(\mathbf{M} + \mathbf{M}^+ + \mathbf{M}^-)\} \\ &= d_{\mathbf{TD}}(X, Y) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir bu ise keyfi her T_A *ötelemesinin bir izometri olduğu anlamına gelir.*

Tezin bundan sonraki kısmında bu teoreme dayanarak, izometri hesaplarında kullanılacak doğru ve düzlemler orjinden geçecek şekilde alınması işlem kısalığı sağlayacaktır. Bundan sonraki teorede $d_{\mathbf{TD}}$ uzaklık fonksiyonunu koruyan yansıma dönüşümleri tespit edilecektir.

Teorem 5.2 : $\mathbb{R}^3_{\mathbf{TD}}$ uzayında orjinden geçen keyfi bir düzlemin normal vektörü $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $((\varphi - 1), \mp\varphi, \mp 1)$, $(\mp\varphi, \mp 1, ((\varphi - 1)))$, $(\mp 1, (\varphi - 1), \mp\varphi)$ vektörlerinden biri veya bu vektörlere paralel bir vektör olması durumunda, bu düzleme göre yansıma dönüşümü bir izometridir.

İspat Δ, *birim normal vektörü* (a, b, c) *olan* $ax + by + cz = 0$ *düzlemini göstermek üzere,*

$$\begin{aligned} \nu_1(x, y, z) &= (1 - 2a^2)x - 2aby - 2acz \\ \nu_2(x, y, z) &= -2abx + (1 - 2b^2)y - 2bcz \\ \nu_3(x, y, z) &= -2acx - 2bcy + (1 - 2c^2)z \end{aligned}$$

eşitlikleri verilsin. Buna göre Δ düzlemine göre Öklidyen yansıma

$$\begin{array}{rccl} \sigma_{\Delta} & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y,z) & \longrightarrow \sigma_{\Delta}(x,y,z) = (\nu_1(x,y,z), \nu_2(x,y,z), \nu_3(x,y,z)) \end{array}$$

şeklinde tanımlı bir dönüşümdür. $\mathbb{R}^3$ teki taban yer vektörleri arasındaki uzaklığı koruyan yansımaları tespit etmek uzaydaki tüm izometrik yansımaları tespit etmek olacağından $\mathbb{R}^3$ te truncated dodecahedron nun köşe noktaları da olan

$$\left\{ T_5 = \left(1, \frac{1}{\varphi(\varphi+2)}, 0\right), T_6 = \left(1, \frac{-1}{\varphi(\varphi+2)}, 0\right),\ T_9 = \left(0, 1, \frac{1}{\varphi(\varphi+2)}\right) \right\}$$

taban vektörlerinin Öklidyen yansımalar altında görüntüleri,

$$\sigma_{\Delta}(T_5) = \left((1-2a^2) - \frac{2ab}{\varphi(\varphi+2)}, -2ab + \frac{(1-2b^2)}{\varphi(\varphi+2)}, -2ac - \frac{2bc}{\varphi(\varphi+2)}\right)$$
$$\sigma_{\Delta}(T_6) = \left((1-2a^2) + \frac{2ab}{\varphi(\varphi+2)}, -2ab - \frac{(1-2b^2)}{\varphi(\varphi+2)}, -2ac + \frac{2bc}{\varphi(\varphi+2)}\right)$$
$$\sigma_{\Delta}(T_9) = \left(-2ab - \frac{2ac}{\varphi(\varphi+2)}, (1-2b^2) - \frac{2bc}{\varphi(\varphi+2)}, -2bc + \frac{(1-2c^2)}{\varphi(\varphi+2)}\right)$$

dir. T_5, T_6 ve T_9 truncated dodecahedronun köşe noktaları olduğu için

$$d_{\mathbf{TD}}(O, T_5) = d_{\mathbf{TD}}(O, T_6) = d_{\mathbf{TD}}(O, T_9) = 1$$

olduğu açıktır. Şimdi Δ yansıma düzleminin izometrik bir dönüşüm olması adına

$$d_{\mathbf{TD}}(\sigma_{\Delta}(O), \sigma_{\Delta}(T_5)) = d_{\mathbf{TD}}(\sigma_{\Delta}(O), \sigma_{\Delta}(T_6)) = d_{\mathbf{TD}}(\sigma_{\Delta}(O), \sigma_{\Delta}(T_9)) = 1$$

eşitliklikleri kullanılarak Δ yansıma düzleminin $a,\ b,\ c$ katsayıları aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\mathbf{M}_1 = maks\left\{ \left|(1-2a^2) - \frac{2ab}{\varphi(\varphi+2)}\right|, \left|-2ab + \frac{(1-2b^2)}{\varphi(\varphi+2)}\right|, \left|-2ac - \frac{2bc}{\varphi(\varphi+2)}\right| \right\}$$
$$\mathbf{M}_2 = maks\left\{ \left|(1-2a^2) - \frac{2ab}{\varphi(\varphi+2)}\right|, \left|-2ab - \frac{(1-2b^2)}{\varphi(\varphi+2)}\right|, \left|-2ac + \frac{2bc}{\varphi(\varphi+2)}\right| \right\}$$
$$\mathbf{M}_3 = maks\left\{ \left|-2ab - \frac{2ac}{\varphi(\varphi+2)}\right|, \left|(1-2b^2) - \frac{2bc}{\varphi(\varphi+2)}\right|, \left|-2bc + \frac{(1-2c^2)}{\varphi(\varphi+2)}\right| \right\}$$

olmak üzere;

$$d_{\mathbf{TD}}(\sigma_{\Delta}(O), \sigma_{\Delta}(T_5)) = \max\left\{\mathbf{M}_1 + k_1\mathbf{M}_1^-, k_2\mathbf{M}_1 + k_3\mathbf{M}_1^+, k_4\left(\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_1^+ + \mathbf{M}_1^-\right)\right\} = 1$$
$$d_{\mathbf{TD}}(\sigma_{\Delta}(O), \sigma_{\Delta}(T_6)) = \max\left\{\mathbf{M}_2 + k_1\mathbf{M}_2^-, k_2\mathbf{M}_2 + k_3\mathbf{M}_2^+, k_4\left(\mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_2^+ + \mathbf{M}_2^-\right)\right\} = 1$$
$$d_{\mathbf{TD}}(\sigma_{\Delta}(O), \sigma_{\Delta}(T_9)) = \max\left\{\mathbf{M}_3 + k_1\mathbf{M}_3^-, k_2\mathbf{M}_3 + k_3\mathbf{M}_3^+, k_4\left(\mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_3^+ + \mathbf{M}_3^-\right)\right\} = 1$$

denklem sistemi çözülürse, (a,b,c) için $(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1),\ ((\varphi-1), \mp\varphi, \mp 1)$, $(\mp\varphi, \mp 1, ((\varphi-1)), (\mp 1, (\varphi-1), \mp\varphi)$ çözümleri bulunur.

Tersine, normal vektörleri $(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1),\ ((\varphi-1), \mp\varphi, \mp 1)$, $(\mp\varphi, \mp 1, ((\varphi-1)),\ (\mp 1, (\varphi-1), \mp\varphi)$ bu vektörler veya bu vektörlere paralel olan düzlemlere göre yansımaların $d_{\mathbf{TD}}$ uzaklığını koruduğu uzaklık fonsiyonunun tanımından kolaylıkla gösterilebilir.

Sonuç 5.1 : İzometrik yansımalarının kümesi orijinden geçen

$$\begin{array}{ccccc} x=0 & , & y=0 & , & z=0 \\ (\varphi-1)x+\varphi y+1z=0 & , & \varphi x+y+(\varphi-1)z=0 & , & x+(\varphi-1)y+\varphi z=0 \\ (\varphi-1)x-\varphi y+1z=0 & , & \varphi x-y+(\varphi-1)z=0 & , & -x+(\varphi-1)y+\varphi z=0 \\ (\varphi-1)x+\varphi y-1z=0 & , & -\varphi x+y+(\varphi-1)z=0 & , & x+(\varphi-1)y-\varphi z=0 \\ (\varphi-1)x-\varphi y-1z=0 & , & -\varphi x-y+(\varphi-1)z=0 & , & -x+(\varphi-1)y-\varphi z=0 \end{array}$$

düzlemlerine göre on beş Öklidyen yansımadan oluşur.

Aşağıdaki şekilde birim normal vektörleri verilen düzlemlere göre, isometrik yansımalar altında truncated dodecahedron küresinin köşe noktaların görüntüleri verilmiştir.

	(1,0,0)	(0,1,0)	(0,0,1)	((φ-1),φ,1)	((φ-1),-φ,1)	((φ-1),φ,-1)	((φ-1),-φ,-1)	(φ,1,(φ-1))	(-φ,1,(φ-1))	(φ,-1,(φ-1))	(-φ,-1,(φ-1))	(1,(φ-1),φ)	(-1,(φ-1),φ)	(1,(φ-1),-φ)	(-1,(φ-1),-φ)
T_1	T_2	T_1	T_4	T_{54}	T_{57}	T_{50}	T_{45}	T_{26}	T_{14}	T_{25}	T_{13}	T_{35}	T_{39}	T_{40}	T_{36}
T_2	T_1	T_2	T_3	T_{46}	T_{49}	T_{58}	T_{53}	T_{18}	T_{22}	T_{17}	T_{21}	T_{43}	T_{31}	T_{32}	T_{44}
T_3	T_4	T_3	T_2	T_{59}	T_{56}	T_{47}	T_{52}	T_{24}	T_{20}	T_{23}	T_{19}	T_{29}	T_{41}	T_{42}	T_{30}
T_4	T_3	T_4	T_1	T_{51}	T_{48}	T_{55}	T_{60}	T_{16}	T_{28}	T_{15}	T_{27}	T_{37}	T_{33}	T_{34}	T_{38}
T_5	T_8	T_6	T_5	T_{31}	T_{40}	T_{30}	T_{37}	T_{47}	T_{57}	T_{60}	T_{46}	T_{15}	T_{21}	T_{14}	T_{24}
T_6	T_7	T_5	T_6	T_{39}	T_{32}	T_{38}	T_{29}	T_{55}	T_{49}	T_{52}	T_{54}	T_{23}	T_{13}	T_{22}	T_{16}
T_7	T_6	T_8	T_7	T_{33}	T_{42}	T_{36}	T_{43}	T_{50}	T_{56}	T_{53}	T_{51}	T_{17}	T_{27}	T_{20}	T_{26}
T_8	T_5	T_7	T_8	T_{41}	T_{34}	T_{44}	T_{35}	T_{58}	T_{48}	T_{45}	T_{59}	T_{25}	T_{19}	T_{28}	T_{18}
T_9	T_9	T_{12}	T_{10}	T_{27}	T_{14}	T_{18}	T_{23}	T_{44}	T_{40}	T_{29}	T_{33}	T_{52}	T_{51}	T_{57}	T_{58}
T_{10}	T_{10}	T_{11}	T_9	T_{19}	T_{22}	T_{26}	T_{15}	T_{36}	T_{32}	T_{37}	T_{41}	T_{60}	T_{59}	T_{49}	T_{50}
T_{11}	T_{11}	T_{10}	T_{12}	T_{21}	T_{20}	T_{16}	T_{25}	T_{38}	T_{42}	T_{35}	T_{31}	T_{45}	T_{46}	T_{56}	T_{55}
T_{12}	T_{12}	T_9	T_{11}	T_{13}	T_{28}	T_{24}	T_{17}	T_{30}	T_{34}	T_{43}	T_{39}	T_{53}	T_{54}	T_{48}	T_{47}
T_{13}	T_{17}	T_{14}	T_{16}	T_{12}	T_{58}	T_{21}	T_{30}	T_{34}	T_{13}	T_{49}	T_1	T_{27}	T_6	T_{37}	T_{52}
T_{14}	T_{18}	T_{13}	T_{15}	T_{53}	T_9	T_{29}	T_{22}	T_{46}	T_1	T_{33}	T_{14}	T_{47}	T_{38}	T_5	T_{28}
T_{15}	T_{19}	T_{16}	T_{14}	T_{32}	T_{23}	T_{56}	T_{10}	T_{15}	T_{36}	T_4	T_{47}	T_5	T_{25}	T_{46}	T_{39}
T_{16}	T_{20}	T_{15}	T_{13}	T_{24}	T_{31}	T_{11}	T_{59}	T_4	T_{52}	T_{16}	T_{35}	T_{40}	T_{49}	T_{26}	T_6
T_{17}	T_{13}	T_{18}	T_{20}	T_{34}	T_{25}	T_{57}	T_{12}	T_{17}	T_{30}	T_2	T_{50}	T_7	T_{23}	T_{51}	T_{41}
T_{18}	T_{14}	T_{17}	T_{19}	T_{26}	T_{33}	T_9	T_{54}	T_2	T_{45}	T_{18}	T_{29}	T_{42}	T_{48}	T_{24}	T_8
T_{19}	T_{15}	T_{20}	T_{18}	T_{10}	T_{55}	T_{27}	T_{36}	T_{32}	T_{19}	T_{48}	T_3	T_{21}	T_8	T_{43}	T_{45}
T_{20}	T_{16}	T_{19}	T_{17}	T_{60}	T_{11}	T_{35}	T_{28}	T_{51}	T_3	T_{31}	T_{20}	T_{50}	T_{44}	T_7	T_{22}
T_{21}	T_{25}	T_{22}	T_{24}	T_{11}	T_{50}	T_{13}	T_{38}	T_{42}	T_{21}	T_{57}	T_2	T_{19}	T_5	T_{29}	T_{60}
T_{22}	T_{26}	T_{21}	T_{23}	T_{45}	T_{10}	T_{37}	T_{14}	T_{54}	T_2	T_{41}	T_{22}	T_{55}	T_{30}	T_6	T_{20}
T_{23}	T_{27}	T_{24}	T_{22}	T_{40}	T_{15}	T_{48}	T_9	T_{23}	T_{44}	T_3	T_{55}	T_6	T_{17}	T_{54}	T_{31}
T_{24}	T_{28}	T_{23}	T_{21}	T_{16}	T_{39}	T_{12}	T_{51}	T_3	T_{60}	T_{24}	T_{43}	T_{32}	T_{57}	T_{18}	T_5
T_{25}	T_{21}	T_{26}	T_{28}	T_{42}	T_{17}	T_{49}	T_{11}	T_{25}	T_{38}	T_1	T_{58}	T_8	T_{15}	T_{59}	T_{33}
T_{26}	T_{22}	T_{25}	T_{27}	T_{18}	T_{41}	T_{10}	T_{46}	T_1	T_{53}	T_{26}	T_{37}	T_{34}	T_{56}	T_{16}	T_7
T_{27}	T_{23}	T_{28}	T_{26}	T_9	T_{47}	T_{19}	T_{44}	T_{40}	T_{27}	T_{56}	T_4	T_{13}	T_7	T_{35}	T_{53}
T_{28}	T_{24}	T_{27}	T_{25}	T_{52}	T_{12}	T_{43}	T_{20}	T_{59}	T_4	T_{39}	T_{28}	T_{58}	T_{36}	T_8	T_{14}
T_{29}	T_{33}	T_{30}	T_{32}	T_{56}	T_{29}	T_{14}	T_6	T_{43}	T_{50}	T_9	T_{18}	T_3	T_{37}	T_{21}	T_{59}
T_{30}	T_{34}	T_{29}	T_{31}	T_{30}	T_{59}	T_5	T_{13}	T_{12}	T_{17}	T_{44}	T_{45}	T_{56}	T_{22}	T_{38}	T_3
T_{31}	T_{35}	T_{32}	T_{30}	T_5	T_{16}	T_{31}	T_{58}	T_{48}	T_{41}	T_{20}	T_{11}	T_{39}	T_2	T_{53}	T_{23}
T_{32}	T_{36}	T_{31}	T_{29}	T_{15}	T_6	T_{53}	T_{32}	T_{19}	T_{10}	T_{51}	T_{42}	T_{24}	T_{58}	T_2	T_{40}
T_{33}	T_{29}	T_{34}	T_{36}	T_7	T_{18}	T_{33}	T_{55}	T_{49}	T_{39}	T_{14}	T_9	T_{41}	T_4	T_{60}	T_{25}
T_{34}	T_{30}	T_{33}	T_{35}	T_{17}	T_8	T_{60}	T_{34}	T_{13}	T_{12}	T_{46}	T_{40}	T_{26}	T_{55}	T_4	T_{42}
T_{35}	T_{31}	T_{36}	T_{34}	T_{57}	T_{35}	T_{20}	T_8	T_{37}	T_{47}	T_{11}	T_{16}	T_1	T_{43}	T_{27}	T_{54}
T_{36}	T_{32}	T_{35}	T_{33}	T_{36}	T_{54}	T_7	T_{19}	T_{10}	T_{15}	T_{38}	T_{52}	T_{57}	T_{28}	T_{44}	T_1
T_{37}	T_{41}	T_{38}	T_{40}	T_{48}	T_{37}	T_{22}	T_5	T_{35}	T_{58}	T_{10}	T_{26}	T_4	T_{29}	T_{13}	T_{51}
T_{38}	T_{42}	T_{37}	T_{39}	T_{38}	T_{51}	T_6	T_{21}	T_{11}	T_{25}	T_{36}	T_{53}	T_{48}	T_{14}	T_{30}	T_4
T_{39}	T_{43}	T_{40}	T_{38}	T_6	T_{24}	T_{39}	T_{50}	T_{56}	T_{33}	T_{28}	T_{12}	T_{31}	T_1	T_{45}	T_{15}
T_{40}	T_{44}	T_{39}	T_{37}	T_{23}	T_5	T_{45}	T_{40}	T_{27}	T_9	T_{59}	T_{34}	T_{16}	T_{50}	T_1	T_{32}
T_{41}	T_{37}	T_{42}	T_{44}	T_8	T_{26}	T_{41}	T_{47}	T_{57}	T_{31}	T_{22}	T_{10}	T_{33}	T_3	T_{52}	T_{17}
T_{42}	T_{38}	T_{41}	T_{43}	T_{25}	T_7	T_{52}	T_{42}	T_{21}	T_{11}	T_{54}	T_{32}	T_{18}	T_{47}	T_3	T_{34}
T_{43}	T_{39}	T_{44}	T_{42}	T_{49}	T_{43}	T_{28}	T_7	T_{29}	T_{55}	T_{12}	T_{24}	T_2	T_{35}	T_{19}	T_{46}
T_{44}	T_{40}	T_{43}	T_{41}	T_{44}	T_{46}	T_8	T_{27}	T_9	T_{23}	T_{30}	T_{60}	T_{49}	T_{20}	T_{36}	T_2
T_{45}	T_{46}	T_{50}	T_{48}	T_{22}	T_{60}	T_{40}	T_1	T_{53}	T_{18}	T_8	T_{30}	T_{11}	T_{45}	T_{39}	T_{19}
T_{46}	T_{45}	T_{49}	T_{47}	T_2	T_{44}	T_{59}	T_{26}	T_{14}	T_{54}	T_{34}	T_5	T_{46}	T_{11}	T_{15}	T_{43}
T_{47}	T_{48}	T_{52}	T_{46}	T_{58}	T_{27}	T_3	T_{41}	T_5	T_{35}	T_{55}	T_{15}	T_{14}	T_{42}	T_{47}	T_{12}
T_{48}	T_{47}	T_{51}	T_{45}	T_{37}	T_4	T_{23}	T_{57}	T_{31}	T_8	T_{19}	T_{56}	T_{38}	T_{18}	T_{12}	T_{48}
T_{49}	T_{50}	T_{46}	T_{52}	T_{43}	T_2	T_{25}	T_{56}	T_{33}	T_6	T_{13}	T_{57}	T_{44}	T_{16}	T_{10}	T_{49}
T_{50}	T_{49}	T_{45}	T_{51}	T_{55}	T_{21}	T_1	T_{39}	T_7	T_{29}	T_{58}	T_{17}	T_{20}	T_{40}	T_{50}	T_{10}
T_{51}	T_{52}	T_{48}	T_{50}	T_4	T_{38}	T_{54}	T_{24}	T_{20}	T_{59}	T_{32}	T_7	T_{51}	T_9	T_{17}	T_{37}
T_{52}	T_{51}	T_{47}	T_{49}	T_{28}	T_{53}	T_{42}	T_3	T_{60}	T_{16}	T_6	T_{36}	T_9	T_{52}	T_{41}	T_{13}
T_{53}	T_{54}	T_{58}	T_{56}	T_{14}	T_{52}	T_{32}	T_2	T_{45}	T_{26}	T_7	T_{38}	T_{12}	T_{33}	T_{31}	T_{27}
T_{54}	T_{53}	T_{57}	T_{55}	T_1	T_{36}	T_{51}	T_{18}	T_{22}	T_{46}	T_{42}	T_6	T_{54}	T_{12}	T_{23}	T_{35}
T_{55}	T_{56}	T_{60}	T_{54}	T_{50}	T_{19}	T_4	T_{33}	T_6	T_{43}	T_{47}	T_{23}	T_{22}	T_{34}	T_{55}	T_{11}
T_{56}	T_{55}	T_{59}	T_{53}	T_{29}	T_3	T_{15}	T_{49}	T_{39}	T_7	T_{27}	T_{48}	T_{30}	T_{26}	T_{11}	T_{56}
T_{57}	T_{58}	T_{54}	T_{60}	T_{35}	T_1	T_{17}	T_{48}	T_{41}	T_5	T_{21}	T_{49}	T_{36}	T_{24}	T_9	T_{57}
T_{58}	T_{57}	T_{53}	T_{59}	T_{47}	T_{13}	T_2	T_{31}	T_8	T_{37}	T_{50}	T_{25}	T_{28}	T_{32}	T_{58}	T_9
T_{59}	T_{60}	T_{56}	T_{58}	T_3	T_{30}	T_{46}	T_{16}	T_{28}	T_{51}	T_{40}	T_8	T_{59}	T_{10}	T_{25}	T_{29}
T_{60}	T_{59}	T_{55}	T_{57}	T_{20}	T_{45}	T_{34}	T_4	T_{52}	T_{24}	T_5	T_{44}	T_{10}	T_{60}	T_{33}	T_{21}

Şekil 5.1 Birim Normal Vektörleri Verilen Yansıma Düzlemlerine Göre Truncated Dodecahedronun Köşe Nokta Görüntüleri

Teorem 5.3 :

$$D_1 = \{(0, \mp(1-\varphi), 1), (1, 0, \mp(1-\varphi)), (\mp(1-\varphi), 1, 0)\},$$

$$D_2 = \left\{ \begin{array}{l} (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1, \mp(1-\varphi), \mp\varphi), \\ (\mp\varphi, 1, \mp(1-\varphi)), (\mp(1-\varphi), \mp\varphi, 1) \end{array} \right\},$$

$$D_3 = \left\{ \begin{array}{l} (1,1,1), (-1,1,1), (1,-1,1), (1,1,-1), \\ (1, \mp(2-\varphi), 0), (0, 1, \mp(2-\varphi)), (\mp(2-\varphi), 0, 1) \end{array} \right\},$$

olmak üzere,

$$R_1 = \left\{ r_\theta : \theta \in \left\{ \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5} \right\}, \text{ dönme eks.nin doğ. vektörü } D_1 \text{ in elemanı} \right\},$$

$$R_2 = \{ r_\theta : \theta \in \{\pi\}, \text{ dönme ekseninin doğrultu vektörü } D_2 \text{ nin elemanı} \},$$

$$R_3 = \left\{ r_\theta : \theta \in \left\{ \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\}, \text{ dönme ekseninin doğrultu vektörü } D_3 \text{ ün elemanı} \right\},$$

kümeleri verilsin. Dönme ekseni orijinden geçen bir l doğrusu olan r_θ dönmesinin bir izometri olması için gerek ve yeter koşul $r_\theta \in R_{\mathbf{TD}} = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ olmasıdır.

İspat *Birim doğrultu vektörü (p, q, r) olan bir l doğrusunu dönme ekseni olarak kabul eden r_θ Öklidyen dönmesi*

$$\begin{bmatrix} \cos\theta + p^2(1-\cos\theta) & pq(1-\cos\theta) - r\sin\theta & pr(1-\cos\theta) + q\cos\theta \\ pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta & \cos\theta + q^2(1-\cos\theta) & qr(1-\cos\theta) - p\sin\theta \\ pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta & qr(1-\cos\theta) + p\sin\theta & \cos\theta + r^2(1-\cos\theta) \end{bmatrix}$$

matrisi ile temsil edilir. Bir l eksenli dönme, l doğrusu boyunca kesişen iki yansımanın birleşimi olarak tanımlanabilir. Buna göre, l doğrusunun doğrultusu bir önceki teoremle verilen yansıma düzlemlerinin birim normal vektörlerinin vektörel çarpımları sonuçu elde edilen vektörler olup, bu doğrultu vektörleri $(0, \mp(1-\varphi), 1)$, $(1, 0, \mp(1-\varphi))$, $(\mp(1-\varphi), 1, 0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1, \mp(1-\varphi), \mp\varphi)$, $(\mp\varphi, 1, \mp(1-\varphi))$, $(\mp(1-\varphi), \mp\varphi, 1)$, $(1,1,1)$, $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$, $(1, \mp(2-\varphi), 0)$, $(0, 1, \mp(2-\varphi))$, $(\mp(2-\varphi), 0, 1)$ *olarak bulunur. $\mathbb{R}^3_{\mathbf{TD}}$ de izometrik bir dönme dönüşümünü tanımlamak için, birim truncated dodecahedron küresinin herhangi bir kenar uzunluğunu koruyan dönme dönüşümlerini tanımlamak yeterli olacaktır. Buna göre $d_{\mathbf{TD}}-$birim küresinin*

$$T_5 = \left(1, \frac{1}{\varphi(\varphi+2)}, 0\right) \text{ ve } T_6 = \left(1, \frac{-1}{\varphi(\varphi+2)}, 0\right)$$

köşe noktaları verilsin. T_5 ve T_6 noktaları, l doğrusuna göre θ açısı ile döndürülsün. Bu takdirde T_5 ve T_6 noktalarının görüntü vektörleri sütun matrisi olarak aşağıdaki şekilde

yazılabilir.

$$r_\theta(T_5) = \begin{bmatrix} \cos\theta + p^2(1-\cos\theta) + \dfrac{(pq(1-\cos\theta) - r\sin\theta)}{\varphi(\varphi+2)} \\ pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta + \dfrac{(\cos\theta + q^2(1-\cos\theta))}{\varphi(\varphi+2)} \\ pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta + \dfrac{(qr(1-\cos\theta) + p\sin\theta)}{\varphi(\varphi+2)} \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$$r_\theta(T_6) = \begin{bmatrix} \cos\theta + p^2(1-\cos\theta) - \dfrac{(pq(1-\cos\theta) - r\sin\theta)}{\varphi(\varphi+2)} \\ pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta - \dfrac{(\cos\theta + q^2(1-\cos\theta))}{\varphi(\varphi+2)} \\ pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta - \dfrac{(qr(1-\cos\theta) + p\sin\theta)}{\varphi(\varphi+2)} \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$\theta \neq 0$ için r_θ dönme dönüşümünün $d_{\mathbf{TD}}-$uzaklığını koruması adına

$$d_{\mathbf{TD}}(T_5, T_6) = \frac{3\sqrt{5}-5}{5} = d_{\mathbf{TD}}(r_\theta(T_5), r_\theta(T_6))$$

eşitliği sağlanmalıdır.

Eğer l doğrusunun yön vektörü D_2 kümesinden $(1,0,0)$ olarak alınırsa, bu takdirde $(p,q,r) = (1,0,0)$ dir. Eğer D_3 kümesinden yön vektörü olarak $(1,(2-\varphi),0)$ vektörü alınsaydı,

$$(p,q,r) = \left(\frac{1}{\sqrt{1^2 + (2-\varphi)^2 + 0^2}}, \frac{(2-\varphi)}{\sqrt{1^2 + (2-\varphi)^2 + 0^2}}, \frac{0}{\sqrt{1^2 + (2-\varphi)^2 + 0^2}} \right)$$

şeklinde birim vektör olarak alınacak olmasına dikkat edilmelidir. D_2 kümesinden $(1,0,0)$ doğrultu vektörü için $(p,q,r) = (1,0,0)$ vektörü olup, $c = \left| \dfrac{2\cos\theta}{\varphi(\varphi+2)} \right|$ ve $s = \left| \dfrac{2\sin\theta}{\varphi(\varphi+2)} \right|$ olmak üzere

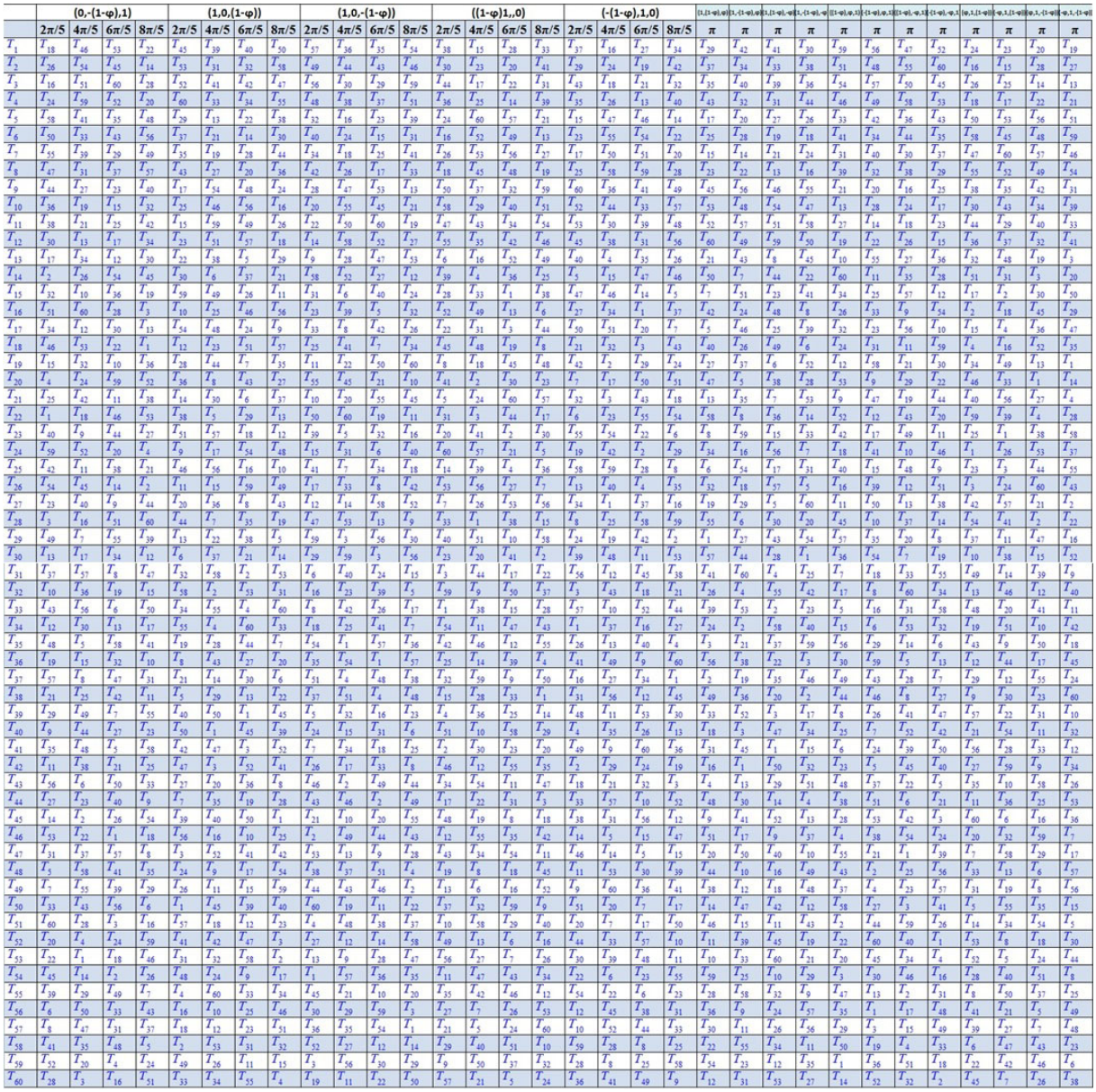
$$\begin{aligned} d_{\mathbf{TD}}(r_\theta(T_5), r_\theta(T_6)) &= \max\{c,\ k_1c + s_1,\ k_1s,\ k_3c,\ k_2c + k_3s,\ k_2s,\ k_4(c+s)\} \\ d_{\mathbf{TD}}(r_\theta(T_5), r_\theta(T_6)) &= \frac{3\sqrt{5}-5}{5} \end{aligned}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemden $\theta = \pi$ olarak bulunur. l doğrusunun diğer doğrultu vektörü içinde benzer mantıkla θ açıları hesaplanabilir. Diğer doğrultular için hesapların benzer ve çok uzun olmasından dolayı tekrardan kaçınmak adına teze konmamıştır. Teoremin diğer tarafı yani dönme eksenlerinin doğrultuları D_1, D_2 ve D_3 kümesinde verilen vektörler şeklinde olup, verilen açılarda dönme dönüşümü uygulandığında $d_{\mathbf{TD}}$ uzaklık fonksiyonunun korunacağı uzaklık fonksiyonunun tanımından açıktır.

Sonuç 5.2 : R_{TD} izometrik dönmelerin kümesi, tam olarak elli dokuz Öklidyen dönmeden oluşur. Bir sonraki şekilde, bu dönmelerin dönme eksenlerinin doğrultu vektörleri ve dönme açıları verilmiş olup, dönme hareketi (dönüşümü) sonrası truncated dodecahedron küresinin köşe noktalarının görüntüleri aşağıdaki tabloda yer almaktadır.

	(1,0,0	(0,1,0	(0,0,1	(1,1,1)		(-1,1,1)		(1,-1,1)		(1,1,-1)		(0,1,(2-φ))		(0,1,-(2-φ))		(1,(2-φ),0)		(1,-(2-φ),0)		((2-φ),0,1)		(-(2-φ),0,1)		(0,(1-φ),1)			
	π	π	π	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/5	4π/5	6π/5	8π/5
T_1	T_4	T_3	T_2	T_5	T_9	T_{10}	T_7	T_{12}	T_6	T_{11}	T_8	T_{32}	T_{44}	T_{43}	T_{31}	T_{48}	T_{60}	T_{51}	T_{55}	T_{14}	T_{13}	T_{26}	T_{25}	T_{21}	T_{58}	T_{49}	T_{17}
T_2	T_3	T_4	T_1	T_6	T_{10}	T_9	T_8	T_{11}	T_5	T_{12}	T_7	T_{40}	T_{36}	T_{35}	T_{39}	T_{56}	T_{52}	T_{59}	T_{47}	T_{22}	T_{21}	T_{18}	T_{17}	T_{13}	T_{50}	T_{57}	T_{25}
T_3	T_2	T_1	T_4	T_7	T_{11}	T_{12}	T_5	T_{10}	T_8	T_9	T_6	T_{34}	T_{38}	T_{37}	T_{33}	T_{49}	T_{53}	T_{46}	T_{58}	T_{20}	T_{19}	T_{24}	T_{23}	T_{27}	T_{55}	T_{48}	T_{15}
T_4	T_1	T_2	T_3	T_8	T_{12}	T_{11}	T_6	T_9	T_7	T_{10}	T_5	T_{42}	T_{30}	T_{29}	T_{41}	T_{57}	T_{45}	T_{54}	T_{50}	T_{28}	T_{27}	T_{16}	T_{15}	T_{19}	T_{47}	T_{56}	T_{23}
T_5	T_6	T_8	T_7	T_9	T_1	T_3	T_{12}	T_2	T_{11}	T_4	T_{10}	T_{28}	T_{18}	T_{25}	T_{19}	T_{40}	T_{37}	T_{31}	T_{30}	T_{49}	T_{54}	T_{55}	T_{52}	T_{59}	T_{44}	T_{34}	T_{45}
T_6	T_5	T_7	T_8	T_{10}	T_2	T_4	T_{11}	T_1	T_{12}	T_3	T_9	T_{20}	T_{26}	T_{17}	T_{27}	T_{32}	T_{29}	T_{39}	T_{38}	T_{57}	T_{46}	T_{47}	T_{60}	T_{51}	T_{36}	T_{42}	T_{53}
T_7	T_8	T_6	T_5	T_{11}	T_3	T_1	T_{10}	T_4	T_9	T_2	T_{12}	T_{22}	T_{16}	T_{23}	T_{13}	T_{42}	T_{43}	T_{33}	T_{36}	T_{48}	T_{59}	T_{58}	T_{45}	T_{54}	T_{38}	T_{32}	T_{52}
T_8	T_7	T_5	T_6	T_{12}	T_4	T_2	T_9	T_3	T_{10}	T_1	T_{11}	T_{14}	T_{24}	T_{15}	T_{21}	T_{34}	T_{35}	T_{41}	T_{44}	T_{56}	T_{51}	T_{50}	T_{53}	T_{46}	T_{30}	T_{40}	T_{60}
T_9	T_{11}	T_{10}	T_{12}	T_1	T_5	T_8	T_2	T_7	T_4	T_6	T_3	T_{57}	T_{58}	T_{52}	T_{51}	T_{22}	T_{15}	T_{19}	T_{26}	T_{34}	T_{39}	T_{30}	T_{43}	T_{33}	T_{18}	T_{14}	T_{29}
T_{10}	T_{12}	T_9	T_{11}	T_2	T_6	T_7	T_1	T_8	T_3	T_5	T_4	T_{49}	T_{50}	T_{60}	T_{59}	T_{14}	T_{23}	T_{27}	T_{18}	T_{42}	T_{31}	T_{38}	T_{35}	T_{41}	T_{26}	T_{22}	T_{37}
T_{11}	T_9	T_{12}	T_{10}	T_3	T_7	T_6	T_4	T_5	T_2	T_8	T_1	T_{56}	T_{55}	T_{45}	T_{46}	T_{28}	T_{17}	T_{13}	T_{24}	T_{32}	T_{41}	T_{36}	T_{37}	T_{31}	T_{16}	T_{20}	T_{35}
T_{12}	T_{10}	T_{11}	T_9	T_4	T_8	T_5	T_3	T_6	T_1	T_7	T_2	T_{48}	T_{47}	T_{53}	T_{54}	T_{20}	T_{25}	T_{21}	T_{16}	T_{40}	T_{33}	T_{44}	T_{29}	T_{39}	T_{24}	T_{28}	T_{43}
T_{13}	T_{15}	T_{20}	T_{18}	T_{37}	T_{58}	T_{60}	T_{42}	T_{54}	T_{39}	T_{56}	T_{44}	T_{51}	T_{41}	T_7	T_{23}	T_{31}	T_{59}	T_{24}	T_{11}	T_1	T_{14}	T_{46}	T_{33}	T_{50}	T_{57}	T_{25}	T_2
T_{14}	T_{16}	T_{19}	T_{17}	T_{40}	T_{57}	T_{59}	T_{43}	T_{53}	T_{38}	T_{55}	T_{41}	T_{24}	T_8	T_{42}	T_{48}	T_{23}	T_{10}	T_{32}	T_{56}	T_{13}	T_1	T_{34}	T_{49}	T_{29}	T_9	T_{33}	T_{18}
T_{15}	T_{13}	T_{18}	T_{20}	T_{44}	T_{54}	T_{56}	T_{39}	T_{58}	T_{42}	T_{60}	T_{37}	T_{43}	T_{45}	T_{21}	T_8	T_9	T_{22}	T_{53}	T_{29}	T_{52}	T_{35}	T_4	T_{16}	T_3	T_{27}	T_{55}	T_{48}
T_{16}	T_{14}	T_{17}	T_{19}	T_{41}	T_{53}	T_{55}	T_{38}	T_{57}	T_{43}	T_{59}	T_{40}	T_7	T_{22}	T_{50}	T_{44}	T_{58}	T_{30}	T_{12}	T_{21}	T_{36}	T_{47}	T_{15}	T_4	T_{20}	T_{35}	T_{11}	T_{31}
T_{17}	T_{19}	T_{16}	T_{14}	T_{38}	T_{59}	T_{57}	T_{41}	T_{55}	T_{40}	T_{53}	T_{43}	T_{37}	T_{52}	T_{27}	T_6	T_{11}	T_{28}	T_{60}	T_{35}	T_{45}	T_{29}	T_2	T_{18}	T_1	T_{21}	T_{58}	T_{49}
T_{18}	T_{20}	T_{15}	T_{13}	T_{39}	T_{60}	T_{58}	T_{44}	T_{56}	T_{37}	T_{54}	T_{42}	T_5	T_{28}	T_{47}	T_{38}	T_{55}	T_{36}	T_{10}	T_{27}	T_{30}	T_{50}	T_{17}	T_2	T_{14}	T_{29}	T_9	T_{33}
T_{19}	T_{17}	T_{14}	T_{16}	T_{43}	T_{55}	T_{53}	T_{40}	T_{59}	T_{41}	T_{57}	T_{38}	T_{46}	T_{39}	T_5	T_{25}	T_{33}	T_{54}	T_{26}	T_9	T_3	T_{20}	T_{51}	T_{31}	T_{47}	T_{56}	T_{23}	T_4
T_{20}	T_{18}	T_{13}	T_{15}	T_{42}	T_{56}	T_{54}	T_{37}	T_{60}	T_{44}	T_{58}	T_{39}	T_{26}	T_6	T_{40}	T_{49}	T_{25}	T_{12}	T_{34}	T_{57}	T_{19}	T_3	T_{32}	T_{48}	T_{35}	T_{11}	T_{31}	T_{16}
T_{21}	T_{23}	T_{28}	T_{26}	T_{29}	T_{50}	T_{52}	T_{34}	T_{46}	T_{31}	T_{48}	T_{36}	T_{59}	T_{33}	T_8	T_{15}	T_{39}	T_{51}	T_{16}	T_{12}	T_2	T_{22}	T_{54}	T_{41}	T_{58}	T_{49}	T_{17}	T_1
T_{22}	T_{24}	T_{27}	T_{25}	T_{32}	T_{49}	T_{51}	T_{35}	T_{45}	T_{30}	T_{47}	T_{33}	T_{16}	T_7	T_{34}	T_{56}	T_{15}	T_9	T_{40}	T_{48}	T_{21}	T_2	T_{42}	T_{57}	T_{37}	T_{10}	T_{41}	T_{26}
T_{23}	T_{21}	T_{26}	T_{28}	T_{36}	T_{46}	T_{48}	T_{31}	T_{50}	T_{34}	T_{52}	T_{29}	T_{35}	T_{53}	T_{13}	T_7	T_{10}	T_{14}	T_{45}	T_{37}	T_{60}	T_{43}	T_3	T_{24}	T_4	T_{19}	T_{47}	T_{56}
T_{24}	T_{22}	T_{25}	T_{27}	T_{33}	T_{45}	T_{47}	T_{30}	T_{49}	T_{35}	T_{51}	T_{32}	T_8	T_{14}	T_{58}	T_{36}	T_{50}	T_{38}	T_{11}	T_{13}	T_{44}	T_{55}	T_{23}	T_3	T_{28}	T_{43}	T_{12}	T_{39}
T_{25}	T_{27}	T_{24}	T_{22}	T_{30}	T_{51}	T_{49}	T_{33}	T_{47}	T_{32}	T_{45}	T_{35}	T_{29}	T_{60}	T_{19}	T_5	T_{12}	T_{20}	T_{52}	T_{43}	T_{53}	T_{37}	T_1	T_{26}	T_2	T_{13}	T_{50}	T_{57}
T_{26}	T_{28}	T_{23}	T_{21}	T_{31}	T_{52}	T_{50}	T_{36}	T_{48}	T_{29}	T_{46}	T_{34}	T_6	T_{20}	T_{55}	T_{30}	T_{47}	T_{44}	T_9	T_{19}	T_{38}	T_{58}	T_{25}	T_1	T_{22}	T_{37}	T_{10}	T_{41}
T_{27}	T_{25}	T_{22}	T_{24}	T_{35}	T_{47}	T_{45}	T_{32}	T_{51}	T_{33}	T_{49}	T_{30}	T_{54}	T_{31}	T_6	T_{17}	T_{41}	T_{46}	T_{18}	T_{10}	T_4	T_{28}	T_{59}	T_{39}	T_{55}	T_{48}	T_{15}	T_3
T_{28}	T_{26}	T_{21}	T_{23}	T_{34}	T_{48}	T_{46}	T_{29}	T_{52}	T_{36}	T_{50}	T_{31}	T_{18}	T_5	T_{32}	T_{57}	T_{17}	T_{11}	T_{42}	T_{49}	T_{27}	T_4	T_{40}	T_{56}	T_{43}	T_{12}	T_{39}	T_{24}
T_{29}	T_{31}	T_{36}	T_{34}	T_{50}	T_{21}	T_{28}	T_{46}	T_{26}	T_{48}	T_{23}	T_{52}	T_{60}	T_{25}	T_{41}	T_4	T_6	T_{32}	T_{15}	T_{53}	T_{17}	T_{45}	T_{12}	T_{44}	T_9	T_{33}	T_{18}	T_{14}
T_{30}	T_{32}	T_{35}	T_{33}	T_{51}	T_{25}	T_{24}	T_{47}	T_{22}	T_{45}	T_{27}	T_{49}	T_4	T_{42}	T_{26}	T_{55}	T_{16}	T_{58}	T_5	T_{31}	T_{50}	T_{18}	T_{43}	T_9	T_{40}	T_{60}	T_8	T_{46}
T_{31}	T_{29}	T_{34}	T_{36}	T_{52}	T_{26}	T_{23}	T_{48}	T_{21}	T_{46}	T_{28}	T_{50}	T_{27}	T_{54}	T_1	T_{43}	T_{59}	T_{13}	T_{30}	T_5	T_{10}	T_{42}	T_{19}	T_{51}	T_{16}	T_{20}	T_{35}	T_{11}
T_{32}	T_{30}	T_{33}	T_{35}	T_{49}	T_{22}	T_{27}	T_{45}	T_{25}	T_{47}	T_{24}	T_{51}	T_{44}	T_1	T_{57}	T_{28}	T_{29}	T_6	T_{56}	T_{14}	T_{41}	T_{11}	T_{48}	T_{20}	T_{52}	T_7	T_{54}	T_{38}
T_{33}	T_{35}	T_{32}	T_{30}	T_{45}	T_{24}	T_{25}	T_{49}	T_{27}	T_{51}	T_{22}	T_{47}	T_{21}	T_{59}	T_3	T_{37}	T_{54}	T_{19}	T_{36}	T_7	T_{12}	T_{40}	T_{13}	T_{46}	T_{18}	T_{14}	T_{29}	T_9
T_{34}	T_{36}	T_{31}	T_{29}	T_{48}	T_{28}	T_{21}	T_{52}	T_{23}	T_{50}	T_{26}	T_{46}	T_{38}	T_3	T_{56}	T_{22}	T_{35}	T_8	T_{57}	T_{20}	T_{39}	T_9	T_{49}	T_{14}	T_{45}	T_5	T_{59}	T_{44}
T_{35}	T_{33}	T_{30}	T_{32}	T_{47}	T_{27}	T_{22}	T_{51}	T_{24}	T_{49}	T_{25}	T_{45}	T_{53}	T_{23}	T_{39}	T_2	T_8	T_{34}	T_{17}	T_{60}	T_{15}	T_{52}	T_{10}	T_{38}	T_{11}	T_{31}	T_{16}	T_{20}
T_{36}	T_{34}	T_{29}	T_{31}	T_{46}	T_{23}	T_{26}	T_{50}	T_{28}	T_{52}	T_{21}	T_{48}	T_2	T_{40}	T_{24}	T_{58}	T_{18}	T_{55}	T_7	T_{33}	T_{47}	T_{16}	T_{37}	T_{11}	T_{42}	T_{53}	T_6	T_{51}
T_{37}	T_{39}	T_{44}	T_{42}	T_{58}	T_{13}	T_{20}	T_{54}	T_{18}	T_{56}	T_{52}	T_{17}	T_{33}	T_3	T_5	T_{40}	T_{23}	T_{45}	T_{25}	T_{53}	T_{11}	T_{36}	T_{10}	T_{41}	T_{26}	T_{22}		
T_{38}	T_{40}	T_{43}	T_{41}	T_{59}	T_{17}	T_{16}	T_{55}	T_{14}	T_{53}	T_{19}	T_{57}	T_3	T_{34}	T_{18}	T_{47}	T_{24}	T_{50}	T_6	T_{39}	T_{58}	T_{26}	T_{35}	T_{10}	T_{32}	T_{52}	T_7	T_{54}
T_{39}	T_{37}	T_{42}	T_{44}	T_{60}	T_{18}	T_{15}	T_{56}	T_{13}	T_{54}	T_{20}	T_{58}	T_{19}	T_{46}	T_2	T_{35}	T_{51}	T_{21}	T_{38}	T_6	T_9	T_{34}	T_{27}	T_{59}	T_{24}	T_{28}	T_{43}	T_{12}
T_{40}	T_{38}	T_{41}	T_{43}	T_{57}	T_{14}	T_{19}	T_{53}	T_{17}	T_{55}	T_{16}	T_{59}	T_{36}	T_2	T_{49}	T_{20}	T_{37}	T_5	T_{48}	T_{22}	T_{33}	T_{12}	T_{56}	T_{28}	T_{60}	T_8	T_{46}	T_{30}
T_{41}	T_{43}	T_{40}	T_{38}	T_{53}	T_{16}	T_{17}	T_{57}	T_{19}	T_{59}	T_{14}	T_{55}	T_{13}	T_{51}	T_4	T_{29}	T_{46}	T_{27}	T_{44}	T_8	T_{11}	T_{32}	T_{21}	T_{54}	T_{26}	T_{22}	T_{37}	T_{10}
T_{42}	T_{44}	T_{39}	T_{37}	T_{56}	T_{20}	T_{13}	T_{60}	T_{15}	T_{58}	T_{18}	T_{54}	T_{30}	T_4	T_{48}	T_{14}	T_{43}	T_7	T_{49}	T_{28}	T_{31}	T_{10}	T_{57}	T_{22}	T_{53}	T_6	T_{51}	T_{36}
T_{43}	T_{41}	T_{38}	T_{40}	T_{55}	T_{19}	T_{14}	T_{59}	T_{16}	T_{57}	T_{17}	T_{53}	T_{45}	T_{15}	T_{31}	T_1	T_7	T_{42}	T_{25}	T_{52}	T_{23}	T_{60}	T_9	T_{30}	T_{12}	T_{39}	T_{24}	T_{28}
T_{44}	T_{42}	T_{37}	T_{39}	T_{54}	T_{15}	T_{18}	T_{58}	T_{20}	T_{60}	T_{13}	T_{56}	T_1	T_{32}	T_{16}	T_{50}	T_{26}	T_{47}	T_8	T_{41}	T_{55}	T_{24}	T_{29}	T_{12}	T_{34}	T_{45}	T_5	T_{59}
T_{45}	T_{51}	T_{47}	T_{49}	T_{24}	T_{33}	T_{32}	T_{27}	T_{30}	T_{22}	T_{35}	T_{25}	T_{15}	T_{43}	T_{46}	T_{11}	T_4	T_{57}	T_{37}	T_{23}	T_{29}	T_{17}	T_7	T_{58}	T_5	T_{59}	T_{44}	T_{34}
T_{46}	T_{52}	T_{48}	T_{50}	T_{23}	T_{36}	T_{29}	T_{28}	T_{31}	T_{21}	T_{34}	T_{26}	T_{39}	T_{19}	T_{11}	T_{45}	T_{27}	T_{41}	T_{58}	T_3	T_6	T_{57}	T_{33}	T_{13}	T_{30}	T_{40}	T_{60}	T_8
T_{47}	T_{49}	T_{45}	T_{51}	T_{27}	T_{35}	T_{30}	T_{24}	T_{32}	T_{25}	T_{33}	T_{22}	T_{12}	T_{48}	T_{38}	T_{18}	T_{44}	T_{26}	T_2	T_{59}	T_{16}	T_{36}	T_{60}	T_6	T_{56}	T_{23}	T_4	T_{19}
T_{48}	T_{50}	T_{46}	T_{52}	T_{28}	T_{34}	T_{31}	T_{23}	T_{29}	T_{26}	T_{36}	T_{21}	T_{47}	T_{12}	T_{14}	T_{42}	T_{60}	T_1	T_{22}	T_{40}	T_{59}	T_7	T_{20}	T_{32}	T_{15}	T_3	T_{27}	T_{55}
T_{49}	T_{47}	T_{51}	T_{45}	T_{22}	T_{32}	T_{33}	T_{25}	T_{35}	T_{24}	T_{30}	T_{27}	T_{50}	T_{10}	T_{20}	T_{40}	T_{53}	T_3	T_{28}	T_{42}	T_{54}	T_5	T_{14}	T_{34}	T_{17}	T_1	T_{21}	T_{58}
T_{50}	T_{48}	T_{52}	T_{46}	T_{21}	T_{29}	T_{36}	T_{26}	T_{34}	T_{23}	T_{31}	T_{28}	T_{10}	T_{49}	T_{44}	T_{16}	T_{38}	T_{24}	T_4	T_{54}	T_{18}	T_{30}	T_{53}	T_8	T_{57}	T_{25}	T_2	T_{13}
T_{51}	T_{45}	T_{49}	T_{47}	T_{25}	T_{30}	T_{35}	T_{22}	T_{33}	T_{27}	T_{32}	T_{24}	T_{41}	T_{13}	T_9	T_{52}	T_{21}	T_{39}	T_{55}	T_1	T_8	T_{56}	T_{31}	T_{19}	T_{36}	T_{42}	T_{53}	T_6
T_{52}	T_{46}	T_{50}	T_{48}	T_{26}	T_{31}	T_{34}	T_{21}	T_{36}	T_{28}	T_{29}	T_{23}	T_{17}	T_{37}	T_{51}	T_9	T_2	T_{56}	T_{43}	T_{25}	T_{35}	T_{15}	T_5	T_{55}	T_7	T_{54}	T_{38}	T_{32}
T_{53}	T_{59}	T_{55}	T_{57}	T_{16}	T_{41}	T_{40}	T_{19}	T_{38}	T_{14}	T_{43}	T_{17}	T_{23}	T_{35}	T_{54}	T_{12}	T_3	T_{49}	T_{29}	T_{15}	T_{37}	T_{25}	T_8	T_{50}	T_6	T_{51}	T_{36}	T_{42}
T_{54}	T_{60}	T_{56}	T_{58}	T_{15}	T_{44}	T_{37}	T_{20}	T_{39}	T_{13}	T_{42}	T_{18}	T_{31}	T_{27}	T_{12}	T_{53}	T_{19}	T_{33}	T_{50}	T_4	T_5	T_{49}	T_{41}	T_{21}	T_{38}	T_{32}	T_{52}	T_7
T_{55}	T_{57}	T_{53}	T_{59}	T_{19}	T_{43}	T_{38}	T_{16}	T_{40}	T_{17}	T_{41}	T_{14}	T_{11}	T_{56}	T_{30}	T_{26}	T_{36}	T_{18}	T_1	T_{51}	T_{24}	T_{44}	T_{52}	T_5	T_{48}	T_{15}	T_3	T_{27}
T_{56}	T_{58}	T_{54}	T_{60}	T_{20}	T_{42}	T_{39}	T_{15}	T_{37}	T_{18}	T_{44}	T_{13}	T_{55}	T_{11}	T_{22}	T_{34}	T_{52}	T_2	T_{14}	T_{32}	T_{51}	T_8	T_{28}	T_{40}	T_{23}	T_4	T_{19}	T_{47}
T_{57}	T_{55}	T_{59}	T_{53}	T_{14}	T_{40}	T_{41}	T_{17}	T_{43}	T_{16}	T_{38}	T_{19}	T_{58}	T_9	T_{28}	T_{32}	T_{45}	T_4	T_{20}	T_{34}	T_{46}	T_6	T_{22}	T_{42}	T_{25}	T_2	T_{13}	T_{50}
T_{58}	T_{56}	T_{60}	T_{54}	T_{13}	T_{37}	T_{44}	T_{18}	T_{42}	T_{15}	T_{39}	T_{20}	T_9	T_{57}	T_{36}	T_{24}	T_{30}	T_{16}	T_3	T_{46}	T_{26}	T_{38}	T_{45}	T_7	T_{49}	T_{17}	T_1	T_{21}
T_{59}	T_{53}	T_{57}	T_{55}	T_{17}	T_{38}	T_{43}	T_{14}	T_{41}	T_{19}	T_{40}	T_{16}	T_{33}	T_{21}	T_{10}	T_{60}	T_{13}	T_{31}	T_{47}	T_2	T_7	T_{48}	T_{39}	T_{27}	T_{44}	T_{34}	T_{45}	T_5
T_{60}	T_{54}	T_{58}	T_{56}	T_{18}	T_{39}	T_{42}	T_{13}	T_{44}	T_{20}	T_{37}	T_{15}	T_{25}	T_{29}	T_{59}	T_{10}	T_1	T_{48}	T_{35}	T_{17}	T_{43}	T_{23}	T_6	T_{47}	T_8	T_{46}	T_{30}	T_{40}

Şekil 5.2 Dönme Eksenleri ve Açıları Verilen Dönme Dönüşümüne Göre Truncated Dodecahedronun Köşe Nokta Görüntüleri



Şekil 5.3 Dönme Eksenleri ve Açıları Verilen Dönme Dönüşümüne Göre Truncated Dodecahedronun Köşe Nokta Görüntüleri

Not 5.1 : Orjine göre inversiyon

$$\begin{aligned} \sigma_O \quad &: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ &(x,y,z) \longrightarrow \sigma_O(x,y,z) = (-x,-y,-z) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı dönüşümdür. σ_O dönüşümünün truncated dodecahedronu koruyacağı tanımından açık olduğu için (bkz Şekil 5.4) $\mathbb{R}^3_{\mathbf{TD}}$ uzayında bir izometridir. Aşağıdaki şekilde

da inversiyon hareketi (dönüşümü) sonrası truncated dodecahedronun köşe noktalarının görüntüleri verilmiştir.

T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}	T_{13}	T_{14}	T_{15}	T_{16}	T_{17}	T_{18}	T_{19}	T_{20}	T_{21}	T_{22}	T_{23}	T_{24}	T_{25}	T_{26}	T_{27}	T_{28}	T_{29}	T_{30}
T_3	T_4	T_1	T_2	T_7	T_8	T_5	T_6	T_{11}	T_{12}	T_9	T_{10}	T_{19}	T_{20}	T_{17}	T_{18}	T_{15}	T_{16}	T_{13}	T_{14}	T_{27}	T_{28}	T_{25}	T_{26}	T_{23}	T_{24}	T_{21}	T_{22}	T_{35}	T_{36}
T_{31}	T_{32}	T_{33}	T_{34}	T_{35}	T_{36}	T_{37}	T_{38}	T_{39}	T_{40}	T_{41}	T_{42}	T_{43}	T_{44}	T_{45}	T_{46}	T_{47}	T_{48}	T_{49}	T_{50}	T_{51}	T_{52}	T_{53}	T_{54}	T_{55}	T_{56}	T_{57}	T_{58}	T_{59}	T_{60}
T_{33}	T_{34}	T_{31}	T_{32}	T_{29}	T_{30}	T_{43}	T_{44}	T_{41}	T_{42}	T_{39}	T_{40}	T_{37}	T_{38}	T_{52}	T_{51}	T_{50}	T_{49}	T_{48}	T_{47}	T_{46}	T_{45}	T_{60}	T_{59}	T_{58}	T_{57}	T_{56}	T_{55}	T_{54}	T_{53}

Şekil 5.4 İnversiyonu Dönüşümü Altında Truncated Dodecahedronun Köşe Nokta Görüntüleri

Bundan sonraki teoremlerde izometrik dönme-yansıma ve dönme-inversiyon hareketleri (dönüşümleri) tespit edilecektir.

Teorem 5.4 : $\mathbb{R}^3_{\mathbf{TD}}$ uzayında orjine göre dönme-yansımaların tümü orjine göre inversiyon dönüşümüne eşittir. Dolayısıyla orjine göre dönme-yansımaların tümü izometridir.

İspat $r_\theta \in R_{\mathbf{TD}}$, Γ *ve* Δ, Π *düzlemine dik olan düzlemler olmak üzere bir dönme-yansıma* $\rho := \sigma_\Pi \sigma_\Delta \sigma_\Gamma = \sigma_\Pi r_\theta$ *bileşkesi olarak yazılabilir. Bu taktirde Teorem 5.3 den* Π *düzlemi için otuz bir dönme ekseninden on beş durum incelenmelidir. Çünkü* D_1 *ve* D_3 *de verilen dönme eksenlerinden hiçbiri Sonuç 5.1 de verilen yansıma düzlemlerine dik değildir.* Π *düzlemi olarak* $x = 0$ *düzlemi alınsın. Bu taktirde* r_θ *dönüşümünün dönme ekseninin birim doğrultu vektörü* $(1, 0, 0)$ *olmak üzere*

$$\rho(x, y, z) = \sigma_\Pi r_\theta(x, y, z) = (-x, -y\cos\theta + z\sin\theta, -y\sin\theta - z\cos\theta)$$

olarak tanımlıdır. Buradan $T_5 = \left(1, \dfrac{1}{\varphi(\varphi+2)}, 0\right)$ *ve* $T_6 = \left(1, \dfrac{-1}{\varphi(\varphi+2)}, 0\right)$ *için,*

$$d_{\mathbf{TD}}(T_5, T_6) = \frac{3\sqrt{5}-5}{5} \quad ve \quad \begin{aligned} \rho(T_5) &= \left(-1, -\frac{\cos\theta}{\varphi(\varphi+2)}, -\frac{\sin\theta}{\varphi(\varphi+2)}\right) \\ \rho(T_6) &= \left(-1, \frac{\cos\theta}{\varphi(\varphi+2)}, \frac{\sin\theta}{\varphi(\varphi+2)}\right) \end{aligned}$$

dır. ρ *dönüşümünün bir izometri olduğunu göstermek adına* $d_{\mathbf{TD}}(T_5, T_6) = \dfrac{3\sqrt{5}-5}{5} = d_{\mathbf{TD}}(\rho(T_5), \rho(T_6))$ *eşitlikleri sağlanmalıdır.* $c = \left|\dfrac{2\cos\theta}{\varphi(\varphi+2)}\right|$ *ve* $s = \left|\dfrac{2\sin\theta}{\varphi(\varphi+2)}\right|$ *olmak*

üzere

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{TD}}\left(\rho\left(T_5\right),\rho\left(T_6\right)\right) &= \max\left\{c,\ k_1c+s,\ k_1s,\ k_3c,\ k_2c+k_3s,\ k_2s,\ k_4\left(c+s\right)\right\} \\ d_{\mathbf{TD}}\left(\rho\left(T_5\right),\rho\left(T_6\right)\right) &= \frac{3\sqrt{5}-5}{5} \end{aligned}$$

denklemi elde edilir. Buradan ise $\theta \in \{0,\pi\}$ *bulunur.* $\sigma_{\Pi}r_{\pi}$ *dönüşümüne göre truncated dodecaheronun köşe noktalarına görüntülerine bakılırsa (bkz Şekil 5.5) orjin etrafında* σ_O *inversiyonuna karşılık geldiği yani* $\sigma_{\Pi}r_{\pi} = \sigma_O$ *olduğu görülebilir. Sonuç olarak* $\sigma_{\Pi}r_{\pi}$ *dönme-yansıma dönüşümü yeni bir dönüşüm değildir. Benzer şekilde dönme eksenlerinin doğrultu vektörleri bir yansıma düzleminin normali olan* $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,\mp(1-\varphi),\mp\varphi)$, $(\mp\varphi,1,\mp(1-\varphi))$, $(\mp(1-\varphi),\mp\varphi,1)$ *vektörleri içinde aynı sonuç elde edilir (bkz Şekil 5.5).*

Bir sonraki şekilde dönme-yansıma hareketi (dönüşümü) altında truncated dodecahedron küresinin köşe noktalarının görüntüleri verilmiştir.

	(1,0,0)	(0,1,0)	(0,0,1)	((φ-1),φ,1)	((φ-1),-φ,1)	((φ-1),φ,-1)	((φ-1),-φ,-1)	(φ,1,(φ-1))	(-φ,1,(φ-1))	(φ,-1,(φ-1))	(-φ,-1,(φ-1))	(1,(φ-1),φ)	(-1,(φ-1),φ)	(1,(φ-1),-φ)	(-1,(φ-1),-φ)
T_1	T_3	T_3	T_3	T_3	T_3	T_3	T_3	T_3	T_3	T_3	T_3	T_3	T_3	T_3	T_3
T_2	T_4	T_4	T_4	T_4	T_4	T_4	T_4	T_4	T_4	T_4	T_4	T_4	T_4	T_4	T_4
T_3	T_1	T_1	T_1	T_1	T_1	T_1	T_1	T_1	T_1	T_1	T_1	T_1	T_1	T_1	T_1
T_4	T_2	T_2	T_2	T_2	T_2	T_2	T_2	T_2	T_2	T_2	T_2	T_2	T_2	T_2	T_2
T_5	T_7	T_7	T_7	T_7	T_7	T_7	T_7	T_7	T_7	T_7	T_7	T_7	T_7	T_7	T_7
T_6	T_8	T_8	T_8	T_8	T_8	T_8	T_8	T_8	T_8	T_8	T_8	T_8	T_8	T_8	T_8
T_7	T_5	T_5	T_5	T_5	T_5	T_5	T_5	T_5	T_5	T_5	T_5	T_5	T_5	T_5	T_5
T_8	T_6	T_6	T_6	T_6	T_6	T_6	T_6	T_6	T_6	T_6	T_6	T_6	T_6	T_6	T_6
T_9	T_{11}	T_{11}	T_{11}	T_{11}	T_{11}	T_{11}	T_{11}	T_{11}	T_{11}	T_{11}	T_{11}	T_{11}	T_{11}	T_{11}	T_{11}
T_{10}	T_{12}	T_{12}	T_{12}	T_{12}	T_{12}	T_{12}	T_{12}	T_{12}	T_{12}	T_{12}	T_{12}	T_{12}	T_{12}	T_{12}	T_{12}
T_{11}	T_9	T_9	T_9	T_9	T_9	T_9	T_9	T_9	T_9	T_9	T_9	T_9	T_9	T_9	T_9
T_{12}	T_{10}	T_{10}	T_{10}	T_{10}	T_{10}	T_{10}	T_{10}	T_{10}	T_{10}	T_{10}	T_{10}	T_{10}	T_{10}	T_{10}	T_{10}
T_{13}	T_{19}	T_{19}	T_{19}	T_{19}	T_{19}	T_{19}	T_{19}	T_{19}	T_{19}	T_{19}	T_{19}	T_{19}	T_{19}	T_{19}	T_{19}
T_{14}	T_{20}	T_{20}	T_{20}	T_{20}	T_{20}	T_{20}	T_{20}	T_{20}	T_{20}	T_{20}	T_{20}	T_{20}	T_{20}	T_{20}	T_{20}
T_{15}	T_{17}	T_{17}	T_{17}	T_{17}	T_{17}	T_{17}	T_{17}	T_{17}	T_{17}	T_{17}	T_{17}	T_{17}	T_{17}	T_{17}	T_{17}
T_{16}	T_{18}	T_{18}	T_{18}	T_{18}	T_{18}	T_{18}	T_{18}	T_{18}	T_{18}	T_{18}	T_{18}	T_{18}	T_{18}	T_{18}	T_{18}
T_{17}	T_{15}	T_{15}	T_{15}	T_{15}	T_{15}	T_{15}	T_{15}	T_{15}	T_{15}	T_{15}	T_{15}	T_{15}	T_{15}	T_{15}	T_{15}
T_{18}	T_{16}	T_{16}	T_{16}	T_{16}	T_{16}	T_{16}	T_{16}	T_{16}	T_{16}	T_{16}	T_{16}	T_{16}	T_{16}	T_{16}	T_{16}
T_{19}	T_{13}	T_{13}	T_{13}	T_{13}	T_{13}	T_{13}	T_{13}	T_{13}	T_{13}	T_{13}	T_{13}	T_{13}	T_{13}	T_{13}	T_{13}
T_{20}	T_{14}	T_{14}	T_{14}	T_{14}	T_{14}	T_{14}	T_{14}	T_{14}	T_{14}	T_{14}	T_{14}	T_{14}	T_{14}	T_{14}	T_{14}
T_{21}	T_{27}	T_{27}	T_{27}	T_{27}	T_{27}	T_{27}	T_{27}	T_{27}	T_{27}	T_{27}	T_{27}	T_{27}	T_{27}	T_{27}	T_{27}
T_{22}	T_{28}	T_{28}	T_{28}	T_{28}	T_{28}	T_{28}	T_{28}	T_{28}	T_{28}	T_{28}	T_{28}	T_{28}	T_{28}	T_{28}	T_{28}
T_{23}	T_{25}	T_{25}	T_{25}	T_{25}	T_{25}	T_{25}	T_{25}	T_{25}	T_{25}	T_{25}	T_{25}	T_{25}	T_{25}	T_{25}	T_{25}
T_{24}	T_{26}	T_{26}	T_{26}	T_{26}	T_{26}	T_{26}	T_{26}	T_{26}	T_{26}	T_{26}	T_{26}	T_{26}	T_{26}	T_{26}	T_{26}
T_{25}	T_{23}	T_{23}	T_{23}	T_{23}	T_{23}	T_{23}	T_{23}	T_{23}	T_{23}	T_{23}	T_{23}	T_{23}	T_{23}	T_{23}	T_{23}
T_{26}	T_{24}	T_{24}	T_{24}	T_{24}	T_{24}	T_{24}	T_{24}	T_{24}	T_{24}	T_{24}	T_{24}	T_{24}	T_{24}	T_{24}	T_{24}
T_{27}	T_{21}	T_{21}	T_{21}	T_{21}	T_{21}	T_{21}	T_{21}	T_{21}	T_{21}	T_{21}	T_{21}	T_{21}	T_{21}	T_{21}	T_{21}
T_{28}	T_{22}	T_{22}	T_{22}	T_{22}	T_{22}	T_{22}	T_{22}	T_{22}	T_{22}	T_{22}	T_{22}	T_{22}	T_{22}	T_{22}	T_{22}
T_{29}	T_{35}	T_{35}	T_{35}	T_{35}	T_{35}	T_{35}	T_{35}	T_{35}	T_{35}	T_{35}	T_{35}	T_{35}	T_{35}	T_{35}	T_{35}
T_{30}	T_{36}	T_{36}	T_{36}	T_{36}	T_{36}	T_{36}	T_{36}	T_{36}	T_{36}	T_{36}	T_{36}	T_{36}	T_{36}	T_{36}	T_{36}
T_{31}	T_{33}	T_{33}	T_{33}	T_{33}	T_{33}	T_{33}	T_{33}	T_{33}	T_{33}	T_{33}	T_{33}	T_{33}	T_{33}	T_{33}	T_{33}
T_{32}	T_{34}	T_{34}	T_{34}	T_{34}	T_{34}	T_{34}	T_{34}	T_{34}	T_{34}	T_{34}	T_{34}	T_{34}	T_{34}	T_{34}	T_{34}
T_{33}	T_{31}	T_{31}	T_{31}	T_{31}	T_{31}	T_{31}	T_{31}	T_{31}	T_{31}	T_{31}	T_{31}	T_{31}	T_{31}	T_{31}	T_{31}
T_{34}	T_{32}	T_{32}	T_{32}	T_{32}	T_{32}	T_{32}	T_{32}	T_{32}	T_{32}	T_{32}	T_{32}	T_{32}	T_{32}	T_{32}	T_{32}
T_{35}	T_{29}	T_{29}	T_{29}	T_{29}	T_{29}	T_{29}	T_{29}	T_{29}	T_{29}	T_{29}	T_{29}	T_{29}	T_{29}	T_{29}	T_{29}
T_{36}	T_{30}	T_{30}	T_{30}	T_{30}	T_{30}	T_{30}	T_{30}	T_{30}	T_{30}	T_{30}	T_{30}	T_{30}	T_{30}	T_{30}	T_{30}
T_{37}	T_{43}	T_{43}	T_{43}	T_{43}	T_{43}	T_{43}	T_{43}	T_{43}	T_{43}	T_{43}	T_{43}	T_{43}	T_{43}	T_{43}	T_{43}
T_{38}	T_{44}	T_{44}	T_{44}	T_{44}	T_{44}	T_{44}	T_{44}	T_{44}	T_{44}	T_{44}	T_{44}	T_{44}	T_{44}	T_{44}	T_{44}
T_{39}	T_{41}	T_{41}	T_{41}	T_{41}	T_{41}	T_{41}	T_{41}	T_{41}	T_{41}	T_{41}	T_{41}	T_{41}	T_{41}	T_{41}	T_{41}
T_{40}	T_{42}	T_{42}	T_{42}	T_{42}	T_{42}	T_{42}	T_{42}	T_{42}	T_{42}	T_{42}	T_{42}	T_{42}	T_{42}	T_{42}	T_{42}
T_{41}	T_{39}	T_{39}	T_{39}	T_{39}	T_{39}	T_{39}	T_{39}	T_{39}	T_{39}	T_{39}	T_{39}	T_{39}	T_{39}	T_{39}	T_{39}
T_{42}	T_{40}	T_{40}	T_{40}	T_{40}	T_{40}	T_{40}	T_{40}	T_{40}	T_{40}	T_{40}	T_{40}	T_{40}	T_{40}	T_{40}	T_{40}
T_{43}	T_{37}	T_{37}	T_{37}	T_{37}	T_{37}	T_{37}	T_{37}	T_{37}	T_{37}	T_{37}	T_{37}	T_{37}	T_{37}	T_{37}	T_{37}
T_{44}	T_{38}	T_{38}	T_{38}	T_{38}	T_{38}	T_{38}	T_{38}	T_{38}	T_{38}	T_{38}	T_{38}	T_{38}	T_{38}	T_{38}	T_{38}
T_{45}	T_{52}	T_{52}	T_{52}	T_{52}	T_{52}	T_{52}	T_{52}	T_{52}	T_{52}	T_{52}	T_{52}	T_{52}	T_{52}	T_{52}	T_{52}
T_{46}	T_{51}	T_{51}	T_{51}	T_{51}	T_{51}	T_{51}	T_{51}	T_{51}	T_{51}	T_{51}	T_{51}	T_{51}	T_{51}	T_{51}	T_{51}
T_{47}	T_{50}	T_{50}	T_{50}	T_{50}	T_{50}	T_{50}	T_{50}	T_{50}	T_{50}	T_{50}	T_{50}	T_{50}	T_{50}	T_{50}	T_{50}
T_{48}	T_{49}	T_{49}	T_{49}	T_{49}	T_{49}	T_{49}	T_{49}	T_{49}	T_{49}	T_{49}	T_{49}	T_{49}	T_{49}	T_{49}	T_{49}
T_{49}	T_{48}	T_{48}	T_{48}	T_{48}	T_{48}	T_{48}	T_{48}	T_{48}	T_{48}	T_{48}	T_{48}	T_{48}	T_{48}	T_{48}	T_{48}
T_{50}	T_{47}	T_{47}	T_{47}	T_{47}	T_{47}	T_{47}	T_{47}	T_{47}	T_{47}	T_{47}	T_{47}	T_{47}	T_{47}	T_{47}	T_{47}
T_{51}	T_{46}	T_{46}	T_{46}	T_{46}	T_{46}	T_{46}	T_{46}	T_{46}	T_{46}	T_{46}	T_{46}	T_{46}	T_{46}	T_{46}	T_{46}
T_{52}	T_{45}	T_{45}	T_{45}	T_{45}	T_{45}	T_{45}	T_{45}	T_{45}	T_{45}	T_{45}	T_{45}	T_{45}	T_{45}	T_{45}	T_{45}
T_{53}	T_{60}	T_{60}	T_{60}	T_{60}	T_{60}	T_{60}	T_{60}	T_{60}	T_{60}	T_{60}	T_{60}	T_{60}	T_{60}	T_{60}	T_{60}
T_{54}	T_{59}	T_{59}	T_{59}	T_{59}	T_{59}	T_{59}	T_{59}	T_{59}	T_{59}	T_{59}	T_{59}	T_{59}	T_{59}	T_{59}	T_{59}
T_{55}	T_{58}	T_{58}	T_{58}	T_{58}	T_{58}	T_{58}	T_{58}	T_{58}	T_{58}	T_{58}	T_{58}	T_{58}	T_{58}	T_{58}	T_{58}
T_{56}	T_{57}	T_{57}	T_{57}	T_{57}	T_{57}	T_{57}	T_{57}	T_{57}	T_{57}	T_{57}	T_{57}	T_{57}	T_{57}	T_{57}	T_{57}
T_{57}	T_{56}	T_{56}	T_{56}	T_{56}	T_{56}	T_{56}	T_{56}	T_{56}	T_{56}	T_{56}	T_{56}	T_{56}	T_{56}	T_{56}	T_{56}
T_{58}	T_{55}	T_{55}	T_{55}	T_{55}	T_{55}	T_{55}	T_{55}	T_{55}	T_{55}	T_{55}	T_{55}	T_{55}	T_{55}	T_{55}	T_{55}
T_{59}	T_{54}	T_{54}	T_{54}	T_{54}	T_{54}	T_{54}	T_{54}	T_{54}	T_{54}	T_{54}	T_{54}	T_{54}	T_{54}	T_{54}	T_{54}
T_{60}	T_{53}	T_{53}	T_{53}	T_{53}	T_{53}	T_{53}	T_{53}	T_{53}	T_{53}	T_{53}	T_{53}	T_{53}	T_{53}	T_{53}	T_{53}

Şekil 5.5 Dönme-Yansıma Dönüşümüne Göre Truncated Dodecahedronun Köşe Nokta Görüntüleri

Teorem 5.5 : $\mathbb{R}^3_{TD}$ uzayında orjine göre kırk dört Öklidyen dönme-inversiyon izometriktir.

İspat *$r_\theta \in R_{\mathbf{TD}}$ olmak üzere, bir dönme-inversiyon $\rho := \sigma_O \sigma_\Delta \sigma_\Gamma = \sigma_O r_\theta$ bileşke olarak yazılabilir. Dolayısıyla Teorem 3.18 den otuz bir dönme ekseni için ispat yapılmalıdır. r_θ dönüşümünün dönme doğrultusu $(1, (2-\varphi), 0)$ ise*

$$(p,q,r) = \left(\frac{1}{\sqrt{1^2 + (2-\varphi)^2 + 0^2}}, \frac{(2-\varphi)}{\sqrt{1^2 + (2-\varphi)^2 + 0^2}}, \frac{0}{\sqrt{1^2 + (2-\varphi)^2 + 0^2}} \right)$$

vektörü birim normal doğrultu vektörüdür. Bu taktirde $\rho(x,y,z) = \sigma_O r_\theta (x,y,z)$ vektörü sütun matrisi olarak

$$\begin{bmatrix} -x\left(\cos\theta + \dfrac{(1-\cos\theta)}{1+(2-\varphi)^2}\right) - y\left(\dfrac{(2-\varphi)(1-\cos\theta)}{1+(2-\varphi)^2}\right) - z\left(\dfrac{(2-\varphi)\cos\theta}{\sqrt{1+(2-\varphi)^2}}\right) \\ -x\left(\dfrac{(2-\varphi)(1-\cos\theta)}{1+(2-\varphi)^2}\right) - y\left(\cos\theta + \dfrac{(2-\varphi)^2(1-\cos\theta)}{1+(2-\varphi)^2}\right) + \dfrac{z\sin\theta}{\sqrt{1+(2-\varphi)^2}} \\ -x\left(\dfrac{-(2-\varphi)\sin\theta}{\sqrt{1+(2-\varphi)^2}}\right) - y\left(\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{1+(2-\varphi)^2}}\right) - z(\cos\theta) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buna göre $\rho(T_1)$ vektörü sütun matrisi olarak

$$\rho(T_1) = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\varphi(\varphi+2)}\left(\cos\theta + \dfrac{(1-\cos\theta)}{1+(2-\varphi)^2}\right) - \left(\dfrac{(2-\varphi)\cos\theta}{\sqrt{1+(2-\varphi)^2}}\right) \\ -\dfrac{1}{\varphi(\varphi+2)}\left(\dfrac{(2-\varphi)(1-\cos\theta)}{1+(2-\varphi)^2}\right) + \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{1+(2-\varphi)^2}} \\ -\dfrac{1}{\varphi(\varphi+2)}\left(\dfrac{-(2-\varphi)\sin\theta}{\sqrt{1+(2-\varphi)^2}}\right) - \cos\theta \end{bmatrix}$$

dir. $\rho(T_2)$ vektörü sütun matrisi olarak

$$\rho(T_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\varphi(\varphi+2)}\left(\cos\theta + \dfrac{(1-\cos\theta)}{1+(2-\varphi)^2}\right) - \left(\dfrac{(2-\varphi)\cos\theta}{\sqrt{1+(2-\varphi)^2}}\right) \\ \dfrac{1}{\varphi(\varphi+2)}\left(\dfrac{(2-\varphi)(1-\cos\theta)}{1+(2-\varphi)^2}\right) + \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{1+(2-\varphi)^2}} \\ \dfrac{1}{\varphi(\varphi+2)}\left(\dfrac{-(2-\varphi)\sin\theta}{\sqrt{1+(2-\varphi)^2}}\right) - \cos\theta \end{bmatrix}$$

elde edilir. ρ *dönüşümünün bir izometri olduğunu göstermek adına* $d_{\mathbf{TD}}(T_1,T_2)=\dfrac{3\sqrt{5}-5}{5}=d_{\mathbf{TD}}(\rho(T_1),\rho(T_2))$ *eşitlikleri sağlanmalıdır.*

$$\mathbf{X}_{12}=\left|\frac{2}{\varphi(\varphi+2)}\left(\cos\theta+\frac{(1-\cos\theta)}{1+(2-\varphi)^2}\right)\right|$$

$$\mathbf{Y}_{12}=\left|\frac{2}{\varphi(\varphi+2)}\left(\frac{(2-\varphi)(1-\cos\theta)}{1+(2-\varphi)^2}\right)\right|$$

$$\mathbf{Z}_{12}=\left|\frac{2}{\varphi(\varphi+2)}\left(\frac{-(2-\varphi)\sin\theta}{\sqrt{1+(2-\varphi)^2}}\right)\right|$$

olmak üzere

$$d_{\mathbf{TD}}(\rho(T_1),\rho(T_2)) = \max\left\{\begin{array}{c} k_1\mathbf{X}_{12}+\mathbf{Y}_{12},\ k_1\mathbf{Y}_{12}+\mathbf{Z}_{12},\ k_1\mathbf{Z}_{12}+\mathbf{X}_{12},\\ ,k_2\mathbf{X}_{12}+k_3\mathbf{Y}_{12},\ k_2\mathbf{Y}_{12}+k_3\mathbf{Z}_{12},\ k_2\mathbf{Z}_{12}+k_3\mathbf{X}_{12},\\ ,k_4(\mathbf{X}_{12}+\mathbf{Y}_{12}+\mathbf{Z}_{12})\end{array}\right\}$$

$$= \frac{3\sqrt{5}-5}{5}$$

olup, $\theta\in\{2\pi/3,\ 4\pi/3\}$ *elde edilir. Benzer hesaplamalar ile* r_θ *dönüşümünün dönme ekseni* $(1,1,1),\ (-1,1,1),\ (1,-1,1),\ (1,1,-1),\ (1,-(2-\varphi),0),\ (0,1,\mp(2-\varphi)),$ $(\mp(2-\varphi),0,1)$ *vektörlerine paralel ise* $\theta\in\{2\pi/3,\ 4\pi/3\}$ *elde edilir. Böylece* $d_{\mathbf{TD}}-$*uzaklığını koruyacak şekilde yirmi farklı dönme-inversiyon hareketi bulunur.*

r_θ *nın dönme ekseni* $(1,0,0)$ *vektörüne paralel olsun. Bu takdirde*

$$\rho(x,y,z)=\sigma_O r_\theta(x,y,z)=(-x,-y\cos\theta+z\sin\theta,-y\sin\theta-z\cos\theta)$$

şeklinde tanımlanır. Buradan $T_5=\left(1,\dfrac{1}{\varphi(\varphi+2)},0\right)$ *ve* $T_6=\left(1,\dfrac{-1}{\varphi(\varphi+2)},0\right)$ *için*

$$\rho(T_5)=\left(-1,-\frac{\cos\theta}{\varphi(\varphi+2)},-\frac{\sin\theta}{\varphi(\varphi+2)}\right)$$

$$\rho(T_6)=\left(-1,\frac{\cos\theta}{\varphi(\varphi+2)},\frac{\sin\theta}{\varphi(\varphi+2)}\right)$$

dır. ρ *dönüşümünün bir izometri olduğunu göstermek adına* $d_{\mathbf{TD}}(T_5, T_6) = \dfrac{3\sqrt{5}-5}{5} = d_{\mathbf{TD}}(\rho(T_5), \rho(T_6))$ *eşitlikleri sağlanmalıdır.*

$$\mathbf{X}_{12} = 0$$

$$\mathbf{Y}_{12} = \left| \frac{2\cos\theta}{\varphi(\varphi+2)} \right|$$

$$\mathbf{Z}_{12} = \left| \frac{2\sin\theta}{\varphi(\varphi+2)} \right|$$

olmak üzere

$$d_{\mathbf{TD}}(\rho(T_5), \rho(T_6)) = \max \left\{ \begin{array}{c} k_1\mathbf{X}_{12} + \mathbf{Y}_{12},\ k_1\mathbf{Y}_{12} + \mathbf{Z}_{12},\ k_1\mathbf{Z}_{12} + \mathbf{X}_{12}, \\ , k_2\mathbf{X}_{12} + k_3\mathbf{Y}_{12},\ k_2\mathbf{Y}_{12} + k_3\mathbf{Z}_{12},\ k_2\mathbf{Z}_{12} + k_3\mathbf{X}_{12}, \\ , k_4(\mathbf{X}_{12} + \mathbf{Y}_{12} + \mathbf{Z}_{12}) \end{array} \right\}$$

$$= \frac{3\sqrt{5}-5}{5}$$

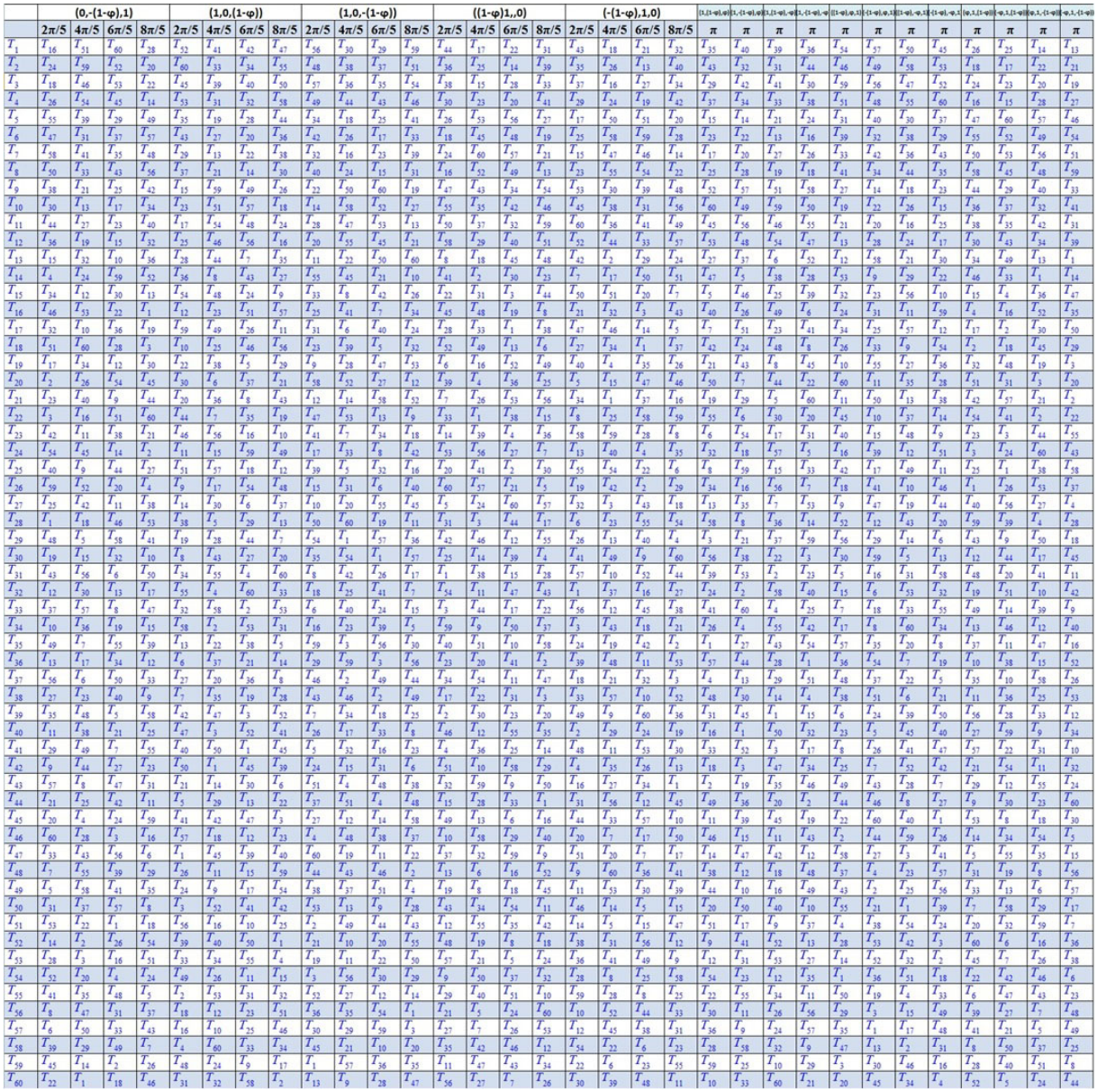
olup $\theta \in \{0, \pi\}$ *elde edilir. Fakat* $\theta = \pi$ *için hesaplamalar yapıldığında* $\sigma_O r_\pi$ *dönüşümünün* $x{=}0$ *düzlemine göre yansıma hareketine (dönüşümüne) karşılık geldiği görülmektedir (Bkz Şekil 5.6 - 5.7). Benzer şekilde dönme ekseni doğrultu vektörü* $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1, \mp(1-\varphi), \mp\varphi)$, $(\mp\varphi, 1, \mp(1-\varphi))$, $(\mp(1-\varphi), \mp\varphi, 1)$ *vektörlerine paralel olması durumunda da* $\sigma_O r_\theta$ *için* $\theta \in \{0, \pi\}$ *bulunur. Eğer* $\theta = \pi$ *için, dönme ekseni doğrultu vektörü bu vektörlere paralel olacak şekilde alınır ve dönme-inversiyon hareketi yapılırsa yansıma hareketleri bulunur. Sonuç olarak dönme-inversiyon dönüşümü yeni bir dönüşüm olarak düşünülemez.*

r_θ *dönüşümünün dönme doğrultusu* $(0, \mp(1-\varphi), 1)$, $(1, 0, \mp(1-\varphi))$, $(\mp(1-\varphi), 1, 0)$ *vektörlerine paralel veya bu vektörlerden biri olarak alınıp,* $d_{\mathbf{TD}}(T_5, T_6) = \dfrac{3\sqrt{5}-5}{5} = d_{\mathbf{TD}}(\rho(T_5), \rho(T_6))$ *eşitliği çözülürse* $\theta \in \left\{ \dfrac{2\pi}{5}, \dfrac{4\pi}{5}, \dfrac{6\pi}{5}, \dfrac{8\pi}{5} \right\}$ *elde edilir. Buradaki hesaplar* $(1, (2-\varphi), 0)$ *doğrultu vektöründe olduğu gibi benzer ve çok uzun olmasından dolayı tekrardan kaçınmak adına teze konmamıştır. Sonuç olarak* $d_{\mathbf{TD}}-$*uzaklığını koruyacak şekilde yirmi dört farklı dönme-inversiyon hareketi bulunur .*

Aşağıdaki şekilde dönme eksenlerinin doğrultuları ve dönme açıları verilen, dönme-inversiyon dönüşümü altında truncated dodecahedron küresinin köşe nokta görüntüleri verilmiştir.

	(1,0,0)	(0,1,0	(0,0,1	(1,1,1)		(-1,1,1)		(1,-1,1)		(1,1,-1)		(0,1,(2-φ))		(0,1,-(2-φ))		(1,(2-φ),0)		(1,-(2-φ),0)		((2-φ),0,1)		(-(2-φ),0,1)		(0,(1-φ),1)			
	π	π	π	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/3	4π/3	2π/5	4π/5	6π/5	8π/5
T_1	T_2	T_1	T_4	T_7	T_{11}	T_{12}	T_5	T_{10}	T_8	T_9	T_6	T_{34}	T_{38}	T_{37}	T_{33}	T_{49}	T_{53}	T_{46}	T_{58}	T_{20}	T_{19}	T_{24}	T_{23}	T_{27}	T_{55}	T_{48}	T_{15}
T_2	T_1	T_2	T_3	T_8	T_{12}	T_{11}	T_6	T_9	T_7	T_{10}	T_5	T_{42}	T_{30}	T_{29}	T_{41}	T_{57}	T_{45}	T_{54}	T_{50}	T_{28}	T_{27}	T_{16}	T_{15}	T_{19}	T_{47}	T_{56}	T_{23}
T_3	T_4	T_3	T_2	T_5	T_9	T_{10}	T_7	T_{12}	T_6	T_{11}	T_8	T_{32}	T_{44}	T_{43}	T_{31}	T_{48}	T_{60}	T_{51}	T_{55}	T_{14}	T_{13}	T_{26}	T_{25}	T_{21}	T_{58}	T_{49}	T_{17}
T_4	T_3	T_4	T_1	T_6	T_{10}	T_9	T_8	T_{11}	T_5	T_{12}	T_7	T_{40}	T_{36}	T_{35}	T_{39}	T_{56}	T_{52}	T_{59}	T_{47}	T_{22}	T_{21}	T_{18}	T_{17}	T_{13}	T_{50}	T_{57}	T_{25}
T_5	T_8	T_6	T_5	T_{11}	T_3	T_1	T_{10}	T_4	T_9	T_2	T_{12}	T_{22}	T_{16}	T_{23}	T_{13}	T_{42}	T_{43}	T_{33}	T_{36}	T_{48}	T_{59}	T_{58}	T_{45}	T_{54}	T_{38}	T_{32}	T_{52}
T_6	T_7	T_5	T_6	T_{12}	T_4	T_2	T_9	T_3	T_{10}	T_1	T_{11}	T_{14}	T_{24}	T_{15}	T_{21}	T_{34}	T_{35}	T_{41}	T_{44}	T_{56}	T_{51}	T_{50}	T_{53}	T_{46}	T_{30}	T_{40}	T_{60}
T_7	T_6	T_8	T_7	T_9	T_1	T_3	T_{12}	T_2	T_{11}	T_4	T_{10}	T_{28}	T_{18}	T_{25}	T_{19}	T_{40}	T_{37}	T_{31}	T_{30}	T_{49}	T_{54}	T_{55}	T_{52}	T_{59}	T_{44}	T_{34}	T_{45}
T_8	T_5	T_7	T_8	T_{10}	T_2	T_4	T_{11}	T_1	T_{12}	T_3	T_9	T_{20}	T_{26}	T_{17}	T_{27}	T_{32}	T_{29}	T_{39}	T_{38}	T_{57}	T_{46}	T_{47}	T_{60}	T_{51}	T_{36}	T_{42}	T_{53}
T_9	T_9	T_{12}	T_{10}	T_3	T_7	T_6	T_4	T_5	T_2	T_8	T_1	T_{56}	T_{55}	T_{45}	T_{46}	T_{28}	T_{17}	T_{13}	T_{24}	T_{32}	T_{41}	T_{36}	T_{37}	T_{31}	T_{16}	T_{20}	T_{35}
T_{10}	T_{10}	T_{11}	T_9	T_4	T_8	T_5	T_3	T_6	T_1	T_7	T_2	T_{48}	T_{47}	T_{53}	T_{54}	T_{20}	T_{25}	T_{21}	T_{16}	T_{40}	T_{33}	T_{44}	T_{29}	T_{39}	T_{24}	T_{28}	T_{43}
T_{11}	T_{11}	T_{10}	T_{12}	T_1	T_5	T_8	T_2	T_7	T_4	T_6	T_3	T_{57}	T_{58}	T_{52}	T_{51}	T_{22}	T_{15}	T_{19}	T_{26}	T_{34}	T_{39}	T_{30}	T_{43}	T_{33}	T_{18}	T_{14}	T_{29}
T_{12}	T_{12}	T_9	T_{11}	T_2	T_6	T_7	T_1	T_8	T_3	T_5	T_4	T_{19}	T_{50}	T_{60}	T_{59}	T_{14}	T_{23}	T_{27}	T_{18}	T_{42}	T_{31}	T_{38}	T_{35}	T_{41}	T_{26}	T_{22}	T_{37}
T_{13}	T_{17}	T_{14}	T_{16}	T_{43}	T_{55}	T_{53}	T_{40}	T_{59}	T_{41}	T_{57}	T_{38}	T_{46}	T_{39}	T_5	T_{25}	T_{33}	T_{54}	T_{26}	T_9	T_3	T_{20}	T_{51}	T_{31}	T_{47}	T_{56}	T_{23}	T_4
T_{14}	T_{18}	T_{13}	T_{15}	T_{42}	T_{56}	T_{54}	T_{37}	T_{60}	T_{44}	T_{58}	T_{39}	T_{26}	T_6	T_{40}	T_{49}	T_{25}	T_{12}	T_{34}	T_{57}	T_{19}	T_3	T_{32}	T_{48}	T_{35}	T_{11}	T_{31}	T_{16}
T_{15}	T_{19}	T_{16}	T_{14}	T_{38}	T_{59}	T_{57}	T_{41}	T_{55}	T_{40}	T_{53}	T_{43}	T_{37}	T_{52}	T_{27}	T_6	T_{11}	T_{28}	T_{60}	T_{35}	T_{45}	T_{29}	T_2	T_{18}	T_1	T_{21}	T_{58}	T_{49}
T_{16}	T_{20}	T_{15}	T_{13}	T_{39}	T_{60}	T_{58}	T_{44}	T_{56}	T_{37}	T_{54}	T_{42}	T_5	T_{28}	T_{47}	T_{38}	T_{55}	T_{36}	T_{10}	T_{27}	T_{30}	T_{50}	T_{17}	T_2	T_{14}	T_{29}	T_9	T_{33}
T_{17}	T_{13}	T_{18}	T_{20}	T_{44}	T_{54}	T_{56}	T_{39}	T_{38}	T_{42}	T_{60}	T_{37}	T_{43}	T_{45}	T_{21}	T_8	T_9	T_{22}	T_{53}	T_{29}	T_{52}	T_{35}	T_4	T_{16}	T_3	T_{27}	T_{55}	T_{48}
T_{18}	T_{14}	T_{17}	T_{19}	T_{41}	T_{53}	T_{55}	T_{38}	T_{57}	T_{43}	T_{59}	T_{40}	T_7	T_{22}	T_{50}	T_{44}	T_{58}	T_{30}	T_{12}	T_{21}	T_{36}	T_{47}	T_{15}	T_4	T_{20}	T_{35}	T_{11}	T_{31}
T_{19}	T_{15}	T_{20}	T_{18}	T_{37}	T_{58}	T_{60}	T_{42}	T_{54}	T_{39}	T_{56}	T_{44}	T_{51}	T_{41}	T_7	T_{23}	T_{31}	T_{59}	T_{24}	T_{11}	T_1	T_{14}	T_{46}	T_{33}	T_{50}	T_{57}	T_{25}	T_2
T_{20}	T_{16}	T_{19}	T_{17}	T_{40}	T_{57}	T_{59}	T_{43}	T_{53}	T_{38}	T_{55}	T_{41}	T_{24}	T_8	T_{42}	T_{48}	T_{23}	T_{10}	T_{32}	T_{56}	T_{13}	T_1	T_{34}	T_{49}	T_{29}	T_9	T_{33}	T_{18}
T_{21}	T_{25}	T_{22}	T_{24}	T_{35}	T_{47}	T_{45}	T_{32}	T_{51}	T_{33}	T_{49}	T_{30}	T_{54}	T_{31}	T_6	T_{17}	T_{41}	T_{46}	T_{18}	T_{10}	T_4	T_{28}	T_{59}	T_{39}	T_{55}	T_{48}	T_{15}	T_3
T_{22}	T_{26}	T_{21}	T_{23}	T_{34}	T_{48}	T_{46}	T_{29}	T_{52}	T_{36}	T_{50}	T_{31}	T_{18}	T_5	T_{32}	T_{57}	T_{17}	T_{11}	T_{42}	T_{49}	T_{27}	T_4	T_{40}	T_{56}	T_{43}	T_{12}	T_{39}	T_{24}
T_{23}	T_{27}	T_{24}	T_{22}	T_{30}	T_{51}	T_{49}	T_{33}	T_{47}	T_{32}	T_{45}	T_{35}	T_{29}	T_{60}	T_{19}	T_5	T_{12}	T_{20}	T_{52}	T_{43}	T_{53}	T_{37}	T_1	T_{26}	T_2	T_{13}	T_{50}	T_{57}
T_{24}	T_{28}	T_{23}	T_{21}	T_{31}	T_{52}	T_{50}	T_{36}	T_{48}	T_{29}	T_{46}	T_{34}	T_6	T_{20}	T_{55}	T_{30}	T_{47}	T_{44}	T_9	T_{19}	T_{38}	T_{58}	T_{25}	T_1	T_{22}	T_{37}	T_{10}	T_{41}
T_{25}	T_{21}	T_{26}	T_{28}	T_{36}	T_{46}	T_{48}	T_{31}	T_{50}	T_{34}	T_{52}	T_{29}	T_{35}	T_{53}	T_{13}	T_7	T_{10}	T_{14}	T_{45}	T_{37}	T_{60}	T_{43}	T_3	T_{24}	T_4	T_{19}	T_{47}	T_{56}
T_{26}	T_{22}	T_{25}	T_{27}	T_{33}	T_{45}	T_{47}	T_{30}	T_{49}	T_{35}	T_{51}	T_{32}	T_8	T_{14}	T_{58}	T_{36}	T_{50}	T_{38}	T_{11}	T_{13}	T_{44}	T_{55}	T_{23}	T_3	T_{28}	T_{43}	T_{12}	T_{39}
T_{27}	T_{23}	T_{28}	T_{26}	T_{29}	T_{50}	T_{52}	T_{34}	T_{46}	T_{31}	T_{48}	T_{36}	T_{59}	T_{33}	T_8	T_{15}	T_{39}	T_{51}	T_{16}	T_{12}	T_2	T_{22}	T_{54}	T_{41}	T_{58}	T_{49}	T_{17}	T_1
T_{28}	T_{24}	T_{27}	T_{25}	T_{32}	T_{49}	T_{51}	T_{35}	T_{45}	T_{30}	T_{47}	T_{33}	T_{16}	T_7	T_{34}	T_{56}	T_{15}	T_9	T_{40}	T_{48}	T_{21}	T_2	T_{42}	T_{57}	T_{37}	T_{10}	T_{41}	T_{26}
T_{29}	T_{33}	T_{30}	T_{32}	T_{47}	T_{27}	T_{22}	T_{51}	T_{24}	T_{49}	T_{25}	T_{47}	T_{53}	T_{23}	T_{39}	T_2	T_8	T_{34}	T_{17}	T_{60}	T_{15}	T_{52}	T_{10}	T_{38}	T_{11}	T_{31}	T_{16}	T_{20}
T_{30}	T_{34}	T_{29}	T_{31}	T_{46}	T_{23}	T_{26}	T_{50}	T_{28}	T_{52}	T_{21}	T_{48}	T_2	T_{40}	T_{24}	T_{58}	T_{18}	T_{55}	T_7	T_{33}	T_{47}	T_{16}	T_{37}	T_{11}	T_{42}	T_{53}	T_6	T_{51}
T_{31}	T_{35}	T_{32}	T_{30}	T_{45}	T_{24}	T_{25}	T_{49}	T_{27}	T_{51}	T_{22}	T_{47}	T_{21}	T_{59}	T_3	T_{37}	T_{54}	T_{19}	T_{36}	T_7	T_{12}	T_{40}	T_{13}	T_{46}	T_{18}	T_{14}	T_{29}	T_9
T_{32}	T_{36}	T_{31}	T_{29}	T_{48}	T_{28}	T_{21}	T_{52}	T_{23}	T_{50}	T_{26}	T_{46}	T_{38}	T_3	T_{56}	T_{22}	T_{35}	T_8	T_{57}	T_{20}	T_{39}	T_9	T_{49}	T_{14}	T_{45}	T_5	T_{59}	T_{44}
T_{33}	T_{29}	T_{34}	T_{36}	T_{52}	T_{26}	T_{23}	T_{48}	T_{21}	T_{46}	T_{28}	T_{50}	T_{27}	T_{54}	T_1	T_{43}	T_{59}	T_{13}	T_{30}	T_5	T_{10}	T_{42}	T_{19}	T_{51}	T_{16}	T_{20}	T_{35}	T_{11}
T_{34}	T_{30}	T_{33}	T_{35}	T_{49}	T_{22}	T_{27}	T_{45}	T_{25}	T_{47}	T_{24}	T_{51}	T_{44}	T_1	T_{57}	T_{28}	T_{29}	T_6	T_{56}	T_{14}	T_{41}	T_{11}	T_{48}	T_{20}	T_{52}	T_7	T_{54}	T_{38}
T_{35}	T_{31}	T_{36}	T_{34}	T_{50}	T_{21}	T_{28}	T_{46}	T_{26}	T_{48}	T_{23}	T_{52}	T_{60}	T_{25}	T_{41}	T_4	T_6	T_{32}	T_{15}	T_{53}	T_{17}	T_{45}	T_{12}	T_{44}	T_9	T_{33}	T_{18}	T_{14}
T_{36}	T_{32}	T_{35}	T_{33}	T_{51}	T_{25}	T_{24}	T_{47}	T_{22}	T_{45}	T_{27}	T_{49}	T_4	T_{42}	T_{26}	T_{55}	T_{16}	T_{58}	T_5	T_{31}	T_{50}	T_{18}	T_{43}	T_9	T_{40}	T_{60}	T_8	T_{46}
T_{37}	T_{41}	T_{38}	T_{40}	T_{55}	T_{19}	T_{14}	T_{59}	T_{16}	T_{57}	T_{17}	T_{53}	T_{45}	T_{15}	T_{31}	T_1	T_7	T_{42}	T_{25}	T_{52}	T_{23}	T_{60}	T_9	T_{30}	T_{12}	T_{39}	T_{24}	T_{28}
T_{38}	T_{42}	T_{37}	T_{39}	T_{54}	T_{15}	T_{18}	T_{58}	T_{20}	T_{60}	T_{13}	T_{56}	T_1	T_{32}	T_{16}	T_{50}	T_{26}	T_{47}	T_8	T_{41}	T_{55}	T_{24}	T_{29}	T_{12}	T_{34}	T_{45}	T_5	T_{59}
T_{39}	T_{43}	T_{40}	T_{38}	T_{53}	T_{16}	T_{17}	T_{57}	T_{19}	T_{59}	T_{14}	T_{55}	T_{13}	T_{51}	T_4	T_{29}	T_{46}	T_{27}	T_{44}	T_8	T_{11}	T_{32}	T_{21}	T_{54}	T_{26}	T_{22}	T_{37}	T_{10}
T_{40}	T_{44}	T_{39}	T_{37}	T_{56}	T_{20}	T_{13}	T_{60}	T_{15}	T_{58}	T_{18}	T_{54}	T_{30}	T_4	T_{48}	T_{14}	T_{43}	T_7	T_{49}	T_{28}	T_{31}	T_{10}	T_{57}	T_{22}	T_{53}	T_6	T_{51}	T_{36}
T_{41}	T_{37}	T_{42}	T_{44}	T_{60}	T_{18}	T_{15}	T_{56}	T_{13}	T_{54}	T_{20}	T_{58}	T_{19}	T_{46}	T_2	T_{35}	T_{51}	T_{21}	T_{38}	T_6	T_9	T_{34}	T_{27}	T_{59}	T_{24}	T_{28}	T_{43}	T_{12}
T_{42}	T_{38}	T_{41}	T_{43}	T_{57}	T_{14}	T_{19}	T_{53}	T_{17}	T_{55}	T_{16}	T_{59}	T_{36}	T_2	T_{49}	T_{20}	T_{37}	T_5	T_{48}	T_{22}	T_{33}	T_{12}	T_{56}	T_{28}	T_{60}	T_8	T_{46}	T_{30}
T_{43}	T_{39}	T_{44}	T_{42}	T_{58}	T_{13}	T_{20}	T_{54}	T_{18}	T_{56}	T_{15}	T_{60}	T_{52}	T_{17}	T_{33}	T_3	T_5	T_{40}	T_{23}	T_{45}	T_{25}	T_{53}	T_{11}	T_{36}	T_{10}	T_{41}	T_{26}	T_{22}
T_{44}	T_{40}	T_{43}	T_{41}	T_{59}	T_{17}	T_{16}	T_{55}	T_{14}	T_{53}	T_{19}	T_{57}	T_3	T_{34}	T_{18}	T_{47}	T_{24}	T_{50}	T_6	T_{39}	T_{58}	T_{26}	T_{35}	T_{10}	T_{32}	T_{52}	T_7	T_{54}
T_{45}	T_{46}	T_{50}	T_{48}	T_{26}	T_{31}	T_{34}	T_{21}	T_{36}	T_{28}	T_{29}	T_{23}	T_{17}	T_{37}	T_{51}	T_9	T_2	T_{56}	T_{43}	T_{25}	T_{35}	T_{15}	T_5	T_{55}	T_7	T_{54}	T_{38}	T_{32}
T_{46}	T_{45}	T_{49}	T_{47}	T_{25}	T_{30}	T_{35}	T_{22}	T_{33}	T_{27}	T_{32}	T_{24}	T_{41}	T_{13}	T_9	T_{52}	T_{21}	T_{39}	T_{55}	T_1	T_8	T_{56}	T_{31}	T_{19}	T_{36}	T_{42}	T_{53}	T_6
T_{47}	T_{48}	T_{52}	T_{46}	T_{21}	T_{29}	T_{36}	T_{26}	T_{34}	T_{23}	T_{31}	T_{28}	T_{10}	T_{49}	T_{44}	T_{16}	T_{38}	T_{24}	T_4	T_{54}	T_{18}	T_{30}	T_{53}	T_8	T_{57}	T_{25}	T_2	T_{13}
T_{48}	T_{47}	T_{51}	T_{45}	T_{22}	T_{32}	T_{33}	T_{25}	T_{35}	T_{24}	T_{30}	T_{27}	T_{50}	T_{10}	T_{20}	T_{40}	T_{53}	T_3	T_{28}	T_{42}	T_{54}	T_5	T_{14}	T_{34}	T_{17}	T_1	T_{21}	T_{58}
T_{49}	T_{50}	T_{46}	T_{52}	T_{28}	T_{34}	T_{29}	T_{23}	T_{26}	T_{36}	T_{21}	T_{47}	T_{12}	T_{14}	T_{42}	T_{60}	T_1	T_{26}	T_{59}	T_7	T_{22}	T_{40}	T_{59}	T_7	T_{20}	T_3	T_{27}	T_{47}
T_{50}	T_{49}	T_{45}	T_{51}	T_{27}	T_{35}	T_{30}	T_{24}	T_{32}	T_{25}	T_{33}	T_{22}	T_{12}	T_{48}	T_{38}	T_{18}	T_{44}	T_{26}	T_2	T_{59}	T_{16}	T_{36}	T_{60}	T_6	T_{56}	T_{23}	T_4	T_{19}
T_{51}	T_{52}	T_{48}	T_{50}	T_{23}	T_{36}	T_{29}	T_{28}	T_{31}	T_{21}	T_{34}	T_{26}	T_{39}	T_{19}	T_{11}	T_{45}	T_{27}	T_{41}	T_{58}	T_3	T_6	T_{57}	T_{33}	T_{13}	T_{30}	T_{40}	T_{60}	T_8
T_{52}	T_{51}	T_{47}	T_{49}	T_{24}	T_{33}	T_{32}	T_{27}	T_{30}	T_{22}	T_{35}	T_{25}	T_{15}	T_{43}	T_{46}	T_{11}	T_4	T_{57}	T_{37}	T_{23}	T_{29}	T_{17}	T_7	T_{58}	T_5	T_{59}	T_{44}	T_{34}
T_{53}	T_{54}	T_{58}	T_{56}	T_{18}	T_{39}	T_{42}	T_{13}	T_{44}	T_{20}	T_{37}	T_{15}	T_{25}	T_{29}	T_{59}	T_{10}	T_1	T_{48}	T_{35}	T_{17}	T_{43}	T_{23}	T_6	T_{47}	T_8	T_{46}	T_{30}	T_{40}
T_{54}	T_{53}	T_{57}	T_{55}	T_{17}	T_{38}	T_{43}	T_{14}	T_{41}	T_{19}	T_{40}	T_{16}	T_{33}	T_{21}	T_{10}	T_{60}	T_{31}	T_2	T_7	T_{48}	T_{39}	T_{27}	T_{44}	T_{34}	T_{45}	T_5	T_{49}	T_{41}
T_{55}	T_{56}	T_{60}	T_{54}	T_{13}	T_{37}	T_{44}	T_{18}	T_{42}	T_{15}	T_{39}	T_{20}	T_9	T_{57}	T_{36}	T_{24}	T_{30}	T_{16}	T_3	T_{46}	T_{26}	T_{38}	T_{45}	T_7	T_{49}	T_{17}	T_1	T_{21}
T_{56}	T_{55}	T_{59}	T_{53}	T_{14}	T_{40}	T_{41}	T_{17}	T_{43}	T_{16}	T_{38}	T_{19}	T_{58}	T_9	T_{28}	T_{32}	T_{45}	T_4	T_{20}	T_{34}	T_{46}	T_6	T_{22}	T_{42}	T_{25}	T_2	T_{13}	T_{50}
T_{57}	T_{58}	T_{54}	T_{60}	T_{20}	T_{42}	T_{39}	T_{15}	T_{37}	T_{18}	T_{44}	T_{13}	T_{55}	T_{11}	T_{22}	T_{34}	T_{52}	T_2	T_{14}	T_{32}	T_{51}	T_8	T_{28}	T_{40}	T_{23}	T_4	T_{19}	T_{47}
T_{58}	T_{57}	T_{53}	T_{59}	T_{19}	T_{43}	T_{38}	T_{16}	T_{40}	T_{17}	T_{41}	T_{14}	T_{11}	T_{56}	T_{30}	T_{26}	T_{36}	T_{18}	T_1	T_{51}	T_{24}	T_{44}	T_{52}	T_5	T_{48}	T_{15}	T_3	T_{27}
T_{59}	T_{60}	T_{56}	T_{58}	T_{15}	T_{44}	T_{37}	T_{20}	T_{39}	T_{13}	T_{42}	T_{18}	T_{31}	T_{27}	T_{12}	T_{53}	T_{19}	T_{33}	T_4	T_{50}	T_5	T_{49}	T_{41}	T_{21}	T_{38}	T_{32}	T_{52}	T_7
T_{60}	T_{59}	T_{55}	T_{57}	T_{16}	T_{41}	T_{40}	T_{19}	T_{38}	T_{14}	T_{43}	T_{17}	T_{23}	T_{35}	T_{54}	T_{12}	T_3	T_{49}	T_{29}	T_{15}	T_{37}	T_{25}	T_8	T_{50}	T_6	T_{51}	T_{36}	T_{42}

Şekil 5.6 Dönme-İnversiyon Altında Nokta Görüntüleri



Şekil 5.7 Dönme-İnversiyon Altında Nokta Görüntüleri

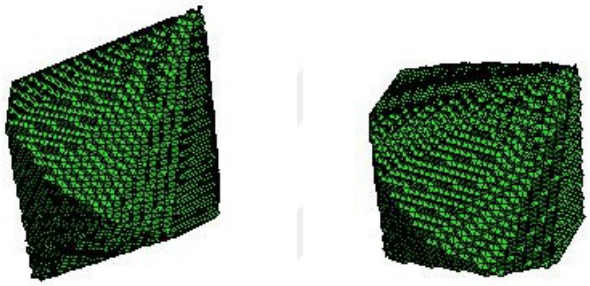
Tezin buraya kadar olan kısmında $\mathbb{R}^3$ uzayında truncated dodecahedronu değişmez bırakan Öklidyen simetri dönüşümlerinin $\mathbb{R}^3_{\mathbf{TD}}$ uzayında izometri olduğu gösterildi. Yani on beş yansıma, altmış dönme, kırk dört dönme-inversiyon ve bir inversiyondan oluşan, truncated dodecahedronun Öklidyen simetri grubu olan I_h ın elemanları $d_{\mathbf{TD}}$ metriğini korumaktadır. Fakat buradaki önemli problem I_h grubunun elemanları olan dönüşümler dışında $d_{\mathbf{TD}}-$uzaklığını koruyan başka dönüşümlerin olup-olmadığıdır. Bundan sonraki kısımda bu problemi çözebilmek adına bazı tanım ve sonuçlar verilecektir.

Tanım 5.1 : $\mathbb{R}^3_{\mathbf{TD}}$ uzayında keyfi A ve B noktaları için,

$$[AB] := \left\{X \in \mathbb{R}^3 : d_{\mathbf{TD}}(A,X) + d_{\mathbf{TD}}(X,B) = d_{\mathbf{TD}}(A,B)\right\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye, A ve B noktalarının minimum uzaklık kümesi denir

Örneğin orjin ve $K = \left(0, \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{5+\sqrt{5}}{5}\right)$ noktalarının minimum uzaklık kümesi $[OK]$, tabanı düzgün ongen olan iki düzgün dik ongen primatin tabanlarının çakışması ile oluşan bir yirmi yüzlüdür (Bkz Şekil5.8).



Şekil 5.8 Minimum uzaklık kümesi

Teorem 5.6 : $\mathbb{R}^3_{\mathbf{TD}}$ uzayında keyfi A ve B noktaları için, $f : \mathbb{R}^3_{\mathbf{TD}} \longrightarrow \mathbb{R}^3_{\mathbf{TD}}$ izometrisi ve $[AB]$ minimum uzaklık kümesi verilsin. Bu takdirde

$$f([AB]) = [f(A)\, f(B)]$$

dir.

İspat : Keyfi $Y \in \mathbb{R}^3_{\mathbf{TD}}$ için

$$\begin{aligned}
Y \in f([AB]) &\iff \exists\, X \in [AB] \ni Y = f(X) \\
&\iff d_{\mathbf{TD}}(A,X) + d_{\mathbf{TD}}(X,B) = d_{\mathbf{TD}}(A,B) \\
&\iff d_{\mathbf{TD}}(f(A), f(X)) + d_{\mathbf{TD}}(f(X), f(B)) = d_{\mathbf{TD}}(f(A), f(B)) \\
&\iff f(X) \in [f(A)\, f(B)] \\
&\iff Y \in [f(A)\, f(B)]
\end{aligned}$$

önermesinden $f([AB]) = [f(A)\, f(B)]$ olarak bulunur. Sonuç olarak keyfi bir f izometrisi altında $[AB]$ minimum uzaklık kümesinin köşe noktaları $[f(A)\, f(B)]$ minimum

uzaklık kümesinin köşe noktasına dönüşmüş olup, kenar uzunlukları korunmuştur yorumu yapılabilir.

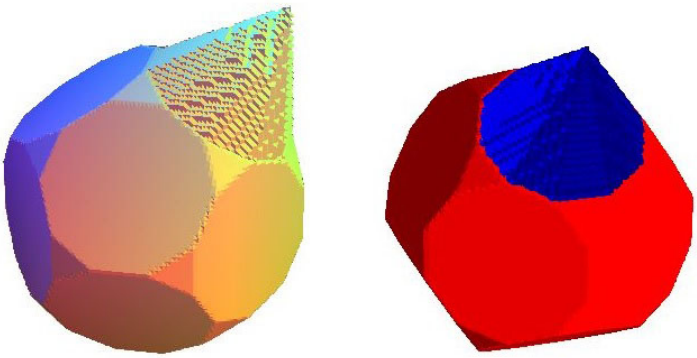
Bundan sonraki iki teoremde $\mathbb{R}^3_{\mathbf{TD}}$ uzayında bir dönüşüm izometri ise I_h simetri grubunun elamanı olmak zorunda olduğunu gösteren teoremler verilecektir

Teorem 5.7 : $\mathbb{R}^3_{\mathbf{TD}}$ uzayında f orjini orjine resmeden bir izometri ise, f dönüşümü I_h ın bir elemanıdır.

İspat : $\mathbb{R}^3_{\mathbf{TD}}$ uzayında $O=(0,0,0)$ ve $K=\left(0,\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{5+\sqrt{5}}{5}\right)$ noktaları verilsin. $[OK]$ minimum uzaklık kümesinin köşe noktaları, birim truncated dodecahedron küresininde köşe noktaları olan $T_1,T_2,T_{13},T_{17},T_{21},T_{25},T_{49},T_{50},T_{57},T_{58}$ dir. $[OK]$ minimum uzaklık kümesinin köşe noktalarının f izometrisi altındaki görüntüsü, $f(O)=O$ özelliğindeki bir izometri olduğundan, yine birim kürenin köşe noktaları olmak zorundadır. Ayrıca f izometrisi altında $[OK]$ kümesinin kenar uzunluklarıda korunacağından

$$f(T_1)\,f(T_2),\ f(T_1)\,f(T_{13}),\ f(T_2)\,f(T_{17}),\ f(T_{17})\,f(T_{25}),\ f(T_{25})\,f(T_{49})$$
$$f(T_{49})\,f(T_{57}),\ f(T_{57})\,f(T_{58}),\ f(T_{58})\,f(T_{50}),\ f(T_{50})\,f(T_{21}),\ f(T_{21})\,f(T_{13})$$

doğru parçalarıda birim kürenin kenarları olmak zorundadır. Bütün bu nedenlerden f izometrisi birim kürenin bir yüzünün köşe noktalarını aralarındaki uzaklıkları koruyarak yine bir yüzünün köşe noktalarına dönüştürmek zorundadır. Sonuç olarak köşe noktaları $T_1,T_2,T_{13},T_{17},T_{21},T_{25},T_{49},T_{50},T_{57},T_{58}$ olan düzgün ongenin dönüşebileceği 12 tane düzgün ongen bulunmaktadır. Ayrıca $i=1,2,13,17,21,25,49,50,57,58$ olmak üzere $f(T_i)$ noktasının olabileceği her bir yüz için 10 ihtimal vardır. Ohalde toplamda $12\times 10=120$ tane hareket olacağından f izometrisi 120 hareketten biri olmak zorundadır.



Şekil 5.9 Minimum uzaklık kümesi ve Truncated dodecahedron birim küresi

Bu hareketler tespit edilirse;

Örneğin T_1T_2 doğru parçası birim kürenin bir kenarı olmak üzere,

$f(T_1) = T_4$ iken $f(T_2) = T_3$ durumunda $f(T_{13}) = T_{16}$ veya $f(T_{13}) = T_{15}$ olmak zorundadır. Buna göre;

$f(T_1) = T_4$, $f(T_2) = T_3$ ve $f(T_{13}) = T_{16}$ durumunda, f dönüşümü: $z = 0$ düzlemine göre yansıma döşümü, benzer şekilde,

$f(T_1) = T_4$, $f(T_2) = T_3$ ve $f(T_{13}) = T_{15}$ durumunda, f dönüşümü: orjinden geçen doğrultusu $(1, 0, 0)$ olan doğruya göre π radyanlık dönme dönüşümüdür.

Benzer şekilde diğer tüm olası durumlar incelenirse, truncated dodecahedronu koruyan Öklidyen simetri hareketlerinden biri ile karşılaşılacağı şekillerdeki tablolardan rahatlıkla görülebilir. Böylece f izometrisi $d_{\mathbf{TD}}$ metriğini koruyan bir izometri ise, truncated dodecahedronu koruyan Öklidyen simetri hareketlerinden biri olmak zorundadır. Bu simetri dönüşümlerinin öteleme dönüşümleri ile bileşkeside $d_{\mathbf{TD}}$ metriğini korur. Sonuç olarak $\mathbb{R}^3$ uzayında tüm ötelemelerin grubu $T(3)$ ve truncated dodecahedronun simetri grubu I_h olmak üzere, f dönüşüm $\mathbb{R}^3_{\mathbf{TD}}$ uzayında bir izometri ise $f = T_A \circ g$ dir. Yani $\mathbb{R}^3_{\mathbf{TD}}$ uzayını izometri grubu $T(3)$ ile I_h ın yarı direkt çarpımıdır.

6. BULGULAR VE TARTIŞMA

Buraya kadar olan kısımda, çokyüzlüler, çokyüzlülerin bazı özel sınıfları ve metrik geometri tanıtılmıştır. Verilen keyfi konveks ve simetrik bir çokyüzlünün metrik geometri ile ilişkisinin, birim küresi verilen çokyüzlü olacak şekilde bir metriğin verilmesi ile elde edilebileceği belirtilmiştir. Fonksiyonel analizde, n boyutlu analitik uzay da verilen konveks simetrik bir çokyüzlü için birim küresi bu çokyüzlü olacak şekilde bir normun var olduğu bilinmektedir. Bu normun, çokyüzlüler için genel tanım kullanılarak, birkaç basit adımla nasıl tanımlanabileceğine yer verilmiştir. Daha sonra tanımlanan bu metriklere göre, uzayın izometri grubunun çokyüzlünün simetri grubu ile ötelemeler grubunun yarı direk çarpımı olduğu analitik olarak ispatlamıştır.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Sonuç olarak bu tez çalışmasında, çokyüzlüler ile metrik geometriler arasındaki ilişkinin nasıl kuralacağı verilmiştir. Çokyüzlülerin metrik yapıları kullanılarak, birçok bilim dalındaki uygulamaları üzerine rahatlıkla çalışılabilme imkanı sağlanmıştır. Örneğin atom altı dünyada atomlarının kristal yapı oluştururken dizilimlerinin çokyüzlü formunda olduğu bilindiğinden, kristografik nokta çalışmalarında moleküllerin fiziksel ve kimyasal özellikleri üzerine rahatlıkla çalışma imkanı sağlayacaktır. Benzer şekilde çoğu virüsün protein duvarları çokyüzlü formunda olduğundan, virüsler üzerine yapılan çalışmalarda matematiksel alt yapı sağlanacaktır. Geometride yeni sayılabilecek bir çalışma alanı olan fraktal geometride, bu çokyüzlüler kullanılarak, yeni fraktal yapılar ortaya konabilecektir. Son olarak çokyüzlülerin metrik yapıları sayesinde simetri grupları üzerine analitik olarak daha kolay çalışma imkanı sağlanacaktır. Truncated dodecahedron üzerine yapılan bu çalışma konveks simetrik bir çok çokyüzlü içinde yapılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Akça, Z. and Kaya, R., 2004, On The Distance Formulae in Three Dimensional Taxicab Space, Hadronic Journal, 27, 5, 521-532.

Atiyah, M. ve Sutcliffe, P., 2003, Polyhedra in Physics, Chemistry and Geometry, Milan Journal of Mathematics, 71:33-58.

Ermiş, T., 2014, Düzgün Çokyüzlülerin Metrik Geometriler İle İlişkileri Üzerine , ESOGÜ, Doktora Tezi.

Ermiş, T. ve Kaya, R., 2015, On the Isometries of 3-Dimensional Maximum Space, Konuralp Journal Of Mathematics, Vol.3, No.1, pp.103-114.

Gelişgen, Ö., Kaya R., 2009, The Taxicab Space Group, Acta Mathematica Hungarica, Acta Mathematica Hungarica, Vol. 122, No.1 - 2, 187 - 200

Gelişgen, Ö., Ermiş, T. and Günaltılı, İ., 2017, A Note About The Metrics Induced by Truncated Dodecahedron And Truncated Icosahedron, Int. Jour. of Geo., No. 2, 5 - 16.

Griffiths D., 1987, Introduction to Elementary Particles, Wiley - VCH, 33p.

Lauritzen, N., 2009, Lectures On Convex sets.

Lopez J. L. R, Carrizales J. M. M. and Yacaman M. J., 2006, Low Dimensional Non - Crystallographic Metallic Nanostructures: Hrtem Simulation, Models and Experimental Results, Modern Physics Letters B., Vol. 20, No. 13, 725- 751.

Richter, W., D., and Schicker, K., 2014, Ball numbers of platonic bodies, J. Math.Anal.Appl.416, 783–799.

Salihova, S., 2006, Maksimum Metrik Geometri Üzerine, ESOGÜ, Doktora Tezi.

Thompson, A. C., 1996, Minkowski Geometry, Cambridge University Press, 346p.