Bazı Öklidyen Olmayan Düzlemlerde Trigonometrik Fonksiyonların İncelenmesi

İclal Öztürk

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran 2008

On the Trigonometric Functions in Some Non-Euclidean Planes

İclal Öztürk

THESIS for MASTER DEGREE

Department of Mathematics

June 2008

Bazı Öklidyen Olmayan Düzlemlerde Trigonometrik Fonksiyonların İncelenmesi

İclal Öztürk

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ayşe BAYAR

Haziran 2008

İclal Öztürk'ün YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Bazı Öklidyen Olmayan Düzlemlerde Trigonometrik Fonksiyonların İncelenmesi" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye: Prof. Dr. Rüstem KAYA

Üye: Prof. Dr. Şükrü OLGUN

Üye: Doç. Dr. Ziya AKÇA

Üye: Yrd. Doç. Dr. Ayşe BAYAR (Danışman)

Üye: Yrd. Doç. Dr. Aytaç KURTULUŞ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tezde bazı Öklidyen olmayan düzlemlerde trigonometrik fonksiyonlar incelenmiştir.

İlk bölümde, önce Minkowski geometri kavramı açıklanarak gerekli olan bazı tanımlar verilmiştir. Öklidyen geometri aksiyomları ifade edildikten sonra Öklidyen olmayan düzlem geometrilerinden Taksi, Çin-Dama, Maksimum, Genelleştirilmiş Mutlak Değer ve α-düzlem geometrileri hakkında genel bilgiler litaratürden özetlenerek verilmiştir.

İkinci, üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerde sırayla Taksi, Çin-Dama, Maksimum, Genelleştirilmiş Mutlak Değer düzlemlerinde trigonometrik fonksiyonlar ve trigonometrik fonksiyonların özellikleri (Akça ve Kaya, 1997), (Özcan, Ekmekçi ve Bayar, 2002), (Bayar, ve Ekmekçi, 2006), (Akça, Bayar ve Ekmekçi, 2007), (Bayar, Ekmekçi ve Akça, 2006) ve (Bayar, 2007) daki çalışmalardan verilmiştir.

Son bölümde, α-düzlem geometrideki trigonometrik fonksiyonlar ve bu trigonometrik fonksiyonların özellikleri incelendikten sonra bu düzlemde bir doğru parçasının dönmelerden sonra uzunluğunun değişimi verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Minkowski geometri, Taksi geometri, Çin-dama geometrisi, Maksimum düzlem geometri, Genelleştirilmiş mutlak değer geometrisi, α-düzlem geometri, Öklidyen olmayan geometri, Trigonometrik fonksiyonlar.

SUMMARY

This thesis is a study of the trigonometric functions in some non- Euclidean planes.

At the outset of the introductory chapter, some essential terms and concepts that will be needed in the succeeding chapters are defined. Then, the concept of Minkowski geometry and Axioms of Euclidean Geometry are given and explained. In the first chapter, Taxicab, Chinese Checkers, Maximum, Generalized Absolute Value and α-plane geometries, which are known as special Minkowski geometries, are also summarized within the known literature.

In the second, third and fourth chapters, the trigonometric functions and their properties in Taxicab, Chinese Checkers, Maximum, Absolute Value plane geometries are given from (Akça ve Kaya, 1997),(Özcan, Ekmekçi ve Bayar, 2002), (Bayar ve Ekmekçi, 2006), (Akça, Bayar ve Ekmekçi, 2007), (Bayar, Ekmekçi ve Akça, 2006) and (Bayar, 2007), respectively.

In the final chapter, the trigonometric functions in α-plane geometries and the their properties are introduced and the change of a line segment length after rotations are given.

Keywords: Minkowski geometry, Taxicab geometry, Chinese Checkers geometry, Maximum plane geometry, Generalized absolute value geometry, α-plane geometry, Non-Euclidean Geometry, Trigonometric functions.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarım boyunca, bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım Yrd. Doç. Dr. Ayşe BAYAR hocama ve değerli fikirlerine başvurduğum diğer hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

ESKİŞEHİR, 2008 İclal ÖZTÜRK

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET v
SUMMARY vi
TEŞEKKÜR vii

1. TEMEL KAVRAMLAR 1
1.1 Geometrik Yapılar ve Minkowski Geometrisi 1
1.2 Düzlem Taksi Geometri 4
1.3 Düzlem Çin Dama Geometrisi 6
1.4 Maksimum Düzlem Geometrisi 8
1.5 Genelleştirilmiş Mutlak Değer Metrik Geometrisi 11
1.6 Düzlem α -Geometrisi 14
2. TAKSİ TRİGONOMETRİ 18
2.1 Taksi Trigonometrik Fonksiyonlar 18
2.2 Taksi Trigonometrik Fonksiyonların Özellikleri 23
4.1.1 Taksi Trigonometrik Fonksiyonları İçin İndirgeme Formülleri 25
4.1.1 Taksi Trigonometrik Fonksiyonları İçin Toplam-Fark Formülleri 26
4.1.1 Taksi Trigonometrik Fonksiyonları İçin Yarım Açı Formülleri 26
2.3 Referans Açılı Taksi Trigonometrik Fonksiyonlar 27
2.4 Taksi Uzunluğunun Dönmeler Altındaki Değişimi 28
3. CC-DÜZLEMİNDE TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR 30
3.1 CC-Düzleminde Trigonometrik Fonksiyonlar 30
3.2 CC-Düzleminde Trigonometrik Fonksiyonların Özellikleri 37
3.2.1 CC-Trigonometrik Fonksiyonlar İçin İndirgeme Formülleri 39
3.2.2 CC-Trigonometrik Fonksiyonlar İçin Toplam-Fark Formülleri 40
3.2.3 CC-Trigonometrik Fonksiyonlar İçin Yarım Açı Formülleri 41
3.3 Referans Açılı CC-Trigonometrik Fonksiyonlar 41
3.2 CC-Uzunluğunun Dönmeler Altındaki Değişimi 42
4. MAKSİMUM DÜZLEMDE TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR 44
4.1 Maksimum Trigonometrik Fonksiyonlar 44
4.2 Maksimum Trigonometrik Fonksiyonların Özellikleri 49

4.2.1 Maksimum Trigonometrik Fonksiyonları İçin İndirgeme Formülleri 51
4.2.2 Maksimum Trigonometrik Fonksiyonları İçin Toplam-Fark Formülleri 52
4.2.3 Maksimum Trigonometrik Fonksiyonları İçin Yarım Açı Formülleri 53
4.2 Referans Açılı Maksimum Trigonometrik Fonksiyonlar 53
4.2 Maksimum Uzunluğunun Dönmeler Altındaki Değişimi 54
5. GENELLEŞTİRİLMİŞ MUTLAK DEĞER DÜZLEMİNE GÖRE TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR 56
5.1 Genelleştirilmiş Mutlak Değer Trigonometrik Fonksiyonları 56
5.2 Genelleştirilmiş Mutlak Değer Trigonometrik Fonksiyonların Özellikleri 64
5.2.1 Genelleştirilmiş Mutlak Değer Trigonometrik Fonksiyonları İçin İndirgeme Formülleri 65
5.2.2 Genelleştirilmiş Mutlak Değer Trigonometrik Fonksiyonları İçin Toplam-Fark Formülleri 67
5.2.3 Genelleştirilmiş Mutlak Değer Trigonometrik Fonksiyonları İçin Yarım Açı Formülleri 67
5.3 Referans Açılı Genelleştirilmiş Mutlak Değer Trigonometrik Fonksiyonları ... 68
5.4 Genelleştirilmiş Mutlak Değer Uzunluğun Dönmeler Altındaki Değişimi 68
6. DÜZLEM α -GEOMETRİSİNDE TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR 70
6.1 Düzlem α -Geometrisi Trigonometrik Fonksiyonları 70
6.2 α -Geometrisi Trigonometrik Fonksiyonların Özellikleri 75
6.2.1 α -Geometrisi Trigonometrik Fonksiyonların İçin Toplam-Fark Formülleri 77
6.2.2 α -Geometrisi Trigonometrik Fonksiyonların İçin Yarım Açı Formülleri ... 77
6.3 Referans Açılı α -Geometrisi Trigonometrik Fonksiyonları 78
6.4 α -Uzunluğun Dönmeler Altındaki Değişimi 78

KAYNAKLAR DİZİNİ 80

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil
Sayfa

2.1.1 …… 19
2.1.2…… 23
2.1.3……23
2.3.1…….. 27
2.3.2……27
3.1.1……30
3.1.2……37
3.1.3……37
3.3.1……42
3.3.2……42
4.1.1……44
4.1.2……49
4.1.3……... 49
4.3.1……54
4.3.2……54
5.1.1……57
5.1.2……63
5.1.3……63
6.1.1……71
6.1.2……74
6.1.3……75

İçindekiler

BAZI ÖKLİDYEN OLMAYAN DÜZLEMLERDE TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN İNCELENMESİ

İclal Öztürk

BÖLÜM 1

TEMEL KAVRAMLAR

Minkowski geometrilerini tanıtan ve inceleyen bir çok çalışmalar vardır. Bu bölümde Minkowski geometrilerinde bilinen bazı kavram ve özelikler (Kaya, 2002), (Özcan ve Kaya, 2003), (Kaya ve Çolakoğlu, 2006), (Krause, 1975), (Martin, 1998), (Millmann and Parker, 1991), (Thompson, 1996) ve (Coxeter, 1961) kaynaklarından esas alınarak özetlendi.

1.1 Geometrik Yapılar ve Minkowski Geometrisi

(Thompson, 1996) da ifade edildiği gibi, Minkowski geometrisi, eliptik ve hiperbolik geometriden farklı sonlu boyutlu bir Öklidyen olmayan geometridir. Minkowski geometrisindeki lineer yapı Öklidyen geometrideki ile hemen hemen aynıdır. Noktalar ve doğrular Öklidyen geometrinin nokta ve doğruları, açı ölçümü Ökliyen geometrideki ile aynı yolla yapılmaktadır. Yalnızca bir fark vardır. Bu fark ise uzaklığın tüm yönlerde aynı olmamasıdır. Bu farklılık da alınan metrikle ilgili kavramları değiştirmektedir. Dolayısıyla Minkowski geometrilerinde uzaklıkla ilgili kavramların incelenmesi oldukça ilgi çekici konular ortaya çıkarmaktadır. Bu geometrilere örnek olarak Taksi geometri, Çin Dama geometrisi, Maksimum, Genelleştirilmiş Mutlak Değer Geometrisi ve α-geometrisi verilebilir.

Örnek olarak verdiğimiz Minkowski geometrilerine geçmeden Öklid geometrisi aksiyomları verilmek istenirse, aşağıda verilen onüç aksiyom antik çağda Öklid tarafından düzlemsel geometri için verilen bir aksiyomlar kümesinin çağımızda Birkhoff grubunca analitik olarak en sade ve belkide en kullanışlı hale getirilmiş şeklidir.

$\mathbb{P}$: noktalar kümesi,

$\mathbb{L}$: $\mathbb{P}$ nin bazı alt kümelerinin bir ailesi olan doğrular kümesi,

m : açı ölçüm fonksiyonu,

d_E : uzaklık fonksiyonu

olmak üzere aşağıda verilen onüç aksiyomu (E1-E13) sağlayan $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d_E, m]$ matematiksel yapısı *düzlem* olarak düşünülebilir.

[**E1**] Verilen iki noktayı içeren bir tek doğru vardır.

[**E2**] Her doğru en az iki nokta içerir. $\mathbb{P}$ kümesi doğrusal olmayan en az üç nokta içerir.

[**E1**] ve [**E2**] aksiyomları *üzerinde olma* aksiyomları olarak bilinir.

Bunları izleyen dört aksiyom uzaklık fonksiyonunun sırayla *pozitif tanımlılık, simetrik* ve *üçgen eşitsizliğini* sağlamasıyla ilgilidir. Ayrıca *cetvel aksiyomu* denilen aksiyomu da sağlar. d_E için bu dört aksiyom aşağıdaki gibidir:

[**E3**] Her sıralı (A, B) nokta çifti için d_E negatif olmayan bir $d_E(A, B)$ sayısını belirtir. Ayrıca $d_E(A, B) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $A = B$ olmasıdır.

[**E4**] $d_E(A, B) = d_E(B, A)$ dır.

[**E5**] $d_E(A, B) + d_E(B, C) \geq d_E(A, C)$ dir.

[**E6**] Verilen bir l doğrusu için bir $f_l : l \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır öyleki tüm A, B noktaları için;

$$|f_l(A) - f_l(B)| = d_E(A, B)$$

sağlanır.

Aşağıdaki aksiyom *düzlem ayırma aksiyomu*dur.

[**E7**] Verilen bir l doğrusu için $\mathbb{P}$ nin H_1 ve H_2 gibi yarı düzlem şeklinde adlandırılan iki alt kümesi vardır öyleki,

i) H_1 ve H_2 konvekstir

ii) $H_1 \cup H_2 = \mathbb{P} - l$ ($\mathbb{P}$ den l nin atılmışı demektir).

iii) $A \in H_1$ ve $B \in H_2$ ise $\overleftrightarrow{AB} \cap l \neq \varnothing$ olur.

Şimdi vereceğimiz dört özelik *açı ölçüm aksiyomu* diye anılır:

[**E8**] m, her bir açı için 0 ile 180 arasında değişen bir reel sayı ile belirtilir.

[**E9**] H yarı düzlemin kenarı üzerinde bir $\overrightarrow{AB}$ ışını ve 0 ile 180 arasında herhangi bir r reel sayısı verilsin. Bu durumda $P \in H$ olmak üzere $m\angle PAB = r$ olacak şekilde bir tek $\overrightarrow{AP}$ ışını vardır.

[**E10**] Eğer D noktası $\angle ABC$ nin iç bölgesinde ise,

$$m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC$$

olur.

[**E11**] Eğer B, A ile C arasında ve $D \notin \overleftrightarrow{AC}$ ise,

$$m\angle ABD + m\angle DBC = 180$$

olur.

Sıradaki aksiyom $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d_E, m]$ sisteminin "*kenar-açı-kenar*" aksiyomudur.

[**E12**] İki üçgenin köşe noktaları arasında bire-bir bir eşleme verilsin. Eğer birinci üçgenin iki kenarı ve aralarındaki açı, ikinci üçgenin karşılık gelen kenarlarına ve açıya eş ise bu üçgenler eştir.

Son olarak $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d_E, m]$ sistemi için ünlü *paralellik aksiyomunu* ifade edelim:

[**E13**] l doğrusu dışında bir P noktası verilsin. Bu durumda P noktasından geçen ve l doğrusuna paralel olan bir tek doğru vardır.

Tanım 1.1.1 $\mathbb{P}$ elemanları noktalar olan bir küme ve $\mathbb{L}$ de $\mathbb{P}$ nin boş olmayan alt kümelerinden oluşan doğrular kümesi olmak üzere aşağıdaki iki aksiyomu sağlayan $\mathcal{A} = [\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ sistemine *soyut geometri* adı verilir.

i) Her $A, B \in \mathbb{P}$ için $A \in l$ ve $B \in l$ olacak şekilde enaz bir $l \in \mathbb{L}$ doğrusu vardır.

ii) Her doğru en az iki noktaya sahiptir.

Tanım 1.1.2 $\mathcal{A} = [\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ soyut geometri olmak üzere aşağıdaki aksiyomları sağlarsa $\mathcal{A}$ sistemine *incidence geometri* denir.

i) $\mathbb{L}$ deki her farklı iki nokta bir tek doğru üzerindedir.

ii) Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.

Buna göre bir $\mathcal{A} = [\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ sisteminin incidence geometri olması için aşağıdaki üç aksiyomu sağlamalıdır:

i) Her doğru en az iki noktaya sahiptir.

ii) Her farklı iki nokta bir tek doğru üzerindedir.

iii) Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.

Tanım 1.1.3 $\mathcal{X}$ boş olmayan bir küme olmak üzere $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki üç koşulu sağlarsa $\mathcal{X}$ kümesi üzerinde bir *metrik*tir denir. Her $P, Q, R \in \mathcal{X}$ için,

i) $d(P,Q) \geq 0$ ve $d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$

ii) $d(P,Q) = d(Q,P)$

iii) $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$.

Tanım 1.1.4 l, $[\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ incidence geometrinin bir doğrusu olsun. d de $\mathbb{P}$ üzerinde uzaklık fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanırsa $f : l \to \mathbb{R}$ fonksiyonu l için *cetveldir* denir.

i) f fonksiyonu $1:1$ ve örtendir.

ii) l üzerindeki her P, Q nokta çifti için,

$$|f(P) - f(Q)| = d(P, Q)$$

dir. ii) şıkkındaki eşitliğe *cetvel denklemi* ve $f(P)$ ye de P nin f ye bağlı *koordinatı* denir.

Tanım 1.1.5 $[\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ incidence geometri olmak üzere d uzaklık fonksiyonu cetvel aksiyomunu sağlarsa ve her $l \in \mathbb{L}$ doğrusu cetvele sahipse $\mathcal{M} = [\mathbb{P}, \mathbb{L}, d]$ sistemine *metrik geometri* denir.

Minkowski geometrisi, $\mathbb{P}$ Öklid geometrisindeki noktalar kümesi, $\mathbb{L}$ Öklid geometrisindeki doğrular kümesi ve d herhangi bir uzaklık fonksiyonu olmak üzere $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d]$ metrik geometrisidir. O halde Minkowski geometrileri Öklidyen nokta ve doğrularla inşa edilen metrik geometrilerdir. Ancak açı ölçüm fonksiyonu ilavesi ve sağladıkları aksiyomlar ile aşağıdaki tanımları verilen geometrilerle de ilişkilendirilebilirler.

1.2 Düzlem Taksi Geometri

20. yüzyılın başlarında H. Minkowski Taksi metriğini de kapsayan bir metrik ailesi verdi (Minkowski, 1967). Daha sonra K. Menger analitik düzlemde herhangi iki nokta arasındaki uzaklık için iyi bilinen Öklidyen metrik yerine Taksi metriğini kullanarak Taksi düzlem geometri ile tanıştırdı (Menger, 1952). Daha sonra E. F. Krause düzlem Taksi geometrideki temel kavramları işleyen bir kitap yayınladı (Krause, 1975). Geçen yüzyılın son çeğreğinde Taksi geometri pek çok matematikçi tarafından çalışılarak çeşitli yönlerde geliştirildi. Bunlardan bazıları (Akça ve Kaya, 1997), (Akça ve Kaya, 2004a), (Akça ve Kaya, 2004b), (Bayar vd, 2008), (Ho and Liu, 1996), (Kaya vd., 2000), (Kaya, 2004), (Laatsch, 1982), (Özcan vd., 2002), (Özcan ve Kaya, 2002), (Reynolds, 1980), (Schattschneider, 1984), (So and Al-Maskari, 1995), (So, 2002), (Thompson and Dray, 2000) ve (Tian et al., 1997) kaynaklarıdır.

Tanım 1.2.1 $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ analitik düzlemde herhangi iki nokta olsun.

$$d_T(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

şeklinde tanımlanan $d_T : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ fonksiyonuna analitik düzlemde P_1 ve P_2 noktaları arasındaki *Taksi uzaklık fonksiyonu* adı verilir.

Taksi düzleminin noktaları ve doğruları Öklid düzleminin noktaları ve doğrularının aynısıdır. Açı ölçümü de Öklidyen düzlemdeki aynı yolla yapılır. Analitik düzlemde

alınan $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ noktaları arasındaki Öklid uzaklığı

$$d_E(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

iken K. Menger ve E. F. Krause bu noktalar arasındaki uzaklık için H. Minkowski tarafından tanımlanan

$$d_T(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

taksi uzaklık fonksiyonunu kullanarak düzlem taksi geometriyi geliştirdiler.

Önerme 1.2.2 Analitik düzlemde tanımlanan Taksi uzaklık fonksiyonu bir metriktir.

İspat: Metrik tanımı gereğince Taksi uzaklık fonksiyonunun pozitif tanımlı, simetrik ve üçgen eşitsizliğini sağladığını göstermeliyiz. $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olsun. Mutlak değer tanımından dolayı $|x_1 - x_2| \geq 0$ ve $|y_1 - y_2| \geq 0$ olduğundan $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \geq 0$ olup $d_T(P_1, P_2) \geq 0$ dır. Ayrıca

$$d_T(P_1, P_2) = 0 \Rightarrow |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 0$$

olması gerektiğinden dolayı $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2| = 0$ elde edilir. Yani $x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ olup $P_1 = P_2$ dir. Açıkca $P_1 = P_2$ ise $d_T(P_1, P_2) = 0$ dır. O halde $d_T(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$ dir. Yani d_T-uzaklık fonksiyonu pozitif tanımlıdır.

Üstelik mutlak değer tanımı gereğince $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$ ve $|y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$ olduğundan $d_T(P_1, P_2) = d_T(P_2, P_1)$ dir. Bu nedenle d_T-uzaklık fonksiyonu simetriktir.

$P_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ olsun. Mutlak değer özelliği gereğince

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| &\leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \\ |y_1 - y_2| &\leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \end{aligned}$$

olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} d_T(P_1, P_2) &= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \\ &\leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| + |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \\ &= (|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|) + (|x_3 - x_2| + |y_3 - y_2|) \\ &= d_T(P_1, P_3) + d_T(P_3, P_2) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bir başka deyişle Taksi uzaklık fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar. O halde analitik düzlemde tanımlanan Taksi uzaklık fonksiyonu d_T bir metriktir. □

Düzlemde $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P(x_2, y_2)$ noktaları arasındaki öklid uzaklığı yerine d_T uzaklığı kullanılarak Taksi düzlem geometrisi oluşturulur.

1.3 Düzlem Çin Dama Geometrisi

E.F Krause öğrencisi G.Chen'den Çin dama oyunundaki hareketleri kullanarak hesaplanan bir metrik geliştirmesini istedi. Çin Dama metriği tanımı Chen tarafından aşağıdaki gibi 1992 de verildi. Çin Dama geometrisi bir Öklidyen olmayan düzlem modelidir .

Çin dama geometri, kısaca CC-geometri olarak kısaltılır. Bu geometri pekçok yazar tarafından çalışılmaktadır. Bunlardan bazıları (Kaya vd., 2006), (Turan, 2004) , (Uymaz, 2002), (Bayar ve Ekmekçi, 2006), (Akça, Bayar ve Ekmekçi, 2007), (Yüksel, 2005), (Gelişgen, Kaya, ve Özcan, 2006), (Tian, 2005), (Turan. ve Özcan, 2004,), (Turan.ve Özcan, 2005) ve (Uymaz, 2002) kaynaklarıdır.

Tanım 1.3.1 $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ analitik düzlemde herhangi iki nokta olsun.

$$d_c(P_1, P_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + \left(\sqrt{2} - 1\right) \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

şeklinde tanımlanan $d_c : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ fonksiyonuna analitik düzlemde P_1 ve P_2 noktaları arasındaki *Çin Dama uzaklık fonksiyonu* adı verilir.

Çin dama (CC) düzleminin noktaları ve doğruları Öklid düzleminin noktaları ve doğrularının aynısıdır. Açı ölçümü de Öklidyen düzlemdeki ile aynıdır. Analitik düzlemde alınan $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ noktaları arasındaki uzaklık için yukarıdaki tanımda verilen d_c Çin dama uzaklık fonksiyonu kullanılarak düzlem Çin dama düzlem geometrisi oluşturulur.

Önerme 1.3.2 Analitik düzlemde tanımlanan Çin Dama uzaklık fonksiyonu bir metriktir.

İspat: $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olsun. Mutlak değer tanımından dolayı $|x_1 - x_2| \geq 0$, $|y_1 - y_2| \geq 0$ ve $\sqrt{2} - 1 \geq 0$ olduğundan $d_c(P_1, P_2) \geq 0$ dır. Ayrıca

$$d_c(P_1, P_2) = 0 \Rightarrow \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} = 0$$

olması gerektiğinden dolayı $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2| = 0$ elde edilir. Yani $x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ olup $P_1 = P_2$ dir. Açıkca $P_1 = P_2$ ise $d_c(P_1, P_2) = 0$ dır. Bu taktirde $d_c(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$ dir. Yani d_c-uzaklık fonksiyonu pozitif tanımlıdır.

Mutlak değer tanımı gereğince $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$ ve $|y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$ olduğundan $d_c(P_1, P_2) = d_c(P_2, P_1)$ dir. Bu nedenle d_c-uzaklık fonksiyonu simetriktir.

$P_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d_c(P_1,P_2) &= \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\} \\ &= \max\{|x_1-x_3+x_3-x_2|, |y_1-y_3+y_3-y_2|\} + \\ &\qquad \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{|x_1-x_3+x_3-x_2|, |y_1-y_3+y_3-y_2|\} \\ &\leq \max\{|x_1-x_3|+|x_3-x_2|, |y_1-y_3|+|y_3-y_2|\} + \\ &\qquad \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{|x_1-x_3|+|x_3-x_2|, |y_1-y_3|+|y_3-y_2|\} \\ &= t \end{aligned}$$

olsun. Burada dört durum vardır.

I. Durum: $|x_1-x_3| \geq |y_1-y_3|$ ve $|x_3-x_2| \geq |y_3-y_2|$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} d_c(P_1,P_2) &\leq t = (|x_1-x_3|+|x_3-x_2|) + \left(\sqrt{2}-1\right)(|y_1-y_3|+|y_3-y_2|) \\ &= \left(|x_1-x_3| + \left(\sqrt{2}-1\right)|y_1-y_3|\right) + \left(|x_3-x_2| + \left(\sqrt{2}-1\right)|y_3-y_2|\right) \\ &= d_c(P_1,P_3) + d_c(P_3,P_2) \end{aligned}$$

olur.

II. Durum: $|x_1-x_3| \geq |y_1-y_3|$ ve $|x_3-x_2| \leq |y_3-y_2|$ olsun. Burada iki altdurum söz konusudur.

Alt Durum II.1: $|x_1-x_3|+|x_3-x_2| \geq |y_1-y_3|+|y_3-y_2|$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} d_c(P_1,P_2) &\leq t = (|x_1-x_3|+|x_3-x_2|) + \left(\sqrt{2}-1\right)(|y_1-y_3|+|y_3-y_2|) \\ &= \left(|x_1-x_3| + \left(\sqrt{2}-1\right)|y_1-y_3|\right) + \left(|x_3-x_2| + \left(\sqrt{2}-1\right)|y_3-y_2|\right) \\ &= d_c(P_1,P_3) + d_c(P_3,P_2) - (2-\sqrt{2})(|y_3-y_2|-|x_3-x_2|) \end{aligned}$$

olup burada $2-\sqrt{2} > 0$ ve $|y_3-y_2|-|x_3-x_2| \geq 0$ olduğundan dolayı

$$d_c(P_1,P_2) \leq d_c(P_1,P_3) + d_c(P_3,P_2)$$

olur.

Alt Durum II.2: $|x_1-x_3|+|x_3-x_2| \leq |y_1-y_3|+|y_3-y_2|$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} d_c(P_1,P_2) &\leq t = (|y_1-y_3|+|y_3-y_2|) + \left(\sqrt{2}-1\right)(|x_1-x_3|+|x_3-x_2|) \\ &= \left(|y_1-y_3| + \left(\sqrt{2}-1\right)|x_1-x_3|\right) + \left(|y_3-y_2| + \left(\sqrt{2}-1\right)|x_3-x_2|\right) \\ &= d_c(P_1,P_3) + d_c(P_3,P_2) - (2-\sqrt{2})(|x_1-x_3|-|y_1-y_3|) \end{aligned}$$

olup burada $2-\sqrt{2}>0$ ve $|x_1-x_3|-|y_1-y_3|\geq 0$ olduğundan dolayı

$$d_c(P_1,P_2)\leq d_c(P_1,P_3)+d_c(P_3,P_2)$$

dir.

IV. Durum: $|x_1-x_3|\leq|y_1-y_3|$ ve $|x_3-x_2|\leq|y_3-y_2|$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} d_c(P_1,P_2) &\leq t=(|y_1-y_3|+|y_3-y_2|)+\left(\sqrt{2}-1\right)(|x_1-x_3|+|x_3-x_2|) \\ &= \left(|y_1-y_3|+\left(\sqrt{2}-1\right)|x_1-x_3|\right)+\left(|y_3-y_2|+\left(\sqrt{2}-1\right)|x_3-x_2|\right) \\ &= d_c(P_1,P_3)+d_c(P_3,P_2) \end{aligned}$$

olur. Tüm durumların sonuçları birleştirildiğinde her $P_1,\ P_2,\ P_3\in\mathbb{R}^2$ için

$$d_c(P_1,P_2)\leq d_c(P_1,P_3)+d_c(P_3,P_2)$$

sonucu elde edilir. Yani Çin Dama uzaklık fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar. Buna göre Çin dama uzaklık fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ de bir metriktir $\square$

1.4 Maksimum Düzlem Geometrisi

Maksimum metrik de H.Minkowski metrik ailesindendir. Analitik düzlemde iki nokta arasındaki Öklidyen uzaklık yerine maksimum uzaklık fonksiyonu kullanılarak maksimum düzlem geometrisi oluşturulur. Bu düzlem geometride bazı konular (Sahilova, 2006) ve (Bayar, A. 2007) de verilmiştir.

Tanım 1.4.1 $A=(a_1,a_2)$ ve $B=(b_1,b_2)$ analitik düzlemde iki nokta olsun. Bu noktalar arasındaki maksimum uzaklık fonksiyonu, d_M,

$$\begin{aligned} d_M &: \mathbb{R}^2_M\times\mathbb{R}^2_M\to[0,\infty) \\ d_M(A,\ B) &= d_M((a_1,a_2),(b_1,b_2))=\max\{|a_1-b_1|,\ |a_2-b_2|\} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır. Bu uzaklıkla donatılmış düzleme *Maksimum Düzlemi* denir. Maksimum düzlemin noktaları ve doğruları Öklidyen düzlemini noktaları doğruları ve açıları ile aynıdır. Maksimum düzlemi kısaca $M-$*düzlemi* veya $\mathbb{R}^2_M$ ile gösterilir.

Önerme 1.4.2 Analitik düzlemde verilen maksimum uzaklık fonksiyonu bir metrik belirtir.

İspat: A,B,C$\in\mathbb{R}^2_M$ ve A=$(a_1,a_2), B(b_1,b_2), C=(c_1,c_2)$ olsun.

1. $d_M(A,\ B)=\max\{|a_1-b_1|,\ |a_2-b_2|\}$ olduğundan $d_M(A,\ B)\geq 0$ olur.

Eğer $d_M(A,\ B) = 0$ olsun.$\max\{|a_1 - b_1|\,,\ |a_2 - b_2|\} = 0$ dır.Bu durumda $|a_1 - b_1| = 0$ ve $|a_2 - b_2| = 0$, dolayısıyla $a_1 = b_1$ ve $a_2 = b_2$ olur.Buradan $(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$ ve sonuçta A=B olur.

A=B olsun. Bu durumda $d_M(A,\ A) = \max\{|a_1 - a_1|\,,\ |a_2 - a_2|\} = 0$ olur. Yani $d_M(A,\ B) = 0$ dır.

2. $d_M(A,\ B) = \max\{|a_1 - b_1|\,,\ |a_2 - b_2|\}$

$$=\max\{|b_1 - a_1|\,,\ |b_2 - a_2|\} = d_M(B,\ A)$$

dir.

3.

$$d_M(A,\ B) \leq d_M(A,\ C) + d_M(C,\ B)$$

olduğunu gösterelim.

$$d_M(A,\ B) = \max\{|a_1 - b_1|\,,\ |a_2 - b_2|\}$$
$$d_M(A,\ C) = \max\{|a_1 - c_1|\,,\ |a_2 - c_2|\}$$
$$d_M(C,\ B) = \max\{|c_1 - b_1|\,,\ |c_2 - b_2|\}$$

olduğundan,

$$d_M(A,\ B) = \max\{|a_1 - b_1|\,,\ |a_2 - b_2|\}$$
$$= \max\{|a_1 - c_1 + c_2 - b_1|\,,\ |a_2 - c_2 + c_2 - b_2|\}$$
$$\leq \max\{|a_1 - c_1| + |c_2 - b_1|\,,\ |a_2 - c_2| + |c_2 - b_2|\}$$

olur.

$$d_M(A,\ B) = \max\{|a_1 - c_1| + |c_2 - b_1|\,,\ |a_2 - c_2| + |c_2 - b_2|\}$$

alalım.

$$d_M(A,\ B) \leq d_M(A,\ C) + d_M(C,\ B)$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu gösterirsek

$$d_M(A,\ B) \leq d_M(A,\ C) + d_M(C,\ B)$$

eşitsizliğinin doğruluğunu ispatlamış oluruz. İspat için aşağıdaki durumları inceleyelim.

(i) $|a_1 - c_1| \geq |a_2 - c_2|$ ve $|c_1 - b_1| \geq |c_2 - b_2|$ ise

$$d_M(A,\ B) = |a_1 - c_1| + |c_2 - b_1| = d_M(A,\ C) + d_M(C,\ B)$$

olur.

(ii) $|a_1 - c_1| \leq |a_2 - c_2|$ ve $|c_1 - b_1| \leq |c_2 - b_2|$ ise

$$d_M(A,\ B) = |a_2 - c_2| + |c_2 - b_2| = |c_2 - b_2|$$

olur.

(iii) $|a_1 - c_1| \geq |a_2 - c_2|$ ve $|c_1 - b_1| \leq |c_2 - b_2|$ ise iki durum söz konusudur:

I.Durum: Eğer $|a_1 - c_1| + |c_1 - b_1| \geq |a_2 - c_2| + |c_2 - b_2|$ ise

$d_M(A,\ B) = |a_1 - c_1| + |c_1 - b_1|$ dir. Bu ifade de $|c_1 - b_1|$ yerine $|c_2 - b_2|$ yazarsak $|c_1 - b_1| \leq |c_2 - b_2|$ olduğundan

$$d_M(A,\ B) \leq |a_1 - c_1| + |c_2 - b_2| = |c_2 - b_2|$$

elde edilir.

II.Durum: Eğer $|a_1 - c_1| + |c_1 - b_1| \leq |a_2 - c_2| + |c_2 - b_2|$ ise

$$d_M(A,\ B) = |a_2 - c_2| + |c_2 - b_2|$$

dir. $|a_2 - c_2|$ yerine $|a_1 - c_1|$ yazarsak $|a_1 - c_1| \geq |a_2 - c_2|$ olduğundan

$$d_M(A,\ B) \leq |a_1 - c_1| + |c_2 - b_2| = d_M(A,\ C) + d_M(C,\ B)$$

olur. Her iki durumda da verilen eşitsizlik sağlanıyor.

(iv) $|a_1 - c_1| \leq |a_2 - c_2|$ ve $|c_1 - b_1| \geq |c_2 - b_2|$ ise aşağıdaki iki durum söz konusudur.

I.Durum:

$$|a_1 - c_1| + |c_1 - b_1| \geq |a_2 - c_2| + |c_2 - b_2|\,.$$

II.Durum:

$$|a_1 - c_1| + |c_1 - b_1| \leq |a_2 - c_2| + |c_2 - b_2|$$

Bu iki durum için (iii) dekine benzer olarak

$$d_M(A,\ B) \leq d_M(A,\ C) + d_M(C,\ B)$$

eşitsizliğinin sağlandiği gösterilebilir. Sonuç olarak tüm durumlarda

$$d_M(A,\ B) \leq d_M(A,\ C) + d_M(C,\ B)$$

dır. $\square$

1.5 Genelleştirilmiş Mutlak Değer Metrik Geometrisi

Genelleştirilmiş mutlak değer düzlemi Öklidyen düzlemin noktaları, doğruları ve açılarını içeren bir düzlemdir. Ancak burada metrik fonksiyonları farklıdır. Şu ana kadar incelediğimiz taksi, CC ve maksimum uzaklıklarını içeren uzaklık fonksiyonlarının ailesi R. Kaya tarafından önerilmiş ve (Kaya vd., 2006) da bu uzaklık fonsiyonlarının her birinin metrik olduğu gösterilmiş ve bu metrik ailesi *Genelleştirilmiş Mutlak Değer Metriği* olarak adlandırılmıştır. Genelleştirilmiş mutlak değer metriği aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 1.5.1: $\mathbb{R}^2$ de $X = (x_1, y_1)$ ve $Y = (x_2, y_2)$ gibi iki nokta arasındaki uzaklık d_g ile gösterilir ve d_g uzaklığı $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \geq b \geq 0, a \neq 0$ olmak üzere

$$d_g(X, Y) = d_g((x_1, y_1), (x_2, y_2))$$
$$d_g(X, Y) = a \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + b \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}, a \geq b \geq 0, a \neq 0$$

biçiminde tanımlanır.

d_g uzaklıklarının tanımına göre X ve Y gibi iki nokta arasındaki en kısa yol yatay yada dikey doğru parçası ile eğimi $\pm\frac{2ab}{a^2-b^2}$ olan doğru parçasının birleşiminden oluşur. Bu yüzden X ile Y arasındaki en kısa d_g uzaklığı böyle iki doğru parçasının Öklidyen uzunlukların toplamının a sayısı ile çarpımıdır. d_g metriği ile donatılmış $\mathbb{R}^2$ düzlemine *Genelleştirilmiş Mutlak Değer Düzlemi* denir ve $(\mathbb{R}^2, d_g)$ ile gösterilir.

Önerme 1.5.2 Analitik düzlemde verilen genelleştirilmiş mutlak değer uzaklığı bir metrik belirtir.

İspat: $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olsun. Mutlak değer tanımından dolayı $|x_1 - x_2| \geq 0$, $|y_1 - y_2| \geq 0$ ve $a > b > 0$ olduğundan $d_g(P_1, P_2) \geq 0$ dır. Ayrıca

$$d_g(P_1, P_2) = 0 \Rightarrow a \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + b \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} = 0$$

olması gerektiğinden dolayı $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2| = 0$ elde edilir. Yani $x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ olup $P_1 = P_2$ dir. Açıkca $P_1 = P_2$ ise $d_g(P_1, P_2) = 0$ dır. Bu taktirde $d_g(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$ dir. Yani d_g-uzaklık fonksiyonu pozitif tanımlıdır.

Mutlak değer tanımı gereğince $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$ ve $|y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$ olduğundan $d_g(P_1, P_2) = d_g(P_2, P_1)$ dir. Bu nedenle d_g-uzaklık fonksiyonu simetriktir.

$P_3(x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d_g(X,Y) &= a\max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\} + b\min\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\} \\ &= a\max\{|x_1-x_3+x_3-x_2|, |y_1-y_3+y_3-y_2|\} + \\ &\quad b\min\{|x_1-x_3+x_3-x_2|, |y_1-y_3+y_3-y_2|\} \\ &\leq a\max\{|x_1-x_3|+|x_3-x_2|, |y_1-y_3|+|y_3-y_2|\} + \\ &\qquad b\min\{|x_1-x_3|+|x_3-x_2|, |y_1-y_3|+|y_3-y_2| \\ &= t \end{aligned}$$

$$|x_1-x_2| = |x_1-x_3+x_3-x_2| \leq |x_1-x_3| + |x_3-x_2| \tag{1}$$

ve

$$|y_1-y_2| = |y_1-y_3+y_3-y_2| \leq |y_1-y_3| + |y_3-y_2| \tag{2}$$

Öyleyse

$$\begin{aligned} d_g(X,Y) &= a\max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\} + b\min\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\} \\ &= a\max\{|x_1-x_3+x_3-x_2|, |y_1-y_3+y_3-y_2|\} + \\ &\quad b\min\{|x_1-x_3+x_3-x_2|, |y_1-y_3+y_3-y_2|\} \\ &\leq a\max\{|x_1-x_3|+|x_3-x_2|, |y_1-y_3|+|y_3-y_2|\} \\ &\quad + b\min\{|x_1-x_3|+|x_3-x_2|, |y_1-y_3|+|y_3-y_2| \\ &= t \end{aligned}$$

elde edilir. Burada ki durumlar incelenerek d_g nin üçgen eşitsizliğini sağladığı kolaylıkla görülebilir.

(I) $|x_1-x_3| > |y_1-y_3|$ ve $|x_3-x_2| \geq |y_3-y_2|$ ise

$$\begin{aligned} d_g(X,Y) &\leq k = a(|x_1-x_3|+|x_3-x_2|) + b(|y_1-y_3|+|y_3-y_2|) \\ &= a|x_1-x_3| + b|y_1-y_3| + a|x_3-x_2| + b|y_3-y_2| \\ &= d_g(X,Z) + d_g(Z,Y) \end{aligned}$$

(II) $|x_1-x_3| \leq |y_1-y_3|$ ve $|x_3-x_2| \leq |y_3-y_2|$ ise

$$d_g(X,Y) \leq d_g(X,Z) + d_g(Z,Y)$$

olduğu benzer şekilde gösterilebilir.

(III) $|x_1 - x_3| \geq |y_1 - y_3|$ ve $|x_3 - x_2| \leq |y_3 - y_2|$ iken iki tane mümkün durum vardır.

i) $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \geq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$ olsun. Bu durumda,

$$d_g(X,Y) \leq k = a(|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|) + b(|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|)$$

olup, $|x_1 - x_3| \geq |y_1 - y_3|$ ve $|x_3 - x_2| \leq |y_3 - y_2|$ kullanılarak

$$\begin{aligned} d_g(X,Z) &= a|x_1 - x_3| + b|y_1 - y_3| \\ d_g(Z,Y) &= a|y_3 - y_2| + b|x_3 - x_2| \end{aligned}$$

$d_g(X,Y) \leq d_g(X,Z) + d_g(Y,Z) \iff$

$$\begin{aligned} d_g(X,Y) &\leq k = a(|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|) + b(|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) \\ k &\leq a(|x_1 - x_3| + |y_3 - y_2|) + b(|y_1 - y_3| + |x_3 - x_2|) \\ &\iff a(|x_3 - x_2| - |y_3 - y_2|) + b(|y_3 - y_2| - |x_3 - x_2|) \leq 0 \\ &\iff (a-b)(|x_3 - x_2| - |y_3 - y_2|) \leq 0 \\ &\iff |x_3 - x_2| \leq |y_3 - y_2| \end{aligned}$$

ki bu , bu durum için başta aldığımız şartı gösterir.

ii) $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$ olsun. Bu durumda,

$$d_g(X,Y) \leq k = a(|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|) + b(|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|)$$

olup, $|x_1 - x_3| \geq |y_1 - y_3|$ ve $|x_3 - x_2| \leq |y_3 - y_2|$ kullanılarak

$$\begin{aligned} d_g(X,Z) &= a|x_1 - x_3| + b|y_1 - y_3| \\ d_g(Z,Y) &= a|y_3 - y_2| + b|x_3 - x_2| \end{aligned}$$

$d_g(X,Y) \leq d_g(X,Z) + d_g(Y,Z) \iff$

$$\begin{aligned} d_g(X,Y) &\leq k = a|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) + b(|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|) \\ k &\leq a(|x_1 - x_3| + |y_3 - y_2|) + b(|y_1 - y_3| + |x_3 - x_2|) \\ &\iff a(|y_1 - y_3| - |x_1 - x_3|) + b(|x_1 - x_3| - |y_1 - y_3|) \leq 0 \\ &\iff (a-b)(|y_1 - y_3| - |x_1 - x_3|) \leq 0 \\ &\iff |y_1 - y_3| \leq |x_1 - x_3| \end{aligned}$$

Bu da genel olarak kabul ettiğimiz şartı gösterir.

(IV) $|x_1 - x_3| \leq |y_1 - y_3|$ ve $|x_3 - x_2| \geq |y_3 - y_2|$ ise iki tane mümkün durum vardır.

i) $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \geq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$

ii) $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$ $\square$

1.6 Düzlem $\alpha-$Geometrisi

S. Tian $\alpha-$uzaklığı adını verdiği Taksi ve Çin Dama uzaklıklarını ikisinin de bir genelleştirilmişi olan bir metrik ailesi geliştirdi (Tian, 2005). Daha sonra Ö. Gelişgen ve R.Kaya, bu uzaklık fonksiyonunu üç boyutlu ve n-boyutlu uzaya genelleştirdiler. (Gelişgen, 2007), (Gelişgen ve Kaya,2006a), (Gelişgen ve Kaya,2006b).

Tanım 1.6.1 $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ analitik düzlemde herhangi iki nokta olsun.

$$\Delta_{P_1P_2} = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \quad \text{ve} \quad \delta_{P_1P_2} = \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

$\alpha \in [0, \pi/4]$ olmak üzere

$$d_\alpha : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$$
$$d_\alpha(P_1, P_2) = \Delta_{P_1P_2} + (\sec\alpha - \tan\alpha)\,\delta_{P_1P_2}$$

olarak tanımlanan fonksiyona analitik düzlemde P_1 ve P_2 noktaları arasındaki *α-uzaklık fonksiyonu* denir.

Önerme 1.6.2 Analitik düzlemde, α-uzaklık fonksiyonu metrik belirtir.

İspat: $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olsun. Mutlak değer tanımından dolayı $|x_1 - x_2| \geq 0$, $|y_1 - y_2| \geq 0$ ve $\alpha \in [0, \pi/4]$ için $\sec\alpha - \tan\alpha \geq 0$ olduğundan $d_\alpha(P_1, P_2) \geq 0$ dır. Ayrıca

$$d_\alpha(P_1, P_2) = 0 \Rightarrow \Delta_{P_1P_2} = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} = 0$$

olması gerektiğinden dolayı $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2| = 0$ elde edilir. Yani $x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ olup $P_1 = P_2$ dir. Açıkca $P_1 = P_2$ ise $d_\alpha(P_1, P_2) = 0$ dır. Bu taktirde $d_\alpha(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$ dir. Yani d_α-uzaklık fonksiyonu pozitif tanımlıdır.

Mutlak değer tanımı gereğince $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$ ve $|y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$ olduğundan $d_\alpha(P_1, P_2) = d_\alpha(P_2, P_1)$ dir. Bu nedenle d_α-uzaklık fonksiyonu simetriktir.

$P_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d_\alpha(P_1,P_2) &= \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\} + (\sec\alpha - \tan\alpha)\min\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\} \\ &= \max\{|x_1-x_3+x_3-x_2|, |y_1-y_3+y_3-y_2|\} + \\ &\quad (\sec\alpha - \tan\alpha)\min\{|x_1-x_3+x_3-x_2|, |y_1-y_3+y_3-y_2|\} \\ &\leq \max\{|x_1-x_3|+|x_3-x_2|, |y_1-y_3|+|y_3-y_2|\} + \\ &\quad (\sec\alpha - \tan\alpha)\min\{|x_1-x_3|+|x_3-x_2|, |y_1-y_3|+|y_3-y_2|\} \\ &= t \end{aligned}$$

olsun. Burada dört durum vardır.

I. Durum: $|x_1-x_3| \geq |y_1-y_3|$ ve $|x_3-x_2| \geq |y_3-y_2|$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} d_\alpha(P_1,P_2) &\leq t = (|x_1-x_3|+|x_3-x_2|) + (\sec\alpha-\tan\alpha)(|y_1-y_3|+|y_3-y_2|) \\ &= (|x_1-x_3|+(\sec\alpha-\tan\alpha)|y_1-y_3|) + (|x_3-x_2|+(\sec\alpha-\tan\alpha)|y_3-y_2|) \\ &= d_\alpha(P_1,P_3) + d_\alpha(P_3,P_2) \end{aligned}$$

olur.

II. Durum: $|x_1-x_3| \geq |y_1-y_3|$ ve $|x_3-x_2| \leq |y_3-y_2|$ olsun. Burada iki altdurum söz konusudur.

Alt Durum II.1: $|x_1-x_3|+|x_3-x_2| \geq |y_1-y_3|+|y_3-y_2|$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} d_\alpha(P_1,P_2) &\leq t = (|x_1-x_3|+|x_3-x_2|) + (\sec\alpha-\tan\alpha)(|y_1-y_3|+|y_3-y_2|) \\ &= (|x_1-x_3|+(\sec\alpha-\tan\alpha)|y_1-y_3|) + (|x_3-x_2|+(\sec\alpha-\tan\alpha)|y_3-y_2|) \\ &= d_\alpha(P_1,P_3) + d_\alpha(P_3,P_2) - (1-(\sec\alpha-\tan\alpha))(|y_3-y_2|-|x_3-x_2|) \end{aligned}$$

olup burada $1-(\sec\alpha-\tan\alpha) \geq 0$ ve $|y_3-y_2|-|x_3-x_2| \geq 0$ olduğundan dolayı

$$d_\alpha(P_1,P_2) \leq d_\alpha(P_1,P_3) + d_\alpha(P_3,P_2)$$

olur.

Alt Durum II.2: $|x_1-x_3|+|x_3-x_2| \leq |y_1-y_3|+|y_3-y_2|$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} d_\alpha(P_1,P_2) &\leq t = (|y_1-y_3|+|y_3-y_2|) + (\sec\alpha-\tan\alpha)(|x_1-x_3|+|x_3-x_2|) \\ &= (|y_1-y_3|+(\sec\alpha-\tan\alpha)|x_1-x_3|) + (|y_3-y_2|+(\sec\alpha-\tan\alpha)|x_3-x_2|) \\ &= d_\alpha(P_1,P_3) + d_\alpha(P_3,P_2) - (1-(\sec\alpha-\tan\alpha))(|x_1-x_3|-|y_1-y_3|) \end{aligned}$$

olup burada $1-(\sec\alpha-\tan\alpha) \geq 0$ ve $|x_1-x_3|-|y_1-y_3| \geq 0$ olduğundan dolayı

$$d_\alpha(P_1,P_2) \leq d_\alpha(P_1,P_3) + d_\alpha(P_3,P_2)$$

dir.

III. Durum: $|x_1 - x_3| \leq |y_1 - y_3|$ ve $|x_3 - x_2| \geq |y_3 - y_2|$ olsun. Burada II. duruma benzer olarak iki altdurum söz konusudur.

Altdurum III.1: $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \geq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} d_\alpha(P_1, P_2) &\leq t = (|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|) + (\sec\alpha - \tan\alpha)(|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) \\ &= (|x_1 - x_3| + (\sec\alpha - \tan\alpha)|y_1 - y_3|) + (|x_3 - x_2| + (\sec\alpha - \tan\alpha)|y_3 - y_2|) \\ &= d_\alpha(P_1, P_3) + d_\alpha(P_3, P_2) - (1 - (\sec\alpha - \tan\alpha))(|y_1 - y_3| - |x_1 - x_3|) \end{aligned}$$

olup burada $1 - (\sec\alpha - \tan\alpha) \geq 0$ ve $|y_1 - y_3| - |x_1 - x_3| \geq 0$ olduğundan dolayı

$$d_\alpha(P_1, P_2) \leq d_\alpha(P_1, P_3) + d_\alpha(P_3, P_2)$$

olur.

Alt Durum III.2: $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} d_\alpha(P_1, P_2) &\leq t = (|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) + (\sec\alpha - \tan\alpha)(|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|) \\ &= (|y_1 - y_3| + (\sec\alpha - \tan\alpha)|x_1 - x_3|) + (|y_3 - y_2| + (\sec\alpha - \tan\alpha)|x_3 - x_2|) \\ &= d_\alpha(P_1, P_3) + d_\alpha(P_3, P_2) - (1 - (\sec\alpha - \tan\alpha))(|x_3 - x_2| - |y_3 - y_2|) \end{aligned}$$

olup burada $1 - (\sec\alpha - \tan\alpha) \geq 0$ ve $|x_3 - x_2| - |y_3 - y_2| \geq 0$ olduğundan dolayı

$$d_\alpha(P_1, P_2) \leq d_\alpha(P_1, P_3) + d_\alpha(P_3, P_2)$$

dir.

IV. Durum: $|x_1 - x_3| \leq |y_1 - y_3|$ ve $|x_3 - x_2| \leq |y_3 - y_2|$ olsun.

Bu taktirde

$$\begin{aligned} d_\alpha(P_1, P_2) &\leq t = (|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) + (\sec\alpha - \tan\alpha)(|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|) \\ &= (|y_1 - y_3| + (\sec\alpha - \tan\alpha)|x_1 - x_3|) + (|y_3 - y_2| + (\sec\alpha - \tan\alpha)|x_3 - x_2|) \\ &= d_\alpha(P_1, P_3) + d_\alpha(P_3, P_2) \end{aligned}$$

olur. Tüm durumların sonuçları birleştirildiğinde her $P_1,\ P_2,\ P_3 \in \mathbb{R}^2$ için

$$d_\alpha(P_1, P_2) \leq d_\alpha(P_1, P_3) + d_\alpha(P_3, P_2)$$

sonucu elde edilir. Yani α-uzaklık fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar $\square$

Buna göre α-uzaklık fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ de bir metriktir.

Geometrik olarak, P_1 ile P_2 noktaları arasındaki en kısa yol biri koordinat eksenlerinden birine paralel diğeri diğer koordinat ekseni ile α açısı yapan iki doğru parçasının birleşimidir. Böylece P_1 ile P_2 arasındaki en kısa uzaklık ifade edilen şekildeki iki doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamıdır. P_1 ile P_2 noktalarının minimum uzaklık kümesi bir kenar çifti koordinat eksenlerinden birine paralel, diğer kenar çifti ise diğer koordinat ekseni ile α açısı yapan paralelkenardır.

BÖLÜM 2

TAKSİ TRİGONOMETRİ

Bu bölümde taksi düzleminde Öklidyen düzlemdekine benzer olarak trigonometrik fonksiyonları tanımlayacağız. Düzlemde birim çember üzerinde (x, y) noktası için trigonometrik fonksiyonlar $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ olarak tanımlanır. Birim çember üzerindeki (x, y) noktası ile θ parametresini eşleştirmenin iki yolu vardır. Ya $(\cos\theta, \sin\theta)$ noktası $x-$ekseni ile pozitif yönde θ açısı yapan orijinden geçen doğrunun birim çemberi kestiği noktadır ya da saat yönünün tersi yönde θ birim yay uzunluğuna karşılık gelen noktadır.

Taksi düzleminde θ yı yay uzunluğu olarak alan taksi trigonometrik fonksiyonlar (Akça ve Kaya, 1997) de incelenmiştir. Burada θ parametresini açı alarak, taksi trigonometrik fonksiyonlarını (Brisbin and Artola, 1984) ve (Özcan, Ekmekçi.ve Bayar,.2002), de yapılanlara benzer olarak inceleyeceğiz.

2.1 Taksi Trigonometrik Fonksiyonlar

Taksi birim çemberi; $\mathbb{R}^2$ de orijinden 1 taksi birim uzaklıktaki $A(x, y)$ noktalarının geometrik yeridir ve denklemi,

$$d_T((0,0),(x,y)) = 1$$

den

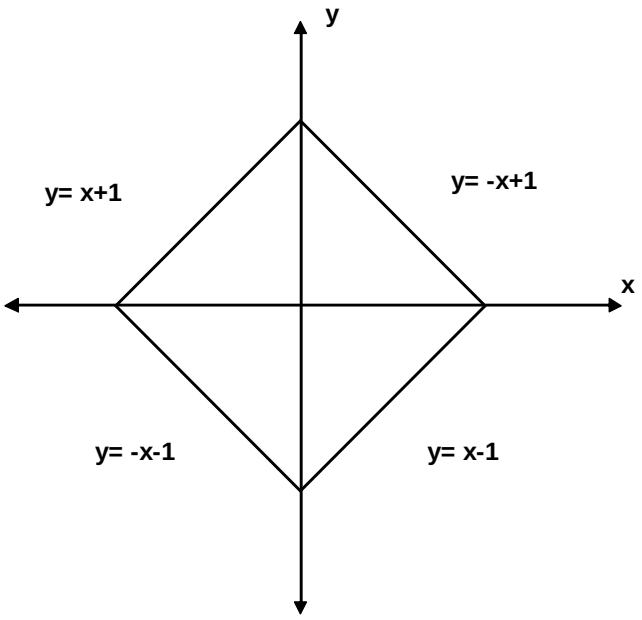
$$|x| + |y| = 1$$

biçimindedir.

Bu denklem mutlak değerlerin durumuna göre incelenirse birim çember bölgelere göre aşağıdaki dallara ayrılır:

Bölgeler	*Denklemi*
I	$y = -x + 1$
II	$y = x + 1$
III	$y = -x - 1$
VI	$y = x - 1$

Taksi birim çemberinin Şekil 2.1.1 de verilmiştir.



Şekil 2.1.1 Taksi Birim Çember

Şimdi Öklidyen düzlemde sinüs ve kosinüs fonksiyonlarını birim çember üzerindeki (x,y) noktasına bağlı tanımladığımız gibi taksi düzlemde *taksi sinüs* ve *taksi kosinüs* fonksiyonlarını taksi birim çemberi üzerindeki (x,y) noktasına bağlı tanımlayabiliriz. *Taksi kosinüs fonksiyonunu* $\cos_T$ ve *taksi sinüs fonksiyonunu* $\sin_T$ biçiminde gösteriyoruz. Buna göre taksi birim çemberi üzerinde $(\cos_T \theta, \sin_T \theta)$ noktası orijinden geçen x-ekseni ile pozitif yönde θ açısı yapan doğrunun birim çemberi kestiği noktadır. Bu doğrunun eğimi alınan metriğe göre değişmediğinden taksi düzleminde *taksi tanjant fonksiyonu* Öklidyen düzlemdekinin aynısıdır. Yani taksi tanjant fonksiyonunu $\tan_T$ ile gösterirsek ,

$$\tan_T \theta = \tan \theta$$

dir.

Böylece taksi kosinüs ve taksi sinüs fonksiyonları bildiğimiz tanjant fonksiyonu cinsinden elde edilebilir.

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ y = (\tan \theta)x \end{cases}$$

sistemi çözülürse

$$|x| + |\tan\theta|\,|x| = 1,$$

$$|x| = \frac{1}{1+|\tan\theta|} = \frac{|\cos\theta|}{|\sin\theta|+|\cos\theta|} = |\cos_T\theta|$$

elde edilir.

θ nın bulunduğu bölgelere göre mutlak değerleri inceleyelim:

I. Bölge: $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ iken,

$$\begin{cases} y = -x+1 \\ y = (\tan\theta)x \end{cases}$$

sistemi çözüldüğünde

$$(\tan\theta)x = -x+1$$
$$x(\tan\theta+1) = 1$$
$$x = \frac{1}{\tan\theta+1}$$

$$\begin{cases} x = \cos_T\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta} \\ y = \sin_T\theta = \dfrac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta} \end{cases}$$

elde edilir.

II.Bölge: $\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$ iken,

$$\begin{cases} y = x+1 \\ y = (\tan\theta)x \end{cases}$$

sistemi çözüldüğünde

$$(\tan\theta)x = -x-1$$
$$x(\tan\theta+1) = -1$$
$$x = \frac{-1}{\tan\theta+1}$$

$$\begin{cases} x = \cos_T\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta} \\ y = \sin_T\theta = \dfrac{\sin\theta}{\sin\theta-\cos\theta} \end{cases}$$

elde edilir.

III.Bölge: $\pi \leq \theta \leq \dfrac{3\pi}{2}$ iken,

$$\begin{cases} y = -x - 1 \\ y = (\tan\theta)x \end{cases}$$

sistemi çözüldüğünde

$$(\tan\theta)x = -x - 1$$
$$x(\tan\theta + 1) = -1$$
$$x = \frac{-1}{\tan\theta + 1}$$

$$\begin{cases} x = \cos_T\theta = \dfrac{-\cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta} \\ y = \sin_T\theta = \dfrac{-\sin\theta}{\sin\theta + \cos\theta} \end{cases}$$

elde edilir.

IV.Bölge: $\dfrac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$ iken,

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = (\tan\theta)x \end{cases}$$

sistemi çözüldüğünde

$$(\tan\theta)x = x - 1$$
$$x(\tan\theta - 1) = -1$$
$$x = \frac{-1}{\tan\theta - 1}$$

$$\begin{cases} x = \cos_T\theta = \dfrac{\cos\theta}{-\sin\theta + \cos\theta} \\ y = \sin_T\theta = \dfrac{\sin\theta}{-\sin\theta + \cos\theta} \end{cases}$$

elde edilir.

Sonuç olarak bölgelere göre $\cos_T$ ve $\sin_T$ taksi trigonometrik fonksiyonları

$$\cos_T\theta = \begin{cases} \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta}, 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta - \cos\theta}, \dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \\ \dfrac{-\cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta}, \pi \leq \theta \leq \dfrac{3\pi}{2} \\ \dfrac{\cos\theta}{-\sin\theta + \cos\theta}, \dfrac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \tag{2.1.1}$$

ve

$$\sin_T \theta = \begin{cases} \dfrac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}, 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\sin\theta}{\sin\theta-\cos\theta}, \dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \\ \dfrac{-\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}, \pi \leq \theta \leq \dfrac{3\pi}{2} \\ \dfrac{\sin\theta}{-\sin\theta+\cos\theta}, \dfrac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \tag{2.1.2}$$

biçiminde olur.

Daha kısa yazmak istersek,

$$\cos_T \theta = \frac{\cos\theta}{|\sin\theta|+|\cos\theta|}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

ve

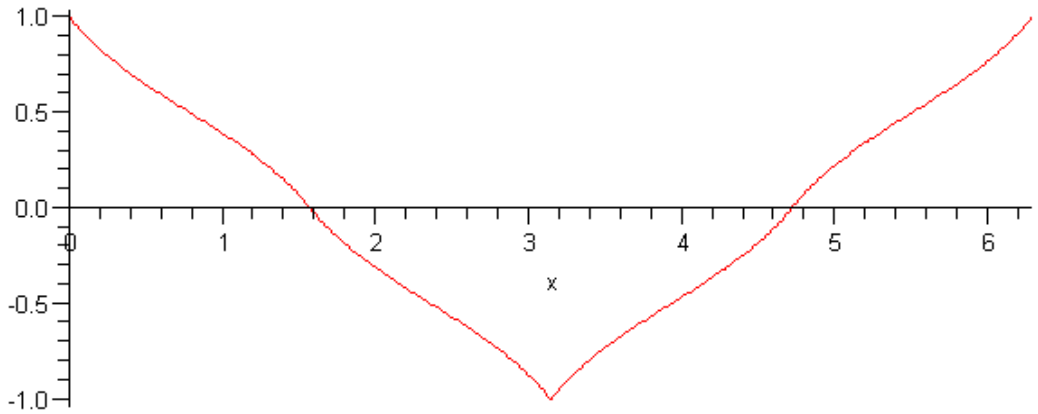
$$\sin_T \theta = \frac{\sin\theta}{|\sin\theta|+|\cos\theta|}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

şeklinde verebiliriz.

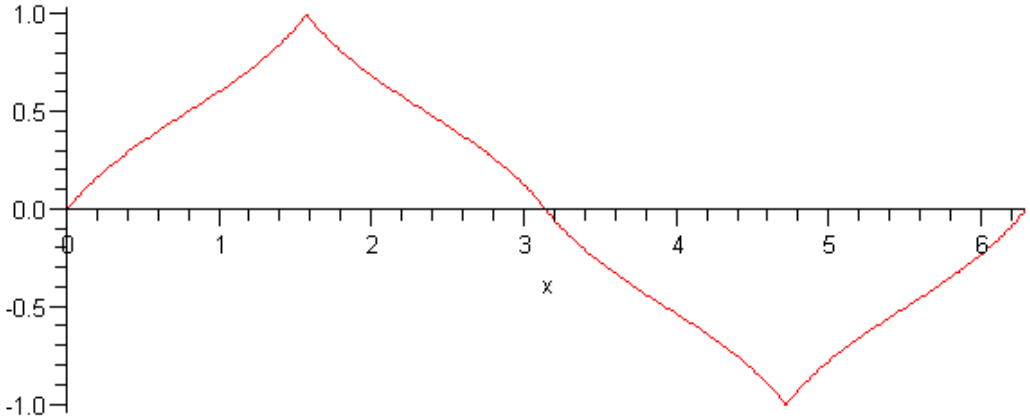
Taksi sekant ve *kosekant* fonksiyonları Öklidyen düzlemdekine benzer olarak

$$\sec_T \theta = \frac{1}{\cos_T \theta} \text{ ve } \operatorname{cosec}_T\theta = \frac{1}{\sin_T \theta}$$

biçiminde tanımlayabiliriz. Aşağıdaki şekillerde taksi sinüs ve taksi kosinüs fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.



Şekil 2.1.2 Taksi Kosinüs Fonksiyonu



Şekil 2.1.3 Taksi Sinüs Fonksiyonu

2.2 Taksi Trigonometrik Fonksiyonların Özellikleri

Trigonometrik fonksiyonlar açı ölçüsüne bağlı olarak tanımlamanın bir sonucu olarak tümler açıdaki özellikler taksi düzlem trigonometride de geçerlidir. Yani,

$$\cos_T(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin_T\theta \text{ ve } \sin_T(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos_T\theta$$

dir. Ayrıca

$$\tan(-x)=-\tan x$$

özelliğinden ve 2.1 1ve 2.1 2den yararlanılarak

$$\cos_T(-x)=\cos_T x \text{ ve } \sin_T(-x)=-\sin_T x$$

kolaylıkla elde edilebilir.

I.Durum:

$-\theta$ yı III. bölge açısı olarak alırsak bu taktirde θ II. bölge açısıdır.

$$\begin{aligned}\cos_T(-\theta) &= \frac{-\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)+\cos(-\theta)} = \frac{-\cos\theta}{-\sin\theta+\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta} = \cos_T\theta\\ \sin_T(-\theta) &= \frac{-\sin(-\theta)}{\sin(-\theta)+\cos(-\theta)} = \frac{\sin\theta}{-\sin\theta+\cos\theta} = \frac{-\sin\theta}{\sin\theta-\cos\theta} = -\sin_T\theta\end{aligned}$$

Benzer şekilde,

II.Durum:

$-\theta$'yı VI. bölge açısı olarak alırsak bu taktirde θ I. bölge açısıdır.

$$\begin{aligned}\cos_T(-\theta) &= \frac{\cos(-\theta)}{-\sin(-\theta)+\cos(-\theta)} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta} = \cos_T\theta\\ \sin_T(-\theta) &= \frac{\sin(-\theta)}{-\sin(-\theta)+\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{+\sin\theta+\cos\theta} = -\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta} = -\sin_T\theta\end{aligned}$$

Böylece her bölge için $\cos_T(-x)=\cos_T x$ ve $\sin_T(-x)=-\sin_T x$ dir.

Öklidyen geometride iyi bilinen Pisagor özdeşliği, taksi düzleminde $(\cos_T x, \sin_T x)$ birim çember üzerinde bir nokta olduğundan

$$|\cos_T x|+|\sin_T x|=1 \tag{2.2.1}$$

biçimine dönüşür. Bu da taksi düzlemde *pisagor özdeşliğidir.*

Pisagor özdeşliğinin her iki tarafını $|\cos_T x|$ e bölersek

$$1+|\tan_T x|=|\sec_T x| \tag{2.2.2}$$

taksi sekant özdeşliğini elde ederiz.

Pisagor özdeşliğinin her iki tarafını $|\sin_T x|$ e bölersek

$$1 + |\text{cosect}_T \text{x}| = |\text{cosect}_T \text{x}| \tag{2.2.3}$$

taksi kosekant özdeşliğini elde ederiz.

2.2.1 Taksi trigonometrik fonksiyonlar için indirgeme formülleri

Öklidyen düzlem trigonometride her θ açısının trigonometrik fonksiyonları I. Bölgede karşılık gelen açının trigonometrik fonksiyonları ile ifade edilebiliyordu. Taksi düzleminde de birim çemberde i.bölgedeki θ_i açısına karşılık I. ve II. bölgede ilişkili olan açı θ_i' ile gösterilirse θ_i ve θ_i' arasındaki ilişki

Bölge	θ_i	θ_i'
I	θ_1	$\theta_1' = \theta_1$
II	θ_2	$\theta_2' = \pi - \theta_2$
III	θ_3	$\theta_3' = \theta_3 + \pi$
IV	θ_4	$\theta_4' = 2\pi - \theta_4$

biçiminde verilir.

$$\begin{aligned}
\cos_T \theta_2 &= \frac{\cos(\pi - \theta_2')}{\sin(\pi - \theta_2') - \cos(\pi - \theta_2')} = \frac{-\cos\theta_2'}{\sin\theta_2' + \cos\theta_2'} = -\cos_T \theta_2' \\
\sin_T \theta_2 &= \frac{\sin(\pi - \theta_2')}{\sin(\pi - \theta_2') - \cos(\pi - \theta_2')} = \frac{\sin\theta_2'}{\sin\theta_2' + \cos\theta_2'} = \sin_T \theta_2' \\
\cos_T \theta_3 &= \frac{-\cos(\theta_3' + \pi)}{\sin(\theta_3' + \pi) + \cos(\theta_3' + \pi)} = \frac{-\cos\theta_3'}{\sin\theta_3' + \cos\theta_3'} = -\cos_T \theta_3' \\
\sin_T \theta_3 &= \frac{-\sin(\theta_3' + \pi)}{\sin(\theta_3' + \pi) + \cos(\theta_3' + \pi)} = \frac{-\sin\theta_3'}{\sin\theta_3' + \cos\theta_3'} = \sin_T \theta_3' \\
\cos_T \theta_4 &= \frac{-\cos(2\pi - \theta_4)}{\sin(2\pi - \theta_4) - \cos(2\pi - \theta_4)} = \frac{\cos\theta_4'}{\sin\theta_4' + \cos\theta_4'} = \cos_T \theta_4' \\
\sin_T \theta_4 &= \frac{-\sin(2\pi - \theta_4)}{\sin(2\pi - \theta_4) - \cos(2\pi - \theta_4)} = \frac{-\sin\theta_4'}{\sin\theta_4' + \cos\theta_4'} = -\sin_T \theta_4'
\end{aligned}$$

Artık $\sin_T \theta_i$ ve $\cos_T \theta_i$ nin değerlerini hesaplamak için I. ve II. bölgedeki $\sin_T \theta_i'$ ve $\cos_T \theta_i'$ değerlerini bilmemiz yeterli olacaktır.

2.2.2 Taksi trigonometrik fonksiyonlar için toplam-fark formülleri

Taksi trigonometrik fonksiyonları için toplam fark formülleri yine tanjant fonksiyonundan yararlanarak elde edilebilir. Tanjant fonksiyonunun toplam fark formülü

$$\begin{aligned}\tan(u \pm v) &= \frac{\tan u \pm \tan v}{1 \mp \tan u . \tan v} \\ &= \tan_T(u \pm v)\end{aligned}$$

den

$$\tan(u \pm v) = \frac{\sin_T(u \pm v)}{\cos_T(u \pm v)} = \frac{\dfrac{\sin_T u}{\cos_T u} \pm \dfrac{\sin_T v}{\cos_T v}}{1 \mp \dfrac{\sin_T u}{\cos_T u}\dfrac{\sin_T v}{\cos_T v}}$$

ve

$$\frac{\sin_T(u \pm v)}{\cos_T(u \pm v)} = \frac{\sin_T u . \cos_T v \pm \sin_T v . \cos_T u}{\cos_T u . \cos_T v \mp \sin_T u . \sin_T v}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafında pay ve paydalar eşitlenirse

$$\sin_T(u \pm v) = \sin_T u . \cos_T v \pm \sin_T v . \cos_T u \tag{2.2.4}$$

ve

$$\cos_T(u \pm v) = \cos_T u . \cos_T v \mp \sin_T u . \sin_T v \tag{2.2.5}$$

elde edilir. Bu da Öklidyen sinüs ve Öklidyen kosinüs fonksiyonlarındaki toplam fark formüllerinin sağladığı özelliğin aynısıdır.

2.2.3 Taksi trigonometrik fonksiyonlar için yarım açı formülleri

Taksi trigonometrik fonksiyonlar için yarım açı formülleri, taksi kosinüs ve taksi sinüs fonksiyonlarının toplam-fark formüllerinde $u = v$ alınarak elde edilir,

Buna göre

$$\sin_T(u + u) = \sin_T u . \cos_T u + \sin_T u . \cos_T u$$

den

$$\sin_T 2u = 2 \sin_T u . \cos_T u \tag{2.2.6}$$

ve

$$\cos_T(u+u) = \cos_T u.\cos_T u - \sin_T u.\sin_T u$$

den

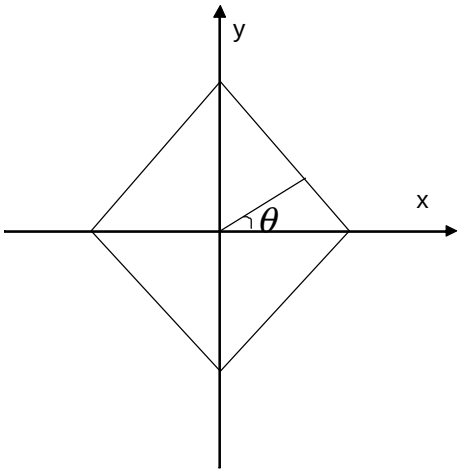
$$\cos_T 2u = \cos_T^2 u - \sin_T^2 u \tag{2.2.7}$$

yarım açı formülleri elde edilir.

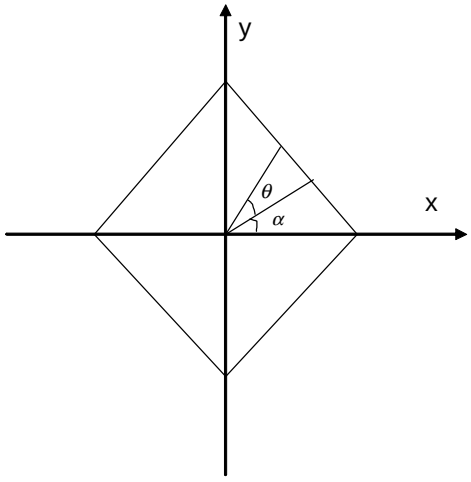
2.3 Referans Açılı Taksi Trigonometrik Fonksiyonlar

Öklidyen düzlemde açı ölçüsü ve yay uzunluğu eşittir ve düzlemin bütün dönmeler altında açılar korunurlar. Ancak taksi düzlemde açıya sabit bir artım verdiğimizde yay uzunluğunda aynı oranda değişim olmaz. Şimdiye kadar tanımladığımız trigonometrik fonksiyonlarda θ yı ox-ekseni ile pozitif yönde yapılan açı olarak aldık. Yani açının bir kolu ox-ekseninin pozitif yönü idi. Bu durumdaki açıları *standart pozisyondaki* açı olarak düşünebiliriz. Böylece standart pozisyonda olmayan açılar içinde trigonometrik fonksiyonları tanımlamamız gerekir. O yüzden taksi düzlemde açı kavramını referans açılı açı tanımı ile genişletebiliriz.

$\alpha = 0$ ise θ standart pozisyondaki açıdır. Bu durum Şekil 2.3.1 ve Şekil 2.3.2 de verilmiştir.



Şekil 2.3.1 Standart pozisyonda θ



Şekil 2.3.2 Referans açılı θ

Standart pozisyondaki açılar için verdiğimiz taksi kosinüs ve taksi sinüs fonksiyonlarının fark formüllerini kullanarak standart pozisyonda olmayan θ açısı için referans

açılı taksi sinüs ve taksi kosinüs fonksiyonlarını oluşturabiliriz. *Referans açılı taksi sinüs fonksiyonunu* tsin ve *referans açılı taksi kosinüs fonksiyonunu,* tcos ile gösterelim. Buna göre α referans açılı θ açısı için

$$\text{tcos}\theta = \cos_T(\alpha+\theta-\alpha) = \cos_T(\alpha+\theta)\cos_T\alpha + \sin_T(\alpha+\theta)\sin_T\alpha \tag{2.3.1}$$

ve

$$\text{tsin}\theta = \sin_T(\alpha+\theta-\alpha) = \sin_T(\alpha+\theta)\cos_T\alpha - \sin_T\alpha\cos_T(\alpha+\theta) \tag{2.3.2}$$

olur. Burada $\alpha+\theta$ ve α standart pozisyondaki açılardır. Dikkat edilirse tcosθ ve tsinθ eşitliklerinde $\alpha = 0$ alınırsa

$$\text{tcos}\theta = \cos_T\theta$$
$$\text{tsin}\theta = \sin_T\theta$$

dir.

2.4 Taksi Uzunluğunun Dönmeler Altındaki Değişimi

Öklidyen dönmelerden sonra bir doğru parçasının taksi uzunluğu değişimini aşağıdaki teoremle verilebilir (Özcan, Ekmekçi ve Bayar, 2002).

Teorem: O noktası orijin olmak üzere OA x-ekseni üzerinde olmayan ve x-ekseninin pozitif yönü ile α açısı yapan doğru parçası ve $d_T(O,A) = k$ olsun. Eğer OA', OA nın orijin etrafında θ açılı dönme altında görüntüsü ise

$$d_T(O,A') = k\sqrt{\frac{\cos_T^2\alpha + \sin_T^2\alpha}{(\cos_T^2(\alpha+\theta) + \sin_T^2(\alpha+\theta)}}$$

dir.

İspat: Bütün dönmeler altında Öklidyen uzunluklar korunduğundan OA′ ile OA nın Öklidyen uzunlukları eşittir.

$$d_E(O,A') = d_E(O,A) \tag{2.4.1}$$

A'nın koordinatları $\cos_T, \sin_T$ ve k ya bağlı olarak $A = (k\cos_T\alpha, k\sin_T\alpha)$ dır. $d_T(O,A') = k'$ dersek, A' nin koordinatları ,

$$A' = (k'\cos_T(\alpha+\theta), k'\sin_T(\alpha+\theta))$$

olur. Bunları 2.4.1 de kullanırsak

$$\sqrt{(k'\cos_T(\alpha+\theta))^2 + k'\sin_T(\alpha+\theta)^2} = \sqrt{(k\cos_T\alpha)^2 + (k\sin_T\alpha)^2}$$

$$k'\sqrt{(\cos_T^2(\alpha+\theta)+\sin_T^2(\alpha+\theta)} = k\sqrt{\left(\cos_T^2\alpha+\sin_T^2\alpha\right)}$$

$$k' = k\sqrt{\frac{\cos_T^2\alpha+\sin_T^2\alpha}{(\cos_T^2(\alpha+\theta)+\sin_T^2(\alpha+\theta)}}$$

elde edilir.

Sonuç 1: OA Doğru parçasının eğimi sıfır yani ox eksenine paralel ise

$$d_T(O,A') = \frac{k}{\sqrt{\cos_T^2\theta+\sin_T^2\theta}}$$

dir.

İspat: OA nın eğimi 0 olduğundan $\alpha = 0$ dır ve θ referans açısı konumunda olur. Teoremde $\alpha = 0$ alırsak

$$\begin{aligned} d_T(O,A') = \quad & k\sqrt{\frac{\cos_T^2 0+\sin_T^2 0}{(\cos_T^2(0+\theta)+\sin_T^2(0+\theta)}} \\ & = k\sqrt{\frac{1+0}{\cos_T^2\theta+\sin_T^2\theta}} \\ & = \frac{k}{\sqrt{\cos_T^2\theta+\sin_T^2\theta}} \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 2: Düzlemin ötelemeleri altında taksi uzunluklar korunduğundan teorem herhangi bir doğru parçası içinde geçerlidir.

BÖLÜM 3
CC-DÜZLEMİNDE TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

Bu bölümde CC- düzleminde trigonometrik fonksiyonlar (Bayar ve Ekmekçi, 2006) esas alınarak incelenmiştir. CC-geometride farklı konular pekçok yazar tarafından çalışmaktadır. Bunlardan bazıları (Akça vd., 2007), (Yüksel, 2005),(Gelişgen vd., 2006), (Bayar ve Ekmekçi, 2006), (Tian, 2005), (Turan, 2004), (Turan ve Özcan, 2004,), (Turan.ve Özcan, 2005), (Uymaz, 2002) kaynaklarıdır.

3.1 CC-Trigonometrik Fonksiyonları

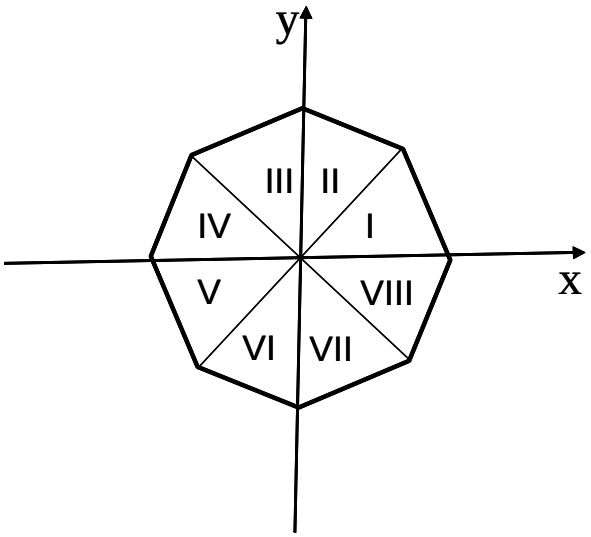
CC-trigonometrik fonksiyonları CC-birim çemberi üzerinde tanımlanır. $\mathbb{R}^2$ de CC-birim çemberi orijine 1 birim d_c uzaklıktaki noktaların geometrik yeridir. Eğer $A(x, y)$,CC-birim çemberi üzerinde bir nokta ise

$$d_c(O, A) = 1$$

den birim çemberin denklemi

$$\max\{|x|, |y|\} + (\sqrt{2} - 1)\min\{|x|, |y|\} = 1$$

biçimindedir. Birim çember denklemi bölgelere göre 8 dala sahiptir:



Şekil 3.1.1CC-Birim Çemberi

Bölge	Denklemi
I	$y = -(\sqrt{2}+1)x + (\sqrt{2}+1)$
II	$y = -(\sqrt{2}-1)x + 1$
III	$y = (\sqrt{2}-1)x + 1$
IV	$y = (\sqrt{2}+1)x + (\sqrt{2}+1)$
V	$y = -(\sqrt{2}+1)x - (\sqrt{2}+1)$
VI	$y = -(\sqrt{2}-1)x - 1$
VII	$y = (\sqrt{2}-1)x - 1$
VIII	$y = (\sqrt{2}+1)x - (\sqrt{2}+1)$

CC-trigonometrik fonksiyonların yay parametresine bağlı ifadeleri S. Yüksel tarafından (Yüksel, 2005) de incelenmiştir. Biz burada parametreyi açı alarak trigonometrik fonksiyonları (Bayar ve Ekmekçi, 2006) e göre vereceğiz.

CC-düzlemin çemberi üzerinde $(\cos_c\theta, \sin_c\theta)$ noktası orijinden geçen ox-ekseni ile pozitif yönde θ açısı yapan doğrunun CC-birim çemberini kestiği noktalardır. Bu doğrunun eğimi metriğe bağlı olmadığından *CC-tanjant fonksiyonu* $\tan_c$, Öklidyen düzlemdeki tanjant fonksiyonuna eşittir.

$$\tan_c\theta = \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

Böylece CC-kosinüs ve CC-sinüs fonksiyonlarını aşina olduğumuz tanjant fonksiyonu cinsinden elde edebiliriz.

Birim çember denklemi ile orijinden geçip x-ekseninin pozitif yönü ile θ açısı yapan doğru denkleminin oluşturduğu sistem,

$$\begin{cases} \max\{|x|,|y|\} + (\sqrt{2}-1)\min\{|x|,|y|\} = 1 \\ y = (\tan\theta)x \end{cases}$$

dir. Bu sistem θ nın 8 bölgedeki konumuna bağlı olarak çözülebilir.

I.Bölge: $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}$ iken,

$$\begin{cases} y = -(\sqrt{2}+1)x + (\sqrt{2}+1) \\ y = (\tan\theta)x \end{cases}$$

sistemi çözüldüğünde

$$\begin{aligned} (\tan)x &= -(\sqrt{2}+1)x + (\sqrt{2}+1) \\ (\tan\theta + (\sqrt{2}+1))x &= (\sqrt{2}+1) \\ x(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + (\sqrt{2}+1)) &= (\sqrt{2}+1) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = \cos_c\theta = \dfrac{\cos\theta}{(\sqrt{2}-1)\sin\theta + \cos\theta} \\ y = \sin_c\theta = \dfrac{\sin\theta}{(\sqrt{2}-1)\sin\theta + \cos\theta} \end{cases}$$

elde edilir.

II.Bölge: $\dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ iken,

$$\begin{cases} y = -(\sqrt{2}-1)x + 1 \\ y = (\tan\theta)x \end{cases}$$

sistemi çözüldüğünde

$$\begin{aligned} (\tan\theta)x &= -(\sqrt{2}-1)x + 1 \\ (\tan\theta + (\sqrt{2}-1))x &= 1 \\ x(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + (\sqrt{2}-1)) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = \cos_c\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta + (\sqrt{2}-1)\cos\theta} \\ y = \sin_c\theta = \dfrac{\sin\theta}{\sin\theta + (\sqrt{2}-1)\cos\theta} \end{cases}$$

elde edilir.

III.Bölge: $\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{3\pi}{4}$ iken

$$\begin{cases} y = (\sqrt{2}-1)x + 1 \\ y = (\tan\theta)x \end{cases}$$

sistemi çözüldüğünde

$$\begin{aligned}(\tan\theta)x &= (\sqrt{2}-1)x+1\\ x(\tan\theta-(\sqrt{2}-1)) &= 1\\ x(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-(\sqrt{2}-1)) &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{cases} x=\cos_c\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta-(\sqrt{2}-1)\cos\theta}\\ y=\sin_c\theta=\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta-(\sqrt{2}-1)\cos\theta}\end{cases}$$

elde edilir.

IV.Bölge: $\dfrac{3\pi}{4}\leq\theta\leq\pi$ iken,

$$\begin{aligned}y &= (\sqrt{2}+1)x+(\sqrt{2}+1)\\ y &= (\tan\theta)x\end{aligned}$$

sistemi çözüldüğünde

$$\begin{aligned}(\tan\theta-(\sqrt{2}+1))x &= (\sqrt{2}+1)\\ (\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-(\sqrt{2}+1))x &= (\sqrt{2}+1)\\ (\frac{\sin\theta-(\sqrt{2}+1)\cos\theta}{\cos\theta})x &= (\sqrt{2}+1)\end{aligned}$$

$$\begin{cases} x=\cos_c\theta=\dfrac{\cos\theta}{(\sqrt{2}-1)\sin\theta-\cos\theta}\\ y=\sin_c\theta=\dfrac{\sin\theta}{(\sqrt{2}-1)\sin\theta-\cos\theta}\end{cases}$$

elde edilir.

V.Bölge: $\pi\leq\theta\leq\dfrac{5\pi}{4}$ iken,

$$\begin{aligned}y &= -(\sqrt{2}+1)x-(\sqrt{2}+1)\\ y &= (\tan\theta)x\end{aligned}$$

sistemi çözüldüğünde

$$\begin{aligned}(\tan\theta + (\sqrt{2}+1))x &= -(\sqrt{2}+1)\\ (\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + (\sqrt{2}+1))x &= -(\sqrt{2}+1)\\ (\frac{\sin\theta + (\sqrt{2}+1)\cos\theta}{\cos\theta})x &= -(\sqrt{2}+1)\end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = \cos_c\theta = \dfrac{\cos\theta}{-(\sqrt{2}-1)\sin\theta - \cos\theta} \\ y = \sin_c\theta = \dfrac{\sin\theta}{-(\sqrt{2}+1)\sin\theta - \cos\theta} \end{cases}$$

elde edilir.

VI.Bölge: $\dfrac{5\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{3\pi}{2}$ iken,

$$\begin{aligned}y &= -(\sqrt{2}-1)x - 1\\ y &= (\tan\theta)x\end{aligned}$$

sistemi çözüldüğünde

$$\begin{aligned}(\tan\theta)x &= -(\sqrt{2}-1)x - 1\\ x(\tan\theta + (\sqrt{2}-1)) &= -1\\ x(\frac{\sin\theta + (\sqrt{2}-1)\cos\theta}{\cos\theta}) &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = \cos_c\theta = \dfrac{\cos\theta}{-\sin\theta - (\sqrt{2}-1)\cos\theta} \\ y = \sin_c\theta = \dfrac{\sin\theta}{-\sin\theta - (\sqrt{2}-1)\cos\theta} \end{cases}$$

elde edilir.

VII.Bölge: $\dfrac{3\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{7\pi}{4}$ iken,

$$\begin{aligned}y &= (\sqrt{2}-1)x - 1\\ y &= (\tan\theta)x\end{aligned}$$

sistemi çözüldüğünde

$$\begin{aligned}(\tan\theta)x &= (\sqrt{2}-1)x-1\\ x(\tan\theta-(\sqrt{2}-1)) &= -1\\ x(\frac{\sin\theta-(\sqrt{2}-1)\cos\theta}{\cos\theta}) &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{cases} x=\cos_c\theta=\dfrac{\cos\theta}{-\sin\theta+(\sqrt{2}-1)\cos\theta}\\ y=\sin_c\theta=\dfrac{\sin\theta}{-\sin\theta+(\sqrt{2}-1)\cos\theta}\end{cases}$$

elde edilir.

VIII.Bölge: $\dfrac{7\pi}{4}\leq\theta\leq 2\pi$ iken,

$$\begin{aligned}y &= (\sqrt{2}+1)x-(\sqrt{2}+1)\\ y &= (\tan\theta)x\end{aligned}$$

sistem çözüldüğünde

$$\begin{aligned}(\tan\theta)x &= (\sqrt{2}+1)x-(\sqrt{2}+1)\\ (\tan\theta-(\sqrt{2}+1))x &= -(\sqrt{2}+1)\\ (\frac{\sin\theta-(\sqrt{2}+1)\cos\theta}{\cos\theta})x &= -(\sqrt{2}+1)\end{aligned}$$

$$\begin{cases} x=\cos_c\theta=\dfrac{\cos\theta}{-(\sqrt{2}-1)\sin\theta+\cos\theta}\\ y=\sin_c\theta=\dfrac{\sin\theta}{-(\sqrt{2}-1)\sin\theta+\cos\theta}\end{cases}$$

elde edilir.

Bölgelere göre oluşan $\cos_c\theta$ ve $\sin_c\theta$ değerlerini aşağıdaki tabloda özetleyebiliriz.

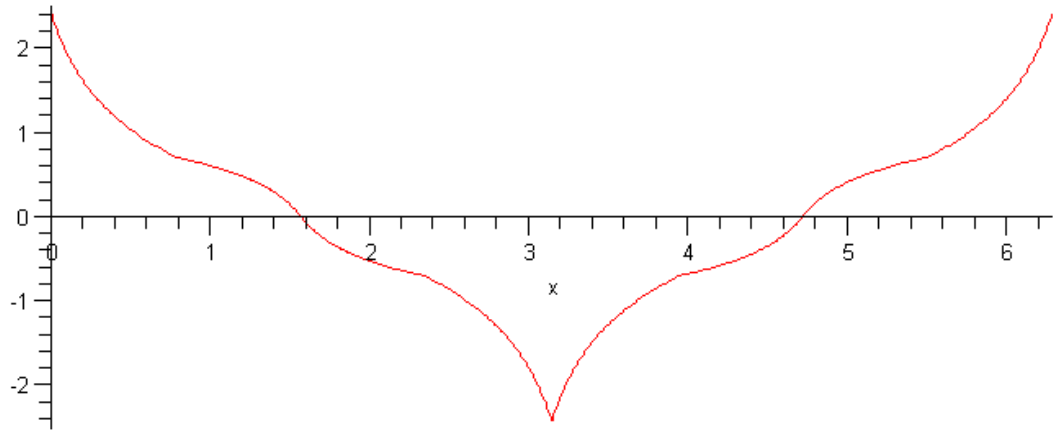
Bölge	$\cos_c\theta$	$\sin_c\theta$
I	$\frac{\cos\theta}{(\sqrt{2}-1)\sin\theta+\cos\theta}$	$\frac{\sin\theta}{(\sqrt{2}-1)\sin\theta+\cos\theta}$
II	$\frac{\cos\theta}{\sin\theta+(\sqrt{2}-1)\cos\theta}$	$\frac{\sin\theta}{\sin\theta+(\sqrt{2}-1)\cos\theta}$
III	$\frac{\cos\theta}{\sin\theta-(\sqrt{2}-1)\cos\theta}$	$\frac{\sin\theta}{\sin\theta-(\sqrt{2}-1)\cos\theta}$
IV	$\frac{\cos\theta}{-(\sqrt{2}-1)\sin\theta-\cos\theta}$	$\frac{\sin\theta}{(\sqrt{2}-1)\sin\theta-\cos\theta}$
V	$\frac{\cos\theta}{-(\sqrt{2}-1)\sin\theta-\cos\theta}$	$\frac{\sin\theta}{-(\sqrt{2}-1)\sin\theta-\cos\theta}$
VI	$\frac{\cos\theta}{-\sin\theta-(\sqrt{2}-1)\cos\theta}$	$\frac{\sin\theta}{-\sin\theta-(\sqrt{2}-1)\cos\theta}$
VII	$\frac{\cos\theta}{-\sin\theta+(\sqrt{2}-1)\cos\theta}$	$\frac{\sin\theta}{-\sin\theta+(\sqrt{2}-1)\cos\theta}$
VIII	$\frac{\cos\theta}{-(\sqrt{2}-1)\sin\theta+\cos\theta}$	$\frac{\sin\theta}{-(\sqrt{2}-1)\sin\theta+\cos\theta}$

Bu tabloyu da mutlak değer kullanarak şu şekilde kısaltabiliriz.

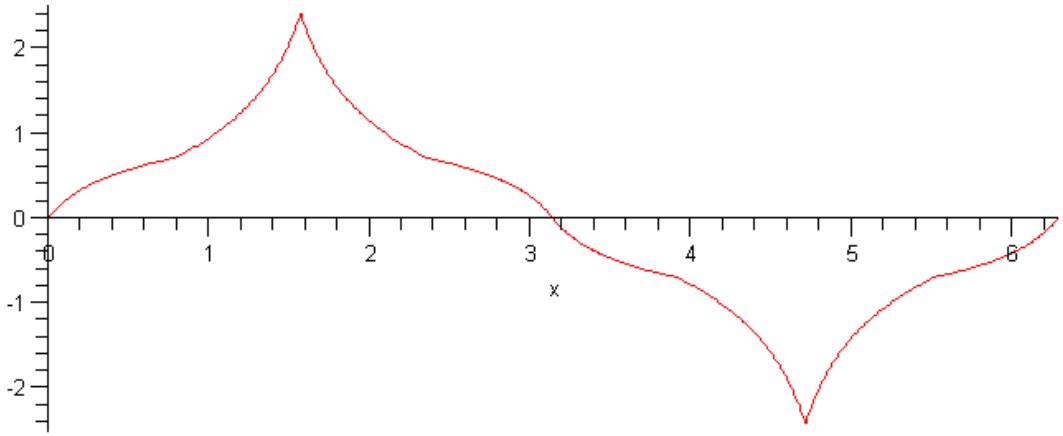
$$\cos_c\theta=\begin{cases}\dfrac{\cos\theta}{(\sqrt{2}-1)\,|\sin\theta|+|\cos\theta|},\theta\in I,IV,V,VIII\\[2ex]\dfrac{\cos\theta}{|\sin\theta|+(\sqrt{2}-1)\,|\cos\theta|},\theta\in II,III,VI,VII\end{cases}$$

$$\sin_c\theta=\begin{cases}\dfrac{\sin\theta}{(\sqrt{2}-1)\,|\sin\theta|+|\cos\theta|},\theta\in I,IV,V,VIII\\[2ex]\dfrac{\sin\theta}{|\sin\theta|+(\sqrt{2}-1)\,|\cos\theta|},\theta\in II,III,VI,VII\end{cases}$$

CC-sinüs ve CC-kosinüs fonksiyonlarının grafikleri Şekil 3.1.2 ve Şekil 3.1.3 de verilmiştir.



Şekil 3.1.2 CC Kosinüs Fonksiyonu



Şekil 3.1.3 CC Sinüs Fonksiyonu

3.2 CC-Trigonometrik Fonksiyonlarının Özellikleri

Trigonometrik fonksiyonlar açı ölçüsüne bağlı olarak tanımladığımızdan, tümler açılardaki özellikler CC-düzlem trigonometride de geçerlidir.

Yani,

$$\cos_c(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin_c\theta \text{ ve } \sin_c(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos_c\theta$$

ve

$$\cos_c(-x)=\cos_c x \text{ ve } \sin_c(-x)=-\sin_c x$$

olduğu kolaylıkla görülebilir:

I.Durum:

$-\theta$ yı VIII. bölge açısı olarak alırsak θ I. bölge açısıdır.

$$\begin{aligned}\cos_c(-\theta) &= \frac{\cos(-\theta)}{-(\sqrt{2}-1)\sin(-\theta)+\cos(-\theta)} = \frac{\cos\theta}{(\sqrt{2}-1)\sin\theta+\cos\theta} = \cos_c\theta\\ \sin_c(-\theta) &= \frac{\sin(-\theta)}{-(\sqrt{2}-1)\sin\theta+\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{(\sqrt{2}-1)\sin\theta+\cos\theta} = -\sin_c\theta\end{aligned}$$

II.Durum:

$-\theta$ yı VII. bölge açısı olarak alırsak bu taktirde θ II.bölge açısıdır.

$$\begin{aligned}\cos_c(-\theta) &= \frac{\cos(-\theta)}{-\sin(-\theta)+(\sqrt{2}-1)\cos(-\theta)} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta+(\sqrt{2}-1)\cos\theta} = \cos_c\theta\\ \sin_c(-\theta) &= \frac{\sin(-\theta)}{-\sin(-\theta)+(\sqrt{2}-1)\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\sin\theta+(\sqrt{2}-1)\cos\theta} = -\sin_c\theta\end{aligned}$$

III.Durum;

$-\theta$ yı VI.bölge açısı olarak alırsak θ nın III. bölge açısı olduğunu görürüz.

$$\begin{aligned}\cos_c(-\theta) &= \frac{\cos(-\theta)}{-\sin(-\theta)-(\sqrt{2}-1)\cos(-\theta)} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta-(\sqrt{2}-1)\cos\theta} = \cos_c\theta\\ \sin_c(-\theta) &= \frac{\sin(-\theta)}{-\sin(-\theta)-(\sqrt{2}-1)\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\sin\theta-(\sqrt{2}-1)\cos\theta} = -\sin_c\theta\end{aligned}$$

VI.Durum;

$-\theta$ yı V.bölge açısı olarak alırsak ,θ IV.bölge açısıdır.

$$\begin{aligned}\cos_c(-\theta) &= \frac{\cos(-\theta)}{-(\sqrt{2}-1)\sin(-\theta)-\cos(-\theta)} = \frac{\cos\theta}{(\sqrt{2}-1)\sin\theta-\cos\theta} = \cos_c\theta\\ \sin_c(-\theta) &= \frac{\sin(-\theta)}{-(\sqrt{2}-1)\sin(-\theta)-\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{(\sqrt{2}-1)\sin\theta-\cos\theta} = -\sin_c\theta\end{aligned}$$

Böylece her bölge için $\cos_c(-\theta) = \cos_c\theta$, $\sin_c(-\theta) = -\sin_c\theta$ olduğunu göstermiş oluruz.

Öklidyen geometrideki iyi bilinen Pisagor özdeşliği, CC- düzleminde $(\cos_c x, \sin_c x)$ birim çember üzerinde bir nokta olduğundan

$$\max\{|\cos_c x|, |\sin_c x|\} + (\sqrt{2}-1)\min\{|\cos_c x|, |\sin_c x|\} = 1 \tag{3.2.1}$$

biçimindedir.

*Pisagor özdeşliği*nin her iki tarafını $|\cos_c x|$ e bölerek *CC-sekant özdeşliği*

$$\max\{1, |\tan_c x|\} + (\sqrt{2}-1)\min\{1, |\tan_c x|\} = |\sec_c x| \tag{3.2.2}$$

ve $|\sin_c x|$ e bölünerek *CC-kosekant özdeşliği*

$$\max\{1, |\cot_c x|\} + (\sqrt{2}-1)\min\{1, |\cot_c x|\} = |\cos\mathrm{ect}_c x| \tag{3.2.3}$$

olarak elde edilir.

3.2.1 CC-Trigonometrik fonksiyonlarının indirgeme formülleri

Öklidyen düzlem trigonometride her θ açısının trigonometrik fonksiyonları I. bölgede karşılık gelen açının trigonometrik fonksiyonları ile ifade edilebiliyordu.

CC-düzlemde de birim çemberde i. bölgedeki θ_i açısına karşılık I. ve II. bölgelerde ilişkili olan açı θ_i' ile gösterilirse θ_i ve θ_i' arasındaki ilişki,

Bölge	θ_i	θ_i'
I	θ_1	$\theta_1' = \theta_1$
II	θ_2	$\theta_2' = \theta_2$
III	θ_3	$\theta_3' = 180^0 - \theta_3$
IV	θ_4	$\theta_4' = 180^0 - \theta_4$
V	θ_5	$\theta_5' = 180^0 + \theta_5$
VI	θ_6	$\theta_6' = 180^0 + \theta_6$
VII	θ_7	$\theta_7' = 360^0 - \theta_7$
VIII	θ_8	$\theta_8' = 360^0 - \theta_8$

biçiminde verilir.

CC- trigonometrik fonksiyonlar için θ_i ve θ_i' arasındaki ilişki aşağıdaki gibi elde edilir.

$$
\begin{aligned}
c\cos\theta_3 &= \frac{\cos(180^0-\theta_3')}{\sin(180^0-\theta_3')-(\sqrt{2}-1)\cos(180^0-\theta_3')} = \frac{-\cos\theta_3'}{\sin\theta_3'+(\sqrt{2}-1)\cos\theta_3'} = -c\cos\theta_3'\\
c\sin\theta_3 &= \frac{\sin(180^0-\theta_3')}{\sin(180^0-\theta_3')-(\sqrt{2}-1)\cos(180^0-\theta_3')} = \frac{\sin\theta_3'}{\sin\theta_3'+(\sqrt{2}-1)\cos\theta_3'} = c\sin\theta_3'\\
c\cos\theta_4 &= \frac{\cos(180^0-\theta_4')}{(\sqrt{2}-1)\sin(180^0-\theta_4')-\cos(180^0-\theta_4')} = \frac{-\cos\theta_4'}{(\sqrt{2}-1)\sin\theta_4'+\cos\theta_4'} = -c\cos\theta_4'\\
c\sin\theta_4 &= \frac{\sin(180^0-\theta_4')}{(\sqrt{2}-1)\sin(180^0-\theta_4')-\cos(180^0-\theta_4')} = \frac{\sin\theta_4'}{(\sqrt{2}-1)\sin\theta_4'+\cos\theta_4'} = c\sin\theta_4'\\
c\cos\theta_5 &= \frac{\cos(180^0+\theta_5')}{-(\sqrt{2}-1)\sin(180^0+\theta_5')-\cos(180^0+\theta_5')} = \frac{-\cos\theta_5'}{(\sqrt{2}-1)\sin\theta_5'+\cos\theta_5'} = -c\cos\theta_5'\\
c\sin\theta_5 &= \frac{\sin(180^0+\theta_5')}{-(\sqrt{2}-1)\sin(180^0+\theta_5')-\cos(180^0+\theta_5')} = \frac{-\sin\theta_5'}{(\sqrt{2}-1)\sin\theta_5'+\cos\theta_5} = -c\sin\theta_5'\\
c\cos\theta_6 &= \frac{\cos(180^0+\theta_6')}{-\sin(180+\theta_6')-(\sqrt{2}-1)\cos(180^0+\theta_6')} = \frac{-\cos\theta_6'}{\sin\theta_6'+(\sqrt{2}-1)\cos\theta_6'} = -c\cos\theta_6'\\
c\sin\theta_6 &= \frac{\sin(180^0+\theta_6')}{-\sin(180+\theta_6')-(\sqrt{2}-1)\cos(180^0+\theta_6')} = \frac{-\sin\theta_6'}{\sin\theta_6'+(\sqrt{2}-1)\cos\theta_6'} = -c\sin\theta_6'\\
c\cos\theta_7 &= \frac{\cos(360^0-\theta_7')}{-\sin(360^0-\theta_7')+(\sqrt{2}-1)\cos(360^0+\theta_7')} = \frac{\cos\theta_7'}{\sin\theta_7'+(\sqrt{2}-1)\cos\theta_7'} = c\cos\theta_7'\\
c\sin\theta_7 &= \frac{\sin(360^0-\theta_7')}{-\sin(360^0-\theta_7')+(\sqrt{2}-1)\cos(360^0+\theta_7')} = \frac{-\sin\theta_7'}{\sin\theta_7'+(\sqrt{2}-1)\cos\theta_7'} = -c\sin\theta_7'\\
c\cos\theta_8 &= \frac{\cos(360^0-\theta_8')}{-(\sqrt{2}-1)\sin(360^0-\theta_8')+\cos(360^0-\theta_8')} = \frac{\cos\theta_8'}{(\sqrt{2}-1)\sin\theta_8'+\cos\theta_8'} = c\cos\theta_8'\\
c\sin\theta_8 &= \frac{\sin(360^0-\theta_8')}{-(\sqrt{2}-1)\sin(360^0-\theta_8')+\cos(360^0-\theta_8')} = \frac{-\sin\theta_8'}{(\sqrt{2}-1)\sin\theta_8'+\cos\theta_8'} = -c\sin\theta_8'
\end{aligned}
$$

Artık $\sin_c\theta_i$ ve $\cos_c\theta_i$ nin değerlerini hesaplamak için I. ve II. bölgedeki $\sin_c\theta_i'$ ve $\cos_c\theta_i'$ değerlerini bilmemiz yeterli olacaktır.

3.2.2 CC-Trigonometrik fonksiyonlarının toplam-fark formülleri

CC-trigonometrik fonksiyonlar için toplam fark formülleri yine tanjant fonksiyonundan yararlanarak elde edilebilir.

$$\tan(u\pm v)=\left\{\frac{\tan u\pm\tan v}{1\mp\tan u.\tan v}\right.$$

dan

$$\tan(u\pm v)=\frac{\sin_c(u\pm v)}{\cos_c(u\pm v)}=\frac{\dfrac{\sin_c u}{\cos_c u}\pm\dfrac{\sin_c v}{\cos cv}}{1\mp\dfrac{\sin_c u}{\cos_c u}\dfrac{\sin_c v}{\cos_c v}}$$

ve

$$\frac{\sin_c(u\pm v)}{\cos_c(u\pm v)}=\frac{\sin_c u.\cos_c v\pm\sin_c v.\cos_c u}{\cos_c u.\cos_c v\mp\sin_c u.\sin_c v}$$

dir. Eşitliğin her iki tarafından pay ve paydalar eşitlenirse,

$$\sin_c(u \pm v) = \sin_c u.\cos_c v \pm \sin_c v.\cos_c u \tag{3.2.4}$$

ve

$$\cos_c(u \pm v) = \cos_c u.\cos_c v \mp \sin_c u.\sin_c v \tag{3.2.5}$$

elde edilir. Böylece CC-trigonometrik fonksiyonlarının toplam fark formüllerinin Öklidyen benzerleri gibi olduğu görülüyor.

3.2.3 CC-Trigonometrik fonksiyonlarının yarım açı formülleri

CC-Trigonometrik fonksiyonlar için yarım açı formülleri CC-sinüs ve CC-kosinüs fonksiyonlarının toplam fark formülünde $u = v$ alınarak,

$$\sin_c(u + u) = \sin_c u.\cos_c u + \sin_c u.\cos_c u$$

den

$$\sin_c 2u = 2\sin_c u.\cos_c u \tag{3.2.6}$$

ve

$$\cos_c(u + u) = \cos_c u.\cos_c u - \sin_c u.\sin_c u$$

den

$$\cos_c 2u = \cos_c^2 u - \sin_c^2 u \tag{3.2.7}$$

biçiminde elde edilir.

3.3 Referans Açılı CC-Trigonometrik Fonksiyonlar

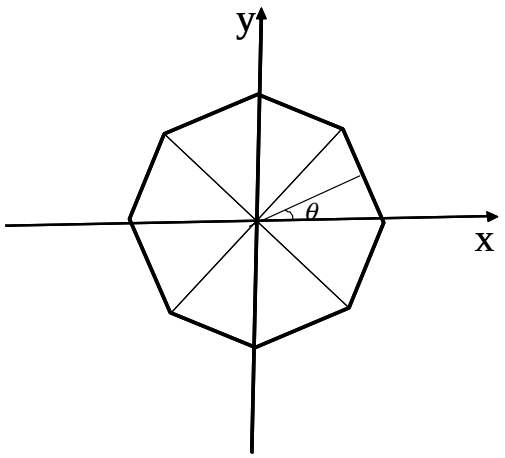
θ, CC- birim çemberi üzerinde α referans açılı açı olsun. Bu durumda $\alpha-$referans açılı kosinüs ve sinüs fonksiyonlarını standart pozisyonda ki $\alpha + \theta$ ve α açıları yardımı ile fark formüllerinden yaralanarak elde edilebilir. *CC- referans açılı kosinüs fonksiyonunu* ccos ile gösterirsek

$$\text{ccos}(\theta) = \cos_c(\theta + \alpha - \alpha) = \cos_c(\theta + \alpha).\cos_c \alpha + \sin_c(\theta + \alpha).\sin_c \alpha \tag{3.3.1}$$

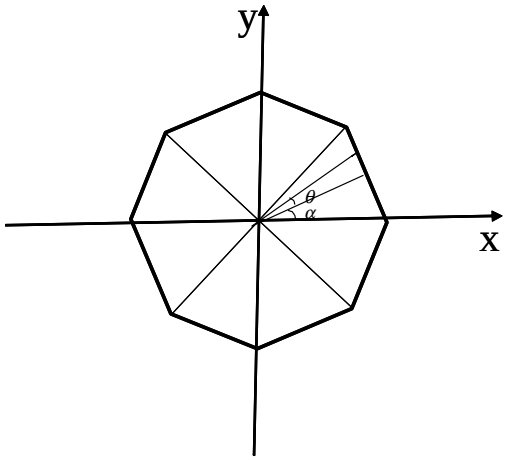
biçiminde elde edilir. Referans açılı CC-sinüs fonksiyonu csin ile gösterirsek

$$\text{csin}(\theta) = \sin_c(\theta + \alpha - \alpha) = \sin_c(\theta + \alpha).\cos_c \alpha - \sin_c \alpha.\cos_c(\theta + \alpha) \tag{3.3.2}$$

olur.



Şekil 3.3.1 Standart pozisyonda θ



Şekil 3.3.2 $\alpha -$ Referans açılı θ

$\alpha = 0$ ise θ standart pozisyondaki açıdır. Bu durum Şekil 3.3.1 ve Şekil 3.3.2 de verilmiştir.

3.4 CC- Uzunluğunun Dönmeler Altındaki Değişimi

Öklidyen düzlemde bir doğru parçasının uzunluğu dönmelerden etkilenmez. CC-düzlemin de belirli $\frac{\pi}{4}$ ün katı olan açılı dönmeler hariç doğru parçasının uzunluğu dönmeler altında değişir(Kaya vd.,2006). Bir doğru parçasının dönmelerden sonra CC uzunluğu değişimini aşağıdaki teoremle verilebilir(Bayar ve Ekmekçi 2006).

Teorem: O noktası orijin olmak üzere OA ox-ekseni üzerinde olmayan ve ox-ekseninin pozitif yönü ile α açısı yapan doğru parçası ve $d_c(O,A) = k$ olsun. Eğer OA', OA nın orijin etrafında θ kadar dönme altında görüntüsü ise

$$d_c(O,A') = k\sqrt{\frac{\cos_c^2\alpha + \sin_c^2\alpha}{(\cos_c^2(\alpha+\theta) + \sin_c^2(\alpha+\theta)}}$$

İspat: Bütün dönmeler altında Öklidyen uzunluk korunduğundan OA′ ile OA nın Öklidyen uzunlukları eşittir.

$$d_E(O,A') = d_E(O,A) \tag{3.4.1}$$

A'nın koordinatları $\cos_c, \sin_c$ ve k ya bağlı olarak $A = (k\cos_c\alpha, k\sin_c\alpha)$ dır. $d_c(O,A') = k'$ dersek, A' nin koordinatları ,

$$A' = (k' \cos_c(\alpha + \theta), k' \sin_c(\alpha + \theta)) \tag{3.4.2}$$

olur. Bunları 3.4.1 de kullanırsak

$$\sqrt{(k' \cos_c(\alpha + \theta))^2 + k' \sin_c(\alpha + \theta)^2} = \sqrt{(k \cos_c \alpha)^2 + (k \sin_c \alpha)^2}$$

$$k' \sqrt{(\cos_c^2(\alpha + \theta) + \sin_c^2(\alpha + \theta)} = k \sqrt{\left(\cos_c^2 \alpha + \sin_c^2 \alpha\right)}$$

$$k' = k \sqrt{\frac{\cos_c^2 \alpha + \sin_c^2 \alpha}{(\cos_c^2(\alpha + \theta) + \sin_c^2(\alpha + \theta)}}$$

elde edilir.

Sonuç 1: OA Doğru parçasının eğimi sıfır yani ox eksenine paralel ise

$$d_c(O, A') = \frac{k}{\sqrt{\cos_c^2 \theta + \sin_c^2 \theta}}$$

dir.

İspat: OA nın eğimi 0 olduğundan $\alpha = 0$ dır ve θ referans açısı konumunda olur. Teoremde $\alpha = 0$ alırsak

$$\begin{aligned} d_c(O, A') = \quad & k \sqrt{\frac{\cos_c^2 0 + \sin_c^2 0}{(\cos_c^2(0 + \theta) + \sin_c^2(0 + \theta)}} \\ & = k \sqrt{\frac{1 + 0}{\cos_c^2 \theta + \sin_c^2 \theta}} \\ & = \frac{k}{\sqrt{\cos_c^2 \theta + \sin_c^2 \theta}} \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 2: Düzlemin ötelemeleri altında CC-uzunluklar korunduğundan teorem herhangi bir doğru parçası içinde geçerlidir.

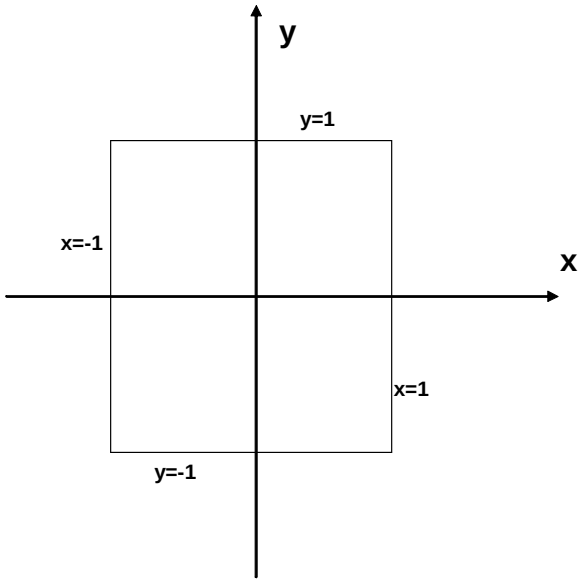
.

BÖLÜM 4
MAKSİMUM DÜZLEMİNDE TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

Bu bölümde maksimum metriği kullanılarak geliştirilen düzlem geometrisinin trigonometrik fonksiyonları Öklidyen düzlemdekine benzer olarak (Bayar, 2007) esas alınarak incelenmiştir.

4.1 Maksimum Trigonometrik Fonksiyonlar

$\mathbb{R}^2_M$ de $\max\{|x|,|y|\} = 1$ denklemini sağlayan (x,y) noktalarının kümesine *M-birim çember* denir. $\mathbb{R}^2_M$ nin birim çemberi, köşeleri $A_1 = (1,1), A_2 = (-1,1), A_3 = (-1,-1), A_4 = (1,-1)$ noktaları olan bir karedir (Şekil 4.1.1).



Şekil 4.1.1 M-birim çemberi

Birim çember denklemi mutlak değerlere göre incelenirse, çember açıların durumuna göre 8 bölgeye ayrılır.

Bölge	Açı	Denklem
I	$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$	$x = 1$
II	$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$y = 1$
III	$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$	$y = 1$
IV	$\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \pi$	$x = -1$
V	$\pi \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$	$x = -1$
VI	$\frac{5\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$	$y = -1$
VII	$\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{7\pi}{4}$	$y = -1$
$VIII$	$\frac{7\pi}{4} \leq \theta \leq 2\pi$	$x = 1$

$P(x, y)$ noktası ile $O(0, 0)$ nin oluşturduğu doğrunun ox-ekseninin pozitif yönü ile yaptığı açı θ olmak üzere θ nın *maximum kosinüs* ve *maksimum sinüs* fonksiyonlarını sırası ile $\cos_m$ ve $\sin_m$ ile gösterilmek üzere $x = \cos_m \theta$, $y = \sin_m \theta$ olarak tanımlayabiliriz. Maksimum birim çemberi üzerinde $(\cos_m \theta, \sin_m \theta)$ noktası, orijinden geçen ox-ekseni ile pozitif yönde θ açısı yapan doğrunun birim çemberi kestiği noktadır. Bu doğrunun eğimi alınan metriğe göre değişmediğinden maksimum düzleminde *maksimum tanjant fonksiyonu* Öklidyen düzlemdekinin aynısıdır. Yani maksimum tanjant fonksiyonunu $\tan_m$ ile gösterirsek ,

$$\tan_m \theta = \tan \theta$$

dir.

Böylece maksimum kosinüs ve maksimum sinüs fonksiyonları bildiğimiz tanjant fonksiyonu cinsinden elde edilebilir. Birim çember ile orijinden geçen eğimi $\tan \theta$ olan doğrunun oluşturduğu sistem

$$\begin{cases} \max\{|x|, |y|\} = 1 \\ y = (\tan \theta)x \end{cases}$$

dir. Bu sistem θ nın 8 bölgedeki konumuna bağlı olarak çözülebilir.

I.Bölge: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ iken,

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = (\tan \theta)x \end{cases}$$

sistemi çözüldüğünde

$$\begin{cases} \cos_m \theta = 1 \\ \sin_m \theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta \end{cases}$$

elde edilir.

II.Bölge: $\dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ iken,

$$\begin{cases} y = 1 \\ y = (\tan\theta)x \end{cases}$$

sistemi çözüldüğünde

$$\begin{cases} \cos_m \theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\tan\theta} \\ \sin_m \theta = 1 \end{cases}$$

elde edilir.

III.Bölge: $\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{3\pi}{4}$ iken

$$\begin{cases} y = 1 \\ y = (\tan\theta)x \end{cases}$$

sistemi çözüldüğünde

$$\begin{cases} \cos_m \theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\tan\theta} \\ \sin_m = 1 \end{cases}$$

elde edilir.

IV.Bölge: $\dfrac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \pi$ iken,

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = (\tan\theta)x \end{cases}$$

sistemi çözüldüğünde

$$\begin{cases} \cos_m \theta = -1 \\ \sin_m \theta = \dfrac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta \end{cases}$$

elde edilir.

V.Bölge: $\pi \leq \theta \leq \dfrac{5\pi}{4}$ iken,

$$\begin{aligned} x &= -1 \\ y &= (\tan\theta)x \end{aligned}$$

sistemi çözüldüğünde

$$\begin{cases} \cos_m \theta = -1 \\ \sin_m \theta = \dfrac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta \end{cases}$$

elde edilir.

VI.Bölge: $\dfrac{5\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{3\pi}{2}$ iken,

$$y = -1$$
$$y = (\tan\theta)x$$

sistemi çözüldüğünde

$$\begin{cases} \cos_m \theta = -\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{-1}{\tan\theta} \\ \sin_m \theta = -1 \end{cases}$$

elde edilir.

VII.Bölge: $\dfrac{3\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{7\pi}{4}$ iken,

$$y = -1$$
$$y = (\tan\theta)x$$

sistemi çözüldüğünde

$$\begin{cases} \cos_m \theta = -\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{-1}{\tan\theta} \\ \sin_m \theta = -1 \end{cases}$$

elde edilir.

VIII.Bölge: $\dfrac{7\pi}{4} \leq \theta \leq 2\pi$ iken,

$$x = 1$$
$$y = (\tan\theta)x$$

sistem çözüldüğünde

$$\begin{cases} \cos_m \theta = 1 \\ \sin_m \theta = \tan\theta \end{cases}$$

elde edilir.

Bölgelere göre $\sin_m \theta$, $\cos_m \theta$ değerlerini aşağıdaki tabloda özetleyebiliriz.

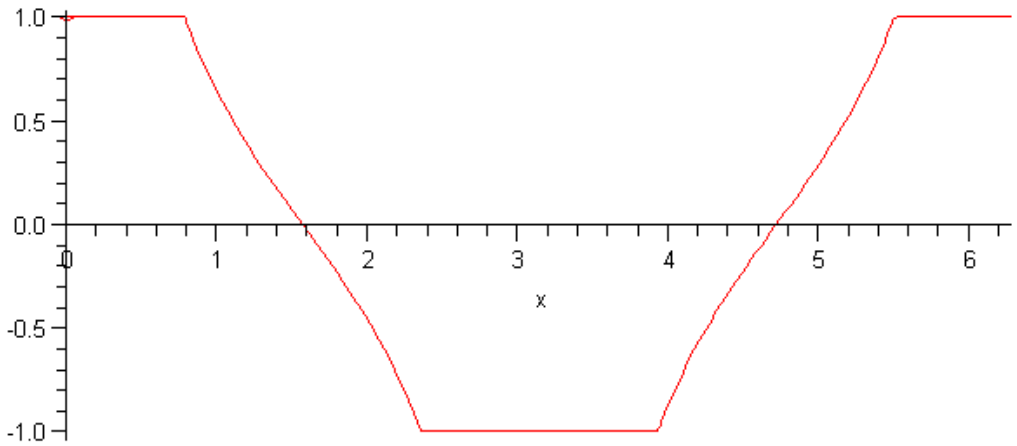
Bölge	$\sin_m \theta$	$\cos_m \theta$
I	$\tan\theta$	1
II	1	$\dfrac{1}{\tan\theta}$
III	1	$\dfrac{1}{\tan\theta}$
IV	$-\tan\theta$	-1
V	$-\tan\theta$	-1
VI	-1	$\dfrac{-1}{\tan\theta}$
VII	-1	$\dfrac{-1}{\tan\theta}$
VIII	$\tan\theta$	1

Bu tabloyu da şu şekilde kısaltabiliriz.

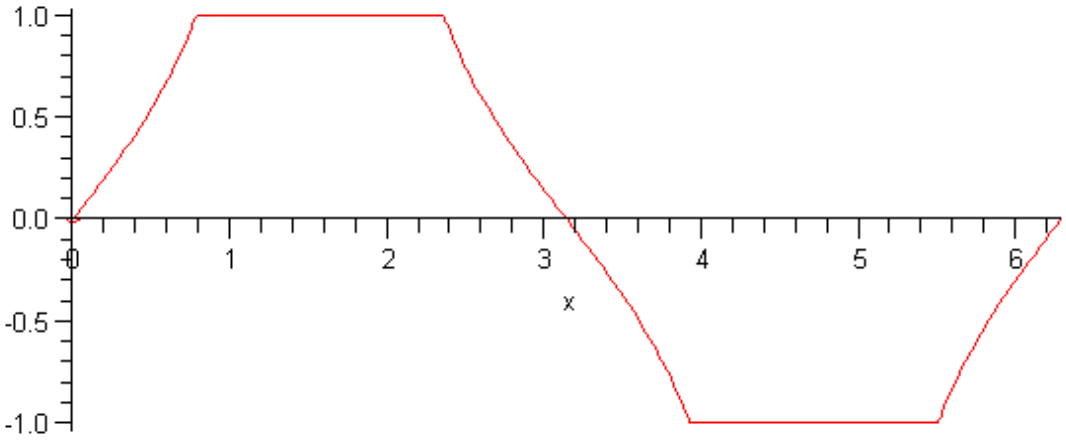
$$\sin_m \theta = \begin{cases} \dfrac{\sin\theta}{|\cos\theta|}, \theta \in I, IV, V, VIII \\ \\ \dfrac{|\sin\theta|}{\sin\theta}, \theta \in II, III, VI, VII \end{cases}$$

$$\cos_m \theta = \begin{cases} \dfrac{|\cos\theta|}{\cos\theta}, \theta \in I, IV, V, VIII \\ \\ \dfrac{\cos\theta}{|\sin\theta|}, \theta \in II, III, VI, VII \end{cases}$$

Maksimum sinüs ve maksimum kosinüs fonksiyonlarının grafikleri Şekil 4.1.2 ve Şekil 4.1.3 de verilmiştir.



Şekil 4.1.2 Maksimum kosinüs fonksiyonu



Şekil 4.1.3 Maksimum sinüs fonksiyonu

4.2 Maksimum Trigonometrik Fonksiyonların Özellikleri

Trigonometrik fonksiyonlar açı ölçüsüne bağlı olarak tanımlamanın bir sonucu olarak tümler açıdaki özellikler maksimum düzlem trigonometride de geçerlidir. Yani,

$$\cos_m(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin_m\theta \text{ ve } \sin_m(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos_m\theta$$

dir. Ayrıca

$$\tan(-x)=-\tan x$$

özelliğinden yararlanılarak

$$\cos_m(-x)=\cos_m x \text{ ve } \sin_m(-x)=-\sin_m x$$

kolaylıkla elde edilebilir.

I.Durum:

$-\theta$ yı VIII. bölge açısı olarak alırsak bu taktirde θ, I. bölge açısıdır.

$$\begin{aligned}&\cos_m(-\theta)=1 \quad \cos_m\theta=1,\cos_m(-\theta)=\cos_m\theta\\&\sin_m(-\theta)= \qquad \tan(-\theta)=\frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)}=-\tan\theta=-\sin_m\theta\end{aligned}$$

II.Durum:

$-\theta$ yı VII. bölge açısı olarak alırsak bu taktirde θ, II. bölge açısıdır.

$$\begin{aligned}&\cos_m(-\theta)=\frac{-1}{\tan(-\theta)} \quad =\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\tan\theta}=\cos_m\theta\\&\sin_m(-\theta)=-1 \qquad\qquad \sin_m\theta=1,\sin_m(-\theta)=-\sin_m\theta\end{aligned}$$

III.Durum:

$-\theta$ yı VI. bölge açısı olarak alırsak bu taktirde θ, III. bölge açısıdır.

$$\begin{aligned}&\cos_m(-\theta)=\frac{-1}{\tan(-\theta)} \quad =\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\tan\theta}=\cos_m\theta\\&\sin_m(-\theta)=-1 \qquad\qquad \sin_m\theta=1,\sin_m(-\theta)=-\sin_m\theta\end{aligned}$$

IV.Durum:

$-\theta$ yı V bölge açısı olarak alırsak bu taktirde θ, IV. bölge açısıdır.

$$\begin{aligned}&\cos_m(-\theta)=-1 \qquad\qquad =\cos_m\theta\\&\sin_m(-\theta)=-\tan(-\theta) \quad =-\tan\theta=-\sin_m\theta\end{aligned}$$

olur. Böylece her bölge için $\cos_m(-\theta)=\cos_m\theta$, $\sin_m(-\theta)=-\sin_m\theta$ olduğunu göstermiş olduk.

Öklidyen geometrideki iyi bilinen *Pisagor özdeşliği*, maksimum düzleminde $(\cos_m x, \sin_m x)$ birim çember üzerinde bir nokta olduğundan.

$$\max\{|\cos_m x|, |\sin_m x|\} = 1 \tag{4.2.1}$$

biçimindedir.

Pisagor özdeşliğinin her iki tarafını $|\cos_c x|$ e bölerek *sekant özdeşliği*

$$\max\{1, |\tan_m x|\} = |\sec_m x| \tag{4.2.2}$$

ve $|\sin_c x|$ e bölünerek *kosekant özdeşliği*

$$\max\{1, |\cot_m x|\} = |\operatorname{cosect}_m x| \tag{4.2.3}$$

elde edilir.

4.2.1 Maksimum trigonometrik fonksiyonlarının indirgeme formülleri

Öklidyen düzlem trigonometride her θ açısının trigonometrik fonksiyonları I. bölgede karşılık gelen açının trigonometrik fonksiyonları ile ifade edilebiliyordu.

Maksimum düzlemde birim çemberde i. bölgedeki θ_i açısına karşılık I. ve II. bölgelerde ilişkili olan açı θ_i' ile gösterilirse θ_i ve θ_i' arasındaki ilişki,

Bölge	θ_i	θ_i'
I	θ_1	$\theta_1' = \theta_1$
II	θ_2	$\theta_2' = \theta_2$
III	θ_3	$\theta_3' = 180^0 - \theta_3$
IV	θ_4	$\theta_4' = 180^0 - \theta_4$
V	θ_5	$\theta_5' = 180^0 + \theta_5$
VI	θ_6	$\theta_6' = 180^0 + \theta_6$
VII	θ_7	$\theta_7' = 360^0 - \theta_7$
VIII	θ_8	$\theta_8' = 360^0 - \theta_8$

biçiminde verilir.

M- trigonometrik fonksiyonlar için θ_i ve θ'_i arasındaki ilişki aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
\cos_m\theta_3 &= \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos(180^0-\theta_3)}{\sin(180^0-\theta_3)} = \frac{-\cos\theta'_3}{\sin\theta'_3} = -\cos_m\theta'_3\\
\sin_m\theta_3 &= \sin_m\theta'_3\\
\cos_m\theta_4 &= -\cos_m\theta'_4\\
\sin_m\theta_4 &= -\tan\theta = \frac{-\sin(180^0-\theta_4)}{\cos(180^0-\theta_4)} = \frac{-\sin\theta'_4}{-\cos\theta'_4} = \sin_m\theta'_4\\
\cos_m\theta_5 &= -\cos_m\theta'_5\\
\sin_m\theta_5 &= -\tan\theta = \frac{-\sin(180^0+\theta_5)}{\cos(180^0+\theta_5)} = \frac{\sin\theta'_5}{-\cos\theta'_5} = -\sin_m\theta'_5\\
\cos_m\theta_6 &= -\frac{1}{\tan\theta} = \frac{-\cos(180^0+\theta_6)}{\sin(180^0+\theta_6)} = \frac{\cos\theta'_6}{-\sin\theta'_6} = -\cos_m\theta'_6\\
\sin_m\theta_6 &= -\sin_m\theta'_6\\
\cos_m\theta_7 &= -\frac{1}{\tan\theta} = \frac{-\cos(360^0-\theta_7)}{\sin(360^0-\theta_7)} = \frac{-\cos\theta'_7}{-\sin\theta'_7} = \cos_m\theta'_7\\
\sin_m\theta_7 &= -\sin_m\theta'_7\\
\cos_m\theta_8 &= \cos_m\theta'_8\\
\sin_m\theta_8 &= \tan\theta = \frac{\sin(360^0-\theta_8)}{\cos(360^0-\theta_8)} = \frac{-\sin\theta'_8}{\cos\theta'_8} = -\sin_m\theta'_8
\end{aligned}$$

Artık $\sin_m\theta_i$ ve $\cos_m\theta_i$ nin değerlerini hesaplamak için I. ve II. bölgedeki $\sin_m\theta'_i$ ve $\cos_m\theta'_i$ değerlerini bilmemiz yeterli olacaktır.

4.2.2 Maksimum trigonometrik fonksiyonlarının toplam-fark formülleri

Maksimum trigonometrik fonksiyonları için toplam fark formülleri yine tanjant fonksiyonundan yararlanarak elde edilebilir.

$$\tan(u\pm v) = \left\{ \frac{\tan u \pm \tan v}{1 \mp \tan u.\tan v}\right.$$

dan

$$\tan(u\pm v) = \frac{\sin_m(u\pm v)}{\cos_m(u\pm v)} = \frac{\dfrac{\sin_m u}{\cos_m u} \pm \dfrac{\sin_m v}{\cos_m v}}{1 \mp \dfrac{\sin_m u}{\cos_m u}.\dfrac{\sin_m v}{\cos_m v}}$$

ve

$$\frac{\sin_m(u\pm v)}{\cos_m(u\pm v)} = \frac{\sin_m u.\cos_m v \pm \sin_m v.\cos_m u}{\cos_m u.\cos_m v \mp \sin_m u.\sin_m v}$$

dir. Eşitliğin her iki tarafından pay ve paydalar eşitlenirse,

$$\sin_m(u \pm v) = \sin_m u.\cos_m v \pm \sin_m v.\cos_m u \tag{4.2.4}$$

ve

$$\cos_m(u \pm v) = \cos_m u.\cos_m v \mp \sin_m u.\sin_m v \tag{4.2.5}$$

elde edilir. Böylece maksimum trigonometrik fonksiyonlarının toplam fark formüllerinin Öklidyen benzerleri gibi olduğu görülüyor.

4.2.3 Maksimum trigonometrik fonksiyonlarının yarım açı formülleri

Maksimum trigonometrik fonksiyonlar için yarım açı formülleri maksimum sinüs ve maksimum kosinüs fonksiyonlarının toplam-fark formüllerinde $u = v$ alınarak,

$$\sin_m(u + u) = \sin_m u.\cos_m u + \sin_m u.\cos_m u$$

den

$$\sin_m 2u = 2\sin_m u.\cos_m u \tag{4.2.6}$$

ve

$$\cos_m(u + u) = \cos_m u.\cos_m u - \sin_m u.\sin_m u$$

den

$$\cos_m 2u = \cos_m^2 u - \sin_m^2 u \tag{4.2.7}$$

biçiminde elde edilir.

4.3 Referans Açılı Maksimum Trigonometrik Fonksiyonlar

Standart pozisyonda olmayan açılar için de trigonometrik fonksiyonları tanımlamak için M-düzlemde açı kavramını referans açılı açı tanımı ile genişletelim.

θ, M-birim çemberi üzerinde α referans açılı açı olsun. Bu durumda referans açılı kosinüs ve sinüs fonksiyonlarını standart pozisyonda ki $\alpha + \theta$ ve α açıları yardımı ile fark formüllerinden yaralanarak elde edebiliriz.

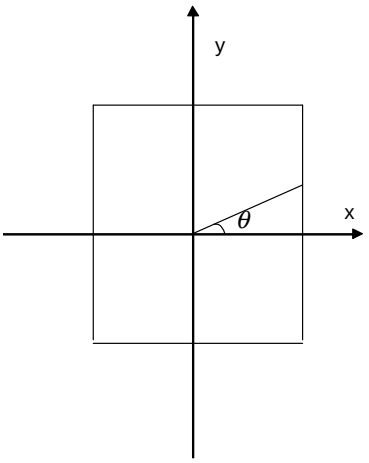
Bu durumda *referans açılı maksimum kosinüs fonksiyonu,* mcos,

$$\text{mcos}(\theta) = \cos_m(\theta + \alpha - \alpha) = \cos_m(\theta + \alpha).\cos_m \alpha + \sin_m(\theta + \alpha).\sin_m \alpha \tag{4.3.1}$$

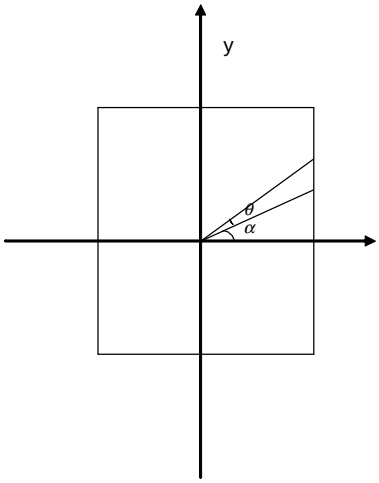
ve *referans açılı maksimum sinüs fonksiyonu,* msin,

$$\text{msin}(\theta) = \sin_m(\theta + \alpha - \alpha) = \sin_m(\theta + \alpha).\cos_m \alpha - \sin_m \alpha.\cos_m(\theta + \alpha) \qquad (4.3.2)$$

biçiminde elde edilir.



Şekil 4.3.1 Standart pozisyonda θ



Şekil 4.3.2 Referans açılı θ

4.4 Maksimum Uzunluğun Dönmeler Altındaki Değişimi

Öklidyen dönmelerden sonra bir doğru parçasının maksimum uzunluğun değişimini aşağıdaki teoremle verilebilir (Bayar, 2007).

Teorem 4.3.1: O noktası orijin olmak üzere OA x-ekseni üzerinde olmayan ve x-ekseninin pozitif yönü ile α açısı yapan doğru parçası ve $d_m(O, A) = k$ olsun. Eğer OA', OA nın orijin etrefında θ kadar dönme altında görüntüsü ise

$$d_m(O, A') = k\sqrt{\frac{\cos_m^2 \alpha + \sin_m^2 \alpha}{(\cos_m^2(\alpha + \theta) + \sin_m^2(\alpha + \theta)}}$$

dir.

İspat: Bütün dönmeler altında Öklidyen uzunluk korunduğundan OA′ ile OA nın Öklidyen uzunlukları eşittir.

$$d_E(O, A') = d_E(O, A) \qquad (4.4.1)$$

A'nın koordinatları $\cos_m, \sin_m$ ve k ya bağlı olarak $A = (k\cos_m \alpha, k\sin_m \alpha)$ dır. $d_M(O, A') = k'$ dersek, A' nin koordinatları ,

$$A' = (k'\cos_m(\alpha + \theta), k'\sin_m(\alpha + \theta))$$

olur. Bunları 4.4.1 de kullanırsak

$$\sqrt{(k' \cos_m(\alpha+\theta))^2 + k' \sin_m(\alpha+\theta)^2} = \sqrt{(k \cos_m \alpha)^2 + (k \sin_m \alpha)^2}$$

$$k' \sqrt{(\cos_m^2(\alpha+\theta) + \sin_m^2(\alpha+\theta)} = k \sqrt{\left(\cos_m^2 \alpha + \sin_m^2 \alpha\right)}$$

$$k' = k \sqrt{\frac{\cos_m^2 \alpha + \sin_m^2 \alpha}{(\cos_m^2(\alpha+\theta) + \sin_m^2(\alpha+\theta)}}$$

elde edilir.

Sonuç 4.3.1: OA Doğru parçasının eğimi sıfır, yani ox-eksenine paralel ise

$$d_m(O, A') = \frac{k}{\sqrt{\cos_m^2 \theta + \sin_m^2 \theta}}$$

dir.

İspat: OA nın eğimi 0 olduğundan $\alpha = 0$ dır ve θ referans açısı konumunda olur. Teoremde $\alpha = 0$ alırsak

$$\begin{aligned} d_m(O, A') = \quad & k \sqrt{\frac{\cos_m^2 0 + \sin_m^2 0}{(\cos_m^2(0+\theta) + \sin_m^2(0+\theta)}} \\ & = k \sqrt{\frac{1+0}{\cos_m^2 \theta + \sin_m^2 \theta}} \\ & = \frac{k}{\sqrt{\cos_m^2 \theta + \sin_m^2 \theta}} \end{aligned}$$

olur.

Sonuç 4.3.2: Düzlemin ötelemeleri altında maksimum uzunluklar korunduğundan teorem herhangi bir doğru parçası içinde geçerlidir.

BÖLÜM 5
GENELLEŞTİRİLMİŞ MUTLAK DEĞER DÜZLEMİNDE TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

Bu bölümde $(\mathbb{R}^2, d_g)$düzleminde trigonometrik fonksiyonlar (Bayar, Ekmekçi ve Akça, 2006) esas alınarak incelenecektir.

5.1 Genelleştirilmiş Mutlak Değer Düzleminde Trigonometrik Fonksiyonlar

$(\mathbb{R}^2, d_g)$ düzleminin birim çemberi orijinden 1 d_g birim uzaklıktaki noktaların geometrik yeridir. Yani $X = (x, y)$ birim çember üzerinde bir nokta ise

$$d_g(X, O) = 1$$

şartını sağlar. Buradan

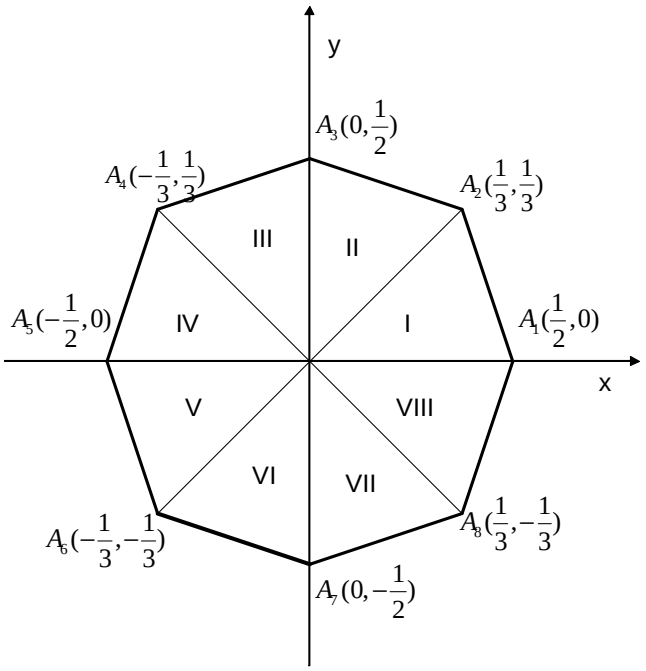
$$a \max\{|x|, |y|\} + b \min\{|x|, |y|\} = 1,\ a \geq b \geq 0, a \neq 0 \tag{5.1.1}$$

denklemi $(\mathbb{R}^2, d_g)$ düzleminin birim çember denklemidir. Dolayısı ile genelleştirilmiş mutlak değer düzleminin birim çemberleri özel olarak taksi, Çin dama ve maksimum metriklerinin birim çemberlerini içeren köşeleri $A_1 = (\frac{1}{a}, 0),\ A_2 = (\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+b}), A_3 = (0, \frac{1}{a}),$ $A_4 = (-\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+b}),\ A_5 = (-\frac{1}{a}, 0),\ A_6 = (-\frac{1}{a+b}, -\frac{1}{a+b}),\ A_7 = (0, -\frac{1}{a}),\ A_8 = (\frac{1}{a+b}, -\frac{1}{a+b})$ olan sekizgenlerdir. Birim çemberin kenarlarının denklemleri mutlak değerin durumuna göre aşağıdaki biçimdedir.

I.Durum: $\|x\| \geq \|y\|$ ise	II.Durum: $\|y\| \geq \|x\|$ ise
$a.\|x\| + b.\|y\| = 1$	$a.\|y\| + b.\|x\| = 1$
$i)\ x > 0, y > 0$	$i)\ x > 0, y > 0$
$ax + by = 1$	$ay + bx = 1$
$y = \dfrac{1 - ax}{b}$	$y = \dfrac{1 - bx}{a}$

I.Durum: $\|x\| \geq \|y\|$ ise	II.Durum: $\|y\| \geq \|x\|$ ise
$ii)\ x > 0, y < 0$	$ii)\ x > 0, y < 0$
$ax - by = 1$	$-ay + bx = 1$
$y = \dfrac{ax-1}{b}$	$y = \dfrac{bx-1}{a}$
$iii)\ x < 0, y > 0$	$iii)\ x < 0, y > 0$
$-ax + by = 1$	$ay - bx = 1$
$y = \dfrac{1+ax}{b}$	$y = \dfrac{1+bx}{a}$
$iv)\ x < 0, y < 0$	$iv)\ x < 0, y < 0$
$-ax - by = 1$	$-ay - bx = 1$
$y = \dfrac{-1-ax}{b}$	$y = \dfrac{-1-bx}{a}$

$a = b = 1$ ise taksi birim çemberi, $a = 1$ ve $b = \sqrt{2} - 1$ ise CC- birim çemberi ve $a = 1$ ve $b = 0$ iken de maksimum metriğinin göre birim çemberleri elde edilir. $a = 2$ ve $b = 1$ durumuna göre elde edilen d_g-birim çemberi Şekil 5.1.1 de verilmiştir.



Şekil 5.1.1 $a = 2, b = 1$ iken $\mathrm{d}_g -$ Birim Çemberi

Şimdi $(\mathbb{R}^2, d_g)$ düzleminin birim çemberini kullanarak önceki bölümlerde verdiğimiz trigonometrik fonksiyonlara benzer olarak burada trigonometrik fonksiyonları vereceğiz.

Genelleştirilmiş mutlak değer düzlemi birim çemberi üzerinde $(\cos_g \theta, \sin_g \theta)$ noktası, orijinden geçen ox-ekseni ile pozitif yönde θ açısı yapan doğrunun birim çemberi kestiği

noktadır. Bu doğrunun eğimi metriğe bağlı olmadığından genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde tanjant fonksiyonu $\tan_g$, Öklidyen düzlemindeki tanjant fonksiyonuna eşittir.

$$\tan_g \theta = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

Böylece *genelleştirilmiş mutlak değer kosinüs fonksiyonu*, $\cos_g \theta$,ve *genelleştirilmiş mutlak değer sinüs fonksiyonu*, $\sin_g \theta$, aşina olduğumuz tanjant fonksiyonu cinsinden elde edebiliriz.

Birim çember denklemi ile orijinden geçip ox-ekseninin pozitif yönü ile θ açısı yapan doğru denkleminin oluşturduğu sistem,

$$\begin{cases} a \max\{|x|, |y|\} + b \min\{|x|, |y|\} = 1 \\ y = (\tan \theta)x \end{cases}$$

dir. Bu sistem θ nın 8 bölgedeki konumuna bağlı olarak çözülebilir.

I.Bölge: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ iken,

$$\begin{cases} y = \dfrac{1 - ax}{b} \\ y = (\tan \theta)x \end{cases}$$

sistemi çözüldüğünde,

$$\begin{aligned} \frac{1 - ax}{b} &= (\tan \theta)x \\ 1 - ax &= b(\tan \theta)x \\ x &= \frac{1}{b \tan \theta + a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos_g \theta &= \frac{\cos \theta}{b \sin \theta + a \cos \theta} \\ \sin_g \theta &= \frac{\sin \theta}{b \sin \theta + a \cos \theta} \end{aligned}$$

elde edilir.

II.Bölge: $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ iken,

$$\begin{cases} y = \dfrac{1 - bx}{a} \\ y = (\tan \theta)x \end{cases}$$

sistemi çözüldüğünde,

$$(\tan\theta)x = \frac{1-bx}{a}$$
$$1-bx = a(\tan\theta)x$$
$$x = \frac{1}{a\tan\theta + b}$$

$$\cos_g\theta = \frac{\cos\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta}$$
$$\sin_g\theta = \frac{\sin\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta}$$

elde edilir.

III.Bölge: $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$ iken,

$$\begin{cases} y = \dfrac{1+bx}{a} \\ y = (\tan\theta)x \end{cases}$$

sistemi çözüldüğünde,

$$(\tan\theta)x = \frac{1+bx}{a}$$
$$1+bx = a(\tan\theta)x$$
$$x = \frac{1}{a\tan\theta - b}$$

$$\cos_g\theta = \frac{\cos\theta}{a\sin\theta - b\cos\theta}$$
$$\sin_g\theta = \frac{\sin\theta}{a\sin\theta - b\cos\theta}$$

elde edilir.

IV.Bölge: $\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \pi$ iken,

$$\begin{cases} y = \dfrac{1+ax}{b} \\ y = (\tan\theta)x \end{cases}$$

sistemi çözüldüğünde,

$$(\tan\theta)x = \frac{1+ax}{b}$$
$$1+ax = b(\tan\theta)x$$
$$x = \frac{1}{b\tan\theta - a}$$

$$\cos_g\theta = \frac{\cos\theta}{b\sin\theta - a\cos\theta}$$
$$\sin_g\theta = \frac{\sin\theta}{b\sin\theta - a\cos\theta}$$

elde edilir.

V.Bölge: $\pi \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$ iken,

$$\begin{cases} y = \dfrac{-1-ax}{b} \\ y = (\tan\theta)x \end{cases}$$

sistemi çözüldüğünde,

$$(\tan\theta)x = \frac{-1-ax}{b}$$
$$-1-ax = b(\tan\theta)x$$
$$x = \frac{-1}{b\tan\theta + a}$$

$$\cos_g\theta = \frac{-\cos\theta}{b\sin\theta + a\cos\theta}$$
$$\sin_g\theta = \frac{-\sin\theta}{b\sin\theta + a\cos\theta}$$

elde edilir.

VI.Bölge: $\frac{5\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ iken,

$$\begin{cases} y = \dfrac{-1-bx}{a} \\ y = (\tan\theta)x \end{cases}$$

sistemi çözüldüğünde,

$$(\tan\theta)x = \frac{-1-bx}{a}$$
$$-1-bx = a(\tan\theta)x$$
$$x = \frac{-1}{a\tan\theta+b}$$

$$\cos_g\theta = \frac{-\cos\theta}{a\sin\theta+b\cos\theta}$$
$$\sin_g\theta = \frac{-\sin\theta}{a\sin\theta+b\cos\theta}$$

elde edilir.

VII.Bölge: $\frac{3\pi}{2} \le \theta \le \frac{7\pi}{4}$ iken,

$$\begin{cases} y = \dfrac{bx-1}{a} \\ y = (\tan\theta) \end{cases}$$

sistemi çözüldüğünde,

$$(\tan\theta)x = \frac{bx-1}{a}$$
$$bx-1 = a(\tan\theta)x$$
$$x = \frac{-1}{a\tan\theta-b}$$

$$\cos_g\theta = \frac{-\cos\theta}{a\sin\theta-b\cos\theta}$$
$$\sin_g\theta = \frac{-\sin\theta}{a\sin\theta-b\cos\theta}$$

elde edilir.

VIII.Bölge: $\frac{7\pi}{4} \le \theta \le 2\pi$ iken,

$$\begin{cases} y = \dfrac{ax-1}{b} \\ y = (\tan\theta)x \end{cases}$$

sistem çözüldüğünde,

$$(\tan\theta)x = \frac{ax-1}{b}$$
$$ax - 1 = b(\tan\theta)x$$
$$x = \frac{-1}{b\tan\theta - a}$$

$$\cos_g\theta = \frac{-\cos\theta}{b\sin\theta - a\cos\theta}$$
$$\sin_g\theta = \frac{-\sin\theta}{b\sin\theta - a\cos\theta}$$

elde edilir.

Bölgelere göre oluşan $\cos_g\theta$ ve $\sin_g\theta$ değerlerini aşağıdaki tabloda özetleyebiliriz.

Bölge	$\cos_g\theta$	$\sin_g\theta$
I	$\frac{\cos\theta}{b\sin\theta + a\cos\theta}$	$\frac{\sin\theta}{b\sin\theta + a\cos\theta}$
II	$\frac{\cos\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta}$	$\frac{\sin\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta}$
III	$\frac{\cos\theta}{a\sin\theta - b\cos\theta}$	$\frac{\sin\theta}{a\sin\theta - b\cos\theta}$
IV	$\frac{\cos\theta}{b\sin\theta - a\cos\theta}$	$\frac{\sin\theta}{b\sin\theta - a\cos\theta}$
V	$\frac{-\cos\theta}{b\sin\theta + a\cos\theta}$	$\frac{-\sin\theta}{b\sin\theta + a\cos\theta}$
VI	$\frac{-\cos\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta}$	$\frac{-\sin\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta}$
VII	$\frac{-\cos\theta}{a\sin\theta - b\cos\theta}$	$\frac{-\sin\theta}{a\sin\theta - b\cos\theta}$
$VIII$	$\frac{-\cos\theta}{b\sin\theta - a\cos\theta}$	$\frac{-\sin\theta}{b\sin\theta - a\cos\theta}$

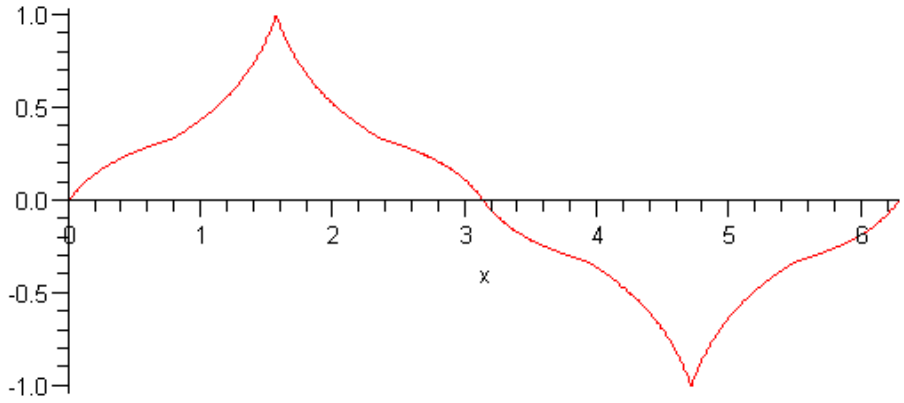
Bu tabloyu da mutlak değer kullanarak şu şekilde kısaltabiliriz.

$$\cos_g\theta = \begin{cases} \dfrac{\cos\theta}{a\,|\cos\theta| + b\,|\sin\theta|}, |\tan\theta| \leq 1 \\ \\ \dfrac{\cos\theta}{b\,|\cos\theta| + a\,|\sin\theta|}, |\tan\theta| \geq 1 \end{cases}$$

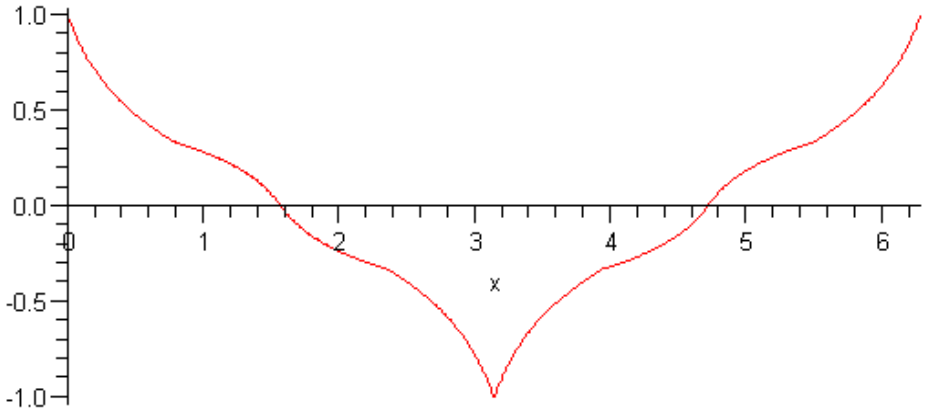
ve

$$\sin_g \theta = \begin{cases} \dfrac{\sin\theta}{a\,|\cos\theta| + b\,|\sin\theta|}, |\tan\theta| \leq 1 \\ \\ \dfrac{\sin\theta}{b\,|\cos\theta| + a\,|\sin\theta|}, |\tan\theta| \geq 1. \end{cases}$$

Genelleştirilmiş mutlak değer sinüs ve genelleştirilmiş mutlak değer kosinüs fonksiyonlarının grafikleri $a = 2$ ve $b = 1$ durumu için Şekil 5.1.2 ve Şekil 5.1.3 de verilmiştir.



Şekil 5.1.2 a=2, b=1 iken Genelleştirilmiş mutlak değer sinüs fonksiyonu



Şekil 5.1.3 a=2,b=1 iken Genelleştirilmiş mutlak değer kosinüs fonksiyonu

5.2 Genelleştirilmiş Mutlak Değer Trigonometrik Fonksiyonların Özellikleri

Trigonometrik fonksiyonlar açı ölçüsüne bağlı olarak tanımladığımızdan, tümler açılardaki özellikler genelleştirilmiş mutlak değer trigonometrik fonksiyonlarında da geçerlidir.

Yani,

$$\cos_g(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin_g\theta \text{ ve } \sin_g(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos_g\theta$$

Ayrıca

$$\tan(-x)=-\tan x$$

özelliğinden yararlanarak

$$\cos_g(-x)=\cos_g x \text{ ve } \sin_g(-x)=-\sin_g x$$

olduğu kolaylıkla görülebilir.

I.Durum:

$-\theta$ yı VIII. bölge açısı olarak alırsak, θ I. bölge açısıdır.

$$\begin{aligned}\cos_g(-\theta) &= \frac{-\cos(-\theta)}{b\sin(-\theta)-a\cos(-\theta)} = \frac{-\cos\theta}{-b\sin\theta-a\cos\theta} = \cos_g\theta\\ \sin_g(-\theta) &= \frac{-\sin(-\theta)}{b\sin(-\theta)-a\cos(-\theta)} = \frac{\sin\theta}{-\sin\theta-a\cos\theta} = -\sin_g\theta\end{aligned}$$

II.Durum:

$-\theta$ yı VII. bölge açısı olarak alırsak bu taktirde, θ II.bölge açısıdır.

$$\begin{aligned}\cos_g(-\theta) &= \frac{-\cos(-\theta)}{a\sin(-\theta)-b\cos(-\theta)} = \frac{-\cos\theta}{-a\sin\theta-b\cos\theta} = \cos_g\theta\\ \sin_g(-\theta) &= \frac{-\sin(-\theta)}{a\sin(-\theta)-b\cos(-\theta)} = \frac{\sin\theta}{-a\sin\theta-b\cos\theta} = -\sin_g\theta\end{aligned}$$

III.Durum:

$-\theta$ yı VI.bölge açısı olarak alırsak, θ nın III. bölge açısı olduğunu görürüz.

$$\begin{aligned}\cos_g(-\theta) &= \frac{-\cos(-\theta)}{a\sin(-\theta)+b\cos(-\theta)} = \frac{-\cos\theta}{-a\sin\theta+b\cos\theta} = \cos_g\theta\\ \sin_g(-\theta) &= \frac{-\sin(-\theta)}{a\sin(-\theta)+b\cos(-\theta)} = \frac{\sin\theta}{-a\sin\theta+b\cos\theta} = -\sin_g\theta\end{aligned}$$

VI.Durum:

$-\theta$ yı V.bölge açısı olarak alırsak, θ IV.bölge açısıdır.

$$\begin{aligned}\cos_g(-\theta) &= \frac{-\cos(-\theta)}{b\sin(-\theta)+a\cos(-\theta)} = \frac{-\cos\theta}{-b\sin\theta+a\cos\theta} = \cos_g\theta\\ \sin_g(-\theta) &= \frac{-\sin(-\theta)}{b\sin(-\theta)+a\cos(-\theta)} = \frac{\sin\theta}{-b\sin\theta+a\cos\theta} = -\sin_g\theta\end{aligned}$$

Böylece her bölge için $\cos_g(-\theta)=\cos_g\theta$, $\sin_g(-\theta)=-\sin_g\theta$ olduğunu göstermiş olduk.

Öklidyen geometrideki iyi bilinen *Pisagor özdeşliği*, Genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde $(\cos_g x, \sin_g x)$ birim çember üzerinde bir nokta olduğundan

$$a\max\{|\cos_g x|,|\sin_g x|\}+b\min\{|\cos_g x|,|\sin_g x|\}=1. \tag{5.2.1}$$

biçimindedir.

Pisagor özdeşliğinin, her iki tarafını $|\cos_g x|$ e bölersek *sekant özdeşliği*

$$a\max\{1,|\tan_g x|\}+b\min\{1,|\tan_g x|\}=|\sec_g x| \tag{5.2.2}$$

ve $|\sin_g x|$ e bölersek de

$$a\max\{1,|\cot_g x|\}+b\min\{1,|\cot_g x|\}=|\operatorname{cosect}_g x| \tag{5.2.3}$$

kosekant özdeşliği elde edilir.

5.2.1 Genelleştirilmiş mutlak değer fonksiyonlarının indirgeme formülleri

Öklidyen düzlem trigonometride her θ açısının trigonometrik fonksiyonları I. bölgede karşılık gelen açının trigonometrik fonksiyonları ile ifade edilebiliyordu. Genelleştirilmiş mutlak değer düzleminin birim çemberinin i. bölgesindeki θ_i açısına karşılık I. ve II. bölgelerde ilişkili olan açı θ_i' ile gösterilirse θ_i ve θ_i' arasındaki ilişki,

Bölge	θ_i	θ'_i
I	θ_1	$\theta'_1 = \theta_1$
II	θ_2	$\theta'_2 = \theta_2$
III	θ_3	$\theta'_3 = \pi - \theta_3$
IV	θ_4	$\theta'_4 = \pi - \theta_4$
V	θ_5	$\theta'_5 = \pi + \theta_5$
VI	θ_6	$\theta'_6 = \pi + \theta_6$
VII	θ_7	$\theta'_7 = 2\pi - \theta_7$
VIII	θ_8	$\theta'_8 = 2\pi - \theta_8$

biçiminde verilir. Genelleştirilmiş mutlak değer trigonometrik fonksiyonları için θ_i ve θ'_i arasındaki ilişki aşağıdaki gibi elde edilir.

$$
\begin{aligned}
\cos_g\theta_3 &= \frac{\cos(\pi-\theta_3)}{a\sin(\pi-\theta_3)-b\cos(\pi-\theta_3)} = \frac{-\cos\theta'_3}{a\sin\theta'_3+b\cos\theta'_3} = -\cos_g\theta'_3\\
\sin_g\theta_3 &= \frac{\sin(\pi-\theta_3)}{a\sin(\pi-\theta_3)-b\cos(\pi-\theta_3)} = \frac{\sin\theta'_3}{a\sin\theta'_3+b\cos\theta'_3} = \sin_g\theta'_3\\
\cos_g\theta_4 &= \frac{\cos(\pi-\theta_4)}{b\sin(\pi-\theta_4)-a\cos(\pi-\theta_4)} = \frac{-\cos\theta'_4}{b\sin\theta'_4+\cos\theta'_4} = -\cos_g\theta'_4\\
\sin_g\theta_4 &= \frac{-\sin(\pi-\theta_4)}{a\sin(\pi-\theta_4)+b\cos(\pi-\theta_4)} = \frac{-\sin\theta'_4}{a\sin\theta'_4-b\cos\theta'_4} = \sin_g\theta'_4\\
\cos_g\theta_5 &\quad \frac{-\cos(\pi+\theta_5)}{b\sin(\pi+\theta_5)+a\cos(\pi+\theta_5)} = \frac{\cos\theta'_5}{-b\sin\theta'_5-a\cos\theta'_5} = -\cos_g\theta'_5\\
\sin_g\theta_5 &= \frac{-\sin(\pi+\theta_5)}{b\sin(\pi+\theta_5)+a\cos(\pi+\theta_5)} = \frac{+\sin\theta'_5}{-b\sin\theta'_5-a\cos\theta_5} = -\sin_g\theta'_5\\
\cos_g\theta_6 &= \frac{-\cos(\pi+\theta_6)}{a\sin(\pi+\theta_6)+b\cos(\pi+\theta_6)} = \frac{\cos\theta'_6}{-a\sin\theta'_6-b\cos\theta'_6} = -\cos_g\theta'_6\\
\sin_g\theta_6 &= \frac{-\sin(\pi+\theta_6)}{a\sin(\pi+\theta_6)+b\cos(\pi+\theta_6)} = \frac{\sin\theta'_6}{-a\sin\theta'_6-b\cos\theta'_6} = -\sin_g\theta'_6\\
\cos_g\theta_7 &= \frac{-\cos(2\pi-\theta_7)}{a\sin(2\pi-\theta_7)-b\cos(2\pi-\theta_7)} = \frac{-\cos\theta'_7}{-a\sin\theta'_7-b\cos\theta'_7} = \cos_g\theta'_7\\
\sin_g\theta_7 &= \frac{-\sin(2\pi-\theta_7)}{a\sin(2\pi-\theta_7)-b\cos(2\pi-\theta_7)} = \frac{\sin\theta'_7}{-a\sin\theta'_7-b\cos\theta'_7} = -\sin_g\theta'_7\\
\cos_g\theta_8 &= \frac{-\cos(2\pi-\theta_8)}{b\sin(2\pi-\theta_8)-a\cos(2\pi-\theta_8)} = \frac{-\cos\theta'_8}{-b\sin\theta'_8-a\cos\theta'_8} = \cos_g\theta'_8\\
\sin_g\theta_8 &= \frac{-\sin(2\pi-\theta_8)}{b\sin(2\pi-\theta_8)-a\cos(2\pi-\theta_8)} = \frac{\sin\theta'_8}{-b\sin\theta'_8-a\cos\theta'_8} = -\sin_g\theta'_8
\end{aligned}
$$

Artık $\sin_g\theta_i$ ve $\cos_g\theta_i$ nin değerlerini hesaplamak için I. ve II. bölgedeki $\sin_g\theta'_i$ ve $\cos_g\theta'_i$ değerlerini bilmemiz yeterli olacaktır.

5.2.2 Genelleştirilmiş mutlak değer fonksiyonlarının toplam-fark formülleri

Genelleştirilmiş mutlak değer düzleminde trigonometrik fonksiyonlar için toplam fark formülleri yine tanjant fonksiyonundan yararlanarak elde edilebilir.

$$\tan(u \pm v) = \begin{cases} \dfrac{\tan u \pm \tan v}{1 \mp \tan u . \tan v} \end{cases}$$

dan

$$\frac{\sin_g(u \pm v)}{\cos_g(u \pm v)} = \frac{\dfrac{\sin_g u}{\cos_g u} \pm \dfrac{\sin_g v}{\cos_g v}}{1 \mp \dfrac{\sin_g u}{\cos_g u} . \dfrac{\sin_g v}{\cos_g v}}$$

ve

$$\frac{\sin_g(u \pm v)}{\cos_g(u \pm v)} = \frac{\sin_g u . \cos_g v \pm \sin_g v . \cos_g u}{\cos_g u . \cos_g v \mp \sin_g u . \sin_g v}$$

dir. Eşitliğin her iki tarafından pay ve paydalar eşitlenirse,

$$\sin_g(u \pm v) = \sin_g u . \cos_g v \pm \sin_g v . \cos_g u \tag{5.2.4}$$

ve

$$\cos_g(u \pm v) = \cos_g u . \cos_g v \mp \sin_g u . \sin_g v \tag{5.2.5}$$

elde edilir. Böylece genelleştirilmiş mutlak değer trigonometrik fonksiyonların toplam fark formüllerinin Öklidyen benzerleri gibi olduğu görülür.

5.2.3 Genelleştirilmiş mutlak değer trigonometrik fonksiyonların yarım açı formülleri

Trigonometrik fonksiyonlar için yarım açı formülleri mutlak değer sinüs ve mutlak değer kosinüs fonksiyonlarının toplam formülleri 5.2.4 ve 5.2.5 de $u = v$ alınarak,

$$\sin_g(u + u) = \sin_g u . \cos_g u + \sin_g u . \cos_g u$$

den

$$\sin_g 2u = 2 \sin_g u . \cos_g u \tag{5.2.6}$$

ve

$$\cos_g(u + u) = \cos_g u . \cos_g u - \sin_g u . \cos_g u$$

den

$$\cos_g 2u = \cos_g^2 u - \sin_g^2 u \tag{5.2.7}$$

yarım açı formülleri elde edilir.

5.3 Referans Açılı Genelleştirilmiş Mutlak Değer Trigonometrik Fonksiyonlar

θ, genelleştirilmiş mutlak değer birim çemberi üzerinde, α referans açılı açı olsun. Bu durumda referans açılı kosinüs ve sinüs fonksiyonlarını standart pozisyondaki $\alpha + \theta$ ve α açıları yardımı ile fark formüllerinden yaralanarak elde edebiliriz.

Referans açılı genelleştirilmiş mutlak değer kosinüs fonksiyonu, gcos

$$\text{gcos}(\theta) = \cos_g(\theta + \alpha - \alpha) = \cos_g(\theta + \alpha).\cos_g \alpha + \sin_g(\theta + \alpha).\sin_g \alpha \tag{5.3.1}$$

ve referans açılı genelleştirilmiş mutlak değer sinüs fonksiyonu, gsin

$$\text{gsin}(\theta) = \sin_g(\theta + \alpha - \alpha) = \sin_g(\theta + \alpha).\cos_g \alpha - \sin_g \alpha.\cos_g(\theta + \alpha) \tag{5.3.2}$$

biçiminde elde edilir.

Standart pozisyonda ki açılar için $\alpha = 0$ olduğundan $g\sin\theta = \sin_g \theta$ ve $g\cos\theta = \cos_g \theta$ dir.

5.4 Genelleştirilmiş Mutlak Değer Uzunluğunun Dönmeler Altındaki Değişimi

Öklidyen dönmelerden sonra bir doğru parçasının genelleştirilmiş mutlak değer uzunluğunun değişimini aşağıdaki teoremle verilebilir (Bayar, Ekmekçi ve Akça, 2006).

Teorem 5.4.1: O noktası orijin olmak üzere OA x-ekseni üzerinde olmayan ve ox-ekseninin pozitif yönü ile α açısı yapan doğru parçası ve $d_g(O, A) = k$ olsun. Eğer OA', OA nın orijin etrefında θ kadar dönme altında görüntüsü ise

$$d_g(O, A') = k\sqrt{\frac{\cos_g^2 \alpha + \sin_g^2 \alpha}{\left(\cos_g^2(\alpha + \theta)\right) + \sin_g^2(\alpha + \theta)}}$$

dir.

İspat: Bütün dönmeler altında Öklidyen uzunluklar korunduğundan OA′ ile OA nın Öklidyen uzunlukları eşittir.

$$d_E(O, A') = d_E(O, A) \tag{5.4.1}$$

A'nın koordinatları $\cos_g, \sin_g$ ve k ya bağlı olarak $A = (k\cos_g \alpha, k\sin_g \alpha)$ dır. $d_g(O, A') = k'$ dersek, A' nin koordinatları ,

$$A' = (k'\cos_g(\alpha+\theta), k'\sin_g(\alpha+\theta))$$

olur. Bunları 5.4.1 de kullanırsak

$$\sqrt{(k'\cos_g(\alpha+\theta))^2 + k'\sin_g(\alpha+\theta)^2} = \sqrt{(k\cos_g\alpha)^2 + (k\sin_g\alpha)^2}$$

$$k'\sqrt{\left(\cos_g^2(\alpha+\theta)\right) + \sin_g^2(\alpha+\theta)} = k\sqrt{\left(\cos_g^2\alpha + \sin_g^2\alpha\right)}$$

$$k' = k\sqrt{\frac{\cos_g^2\alpha + \sin_g^2\alpha}{\left(\cos_g^2(\alpha+\theta)\right) + \sin_g^2(\alpha+\theta)}}$$

elde edilir.

Sonuç 5.4.1: OA Doğru parçasının eğimi sıfır yani ox eksenine paralel ise

$$d_g(O, A') = \frac{k}{\sqrt{\cos_g^2\theta + \sin_g^2\theta}}$$

dir.

İspat: OA nın eğimi 0 olduğundan $\alpha = 0$ dır ve θ referans açısı konumunda olur. Teoremde $\alpha = 0$ alırsak

$$\begin{aligned} d_g(O, A') = \quad & k\sqrt{\frac{\cos_g^2 0 + \sin_g^2 0}{\left(\cos_g^2(0+\theta)\right) + \sin_g^2(0+\theta)}} \\ & = k\sqrt{\frac{1+0}{\cos_g^2\theta + \sin_g^2\theta}} \\ & = \frac{k}{\sqrt{\cos_g^2\theta + \sin_g^2\theta}} \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 5.4.2: Düzlemin ötelemeleri altında genelleştirilmiş mutlak değer uzunlukları korunduğundan teorem herhangi bir doğru parçası içinde geçerlidir.

BÖLÜM 6
$\alpha-$DÜZLEM GEOMETRİSİNDE TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

6.1 Düzlem $\alpha-$Geometrisi Trigonometrik Fonksiyonları

Bu bölümde $\alpha-$metriği kullanılarak geliştirilen düzlem geometrisinin trigonometrik fonksiyonları Öklidyen düzlemdekine benzer olarak incelenmiştir. Temel kavramlarda verildiği gibi $\alpha-$uzaklığı Songlin Tian tarafından (Tian,2005) de verilmiştir.

Analitik düzlemde $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ noktaları arasındaki Öklidyen uzaklık fonksiyonu d_E yerine analitik düzlemde

$$\Delta_{P_1P_2} = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \quad \text{ve} \quad \delta_{P_1P_2} = \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

$\alpha \in [0, \pi/4]$ olmak üzere

$$d_\alpha : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$$
$$d_\alpha(P_1, P_2) = \Delta_{P_1P_2} + (\sec\alpha - \tan\alpha)\,\delta_{P_1P_2}$$

olarak tanımlanan uzaklık fonksiyonu alınarak $\alpha-$düzlemi oluşturulmaktadır. $\alpha-$düzleminin noktaları ve doğruları Öklidyen düzlemdeki noktalar ve doğrularla aynı olup, açı ölçümüde Öklidyen düzlemdekinin aynıdır. Uzaklık fonksiyonu farklı olduğundan Öklidyen düzlemdeki uzaklık kavramını içeren konuların $\alpha-$geomerisinde çalışılması Ökliyen olmayan düzlemlerde geometrinin gelişmesine katkıda bulunmaktadı.Bu bölümde $\alpha-$düzlem geometride trigonometrik fonsiyonları Öklidyen düzlemdeki trigonometrik fonksiyonlara benzer olarak incelenmektedir.

Tanım 6.1.1: $\alpha-$düzleminde orjinden 1 birim d_α uzaklıktaki noktaların geometrik yerine $\alpha-$*birim çemberi* denir.

$\alpha-$birim çemberi $O = (0, 0)$ olmak üzere $d_\alpha(O, X) = \Delta_{OX} + (\sec\alpha - \tan\alpha)\,\delta_{OX} = 1$ şartını sağlayan $X = (x, y)$ noktalarının geometrik yeridir. Bunu açarsak, birim çemberin denklemi

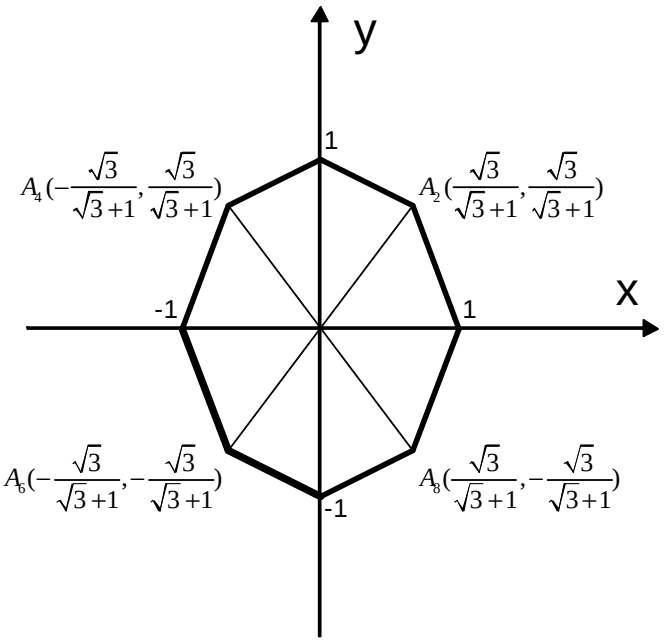
$$\max\{|x|, |y|\} + (\sec\alpha - \tan\alpha)\min\{|x|, |y|\} = 1, \quad \alpha \in [0, \pi/4] \tag{6.1.1}$$

olur.

Uzaklık fonksiyonunda $(\sec\alpha - \tan\alpha) = k$ dersek, k azalan bir fonksiyon olup, en küçük $\sqrt{2} - 1$ ve en büyük 1 değeri alır. $k = 1$ için taksi metriği, $k = \sqrt{2} - 1$ için

Çin-dama metriği elde edilir. Dolayısı ile $\alpha-$düzleminin birim çemberleri taksi ve Çin dama birim çemberini içeren, bunların arasında kalan, köşeleri, $A_1 = (1,0)$, $A_2 = (\frac{1}{1+(\sec\alpha-\tan\alpha)}, \frac{1}{1+(\sec\alpha-\tan\alpha)})$, $A_3 = (0,1)$, $A_4 = (-\frac{1}{1+(\sec\alpha-\tan\alpha)}, \frac{1}{1+(\sec\alpha-\tan\alpha}$ $A_5 = (-1,0)$, $A_6 = (-\frac{1}{1+(\sec\alpha-\tan\alpha)}, -\frac{1}{1+(\sec\alpha-\tan\alpha)})$, $A_7 = (0,-1)$,

$A_8 = (\frac{1}{1+(\sec\alpha-\tan\alpha)}, -\frac{1}{1+(\sec\alpha-\tan\alpha)})$ olan sekizgenlerdir. $\alpha = \frac{\pi}{6}$ nin durumuna göre elde edilen $d_{\frac{\pi}{6}}$-birim çemberi Şekil 6.1.1 de verilmiştir.



Şekil 6.1.1 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ için α-birim çemberi

$P(x,y)$ noktası ile $O(0,0)$ nin oluşturduğu doğru parçasının x-ekseninin pozitif yönü ile yaptığı açı θ olmak üzere θ nın $\alpha-$ *kosinüs* ve α-*sinüs* fonksiyonlarını sırası ile $\cos_\alpha$ ve $\sin_\alpha$ ile gösterilmek üzere $x = \cos_\alpha\theta$, $y = \sin_\alpha\theta$ olarak tanımlanabilir. $\alpha-$birim çemberi üzerinde $(\cos_\alpha\theta, \sin_\alpha\theta)$ noktası orijinden geçen ox-ekseni ile pozitif yönde θ açısı yapan doğrunun birim çemberi kestiği noktadır. Bu doğrunun eğimi alınan metriğe göre değişmediğinden $\alpha-$düzleminde $\alpha-$ *tanjant* fonksiyonu Öklidyen düzlemdekinin aynısıdır. Yani $\alpha-$ tanjant fonksiyonunu $\tan_\alpha$ ile gösterilirse,

$$\tan_\alpha\theta = \tan\theta$$

dir.

Böylece $\alpha-$kosinüs ve $\alpha-$sinüs fonksiyonları bildiğimiz tanjant fonksiyonu cinsinden elde edilebilir. Birim çember ile orijinden geçen eğimi $\tan\theta$ olan doğrunun oluşturduğu sistem

$$\begin{cases} \max\{|x|,|y|\} + (\sec\alpha - \tan\alpha)\min\{|x|,|y|\} = 1, & \alpha \in [0,\pi/4] \\ y = (\tan\theta)x \end{cases} \tag{6.1.2}$$

dir ve $y = (\tan\theta)x$ birim çember denkleminde yerine yazarak $|x|$ çekilirse,

$$\begin{aligned} \max\{|x|,|(\tan\theta)x|\} + (\sec\alpha - \tan\alpha)\min\{|x|,|(\tan\theta)x|\} &= 1, \\ |x|\left(\max\{1,|\tan\theta|\} + (\sec\alpha - \tan\alpha)\min\{1,|\tan\theta|\}\right) &= 1 \\ |x| = \frac{1}{\left(\max\{1,|(\tan\theta)|\} + (\sec\alpha - \tan\alpha)\min\{1,|(\tan\theta)|\}\right)} & \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son denklemden $x = \cos_\alpha\theta$, θ nın durumuna göre 8 bölgede çözülebilir:

I.Bölge: $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}$ iken,

$$x = \cos_\alpha\theta = \frac{1}{1 + (\sec\alpha - \tan\alpha)(\tan\theta)}$$

olur.

II.Bölge: $\dfrac{\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ iken,

$$x = \cos_\alpha\theta = \frac{1}{\tan\theta + (\sec\alpha - \tan\alpha)}$$

elde edilir.

III.Bölge: $\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{3\pi}{4}$ iken

$$x = \cos_\alpha\theta = \frac{1}{-\tan\theta + (\sec\alpha - \tan\alpha)}$$

olur.

IV.Bölge: $\dfrac{3\pi}{4} \le \theta \le \pi$ iken,

$$x = \cos_\alpha\theta = \frac{1}{1 - (\sec\alpha - \tan\alpha)(\tan\theta)}$$

elde edilir.

V.Bölge: $\pi \leq \theta \leq \dfrac{5\pi}{4}$ iken,

$$x = \cos_\alpha \theta = \frac{1}{1 + (\sec\alpha - \tan\alpha)(\tan\theta)}$$

dir.

VI.Bölge: $\dfrac{5\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{3\pi}{2}$ iken,

$$x = \cos_\alpha \theta = \frac{1}{\tan\theta + (\sec\alpha - \tan\alpha)}$$

olur.

VII.Bölge: $\dfrac{3\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{7\pi}{4}$ iken,

$$x = \cos_\alpha \theta = \frac{1}{-\tan\theta + (\sec\alpha - \tan\alpha)}$$

olarak elde edilir.

VIII.Bölge: $\dfrac{7\pi}{4} \leq \theta \leq 2\pi$ iken,

$$x = \cos_\alpha \theta = \frac{1}{1 - (\sec\alpha - \tan\alpha)\tan\theta}$$

olur.

Bölgelere göre $\alpha-$kosinüs fonksiyonu aşağıdaki biçimde özetlenebilir:

$$\cos_\alpha \theta = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + (\sec\alpha - \tan\alpha)\,|\tan\theta|}, -\dfrac{\pi}{4} < \theta \leq \dfrac{\pi}{4} \text{ veya } \dfrac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{5\pi}{4} \\ \\ \dfrac{1}{|\tan\theta| + (\sec\alpha - \tan\alpha)}, \dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{3\pi}{4} \text{ veya } \dfrac{5\pi}{4} < \theta \leq \dfrac{7\pi}{4}. \end{cases} \tag{6.1.3}$$

$\alpha-$sinüs fonksiyonu $y = (\tan\theta)x$ eşitliğinde x yerine $\cos_\alpha \theta$ konularak

$$y = \sin_\alpha \theta = \tan\theta \cos_\alpha \theta$$

eşitliğinden kolayca hesaplanabilir.

I. Durum: $-\dfrac{\pi}{4} < \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$ veya $\dfrac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{5\pi}{4}$ iken

$$y = \sin_\alpha \theta = \tan\theta \cos_\alpha \theta = \frac{\tan\theta}{1 + (\sec\alpha - \tan\alpha)\,|\tan\theta|},$$

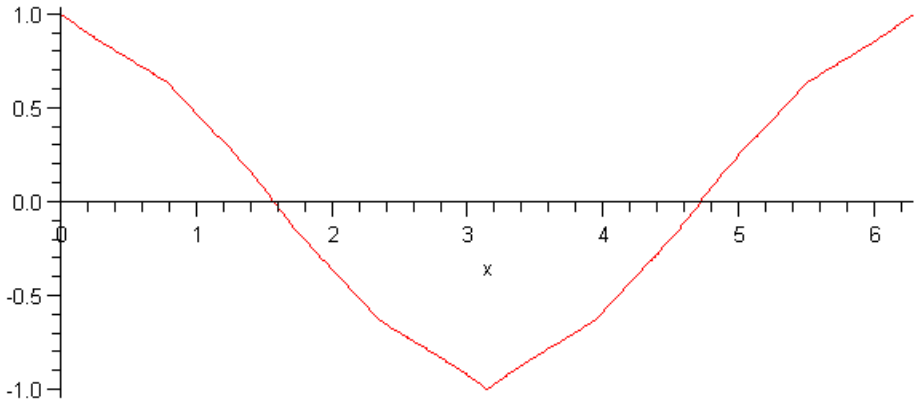
II. Durum: $\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{3\pi}{4}$ veya $\dfrac{5\pi}{4} < \theta \leq \dfrac{7\pi}{4}$ iken

$$y = \sin_\alpha \theta = \tan\theta \cos_\alpha \theta = \frac{\tan\theta}{|\tan\theta| + (\sec\alpha - \tan\alpha)}$$

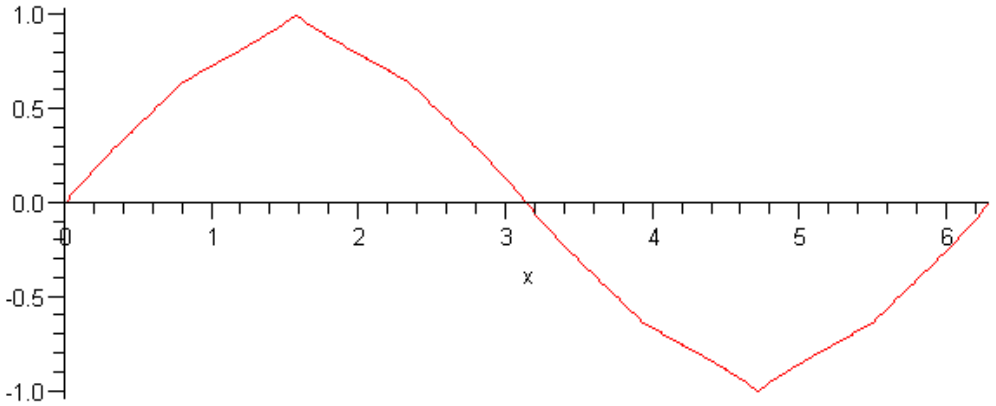
biçiminde elde edilir. Böylece $\alpha-$sinüs fonksiyonunu aşağıdaki biçimde verilebilir:

$$\sin_\alpha \theta = \begin{cases} \dfrac{\tan\theta}{1+(\sec\alpha-\tan\alpha)\,|\tan\theta|}, -\dfrac{\pi}{4} < \theta \leq \dfrac{\pi}{4} \text{ veya } \dfrac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{5\pi}{4} \\ \dfrac{\tan\theta}{|\tan\theta|+(\sec\alpha-\tan\alpha)}, \dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{3\pi}{4} \text{ veya } \dfrac{5\pi}{4} < \theta \leq \dfrac{7\pi}{4}. \end{cases} \tag{6.1.4}$$

$\alpha-$kosinüs ve $\alpha-$sinüs fonksiyonlarının grafikleri $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ için Şekil 6.1.2 ve Şekil 6.1.3 de verilmiştir.



Şekil 6.1.2 $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ iken $\alpha -$ Kosinüs Fonksiyonu



Şekil 6.1.3 $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ iken $\alpha -$ Sinüs Fonksiyonu

6.2 $\alpha-$Trigonometrik Fonksiyonların Özellikleri

$\alpha-$*sekant* ve $\alpha-$*kosekant* fonksiyonlarını Öklidyen düzlem trigonometrideki gibi tanımlayabiliriz:

$$\csc_\alpha \theta = \frac{1}{\sin_\alpha \theta} ve \sec_\alpha \theta = \frac{1}{\cos_\alpha \theta}$$

Kotanjant fonksiyonu tanjant fonksiyonu gibi kullanılan metriğe bağlı olmadığından $\cot_\alpha \theta = \cot \theta$ dir.

Trigonometrik fonksiyonlar açı ölçüsüne bağlı olarak tanımladığımızdan, tümler açılardaki özellikler α-düzlem trigonometride de geçerlidir.

Yani,

$$\cos_\alpha(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin_\alpha \theta \text{ ve } \sin_\alpha(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos_\alpha \theta$$

dir. $\tan(-\theta) = -\tan\theta$ özelliğini 6.1.3 ve 6.1.4 de kullanırsak

$$\cos_\alpha(-\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+(\sec\alpha-\tan\alpha)\left|\tan(-\theta)\right|}, -\dfrac{\pi}{4} < \theta \leq \dfrac{\pi}{4} \text{ veya } \dfrac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{5\pi}{4} \\ \dfrac{1}{\left|\tan(-\theta)\right|+(\sec\alpha-\tan\alpha)}, \dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{3\pi}{4} \text{ veya } \dfrac{5\pi}{4} < \theta \leq \dfrac{7\pi}{4}. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1+(\sec\alpha-\tan\alpha)\left|\tan\theta\right|}, -\dfrac{\pi}{4} < \theta \leq \dfrac{\pi}{4} \text{ veya } \dfrac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{5\pi}{4} \\ \dfrac{1}{\left|\tan\theta\right|+(\sec\alpha-\tan\alpha)}, \dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{3\pi}{4} \text{ veya } \dfrac{5\pi}{4} < \theta \leq \dfrac{7\pi}{4}. \end{cases}$$

$$= \cos_\alpha\theta$$

ve

$$\sin_\alpha(-\theta) = \begin{cases} \dfrac{\tan(-\theta)}{1+(\sec\alpha-\tan\alpha)\left|\tan(-\theta)\right|}, -\dfrac{\pi}{4} < \theta \leq \dfrac{\pi}{4} \text{ veya } \dfrac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{5\pi}{4} \\ \dfrac{\tan(-\theta)}{\left|\tan(-\theta)\right|+(\sec\alpha-\tan\alpha)}, \dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{3\pi}{4} \text{ veya } \dfrac{5\pi}{4} < \theta \leq \dfrac{7\pi}{4}. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-\tan\theta}{1+(\sec\alpha-\tan\alpha)\left|\tan\theta\right|}, -\dfrac{\pi}{4} < \theta \leq \dfrac{\pi}{4} \text{ veya } \dfrac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{5\pi}{4} \\ \dfrac{-\tan\theta}{\left|\tan\theta\right|+(\sec\alpha-\tan\alpha)}, \dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{3\pi}{4} \text{ veya } \dfrac{5\pi}{4} < \theta \leq \dfrac{7\pi}{4}. \end{cases}$$

$$= -\sin_\alpha\theta$$

olduğundan $\alpha-$kosinüs ve $\alpha-$sinüs fonksiyonları, Öklidyen kosinüs ve sinüs fonksiyonları ile aynı özelliği sağlarlar.

Öklidyen geometrideki iyi bilinen Pisagor özdeşliği, α- düzleminde $(\cos_\alpha x, \sin_\alpha x)$ birim çember üzerinde bir nokta olduğundan

$$\max\left\{\left|\cos_\alpha x\right|, \left|\sin_\alpha x\right|\right\} + (\sec\alpha-\tan\alpha)\min\left\{\left|\cos_\alpha x\right|, \left|\sin_\alpha x\right|\right\} = 1 \tag{6.2.1}$$

biçimindedir.

Pisagor özdeşliğinin her iki tarafını $\left|\cos_\alpha x\right|$ e bölerek α-sekant özdeşliği

$$\max\{1,|\tan_\alpha x|\}\,1+(\sec\alpha-\tan\alpha)\min\{1,|\tan_\alpha x|\}=|\sec_\alpha x| \tag{6.2.2}$$

ve $|\sin_\alpha x|$ e bölünerek α-kosekant özdeşliği

$$\max\{1,|\cot_\alpha x|\}+(\sec\alpha-\tan\alpha)\min\{1,|\cot_\alpha x|\}=|\mathrm{cosect}_\alpha x| \tag{6.2.3}$$

elde edilir.

6.2.1 α-Trigonometrik fonksiyonlarının toplam-fark formülleri

α-trigonometrik fonksiyonları için toplam fark formülleri yine tanjant fonksiyonundan yararlanarak elde edilebilir.

$$\tan(u\pm v)=\left\{\frac{\tan u\pm\tan v}{1\mp\tan u.\tan v}\right.$$

dan

$$\tan(u\pm v)=\frac{\sin_\alpha(u\pm v)}{\cos_\alpha(u\pm v)}=\frac{\dfrac{\sin_\alpha u}{\cos_\alpha u}\pm\dfrac{\sin_\alpha v}{\cos\alpha v}}{1\mp\dfrac{\sin_\alpha u}{\cos_\alpha u}\dfrac{\sin_\alpha v}{\cos_\alpha v}}$$

ve

$$\frac{\sin_\alpha(u\pm v)}{\cos_\alpha(u\pm v)}=\frac{\sin_\alpha u.\cos_\alpha v\pm\sin_\alpha v.\cos_\alpha u}{\cos_\alpha u.\cos_\alpha v\mp\sin_\alpha u.\sin_\alpha v}$$

dir. Eşitliğin her iki tarafından pay ve paydalar eşitlenirse,

$$\sin_\alpha(u\pm v)=\sin_\alpha u.\cos_\alpha v\pm\sin_\alpha v.\cos_\alpha u \tag{6.2.4}$$

ve

$$\cos_\alpha(u\pm v)=\cos_\alpha u.\cos_\alpha v\mp\sin_\alpha u.\sin_\alpha v \tag{6.2.5}$$

elde edilir. Böylece α-trigonometrik fonksiyonlarının toplam fark formüllerinin Öklidyen benzerleri gibi olduğu görülüyor.

6.2.2 α-Trigonometrik fonksiyonlarının yarım açı formülleri

α-trigonometrik fonksiyonlar için yarım açı formülleri α-sinüs ve α-kosinüs fonksiyonlarının toplam fark formülleri 6.2.4 ve 6.2.5 de $u=v$ alınarak,

$$\sin_\alpha(u+u)=\sin_\alpha u.\cos_\alpha u+\sin_\alpha u.\cos_\alpha u$$

den

$$\sin_\alpha 2u = 2\sin_\alpha u.\cos_\alpha u \tag{6.2.6}$$

ve

$$\cos_\alpha(u+u) = \cos_\alpha u.\cos_\alpha u - \sin_\alpha u.\sin_\alpha u$$

den

$$\cos_\alpha 2u = \cos^2_\alpha u - \sin^2_\alpha u \tag{6.2.7}$$

biçiminde elde edilir.

6.3 Referans Açılı α-Trigonometrik Fonksiyonlar

θ, α- birim çemberi üzerinde β referans açılı açı olsun. Bu durumda referans açılı kosinüs ve sinüs fonksiyonlarını standart pozisyonda ki $\beta+\theta$ ve β açıları yardımı ile fark formülleri 6.2.4 ve 6.2.5 den yaralanarak elde edebiliriz.

α- *referans açılı kosinüs fonksiyonu*nu αcos ile gösterirsek

$$\alpha\cos(\theta) = \cos_\alpha(\theta+\beta-\beta) = \cos_\alpha(\theta+\beta).\cos_\alpha\beta + \sin_\alpha(\theta+\beta).\sin_\alpha\beta \tag{6.3.1}$$

biçiminde elde edilir. Referans açılı α*-sinüs fonksiyonu*nu, αsin ile gösterirsek

$$\alpha\sin(\theta) = \sin_\alpha(\theta+\beta-\beta) = \sin_\alpha(\theta+\beta).\cos_\alpha\beta - \sin_\alpha\beta.\cos_\alpha(\theta+\beta) \tag{6.3.2}$$

olur.

6.4 α- Uzunluğunun Dönmeler Altındaki Değişimi

Öklidyen düzlemde bir doğru parçasının uzunluğu dönmelerden etkilenmez. Bir doğru parçasının $\alpha-$ uzunluğu değişimini aşağıdaki teoremle verebiliriz.

Teorem 6.4.1: O noktası orijin olmak üzere OA ox-ekseni üzerinde olmayan ve ox-ekseninin pozitif yönü ile β açısı yapan doğru parçası ve $d_\alpha(O,A)=k$ olsun. Eğer OA', OA nın orijin etrafında θ kadar dönme altında görüntüsü ise

$$d_\alpha(O,A') = k\sqrt{\frac{\cos^2_\alpha\beta + \sin^2_\alpha\beta}{(\cos^2_\alpha(\beta+\theta) + \sin^2_\alpha(\beta+\theta)}}$$

İspat: Bütün dönmeler altında Öklidyen uzunluklar korunduğundan OA' ile OA nın Öklidyen uzunlukları eşittir.

$$d_E(O,A') = d_E(O,A) \tag{6.4.1}$$

A'nın koordinatları $\cos_\alpha, \sin_\alpha$ ve k ya bağlı olarak $A=(k\cos_\alpha\beta, k\sin_\alpha\beta)$ dır. $d_\alpha(O,A')=k'$ dersek, A' nin koordinatları ,

$$A' = (k' \cos_\alpha(\beta+\theta), k' \sin_\alpha(\beta+\theta))$$

olur. Bunları 6.4.1 de kullanırsak

$$\sqrt{(k' \cos_\alpha(\beta+\theta))^2 + k' \sin_\alpha(\beta+\theta)^2} = \sqrt{(k \cos_\alpha \beta)^2 + (k \sin_\alpha \beta)^2}$$

$$k' \sqrt{(\cos^2_\alpha(\beta+\theta) + \sin^2_\alpha(\beta+\theta)} = k \sqrt{\left(\cos^2_\alpha \beta + \sin^2_\alpha \beta\right)}$$

$$k' = k \sqrt{\frac{\cos^2_\alpha \beta + \sin^2_\alpha \beta}{(\cos^2_\alpha(\beta+\theta) + \sin^2_\alpha(\beta+\theta)}}$$

elde edilir.

Sonuç 6.4.1: OA Doğru parçasının eğimi sıfır yani ox eksenine paralel ise

$$d_\alpha(O, A') = \frac{k}{\sqrt{\cos^2_\alpha \theta + \sin^2_\alpha \theta}}$$

dir.

İspat: OA nın eğimi 0 olduğundan $\alpha = 0$ dır ve θ referans açısı konumunda olur. Teoremde $\alpha = 0$ alırsak

$$\begin{aligned} d_\alpha(O, A') = \quad & k \sqrt{\frac{\cos^2_\alpha 0 + \sin^2_\alpha 0}{(\cos^2_\alpha(0+\theta) + \sin^2_\alpha(0+\theta)}} \\ & = k \sqrt{\frac{1+0}{\cos^2_\alpha \theta + \sin^2_\alpha \theta}} \\ & = \frac{k}{\sqrt{\cos^2_\alpha \theta + \sin^2_\alpha \theta}} \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 6.4.2: Düzlemin ötelemeleri altında α-uzunlukları korunduğundan teorem herhangi bir doğru parçası içinde geçerlidir.

.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Akça, Z. ve Kaya, R., 1997, On the Taxicab Trigonometry, Journal of Inst. of Math. &Comp. Sci., 10, 3, 151-159.

Akça, Z. ve Kaya, R., 2004, On The Distance Formulae in Three Dimensional Taxicab Space, Hadronic Journal, 27**,** 5, 521-532.

Akça, Z. ve Kaya, R., 2004, On the Norm in Higher Dimensional Taxicab Spaces, Hadronic Journal Supplement, 19, 491-501.

Akça, Z., Bayar A. ve Ekmekçi, S, 2007, The Norm in CC-plane geometry, Pi Mu Epsilon Journal, 6, 321-324.

Bayar, A., Ekmekçi, S. ve Özcan, M., 2008, On Trigonometric Functions and Cosine-Sine Rules in Taxicab Plane, International Electronic Journal of Geometry

Bayar, A. ve Ekmekçi, S., 2006, On the Chinese Checker Sine and Cosine Functions, Internationnal Journal of Mathematics and Analysis, 1, 3, 249-259.

Bayar, A., 2007, On The Trigonometric Functions in Maximum Metric, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, manuscript.

Bayar, A., Ekmekçi, S. ve Akça, Z., 2006, On The Plane Geometry with Generalized Absolute Value Metric, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, manuscript.

Birkhoff, George ve Beatley, Ralph, 1956, Basic Geometry, Newyork, Chelsea Pub. Co

Brisbin, R ve Artola, P.,1984, Taxicab Trigonometry, Pi Mu Epsilon J., 8, 89-95.

Chen, G. , 1992, Lines and Circles in Taxicab Geometry, M.S. thesis, Department of Mathematics and Computer Science, Centered Missouri State University, 43p.

Coxeter, H. S. M., 1961, Introduction to Geometry, John Wiley&Sons Inst., 443p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

Gelişgen, Ö. ve Kaya, R., 2006, On $\alpha-$Distance in Three Dimensional Space, Applied Sciences,8, 65-69.

Gelişgen, Ö. ve Kaya, R., 2006, Generalization of α-Distance to n-Dimensional Space, Scientific and Professional Journal of the Croatian Society for Geometry and Graphics (KoG), 10, 33-37.

Gelişgen, Ö. ve Kaya, R., 2006, CC – Analog of the Theorem of Pythagoras, Algebras, Groups and Geometries, 23, 2, 179-188.

Gelişgen, Ö., 2006, , Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, 149p.

Gelişgen, Ö., Kaya, R. ve Özcan, M., 2006, Distance Formulae in the Chinese Checker Space, International Journal of Pure and Applied Mathematical (IJPAM), 26, 1, 35-44.

Ho, Y.P. and Liu, Y., 1996, Parabolas in Taxicab Geometry, Missouri Journal of Mathematical Sciences, 2, 63-72.

Kaya, R., Akça, Z., Günaltılı, İ. ve Özcan, M., 2000, General Equation for Taxicab Conics and their Classification, Mitt. Math. Ges. Hamburg, 19, 135-148.

Kaya, R., 2002, Analitik Geometri, Bilim ve Teknik Yayınevi, 439p.

Kaya, R., 2004, Area Formula For Taxicab Triangles, Pi Mu Epsilon, 12, 4, 219-220.

Kaya, R. ve Çolakoglu, H. B., 2006, Taxicab Versions of Some Euclidean Theorems, International Journal of Pure and Applied Mathematical (IJPAM), 26, 1, 69-81.

Kaya, R., Gelişgen, Ö., Ekmekçi, S. ve Bayar, A., 2006, Group of Isometries of CC-Plane, Missouri J. of Math. Sci., 18, 3, 221-233.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

Kaya, R., Gelişgen, Ö., Ekmekçi, S. ve Bayar, A., 2006, Isometries of the Plane with Generalized Absolute Value Metric, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Manuscript.

Krause, E.F., 1975, Taxicab Geometry, Addison - Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 88p.

Laatsch, R., 1982, Pyramidal Sections in Taxicab Geometry, Mitt. Mathematics Magazine, 55, 205-212.

Martin, G. E., 1998, The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane, Springer, 509p.

Menger, K., 1952, You Will Like Geometry, Guildbook of the Illinois Institute of Technology Geometry Exhibit, Museum of Science and Industry, Chicago, IL.

Milman, R S. and Parker, G. D., 1991, Geometry a Metric Approach with Models, Springer, 370p

Minkowski, H., 1967, Gesammelte Abhandlungen, Chelsa Publishing Co. New York, 836p

Özcan, M., Ekmekçi, S. ve Bayar, A., 2002, The Taxicab Lengths Under Rotations, The Pi Mu Epsilon Journal, 11, 7, 381-384.

Özcan, M. ve Kaya, R., 2002, On the Ratio of Directed Lengths in the Taxicab Plane and Related Properties, Missouri Journal of Mathematical Sciences, 14, 2, 107-117.

Özcan, M. ve Kaya, R., 2003, Area of a Triangle in Terms of the Taxicab Distance, Missouri Journal of Mathematical Sciences, 15, 3, 178-185.

Reynolds, B. E., 1980, Taxicab Geometry, Pi Mu Epsilon Journal, 7, 77-88.

Sahilova, S., 2006, Maksimum Metriğinin Geometrisi Üzerine ,Doktora Tezi , Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, 149p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

Schattschneider, D. J., 1984, The Taxicab Group, Amer. Math. Monthly 91, 423-428.

So, S. S. and Al-Maskari, Z. S., 1995, Two Simple Examples in Non-Euclidean Geometry, Kansas Science Teacher (J. of Math. and Sciece Teaching), 11, 14-18.

So, S. S., 2002, Recent Developments in Taxicab Geometry, Cubo Matematica Educational, 4, 2, 79-96.

Thompson, A. C., 1996, Minkowski Geometry, Cambridge University Press, 346p.

Thompson, K. and Dray, T., 2000, Taxicab Angles and Trigonometry, Pi Mu Epsilon, 11, 87-96.

Tian, S., So, S. S. and Chen, G., 1997 , Concerning Circle in Taxicab Geometry, J Math. Educ. Sci. Technol., 28, 727-723Tian, S., 2005, Alpha Distance-A Generalization of Chinese Checker Distance and Taxicab Distance, Missouri Journal of Mathematical Sciences, 17, 1, 35-40.

Turan. M., 2004, Çin Dama Düzleminde Konikler Üzerine, Doktora tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, 149p.

Turan, M. ve Özcan, M., 2004, Two-foci CC-Ellipses, International Pure And Applied Mathematics (IJPAM), 16, 1, 119-127.

Turan, M.ve Özcan, M., 2005, Two-foci CC-Hyperbalos, International Pure And Applied Mathematics (IJPAM), 16, 4, 509-520.

Uymaz, A.Ç., 2002, Çin Dama Çemberi ve Özellikleri, Yüksek Lisans tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, 227p.

Yüksel, S., 2005 , CC-Trigonometri Üzerine, Yüksek Lisans Tezi , Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, 131p.