RLW Denkleminin Trigonometrik B-Spline Çözümleri

Pınar Keskin

DOKTORA TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Ağustos 2016

Trigonometric B-Spline Solutions of RLW Equation

Pınar Keskin

DOCTORAL DISSERTATION

Department of Mathematics and Computer Science

August 2016

RLW Denkleminin Trigonometrik B-Spline Çözümleri

Pınar Keskin

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. Dursun Irk

"Bu tez Eskişehir Osmangazi Üniversitesi tarafından "2014-581" no'lu BAP projesi çerçevesinde desteklenmiştir."

Ağustos 2016

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı Doktora öğrencisi Pınar Keskin'in DOKTORA tezi olarak hazırladığı "RLW Denkleminin Trigonometrik B-Spline Çözümleri" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek "oybirliği" ile kabul edilmiştir.

Danışman **:** Doç. Dr. Dursun IRK

İkinci Danışman **: ---**

Doktora Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. İdris DAĞ

Üye : Prof. Dr. Bülent SAKA

Üye : Doç. Dr. Yılmaz DERELİ

Üye : Doç. Dr. Ahmet BOZ

Üye : Doç. Dr. Dursun IRK

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Doç. Dr. Dursun Irk danışmanlığında hazırlamış olduğum "RLW Denklemi'nin Trigonometrik B-Spline Çözümleri" başlıklı DOKTORA tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 22/08/2016

Pınar Keskin

İmza

ÖZET

Bu doktora tezi sekiz bölümden oluşmaktadır. Bu tezde RLW denkleminin sayısal çözümleri zaman parçalanması için iki ve üç adımlı Adams Moulton, konum parçalanması için ise kuadratik, kübik, kuartik ve kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonların kullanıldığı Galerkin sonlu elemanları yöntemi kullanılarak elde edilmiştir.

Tezin kapsamı ve amacı ilk bölümde açıklanmıştır. İkinci bölümde, ilk olarak RLW denkleminin sayısal çözümü için daha önce yapılan bazı çalışmalardan bahsedilmiş, solitary ve soliton dalgalar ile ilgili kısa bir tarihçe verilmiştir. Sonrasında sonlu farklar, Crank-Nicolson ve Adams Moulton yöntemleri açıklanmıştır. Spline ve B-spline kavramları özetlendikten sonra kuadratik, kübik, kuartik ve kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonlar tanımlanmış ve elde edilmiştir. Sonlu elemanlar metodu ve RLW denkleminin sayısal çözümü araştırılırken kullanılacak olan Galerkin metodu açıklandıktan sonra son olarak sayısal çözümü araştırılacak olan RLW denklemi başlangıç ve sınır şartları ile birlikte tanıtılmıştır.

Bu tezde trigonometrik B-spline sonlu elemanlar Galerkin yöntemi ile RLW denkleminin sayısal çözümleri elde edilmiştir.

Sonraki dört bölümde RLW denklemi sırasıyla, kuadratik, kübik, kuartik ve kuintik B-spline fonksiyonlar kullanılarak Galerkin yöntemi ile sayısal olarak çözülmüştür. Her bir bölümde, solitary dalgasının hareketi ve iki solitary dalgasının çarpışması test problemleri kullanılarak önerilen sayısal yöntemin geçerliliği incelenmiştir.

Son iki bölümde ise, önerilen yöntemlerle ilgili sonuçlar verilmiş ve tartışılmıştır. Ayrıca ileriki çalışmalar için önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Trigonometrik B-spline, sonlu elemanlar yöntemi, Galerkin yöntemi, RLW denklemi, solitary ve soliton dalgaları

SUMMARY

This Ph.D. thesis consists of eight chapters. In this thesis, numerical solutions of Regularized Long Wave (RLW) equation are obtained using Galerkin finite element method, based on two and three steps Adams Moulton method for time discretization and quadratic, cubic, quartic and quintic trigonometric B-spline functions for the space discretization.

The scope and purpose of the thesis are explained in the first chapter. In the second chapter firstly, some earlier studies for the numerical solution of the RLW equation are mentioned and then a brief history for solitary and soliton waves are given. Then finite difference, Crank-Nicolson and Adams Moulton methods are described. After the concept of the spline and B-spline functions is outlined, quadratic, cubic, quartic and quantic trigonometric B-spline functions are described and constructed. Later on, finite element methods and Galerkin method which will be used for the numerical solution for the RLW equation are explained. Finally, RLW equation solved numerically in the next chapters is introduced together with their test problems.

In the next four chapters, regularized long wave (RLW) equation is solved numerically by using quadratic, cubic, quartic, quintic trigonometric B-spline Galerkin method, respectively. In each chapter, the efficiency of the present method is investigated by using motion of single solitary wave and interaction of two solitary waves test problems.

In last two chapters, some results about the proposed methods are given and discussed. Furthermore, for the next studies suggestions are given.

Keywords: Trigonometric B-spline, finite element method, Galerkin method, RLW equation, solitary and soliton waves.

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmalarım boyunca, gerek bilgi birikimi gerek tecrübesiyle bana rehberlik eden, yönlendiren, anlayışını ve yardımlarını benden esirgemeyen değerli danışmanım Doç. Dr. Dursun Irk'a; ders ve tez aşaması boyunca değerli fikirlerine başvurduğum hocalarım Prof. Dr. İdris Dağ ve Prof. Dr. Bülent Saka'ya; tez dönemimde "2014-581" no'lu BAP projesi kapsamında çalışmamı destekleyen Eskişehir Osmangazi Üniversitesi'ne; eğitim hayatım boyunca bana her türlü imkanı sağlayan, manevi desteklerini esirgemeyen değerli aileme ve dostlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Pınar Keskin

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET ..... **vi**
SUMMARY ..... **vii**
TEŞEKKÜR ..... **viii**
İÇİNDEKİLER ..... **ix**
ŞEKİLLER DİZİNİ ..... **xiii**
ÇİZELGELER DİZİNİ ..... **xv**
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ ..... **xvi**
1. GİRİŞ VE AMAÇ **1**
2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI **3**
2.1. Soliton Teorisine Fiziksel Bakış 6
2.2. Sonlu Farklar Yöntemi 8
2.2.1. Crank-Nicolson yöntemi 8
2.2.2. Adams Moulton yöntemi 9
2.3. Spline Fonksiyonlar 9
2.3.1. B-spline fonksiyonlar 11
2.3.2. Trigonometrik B-spline fonksiyonlar 15
2.3.2.1. Lineer trigonometrik B-spline 16
2.3.2.2. Kuadratik trigonometrik B-spline 19
2.3.2.3. Kübik trigonometrik B-spline 23
2.3.2.4. Kuartik trigonometrik B-spline 29
2.3.2.5. Kuintik trigonometrik B-spline 38
2.4. Sonlu Elemanlar Yöntemi 51
2.4.1. Galerkin yöntemi 53
2.5. RLW (Regularized Long Wave) Denklemi 54
2.5.1. Solitary dalgasının hareketi 55
2.5.2. İki solitary dalgasının çarpışması 55

İÇİNDEKİLER DİZİNİ (devam)

Sayfa

3. RLW DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ İÇİN TRİGONOMETRİK KUADRATİK B-SPLİNE GALERKİN YÖNTEMİ 57
3.1. İç İterasyonlu Lineerleştirme 57
3.1.1. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson yöntemi (KDCN1) 57
3.1.2. Zaman parçalanması için Adams Moulton yöntemi (KDAM1) 61
3.2. Lineerleştirme 1 64
3.2.1. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson yöntemi (KDCN2) 64
3.2.2. Zaman parçalanması için Adams Moulton yöntemi (KDAM2) 67
3.3. Lineerleştirme 2 71
3.3.1. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson yöntemi (KDCN3) 71
3.3.2. Zaman parçalanması için Adams Moulton yöntemi (KDAM3) 75
3.4. Test Problemleri 80
3.4.1. Solitary dalgasının hareketi test problemi 80
3.4.2. İki solitary dalgasının çarpışması test problemi 87
4. RLW DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ İÇİN TRİGONOMETRİK KÜBİK B-SPLİNE GALERKİN YÖNTEMİ 90
4.1. İç İterasyonlu Lineerleştirme 90
4.1.1. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson yöntemi (KBCN1) 90
4.1.2. Zaman parçalanması için Adams Moulton yöntemi (KBAM1) 93
4.2. Lineerleştirme 1 96
4.2.1. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson yöntemi (KBCN2) 96
4.2.2. Zaman parçalanması için Adams Moulton yöntemi (KBAM2) 98
4.3. Lineerleştirme 2 101
4.3.1. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson yöntemi (KBCN3) 101
4.3.2. Zaman parçalanması için Adams Moulton yöntemi (KBAM3) 104
4.4. Test Problemleri 107
4.4.1. Solitary dalgasının hareketi test problemi 107
4.4.2. İki solitary dalgasının çarpışması test problemi 115

İÇİNDEKİLER DİZİNİ (devam)

Sayfa

5. RLW DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ İÇİN TRİGONOMETRİK KUARTİK B-SPLİNE GALERKİN YÖNTEMİ 118
5.1. İç İterasyonlu Lineerleştirme 118
5.1.1. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson yöntemi (KRCN1) 118
5.1.2. Zaman parçalanması için Adams Moulton yöntemi (KRAM1) 121
5.2. Lineerleştirme 1 124
5.2.1. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson yöntemi (KRCN2) 124
5.2.2. Zaman parçalanması için Adams Moulton yöntemi (KRAM2) 126
5.3. Lineerleştirme 2 129
5.3.1. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson yöntemi (KRCN3) 129
5.3.2. Zaman parçalanması için Adams Moulton yöntemi (KRAM3) 132
5.4. Test Problemleri 135
5.4.1. Solitary dalgasının hareketi test problemi 135
5.4.2. İki solitary dalgasının çarpışması test problemi 143
6. RLW DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ İÇİN TRİGONOMETRİK KUİNTİK B-SPLİNE GALERKİN YÖNTEMİ 145
6.1. İç İterasyonlu Lineerleştirme 145
6.1.1. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson yöntemi (KNCN1) 145
6.1.2. Zaman parçalanması için Adams Moulton yöntemi (KNAM1) 148
6.2. Lineerleştirme 1 151
6.2.1. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson yöntemi (KNCN2) 151
6.2.2. Zaman parçalanması için Adams Moulton yöntemi (KNAM2) 153
6.3. Lineerleştirme 2 155
6.3.1. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson yöntemi (KNCN3) 155
6.3.2. Zaman parçalanması için Adams Moulton yöntemi (KNAM3) 158
6.4. Test Problemleri 162
6.4.1. Solitary dalgasının hareketi test problemi 162
6.4.2. İki solitary dalgasının çarpışması test problemi 170

İÇİNDEKİLER DİZİNİ (devam)

Sayfa

7. BULGULAR VE TARTIŞMA 173
8. SONUÇ VE ÖNERİLER 175
KAYNAKLAR DİZİNİ 177
ÖZGEÇMİŞ

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil **Sayfa**

2.1. Lineer B-spline 17
2.2. Lineer trigonometrik B-spline 17
2.3. Lineer B-spline şekil fonksiyonları 18
2.4. Lineer trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları 18
2.5. Kuadratik B-spline 21
2.6. Kuadratik trigonometrik B-spline 21
2.7. Kuadratik B-spline fonksiyonunun birinci türevi 21
2.8. Kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonunun birinci türevi 21
2.9. Kuadratik B-spline şekil fonksiyonları 22
2.10. Kuadratik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları 22
2.11. Kübik B-spline 26
2.12. Kübik trigonometrik B-spline 26
2.13. Kübik B-spline fonksiyonunun birinci türevi 26
2.14. Kübik trigonometrik B-spline fonksiyonunun birinci türevi 26
2.15. Kübik B-spline fonksiyonunun ikinci türevi 27
2.16. Kübik trigonometrik B-spline fonksiyonunun ikinci türevi 27
2.17. Kübik B-spline şekil fonksiyonları 27
2.18. Kübik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları 27
2.19. Kuartik B-spline 33
2.20. Kuartik trigonometrik B-spline 33
2.21. Kuartik B-spline fonksiyonunun birinci türevi 34
2.22. Kuartik trigonometrik B-spline fonksiyonunun birinci türevi 34
2.23. Kuartik B-spline fonksiyonunun ikinci türevi 34
2.24. Kuartik trigonometrik B-spline fonksiyonunun ikinci türevi 34
2.25. Kuartik B-spline fonksiyonunun üçüncü türevi 34
2.26. Kuartik trigonometrik B-spline fonksiyonunun üçüncü türevi 34
2.27. Kuartik B-spline şekil fonksiyonları 35
2.28. Kuartik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları 35

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

Şekil **Sayfa**

2.29. Kuintik B-spline 43
2.30. Kuintik trigonometrik B-spline 43
2.31. Kuintik B-spline fonksiyonunun birinci türevi 44
2.32. Kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonunun birinci türevi 44
2.33. Kuintik B-spline fonksiyonunun ikinci türevi 44
2.34. Kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonunun ikinci türevi 44
2.35. Kuintik B-spline fonksiyonunun üçüncü türevi 45
2.36. Kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonunun üçüncü türevi 45
2.37. Kuintik B-spline fonksiyonunun dördüncü türevi 45
2.38. Kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonunun dördüncü türevi 45
2.39. Kuintik B-spline şekil fonksiyonları 46
2.40. Kuintik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları 46
2.41. Kuintik B-spline şekil fonksiyonları 46
2.42. Kuintik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları 46
3.1. $h = \Delta t = 0.1$ için çeşitli zamanlardaki $U(x,t)$ 81
3.2. $h = \Delta t = 0.1$ için mutlak hata grafikleri 86
3.3. $h = \Delta t = 0.1$ için çeşitli zamanlardaki $U(x,t)$ 88
4.1. $h = \Delta t = 0.1$ için çeşitli zamanlardaki $U(x,t)$ 108
4.2. $h = \Delta t = 0.1$ için mutlak hata grafikleri 114
4.3. $h = \Delta t = 0.1$ için çeşitli zamanlardaki $U(x,t)$ 116
5.1. $h = \Delta t = 0.1$ için çeşitli zamanlardaki $U(x,t)$ 136
5.2. $h = \Delta t = 0.1$ için mutlak hata grafikleri 142
5.3. $h = \Delta t = 0.1$ için çeşitli zamanlardaki $U(x,t)$ 143
6.1. $h = \Delta t = 0.1$ için çeşitli zamanlardaki $U(x,t)$ 163
6.2. $h = \Delta t = 0.1$ için mutlak hata grafikleri 169
6.3. $h = \Delta t = 0.1$ için çeşitli zamanlardaki $U(x,t)$ 171

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge **Sayfa**

3.1. $t = 20$ anındaki hata normları, hesaplama zamanları ve mertebe 82
3.2. $h = \Delta t = 0.1$ seçimi için korunum sabitlerinin mutlak hataları 83
3.3. Sabit $\Delta t = 0.001$ ve farklı konum artımları için hata normları ve mertebeler 84
3.4. Sabit $h = 0.01$ ve farklı zaman artımları için hata normları ve mertebeler 85
3.5. İki solitary dalgasının çarpışması problemi için korunum sabitleri 89
4.1. $t = 20$ anındaki hata normları, hesaplama zamanları ve mertebe 110
4.2. $h = \Delta t = 0.1$ seçimi için korunum sabitlerinin mutlak hataları 111
4.3. Sabit $\Delta t = 0.001$ ve farklı konum artımları için hata normları ve mertebeler 112
4.4. Sabit $h = 0.01$ ve farklı zaman artımları için hata normları ve mertebeler 113
4.5. İki solitary dalgasının çarpışması problemi için korunum sabitleri 117
5.1. $t = 20$ anındaki hata normları, hesaplama zamanları ve mertebe 138
5.2. $h = \Delta t = 0.1$ seçimi için korunum sabitlerinin mutlak hataları 139
5.3. Sabit $\Delta t = 0.001$ ve farklı konum artımları için hata normları ve mertebeler 140
5.4. Sabit $h = 0.01$ ve farklı zaman artımları için hata normları ve mertebeler 141
5.5. İki solitary dalgasının çarpışması problemi için korunum sabitleri 144
6.1. $t = 20$ anındaki hata normları, hesaplama zamanları ve mertebe 165
6.2. $h = \Delta t = 0.1$ seçimi için korunum sabitlerinin mutlak hataları 166
6.3. Sabit $\Delta t = 0.001$ ve farklı konum artımları için hata normları ve mertebeler 167
6.4. Sabit $h = 0.01$ ve farklı zaman artımları için hata normları ve mertebeler 168
6.5. İki solitary dalgasının çarpışması problemi için korunum sabitleri 172

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
h	Konum adım uzunluğu
Δt	Zaman adım uzunluğu

Kısaltmalar	Açıklama
AM	Adams Moulton sonlu elemanlar yöntemi
CN	Crank-Nicolson sonlu elemanlar yöntemi
KBAM1	Kübik trigonometrik B-spline fonksiyonu ile iç iterasyonlu lineerleştirmenin kullanıldığı Adams Moulton yöntemi
KBAM2	Kübik trigonometrik B-spline fonksiyonu ile lineerleştirme 1 in kullanıldığı Adams Moulton yöntemi
KBAM3	Kübik trigonometrik B-spline fonksiyonu ile lineerleştirme 2 nin kullanıldığı Adams Moulton yöntemi
KBCN1	Kübik trigonometrik B-spline fonksiyonu ile iç iterasyonlu lineerleştirmenin kullanıldığı Crank-Nicolson yöntemi
KBCN2	Kübik trigonometrik B-spline fonksiyonu ile lineerleştirme 1 in kullanıldığı Crank-Nicolson yöntemi
KBCN3	Kübik trigonometrik B-spline fonksiyonu ile lineerleştirme 2 nin kullanıldığı Crank-Nicolson yöntemi
KDAM1	Kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonu ile iç iterasyonlu lineerleştirmenin kullanıldığı Adams Moulton yöntemi
KDAM2	Kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonu ile lineerleştirme 1 in kullanıldığı Adams Moulton yöntemi
KDAM3	Kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonu ile lineerleştirme 2 nin kullanıldığı Adams Moulton yöntemi
KDCN1	Kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonu ile iç iterasyonlu lineerleştirmenin kullanıldığı Crank-Nicolson yöntemi
KDCN2	Kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonu ile lineerleştirme 1 in kullanıldığı Crank-Nicolson yöntemi
KDCN3	Kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonu ile lineerleştirme 2 nin kullanıldığı Crank-Nicolson yöntemi

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam)

Kısaltmalar	Açıklama
KNAM1	Kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonu ile iç iterasyonlu lineerleştirmenin kullanıldığı Adams Moulton yöntemi
KNAM2	Kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonu ile lineerleştirme 1 in kullanıldığı Adams Moulton yöntemi
KNAM3	Kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonu ile lineerleştirme 2 nin kullanıldığı Adams Moulton yöntemi
KNCN1	Kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonu ile iç iterasyonlu lineerleştirmenin kullanıldığı Crank-Nicolson yöntemi
KNCN2	Kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonu ile lineerleştirme 1 in kullanıldığı Crank-Nicolson yöntemi
KNCN3	Kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonu ile lineerleştirme 2 nin kullanıldığı Crank-Nicolson yöntemi
KRAM1	Kuartik trigonometrik B-spline fonksiyonu ile iç iterasyonlu lineerleştirmenin kullanıldığı Adams Moulton yöntemi
KRAM2	Kuartik trigonometrik B-spline fonksiyonu ile lineerleştirme 1 in kullanıldığı Adams Moulton yöntemi
KRAM3	Kuartik trigonometrik B-spline fonksiyonu ile lineerleştirme 2 nin kullanıldığı Adams Moulton yöntemi
KRCN1	Kuartik trigonometrik B-spline fonksiyonu ile iç iterasyonlu lineerleştirmenin kullanıldığı Crank-Nicolson yöntemi
KRCN2	Kuartik trigonometrik B-spline fonksiyonu ile lineerleştirme 1 in kullanıldığı Crank-Nicolson yöntemi
KRCN3	Kuartik trigonometrik B-spline fonksiyonu ile lineerleştirme 2 nin kullanıldığı Crank-Nicolson yöntemi
RLW	Regularized long wave (düzenli uzun dalga)

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Mühendislik ve fen alanlarında karşımıza çıkan hemen hemen her olgu fizik kuralları yardımıyla matematiksel olarak modellenebilmektedir. Fiziksel olarak modellenen çoğu problem ise adi ve kısmi diferensiyel denklemler ve bunların denklem sistemleri ile ifade edilir. Bu diferensiyel denklemlerin veya denklem sistemlerinin analitik çözümlerinin oldukça karmaşık ya da bulunmasının mümkün olmadığı durumlarda, tam çözümü veren analitik yöntemler yerine yaklaşık çözümü veren sayısal yöntemler kullanılmaktadır. Bu sayısal yöntemler içerisinden sıklıkla kullanılanlardan biri de sonlu elemanlar yöntemidir. Sonlu elemanlar yönteminin integral formları ağırlıklı rezidüler yöntemi yardımıyla formüle edilmektedir. Ağırlıklı rezidüler yöntemine dayanan sonlu elemanlar yöntemlerinin bazıları Galerkin, Petrov Galerkin, Subdomain, Kolokasyon yöntemleridir. Bu çalışmada, sonlu elemanlar yöntemlerinden Galerkin yöntemi ele alınacaktır. Galerkin yöntemi uygulaması zor ve maliyeti yüksek bir metot olmasına rağmen genelde daha iyi sonuçlar vermektedir. Bu çalışmada RLW denkleminin yaklaşık çözümleri trigonometrik B-spline fonksiyonlar ile Galerkin yöntemi kullanılarak elde edilecektir. Galerkin yöntemi ve bu yöntemde trigonometrik B-spline fonksiyonları kullanılmasının RLW denkleminin yaklaşık çözümleri üzerinde iyileşmeye sebep olup olmayacağı araştırılacaktır.

Spline fonksiyonlar adi ve kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinde sıkça kullanılırlar. Kullanılması ve depolanmasındaki avantajların yanı sıra bilgisayarlardaki gelişmeler ile spline fonksiyonların önemi artmıştır. Belirli derece ve düzgünlükteki her spline fonksiyon, aynı derece ve düzgünlükteki B-spline fonksiyonların bir lineer kombinasyonu ile gösterilebilir (De Boor, 1978). Bu sebeple de B-spline fonksiyonlar spline fonksiyonlar için birer taban oluştururlar. Bu çalışmada kullanılan trigonometrik B-spline fonksiyonlar, trigonometrik spline fonksiyon uzayı için birer tabandır. Trigonometrik B-spline fonksiyon tabanlı sayısal yöntemler, diferensiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin bulunmasında son zamanlarda kullanılmaya başlamıştır. Kuadratik ve kübik trigonometrik B-spline fonksiyonların kullanımı daha yaygın olmasına rağmen daha yüksek derecelerden trigonometrik B-spline fonksiyonlar kullanılarak yapılan çalışmalar literatürde nadiren

bulunmaktadır. Bu çalışmada indirgeme bağıntısı yardımıyla (Hamid vd., 2010; Abbas vd., 2014; Walz, 1997) kuartik ve kuintik trigonometrik B-spline bağıntıları elde edilmiştir. Böylece farklı derecelerden trigonometrik B-spline fonksiyonları kullanılarak Galerkin yöntemi ile RLW denkleminin sayısal çözümleri elde edilmiştir. Literatürde kuadratik ve kübik trigonometrik B-spline fonksiyonları kullanılarak farklı sonlu elemanlar yöntemleri ile sayısal çözümler mevcut olmasına rağmen Galerkin yöntemi ile yapılan çalışmalar bilindiği kadarıyla bulunmamaktadır. Ayrıca bu çalışmada lineer olmayan diferensiyel denklemi lineerleştirmek için 3 farklı lineerleştirme kullanılmıştır. RLW denkleminin sayısal çözümü, önerilen farklı lineerleştirmeler ve elde edilen farklı derecelerden trigonometrik B-spline fonksiyonların her biri için ayrı ayrı elde edilmiştir. Dolayısıyla diferensiyel denkleme uygulanacak Crank Nicolson ve Adams Moulton zaman parçalanmaları ve 3 farklı lineerleştirme ile trigonometrik B-spline fonksiyonlarının derecelerindeki değişimler için Galerkin yönteminin daha iyi sonuçlar verip vermediği incelenecektir. Ayrıca önerilen yöntemlerin doğruluğunu görmek için farklı test problemleri kullanılmış ve elde edilen sonuçlar çizelgeler ve şekiller yardımıyla gösterilerek yorumlanmıştır.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Bu bölümde, ilk olarak trigonometrik B-spline fonksiyonlar ve üzerinde çalışılacak olan RLW denklemi ile ilgili literatürdeki bazı çalışmalar ele alınacaktır. Daha sonra, çalışmanın daha rahat anlaşılabilmesi için bazı temel kavramlardan ve RLW denkleminin sayısal çözümünde kullanılacak yöntemden bahsedilecektir.

Trigonometrik B-spline fonksiyon tabanlı sayısal yöntemler, diferensiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin bulunmasında son zamanlarda kullanılmaya başlanmıştır. Trigonometrik spline fonksiyonları ilk olarak Schoenberg (1964) tarafından parçalı trigonometrik polinomların interpolasyonu için tanıtılmıştır. Daha sonra, Lyche ve Winther (1979), trigonometrik B-spline'ları tanımlamak için trigonometrik bölünmüş farkları kullanmışlardır. (Koch, 1988) çok değişkenli polinom B-spline fonksiyonları kullanarak, çok değişkenli trigonometrik B-spline'ları inşa etmiştir. Adi diferensiyel denklem içeren bir başlangıç değer probleminin sayısal çözümü kuadratik trigonometrik spline kullanılarak araştırılmıştır (Nikolis, 2004) kuadratik trigonometrik spline'ları kullanmışlardır. Nikolis ve Seimenis (2005) yaptıkları çalışmada, lineer olmayan dinamik sistemlerin kübik trigonometrik spline'lar yardımıyla sayısal çözümünü elde etmişlerdir. Kübik trigonometrik B-spline interpolasyon yöntemini kullanarak (Hamid vd., 2010), ikinci dereceden lineer iki noktalı sınır değer problemini çözmüşlerdir. (Abbas vd., 2014 a) çalışmasında kübik trigonometrik B-spline konum ayrıştırması yaparak klasik olmayan difüzyon probleminin kolokasyon metodu ile nümerik çözümü araştırılmıştır. Abbas ve arkadaşları bu çalışmalarında zaman ayrıştırması için Crank Nicolson yöntemini kullanmışlardır. Tek boyutlu dalga denkleminin nümerik çözümü için (Abbas vd., 2014 b) kübik trigonometrik B-spline kolokasyon metodunu önermişlerdir. Dağ ve arkadaşları (2014) çalışmalarında Burgers denklemini, kübik trigonometrik B-spline yardımıyla kolokasyon metodu ile nümerik olarak çözmüşlerdir. Çalışmalarında zaman ayrıştırması için Crank Nicolson metodu önerilmiştir. (Ay vd., 2015), Burgers denkleminin yaklaşık çözümünü quadratik trigonometrik B-spline subdomain Galerkin yöntemiyle araştırmışlardır. Bu çalışmada zaman ayrıştırması için Crank Nicolson metodu önerilmiştir. Ayrıca trigonometrik spline'lar eğri dizaynı için de kullanılmışlardır (Koch vd., 1995; Walz, 1997; Han, 2003, 2006).

RLW denklemini ilk olarak, ardışık dalgaların gelişimini modellemek için Peregrine önermiştir. Aynı çalışmada denklemin sonlu farklar metodu ile sayısal çözümleri elde edilmiştir (Peregrine, 1966). Benjamin ve arkadaşları RLW denklemini daha yaygın olarak bilinen Korteweg-de Vries (Kdv) denklemine bir alternatif olarak önermişlerdir (Benjamin vd., 1972). RLW denkleminin sadece bazı başlangıç şartları altında özel analitik çözümleri mevcut olduğundan, bu denklemin sayısal yöntemler kullanılarak çözümleri elde edilmiştir. Bu denklemin literatür çalışması yapılırken, polinom spline ve B-spline fonksiyonlar kullanılarak sonlu elemanlar sayısal çözümlerinin yapıldığı çalışmalar baz alınmıştır. (Dağ, 2000), kuadratik B-spline şekil fonksiyonlarını kullanarak, en küçük kareler metodu ile RLW denklemini sayısal olarak çözmüştür. Bu çalışmada zaman ayrıştırması için Crank Nicolson metodu, elde edilen sistemi lineerleştirmek için de iç iterasyon önerilmiştir. RLW denkleminin çözümlerini (Dağ ve Özer, 2001), kübik B-spline şekil fonksiyonlarını kullanarak, en küçük kareler yöntemiyle sayısal olarak elde etmişlerdir. Bu çalışmada lineerleştirme için iç iterasyon kullanılmıştır. (Zaki, 2001) RLW denklemini parçalayıp, kübik B-spline şekil fonksiyonlarını kullanarak, Bubnov Galerkin metodu ile sayısal olarak çözmüştür. RLW denkleminin sayısal çözümü için (Doğan, 2001), kuadratik B-spline şekil fonksiyonları ile Petrov Galerkin metodunu önermiştir. Bu çalışmada diferensiyel denklemin sayısal çözümü için lineer indirgeme bağıntısı Crank-Nicolson yaklaşımı ile elde edilmiştir. Soliman ve Raslan (2001) çalışmalarında, bölünme noktalarının orta noktalarında kuadratik B-spline şekil fonksiyonları yardımıyla, kolokasyon metodunu kullanarak RLW denkleminin sayısal çözümünü araştırmışlardır. Doğan (2002) ise çalışmasında lineer şekil fonksiyonlarını kullanarak Galerkin metodu ile RLW denkleminin sayısal çözümünü araştırmıştır. RLW denkleminin sayısal olarak çözümünü Dağ ve arkadaşları (2003), zaman ayrıştırması için Crank Nicolson, konum ayrıştırması için ise kuadratik ve kübik B-spline kullanarak kolokasyon metoduyla sayısal olarak elde etmişlerdir. Bu çalışmada sistemi lineerleştirmek için iç iterasyon yapılmıştır. Kübik B-spline kolokasyon metodu ile RLW denkleminin sayısal çözümü (Dağ vd., 2004) çalışmasında elde edilmiştir. Bu çalışmada, denklemdeki lineer olmayan terimi lineerleştirmek için Rubin Graves lineerleştirmesi önerilmiştir (Rubin ve Graves, 1975). Saka ve arkadaşları, RLW denkleminin sayısal çözümünü konum ayrıştırması tekniği ve kuadratik B-spline Galerkin sonlu elemanlar metodu

ile (Saka vd., 2004) adlı çalışmada incelemişlerdir. Aynı çalışmada bölünme noktalarında Crank Nicolson yaklaşımı kullanılmıştır. Kübik B-spline kolokasyon metodu ile RLW denkleminin sayısal çözümü Irk ve arkadaşları tarafından (Irk vd., 2005) çalışmasında araştırılmıştır. Irk ve arkadaşları, denklemdeki lineer olmayan terimi lineerleştirmek için Rubin Graves lineerleştirmesi uygulamışlardır. Soliman ve Hussien (2005) yaptıkları çalışmada, Septik spline şekil fonksiyonlarını kullanarak kolokasyon metodu ile RLW denkleminin sayısal çözümünü elde etmişlerdir. Bu çalışmada adi diferensiyel denklemin zaman ayrıştırması için Crank Nicolson metodu uygulanmıştır. RLW denkleminin sayısal çözümü kübik B-spline şekil fonksiyonları kullanılarak kolokasyon metodu ile (Raslan, 2005) adlı makalede araştırılmıştır. Bu çalışmada zaman ayrıştırması için merkezi farklar yaklaşımı önerilmiştir. Saka ve Dağ (2005) çalışmalarında, parçalanmış RLW denleminin kübik B-spline şekil fonksiyonları kullanılarak kolokasyon metodu ile sayısal çözümünü araştırmışlardır. Çalışmalarında elde edilen sistemi lineerleştirmek için iç iterasyon kullanmışlardır. (Esen ve Kutluay, 2006) çalışmalarında, kuadratik B-spline şekil fonksiyonlarını kullanarak Lumped Galerkin sonlu elemanlar metodu ile RLW denkleminin sayısal çözümünü elde etmişlerdir. RLW denkleminin sayısal çözümü için Dağ ve arkadaşları (2006), kuintik B-spline şekil fonksiyonlarını kullanarak Galerkin sonlu elemanlar yöntemini önermişlerdir. Sistemdeki lineer olmayan terimi lineerleştirmek için iç iterasyon yapılmıştır. Aynı çalışmada RLW denklemine zaman parçalanması yapılarak tekrar kuintik B-spline Galerkin yöntemi uygulanmış ve elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Saka ve Dağ (2007) çalışmalarında, kuartik B-spline şekil fonksiyonlarını kullanarak kolokasyon metodu ile RLW denkleminin sayısal çözümünü araştırmışlardır. Zaman parçalanması için Crank Nicolson metodu, lineer olmayan terim için ise iç iterasyon önerilmiştir. Kuartik B-spline şekil fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu elemanlar yöntemi ile RLW denkleminin sayısal çözümü (Saka ve Dağ, 2008) çalışmasında incelenmiştir. Kuintik B-spline kolokasyon metoduyla denklemin sayısal çözümü, Saka ve arkadaşları tarafından çalışılmıştır (Saka vd., 2008). Bu makalede konum ayrıştırması için kuintik B-spline şekil fonksiyonları, zaman ayrıştırması için Crank Nicolson yaklaşımı kullanılmıştır. Ayrıca yöntemin uygulanması sonucu elde edilen sistemdeki lineer olmayan terimi lineerleştirmek için iç iterasyon önermişlerdir. Denklemin sayısal çözümü için sektik ve septic B-spline

kolokasyon metodu (Saka vd., 2011) tarafından önerilmiştir. Bu çalışmada denklem sistemi için iç iterasyon ile lineerleştirme yapılmıştır. Irk 2012 yılında yaptığı çalışmada (Irk, 2012), zaman ayrıştırması için Adams Moulton, konum ayrıştırması için ise kuintik B-spline şekil fonksiyonlarını kullanarak kolokasyon metoduyla RLW denklemini sayısal olarak çözmüştür. RLW denklemini eksponansiyel B-spline şekil fonksiyonları kullanarak Galerkin metodu ile Görgülü vd. (2015) sayısal olarak araştırmışlardır. Bu çalışmada zaman ayrıştırması için Crank Nicolson metodu önerilirken, sistemin lineerleştirilmesi için iç iterasyon kullanılmıştır.

Bu bölümün geri kalan kısmında, bu çalışmada kullanılacak olan bazı temel kavramlardan bahsedilecektir. Öncelikle sayısal çözümü araştırılacak olan RLW denklemi solitary dalga çözümlerine sahip olduğu için, soliton teorisi hakkında bilgi verilecektir. Ardından sonlu fark yöntemi olan Crank-Nicolson ve çok adımlı Adams Moulton yöntemleri kısaca açıklanacaktır. Bu yöntemlerin açıklanmasının amacı, çalışmada ele alınan denklemin zaman parçalanması için bu yöntemlerin kullanılacak olmasıdır. Daha sonra yöntemin konum ayrıştırması için kullanılacak olan trigonometrik B-spline fonksiyonlarını açıklamak için öncelikle, spline ve B-spline fonksiyonlarının tanımı ve genel özellikleri verilecek, ardından da trigonometrik B-spline fonksiyonlarının elde edilişi gösterilecektir. Ardından birçok alanda kullanılan karmaşık problemlerin çözümünde kolaylıklar sağlayan sayısal yöntemlerden biri olan sonlu elemanlar yöntemi hakkında genel bilgiler verilecek ve bu çalışmada kullanılan Galerkin yöntemi açıklanacaktır. Son olarak sayısal çözümü araştırılan RLW denklemi, başlangıç, sınır şartları ve test problemleri ile birlikte tanıtılacaktır.

2.1. Soliton Teorisine Fiziksel Bakış

Bir fizik terimi olarak dalga, bir ortamda veya bir boşlukta yayılan ve genellikle enerjinin taşınmasına yol açan titreşime verilen isimdir. Solitonlar ise aşağıdaki iki temel özelliği sağlayan lineer olmayan dalgalar olarak tanımlanabilir (Wadati, 2001):

1. Şekil, hız gibi özellikleri değişmeksizin yayılan yerleşik (lokalize) dalgalardır.
2. Karşılıklı çarpışmaya karşı kararlıdırlar ve kendi özelliklerini çarpışma sonrasında koruyabilirler.

İlk özellik, solitary dalga şartıdır ve ilk kez İskoçyalı mühendis olan John Scott Russel (1808-1882) tarafından tanımlanmıştır (Russel, 1844). İkinci şart ise parçacık özelliğine sahip bir dalga anlamına gelmektedir.

Solitary dalgaları, soliton dalgalarına benzeyen yani çarpışma sonrası özelliklerini korumaya çalışan dalgalar olarakta tanımlanmaktadır. Bu sebeple solitonumsu dalgalar olarakta adlandırılabilirler.

Solitary dalgalarını keşfeden Russel, labaratuvarında su tankları oluşturmuş ve bu su tanklarının bir ucuna ağırlık bırakarak ötelenme dalgalarını (solitary dalgalarını) elde edebilmek için deneyler yapmış ve bu deneyler sonucunda, aşağıdaki önemli bilgilere ulaşmıştır (Falkovich, 2007):

(i) Solitary dalgaları $a\text{sech}^2\left(k(x-vt)\right)$ şekline sahiptirler. Burada a dalganın genliğine, k dalga boyuna ve v ise dalganın hızına karşılık gelmektedir.

(ii) Yeterince büyük miktardaki su kütlesi, iki veya daha fazla bağımsız solitary dalgası üretir.

(iii) Normal dalgaların aksine solitary dalgaları asla birleşmezler. Bu sebeple küçük genliğe sahip bir solitary dalgası ile büyük genliğe sahip bir solitary dalgası birbirleri ile çarpıştıktan sonra, iki solitary dalgası birbirlerinden ayrılarak şekillerinde bir bozulma olmadan yollarına devam edebilirler. Normal dalgalar, ya düzleşmeye başlar yada dikleşerek sönecek şekilde hareket ederlerken, solitary dalgaları kararlıdırlar ve uzun mesafelerde yolculuk yapabilirler.

(iv) g yerçekimi ivmesi olmak üzere, a yüksekliğine sahip olan ve d derinliğindeki bir kanalda hareket eden bir solitary dalgası

$$v = \sqrt{g(d+a)} \tag{2.1}$$

ile ifade edilen bir hıza sahiptir.

Dolayısıyla büyük genlikli bir solitary dalgasının hareket hızı, küçük genlikli bir solitary dalgasına göre daha fazladır. Diğer bir ifadeyle solitary dalgasının hızı genliği ile orantılıdır. Bu sebeple de, solitary dalga normal dalgalardan farklıdır. Örneğin aynı

anda oluşan biri alçak biri yüksek iki ses kulağımız tarafından aynı anda duyulacaktır. Eğer ses dalgaları solitary dalga olsaydı, yüksek genliğe sahip sesi daha önce duymamız gerekirdi. Bu alt bölümde ele alınan konular ayrıntılı olarak (Irk; 2007) çalışmasında ve verdiği referanslarda bulunabilir.

2.2. Sonlu Farklar Yöntemi

Bir çok bilim dalında karşılaşılan problemleri modelleyen adi ve kısmi türevli diferensiyel denklem ve denklem sistemlerinin analitik çözümlerinin olmadığı ya da çok karmaşık olduğu durumlarda, bu denklemleri çözebilmek için sayısal yöntemler kullanılmaktadır. Sonlu fark yöntemleri de, bu denklemlerin yaklaşık çözümlerinde yaygın olarak kullanılan sayısal yöntemlerdendir.

Sonlu farklar yöntemi, bir diferensiyel denklemin çözüm bölgesi, sonlu sayıda eşit veya farklı boyutta bölünme noktalarına ayrılarak, her bir bölünme noktasındaki türev değerleri yerine, Taylor seri açılımı ile elde edilen ileri, geri veya merkezi sonlu fark yaklaşımlarından birinin yazılması ile elde edilen bir sayısal yöntemdir. Böylece başlangıçta verilen diferensiyel denklem, bir cebirsel denklem sistemine indirgenmiş olur. Elde edilen cebirsel denklem sistemi, bilgisayar programları yardımıyla çözülür.

2.2.1. Crank-Nicolson yöntemi

Crank ve Nicolson (1947) tarafından önerilen Crank-Nicolson yöntemi, kapalı ve ikinci mertebeden doğruluğa sahip bir sonlu farklar yöntemidir. Crank-Nicolson metodu, diferensiyel denklemin çözümünde zamana göre türev için ileri sonlu fark yaklaşımı, diğer terimler için ise şimdiki zaman ve bir sonraki zamana ait fonksiyon değerlerinin ortalamalarının kullanılmasına dayalı bir yöntemdir. Zamana göre türev için geri veya merkezi sonlu fark yaklaşımları da kullanılabilir. Bu durumda Crank-Nicolson metodunda Δt zaman adımı olmak üzere aşağıdaki eşitlikler kullanılır;

$$\begin{aligned} u_t &\simeq \frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t}, \\ u &\simeq \frac{u^{n+1}+u^n}{2}, \\ u_x &\simeq \frac{(u_x)^{n+1}+(u_x)^n}{2}, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.2.2. Adams Moulton yöntemi

Adams Moulton yöntemi John Couch Adams'ın geliştirmesiyle, Forest Ray Moulton'ın katkılarıyla bulunan kapalı bir yöntemdir. Farklı mertebelerden Adams Moulton yöntemleri olmakla birlikte bu çalışmada zamana göre parçalanma yapılırken 1 ve 2 adımlı yöntemler kullanılacaktır.

$$y_t = f(t, y) \tag{2.3}$$

diferensiyel denklemi için 1-2 adımlı Adams Moulton yöntemi Δt zaman artımı ve t_n zamanındaki bilinmeyen fonksiyon y_n olmak üzere

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \left[\theta_1 f(t_{n+1}, y_{n+1}) + \theta_2 f(t_n, y_n) + \theta_3 f(t_{n-1}, y_{n-1})\right] \tag{2.4}$$

formülü ile verilir.

- Yöntemde $\theta_1 = 5/12$, $\theta_2 = 2/3$, $\theta_3 = -1/12$ seçimleri yapılırsa hata terimi $\mathcal{O}(\Delta t^4)$ olan, 2 adımlı ve 3. mertebeden Adams Moulton yöntemi bulunur.
- Yöntemde $\theta_1 = 1/2$, $\theta_2 = 1/2$, $\theta_3 = 0$ seçimleri yapılırsa hata terimi $\mathcal{O}(\Delta t^3)$ olan, 1 adımlı ve 2. mertebeden Adams Moulton yöntemi bulunur. İkinci mertebeden Adams-Moulton yöntemi aynı zamanda Crank-Nicolson yöntemine dönüşür.

2.3. Spline Fonksiyonlar

Yaklaşım yöntemleri arasında polinom yaklaşımı önemli bir yer tutmaktadır. Bilindiği gibi kullanılan noktaların sayısının artmasıyla yaklaşımda kullanılacak polinom derecesi artacağından hesaplama hataları da artabilir. Ayrıca istenilen fonksiyon $[a, b]$ aralığının farklı kısımlarında birbirlerinden farklı özelliklere sahip olabileceğinden fonksiyona tek bir eğri ile yaklaşmak hatalı sonuçlar doğurabilir. Bu sebeplerden dolayı ard arda gelen iki veri arasında yüksek derecesi olmayan, birinci, ikinci, üçüncü veya istenilen dereceden polinom fonksiyonlar ile yaklaşımın yapıldığı spline interpolasyon yöntemini kullanmak daha uygun olacaktır. Bilinmeyen fonksiyonların yaklaşık çözümlerinde kullanılan spline fonksiyonlar parçalı polinomlar

sınıfından olup, tanımlanan $[a, b]$ aralığını sonlu sayıda alt aralıklara bölerek, birbirini örtmeyen her bir alt aralıkta düşük dereceden polinomlarla yaklaşım yapma esasına dayanır.

Spline terimi, ilk olarak 1946 yılında Schoenberg tarafından literatüre geçmiştir (Schoenberg, 1946). Spline fonksiyonlar, etkili yaklaşım gücü ve hesaplamalarda kolaylıklar sağlaması nedeniyle interpolasyon, diferensiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde, eğri ve yüzey uydurma gibi bir çok bilim dalının uygulamasında sıklıkla kullanılırlar.

Reel sayıların monoton artan bir dizisi

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b \tag{2.5}$$

olacak şekilde bölünme noktalarında tanımlanan k. dereceden $S(x)$ spline fonksiyonu aşağıdaki iki özelliği sağlayan bir fonksiyondur. Burada verilen aralık $(-\infty, \infty)$ aralığıda olabilir.

1. $S(x)$, her $[x_m, x_{m+1}]$ $(m = 0, \ldots, N-1)$ altaralığında k. ya da daha küçük bir dereceden polinomdur.

2. $S(x)$ ve kendisinin $1, 2, \ldots, (k-1)$. basamaktan türevleri tanımlanan her aralıkta ve x_m, $(m = 1, 2, \ldots, N-1)$ bölünme noktalarında süreklidir.

Yukarıdaki özelliklere göre, parçalı polinom fonksiyonlarının kendisi ve türevlerinin belirli koşulları sağlaması durumunda bir spline fonksiyon oluşur. $k = 0$ için ikinci koşul geçersizdir ve 0. dereceden spline fonksiyonu adım fonksiyonu olarak adlandırılır. $m = 1$ olması durumunda $S(x)$ fonksiyonu bir kırık çizgi olup, doğrusal polinomların birleştirilmesi ile oluşur (Karakoç, 2011).

Spline fonksiyonlar aşağıdaki özelliklere sahiplerdir (Schumaker, 2007):

- Spline fonksiyonlar düzgün (smooth) fonksiyonlardır.
- Spline fonksiyonlar uygun tabanlara sahip sonlu boyutlu lineer uzaylardır.
- Spline fonksiyonlar bilgisayarlarda hesaplama ve depolama açısından uygun fonksiyonlardır.

- Spline fonksiyonların türevleri ve integralleri yine spline fonksiyonlardır.
- Spline fonksiyonların kullanılması sonucu elde edilen çeşitli matrisler, uygun işaretleri ve determinant özellikleri sayesinde kolay hesaplanabilir.
- Yeteri kadar alt aralıklara bölünmüş $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı her sürekli fonksiyon; k. dereceden spline fonksiyonu ile iyi bir şekilde temsil edilebilir.
- Spline fonksiyonlar ile sadece fonksiyonun kendisine değil aynı zamanda bu fonksiyonun türevlerine de iyi yaklaşımlar yapılabilir.
- Spline fonksiyonların kullanılması yakınsaklık ve kararlılığın incelenmesinde kolaylık sağlar.
- Düşük dereceli spline fonksiyonlar oldukça esneklerdir ve polinomlardaki gibi keskin salınımlar yapmazlar.

2.3.1. B-spline fonksiyonlar

Belirli bir derece ve düzgünlükteki her spline fonksiyon, aynı derece ve düzgünlükteki B-spline fonksiyonların bir lineer kombinasyonu ile temsil edilebilir (De Boor, 1978). Dolayısıyla B-spline fonksiyonlar aynı dereceye sahip spline fonksiyonlar için bir tabandır. Bu nedenle bu fonksiyonlara B-spline (basis spline) denir.

Sıfırıncı dereceden B-spline fonksiyonları B_i^0 ile gösterilir ve

$$B_i^0(x) = \begin{cases} 1 & , \ x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0 & , \ \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlanır. $k \geq 1$ ve $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ olmak üzere sıfırıncı dereceden B_i^0 B-spline fonksiyonları kullanılarak daha yüksek dereceden B-spline fonksiyonlar,

$$B_i^k(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} B_i^{k-1}(x) + \frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} B_{i+1}^{k-1}(x) \tag{2.7}$$

indirgeme bağıntısı yardımıyla türetilebilir (De Boor, 1978).

$[a, b]$ aralığının düzgün bir parçalanışı bu ve bundan sonraki tüm bölümlerde

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = b$$

olarak alınacaktır. $h = x_{m+1} - x_m$, $m = 0, \ldots, N$ olmak üzere x_m düğüm noktalarında, (2.7) indirgeme bağıntısı yardımıyla $B_m^1(x)$ lineer B-spline fonksiyonu;

$$B_m^1(x) = L_m = \frac{1}{h} \begin{cases} (x_{m+1} - x) - 2(x_m - x) & , \ x_{m-1} \leq x < x_m \\ (x_{m+1} - x) & , \ x_m \leq x < x_{m+1} \\ 0 & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases} \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlanır (Prenter, 1975).

$$\left\{ B_0^1(x), \ B_1^1(x), \ldots, \ B_N^1(x) \right\}$$

kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı lineer spline fonksiyonlar için bir taban oluşturur. Lineer B-spline fonksiyonu $[x_{m-1}, \ x_{m+1}]$ aralığı dışında sıfırdır. Ayrıca $[x_m, \ x_{m+1}]$ aralığı B_m^1 ve B_{m+1}^1 gibi iki lineer B-spline fonksiyonu tarafından örtülmektedir.

$h = x_{m+1} - x_m$ ve $m = -1, \ldots, N$ için x_m düğüm noktalarında, (2.7) indirgeme bağıntısı yardımıyla bu kez $B_m^2(x)$ kuadratik B-spline fonksiyonunu elde edilecek olursa,

$$B_m^2(x) = \frac{1}{h^2} \begin{cases} (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2 \\ +3(x_m - x)^2 & , \ x_{m-1} \leq x < x_m \\ (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2 & , \ x_m \leq x < x_{m+1} \\ (x_{m+2} - x)^2 & , \ x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ 0 & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases} \tag{2.9}$$

bulunur (Prenter, 1975). Burada

$$\left\{ B_{-1}^2(x), \ B_0^2(x), \ldots, \ B_N^2(x) \right\}$$

kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı kuadratik spline fonksiyonlar için bir taban oluşturur. Kuadratik B-spline fonksiyonları ve onların birinci mertebeden türevleri $[x_{m-1}, \ x_{m+2}]$ aralığı dışında sıfırdır. Bu aralıkta, her bir $B_m^2(x)$ kuadratik B-spline fonksiyonu ardışık üç elemanı örtmektedir. Dolayısıyla her bir $[x_m, \ x_{m+1}]$ aralığı

$$B_{m-1}^2, B_m^2, B_{m+1}^2$$

gibi tanımlanan ardışık üç kuadratik B-spline tarafından örtülür.

Benzer şekilde $h = x_{m+1} - x_m$ ve $m = -1, \ldots, N+1$ için x_m düğüm noktalarında, (2.7) indirgeme bağıntısı yardımıyla $B_m^3(x)$ kübik B-spline fonksiyonlar,

$$B_m^3(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3 & , \ x_{m-2} \le x < x_{m-1} \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) & \\ +3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3 & , \ x_{m-1} \le x < x_m \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) & \\ +3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3 & , \ x_m \le x < x_{m+1} \\ (x_{m+2} - x)^3 & , \ x_{m+1} \le x < x_{m+2} \\ 0 & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases} \tag{2.10}$$

şeklinde elde edilir (Prenter, 1975). Burada

$$\left\{B_{-1}^3(x),\ B_0^3(x), \ldots,\ B_N^3(x),\ B_{N+1}^3(x)\right\}$$

kümesi $a \le x \le b$ aralığında tanımlı kübik spline fonksiyonlar için bir taban oluşturur. Kübik B-spline fonksiyonları ve onların birinci ve ikinci mertebeden türevleri $[x_{m-2},\ x_{m+2}]$ aralığı dışında sıfırdır. Bu aralıkta, her bir $B_m^3(x)$ kübik B-spline fonksiyonu ardışık dört elemanı örtmektedir. Dolayısıyla her bir $[x_m,\ x_{m+1}]$ aralığı

$$B_{m-1}^3, B_m^3, B_{m+1}^3, B_{m+2}^3$$

gibi tanımlanan ardışık dört kübik B-spline fonksiyonu tarafından örtülür.

$h = x_{m+1} - x_m$ ve $m = -2, \ldots, N+1$ için x_m düğüm noktalarında, (2.7) indirgeme bağıntısı yardımıyla $B_m^4(x)$ kuartik B-spline fonksiyonlar,

$$B_m^4(x) = \frac{1}{h^4} \begin{cases} (x - x_{m-2})^4 & , \ x_{m-2} \le x < x_{m-1} \\ (x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-1})^4 & , x_{m-1} \le x < x_m \\ (x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-1})^4 & \\ +10(x - x_m)^4 & , \ x_m \le x < x_{m+1} \\ (x_{m+3} - x)^4 - 5(x_{m+2} - x)^4 & , \ x_{m+1} \le x < x_{m+2} \\ (x_{m+3} - x)^4 & , \ x_{m+2} \le x < x_{m+3} \\ 0 & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases} \tag{2.11}$$

şeklinde elde edilir (Prenter, 1975). Burada da daha öncekilere benzer şekilde

$$\left\{B_{-2}^{4}(x),\ B_{-1}^{4}(x),\ldots,\ B_{N}^{4}(x),\ B_{N+1}^{4}(x)\right\}$$

kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı dördüncü dereceden fonksiyonlar için bir taban oluşturur. Kuartik B-spline fonksiyonları ve onların birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden türevleri $[x_{m-2},\ x_{m+3}]$ aralığı dışında sıfırdır. Bu aralıkta, her bir $B_m^4(x)$ kuartik B-spline fonksiyonu ardışık beş elemanı örtmektedir. Dolayısıyla her bir $[x_m,\ x_{m+1}]$ aralığı

$$B_{m-2}^{4}, B_{m-1}^{4}, B_{m}^{4}, B_{m+1}^{4}, B_{m+2}^{4}$$

gibi ardışık beş kuartik B-spline fonksiyonu tarafından örtülmektedir.

Son olarak $h = x_{m+1} - x_m$ ve $m = -2, \ldots, N+2$ için x_m düğüm noktalarında, (2.7) indirgeme bağıntısı yardımıyla $B_m^5(x)$ kuintik B-spline fonksiyonlar,

$$B_m^5(x) = \frac{1}{h^5}\begin{cases} (x-x_{m-3})^5 & , \ x_{m-3} \le x < x_{m-2} \\ (x-x_{m-3})^5 - 6(x-x_{m-2})^5 & , \ x_{m-2} \le x < x_{m-1} \\ (x-x_{m-3})^5 - 6(x-x_{m-2})^5 & \\ +15(x-x_{m-1})^5 & , x_{m-1} \le x < x_m \\ (x-x_{m-3})^5 - 6(x-x_{m-2})^5 & \\ +15(x-x_{m-1})^5 - 20(x-x_m)^5 & , \ x_m \le x < x_{m+1} \\ (x-x_{m-3})^5 - 6(x-x_{m-2})^5 & \\ +15(x-x_{m-1})^5 & , \ x_{m+1} \le x < x_{m+2} \\ -20(x-x_m)^5 + 15(x-x_{m+1})^5 & \\ (x-x_{m-3})^5 - 6(x-x_{m-2})^5 & \\ +15(x-x_{m-1})^5 - 20(x-x_m)^5 & , \ x_{m+2} \le x < x_{m+3} \\ +15(x-x_{m+1})^5 - 6(x-x_{m+2})^5 & \\ 0 & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases} \tag{2.12}$$

şeklinde tanımlanır (Prenter, 1975). Burada

$$\left\{B_{-2}^5(x),\ B_{-1}^5(x), \ldots,\ B_{N+1}^5(x),\ B_{N+2}^5(x)\right\}$$

kümesi $a \le x \le b$ aralığında tanımlı beşinci dereceden fonksiyonlar için bir taban oluşturur. Kuintik B-spline fonksiyonları ve onların birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü mertebeden türevleri $[x_{m-3},\ x_{m+3}]$ aralığı dışında sıfırdır. Bu aralıkta, her bir $B_m^5(x)$ kuintik B-spline fonksiyonu ardışık altı elemanı örtmektedir. Dolayısıyla her bir $[x_m,\ x_{m+1}]$ aralığı

$$B_{m-2}^5, B_{m-1}^5, B_m^5, B_{m+1}^5, B_{m+2}^5, B_{m+3}^5$$

gibi ardışık altı kuintik B-spline fonksiyonu tarafından örtülmektedir.

2.3.2. Trigonometrik B-spline fonksiyonlar

Sıfırıncı dereceden B-spline fonksiyonu

$$T_i^0(x) = \begin{cases} 1 & , x_i \le x < x_{i+1} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{2.13}$$

ve $k = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ olmak üzere

$$T_i^k(x) = \frac{\sin\left(\frac{x - x_i}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_{i+k} - x_i}{2}\right)} T_i^{k-1}(x) + \frac{\sin\left(\frac{x_{i+k+1} - x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_{i+k+1} - x_{i+1}}{2}\right)} T_{i+1}^{k-1}(x), \tag{2.14}$$

bağıntısı ile trigonometrik B-spline fonksiyonlar elde edilebilir (Hamid vd., 2010; Abbas vd., 2014; Walz, 1997). Eğer $[a, b]$ çözüm aralığı için parçalanma düzgün ise yani tüm alt aralık uzunlukları h ise (2.14) indirgeme bağıntısı

$$T_i^k(x) = \frac{\sin\left(\frac{x - x_i}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kh}{2}\right)} T_i^{k-1}(x) + \frac{\sin\left(\frac{x_{i+k+1} - x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kh}{2}\right)} T_{i+1}^{k-1}(x), k = 1, 2, 3, 4, \ldots \tag{2.15}$$

olarak elde edilir.

2.3.2.1. Lineer trigonometrik B-spline

$[a, b]$ çözüm aralığının bir düzgün parçalanması

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b,\ x_i = x_{i-1} + h,\ i = 0, \ldots, N - 1$$

olsun. $h = x_{i+1} - x_i$ olmak üzere T_i lineer trigonometrik B-spline fonksiyonlarını hesaplamak için (2.15) bağıntısında $k = 1$ alınırsa,

$$\rho(x_i) = \sin\left(\frac{x - x_i}{2}\right),\ \theta = \sin\left(\frac{h}{2}\right)$$

olmak üzere

$$T_i^1(x) = \frac{\rho(x_i)}{\theta} T_i^0(x) - \frac{\rho(x_{i+2})}{\theta} T_{i+1}^0(x) \tag{2.16}$$

yazılır. Eşitlik parçalı fonksiyon olarak

$$T_i^1(x) = \frac{1}{\theta} \begin{cases} \rho(x_i) & , x_i \leq x < x_{i+1} \\ -\rho(x_{i+2}) & , x_{i+1} \leq x < x_{i+2} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{2.17}$$

şeklinde düzenlenebilir. Lineer trigonometrik B-spline fonksiyonların lineer B-spline fonksiyonların yazılımı ile uyumlu olması için düzenlemeler yapılırsa bölünme noktalarındaki $T_m^1(x)$ lineer trigonometrik B-spline fonksiyonlar

$$\rho(x_m) = \sin\left(\frac{x - x_m}{2}\right),\ \theta = \sin\left(\frac{h}{2}\right),\ m = 0, \ldots, N$$

olmak üzere

$$T_m^1(x) = \frac{1}{\theta}\begin{cases} \rho(x_{m-1}) & , x_{m-1} \leq x < x_m \\ -\rho(x_{m+1}) & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{2.18}$$

şeklinde tanımlanır. Lineer trigonometrik B-spline fonksiyonlar için

$$\lim_{x \to x_m^+} T_m^1(x) = \lim_{x \to x_m^-} T_m^1(x) \tag{2.19}$$

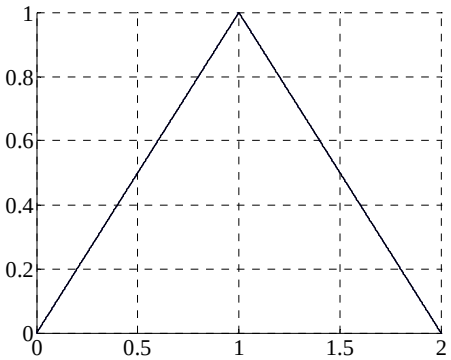
olduğundan lineer trigonometrik B-spline fonksiyonunun x_m noktasında sürekli olduğu görülebilir.

Problemin analitik çözümü için $U_N(x,t)$ genel yaklaşımı lineer trigonometrik B-spline kullanılarak

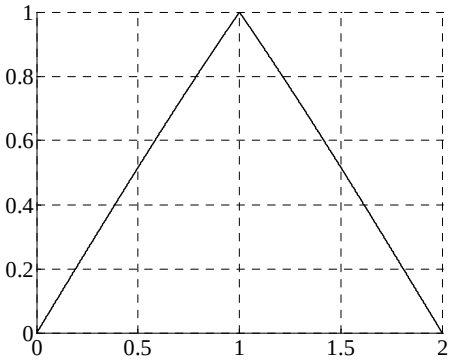
$$u(x,t) \approx U_N(x,t) = \sum_{i=0}^{N} T_i^1(x)\delta_i(t) \tag{2.20}$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada T_i fonksiyonları lineer trigonometrik B-spline fonksiyonlarını gösterir. Eşitlikteki δ_i katsayıları zamana bağlı değişkenlerdir.

$T_m^1(x)$ lineer trigonometrik B-spline fonksiyonları $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ aralığının dışında sıfırdır ve $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ aralığındaki ardışık iki elemanı örtmektedir. Bu durumu göstermek için $h = 1$ alınmış ve $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ aralığı $[0, 2]$ aralığına dönüştürülerek (2.8) lineer B-spline ve (2.18) lineer trigonometrik B-spline fonksiyonlar Şekil 2.1. ve Şekil 2.2.'de gösterilmiştir.

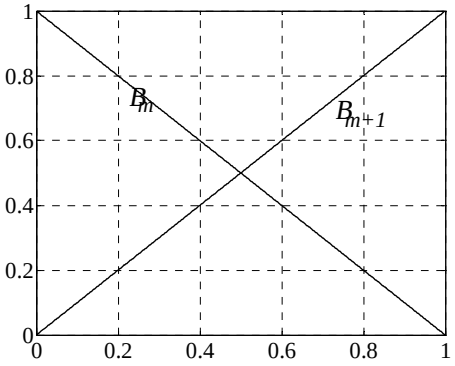


Şekil 2.1. Lineer B-spline

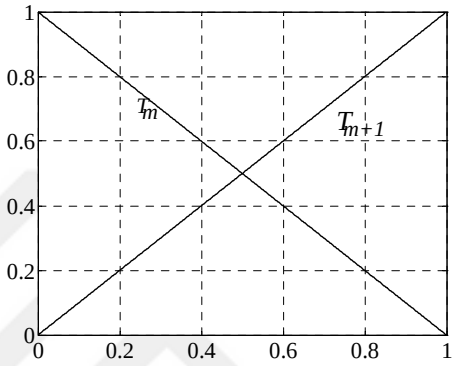


Şekil 2.2. Lineer trigonometrik B-spline

Şekil 2.1. ve 2.2.'de görüldüğü gibi spline fonksiyonlar ardışık iki elemanı örttüğünden her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı iki lineer B-spline tarafından örtülmektedir. $h = 1$ için $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[0, 1]$ aralığına dönüştürülerek bu aralığa düşen tüm lineer B-spline ve lineer trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları ise Şekil 2.3. ve Şekil 2.4.'de verilmiştir.



Şekil 2.3. Lineer B-spline şekil fonksiyonları



Şekil 2.4. Lineer trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları

$[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı iki lineer trigonometrik B-spline tarafından örtüldüğünden bu eleman üzerindeki yaklaşım

$$u(x,t) \approx U_N(x,t) = \sum_{i=m}^{m+1} T_i^1(x)\delta_i = T_m^1(x)\delta_m + T_{m+1}^1(x)\delta_{m+1} \tag{2.21}$$

olacaktır. x_m noktasındaki $u(x_m, t)$ için yaklaşım ise (2.18) lineer trigonometrik B-spline eşitliklerinin (2.21) eşitliğinde kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} U_N(x_m,t) &= U_m = T_m^1(x_m)\delta_m + T_{m+1}^1(x_m)\delta_{m+1} \\ &= -\frac{\sin\left(\dfrac{x_m - x_{m+1}}{2}\right)}{\theta}\delta_m + \frac{\sin\left(\dfrac{x_m - x_m}{2}\right)}{\theta}\delta_{m+1} \\ U_m &= \delta_m \end{aligned} \tag{2.22}$$

olarak bulunur.

$[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı

$$\xi = x - x_m$$

dönüşümü ile $[0,h]$ aralığına dönüştürülebilir. Bu durumda lineer trigonometrik B-spline fonksiyonları

$$T_m^1(\xi) = \frac{\sin\left(\frac{h-\xi}{2}\right)}{\theta}, \tag{2.23}$$

$$T_{m+1}^1(\xi) = \frac{\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\theta} \tag{2.24}$$

olarak elde edilir.

Aynı aralıktaki lineer B-spline fonksiyonlar ise

$$B_m^1(\xi) = 1-\xi, \tag{2.25}$$

$$B_{m+1}^1(\xi) = \xi \tag{2.26}$$

eşitlikleri ile verilir.

2.3.2.2. Kuadratik trigonometrik B-spline

T_i^2 kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonlarını hesaplamak için (2.15) bağıntısında $k=2$ alınırsa,

$$\rho(x_i) = \sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right)$$

olmak üzere

$$T_i^2(x) = \frac{\rho(x_i)}{\sin(h)}T_i^1(x) - \frac{\rho(x_{i+3})}{\sin(h)}T_{i+1}^1(x) \tag{2.27}$$

yazılabilir. (2.27) eşitliğinde gerekli olan lineer trigonometrik B-spline fonksiyonlar

$$\frac{\rho(x_i)}{\sin(h)}T_i^1(x) = \frac{1}{\sin(h)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}\begin{cases} \rho(x_i)\rho(x_i) & , x_i \le x < x_{i+1} \\ -\rho(x_i)\rho(x_{i+2}) & , x_{i+1} \le x < x_{i+2} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ve

$$-\frac{\rho(x_{i+3})}{\sin(h)}T_{i+1}^1(x) = \frac{1}{\sin(h)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}\begin{cases} -\rho(x_{i+3})\rho(x_{i+1}) & , x_{i+1} \le x < x_{i+2} \\ \rho(x_{i+3})\rho(x_{i+3}) & , x_{i+2} \le x < x_{i+3} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olacağından (2.27) eşitliği

$$T_i^2(x) = \frac{1}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)\sin(h)} \begin{cases} \rho^2(x_i) & , x_i \le x < x_{i+1} \\ -\rho(x_i)\rho(x_{i+2}) & \\ -\rho(x_{i+3})\rho(x_{i+1}) & , x_{i+1} \le x < x_{i+2} \\ \rho^2(x_{i+3}) & , x_{i+2} \le x < x_{i+3} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{2.28}$$

şeklinde düzenlenebilir. Kuadratik B-spline fonksiyonlarının yazılımı ile uyumlu olması için gereken düzenlemeler yapılırsa

$$\rho(x_m) = \sin\left(\frac{x - x_m}{2}\right),\ \theta = \sin\left(\frac{h}{2}\right)\sin(h),\ m = 0, \ldots, N$$

olmak üzere

$$T_m^2(x) = \frac{1}{\theta} \begin{cases} \rho^2(x_{m-1}) & , x_{m-1} \le x < x_m \\ -\rho(x_{m-1})\rho(x_{m+1}) - \rho(x_{m+2})\rho(x_m) & , x_m \le x < x_{m+1} \\ \rho^2(x_{m+2}) & , x_{m+1} \le x < x_{m+2} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{2.29}$$

eşitliği ile $T_m^2(x)$ kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonlar elde edilir. (2.29) ile verilen kuadratik trigonometrik B-spline için

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_m^+} T_m^2(x) &= \lim_{x \to x_m^-} T_m^2(x) \text{ ve } \lim_{x \to x_{m+1}^+} T_m^2(x) = \lim_{x \to x_{m+1}^-} T_m^2(x) \\ \lim_{x \to x_m^+} \frac{d}{dx}\left(T_m^2(x)\right) &= \lim_{x \to x_m^-} \frac{d}{dx}\left(T_m^2(x)\right) \text{ ve } \lim_{x \to x_{m+1}^+} \frac{d}{dx}\left(T_m^2(x)\right) = \lim_{x \to x_{m+1}^-} \frac{d}{dx}\left(T_m^2(x)\right) \end{aligned}$$

olduğundan $T_m^2(x)$ parçalı fonksiyonu ve birinci türevinin x_m ve x_{m+1} bölünme noktalarında yani konum aralığının iç noktalarında sürekli olduğu görülebilir.

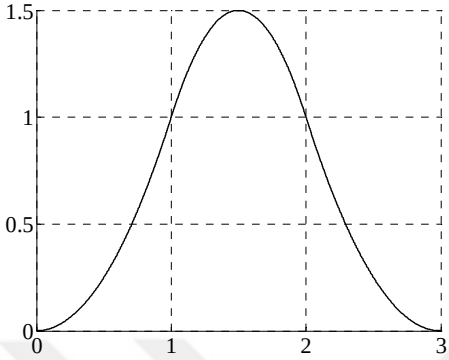
Problemin analitik çözümü için genel yaklaşım kuadratik trigonometrik B-Spline kullanılarak

$$u(x,t) \approx U_N(x,t) = \sum_{i=-1}^{N} T_i^2(x)\delta_i(t) \tag{2.30}$$

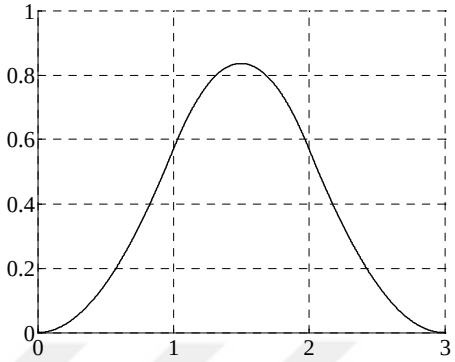
şeklinde tanımlanabilir. Burada δ_i katsayıları zamana bağlı değişkenler olmak üzere $T_i^2(x)$ fonksiyonları kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonlarını gösterir.

$T_m^2(x)$ kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonları $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığının dışında sıfırdır ve ayrıca $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığındaki ardışık üç elemanı örtmektedir.

Bu durumu göstermek için $h = 1$ alınmış ve $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığı $[0, 3]$ aralığına dönüştürülerek (2.9) kuadratik B-spline ve (2.29) kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonlar Şekil 2.5. ve Şekil 2.6.'da gösterilmiştir.

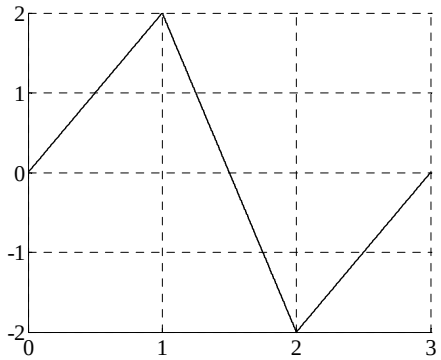


Şekil 2.5. Kuadratik B-spline

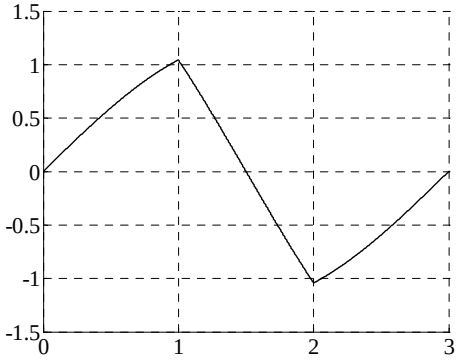


Şekil 2.6. Kuadratik trigonometrik B-spline

Benzer şekilde $T_m^2(x)$ kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonların birinci türevleri de $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığının dışında sıfırdır, bölünme noktalarında süreklidir ve $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığındaki ardışık üç elemanı örtmektedir. Bu durum Şekil 2.7. ve Şekil 2.8.'de sırasıyla kuadratik B-spline ve trigonometrik kuadratik B-spline fonksiyonların birinci türevleri için gösterilmiştir.



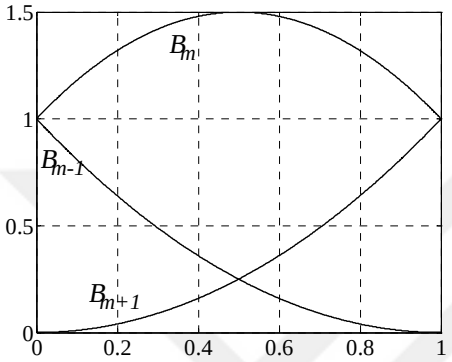
Şekil 2.7. Kuadratik B-spline fonksiyonunun birinci türevi



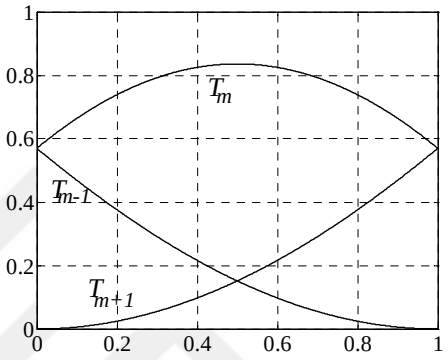
Şekil 2.8. Kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonunun birinci türevi

Şekil 2.5., 2.6., 2.7. ve 2.8.'den görüldüğü gibi kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonlar ve birinci türevi ardışık üç elemanı örttüğünden

her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı T^2_{m-1}, T^2_m ve T^2_{m+1} olarak üç kuadratik trigonometrik B-spline tarafından örtülmektedir. $h = 1$ için $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[0, 1]$ aralığına dönüştürülerek bu aralığa düşen tüm kuadratik B-spline ve kuadratik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları Şekil 2.9. ve Şekil 2.10.'da verilmiştir.



Şekil 2.9. Kuadratik B-spline şekil fonksiyonları



Şekil 2.10. Kuadratik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları

Şekillerden de anlaşılacağı gibi $T^2_m(x)$ kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonları $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığının dışında sıfır olup $T^2_m(x)$ trigonometrik B-spline fonksiyonu $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığında ardışık üç elemanı örtmektedir. Dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı T^2_{m-1}, T^2_m ve T^2_{m+1} olarak üç kuadratik trigonometrik B-spline tarafından örtülmektedir. Bu durumda (2.30) yaklaşımı

$$u(x,t) \approx U_N(x,t) = \sum_{i=m-1}^{m+1} T_i^2(x)\delta_i = T^2_{m-1}(x)\delta_{m-1} + T^2_m(x)\delta_m + T^2_{m+1}(x)\delta_{m+1} \quad (2.31)$$

olacaktır. (2.29) kuadratik trigonometrik B-spline eşitliklerinin kullanılmasıyla x_m noktasındaki $u(x_m, t)$ ve x e göre birinci türevi için yaklaşımlar,

$$\begin{aligned} U_N(x_m,t) &= U_m = \sum_{i=m-1}^{m+1} T_i^2(x_m)\delta_i \\ \frac{dU_N(x_m,t)}{dx} &= U'_m = \sum_{i=m-1}^{m+1} \frac{dT_i^2(x_m)}{dx}\delta_i \end{aligned}$$

olarak yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılarak düzenlenirse bölünme noktalarındaki

yaklaşımlar için

$$a_1 = \frac{\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{\theta}, \quad b_1 = \frac{\sin(h)}{\theta},$$

olmak üzere

$$U_m = a_1\delta_{m-1} + a_1\delta_m \tag{2.32}$$

$$U'_m = -b_1\delta_{m-1} + b_1\delta_m \tag{2.33}$$

eşitlikleri bulunur.

$[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı

$$\xi = x - x_m$$

dönüşümü ile $[0, h]$ aralığına dönüştürülebilir. Bu durumda kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonları

$$T^2_{m-1}(\xi) = \frac{\sin^2\left(\frac{h-\xi}{2}\right)}{\theta}, \tag{2.34}$$

$$T^2_m(\xi) = \frac{\sin\left(\frac{h+\xi}{2}\right)\sin\left(\frac{h-\xi}{2}\right) + \sin\left(\frac{2h-\xi}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\theta}, \tag{2.35}$$

$$T^2_{m+1}(\xi) = \frac{\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\theta} \tag{2.36}$$

olarak elde edilir.

Aynı aralıktaki kuadratik B-spline fonksiyonlar ise

$$B^2_{m-1}(\xi) = \left(1 - \frac{\xi}{h}\right)^2, \tag{2.37}$$

$$B^2_m(\xi) = \frac{h^2 + 2h\xi - 2\xi^2}{h^2}, \tag{2.38}$$

$$B^2_{m+1}(\xi) = \frac{\xi^2}{h^2} \tag{2.39}$$

eşitlikleri ile verilir.

2.3.2.3. Kübik trigonometrik B-spline

T^3_i kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlarını hesaplamak için ise (2.15) bağıntısında $k = 3$ alındığında

$$\rho(x_i) = \sin\left(\frac{x - x_i}{2}\right)$$

olmak üzere

$$T_i^3(x) = \frac{\rho(x_i)}{\sin\left(\frac{3h}{2}\right)} T_i^2(x) - \frac{\rho(x_{i+4})}{\sin\left(\frac{3h}{2}\right)} T_{i+1}^2(x) \tag{2.40}$$

elde edilir. Kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlarını bulabilmek için gerekli olan kuadratik trigonometrik B-spline eşitlikleri

$$\theta = \sin\left(\frac{h}{2}\right)\sin(h)\sin\left(\frac{3h}{2}\right)$$

olmak üzere

$$\frac{\rho(x_i)}{\sin\left(\frac{3h}{2}\right)} T_i^2(x) = \frac{1}{\theta}\begin{cases} \rho^3(x_i) & , x_i \le x < x_{i+1} \\ -\rho^2(x_i)\rho(x_{i+2}) - \rho(x_i)\rho(x_{i+3})\rho(x_{i+1}) & , x_{i+1} \le x < x_{i+2} \\ \rho(x_i)\rho^2(x_{i+3}) & , x_{i+2} \le x < x_{i+3} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ve

$$-\frac{\rho(x_{i+4})}{\sin\left(\frac{3h}{2}\right)} T_{i+1}^2(x) = \frac{1}{\theta}\begin{cases} -\rho(x_{i+4})\rho^2(x_{i+1}) & , x_{i+1} \le x < x_{i+2} \\ \rho(x_{i+4})\rho(x_{i+1})\rho(x_{i+3}) + \rho^2(x_{i+4})\rho(x_{i+2}) & , x_{i+2} \le x < x_{i+3} \\ -\rho^3(x_{i+4}) & , x_{i+3} \le x < x_{i+4} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olarak yazılabileceğinden (2.40) eşitliği

$$T_i^3(x) = \frac{1}{\theta}\begin{cases} \rho^3(x_i) & , x_i \le x < x_{i+1} \\ \begin{array}{l} -\rho^2(x_i)\rho(x_{i+2}) - \rho(x_i)\rho(x_{i+3})\rho(x_{i+1}) \\ -\rho(x_{i+4})\rho^2(x_{i+1}) \end{array} & , x_{i+1} \le x < x_{i+2} \\ \begin{array}{l} \rho(x_i)\rho^2(x_{i+3}) + \rho(x_{i+4})\rho(x_{i+1})\rho(x_{i+3}) \\ +\rho^2(x_{i+4})\rho(x_{i+2}) \end{array} & , x_{i+2} \le x < x_{i+3} \\ -\rho^3(x_{i+4}) & , x_{i+3} \le x < x_{i+4} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{2.41}$$

şeklinde bulunur. Kübik B-spline fonksiyonların yazımı ile uyumlu olması için düzenlemeler yapılırsa bölünme noktalarındaki $T_m^3(x)$ kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlar

$$\rho(x_m) = \sin\left(\frac{x - x_m}{2}\right),\ \theta = \sin\left(\frac{h}{2}\right)\sin(h)\sin\left(\frac{3h}{2}\right),\ m = 0, \ldots, N$$

olmak üzere

$$T_m^3(x) = \frac{1}{\theta}\begin{cases} \rho^3(x_{m-2}) & , x_{m-2} \le x < x_{m-1} \\ -\rho^2(x_{m-2})\rho(x_m) & \\ -\rho(x_{m-2})\rho(x_{m+1})\rho(x_{m-1}) & , x_{m-1} \le x < x_m \\ -\rho(x_{m+2})\rho^2(x_{m-1}) & \\ \rho(x_{m-2})\rho^2(x_{m+1}) & \\ +\rho(x_{m+2})\rho(x_{m-1})\rho(x_{m+1}) & , x_m \le x < x_{m+1} \\ +\rho^2(x_{m+2})\rho(x_m) & \\ -\rho^3(x_{m+2}) & , x_{m+1} \le x < x_{m+2} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{2.42}$$

formunda bulunur. $i = m-1, m, m+1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_i^+} T_m^3(x) &= \lim_{x \to x_i^-} T_m^3(x) \\ \lim_{x \to x_i^+} \frac{d}{dx}\left(T_m^3(x)\right) &= \lim_{x \to x_i^-} \frac{d}{dx}\left(T_m^3(x)\right) \\ \lim_{x \to x_i^+} \frac{d^2}{dx^2}\left(T_m^3(x)\right) &= \lim_{x \to x_i^-} \frac{d^2}{dx^2}\left(T_m^3(x)\right) \end{aligned}$$

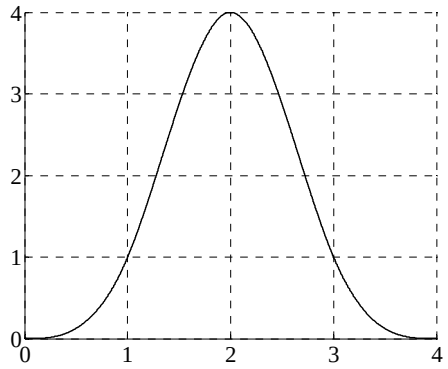
olduğundan $T_m^3(x)$ kübik B-spline fonksiyonunun, birinci ve ikinci türevinin x_{m-1}, x_m ve x_{m+1} bölünme noktalarında dolayısıyla da konum aralığının iç noktalarında sürekli olduğu görülebilir.

Problemin analitik çözümü için ise genel yaklaşım kübik trigonometrik B-spline kullanılarak

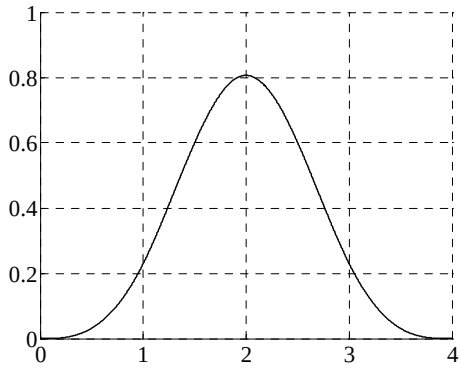
$$u(x,t) \approx U_N(x,t) = \sum_{i=-1}^{N+1} T_i^3(x)\delta_i(t) \tag{2.43}$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada δ_i katsayıları zamana bağlı değişkenler olmak üzere $T_i^3(x)$ fonksiyonları kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlarını gösterir.

$B_m^3(x)$ kübik B-spline fonksiyonlarında olduğu gibi $T_m^3(x)$ kübik trigonometrik B-spline fonksiyonları da $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığının dışında sıfırdır ve ayrıca $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığındaki ardışık dört elemanı örtmektedir. Bu durumu göstermek için $h = 1$ alınmış ve $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığı $[0, 4]$ aralığına dönüştürülerek (2.10) kübik B-spline ve (2.42) kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlar Şekil 2.11. ve Şekil 2.12.'de gösterilmiştir.

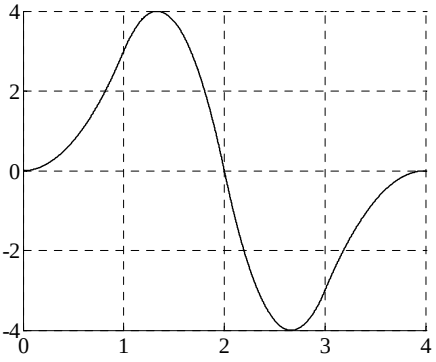


Şekil 2.11. Kübik B-spline

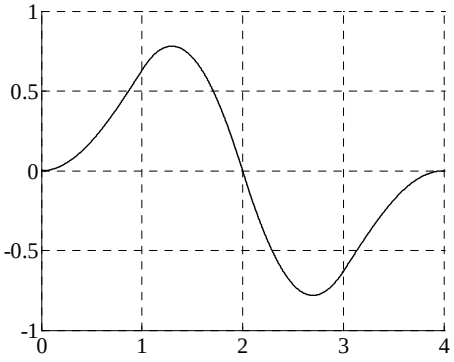


Şekil 2.12. Kübik trigonometrik B-spline

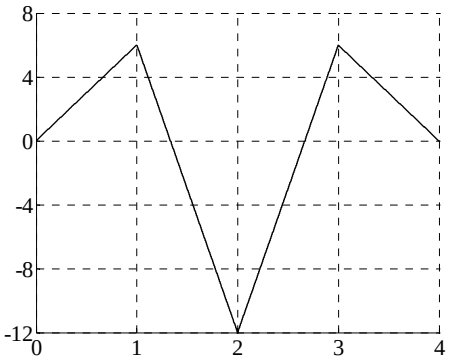
Benzer şekilde $T_m^3(x)$ kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlarının birinci ve ikinci türevleri de aynı dereceden B-spline fonksiyonlardaki gibi $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığının dışında sıfırdır, bölünme noktalarında süreklidir ve $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığındaki ardışık dört elemanı örtmektedir. Bu durum Şekil 2.13. ve Şekil 2.15.'de kübik B-spline fonksiyonların birinci ve ikinci türevleri, Şekil 2.14. ve Şekil 2.16.'da ise kübik trigonometrik B-spline fonksiyonların birinci ve ikinci türevleri çizilerek gösterilmiştir.



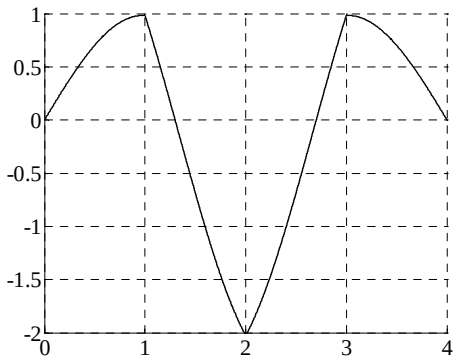
Şekil 2.13. Kübik B-spline fonksiyonunun birinci türevi



Şekil 2.14. Kübik trigonometrik B-spline fonksiyonunun birinci türevi

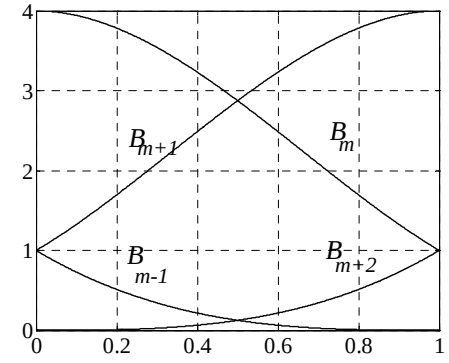


Şekil 2.15. Kübik B-spline fonksiyonunun ikinci türevi

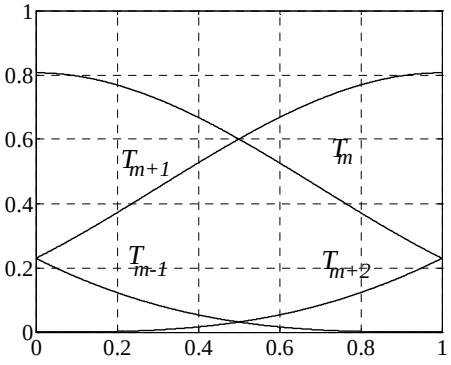


Şekil 2.16. Kübik trigonometrik B-spline fonksiyonunun ikinci türevi

2.11.-2.16. şekillerinden de görüldüğü gibi kübik B-spline ve kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlar ile birinci ve ikinci türevleri ardışık dört elemanı örtmektedir. Dolayısıyla her $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı T^3_{m-1}, T^3_m, T^3_{m+1} ve T^3_{m+2} olarak dört kübik trigonometrik B-spline tarafından örtülmektedir. $h = 1$ için $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[0, 1]$ aralığına dönüştürülerek bu aralığa düşen tüm kübik B-spline ve kübik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları Şekil 2.17. ve Şekil 2.18.'de verilmiştir.



Şekil 2.17. Kübik B-spline şekil fonksiyonları



Şekil 2.18. Kübik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları

$T^3_m(x)$ kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlarının $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığının dışında sıfır olduğu ve $T^3_m(x)$ trigonometrik B-spline fonksiyonlarının $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığında ardışık dört elemanı örttüğü çizilen şekillerden de görülmektedir.

Dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı T^3_{m-1}, T^3_m, T^3_{m+1} ve T^3_{m+2} olarak dört kübik trigonometrik B-spline tarafından örtüleceğinden (2.43) yaklaşımı

$$\begin{aligned} u(x,t) &\approx U_N(x,t) = \sum_{i=m-1}^{m+2} T_i^3(x)\delta_i \qquad (2.44)\\ u(x,t) &\approx T^3_{m-1}(x)\delta_{m-1} + T^3_m(x)\delta_m + T^3_{m+1}(x)\delta_{m+1} + T^3_{m+2}(x)\delta_{m+2} \end{aligned}$$

olacaktır. Elde edilen bu yaklaşım için (2.42) kübik trigonometrik B-spline eşitliklerinin kullanılmasıyla x_m noktasındaki $u(x_m,t)$ için ve birinci-ikinci türevi için yaklaşımlar,

$$\begin{aligned} U_N(x_m,t) &= U_m = \sum_{i=m-1}^{m+2} T_i^3(x_m)\delta_i \\ \frac{dU_N(x_m,t)}{dx} &= U'_m = \sum_{i=m-1}^{m+2} \frac{dT_i^3(x_m)}{dx}\delta_i \\ \frac{d^2U_N(x_m,t)}{dx^2} &= U''_m = \sum_{i=m-1}^{m+2} \frac{d^2T_i^3(x_m)}{dx^2}\delta_i \end{aligned}$$

olarak yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılarak düzenlenirse bölünme noktalarındaki yaklaşımlar,

$$a_1 = \sin^2\left(\frac{h}{2}\right)\csc(h)\csc\left(\frac{3h}{2}\right), \qquad a_2 = \frac{2}{(1+2\cos(h))},$$

$$b_1 = \frac{3\csc\left(\frac{3h}{2}\right)}{4},$$

$$c_1 = \frac{3\left(3\cos^2\left(\frac{h}{2}\right)-1\right)}{4\left(\sin(h)\sin\left(\frac{3h}{2}\right)\right)}, \qquad c_2 = -\frac{3\cot^2\left(\frac{h}{2}\right)}{(2+4\cos(h))}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} U_m &= a_1\delta_{m-1} + a_2\delta_m + a_1\delta_{m+1} \qquad (2.45)\\ U'_m &= -b_1\delta_{m-1} + b_1\delta_{m+1} \qquad (2.46)\\ U''_m &= c_1\delta_{m-1} + c_2\delta_m + c_1\delta_{m+1} \qquad (2.47) \end{aligned}$$

eşitlikleri ile bulunur.

$[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı

$$\xi = x - x_m$$

dönüşümü ile $[0, h]$ aralığına dönüştürülebilir. Bu durumda kübik trigonometrik B-spline fonksiyonları

$$T^3_{m-1}(\xi) = \frac{\sin^3\left(\frac{h-\xi}{2}\right)}{\theta} \tag{2.48}$$

$$\begin{aligned} T^3_m(\xi) = \frac{1}{\theta}\Bigg[&\sin\left(\frac{\xi+2h}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\xi-h}{2}\right) \\ &+\sin\left(\frac{\xi-2h}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi+h}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi-h}{2}\right) \\ &+\sin^2\left(\frac{\xi-2h}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{2.49}$$

$$\begin{aligned} T^3_{m+1}(\xi) = \frac{1}{\theta}\Bigg[&\sin^2\left(\frac{\xi+h}{2}\right)\sin\left(\frac{h-\xi}{2}\right) \\ &+\sin\left(\frac{\xi+h}{2}\right)\sin\left(\frac{2h-\xi}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ &+\sin\left(\frac{3h-\xi}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{2.50}$$

$$T^3_{m+2}(\xi) = \frac{\sin^3\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\theta} \tag{2.51}$$

olarak elde edilir.

$[0, h]$ aralığındaki kübik B-spline fonksiyonlar ise

$$B^3_{m-1}(\xi) = \left(1 - \frac{\xi}{h}\right)^3, \tag{2.52}$$

$$B^3_m(\xi) = 4 - 6\frac{\xi^2}{h^2} + 3\frac{\xi^3}{h^3}, \tag{2.53}$$

$$B^3_{m+1}(\xi) = 1 + 3\frac{\xi}{h} + 3\frac{\xi^2}{h^2} - 3\frac{\xi^3}{h^3}, \tag{2.54}$$

$$B^3_{m+2}(\xi) = \frac{\xi^3}{h^3} \tag{2.55}$$

şeklindedir.

2.3.2.4. Kuartik trigonometrik B-spline

T^4_i kuartik trigonometrik B-spline fonksiyonlarını hesaplamak için ise (2.15) bağıntısında $k = 4$ alındığında

$$\rho(x_i) = \sin\left(\frac{x - x_i}{2}\right)$$

olmak üzere

$$T_i^4(x) = \frac{\rho(x_i)}{\sin(2h)} T_i^3(x) - \frac{\rho(x_{i+5})}{\sin(2h)} T_{i+1}^3(x) \tag{2.56}$$

elde edilir. Kuartik trigonometrik B-spline fonksiyonlarını bulabilmek için gerekli olan kübik trigonometrik B-spline eşitlikleri

$$\theta = \sin\left(\frac{h}{2}\right)\sin(h)\sin\left(\frac{3h}{2}\right)\sin(2h)$$

olmak üzere

$$\frac{\rho(x_i)}{\sin(2h)} T_i^3(x) = \frac{1}{\theta}\begin{cases} \rho^4(x_i) & , x_i \le x < x_{i+1} \\ -\rho^3(x_i)\rho(x_{i+2}) - \rho^2(x_i)\rho(x_{i+3})\rho(x_{i+1}) \\ -\rho(x_i)\rho(x_{i+4})\rho^2(x_{i+1}) & , x_{i+1} \le x < x_{i+2} \\ \rho^2(x_i)\rho^2(x_{i+3}) \\ +\rho(x_i)\rho(x_{i+4})\rho(x_{i+1})\rho(x_{i+3}) & , x_{i+2} \le x < x_{i+3} \\ +\rho(x_i)\rho^2(x_{i+4})\rho(x_{i+2}) \\ -\rho(x_i)\rho^3(x_{i+4}) & , x_{i+3} \le x < x_{i+4} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ve

$$-\frac{\rho(x_{i+5})}{\sin(2h)} T_{i+1}^3(x) = \frac{1}{\theta}\begin{cases} -\rho(x_{i+5})\rho^3(x_{i+1}) & , x_{i+1} \le x < x_{i+2} \\ \rho(x_{i+5})\rho^2(x_{i+1})\rho(x_{i+3}) \\ +\rho(x_{i+5})\rho(x_{i+1})\rho(x_{i+4})\rho(x_{i+2}) & , x_{i+2} \le x < x_{i+3} \\ +\rho^2(x_{i+5})\rho^2(x_{i+2}) \\ -\rho(x_{i+5})\rho(x_{i+1})\rho^2(x_{i+4}) \\ -\rho^2(x_{i+5})\rho(x_{i+2})\rho(x_{i+4}) & , x_{i+3} \le x < x_{i+4} \\ -\rho^3(x_{i+5})\rho(x_{i+3}) \\ \rho^4(x_{i+5}) & , x_{i+4} \le x < x_{i+5} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olarak yazılabileceğinden (2.56) eşitliği

$$T_i^4(x) = \frac{1}{\theta}\begin{cases} \rho^4(x_i) & , x_i \le x < x_{i+1} \\ -\rho^3(x_i)\rho(x_{i+2}) & \\ -\rho^2(x_i)\rho(x_{i+3})\rho(x_{i+1}) & \\ -\rho(x_i)\rho(x_{i+4})\rho^2(x_{i+1}) & , x_{i+1} \le x < x_{i+2} \\ -\rho(x_{i+5})\rho^3(x_{i+1}) & \\ \rho^2(x_i)\rho^2(x_{i+3}) & \\ +\rho(x_i)\rho(x_{i+4})\rho(x_{i+1})\rho(x_{i+3}) & \\ +\rho(x_i)\rho^2(x_{i+4})\rho(x_{i+2}) & \\ +\rho(x_{i+5})\rho^2(x_{i+1})\rho(x_{i+3}) & , x_{i+2} \le x < x_{i+3} \\ +\rho(x_{i+5})\rho(x_{i+1})\rho(x_{i+4})\rho(x_{i+2}) & \\ +\rho^2(x_{i+5})\rho^2(x_{i+2}) & \\ -\rho(x_i)\rho^3(x_{i+4}) & \\ -\rho(x_{i+5})\rho(x_{i+1})\rho^2(x_{i+4}) & \\ -\rho^2(x_{i+5})\rho(x_{i+2})\rho(x_{i+4}) & , x_{i+3} \le x < x_{i+4} \\ -\rho^3(x_{i+5})\rho(x_{i+3}) & \\ \rho^4(x_{i+5}) & , x_{i+4} \le x < x_{i+5} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{2.57}$$

şeklinde bulunur. Kuartik B-spline fonksiyonların yazımı ile uyumlu olması için gerekli düzenlemeler yapılırsa bölünme noktalarındaki $T_m^4(x)$ kuartik trigonometrik B-spline fonksiyonlar

$$\rho(x_m) = \sin\left(\frac{x - x_m}{2}\right),\ \theta = \sin\left(\frac{h}{2}\right)\sin(h)\sin\left(\frac{3h}{2}\right)\sin(2h),\ m = 0, \ldots, N$$

olmak üzere

$$T_m^4(x) = \frac{1}{\theta}\begin{cases} \rho^4(x_{m-2}) & , x_{m-2} \le x < x_{m-1} \\ \begin{array}{l} -\rho^3(x_{m-2})\rho(x_m) \\ -\rho^2(x_{m-2})\rho(x_{m+1})\rho(x_{m-1}) \\ -\rho(x_{m-2})\rho(x_{m+2})\rho^2(x_{m-1}) \\ -\rho(x_{m+3})\rho^3(x_{m-1}) \end{array} & , x_{m-1} \le x < x_m \\ \begin{array}{l} \rho^2(x_{m-2})\rho^2(x_{m+1}) \\ +\rho(x_{m-2})\rho(x_{m+2})\rho(x_{m-1})\rho(x_{m+1}) \\ +\rho(x_{m-2})\rho^2(x_{m+2})\rho(x_m) \\ +\rho(x_{m+3})\rho^2(x_{m-1})\rho(x_{m+1}) \\ +\rho(x_{m+3})\rho(x_{m-1})\rho(x_{m+2})\rho(x_m) \\ +\rho^2(x_{m+3})\rho^2(x_m) \end{array} & , x_m \le x < x_{m+1} \\ \begin{array}{l} -\rho(x_{m-2})\rho^3(x_{m+2}) \\ -\rho(x_{m+3})\rho(x_{m-1})\rho^2(x_{m+2}) \\ -\rho^2(x_{m+3})\rho(x_m)\rho(x_{m+2}) \\ -\rho^3(x_{m+3})\rho(x_{m+1}) \end{array} & , x_{m+1} \le x < x_{m+2} \\ \rho^4(x_{m+3}) & , x_{m+2} \le x < x_{m+3} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{2.58}$$

formunda bulunur. $i = m-1,\ m,\ m+1,\ m+2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_i^+} T_m^4(x) &= \lim_{x \to x_i^-} T_m^4(x) \\ \lim_{x \to x_i^+} \frac{d}{dx}\left(T_m^4(x)\right) &= \lim_{x \to x_i^-} \frac{d}{dx}\left(T_m^4(x)\right) \\ \lim_{x \to x_i^+} \frac{d^2}{dx^2}\left(T_m^4(x)\right) &= \lim_{x \to x_i^-} \frac{d^2}{dx^2}\left(T_m^4(x)\right) \\ \lim_{x \to x_i^+} \frac{d^3}{dx^3}\left(T_m^4(x)\right) &= \lim_{x \to x_i^-} \frac{d^3}{dx^3}\left(T_m^4(x)\right) \end{aligned}$$

olduğundan $T_m^4(x)$ kuartik trigonometrik B-spline fonksiyonunun, birinci, ikinci ve üçüncü türevinin $x_{m-2,}$ $x_{m-1,}$ x_m ve x_{m+1} bölünme noktalarında dolayısıyla da konum aralığının iç noktalarında sürekli olduğu görülebilir.

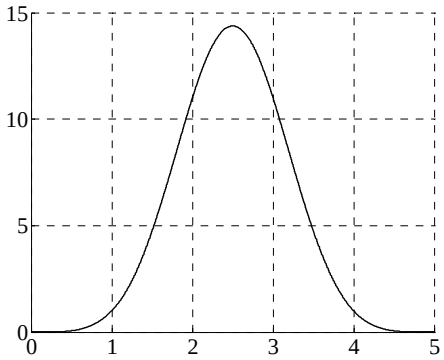
Problemin analitik çözümü için ise genel yaklaşım kuartik trigonometrik B-spline

kullanılarak

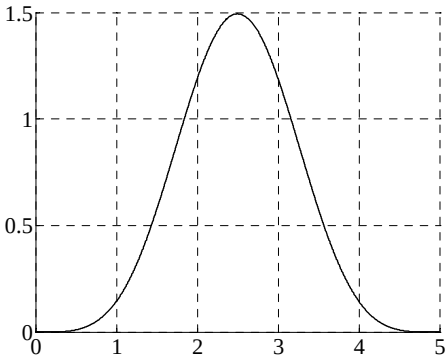
$$u(x,t) \approx U_N(x,t) = \sum_{i=-2}^{N+1} T_i^4(x)\delta_i(t) \tag{2.59}$$

şeklinde tanımlanabilir.

$B_m^4(x)$ kuartik B-spline fonksiyonlarında olduğu gibi $T_m^4(x)$ kuartik trigonometrik B-spline fonksiyonları da $[x_{m-2}, x_{m+3}]$ aralığının dışında sıfırdır ve ayrıca $[x_{m-2}, x_{m+3}]$ aralığındaki ardışık beş elemanı örtmektedir. Bu durumu göstermek için $h = 1$ alınmış ve $[x_{m-2}, x_{m+3}]$ aralığı $[0, 5]$ aralığına dönüştürülerek (2.11) kuartik B-spline ve (2.58) kuartik trigonometrik B-spline fonksiyonlar Şekil 2.19. ve Şekil 2.20.'de gösterilmiştir.

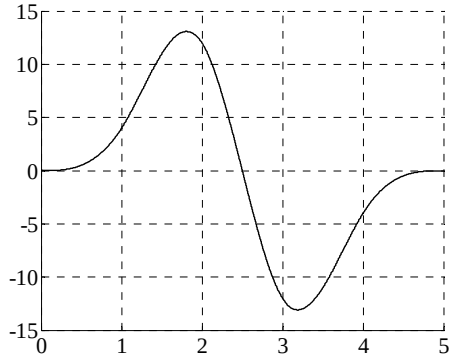


Şekil 2.19. Kuartik B-spline

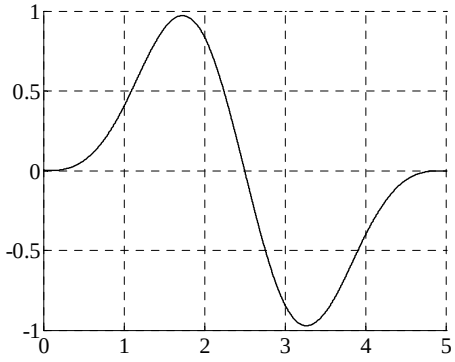


Şekil 2.20. Kuartik trigonometrik B-spline

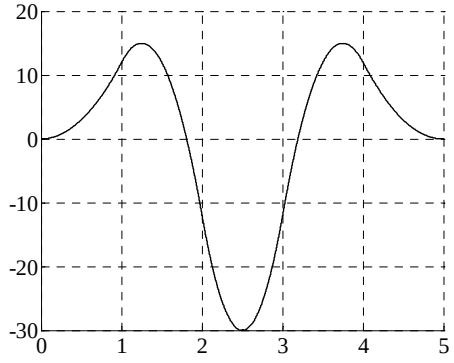
$T_m^4(x)$ kuartik trigonometrik B-spline fonksiyonlarının birinci, ikinci ve üçüncü türevleri de aynı dereceden B-spline fonksiyonlardaki gibi $[x_{m-2}, x_{m+3}]$ aralığının dışında sıfırdır, bölünme noktalarında süreklidir ve $[x_{m-2}, x_{m+3}]$ aralığındaki ardışık beş elemanı örtmektedir. Bu durum Şekil 2.21., Şekil 2.23. ve Şekil 2.25.'de kuartik B-spline fonksiyonlarının birinci, ikinci ve üçüncü türevleri;. Şekil 2.22., Şekil 2.24. ve Şekil 2.26.'da ise kuartik trigonometrik B-spline fonksiyonlarının birinci, ikinci ve üçüncü türevleri çizilerek gösterilmiştir.



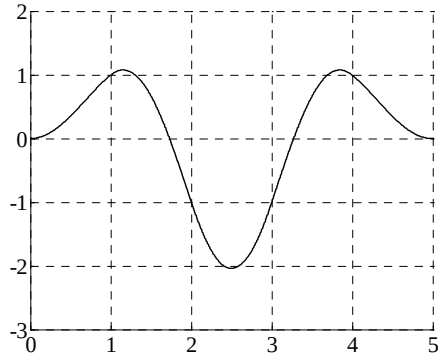
Şekil 2.21. Kuartik B-spline fonksiyonunun birinci türevi



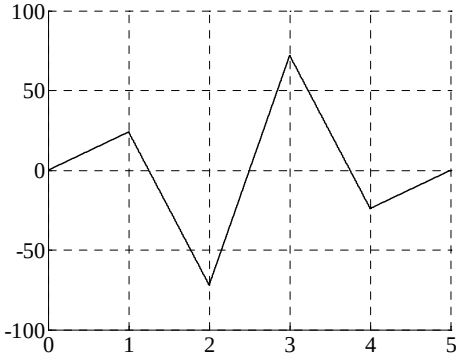
Şekil 2.22. Kuartik trigonometrik B-spline fonksiyonunun birinci türevi



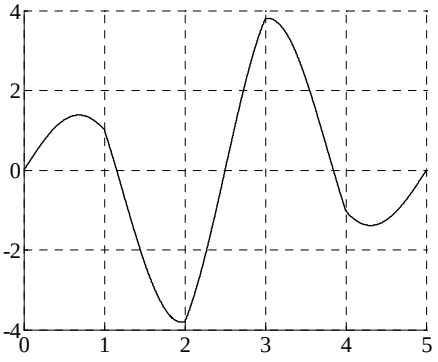
Şekil 2.23. Kuartik B-spline fonksiyonunun ikinci türevi



Şekil 2.24. Kuartik trigonometrik B-spline fonksiyonunun ikinci türevi

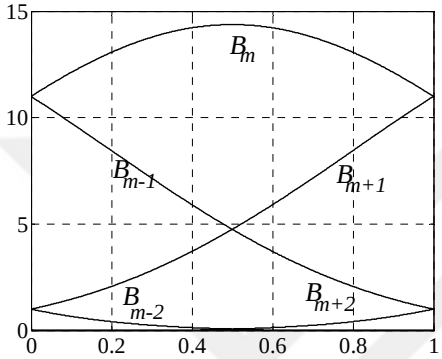


Şekil 2.25. Kuartik B-spline fonksiyonunun üçüncü türevi

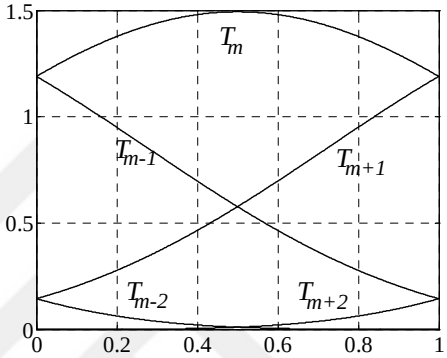


Şekil 2.26. Kuartik trigonometrik B-spline fonksiyonunun üçüncü türevi

Çizilen şekillerden görüldüğü gibi kuartik B-spline ve kuartik trigonometrik B-spline fonksiyonlar ile birinci, ikinci ve üçüncü türevleri ardışık beş elemanı örtmektedir. Dolayısıyla her $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı T^4_{m-2}, T^4_{m-1}, T^4_m, T^4_{m+1} ve T^4_{m+2} olarak beş kuartik trigonometrik B-spline tarafından örtülmektedir. $h = 1$ için $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[0, 1]$ aralığına dönüştürülerek bu aralığa düşen tüm kuartik B-spline ve kuartik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları Şekil 2.27. ve Şekil 2.28.'de verilmiştir.



Şekil 2.27. Kuartik B-spline şekil fonksiyonları



Şekil 2.28. Kuartik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları

$T^4_m(x)$ kuartik trigonometrik B-spline ve ilk 3 türevinin $[x_{m-2}, x_{m+3}]$ aralığının dışında sıfır olduğu ve $T^4_m(x)$ trigonometrik B-spline fonksiyonlarının $[x_{m-2}, x_{m+3}]$ aralığında ardışık beş elemanı örttüğü şekillerden de görülmektedir. Dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı T^4_{m-2}, T^4_{m-1}, T^4_m, T^4_{m+1} ve T^4_{m+2} olarak beş kuartik trigonometrik B-spline tarafından örtüldüğünden (2.59) yaklaşımı

$$u(x,t) \approx U_N(x,t) = \sum_{i=m-2}^{m+2} T^4_i(x)\delta_i \tag{2.60}$$

$$u(x,t) \approx T^4_{m-2}(x)\delta_{m-2} + T^4_{m-1}(x)\delta_{m-1} + T^4_m(x)\delta_m + T^4_{m+1}(x)\delta_{m+1} + T^4_{m+2}(x)\delta_{m+2}$$

olacaktır. Elde edilen bu yaklaşım için (2.58) kuartik trigonometrik B-spline eşitliklerinin kullanılmasıyla x_m noktasındaki $u(x_m, t)$ ve birinci-ikinci-üçüncü türevi için yaklaşımlar,

$$U_N(x_m, t) = U_m = \sum_{i=m-2}^{m+2} T^4_i(x_m)\delta_i$$

$$\begin{aligned}
\frac{dU_N(x_m,t)}{dx} &= U'_m = \sum_{i=m-2}^{m+2} \frac{dT_i^4(x_m)}{dx}\delta_i \\
\frac{d^2U_N(x_m,t)}{dx^2} &= U''_m = \sum_{i=m-2}^{m+2} \frac{d^2T_i^4(x_m)}{dx^2}\delta_i \\
\frac{d^3U_N(x_m,t)}{dx^3} &= U'''_m = \sum_{i=m-2}^{m+2} \frac{d^3T_i^4(x_m)}{dx^3}\delta_i
\end{aligned}$$

olarak yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılarak düzenlenirse bölünme noktalarındaki yaklaşımlar

$$a_1 = \frac{\sin^4\left(\frac{h}{2}\right)}{\theta}, \qquad a_2 = \frac{\sin^4\left(\frac{h}{2}\right)\left(12\cos^2\left(\frac{h}{2}\right)-1\right)}{\theta},$$

$$b_1 = -\frac{2\sin^3\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{h}{2}\right)}{\theta}, \qquad b_2 = -\frac{2\sin^3\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{h}{2}\right)\left(4\cos^2\left(\frac{h}{2}\right)-1\right)}{\theta},$$

$$c_1 = \frac{\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)\left(4\cos^2\left(\frac{h}{2}\right)-1\right)}{\theta}, \qquad d_1 = -\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{h}{2}\right)\left(8\cos^2\left(\frac{h}{2}\right)-5\right)}{\theta},$$

$$d_2 = \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{h}{2}\right)\left(4\cos^2\left(\frac{h}{2}\right)-1\right)^2}{\theta}$$

olmak üzere

$$U_m = a_1\delta_{m-2} + a_2\delta_{m-1} + a_2\delta_m + a_1\delta_{m+1}, \tag{2.61}$$

$$U'_m = b_1\delta_{m-2} + b_2\delta_{m-1} - b_2\delta_m - b_1\delta_{m+1}, \tag{2.62}$$

$$U''_m = c_1\delta_{m-2} - c_1\delta_{m-1} - c_1\delta_m + c_1\delta_{m+1}, \tag{2.63}$$

$$U'''_m = d_1\delta_{m-2} + d_2\delta_{m-1} - d_2\delta_m - d_1\delta_{m+1}, \tag{2.64}$$

eşitlikleri ile bulunur.

$[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı

$$\xi = x - x_m$$

dönüşümü ile $[0,h]$ aralığına dönüştürülebilir. Bu durumda kuartik trigonometrik B-spline fonksiyonları

$$T^4_{m-2}(\xi) = \frac{\sin^4\left(\frac{\xi-h}{2}\right)}{\theta} \tag{2.65}$$

$$\begin{aligned} T^4_{m-1}(\xi) = \frac{1}{\theta}\Bigg[&\sin\left(\frac{\xi+3h}{2}\right)\sin^3\left(\frac{h-\xi}{2}\right) \\ &+\sin\left(\frac{2h-\xi}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi+2h}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\xi-h}{2}\right) \\ &+\sin^2\left(\frac{\xi-2h}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi+h}{2}\right)\sin\left(\frac{h-\xi}{2}\right) \\ &+\sin^3\left(\frac{2h-\xi}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{2.66}$$

$$\begin{aligned} T^4_{m}(\xi) = \frac{1}{\theta}\Bigg[&\sin^2\left(\frac{\xi+2h}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\xi-h}{2}\right) \\ &+\sin\left(\frac{\xi+2h}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi-2h}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi+h}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi-h}{2}\right) \\ &+\sin\left(\frac{\xi+2h}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\xi-2h}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ &+\sin\left(\frac{\xi-3h}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\xi+h}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi-h}{2}\right) \\ &+\sin\left(\frac{\xi-3h}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi+h}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi-2h}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ &+\sin^2\left(\frac{\xi-3h}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{2.67}$$

$$\begin{aligned} T^4_{m+1}(\xi) = \frac{1}{\theta}\Bigg[&\sin^3\left(\frac{\xi+h}{2}\right)\sin\left(\frac{h-\xi}{2}\right) \\ &+\sin^2\left(\frac{\xi+h}{2}\right)\sin\left(\frac{2h-\xi}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ &+\sin\left(\frac{\xi+h}{2}\right)\sin\left(\frac{3h-\xi}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ &+\sin\left(\frac{4h-\xi}{2}\right)\sin^3\left(\frac{\xi}{2}\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{2.68}$$

$$T^4_{m+2}(\xi) = \frac{\sin^4\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\theta} \tag{2.69}$$

olarak elde edilir.

$[0,h]$ aralığındaki kuartik B-spline fonksiyonları ise

$$B^4_{m-2}(\xi) = 1 - 4\frac{\xi}{h} + 6\frac{\xi^2}{h^2} - 4\frac{\xi^3}{h^3} + \frac{\xi^4}{h^4}, \tag{2.70}$$

$$B^4_{m-1}(\xi) = 11 - 12\frac{\xi}{h} - 6\frac{\xi^2}{h^2} + 12\frac{\xi^3}{h^3} - 4\frac{\xi^4}{h^4}, \tag{2.71}$$

$$B_m^4(\xi) = 11 + 12\frac{\xi}{h} - 6\frac{\xi^2}{h^2} - 12\frac{\xi^3}{h^3} + 6\frac{\xi^4}{h^4}, \tag{2.72}$$

$$B_{m+1}^4(\xi) = 1 + 4\frac{\xi}{h} + 6\frac{\xi^2}{h^2} + 4\frac{\xi^3}{h^3} - 4\frac{\xi^4}{h^4} \tag{2.73}$$

$$B_{m+2}^4(\xi) = \frac{\xi^4}{h^4} \tag{2.74}$$

şeklindedir.

2.3.2.5. Kuintik trigonometrik B-spline

T_i^5 kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonlarını hesaplamak için ise (2.15) bağıntısında $k = 5$ alındığında

$$\rho(x_i) = \sin\left(\frac{x - x_i}{2}\right)$$

olmak üzere

$$T_i^5(x) = \frac{\rho(x_i)}{\sin\left(\frac{5h}{2}\right)} T_i^4(x) - \frac{\rho(x_{i+6})}{\sin\left(\frac{5h}{2}\right)} T_{i+1}^4(x) \tag{2.75}$$

elde edilir. Kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonlarını bulabilmek için gerekli olan kuartik trigonometrik B-spline eşitlikleri

$$\theta = \sin\left(\frac{h}{2}\right)\sin(h)\sin\left(\frac{3h}{2}\right)\sin(2h)\sin\left(\frac{5h}{2}\right)$$

olmak üzere

$$\frac{\rho(x_i)T_i^4(x)}{\sin\left(\frac{5h}{2}\right)} = \frac{1}{\theta}\begin{cases} \rho^5(x_i) & , x_i \le x < x_{i+1} \\ -\rho^4(x_i)\rho(x_{i+2}) - \rho^3(x_i)\rho(x_{i+3})\rho(x_{i+1}) & \\ -\rho^2(x_i)\rho(x_{i+4})\rho^2(x_{i+1}) - \rho(x_i)\rho(x_{i+5})\rho^3(x_{i+1}) & , x_{i+1} \le x < x_{i+2} \\ \rho^3(x_i)\rho^2(x_{i+3}) + \rho^2(x_i)\rho(x_{i+4})\rho(x_{i+1})\rho(x_{i+3}) & \\ +\rho^2(x_i)\rho^2(x_{i+4})\rho(x_{i+2}) & \\ +\rho(x_i)\rho(x_{i+5})\rho^2(x_{i+1})\rho(x_{i+3}) & , x_{i+2} \le x < x_{i+3} \\ +\rho(x_i)\rho(x_{i+5})\rho(x_{i+1})\rho(x_{i+4})\rho(x_{i+2}) & \\ +\rho(x_i)\rho^2(x_{i+5})\rho^2(x_{i+2}) & \\ -\rho^2(x_i)\rho^3(x_{i+4}) - \rho(x_i)\rho(x_{i+5})\rho(x_{i+1})\rho^2(x_{i+4}) & \\ -\rho(x_i)\rho^2(x_{i+5})\rho(x_{i+2})\rho(x_{i+4}) & , x_{i+3} \le x < x_{i+4} \\ -\rho(x_i)\rho^3(x_{i+5})\rho(x_{i+3}) & \\ \rho(x_i)\rho^4(x_{i+5}) & , x_{i+4} \le x < x_{i+5} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ve

$$-\frac{\rho(x_{i+6})T_{i+1}^4(x)}{\sin\left(\frac{5h}{2}\right)} = \frac{1}{\theta}\begin{cases} -\rho(x_{i+6})\rho^4(x_{i+1}) & , x_{i+1} \le x < x_{i+2} \\ \rho(x_{i+6})\rho^3(x_{i+1})\rho(x_{i+3}) & \\ +\rho(x_{i+6})\rho^2(x_{i+1})\rho(x_{i+4})\rho(x_{i+2}) & , x_{i+2} \le x < x_{i+3} \\ +\rho(x_{i+6})\rho(x_{i+1})\rho(x_{i+5})\rho^2(x_{i+2}) & \\ +\rho^2(x_{i+6})\rho^3(x_{i+2}) & \\ -\rho(x_{i+6})\rho^2(x_{i+1})\rho^2(x_{i+4}) & \\ -\rho(x_{i+6})\rho(x_{i+1})\rho(x_{i+5})\rho(x_{i+2})\rho(x_{i+4}) & \\ -\rho(x_{i+6})\rho(x_{i+1})\rho^2(x_{i+5})\rho(x_{i+3}) & , x_{i+3} \le x < x_{i+4} \\ -\rho^2(x_{i+6})\rho^2(x_{i+2})\rho(x_{i+4}) & \\ -\rho^2(x_{i+6})\rho(x_{i+2})\rho(x_{i+5})\rho(x_{i+3}) & \\ -\rho^3(x_{i+6})\rho^2(x_{i+3}) & \\ \rho(x_{i+6})\rho(x_{i+1})\rho^3(x_{i+5}) & \\ +\rho^2(x_{i+6})\rho(x_{i+2})\rho^2(x_{i+5}) & , x_{i+4} \le x < x_{i+5} \\ +\rho^3(x_{i+6})\rho(x_{i+3})\rho(x_{i+5}) & \\ +\rho^4(x_{i+6})\rho(x_{i+4}) & \\ -\rho^5(x_{i+6}) & , x_{i+5} \le x < x_{i+6} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olarak yazılabileceğinden (2.75) eşitliği

$$
T_i^5(x) = \frac{1}{\theta}
\begin{cases}
\rho^5(x_i) & , x_i \le x < x_{i+1} \\
\begin{array}{l}
-\rho^4(x_i)\rho(x_{i+2}) - \rho^3(x_i)\rho(x_{i+3})\rho(x_{i+1}) \\
-\rho^2(x_i)\rho(x_{i+4})\rho^2(x_{i+1}) \\
-\rho(x_i)\rho(x_{i+5})\rho^3(x_{i+1}) \\
-\rho(x_{i+6})\rho^4(x_{i+1})
\end{array} & , x_{i+1} \le x < x_{i+2} \\
\begin{array}{l}
\rho^3(x_i)\rho^2(x_{i+3}) \\
+\rho^2(x_i)\rho(x_{i+4})\rho(x_{i+1})\rho(x_{i+3}) \\
+\rho^2(x_i)\rho^2(x_{i+4})\rho(x_{i+2}) \\
+\rho(x_i)\rho(x_{i+5})\rho^2(x_{i+1})\rho(x_{i+3}) \\
+\rho(x_i)\rho(x_{i+5})\rho(x_{i+1})\rho(x_{i+4})\rho(x_{i+2}) \\
+\rho(x_i)\rho^2(x_{i+5})\rho^2(x_{i+2}) \\
+\rho(x_{i+6})\rho^3(x_{i+1})\rho(x_{i+3}) \\
+\rho(x_{i+6})\rho^2(x_{i+1})\rho(x_{i+4})\rho(x_{i+2}) \\
+\rho(x_{i+6})\rho(x_{i+1})\rho(x_{i+5})\rho^2(x_{i+2}) \\
+\rho^2(x_{i+6})\rho^3(x_{i+2}) \\
-\rho^2(x_i)\rho^3(x_{i+4}) \\
-\rho(x_i)\rho(x_{i+5})\rho(x_{i+1})\rho^2(x_{i+4}) \\
-\rho(x_i)\rho^2(x_{i+5})\rho(x_{i+2})\rho(x_{i+4}) \\
-\rho(x_i)\rho^3(x_{i+5})\rho(x_{i+3}) \\
-\rho(x_{i+6})\rho^2(x_{i+1})\rho^2(x_{i+4}) \\
-\rho(x_{i+6})\rho(x_{i+1})\rho(x_{i+5})\rho(x_{i+2})\rho(x_{i+4}) \\
-\rho(x_{i+6})\rho(x_{i+1})\rho^2(x_{i+5})\rho(x_{i+3}) \\
-\rho^2(x_{i+6})\rho^2(x_{i+2})\rho(x_{i+4}) \\
-\rho^2(x_{i+6})\rho(x_{i+2})\rho(x_{i+5})\rho(x_{i+3}) \\
-\rho^3(x_{i+6})\rho^2(x_{i+3})
\end{array} & , x_{i+2} \le x < x_{i+3} \\
\begin{array}{l}
\rho(x_i)\rho^4(x_{i+5}) + \rho(x_{i+6})\rho(x_{i+1})\rho^3(x_{i+5}) \\
+\rho^2(x_{i+6})\rho(x_{i+2})\rho^2(x_{i+5}) \\
+\rho^3(x_{i+6})\rho(x_{i+3})\rho(x_{i+5}) + \rho^4(x_{i+6})\rho(x_{i+4})
\end{array} & , x_{i+3} \le x < x_{i+4} \\
-\rho^5(x_{i+6}) & , x_{i+4} \le x < x_{i+5} \\
0 & , x_{i+5} \le x < x_{i+6} \\
 & , \text{diğer durumlar}
\end{cases}
\tag{2.76}
$$

şeklinde bulunur.

Kuintik B-spline fonksiyonların yazımı ile uyumlu olması için düzenlemeler yapılırsa bölünme noktalarındaki $T_m^5(x)$ kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonlar

$$\rho(x_m) = \sin\left(\frac{x - x_m}{2}\right),\ \theta = \sin\left(\frac{h}{2}\right)\sin(h)\sin\left(\frac{3h}{2}\right)\sin(2h)\sin\left(\frac{5h}{2}\right),\ m = 0, \ldots, N$$

olmak üzere

$$
T_m^5(x) = \frac{1}{\theta}
\begin{cases}
\rho^5(x_{m-3}) & , x_{m-3} \le x < x_{m-2} \\
-\rho^4(x_{m-3})\rho(x_{m-1}) & \\
-\rho^3(x_{m-3})\rho(x_m)\rho(x_{m-2}) & \\
-\rho^2(x_{m-3})\rho(x_{m+1})\rho^2(x_{m-2}) & , x_{m-2} \le x < x_{m-1} \\
-\rho(x_{m-3})\rho(x_{m+2})\rho^3(x_{m-2}) - \rho(x_{m+3})\rho^4(x_{m-2}) & \\
\rho^3(x_{m-3})\rho^2(x_m) & \\
+\rho^2(x_{m-3})\rho(x_{m+1})\rho(x_{m-2})\rho(x_m) & \\
+\rho^2(x_{m-3})\rho^2(x_{m+1})\rho(x_{m-1}) & \\
+\rho(x_{m-3})\rho(x_{m+2})\rho^2(x_{m-2})\rho(x_m) & \\
+\rho(x_{m-3})\rho(x_{m+2})\rho(x_{m-2})\rho(x_{m+1})\rho(x_{m-1}) & \\
+\rho(x_{m-3})\rho^2(x_{m+2})\rho^2(x_{m-1}) & , x_{m-1} \le x < x_m \\
+\rho(x_{m+3})\rho^3(x_{m-2})\rho(x_m) & \\
+\rho(x_{m+3})\rho^2(x_{m-2})\rho(x_{m+1})\rho(x_{m-1}) & \\
+\rho(x_{m+3})\rho(x_{m-2})\rho(x_{m+2})\rho^2(x_{m-1}) & \\
+\rho^2(x_{m+3})\rho^3(x_{m-1}) & \\
-\rho^2(x_{m-3})\rho^3(x_{m+1}) & \\
-\rho(x_{m-3})\rho(x_{m+2})\rho(x_{m-2})\rho^2(x_{m+1}) & \\
-\rho(x_{m-3})\rho^2(x_{m+2})\rho(x_{m-1})\rho(x_{m+1}) & \\
-\rho(x_{m-3})\rho^3(x_{m+2})\rho(x_m) & \\
-\rho(x_{m+3})\rho^2(x_{m-2})\rho^2(x_{m+1}) & , x_m \le x < x_{m+1} \\
-\rho(x_{m+3})\rho(x_{m-2})\rho(x_{m+2})\rho(x_{m-1})\rho(x_{m+1}) & \\
-\rho(x_{m+3})\rho(x_{m-2})\rho^2(x_{m+2})\rho(x_m) & \\
-\rho^2(x_{m+3})\rho^2(x_{m-1})\rho(x_{m+1}) & \\
-\rho^2(x_{m+3})\rho(x_{m-1})\rho(x_{m+2})\rho(x_m) & \\
-\rho^3(x_{m+3})\rho^2(x_m) & \\
\rho(x_{m-3})\rho^4(x_{m+2}) + \rho(x_{m+3})\rho(x_{m-2})\rho^3(x_{m+2}) & \\
+\rho^2(x_{m+3})\rho(x_{m-1})\rho^2(x_{m+2}) & , x_{m+1} \le x < x_{m+2} \\
+\rho^3(x_{m+3})\rho(x_m)\rho(x_{m+2}) + \rho^4(x_{m+3})\rho(x_{m+1}) & \\
-\rho^5(x_{m+3}) & , x_{m+2} \le x < x_{m+3} \\
0 & , \text{diğer durumlar}
\end{cases}
\tag{2.77}
$$

formunda bulunur. $i = m-2,\ m-1,\ m,\ m+1,\ m+2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_i^+} T_m^5(x) &= \lim_{x\to x_i^-} T_m^5(x) \\
\lim_{x\to x_i^+} \frac{d}{dx}\left(T_m^5(x)\right) &= \lim_{x\to x_i^-} \frac{d}{dx}\left(T_m^5(x)\right) \\
\lim_{x\to x_i^+} \frac{d^2}{dx^2}\left(T_m^5(x)\right) &= \lim_{x\to x_i^-} \frac{d^2}{dx^2}\left(T_m^5(x)\right) \\
\lim_{x\to x_i^+} \frac{d^3}{dx^3}\left(T_m^5(x)\right) &= \lim_{x\to x_i^-} \frac{d^3}{dx^3}\left(T_m^5(x)\right) \\
\lim_{x\to x_i^+} \frac{d^4}{dx^4}\left(T_m^5(x)\right) &= \lim_{x\to x_i^-} \frac{d^4}{dx^4}\left(T_m^5(x)\right)
\end{aligned}$$

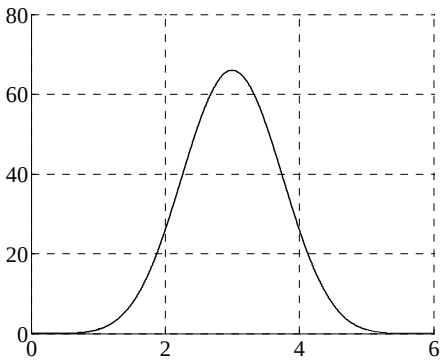
olduğundan $T_m^5(x)$ kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonunun, birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü türevinin $x_{m-2,}\ x_{m-1,}\ x_m,\ x_{m+1}$ ve x_{m+2} bölünme noktalarında dolayısıyla da konum aralığının iç noktalarında sürekli olduğu görülebilir.

Problemin analitik çözümü için ise genel yaklaşım kuintik trigonometrik B-spline kullanılarak

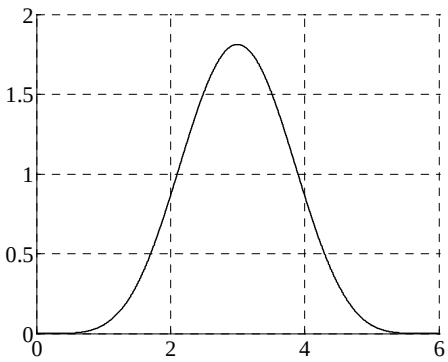
$$u(x,t) \approx U_N(x,t) = \sum_{i=-2}^{N+2} T_i^5(x)\delta_i(t) \tag{2.78}$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada δ_i katsayıları zamana bağlı değişkenler olmak üzere $T_i^5(x)$ fonksiyonları kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonlarını gösterir.

$B_m^5(x)$ kuintik B-spline fonksiyonlarında olduğu gibi $T_m^5(x)$ kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonları da $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığının dışında sıfırdır ve ayrıca $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığındaki ardışık altı elemanı örtmektedir. Bu durumu göstermek için $h = 1$ alınmış ve $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığı $[0, 6]$ aralığına dönüştürülerek (2.12) kuintik B-spline ve (2.77) kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonlar Şekil 2.29. ve Şekil 2.30.'da gösterilmiştir.

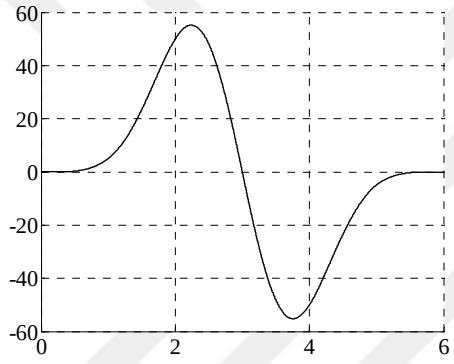


Şekil 2.29. Kuintik B-spline

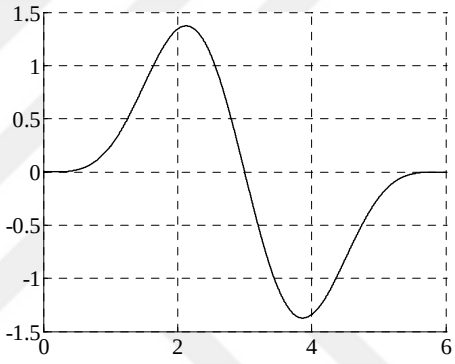


Şekil 2.30. Kuintik trigonometrik B-spline

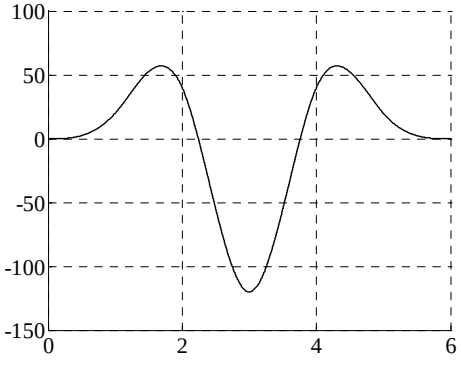
$T_m^5(x)$ kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonlarının birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü türevleri de aynı dereceden B-spline fonksiyonlardaki gibi $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığının dışında sıfırdır, bölünme noktalarında süreklidir ve $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığındaki ardışık altı elemanı örtmektedir. Bu durum Şekil 2.31., Şekil 2.33., Şekil 2.35. ve Şekil 2.37.'de kuintik B-spline fonksiyonların birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü türevleri; Şekil 2.32., Şekil 2.34., Şekil 2.36. ve Şekil 2.38.'de ise kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonların birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü türevleri çizilerek gösterilmiştir.



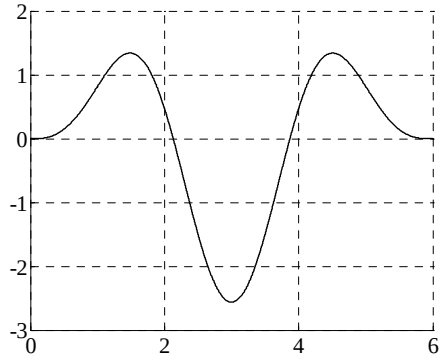
Şekil 2.31. Kuintik B-spline fonksiyonunun birinci türevi



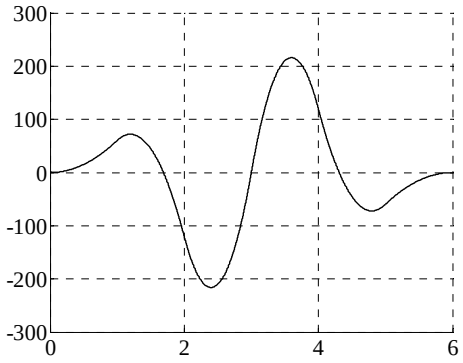
Şekil 2.32. Kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonunun birinci türevi



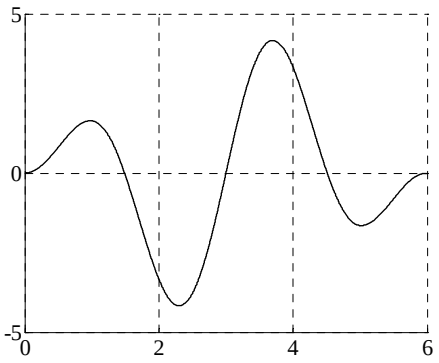
Şekil 2.33. Kuintik B-spline fonksiyonunun ikinci türevi



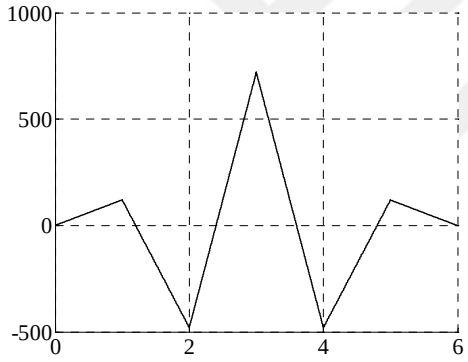
Şekil 2.34. Kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonunun ikinci türevi



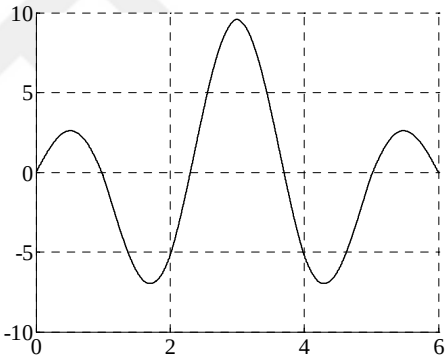
Şekil 2.35. Kuintik B-spline fonksiyonunun üçüncü türevi



Şekil 2.36. Kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonunun üçüncü türevi

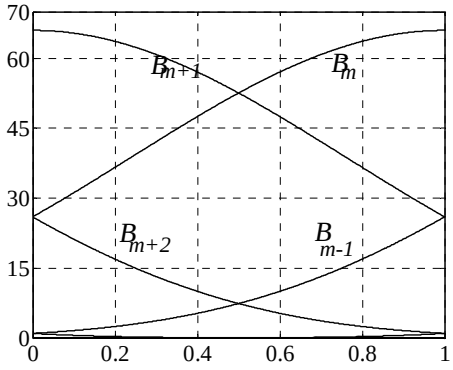


Şekil 2.37. Kuintik B-spline fonksiyonunun dördüncü türevi

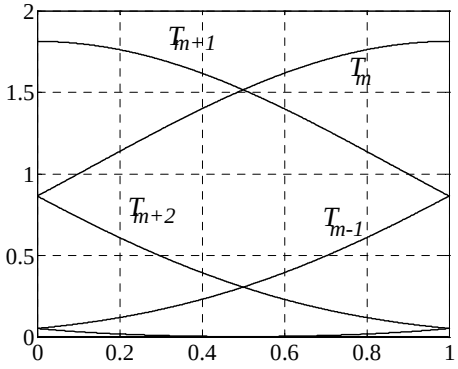


Şekil 2.38. Kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonunun dördüncü türevi

Çizilen şekillerden görüldüğü gibi kuintik B-spline ve kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonlar ile birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü türevleri ardışık altı elemanı örtmektedir. Dolayısıyla her $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı T^5_{m-2}, T^5_{m-1}, T^5_m, T^5_{m+1}, T^5_{m+2} ve T^5_{m+3} olarak altı kuintik trigonometrik B-spline tarafından örtülmektedir. $h = 1$ için $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[0, 1]$ aralığına dönüştürülerek bu aralığa düşen tüm kuintik B-spline ve kuintik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları Şekil 2.39. ve Şekil 2.40.'da verilmiştir.

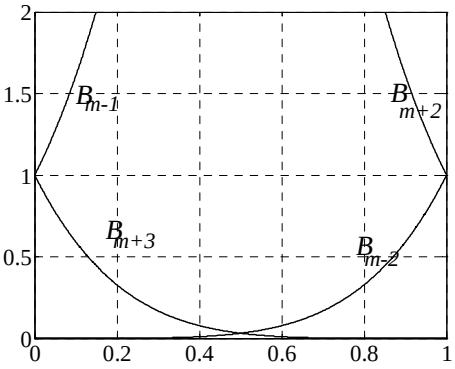


Şekil 2.39. Kuintik B-spline şekil fonksiyonları

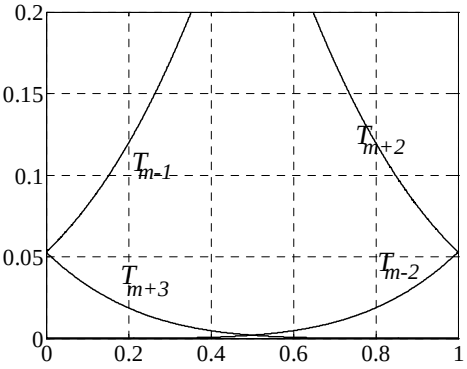


Şekil 2.40. Kuintik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları

Değerleri diğer splinelara göre sıfıra daha yakın olan B_{m-2}, B_{m+3} ve T_{m-2}, T_{m+3} şekil fonksiyonları belirgin olmadığından Şekil 2.41. ve Şekil 2.42.'de tekrar çizilmiştir.



Şekil 2.41. Kuintik B-spline şekil fonksiyonları



Şekil 2.42. Kuintik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları

Çizilen tüm şekillerden de görüldüğü gibi $T_m^5(x)$ kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonlar $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığının dışında sıfırdır ve $T_m^5(x)$ trigonometrik B-spline fonksiyonları $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığında ardışık altı elemanı örtmektedir. Dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı T_{m-2}^5, T_{m-1}^5, T_m^5, T_{m+1}^5, T_{m+2}^5 ve T_{m+3}^5, olarak altı kuintik trigonometrik B-spline

tarafından örtülmektedir. Bu durumda (2.78) yaklaşımı

$$\begin{aligned} u(x,t) &\approx U_N(x,t) = \sum_{i=m-2}^{m+3} T_i^5(x)\delta_i \qquad (2.79)\\ u(x,t) &\approx T_{m-2}^5(x)\delta_{m-2} + T_{m-1}^5(x)\delta_{m-1} + T_m^5(x)\delta_m + \\ &\quad T_{m+1}^5(x)\delta_{m+1} + T_{m+2}^5(x)\delta_{m+2} + T_{m+3}^5(x)\delta_{m+3} \end{aligned}$$

olacaktır. Elde edilen bu yaklaşım için (2.77) kuintik trigonometrik B-spline eşitliklerinin kullanılmasıyla x_m noktasındaki $u(x_m,t)$ ve birinci-ikinci-üçüncü ve dördüncü türevi için yaklaşımlar,

$$\begin{aligned} U_N(x_m,t) &= U_m = \sum_{i=m-2}^{m+3} T_i^5(x_m)\delta_i \\ \frac{dU_N(x_m,t)}{dx} &= U'_m = \sum_{i=m-2}^{m+3} \frac{dT_i^5(x_m)}{dx}\delta_i \\ \frac{d^2U_N(x_m,t)}{dx^2} &= U''_m = \sum_{i=m-2}^{m+3} \frac{d^2T_i^5(x_m)}{dx^2}\delta_i \\ \frac{d^3U_N(x_m,t)}{dx^3} &= U'''_m = \sum_{i=m-2}^{m+3} \frac{d^3T_i^5(x_m)}{dx^3}\delta_i \\ \frac{d^4U_N(x_m,t)}{dx^4} &= U''''_m = \sum_{i=m-2}^{m+3} \frac{d^4T_i^5(x_m)}{dx^4}\delta_i \end{aligned}$$

olarak yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılarak düzenlenirse bölünme noktalarındaki yaklaşımlar,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\sin^5\left(\frac{h}{2}\right)}{\theta}, \\ a_2 &= \frac{2\sin^5\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{h}{2}\right)\left(16\cos^2\left(\frac{h}{2}\right)-3\right),}{\theta} \\ a_3 &= \frac{2\left(1+48\cos^4\left(\frac{h}{2}\right)-16\cos^2\left(\frac{h}{2}\right)\right)\sin^5\left(\frac{h}{2}\right)}{\theta}, \\ b_1 &= -\frac{5\sin^4\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{h}{2}\right)}{2\theta}, \\ b_2 &= -\frac{5\sin^4\left(\frac{h}{2}\right)\cos^2\left(\frac{h}{2}\right)\left(8\cos^2\left(\frac{h}{2}\right)-3\right)}{\theta}, \end{aligned}$$

$$c_1 = \frac{5\sin^3\left(\frac{h}{2}\right)\left(5\cos^2\left(\frac{h}{2}\right)-1\right)}{4\theta},$$

$$c_2 = \frac{5\sin^3\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{h}{2}\right)\left(-15\cos^2\left(\frac{h}{2}\right)+3+16\cos^4\left(\frac{h}{2}\right)\right)}{2\theta},$$

$$c_3 = -\frac{5\sin^3\left(\frac{h}{2}\right)\left(16\cos^6\left(\frac{h}{2}\right)-5\cos^2\left(\frac{h}{2}\right)+1\right)}{2\theta},$$

$$d_1 = -\frac{5\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{h}{2}\right)\left(25\cos^2\left(\frac{h}{2}\right)-13\right)}{8\theta},$$

$$d_2 = -\frac{5\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)\cos^2\left(\frac{h}{2}\right)\left(8\cos^4\left(\frac{h}{2}\right)-35\cos^2\left(\frac{h}{2}\right)+15\right)}{4\theta},$$

$$e_1 = \frac{5\left(125\cos^4\left(\frac{h}{2}\right)-114\cos^2\left(\frac{h}{2}\right)+13\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{16\theta},$$

$$e_2 = -\frac{5\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{h}{2}\right)\left(176\cos^6\left(\frac{h}{2}\right)-137\cos^4\left(\frac{h}{2}\right)-6\cos^2\left(\frac{h}{2}\right)+15\right)}{8\theta},$$

$$e_3 = \frac{5\left(92\cos^6\left(\frac{h}{2}\right)-117\cos^4\left(\frac{h}{2}\right)+62\cos^2\left(\frac{h}{2}\right)-13\right)\left(-1+4\cos^2\left(\frac{h}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{8\theta}$$

olmak üzere

$$U_m = a_1\delta_{m-2} + a_2\delta_{m-1} + a_3\delta_m + a_2\delta_{m+1} + a_1\delta_{m+2} \tag{2.80}$$

$$U'_m = b_1\delta_{m-2} + b_2\delta_{m-1} - b_2\delta_{m+1} - b_1\delta_{m+2} \tag{2.81}$$

$$U''_m = c_1\delta_{m-2} + c_2\delta_{m-1} + c_3\delta_m + c_2\delta_{m+1} + c_1\delta_{m+2} \tag{2.82}$$

$$U'''_m = d_1\delta_{m-2} + d_2\delta_{m-1} - d_2\delta_{m+1} - d_1\delta_{m+2} \tag{2.83}$$

$$U^{(4)}_m = e_1\delta_{m-2} + e_2\delta_{m-1} + e_3\delta_m + e_2\delta_{m+1} + e_1\delta_{m+2} \tag{2.84}$$

eşitlikleri ile bulunur.

$[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı

$$\xi = x - x_m$$

dönüşümü ile $[0, h]$ aralığına dönüştürülebilir. Bu durumda kuintik trigonometrik

B-spline fonksiyonları

$$T^5_{m-2}(\xi) = \frac{1}{\theta}\sin^5\left(\frac{h-\xi}{2}\right) \tag{2.85}$$

$$\begin{aligned} T^5_{m-1}(\xi) = \frac{1}{\theta}\Bigg[&\sin\left(\frac{\xi+4h}{2}\right)\sin^4\left(\frac{\xi-h}{2}\right) \\ &+\sin\left(\frac{\xi-2h}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi+3h}{2}\right)\sin^3\left(\frac{\xi-h}{2}\right) \\ &+\sin^2\left(\frac{\xi-2h}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi+2h}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\xi-h}{2}\right) \\ &+\sin^3\left(\frac{\xi-2h}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi+h}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi-h}{2}\right) \\ &+\sin^4\left(\frac{\xi-2h}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{2.86}$$

$$\begin{aligned} T^5_{m}(\xi) = \frac{1}{\theta}\Bigg[&\sin^2\left(\frac{\xi+3h}{2}\right)\sin^3\left(\frac{h-\xi}{2}\right) \\ &+\sin\left(\frac{\xi+3h}{2}\right)\sin\left(\frac{2h-\xi}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi+2h}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\xi-h}{2}\right) \\ &+\sin\left(\frac{\xi+3h}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\xi-2h}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi+h}{2}\right)\sin\left(\frac{h-\xi}{2}\right) \\ &+\sin\left(\frac{\xi+3h}{2}\right)\sin^3\left(\frac{2h-\xi}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ &+\sin\left(\frac{3h-\xi}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\xi+2h}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\xi-h}{2}\right) \\ &+\sin\left(\frac{3h-\xi}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi+2h}{2}\right)\sin\left(\frac{2h-\xi}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi+h}{2}\right)\sin\left(\frac{h-\xi}{2}\right) \\ &+\sin\left(\frac{3h-\xi}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi+2h}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\xi-2h}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ &+\sin^2\left(\frac{\xi-3h}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\xi+h}{2}\right)\sin\left(\frac{h-\xi}{2}\right) \\ &+\sin^2\left(\frac{\xi-3h}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi+h}{2}\right)\sin\left(\frac{2h-\xi}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ &+\sin^3\left(\frac{3h-\xi}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{2.87}$$

$$
\begin{aligned}
T^5_{m+1}(\xi) &= \frac{1}{\theta}\left[\sin^3\left(\frac{\xi+2h}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\xi-h}{2}\right)\right.\\
&+\sin^2\left(\frac{\xi+2h}{2}\right)\sin\left(\frac{2h-\xi}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi+h}{2}\right)\sin\left(\frac{h-\xi}{2}\right)\\
&+\sin^2\left(\frac{\xi+2h}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\xi-2h}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)\\
&+\sin\left(\frac{\xi+2h}{2}\right)\sin\left(\frac{3h-\xi}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\xi+h}{2}\right)\sin\left(\frac{h-\xi}{2}\right)\\
&+\sin\left(\frac{\xi+2h}{2}\right)\sin\left(\frac{3h-\xi}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi+h}{2}\right)\sin\left(\frac{2h-\xi}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)\\
&+\sin\left(\frac{\xi+2h}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\xi-3h}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)\\
&+\sin\left(\frac{4h-\xi}{2}\right)\sin^3\left(\frac{\xi+h}{2}\right)\sin\left(\frac{h-\xi}{2}\right)\\
&+\sin\left(\frac{4h-\xi}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\xi+h}{2}\right)\sin\left(\frac{2h-\xi}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)\\
&+\sin\left(\frac{4h-\xi}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi+h}{2}\right)\sin\left(\frac{3h-\xi}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)\\
&\left.+\sin^2\left(\frac{\xi-4h}{2}\right)\sin^3\left(\frac{\xi}{2}\right)\right] \qquad (2.88)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T^5_{m+2}(\xi) &= \frac{1}{\theta}\left[\sin^4\left(\frac{\xi+h}{2}\right)\sin\left(\frac{h-\xi}{2}\right)\right.\\
&+\sin^3\left(\frac{\xi+h}{2}\right)\sin\left(\frac{2h-\xi}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)\\
&+\sin^2\left(\frac{\xi+h}{2}\right)\sin\left(\frac{3h-\xi}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)\\
&+\sin\left(\frac{\xi+h}{2}\right)\sin\left(\frac{4h-\xi}{2}\right)\sin^3\left(\frac{\xi}{2}\right)\\
&\left.+\sin\left(\frac{5h-\xi}{2}\right)\sin^4\left(\frac{\xi}{2}\right)\right] \qquad (2.89)\\
T^5_{m+3}(\xi) &= \frac{1}{\theta}\sin^5\left(\frac{\xi}{2}\right) \qquad (2.90)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

$[0,h]$ aralığındaki kuintik B-spline fonksiyonları ise

$$B^5_{m-2}(\xi) = 1 - 5\frac{\xi}{h} + 10\frac{\xi^2}{h^2} - 10\frac{\xi^3}{h^3} + 5\frac{\xi^4}{h^4} - \frac{\xi^5}{h^5}, \quad (2.91)$$

$$B^5_{m-1}(\xi) = 26 - 50\frac{\xi}{h} + 20\frac{\xi^2}{h^2} + 20\frac{\xi^3}{h^3} - 20\frac{\xi^4}{h^4} + 5\frac{\xi^5}{h^5}, \quad (2.92)$$

$$B^5_{m}(\xi) = 66 - 60\frac{\xi^2}{h^2} + 30\frac{\xi^4}{h^4} - 10\frac{\xi^5}{h^5}, \quad (2.93)$$

$$B^5_{m+1}(\xi) = 26 + 50\frac{\xi}{h} + 20\frac{\xi^2}{h^2} - 20\frac{\xi^3}{h^3} - 20\frac{\xi^4}{h^4} + 10\frac{\xi^5}{h^5}, \quad (2.94)$$

$$B^5_{m+2}(\xi) = 1 + 5\frac{\xi}{h} + 10\frac{\xi^2}{h^2} + 10\frac{\xi^3}{h^3} + 5\frac{\xi^4}{h^4} - 5\frac{\xi^5}{h^5}, \quad (2.95)$$

$$B^5_{m+3}(\xi) = \frac{\xi^5}{h^5} \quad (2.96)$$

olarak bulunabilir.

2.4. Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sonlu elemanlar yöntemi, mühendislik ve özellikle de havacılık mühendisliği alanlarındaki problemlerin çözümündeki ihtiyaçtan doğmuştur. Sonlu elemanlar yöntemi, karmaşık fiziksel özellikler içeren problemleri basite indirgeyerek çözüm bulan bir sayısal yöntemdir. Bu yöntemde, problemin çözüm bölgesi her birine bir eleman adı verilen birçok alt aralığa bölünür. Elemanlar düğüm adı verilen noktalarda tekrar birleştirilerek denklem takımları oluşturulur. Elemanlar ve düğüm noktaları numaralandırılır. Denklem takımları elde edilirken elemanlar problemin yapısına uygun şekilde yerleştirilmelidir. Çözümün ani değişim gösterdiği yerlerde elemanlar daha küçük seçilerek daha hassas bir yaklaşım yapılabilir. Sonlu elemanlara ayırma işleminden sonra interpolasyon fonksiyonu belirlenir. Sonlu farklar yönteminde, diferensiyel denklemdeki türev değerleri için bir yaklaşım yapılırken, sonlu elemanlar yönteminde diferensiyel denklemin çözümüne yaklaşım yapılmaktadır. Ayrıca sonlu elemanlar metodunda aranan çözüm fonksiyonu, her bir sonlu eleman üzerinde kendisi ve belirli bir mertebeye kadar türevleri sürekli olan interpolasyon polinomları ve bilinmeyenlerin kombinasyonundan oluşur.

Sonlu elemanlar yöntemi, düzensiz şekilli yapıları kolay bir şekilde modelleyebilmesi, sınır şartlarının değişmesi durumunda sonlu eleman modelinin değişmemesi, gerekirse elemanların farklı büyüklüklerde seçilebilmesi ve bilgisayar

programlama mantığına uygun olması açısından diğer yöntemlere göre avantajlar sağlamaktadır (Karakoç, 2011).

Sonlu elemanlar yönteminin integral formları varyasyonel ve ağırlıklı rezidü yöntemleri olmak üzere iki farklı yoldan elde edilir. Bir diferensiyel denklemin tam çözümü ile yaklaşık çözümü arasındaki farkın sıfırdan farklı bir ağırlık fonksiyonu ile çarpılıp toplamlarının minimum yapılması işlemine ağırlıklı rezidü yaklaşımı ve bu yaklaşıma dayanan yöntemlere ise ağırlıklı rezidüler yöntemi denir. Yöntemi ifade etmek için Ω tanım bölgesinde

$$Lu(x) = f(x) \tag{2.97}$$

şeklinde ifade edilen diferensiyel denklemde, L bir diferensiyel operatör, $f(x)$ bilinen bir fonksiyon ve $u(x)$ aranan çözüm olsun. (2.97) diferensiyel denkleminin sayısal çözümü için ağırlıklı rezidü yöntemi kullanıldığında aranan çözüm fonksiyonu $u(x)$ yerine

$$u(x) \approx U(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j \phi_j(x) \tag{2.98}$$

formundaki bir $U(x)$ yaklaşım serisi kullanılır. Burada $\phi_j(x)$, $j = 1, \ldots, N$ fonksiyonları diferensiyel denklemin Ω tanım bölgesinde tanımlı ve a_j, $j = 1, \ldots, N$ olmak üzere bilinmeyen katsayılardır. Sonlu elemanlar yönteminde, $\phi_j(x)$ fonksiyonları problemin tüm sınır şartlarını sağlayacak şekilde seçilirler fakat genelde diferensiyel denklemi sağlamazlar. (2.98) yaklaşımı (2.97) diferensiyel denkleminde kullanılıp düzenlenirse,

$$LU(x) - f(x) = R(x) \tag{2.99}$$

olarak tanımlanan $R(x)$ ile gösterilen rezidü fonksiyonu elde edilir. Bu yöntem ile, W_i ağırlık fonksiyonu ve $R(x)$ rezidü ifadesinin çarpımlarının, Ω tanım bölgesi üzerinde integralinin sıfır olması istenir. Dolayısıyla

$$\int_{\Omega} W_i(x) R(x) dx = 0, \ i = 1, \ldots, N \tag{2.100}$$

şeklinde N bilinmeyen N denklemden oluşan bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözülerek a_j bilinmeyenleri bulunarak, (2.98) yaklaşım serisinde yerine yazılırsa $U(x)$ yaklaşık çözümüne ulaşılmış olur. Ağırlıklı rezidüler yönteminde,

ağırlık fonksiyonunun seçimine göre yöntem farklı isimler alır. Bunlardan bazıları Galerkin, Petrov-Galerkin, Kolokasyon, En Küçük Kareler yöntemleridir. Bu çalışmada bu yöntemlerden Galerkin yöntemi kullanılacaktır.

2.4.1. Galerkin yöntemi

Galerkin yöntemi diferensiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde kullanılan varyasyonel bir yöntemdir. Maliyeti yüksek bir yöntem olmasına rağmen, diferensiyel denklemlerin çözümlerinde birçok yönteme göre daha iyi sonuçlar vermektedir. Galerkin yönteminde (2.100) eşitliğindeki W_i ağırlık fonksiyonu, ϕ_i taban fonsiyonları olarak seçilir. Bu çalışmada, taban fonksiyonları olarak farklı derecelerden trigonometrik B-spline fonksiyonları kullanılmıştır.

$[a,b]$ konum aralığı olmak üzere, (2.98) çözümü (2.97) denkleminde yerine yazılarak denklemin her iki tarafı $\phi_i(x)$ ile çarpılarak integrali alınırsa,

$$\int_a^b \phi_i \left(L \sum_{j=1}^{N} a_j \phi_j(x) - f(x) \right) dx = 0, \quad i = 1, \ldots, N \tag{2.101}$$

elde edilir.

$$R_j = L\left(a_j \phi_j(x)\right) - f(x) \tag{2.102}$$

olmak üzere (2.101) eşitliği

$$\begin{aligned}
a_1 \int_a^b \phi_1 R_1 dx + a_2 \int_a^b \phi_1 R_2 dx + \ldots + a_N \int_a^b \phi_1 R_N dx &= 0, \\
a_1 \int_a^b \phi_2 R_1 dx + a_2 \int_a^b \phi_2 R_2 dx + \ldots + a_N \int_a^b \phi_2 R_N dx &= 0, \\
&\vdots \\
a_1 \int_a^b \phi_N R_1 dx + a_2 \int_a^b \phi_N R_2 dx + \ldots + a_N \int_a^b \phi_N R_N dx &= 0
\end{aligned} \tag{2.103}$$

formunda yazılabilir. Elde edilen sistem N tane denklem ve N tane $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bilinmeyenlerinden oluşan bir sistemdir. Bu sistem çözülerek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bilinmeyen katsayıları bulunabilir. Böylece yaklaşık çözüm,

$$u(x) \approx U(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j \phi_j(x)$$

eşitliği kullanılarak bulunabilir.

2.5. RLW (Regularized Long Wave) Denklemi

RLW denklemi, ε ve μ reel sabitler, x ve t alt indisleri konum ve zamana göre türevler ve u dalganın genliği olmak üzere,

$$u_t + u_x + \varepsilon u u_x - \mu u_{xxt} = 0 \tag{2.104}$$

olarak verilen 3. mertebeden lineer olmayan bir kısmi türevli diferensiyel denklemdir.

RLW denklemi ilk kez Peregrine tarafından ardışık dalgaların gelişimini modellemek için önerilmiştir (Peregrine, 1966). RLW denklemi için solitary dalgasının hareketi ve iki solitary dalgasının çarpışması test problemlerinde sınır şartları $x \to \pm\infty$ iken $u,\ u_x,\ u_{xx} \to 0$ şeklindedir. Önerilen sayısal yöntemlerin uygulanabilmesi için konum aralığı sonlu bir $[a,b]$ bölgesine sınırlandırılacaktır. Böylece başlangıç ve sınır şartları

$$\begin{aligned} u(a,t) &= u(b,t) = 0, \\ u_x(a,t) &= u_x(b,t) = 0,\ t \in (0,T], \\ u_{xx}(a,t) &= u_{xx}(b,t) = 0, \\ u(x,0) &= f(x),\ x \in [a,b]. \end{aligned} \tag{2.105}$$

olarak alınacaktır.

RLW denklemi için korunum sabitleri sırasıyla kütle, momentum ve enerjiye karşılık gelen

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} u dx, \\ C_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + \mu (u_x)^2) dx, \\ C_3 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (u^3 + 3u^2) dx \end{aligned} \tag{2.106}$$

eşitlikleri ile tanımlanmıştır (Olver, 1979). Korunum sabitlerinin tam değerleri ise

paket programları yardımıyla

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{6c}{k}, \\ C_2 &= \frac{12c^2}{k} + \frac{48kc^2\mu}{5}, \\ C_3 &= \frac{36c^2}{5k}\,(4c+5) \end{aligned} \tag{2.107}$$

olarak bulunabilir.

RLW denkleminin sayısal çözümü için önerilen metotların doğruluğu, solitary dalgasının hareketi ve iki solitary dalgasının çarpışması test problemleri ile incelenecektir.

2.5.1. Solitary dalgasının hareketi

$[a,b]$ aralığında tanımlı $3c$ genlikli, $v = 1+\varepsilon c$ dalga hızlı RLW denkleminin solitary dalga çözümünü veren analitik çözümü $k = \sqrt{\dfrac{\varepsilon c}{4\mu v}}$ olmak üzere,

$$u(x,t) = 3c\mathrm{sech}^2(k[x - \tilde{x}_0 - vt]) \tag{2.108}$$

formunda yazılabilir (Peregrine, 1966). (2.108) eşitliğinde $t = 0$ alındığında

$$u(x,0) = 3c\mathrm{sech}^2(k[x - \tilde{x}_0]) \tag{2.109}$$

başlangıç şartı elde edilebilir. (2.108) eşitliği ile tepe noktası $\tilde{x}_0$ noktasına karşılık gelecek şekilde yerleştirilmiş bir solitary dalgasının zaman içinde v hızıyla soldan sağa doğru hareketi modellenir. Dalganın genliği olan $3c$ ile hızını veren v aynı parametreyi içerdiğinden, genlik büyüdükçe dalganın hızıda büyümektedir.

RLW denklemi için solitary dalga oluşumu test probleminde sınır şartları $x \to \pm\infty$ iken $u, u_x, u_{xx} \to 0$ şeklinde olduğu belirtilmişti. Sayısal yöntemi uygulayabilmek için sınırlandırılacak olan $[a,b]$ konum aralığı sınır şartlarını sağlayacak şekilde mümkün olduğu kadar geniş seçilecektir.

2.5.2. İki solitary dalgasının çarpışması

$t = 0$ başlangıç anında, tepe noktaları sırasıyla $\tilde{x}_1$ ve $\tilde{x}_2$ noktalarına karşılık gelecek şekilde $[a,b]$ konum aralığında yerleştirilen $3c_1$ ve $3c_2$ genliklerine sahip iki solitary dalgasının hareketi,

$$u(x,0) = 3c_1\mathrm{sech}^2(k_1\,[x - \tilde{x}_1]) + 3c_2\mathrm{sech}^2(k_2\,[x - \tilde{x}_2]) \tag{2.110}$$

formunda modellenebilir. Burada $k_i = \sqrt{\dfrac{\varepsilon c_i}{4\mu(1+\varepsilon c_i)}}$, $i = 1, 2$ dir. (2.110) eşitliğinde $c_1 > c_2$ ve $\tilde{x}_2 > \tilde{x}_1$ seçimleri yapıldığında genlik olarak daha büyük olan dalga solda kalacaktır. Genlik olarak büyük dalga daha hızlı olduğundan bir müddet sonra öndeki genliği ve hızı düşük olan dalgaya yetişecek ve bir çarpışma gerçekleşecektir. Burada korunum sabitlerinin tam değerleri ise paket programı yardımıyla

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{6c_1}{k_1} + \frac{6c_2}{k_2}, \\ C_2 &= \frac{12c_1^2}{k_1} + \frac{48k_1c_1^2\mu}{5} + \frac{12c_2^2}{k_2} + \frac{48k_2c_2^2\mu}{5}, \\ C_3 &= \frac{36c_1^2}{k_1}\left(1 + \frac{4c_1}{5}\right) + \frac{36c_2^2}{k_2}\left(1 + \frac{4c_2}{5}\right) \end{aligned} \tag{2.111}$$

olarak bulunabilir.

3. RLW DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ İÇİN TRİGONOMETRİK KUADRATİK B-SPLİNE GALERKİN YÖNTEMİ

Bu bölümde kuadratik trigonometrik B-spline Galerkin yöntemi ile RLW denkleminin sayısal çözümlerinin bulunması amaçlanmıştır. Sayısal çözüm araştırılırken zaman parçalanması için önerilecek olan yöntemlerden ilki bu zamana kadar da sıkça çalışılmış olan Crank Nicolson yöntemi, diğeri ise Crank Nicolson yöntemine göre doğruluğu daha yüksek olan Adams Moulton yöntemidir. Konum ayrıştırılması için ise kuadratik trigonometrik B-spline Galerkin yöntemi önerilmiştir. Yöntemlerin uygulanması sonucunda 3 farklı lineerleştirme kullanılmış, dolayısıyla 6 farklı yöntem ile sayısal çözüm araştırılmıştır. Yöntemlerin uygulanması sonucunda, konum ve zamana göre parçalanmış RLW denklemi cebirsel bir denklem sistemine dönüştürülmüştür. Bu sistem Thomas algoritması yardımı ile çözülerek denklem sisteminin bilinmeyenleri elde edilmiş ve yaklaşık çözümde yerine yazılıp yaklaşık çözüm belirlenmiştir. Sayısal çözümün doğruluğu ise iki test problemi için incelenmiştir.

3.1. İç İterasyonlu Lineerleştirme

Bu bölümde lineerleştirme işlemi için iç iterasyon yapılacaktır.

3.1.1. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson yöntemi (KDCN1)

2. bölümde tanıtılan

$$u_t + u_x + \varepsilon u u_x - \mu u_{xxt} = 0 \tag{3.1}$$

formundaki RLW denkleminin sayısal çözümü için

$$u(a,t) = u(b,t) = 0,\ t \geq 0 \tag{3.2}$$

$$u_x(a,t) = u_x(b,t) = 0,\ t \geq 0 \tag{3.3}$$

sınır şartları ve $f(x)$ sonradan belirlenmek üzere

$$u(x,0) = f(x) \tag{3.4}$$

başlangıç şartı kullanılacaktır. (3.1) denklemi

$$v_t = (u - \mu u_{xx})_t = -(u_x + \varepsilon u u_x) \tag{3.5}$$

formunda yazılabilir. (3.5) denkleminin zaman parçalanması için 2. bölümünde verilen

$$v^{n+1} \simeq v^n + \Delta t \left(\theta_1 (v_t)^{n+1} + \theta_2 (v_t)^n + \theta_3 (v_t)^{n-1}\right) \tag{3.6}$$

Adams Moulton yönteminde $\theta_1 = \theta_2 = 1/2$, $\theta_3 = 0$ seçimleri yapılırsa Crank-Nicolson yöntemi elde edilir. Böylece (3.5) eşitliğine Crank-Nicolson yöntemi uygulandığında,

$$\begin{aligned} (u - \mu u_{xx})^{n+1} &= (u - \mu u_{xx})^n - \Delta t \left(\frac{1}{2}(u_x + \varepsilon u u_x)^{n+1}\right) \\ &\quad -\Delta t \left(\frac{1}{2}(u_x + \varepsilon u u_x)^n\right) \end{aligned} \tag{3.7}$$

sonucuna ulaşılır. (3.7) eşitliği düzenlenirse,

$$\begin{aligned} &u^{n+1} + \frac{\Delta t}{2}(u_x)^{n+1} + \frac{\Delta t \varepsilon}{2} u^{n+1} (u_x)^{n+1} - \mu (u_{xx})^{n+1} = u^n - \mu (u_{xx})^n \\ &-\frac{\Delta t}{2}(u_x)^n - \frac{\Delta t \varepsilon}{2} u^n (u_x)^n \end{aligned} \tag{3.8}$$

olarak RLW denkleminin Crank-Nicolson yöntemi kullanılarak zaman parçalanması yapılmış eşitliği elde edilir. $W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere (3.8) eşitliğine Galerkin metodu uygulanırsa,

$$\begin{aligned} &\int_a^b W(x) \left(u^{n+1} + \frac{\Delta t}{2}(u_x)^{n+1} + \frac{\Delta t \varepsilon}{2} u^{n+1} (u_x)^{n+1} - \mu (u_{xx})^{n+1}\right) dx = \\ &\int_a^b W(x) \left(u^n - \mu (u_{xx})^n - \frac{\Delta t}{2}(u_x)^n - \frac{\Delta t \varepsilon}{2} u^n (u_x)^n\right) dx \end{aligned} \tag{3.9}$$

eşitliğine ulaşılır. Galerkin yönteminde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x yerine T_m trigonometrik B-spline fonksiyonları kullanılacaktır. Bu bölümde kullanılacak olan kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonları 2. mertebeye kadar sürekli olduklarından (3.9) eşitliğindeki ikinci türev içeren integral alma işlemine kısmi integrasyon uygulanacaktır. Kısmi integrasyon işlemi sonucunda elde edilen

$$\int_a^b W(x) u_{xx} dx = W(x) u_x \Big|_a^b - \int_a^b u_x W_x(x) dx$$

ifadesinde

$$u_x(a,t) = u_x(b,t) = 0$$

sınır şartları kullanılırsa

$$\int_a^b W(x) u_{xx} dx = -\int_a^b u_x W_x(x) dx$$

elde edilir.

$[a,b]$ konum aralığı N eşit uzunluklu alt aralığa parçalanırsa $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x yerine T_m trigonometrik kuadratik B-spline fonksiyonları kullanıldığında kısmi integrasyon işlemi sonucunda (3.9) eşitliğinin düzenlenmiş formu olan,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=m-1}^{m+1}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)\delta_j^{n+1}+\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i'T_j' dx\right)\delta_j^{n+1}\right.\\
&\left.+\frac{\Delta t}{2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\delta_j^{n+1}+\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\sum_{k=m-1}^{m+1}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n+1}\right)T_j' dx\right)\delta_j^{n+1}\right\}\\
&-\sum_{j=m-1}^{m+1}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)\delta_j^{n}+\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i'T_j' dx\right)\delta_j^{n}\right.\\
&\left.-\frac{\Delta t}{2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\delta_j^{n}-\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\sum_{k=m-1}^{m+1}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n}\right)T_j' dx\right)\delta_j^{n}\right\}
\end{aligned}\tag{3.10}$$

yaklaşımı elde edilir. Bu yaklaşım $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde olup $m = 0, 1, \ldots, N-1$ değerleri için her bir aralıktaki yaklaşımlar birleştirildiğinde (3.9) eşitliğine dönecektir.

(3.10) ifadesinde $\xi = x - x_m$ dönüşümü yapılır ise,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=m-1}^{m+1}\left\{\left(\int_{0}^{h} T_iT_j d\xi\right)\delta_j^{n+1}+\mu\left(\int_{0}^{h} T_i'T_j' d\xi\right)\delta_j^{n+1}\right.\\
&\left.+\frac{\Delta t}{2}\left(\int_{0}^{h} T_iT_j' d\xi\right)\delta_j^{n+1}+\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\sum_{k=m-1}^{m+1}\left(\int_{0}^{h} T_iT_k\left(\delta_k^{n+1}\right)T_j' d\xi\right)\delta_j^{n+1}\right\}\\
&-\sum_{j=m-1}^{m+1}\left\{\left(\int_{0}^{h} T_iT_j d\xi\right)\delta_j^{n}+\mu\left(\int_{0}^{h} T_i'T_j' d\xi\right)\delta_j^{n}\right.\\
&\left.-\frac{\Delta t}{2}\left(\int_{0}^{h} T_iT_j' d\xi\right)\delta_j^{n}-\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\sum_{k=m-1}^{m+1}\left(\int_{0}^{h} T_iT_k\left(\delta_k^{n}\right)T_j' d\xi\right)\delta_j^{n}\right\}
\end{aligned}\tag{3.11}$$

elde edilir. (3.11) ifadesindeki integralleri hesaplamak için 2. bölümde elde edilen T_{m-1}, T_m, T_{m+1} trigonometrik kuadratik B-spline eşitlikleri kullanılacaktır. Bu durumda her bir alt aralıktaki eleman matrislerinin her bir elemanı i, j, $k : m-1$, m, $m+1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
A_{ij}^e &= \int_0^h T_iT_j d\xi, \quad B_{ij}^e = \int_0^h T_iT_j' d\xi, \\
C_{ij}^e(\boldsymbol{\delta}^n) &= \int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' d\xi, \quad D_{ij}^e = \int_0^h T_i'T_j' d\xi
\end{aligned}\tag{3.12}$$

olarak alınabilir. (3.12) eşitliklerinde verilen $\mathbf{A}^e$ eleman matrisi

$$\mathbf{A}^e = \begin{bmatrix} A_{m-1,m-1} & A_{m-1,m} & A_{m-1,m+1} \\ A_{m,m-1} & A_{m,m} & A_{m,m+1} \\ A_{m+1,m-1} & A_{m+1,m} & A_{m+1,m+1} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Matrisin her bir elemanı için gerekli olan integrallerin hesaplanmasında trigonometrik kuadratik B-spline eşitlikleri kullanılır. $\mathbf{B}^e$ ve $\mathbf{D}^e$ matrislerinin hesaplanması da benzer şekilde yapılır. $\mathbf{C}^e$ matrisi ise integraldeki T_k nedeniyle diğer matrislerden farklı şekilde bulunur. Bu matrisin her bir elemanında k indisinin $m-1, m, m+1$ adımlarından kaynaklanan üçer elemanı daha olacaktır. $\mathbf{C}^e$ eleman matrisinin ilk elemanının bulunuşunu örnek olarak gösterecek olursak $i = j = m-1$ alındığında

$$\begin{aligned} C^e_{m-1m-1}(\boldsymbol{\delta}^n) &= \int_0^h T_{m-1}T_{m-1}\left(\delta^n_{m-1}\right)T'_{m-1}d\xi + \int_0^h T_{m-1}T_m\left(\delta^n_m\right)T'_{m-1}d\xi \\ &\quad + \int_0^h T_{m-1}T_{m+1}\left(\delta^n_{m+1}\right)T'_{m-1}d\xi \end{aligned}$$

bulunur. Bu bulduğumuz eşitlik, k indisinin değerleri için $\mathbf{C}^e$ eleman matrisinin sadece ilk elemanıdır. Bulunan eleman matrislerinin $m = 0, 1, \ldots, N-1$ için uygun şekilde birbirlerine eklenmesi sonucunda,

$$\boldsymbol{\delta} = (\delta_{-1}, \delta_0, \ldots, \delta_{N-1}, \delta_N)^T$$

olmak üzere (3.11) ifadesinden,

$$\left[\mathbf{A}+\mu\mathbf{D}+\frac{\Delta t}{2}\mathbf{B}+\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n+1}\right)\right]\boldsymbol{\delta}^{n+1} = \left[\mathbf{A}+\mu\mathbf{D}-\frac{\Delta t}{2}\mathbf{B}-\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n}\right)\right]\boldsymbol{\delta}^{n} \qquad (3.13)$$

elde edilir.

(3.13) denklem sistemi $N+2$ denklem ve $N+2$ bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. Sınır şartlarını sisteme adapte edebilmek için denklem sistemindeki ilk ve son denklemler silinerek bölgenin uç noktalarındaki

$$u(a,t) = u(b,t) = 0$$

sınır şartları kullanılarak δ^{n+1}_{-1} ve δ^{n+1}_N yok edilirse (3.13) denklem sistemi $N \times N$ matris sistemine indirgenmiş olur. Ulaşılan denklem sistemi 5'li Thomas algoritması yardımıyla çözülebilir.

RLW denkleminin trigonometrik kuadratik B-spline Galerkin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken elde edilen denklem sisteminin çözülebilmesi için

$$\left(\delta_{-1}^{0}, \delta_{0}^{0}, \ldots, \delta_{N}^{0}\right)$$

başlangıç vektörünün bulunması gerekir. Bunun için RLW denkleminin başlangıç şartı olan

$$u\left(x,0\right) = f\left(x\right)$$

ve kuadratik trigonometrik B-spline eşitlikleri kullanılabilir.

3.1.2. Zaman parçalanması için Adams Moulton yöntemi (KDAM1)

Bir önceki alt bölümde

$$v_t = \left(u - \mu u_{xx}\right)_t = -\left(u_x + \varepsilon u u_x\right)$$

formunda yazılan RLW denklemine, $\theta_1 = 5/12$, $\theta_2 = 2/3$, $\theta_3 = -1/12$ seçimleri için zaman parçalanması olarak 2. bölümde verilen

$$v^{n+1} \simeq v^n + \Delta t\left(\theta_1 (v_t)^{n+1} + \theta_2 (v_t)^n + \theta_3 (v_t)^{n-1}\right)$$

Adams Moulton yöntemi uygulandığında,

$$\begin{aligned}&(u - \mu u_{xx})^{n+1} = (u - \mu u_{xx})^n - \Delta t(\theta_1 (u_x + \varepsilon u u_x)^{n+1}) - \Delta t(\theta_2 (u_x + \varepsilon u u_x)^n) \\ &-\Delta t(\theta_3 (u_x + \varepsilon u u_x)^{n-1})\end{aligned} \tag{3.14}$$

sonucuna ulaşılır. (3.14) eşitliği düzenlenirse,

$$\begin{aligned}&u^{n+1} + \theta_1 \Delta t \left(u_x\right)^{n+1} + \theta_1 \Delta t \varepsilon u^{n+1} \left(u_x\right)^{n+1} - \mu \left(u_{xx}\right)^{n+1} = u^n - \mu \left(u_{xx}\right)^n \\ &-\theta_2 \Delta t \left(u_x\right)^n - \theta_2 \Delta t \varepsilon u^n \left(u_x\right)^n - \theta_3 \Delta t \left(u_x\right)^{n-1} - \theta_3 \Delta t \varepsilon u^{n-1} \left(u_x\right)^{n-1}\end{aligned} \tag{3.15}$$

olarak RLW denkleminin Adams Moulton yöntemi kullanılarak zaman parçalanması yapılmış eşitliği elde edilir. $W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere (3.15) eşitliğine Galerkin metodu uygulanırsa,

$$\begin{aligned}&\int_a^b W(x)\left(u^{n+1} + \theta_1 \Delta t \left(u_x\right)^{n+1} + \theta_1 \Delta t \varepsilon u^{n+1} \left(u_x\right)^{n+1} - \mu \left(u_{xx}\right)^{n+1}\right) dx = \\ &\int_a^b W(x)\left(u^n - \mu \left(u_{xx}\right)^n - \theta_2 \Delta t \left(u_x\right)^n - \theta_2 \Delta t \varepsilon u^n \left(u_x\right)^n - \theta_3 \Delta t \left(u_x\right)^{n-1}\right. \\ &\left.-\theta_3 \Delta t \varepsilon u^{n-1} \left(u_x\right)^{n-1}\right) dx\end{aligned} \tag{3.16}$$

eşitliğine ulaşılır. Galerkin yönteminde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x yerine T_m trigonometrik B-spline fonksiyonları kullanılacaktır. Bu bölümde kullanılacak olan kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonları 2. mertebeye kadar sürekli olduklarından (3.16) eşitliğindeki ikinci türev içeren integral alma işlemine kısmi integrasyon uygulanacaktır. Bir önceki alt bölümde gösterdiğimiz şekilde (3.16) eşitliğindeki

$$\int_a^b W(x)u_{xx}dx$$

integraline kısmi integrasyon uygulanmasıyla

$$\int_a^b W(x)u_{xx}dx = -\int_a^b u_x W_x(x)dx$$

elde edilir.

$[a, b]$ konum aralığı N eşit uzunluklu alt aralığa parçalanırsa $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x yerine T_m trigonometrik kuadratik B-spline fonksiyonları kullanıldığında kısmi integrasyon işlemi sonucunda (3.16) eşitliğinin düzenlenmiş formu olan

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=m-1}^{m+1}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_jdx\right)+\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i'T_j'dx\right)\right.\\
&\left.+\theta_1\Delta t\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j'dx\right)+\theta_1\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-1}^{m+1}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n+1}\right)T_j'dx\right)\right\}\delta_j^{n+1}\\
&-\sum_{j=m-1}^{m+1}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_jdx\right)+\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i'T_j'dx\right)-\theta_2\Delta t\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j'dx\right)\right.\\
&\left.-\theta_2\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-1}^{m+1}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n}\right)T_j'dx\right)\right\}\delta_j^{n}+\sum_{j=m-1}^{m+1}\left\{\theta_3\Delta t\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j'dx\right)\right.\\
&\left.+\theta_3\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-1}^{m+1}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j'dx\right)\right\}\delta_j^{n-1}
\end{aligned}\tag{3.17}$$

yaklaşımı elde edilir. Bu yaklaşım $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde olup $m = 0, 1, \ldots, N-1$ değerleri için her bir alt aralıktaki yaklaşımlar birleştirildiğinde (3.16) eşitliğine dönecektir.

(3.17) ifadesinde $\xi = x - x_m$ dönüşümü yapılır ise

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=m-1}^{m+1}\left\{\left(\int_0^h T_iT_jd\xi\right)+\mu\left(\int_0^h T_i'T_j'd\xi\right)\right.\\
&\left.+\theta_1\Delta t\left(\int_0^h T_iT_j'd\xi\right)+\theta_1\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-1}^{m+1}\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^{n+1}\right)T_j'd\xi\right)\right\}\delta_j^{n+1}\\
&-\sum_{j=m-1}^{m+1}\left\{\left(\int_0^h T_iT_jd\xi\right)+\mu\left(\int_0^h T_i'T_j'd\xi\right)\right.\\
&\left.-\theta_2\Delta t\left(\int_0^h T_iT_j'd\xi\right)-\theta_2\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-1}^{m+1}\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^{n}\right)T_j'd\xi\right)\right\}\delta_j^{n}\\
&+\sum_{j=m-1}^{m+1}\theta_3\Delta t\left\{\left(\int_0^h T_iT_j'd\xi\right)+\varepsilon\sum_{k=m-1}^{m+1}\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j'd\xi\right)\right\}\delta_j^{n-1}
\end{aligned}\tag{3.18}$$

elde edilir. (3.18) ifadesindeki integralleri hesaplamak için 2. bölümde elde edilen T_{m-1}, T_m, T_{m+1} trigonometrik kuadratik B-spline eşitlikleri kullanılacaktır. Dolayısıyla her bir alt aralıktaki eleman matrislerinin her bir elemanı $i, j, k = m-1,\ m,\ m+1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
A_{ij}^e &= \int_0^h T_iT_jd\xi, \quad B_{ij}^e = \int_0^h T_iT_j^{'}d\xi,\\
C_{ij}^e(\boldsymbol{\delta}^n) &= \int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j^{'}d\xi, \quad D_{ij}^e = \int_0^h T_i'T_j'd\xi
\end{aligned}\tag{3.19}$$

olarak alınabilir. (3.19) eşitliklerinde gösterilen tüm matrisler bir önceki alt bölüm olan zaman parçalanması için Crank-Nicolson yönteminde anlatıldığı şekilde hesaplanır. Bulunan tüm eleman matrislerinin $m = 0, 1, \ldots, N-1$ için uygun şekilde birbirlerine eklenmesi sonucunda,

$$\boldsymbol{\delta} = \left(\delta_{-1}, \delta_0, \ldots, \delta_{N-1}, \delta_N\right)^T$$

olmak üzere (3.18) ifadesinden

$$\begin{aligned}
&\left[\mathbf{A}+\mu\mathbf{D}+\theta_1\Delta t\mathbf{B}+\theta_1\Delta t\varepsilon\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n+1}\right)\right]\boldsymbol{\delta}^{n+1} =\\
&\left[\mathbf{A}+\mu\mathbf{D}-\theta_2\Delta t\mathbf{B}-\theta_2\Delta t\varepsilon\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n}\right)\right]\boldsymbol{\delta}^{n}\\
&-\left[\theta_3\Delta t\mathbf{B}+\theta_3\Delta t\varepsilon\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)\right]\boldsymbol{\delta}^{n-1}
\end{aligned}\tag{3.20}$$

elde edilir.

(3.20) denklem sistemi $N+2$ denklem ve $N+2$ bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. Sınır şartlarını sisteme adapte edebilmek için denklem sistemindeki ilk ve son denklemler silinerek bölgenin uç noktalarındaki

$$u(a,t) = u(b,t) = 0$$

sınır şartları kullanılarak δ_{-1}^{n+1} ve δ_{N}^{n+1} yok edilirse (3.20) denklem sistemi $N \times N$ matris sistemine indirgenmiş olur. Ulaşılan denklem sistemi 5'li Thomas algoritması yardımıyla çözülebilir.

RLW denkleminin trigonometrik kuadratik B-spline Galerkin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken elde edilen (3.20) denklem sisteminin çözülebilmesi için

$$\left(\delta_{-1}^{0}, \delta_{0}^{0}, \ldots, \delta_{N}^{0}\right)$$

başlangıç vektörü ve

$$\left(\delta_{-1}^{1}, \delta_{0}^{1}, \ldots, \delta_{N}^{1}\right)$$

vektörünün bulunması gerekmektedir. Başlangıç vektörü başlangıç şartından bulunabilirken,

$$\left(\delta_{-1}^{1}, \delta_{0}^{1}, \ldots, \delta_{N}^{1}\right)$$

vektörünün bulunabilmesi için ise Crank-Nicolson programda bir kez çalıştırılmalıdır.

3.2. Lineerleştirme 1

Bu bölümde lineerleştirme işlemi için Rubin Graves tarafından önerilen lineerleştirme kullanılacaktır.

3.2.1. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson yöntemi (KDCN2)

$$v_t = \left(u - \mu u_{xx}\right)_t = -\left(u_x + \varepsilon u u_x\right)$$

formunda yazılan RLW denklemine

$$v^{n+1} \simeq v^n + \Delta t \left(\theta_1 (v_t)^{n+1} + \theta_2 (v_t)^n + \theta_3 (v_t)^{n-1}\right)$$

Adams Moulton yönteminde $\theta_1 = \theta_2 = 1/2$, $\theta_3 = 0$ seçimleri yapılırsa Crank-Nicolson yönteminin elde edileceği belirtilmişti. (3.5) formunda yazılan RLW denklemine Crank-Nicolson yöntemi uygulandığında (3.7),

$$(u - \mu u_{xx})^{n+1} = (u - \mu u_{xx})^n - \Delta t \left(\frac{1}{2}(u_x + \varepsilon u u_x)^{n+1}\right) - \Delta t \left(\frac{1}{2}(u_x + \varepsilon u u_x)^n\right)$$

sonucuna ulaşılmıştı. Elde edilen (3.7) eşitliği $(n+1)$. zamana göre lineer değildir. Bu eşitliği lineerleştirmek için Rubin ve Graves tarafından önerilen

$$(uu_x)^{n+1} = u^n u_x^{n+1} + u_x^n u^{n+1} - u^n u_x^n + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \tag{3.21}$$

eşitliği kullanılarak lineerleştirme yapılırsa,

$$u^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} u_x^{n+1} + \frac{\varepsilon \Delta t}{2}(u^n u_x^{n+1} + u_x^n u^{n+1}) - \mu u_{xx}^{n+1} = u^n - \frac{\Delta t}{2} u_x^n - \mu u_{xx}^n \tag{3.22}$$

olarak RLW denkleminin Crank-Nicolson yöntemi kullanılarak zaman parçalanması yapılmış ve Rubin Graves lineerleştirilmesi ile $(n+1)$. zamana göre lineer hale getirilmiş eşitliği elde edilir. $W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere (3.22) eşitliğine Galerkin metodu uygulanırsa,

$$\begin{aligned} &\int_a^b W(x) \left(u^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} u_x^{n+1} + \frac{\varepsilon \Delta t}{2}(u^n u_x^{n+1} + u_x^n u^{n+1}) - \mu u_{xx}^{n+1}\right) dx = \\ &\int_a^b W(x) \left(u^n - \frac{\Delta t}{2} u_x^n - \mu u_{xx}^n\right) dx \end{aligned} \tag{3.23}$$

eşitliğine ulaşılır. Galerkin yönteminde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x yerine T_m trigonometrik B-spline fonksiyonları kullanılacaktır. Kullanılacak olan kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonları 2. mertebeye kadar sürekli olduklarından (3.23) eşitliğindeki ikinci türev içeren integral alma işlemine önceki bölümlerde gösterdiğimiz şekilde kısmi integrasyon uygulanacaktır. (3.23) eşitliğindeki

$$\int_a^b W(x) u_{xx} dx$$

integraline kısmi integrasyon uygulanmasıyla

$$\int_a^b W(x) u_{xx} dx = -\int_a^b u_x W_x(x) dx$$

elde edilir. $[a, b]$ konum aralığı N eşit uzunluklu alt aralığa parçalanarak, $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x yerine T_m trigonometrik kuadratik B-spline fonksiyonları kullanılarak kısmi integrasyon işlemi sonucunda (3.23) eşitliğinin düzenlenmiş formu olan,

$$\sum_{j=m-1}^{m+1}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)+\frac{\Delta t}{2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)+\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i'T_j' dx\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\varepsilon\Delta t}{2}\sum_{k=m-1}^{m+1}\left[\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' dx\right)+\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k'\left(\delta_k^n\right)T_j dx\right)\right]\right\}\delta_j^{n+1} \qquad (3.24)$$
$$-\sum_{j=m-1}^{m+1}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)-\frac{\Delta t}{2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)+\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i'T_j' dx\right)\right\}\delta_j^{n}$$

yaklaşımı elde edilir. Bu yaklaşım $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde olup $m = 0, 1, \ldots, N-1$ değerleri için her bir aralıktaki yaklaşımlar birleştirildiğinde (3.23) eşitliğine dönecektir.

(3.24) yaklaşımında $\xi = x - x_m$ dönüşümü yapılırsa,

$$\sum_{j=m-1}^{m+1}\left\{\left(\int_0^h T_iT_j d\xi\right)+\frac{\Delta t}{2}\left(\int_0^h T_iT_j' d\xi\right)+\mu\left(\int_0^h T_i'T_j' d\xi\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\varepsilon\Delta t}{2}\sum_{k=m-1}^{m+1}\left[\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' d\xi\right)+\left(\int_0^h T_iT_k'\left(\delta_k^n\right)T_j d\xi\right)\right]\right\}\delta_j^{n+1} \qquad (3.25)$$
$$-\sum_{j=m-1}^{m+1}\left\{\left(\int_0^h T_iT_j d\xi\right)-\frac{\Delta t}{2}\left(\int_0^h T_iT_j' d\xi\right)+\mu\left(\int_0^h T_i'T_j' d\xi\right)\right\}\delta_j^{n}$$

elde edilir. (3.25) ifadesindeki integralleri hesaplamak için 2. bölümde elde edilen T_{m-1}, T_m, T_{m+1} trigonometrik kuadratik B-spline eşitlikleri kullanılacaktır. Bu durumda her bir alt aralıktaki eleman matrislerinin her bir elemanı i, j, k ; $m-1, m, m+1$ olmak üzere

$$A_{ij}^e = \int_0^h T_iT_j d\xi, \quad B_{ij}^e = \int_0^h T_iT_j' d\xi, \quad C_{ij}^e\left(\boldsymbol{\delta}^n\right) = \int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' d\xi,$$
$$D_{ij}^e = \int_0^h T_i'T_j' d\xi, \quad E_{ij}^e\left(\boldsymbol{\delta}^n\right) = \int_0^h T_iT_k'\left(\delta_k^n\right)T_j d\xi \qquad (3.26)$$

olarak alınabilir. (3.26) ifadesinde verilen tüm eleman matrislerin hesaplanması daha önce gösterildiği şekilde yapılır. Elde edilen tüm eleman matrislerinin $m = 0, 1, \ldots, N-1$ için uygun şekilde birbirlerine eklenmesi sonucunda ise

$$\boldsymbol{\delta} = \left(\delta_{-1}, \delta_0, \ldots, \delta_{N-1}, \delta_N\right)^T$$

olmak üzere (3.25) ifadesinden

$$\left[\mathbf{A}+\frac{\Delta t}{2}\mathbf{B}+\varepsilon\frac{\Delta t}{2}\left(\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^n\right)+\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\delta}^n\right)\right)+\mu\mathbf{D}\right]\boldsymbol{\delta}^{n+1} = \left[\mathbf{A}-\frac{\Delta t}{2}\mathbf{B}+\mu\mathbf{D}\right]\boldsymbol{\delta}^{n} \qquad (3.27)$$

elde edilir.

(3.27) denklem sistemi $N+2$ denklem ve $N+2$ bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. Sınır şartlarını sisteme adapte edebilmek için denklem sistemindeki ilk ve son denklemler silinerek bölgenin uç noktalarındaki

$$u(a,t) = u(b,t) = 0$$

sınır şartları kullanılarak δ_{-1}^{n+1} ve δ_{N}^{n+1} yok edilirse (3.27) denklem sistemi $N \times N$ matris sistemine indirgenmiş olur. Ulaşılan denklem sistemi 5'li Thomas algoritması yardımıyla çözülebilir.

RLW denkleminin trigonometrik kuadratik B-spline Galerkin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken elde edilen denklem sisteminin çözülebilmesi için

$$\left(\delta_{-1}^{0}, \delta_{0}^{0}, \ldots, \delta_{N-1}^{0}, \delta_{N}^{0}\right)$$

başlangıç vektörünün bulunması gerekir. Bunun için RLW denkleminin başlangıç şartı olan

$$u(x,0) = f\left(x\right)$$

ve kuadratik trigonometrik B-spline eşitlikleri kullanılabilir.

3.2.2. Zaman parçalanması için Adams Moulton yöntemi (KDAM2)

(3.5) de gösterildiği gibi RLW denklemi

$$v_t = \left(u - \mu u_{xx}\right)_t = -\left(u_x + \varepsilon u u_x\right)$$

formunda yazılabilir. Bu eşitlik için $\theta_1 = 5/12, \theta_2 = 2/3, \theta_3 = -1/12$ seçimleri ile zaman parçalanması olarak 2. bölümde verilen

$$v^{n+1} \simeq v^n + \Delta t\left(\theta_1 (v_t)^{n+1} + \theta_2 (v_t)^n + \theta_3 (v_t)^{n-1}\right)$$

Adams Moulton yöntemi uygulanmış ve aşağıdaki (3.14)

$$(u - \mu u_{xx})^{n+1} = (u - \mu u_{xx})^n - \Delta t(\theta_1 (u_x + \varepsilon u u_x)^{n+1}) - \Delta t(\theta_2 (u_x + \varepsilon u u_x)^n)$$

$$-\Delta t(\theta_3 (u_x + \varepsilon u u_x)^{n-1})$$

eşitliği elde edilmiştir. (3.14) eşitliğini lineerleştirmek için

$$(uu_x)^{n+1} = u^n u_x^{n+1} + u_x^n u^{n+1} - u^n u_x^n + \mathcal{O}((\Delta t)^2)$$

Rubin Graves lineerleştirilmesi kullanılırsa

$$\begin{aligned} &u^{n+1} + \theta_1 \Delta t \left(u_x\right)^{n+1} + \theta_1 \Delta t \varepsilon \left(u^n (u_x)^{n+1} + (u_x)^n u^{n+1}\right) - \mu \left(u_{xx}\right)^{n+1} = \\ &u^n - \mu \left(u_{xx}\right)^n - \theta_2 \Delta t \left(u_x\right)^n + (\theta_1 \Delta t \varepsilon - \theta_2 \Delta t \varepsilon) u^n \left(u_x\right)^n \\ &-\theta_3 \Delta t((u_x)^{n-1} + \varepsilon u^{n-1} \left(u_x\right)^{n-1}) \end{aligned} \tag{3.28}$$

şeklindeki RLW denkleminin Adams Moulton yöntemi kullanılarak zaman parçalanması yapılmış ve Rubin Graves lineerleştirilmesi ile $(n+1)$. zamana göre lineerleştirilmiş eşitliği elde edilir. $W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere (3.28) eşitliğine Galerkin metodu uygulanırsa,

$$\begin{aligned} &\int_a^b W(x) \left(u^{n+1} + \theta_1 \Delta t \left(u_x\right)^{n+1} + \theta_1 \Delta t \varepsilon \left(u^n (u_x)^{n+1} + (u_x)^n u^{n+1}\right)\right. \\ &\left. - \mu \left(u_{xx}\right)^{n+1}\right) dx = \int_a^b W(x) \left(u^n - \mu \left(u_{xx}\right)^n - \theta_2 \Delta t \left(u_x\right)^n\right. \\ &\left. + (\theta_1 \Delta t \varepsilon - \theta_2 \Delta t \varepsilon) u^n \left(u_x\right)^n - \theta_3 \Delta t((u_x)^{n-1} + \varepsilon u^{n-1} \left(u_x\right)^{n-1})\right) dx \end{aligned} \tag{3.29}$$

eşitliğine ulaşılır. Galerkin yönteminde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x yerine T_m trigonometrik B-spline fonksiyonları kullanılacaktır. Bu bölümde kullanılacak olan kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonları daha önce de bahsedildiği üzere 2. mertebeye kadar sürekli olduklarından (3.29) eşitliğindeki ikinci türev içeren integral alma işlemine kısmi integrasyon uygulanacaktır. Daha önce gösterdiğimiz şekilde (3.29) eşitliğindeki

$$\int_a^b W(x) u_{xx} dx$$

integraline kısmi integrasyon uygulanması sonucunda

$$\int_a^b W(x) u_{xx} dx = -\int_a^b u_x W_x(x) dx$$

elde edilir. $[a, b]$ konum aralığı N eşit uzunluklu alt aralığa parçalanırsa, $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x yerine T_m trigonometrik kuadratik B-spline fonksiyonları kullanıldığında kısmi integrasyon işlemi sonucunda

(3.29) eşitliğinin düzenlenmiş formu olan

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=m-1}^{m+1}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)+\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i'T_j' dx\right)+\theta_1\Delta t\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\right.\\
&\left.+\theta_1\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-1}^{m+1}\left[\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' dx\right)+\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k'\left(\delta_k^n\right)T_j dx\right)\right]\right\}\delta_j^{n+1}\\
&-\sum_{j=m-1}^{m+1}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)+\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i'T_j' dx\right)-\theta_2\Delta t\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\right.\\
&\left.+\sum_{k=m-1}^{m+1}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' dx\right)\left(\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_2\Delta t\varepsilon\right)\right\}\delta_j^{n}\\
&+\sum_{j=m-1}^{m+1}\theta_3\Delta t\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)+\varepsilon\sum_{k=m-1}^{m+1}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' dx\right)\right\}\delta_j^{n-1}
\end{aligned}\tag{3.30}$$

yaklaşımı elde edilir. Bu yaklaşım $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde olup $m = 0, 1, \ldots, N-1$ değerleri için her bir aralıktaki yaklaşımlar birleştirildiğinde (3.29) eşitliğine dönecektir.

(3.30) yaklaşımında $\xi = x - x_m$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=m-1}^{m+1}\left\{\left(\int_0^h T_iT_j d\xi\right)+\mu\left(\int_0^h T_i'T_j' d\xi\right)+\theta_1\Delta t\left(\int_0^h T_iT_j' d\xi\right)\right.\\
&\left.+\theta_1\Delta t\varepsilon\left[\sum_{k=m-1}^{m+1}\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' d\xi\right)+\sum_{k=m-1}^{m+1}\left(\int_0^h T_iT_k'\left(\delta_k^n\right)T_j d\xi\right)\right]\right\}\delta_j^{n+1}\\
&-\sum_{j=m-1}^{m+1}\left\{\left(\int_0^h T_iT_j d\xi\right)+\mu\left(\int_0^h T_i'T_j' d\xi\right)-\theta_2\Delta t\left(\int_0^h T_iT_j' d\xi\right)\right.\\
&\left.+\sum_{k=m-1}^{m+1}\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' d\xi\right)\left(\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_2\Delta t\varepsilon\right)\right\}\delta_j^{n}\\
&+\sum_{j=m-1}^{m+1}\theta_3\Delta t\left\{\left(\int_0^h T_iT_j' d\xi\right)+\varepsilon\sum_{k=m-1}^{m+1}\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' d\xi\right)\right\}\delta_j^{n-1}
\end{aligned}\tag{3.31}$$

elde edilir. (3.31) yaklaşımındaki integralleri hesaplamak için 2. bölümde elde edilen T_{m-1}, T_m, T_{m+1} trigonometrik kuadratik B-spline eşitlikleri kullanılacaktır. Bu durumda her bir alt aralıktaki eleman matrislerinin her bir elemanı i, j, k ; $m-1, m, m+1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&A_{ij}^e=\int_0^h T_iT_j d\xi,\quad B_{ij}^e=\int_0^h T_iT_j' d\xi,\quad C_{ij}^e\left(\boldsymbol{\delta}^n\right)=\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' d\xi,\\
&D_{ij}^e=\int_0^h T_i'T_j' d\xi,\quad E_{ij}^e\left(\boldsymbol{\delta}^n\right)=\int_0^h T_iT_k'\left(\delta_k^n\right)T_j d\xi
\end{aligned}\tag{3.32}$$

olarak alınabilir. Yukarıda tanımlanan eleman matrislerinin nasıl hesaplandığı bu bölümün başında gösterilmiştir. Elde edilen tüm eleman matrislerinin $m = 0, 1, \ldots, N-1$ için uygun şekilde birbirlerine eklenmesi sonucunda,

$$\boldsymbol{\delta} = (\delta_{-1}, \delta_0 \ldots, \delta_{N-1}, \delta_N)^T$$

olmak üzere (3.31) ifadesinden

$$\begin{aligned} &[\mathbf{A}+\mu\mathbf{D}+\theta_1\Delta t\varepsilon\left(\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{n}}\right)+\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{n}}\right)\right)+\theta_1\Delta t\mathbf{B}]\,\boldsymbol{\delta}^{n+1} = \\ &[\mathbf{A}+\mu\mathbf{D}+\left(\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_2\Delta t\varepsilon\right)\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{n}}\right)-\theta_2\Delta t\mathbf{B}]\,\boldsymbol{\delta}^{n} \\ &-\left[\theta_3\Delta t\mathbf{B}+\theta_3\Delta t\varepsilon\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{n-1}}\right)\right]\boldsymbol{\delta}^{n-1} \end{aligned} \tag{3.33}$$

elde edilir.

(3.33) denklem sistemi $N+2$ denklem ve $N+2$ bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. Sınır şartlarını sisteme adapte edebilmek için denklem sistemindeki ilk ve son denklem silinerek bölgenin uç noktalarındaki

$$u(a,t) = u(b,t) = 0$$

sınır şartları kullanılarak δ_{-1}^{n+1} ve δ_N^{n+1} yok edilirse (3.33) denklem sistemi $N \times N$ matris sistemine indirgenmiş olur. Ulaşılan denklem sistemi 5'li Thomas algoritması yardımıyla çözülebilir.

RLW denkleminin trigonometrik kuadratik B-spline Galerkin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken elde edilen (3.33) denklem sisteminin çözülebilmesi için

$$\left(\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \ldots, \delta_N^0\right)$$

başlangıç vektörü ve

$$\left(\delta_{-1}^1, \delta_0^1, \ldots, \delta_N^1\right)$$

vektörünün bulunması gerekmektedir. Başlangıç vektörü başlangıç şartından elde edilebilirken,

$$\left(\delta_{-1}^1, \delta_0^1, \ldots, \delta_N^1\right)$$

vektörünün bulunması için Crank-Nicolson programda bir kez çalıştırılmalıdır.

3.3. Lineerleştirme 2

Bu bölümde lineerleştirme işlemi için Rubin Graves lineerleştirmesine benzeyen, doğruluğu daha yüksek olan yeni bir lineerleştirme önerilecektir.

3.3.1. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson yöntemi (KDCN3)

(3.5) de gösterildiği üzere RLW denklemi

$$v_t = (u - \mu u_{xx})_t = -(u_x + \varepsilon u u_x)$$

formunda yazılabilir. Bu RLW denklemine zaman parçalanması için 2. bölümde gösterilen

$$v^{n+1} \simeq v^n + \Delta t \left(\theta_1 (v_t)^{n+1} + \theta_2 (v_t)^n + \theta_3 (v_t)^{n-1}\right)$$

Adams Moulton yöntemi uygulanır ve $\theta_1 = \theta_2 = 1/2$, $\theta_3 = 0$ seçimleri yapılırsa, Crank-Nicolson yönteminin elde edilebileceği daha önce de belirtilmiştir. (3.5) formunda yazdığımız RLW denklemine Crank-Nicolson yöntemi uygulandığında

$$(u - \mu u_{xx})^{n+1} = (u - \mu u_{xx})^n - \frac{\Delta t}{2}(u_x + \varepsilon u u_x)^{n+1} - \frac{\Delta t}{2}(u_x + \varepsilon u u_x)^n$$

eşitliği elde edilmişti. Elde edilen (3.7) eşitliğini $(n+1)$. zamana göre lineerleştirmek için bir önceki lineerleştirmeden farklı bir lineerleştirme uygulayacağız. (3.7) eşitliğine

$$\begin{aligned}(uu_x)^{n+1} &= 2u_x^n u^{n+1} - u_x^{n-1}u^{n+1} + 2u^n u_x^{n+1} - u^{n-1}u_x^{n+1} + 2u^n u_x^{n-1} \\ &\quad +2u^{n-1}u_x^n - 4u^n u_x^n - u^{n-1}u_x^{n-1} + \mathcal{O}((\Delta t)^4)\end{aligned} \tag{3.34}$$

lineerleştirmesi uygulanırsa,

$$\begin{aligned}&u^{n+1} + \frac{\Delta t \varepsilon}{2}\left(2(u_x)^n u^{n+1} - (u_x)^{n-1}u^{n+1} + 2u^n (u_x)^{n+1} - u^{n-1}(u_x)^{n+1}\right) \\ &+\frac{\Delta t}{2}(u_x)^{n+1} - \mu (u_{xx})^{n+1} = u^n - \mu (u_{xx})^n - \frac{\Delta t}{2}(u_x)^n \\ &+u^n (u_x)^n \left(\frac{3\Delta t \varepsilon}{2}\right) - \frac{\Delta t \varepsilon}{2}(2u^{n-1}(u_x)^n + 2(u_x)^{n-1}u^n) \\ &+\frac{\Delta t \varepsilon}{2}u^{n-1}(u_x)^{n-1}\end{aligned} \tag{3.35}$$

olarak RLW denkleminin Crank-Nicolson yöntemi kullanılarak zaman parçalanması yapılmış ve tanımlanan lineerleştirme ile $(n+1)$. zamana göre lineerleştirilmiş eşitliği

elde edilir. $W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere (3.35) eşitliğine Galerkin metodu uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
&\int_a^b W(x)\left(u^{n+1}+\frac{\Delta t}{2}\left(u_x\right)^{n+1}-\mu\left(u_{xx}\right)^{n+1}\right.\\
&\left.+\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\left(2(u_x)^n u^{n+1}-(u_x)^{n-1}u^{n+1}+2u^n(u_x)^{n+1}-u^{n-1}(u_x)^{n+1}\right)\right)dx=\\
&\int_a^b W(x)\left(u^n-\mu\left(u_{xx}\right)^n-\frac{\Delta t}{2}\left(u_x\right)^n+u^n(u_x)^n\left(\frac{3\Delta t\varepsilon}{2}\right)\right.\\
&\left.-\frac{\Delta t\varepsilon}{2}(2u^{n-1}\left(u_x\right)^n+2(u_x)^{n-1}u^n)+\frac{\Delta t\varepsilon}{2}u^{n-1}\left(u_x\right)^{n-1}\right)dx
\end{aligned} \tag{3.36}$$

eşitliğine ulaşılır. Galerkin yönteminde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x yerine T_m trigonometrik B-spline fonksiyonları kullanılacaktır. Bu bölümde kullanılacak olan kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonları daha önce de bahsedildiği üzere 2. mertebeye kadar sürekli olduklarından (3.36) eşitliğindeki ikinci türev içeren integral alma işlemine kısmi integrasyon uygulanacaktır. Bu bölümün başında da gösterdiğimiz şekilde (3.36) eşitliğindeki

$$\int_a^b W(x)u_{xx}dx$$

integraline kısmi integrasyon uygulanmasıyla

$$\int_a^b W(x)u_{xx}dx=-\int_a^b u_x W_x(x)dx$$

elde edilir. $[a,b]$ konum aralığı N eşit uzunluklu alt aralığa parçalanırsa, $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde $W\left(x\right)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x yerine T_m trigonometrik kuadratik B-spline fonksiyonları kullanıldığında kısmi integrasyon işlemi sonucunda (3.36) eşitliğinin düzenlenmiş formu olan

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=m-1}^{m+1}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)+\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i'T_j' dx\right)+\frac{\Delta t}{2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\right.\\
&+\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\sum_{k=m-1}^{m+1}\left[2\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k'\left(\delta_k^n\right)T_j dx\right)-\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k'\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j dx\right)\right.\\
&\left.\left.+2\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' dx\right)-\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' dx\right)\right]\right\}\delta_j^{n+1}\\
&-\sum_{j=m-1}^{m+1}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)+\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i'T_j' dx\right)-\frac{\Delta t}{2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\right.\\
&+\sum_{k=m-1}^{m+1}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' dx\right)\left(\frac{3\Delta t\varepsilon}{2}\right)\\
&\left.-\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\sum_{k=m-1}^{m+1}2\left[\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' dx\right)+\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k'\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j dx\right)\right]\right\}\delta_j^n\\
&-\sum_{j=m-1}^{m+1}\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\left\{\sum_{k=m-1}^{m+1}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' dx\right)\right\}\delta_j^{n-1}
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

yaklaşımı elde edilir. Bu yaklaşım $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde olup $m = 0, 1, \ldots, N-1$ değerleri için her bir aralıktaki yaklaşımlar birleştirildiğinde (3.36) eşitliğine dönecektir.

(3.37) yaklaşımında $\xi = x - x_m$ dönüşümü yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=m-1}^{m+1}\left\{\left(\int_0^h T_iT_j d\xi\right)+\mu\left(\int_0^h T_i'T_j' d\xi\right)+\frac{\Delta t}{2}\left(\int_0^h T_iT_j' d\xi\right)\right.\\
&+\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\sum_{k=m-1}^{m+1}\left[2\left(\int_0^h T_iT_k'\left(\delta_k^n\right)T_j d\xi\right)-\left(\int_0^h T_iT_k'\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j d\xi\right)\right.\\
&\left.\left.+2\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' d\xi\right)-\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' d\xi\right)\right]\right\}\delta_j^{n+1}\\
&-\sum_{j=m-1}^{m+1}\left\{\left(\int_0^h T_iT_j d\xi\right)+\mu\left(\int_0^h T_i'T_j' d\xi\right)-\frac{\Delta t}{2}\left(\int_0^h T_iT_j' d\xi\right)\right.\\
&+\sum_{k=m-1}^{m+1}\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' d\xi\right)\left(\frac{3\Delta t\varepsilon}{2}\right)\\
&\left.-\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\sum_{k=m-1}^{m+1}2\left[\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' d\xi\right)+\left(\int_0^h T_iT_k'\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j d\xi\right)\right]\right\}\delta_j^n\\
&-\sum_{j=m-1}^{m+1}\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\left\{\sum_{k=m-1}^{m+1}\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' d\xi\right)\right\}\delta_j^{n-1}
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

elde edilir. (3.38) ifadesindeki integralleri hesaplamak için 2. bölümde elde

edilen T_{m-1}, T_m, T_{m+1} trigonometrik kuadratik B-spline eşitlikleri kullanılacaktır. Bu durumda her bir alt aralıktaki eleman matrislerinin her bir elemanı i, j, k ; $m-1, m, m+1$ olmak üzere

$$A_{ij}^e = \int_0^h T_i T_j d\xi, \quad B_{ij}^e = \int_0^h T_i T_j' d\xi, \quad C_{ij}^e\left(\boldsymbol{\delta}^n\right) = \int_0^h T_i T_k\left(\delta_k^n\right) T_j' d\xi,$$
$$D_{ij}^e = \int_0^h T_i' T_j' d\xi, \quad E_{ij}^e\left(\boldsymbol{\delta}^n\right) = \int_0^h T_i T_k'\left(\delta_k^n\right) T_j d\xi \tag{3.39}$$

olacaktır. Yukarıda tanımlanan eleman matrislerinin nasıl hesaplandığı bu bölümün başında gösterilmiştir. Elde edilen tüm eleman matrislerinin $m = 0, 1, \ldots, N-1$ için uygun şekilde birbirlerine eklenmesi sonucunda,

$$\boldsymbol{\delta} = \left(\delta_{-1}, \delta_0 \ldots, \delta_{N-1}, \delta_N\right)^T$$

olmak üzere (3.38) ifadesinden

$$\begin{aligned}
&\left[\mathbf{A}+\mu\mathbf{D}+\frac{\Delta t}{2}\mathbf{B}+\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\left(2\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\delta}^n\right)-\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)+2\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^n\right)-\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)\right)\right]\boldsymbol{\delta}^{n+1} = \\
&\left[\mathbf{A}+\mu\mathbf{D}-\frac{\Delta t}{2}\mathbf{B}+3\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^n\right)-\Delta t\varepsilon\left(\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)+\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)\right)\right]\boldsymbol{\delta}^n \\
&+\left[\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)\right]\boldsymbol{\delta}^{n-1}
\end{aligned} \tag{3.40}$$

elde edilir.

(3.40) denklem sistemi $N+2$ denklem ve $N+2$ bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. Sınır şartlarını sisteme adapte edebilmek için denklem sistemindeki ilk ve son denklem silinerek bölgenin uç noktalarındaki

$$u(a,t) = u(b,t) = 0$$

sınır şartları kullanılarak δ_{-1}^{n+1} ve δ_N^{n+1} yok edilirse (3.40) denklem sistemi $N \times N$ matris sistemine indirgenmiş olur. Ulaşılan denklem sistemi 5'li Thomas algoritması yardımıyla çözülebilir.

RLW denkleminin trigonometrik kuadratik B-spline Galerkin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken elde edilen denklem sisteminin çözülebilmesi için

$$\left(\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \ldots, \delta_N^0\right)$$

başlangıç vektörünün bulunması gerekir. Bunun için RLW denkleminin başlangıç şartı olan

$$u\left(x,0\right)=f\left(x\right)$$

ve kuadratik trigonometrik B-spline eşitlikleri kullanılır.

3.3.2. Zaman parçalanması için Adams Moulton yöntemi (KDAM3)

RLW denklemi (3.5) de gösterildiği gibi

$$v_t=\left(u-\mu u_{xx}\right)_t=-\left(u_x+\varepsilon u u_x\right)$$

formunda yazılabilir. (3.5) eşitliğine $\theta_1=5/12, \theta_2=2/3, \theta_3=-1/12$ seçimleri ile 2. bölümde gösterilen

$$v^{n+1}\simeq v^n+\Delta t\left(\theta_1(v_t)^{n+1}+\theta_2(v_t)^n+\theta_3(v_t)^{n-1}\right)$$

Adams Moulton yöntemi uygulanmış ve

$$(u-\mu u_{xx})^{n+1}=(u-\mu u_{xx})^n-\Delta t(\theta_1(u_x+\varepsilon u u_x)^{n+1})-\Delta t(\theta_2(u_x+\varepsilon u u_x)^n)$$
$$-\Delta t(\theta_3(u_x+\varepsilon u u_x)^{n-1})$$

eşitliği elde edilmiştir. Bu alt bölümde daha önce elde edilen yukarıdaki (3.14) eşitliğini $(n+1)$. zamana göre lineerleştirmek için Rubin Graves lineerleştirmesinden farklı bir lineerleştirme uygulanacaktır. (3.14) eşitliğine

$$\begin{aligned}(uu_x)^{n+1} &= 2u_x^n u^{n+1}-u_x^{n-1}u^{n+1}+2u^n u_x^{n+1}-u^{n-1}u_x^{n+1}+2u^n u_x^{n-1}+\\ &\quad 2u^{n-1}u_x^n-4u^n u_x^n-u^{n-1}u_x^{n-1}+\mathcal{O}((\Delta t)^4)\end{aligned}$$

lineerleştirmesi uygulanırsa

$$\begin{aligned}&u^{n+1}+\theta_1\Delta t\left(u_x\right)^{n+1}+\theta_1\Delta t\varepsilon\left(2(u_x)^n u^{n+1}-(u_x)^{n-1}u^{n+1}+\right.\\ &\left.2u^n(u_x)^{n+1}-u^{n-1}(u_x)^{n+1}\right)-\mu\left(u_{xx}\right)^{n+1}=\\ &u^n-\mu\left(u_{xx}\right)^n-\theta_2\Delta t\left(u_x\right)^n+u^n(u_x)^n(4\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_2\Delta t\varepsilon)-\\ &\theta_1\Delta t\varepsilon(2u^{n-1}\left(u_x\right)^n+2(u_x)^{n-1}u^n)-\theta_3\Delta t\left(u_x\right)^{n-1}+\\ &u^{n-1}\left(u_x\right)^{n-1}\left(\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_3\Delta t\varepsilon\right)\end{aligned}\tag{3.41}$$

olarak RLW denkleminin Adams Moulton yöntemi kullanılarak zaman parçalanması yapılmış ve tanımlanan lineerleştirme ile $(n+1)$. zamana göre lineer hale getirilmiş

eşitliği elde edilir. $W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere (3.41) eşitliğine Galerkin metodu uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
&\int_a^b W(x)\left(u^{n+1}+\theta_1\Delta t\,(u_x)^{n+1}+\theta_1\Delta t\varepsilon\,(2(u_x)^n u^{n+1}-(u_x)^{n-1}u^{n+1}\right.\\
&+\left.2u^n(u_x)^{n+1}-u^{n-1}(u_x)^{n+1})-\mu\,(u_{xx})^{n+1}\right)dx=\\
&\int_a^b W(x)\,(u^n-\mu\,(u_{xx})^n-\theta_2\Delta t\,(u_x)^n+u^n(u_x)^n(4\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_2\Delta t\varepsilon)\\
&-\theta_1\Delta t\varepsilon(2u^{n-1}\,(u_x)^n+2(u_x)^{n-1}u^n)-\theta_3\Delta t\,(u_x)^{n-1}\\
&+u^{n-1}\,(u_x)^{n-1}\,(\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_3\Delta t\varepsilon)\big)\,dx
\end{aligned} \tag{3.42}$$

eşitliğine ulaşılır. Galerkin yönteminde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x yerine T_m trigonometrik B-spline fonksiyonları kullanılacaktır. Bu bölümde kullanılacak olan kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonları 2. mertebeye kadar sürekli olduklarından (3.42) eşitliğindeki ikinci türev içeren integral alma işlemine kısmi integrasyon uygulanacaktır. Daha önce de gösterdiğimiz şekilde (3.42) eşitliğindeki

$$\int_a^b W(x)u_{xx}dx$$

integraline kısmi integrasyon uygulanmasıyla

$$\int_a^b W(x)u_{xx}dx=-\int_a^b u_xW_x(x)dx$$

elde edilir. $[a,b]$ konum aralığı N eşit uzunluklu alt aralığa parçalanırsa, $[x_m,x_{m+1}]$ aralığı üzerinde $W\,(x)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x yerine T_m trigonometrik kuadratik B-spline fonksiyonları kullanıldığında kısmi integrasyon işlemi sonucunda

(3.42) eşitliğinin düzenlenmiş formu olan

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=m-1}^{m+1}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)+\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i'T_j' dx\right)+\theta_1\Delta t\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\right.\\
&+\theta_1\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-1}^{m+1}\left[2\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k'\left(\delta_k^n\right)T_j dx\right)-\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k'\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j dx\right)\right.\\
&\left.\left.+\,2\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' dx\right)-\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' dx\right)\right]\right\}\delta_j^{n+1}\\
&-\sum_{j=m-1}^{m+1}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)+\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i'T_j' dx\right)\right.\\
&-\theta_2\Delta t\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)+\sum_{k=m-1}^{m+1}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' dx\right)\left(4\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_2\Delta t\varepsilon\right)\\
&\left.-\theta_1\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-1}^{m+1}2\left[\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' dx\right)+\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k'\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j dx\right)\right]\right\}\delta_j^n\\
&+\sum_{j=m-1}^{m+1}\left\{\theta_3\Delta t\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\right.\\
&\left.-\sum_{k=m-1}^{m+1}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' dx\right)\left(\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_3\Delta t\varepsilon\right)\right\}\delta_j^{n-1}
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

yaklaşımı elde edilir. Bu yaklaşım $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde olup $m = 0, 1, \ldots, N-1$ değerleri için her bir aralıktaki yaklaşımlar birleştirildiğinde (3.42) eşitliğine dönecektir.

(3.43) ifadesinde $\xi = x - x_m$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=m-1}^{m+1}\left\{\left(\int_0^h T_iT_jd\xi\right)+\mu\left(\int_0^h T_i'T_j'd\xi\right)+\theta_1\Delta t\left(\int_0^h T_iT_j'd\xi\right)\right.\\
&+\theta_1\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-1}^{m+1}\left[2\left(\int_0^h T_iT_k'\left(\delta_k^n\right)T_jd\xi\right)-\left(\int_0^h T_iT_k'\left(\delta_k^{n-1}\right)T_jd\xi\right)\right.\\
&\left.\left.+\,2\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j'd\xi\right)-\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j'd\xi\right)\right]\right\}\delta_j^{n+1}\\
&-\sum_{j=m-1}^{m+1}\left\{\left(\int_0^h T_iT_jd\xi\right)+\mu\left(\int_0^h T_i'T_j'd\xi\right)\right.\\
&-\theta_2\Delta t\left(\int_0^h T_iT_j'd\xi\right)+\sum_{k=m-1}^{m+1}\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j'd\xi\right)\left(4\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_2\Delta t\varepsilon\right)\\
&\left.-\theta_1\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-1}^{m+1}2\left[\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j'd\xi\right)+\left(\int_0^h T_iT_k'\left(\delta_k^{n-1}\right)T_jd\xi\right)\right]\right\}\delta_j^n\\
&+\sum_{j=m-1}^{m+1}\left\{\theta_3\Delta t\left(\int_0^h T_iT_j'd\xi\right)\right.\\
&\left.-\sum_{k=m-1}^{m+1}\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j'd\xi\right)\left(\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_3\Delta t\varepsilon\right)\right\}\delta_j^{n-1}
\end{aligned}\tag{3.44}$$

elde edilir. (3.44) ifadesindeki integralleri hesaplamak için 2. bölümde elde edilen T_{m-1}, T_m, T_{m+1} trigonometrik kuadratik B-spline eşitlikleri kullanılacaktır. Bu durumda her bir alt aralıktaki eleman matrislerinin her bir elemanı i, j, k ; $m-1, m, m+1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&A_{ij}^e=\int_0^h T_iT_jd\xi,\quad B_{ij}^e=\int_0^h T_iT_j'd\xi,\quad C_{ij}^e\left(\boldsymbol{\delta}^n\right)=\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j'd\xi,\\
&D_{ij}^e=\int_0^h T_i'T_j'd\xi,\quad E_{ij}^e\left(\boldsymbol{\delta}^n\right)=\int_0^h T_iT_k'\left(\delta_k^n\right)T_jd\xi
\end{aligned}\tag{3.45}$$

olacaktır. Yukarıda tanımlanan eleman matrislerinin nasıl hesaplandığı bu bölümün başında gösterilmiştir. Elde edilen tüm eleman matrislerinin $m = 0, 1, \ldots, N-1$ için uygun şekilde birbirlerine eklenmesi sonucunda,

$$\boldsymbol{\delta}=\left(\delta_{-1},\delta_0\ldots,\delta_{N-1},\delta_N\right)^T$$

olmak üzere (3.44) ifadesinden

$$
\begin{aligned}
&[\mathbf{A}+\mu\mathbf{D}+\theta_1\Delta t\mathbf{B} \\
&+\theta_1\Delta t\varepsilon\left(2\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\delta}^n\right)-\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)+2\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^n\right)-\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)\right)]\,\boldsymbol{\delta}^{n+1}= \\
&[\mathbf{A}+\mu\mathbf{D}-\theta_2\Delta t\mathbf{B} \\
&+\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^n\right)\left(4\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_2\Delta t\varepsilon\right)-\theta_1\Delta t\varepsilon\left(2\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)+2\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)\right)]\,\boldsymbol{\delta}^n+ \\
&\left[-\theta_3\Delta t\mathbf{B}+\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)\left(\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_3\Delta t\varepsilon\right)\right]\boldsymbol{\delta}^{n-1}
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

elde edilir.

(3.46) denklem sistemi $N+2$ denklem ve $N+2$ bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. Sınır şartlarını sisteme adapte edebilmek için denklem sistemindeki ilk ve son denklem silinerek bölgenin uç noktalarındaki

$$u(a,t)=u(b,t)=0$$

sınır şartları kullanılarak δ_{-1}^{n+1} ve δ_N^{n+1} yok edilirse (3.46) denklem sistemi $N\times N$ matris sistemine indirgenmiş olur. Ulaşılan denklem sistemi 5'li Thomas algoritması yardımıyla çözülebilir.

RLW denkleminin trigonometrik kuadratik B-spline Galerkin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken elde edilen (3.46) denklem sisteminin çözülebilmesi için

$$\left(\delta_{-1}^0,\delta_0^0,\ldots,\delta_N^0\right)$$

başlangıç vektörü ve

$$\left(\delta_{-1}^1,\delta_0^1\ldots,\delta_N^1\right)$$

vektörünün bulunması gerekmektedir. Başlangıç vektörü başlangıç şartından bulunabilirken,

$$\left(\delta_{-1}^1,\delta_0^1,\ldots,\delta_N^1\right)$$

vektörünün bulunması için Crank-Nicolson programda bir kez çalıştırılmalıdır.

3.4. Test Problemleri

3.4.1 Solitary dalgasının hareketi test problemi

$[a, b]$ aralığında tanımlı $3c$ genlikli, $v = 1+\varepsilon c$ dalga hızlı RLW denkleminin solitary dalga analitik çözümü $k = \sqrt{\dfrac{\varepsilon c}{4\mu v}}$ olmak üzere

$$u(x,t) = 3c\text{sech}^2(k[x - \tilde{x}_0 - vt])$$

olarak ilk bölümde verilmişti. Analitik çözümde $t = 0$ alındığında

$$u(x,0) = 3c\text{sech}^2(k[x - \tilde{x}_0])$$

başlangıç şartı elde edilebilir.

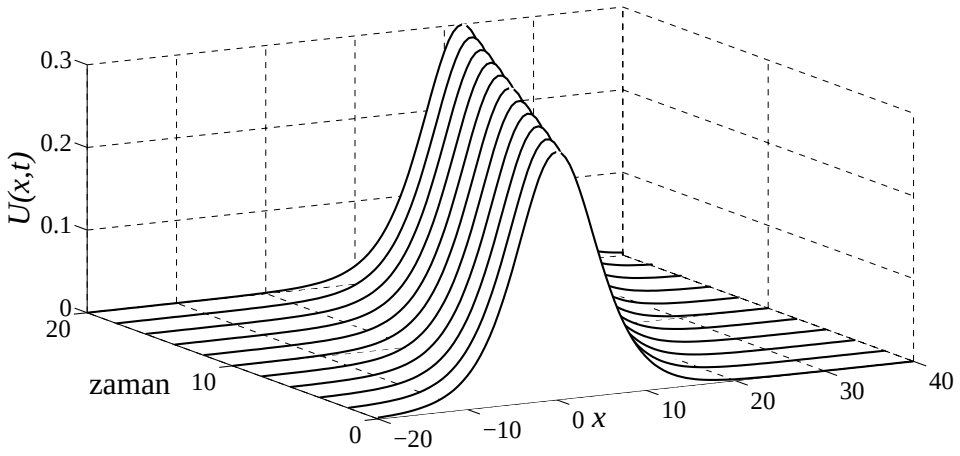
Başlangıç şartı kullanılarak RLW denkleminin üç korunum sabitinin tam değerleri

$$C_1 = \frac{6c}{k}, \quad C_2 = \frac{12c^2}{k} + \frac{48kc^2\mu}{5}, \quad C_3 = \frac{36c^2}{k}\left(1 + \frac{4c}{5}\right)$$

olarak bulunabilir.

Bu test probleminde $\varepsilon = \mu = 1$, $\tilde{x}_0 = 0$ parametreleri, $-100 \leq x \leq 120$ tanım aralıkları seçilerek $3c$ genlikli, $\tilde{x}_0 = 0$ noktasına tepe noktası karşılık gelecek şekilde yerleştirilmiş bir solitary dalgasının $v = 1 + \varepsilon c$ hızla sağa doğru hareketi $0 \leq t \leq 20$ zaman aralığında incelenmiştir. Verilen parametreler ve tanım aralıkları için $c = 0.1$ seçimi yapılarak önerilen tüm yöntemler için elde edilen sonuçlar tablolar halinde ve hata grafikleri çizilerek verilecektir.

$h = \Delta t = 0.1$ seçimi yapılarak belirli zamanlardaki dalganın konumunu gösteren şekil sadece KDCN1 metodu için Şekil 3.1.'de verilmiştir. Şeklin sadece bir metot için çizilmesinin sebebi diğer metotlar için çizilen şekillerle bu şekil arasında görsel bir fark olmamasından kaynaklanmaktadır. Şekil 3.1. incelendiğinde $t = 0$ anında tepe noktası $\tilde{x}_0 = 0$ noktasına karşılık gelecek şekilde yerleştirilen solitary dalgasının zamanla şeklinde bir bozulma olmadan hareket ettiği görülebilir.



Şekil 3.1. $h = \Delta t = 0.1$ için çeşitli zamanlardaki $U(x,t)$.

İlk olarak konum ve zaman artımı aynı seçilerek hata normları, hesaplama zamanları ve mertebeler Çizelge 3.1.'de verilmiştir. Çizelge 3.1.'de görüldüğü gibi, tüm yöntemlerdeki konum va zaman artımı değerleri 2'den 0.01'e kadar azaldıkça, hata normları da azalmaktadır. Crank-Nicolson yöntemlerinin hata normları birbirlerine yakın iken, Adams Moulton yöntemlerinden KDAM1 ve KDAM3'ün, KDAM2 yöntemine göre daha iyi sonuçlar verdikleri söylenebilir. KDCN1 ve KDAM1 ile temsil edilen iç iterasyonlu yöntemler iyi sonuçlar vermelerine karşın, hesaplama zamanı diğer yöntemlere göre daha fazladır. Bununla birlikte lineerleştirme 3 alt bölümünde önerilen lineerleştirmenin kullanıldığı KDCN3 ve KDAM3, iç iterasyon ile lineerleştirme kadar iyi sonuçlar vermiş, aynı zamanda da hesaplama zamanı açısından büyük avantaj sağlamıştır. Çizelge 3.1.'de verilen tüm yöntemler mertebeye göre kıyaslanacak olursa, Crank-Nicolson yöntemlerinin kuadratik, Adams Moulton yöntemlerininse kübik mertebeye sahip oldukları söylenebilir.

Çizelge 3.1. $t = 20$ anındaki hata normları, hesaplama zamanları ve mertebe

	KDCN1			**KDAM1**		
$h = \Delta t$	L_∞	Cpu	Mertebe	L_∞	Cpu	Mertebe
2	2.99×10^{-2}	0.14	1.84	0.02×10^{-2}	0.28	2.92
1	8.33×10^{-3}	0.12	1.94	2.10×10^{-3}	0.14	3.03
0.5	2.17×10^{-3}	0.48	1.99	2.57×10^{-4}	0.48	3.00
0.2	3.51×10^{-4}	2.39	2.00	1.65×10^{-5}	2.39	3.00
0.1	8.79×10^{-5}	8.38	2.00	2.06×10^{-6}	8.37	3.00
0.05	2.20×10^{-5}	29.69	2.00	2.57×10^{-7}	29.04	3.00
0.02	3.52×10^{-6}	162.87	2.00	1.65×10^{-8}	158.26	2.93
0.01	8.79×10^{-7}	621.67		2.17×10^{-9}	608.67	
	KDCN2			**KDAM2**		
$h = \Delta t$	L_∞	Cpu	Mertebe	L_∞	Cpu	Mertebe
2	2.70×10^{-2}	0.03	1.86	1.65×10^{-2}	0.12	2.84
1	7.43×10^{-3}	0.03	1.94	2.29×10^{-3}	0.02	2.65
0.5	1.93×10^{-3}	0.06	1.99	3.64×10^{-4}	0.08	2.37
0.2	3.12×10^{-4}	0.36	2.00	4.15×10^{-5}	0.36	2.10
0.1	7.81×10^{-5}	1.37	2.00	9.65×10^{-6}	1.37	1.95
0.05	1.95×10^{-5}	5.49	2.00	2.49×10^{-6}	5.57	1.98
0.02	3.12×10^{-6}	34.16	2.00	4.06×10^{-7}	34.15	1.99
0.01	7.81×10^{-7}	135.69		1.02×10^{-7}	136.97	
	KDCN3			**KDAM3**		
$h = \Delta t$	L_∞	Cpu	Mertebe	L_∞	Cpu	Mertebe
2	3.14×10^{-2}	0.12	1.89	1.68×10^{-2}	0.05	2.97
1	8.49×10^{-3}	0.03	1.96	2.15×10^{-3}	0.05	3.02
0.5	2.19×10^{-3}	0.06	2.00	2.64×10^{-4}	0.06	3.01
0.2	3.51×10^{-4}	0.36	2.00	1.68×10^{-5}	0.36	3.00
0.1	8.79×10^{-5}	1.36	2.00	2.10×10^{-6}	1.42	3.00
0.05	2.20×10^{-5}	5.72	2.00	2.62×10^{-7}	5.55	3.00
0.02	3.52×10^{-6}	34.80	2.00	1.68×10^{-8}	34.55	2.93
0.01	8.79×10^{-7}	138.65		2.20×10^{-9}	140.51	

$h = \Delta t = 0.1$ seçilerek her bir önerilen metot için korunum sabitlerinin mutlak hataları farklı zamanlarda hesaplanarak Çizelge 3.2.'de verilmiştir.

Çizelge 3.2. $h = \Delta t = 0.1$ seçimi için korunum sabitlerinin mutlak hataları

	KDCN1			**KDAM1**		
t	$(C_1)_h \times 10^{11}$	$(C_2)_h \times 10^4$	$(C_3)_h \times 10^5$	$(C_1)_h \times 10^{11}$	$(C_2)_h \times 10^4$	$(C_3)_h \times 10^5$
0	0.03	0.22550910	0.0000000	0.03	0.22550910	0.0000000
4	0.10	0.22550238	0.0001075	0.02	0.22044808	016703583
8	0.17	0.22548359	0.0004059	0.02	0.21527925	0.3376291
12	0.24	0.22545581	0.0008416	0.01	0.21011035	0.5082236
16	0.30	0.22542223	0.0013622	0.02	0.20494138	0.6788191
20	0.41	0.22538534	0.0019283	0.05	0.19977234	0.8494153
	KDCN2			**KDAM2**		
t	$(C_1)_h \times 10^{11}$	$(C_2)_h \times 10^4$	$(C_3)_h \times 10^5$	$(C_1)_h \times 10^{11}$	$(C_2)_h \times 10^4$	$(C_3)_h \times 10^5$
0	0.03	0.22550910	0.0000000	0.03	0.22550910	0.0000000
4	0.10	0.22551153	0.0001475	0.03	0.22044651	0.1670937
8	0.16	0.22551830	0.0005657	0.02	0.21527300	0.3378597
12	0.23	0.22552822	0.0011962	0.01	0.21009792	0.5086906
16	0.30	0.22554008	0.0019740	0.02	0.20492242	0.6795445
20	0.41	0.22555295	0.0028435	0.05	0.19974710	0.8503973
	KDCN3			**KDAM3**		
t	$(C_1)_h \times 10^{11}$	$(C_2)_h \times 10^4$	$(C_3)_h \times 10^5$	$(C_1)_h \times 10^{11}$	$(C_2)_h \times 10^4$	$(C_3)_h \times 10^5$
0	0.03	0.22550910	0.0000000	0.03	0.22550910	0.0000000
4	0.10	0.22550365	0.0000671	0.03	0.22044908	0.1670034
8	0.16	0.22548614	0.0003243	0.02	0.21528127	0.3375638
12	0.23	0.22545961	0.0007194	0.02	0.21011337	0.5081254
16	0.30	0.22542725	0.0011996	0.02	0.20494540	0.6786880
20	0.40	0.22539157	0.0017256	0.05	0.19977736	0.8492512

Çizelgede $(C_1)_h$, $(C_2)_h$ ve $(C_3)_h$ sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü korunum sabitleri için mutlak hataya karşılık gelmektedir. Korunum sabitlerinin zaman içerisinde sabit

kalması gerekmektedir. Çizelge 3.2.'de görüldüğü gibi tüm metotlar için $(C_1)_h$ mutlak hatası sıfıra yakın değerler alırken, $(C_2)_h$ ve $(C_3)_h$ hatalarının kabul edilebilir olduğu görülebilir.

$\Delta t = 0.001$ seçimi yapılarak konum artımının azalan değerleri ile her bir önerilen metot için hata normu ve mertebeler hesaplanarak Çizelge 3.3.'de verilmiştir.

Çizelge 3.3. Sabit $\Delta t = 0.001$ ve farklı konum artımları için hata normları ve mertebeler

	KDCN1		**KDCN2**		**KDCN3**	
h	L_∞	Mertebe	L_∞	Mertebe	L_∞	Mertebe
2	2.57×10^{-3}	4.99	2.57×10^{-3}	4.99	2.57×10^{-3}	4.99
1	8.08×10^{-5}	4.26	8.08×10^{-5}	4.27	8.08×10^{-5}	4.26
0.5	4.20×10^{-6}	3.97	4.20×10^{-6}	3.98	4.20×10^{-6}	3.97
0.2	1.11×10^{-7}	2.87	1.10×10^{-7}	2.96	1.11×10^{-7}	2.87
0.1	1.51×10^{-8}		1.41×10^{-8}		1.51×10^{-8}	
	KDAM1		**KDAM2**		**KDAM3**	
h	L_∞	Mertebe	L_∞	Mertebe	L_∞	Mertebe
2	2.57×10^{-3}	4.99	2.57×10^{-3}	4.99	2.57×10^{-3}	4.99
1	8.07×10^{-5}	4.27	8.07×10^{-5}	4.27	8.07×10^{-5}	4.27
0.5	4.19×10^{-6}	4.06	4.19×10^{-6}	4.06	4.19×10^{-6}	4.06
0.2	1.02×10^{-7}	4.01	1.01×10^{-7}	4.07	1.02×10^{-7}	4.01
0.1	6.32×10^{-9}		6.02×10^{-9}		6.32×10^{-9}	

Çizelge 3.3.'den görüldüğü gibi, zaman artımı mümkün olduğu kadar küçültülüp, konum artımı azalan değerler aldığında yöntemlerin hata normları oldukça azalmıştır. Yine Adams Moulton yöntemleri, Crank Nicolson yöntemlerine göre iyi sonuçlar vermişlerdir.

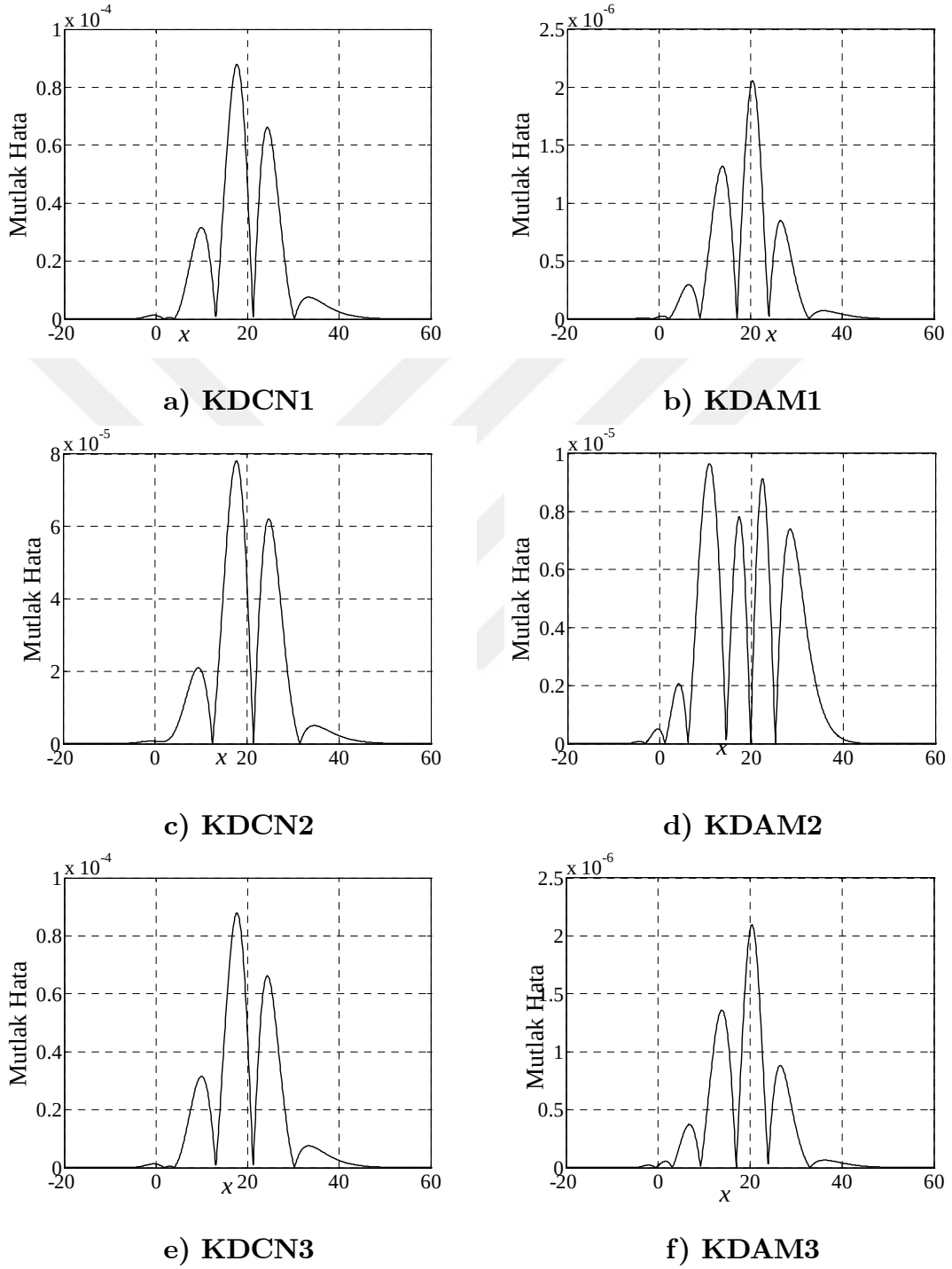
$h = 0.01$ seçimi yapılarak zaman artımının azalan değerleri için her bir önerilen metodun kullanımı sonucunda elde edilen hata normu ve mertebeler Çizelge 3.4.'de verilmiştir.

Çizelge 3.4. Sabit $h = 0.01$ ve farklı zaman artımları için hata normları ve mertebeler

	KDCN1		**KDCN2**		**KDCN3**	
Δt	L_∞	Mertebe	L_∞	Mertebe	L_∞	Mertebe
2	2.97×10^{-2}	1.82	2.68×10^{-2}	1.84	3.10×10^{-2}	1.85
1	8.40×10^{-3}	1.96	7.49×10^{-3}	1.96	8.56×10^{-3}	1.97
0.5	2.17×10^{-3}	1.99	1.93×10^{-3}	1.99	2.18×10^{-3}	1.99
0.2	3.51×10^{-4}	2.00	3.12×10^{-4}	2.00	3.51×10^{-4}	2.00
0.1	8.79×10^{-5}	2.00	7.80×10^{-5}	2.00	8.79×10^{-5}	2.00
0.05	2.20×10^{-5}	2.00	1.95×10^{-5}	2.00	2.20×10^{-5}	2.00
0.02	3.52×10^{-6}	2.00	3.12×10^{-6}	2.00	3.52×10^{-6}	2.00
0.01	8.79×10^{-7}		7.81×10^{-7}		8.79×10^{-7}	
	KDAM1		**KDAM2**		**KDAM3**	
Δt	L_∞	Mertebe	L_∞	Mertebe	L_∞	Mertebe
2	1.58×10^{-2}	2.94	1.56×10^{-2}	2.78	1.57×10^{-2}	2.91
1	2.05×10^{-3}	3.00	2.27×10^{-3}	2.64	2.10×10^{-3}	3.00
0.5	2.56×10^{-4}	3.00	3.65×10^{-4}	2.37	2.62×10^{-4}	3.00
0.2	1.64×10^{-5}	3.00	4.15×10^{-5}	2.10	1.68×10^{-5}	3.00
0.1	2.05×10^{-6}	3.00	9.65×10^{-6}	1.95	2.09×10^{-6}	3.00
0.05	2.57×10^{-7}	2.99	2.49×10^{-6}	1.98	2.62×10^{-7}	2.99
0.02	1.66×10^{-8}	2.93	4.06×10^{-7}	1.99	1.69×10^{-8}	2.94
0.01	2.17×10^{-9}		1.02×10^{-7}		2.20×10^{-9}	

Çizelge 3.4.'den, sabit $h = 0.01$ ve farklı zaman artımları için hata normlarının değerlerinin Çizelge 3.1.'dekiler ile uyumlu olduğu görülebilir. Ayrıca Crank-Nicolson yöntemlerinin kuadratik, Adams Moulton yöntemlerininse kübik mertebelere sahip olduklarını söyleyebiliriz.

Şekil 3.2.'de ise her bir metot için $h = \Delta t = 0.1$ olarak konum ve zaman artımı seçildiğinde $t = 20$ anında bulunan mutlak hataları gösteren şekiller verilmiştir.



Şekil 3.2. $h = \Delta t = 0.1$ için mutlak hata grafikleri

Şekil 3.2.'de görüldüğü gibi, her bir yöntemin maksimum hatası konum aralığının ortalarındadır ve Çizelge 3.1. ile uyumludur.

3.4.2 İki solitary dalgasının çarpışması test problemi

Bu bölümde $k_i = \sqrt{\dfrac{\varepsilon c_i}{4\mu\,(1+\varepsilon c_i)}}, i = 1, 2$ olmak üzere giriş kısmında da verilen

$$u(x,0) = 3c_1 \mathrm{sech}^2(k_1[x-\tilde{x}_1]) + 3c_2 \mathrm{sech}^2(k_2[x-\tilde{x}_2]),$$

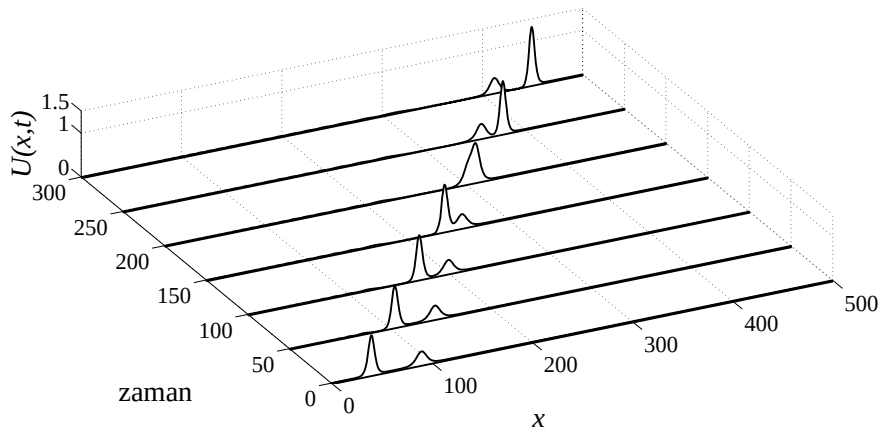
başlangıç şartı kullanılarak iki solitary dalgasının çarpışması test problemi üzerinde çalışılacaktır. Çarpışmanın gerçekleşebilmesi için $0 \leq x \leq 500$ konum aralığında $\varepsilon = \mu = 1$, $c_1 = 0.3$, $c_2 = 0.1$, $\tilde{x}_1 = 40$ ve $\tilde{x}_2 = 90$ değerleri kullanılarak programlar çalıştırılmıştır. Bu durumda genlik değerleri sırasıyla 0.9 ve 0.3 tepe noktaları ise $x = 40$ ve 90 değerlerine karşılık gelen iki solitary dalga elde edilmiştir.

Bu durumda korunum sabitlerinin analitik değerleri

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{6c_1}{k_1} + \frac{6c_2}{k_2} \simeq 11.4739473465046 \\
C_2 &= \frac{12c_1^2}{k_1} + \frac{48k_1c_1^2\mu}{5} + \frac{12c_2^2}{k_2} + \frac{48k_2c_2^2\mu}{5} \simeq 5.5143871404033, \\
C_3 &= \frac{36c_1^2}{k_1}\left(1+\frac{4c_1}{5}\right) + \frac{36c_2^2}{k_2}\left(1+\frac{4c_2}{5}\right) \simeq 19.3056100758906
\end{aligned}$$

olarak hesaplanabilir.

$h = \Delta t = 0.1$ seçimi yapılarak belirli zamanlardaki dalganın konumunu gösteren şekil sadece KDCN1 metodu için Şekil 3.3.'de verilmiştir. Şeklin sadece bir metot için çizilmesinin sebebi, diğer metotlar için çizilen şekillerle bu şekil arasında görsel bir fark olmamasından kaynaklanmaktadır. Şekilden de görüldüğü gibi dalgalar $t = 200$ zamanı civarında çarpışmış ve daha sonra ayrılarak şekillerinde bir bozulma gözlemlenmeden yollarına devam etmişlerdir.



Şekil 3.3. $h = \Delta t = 0.1$ için çeşitli zamanlardaki $U(x,t)$.

Çizelge 3.5.'de iki solitary dalgasının çarpışması test problemi için her bir önerilen metot sonucunda elde edilen korunum sabitlerinin belirli zamanlardaki yaklaşık değerleri verilmiştir. Çizelge 3.5.'den de görüldüğü gibi korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri, daha önce hesaplanan analitik değerleri ile uyumludur.

Çizelge 3.5. İki solitary dalgasının çarpışması problemi için korunum sabitleri

	KDCN1			**KDAM1**		
t	C_1	C_2	C_3	C_1	C_2	C_3
0	11.47395	5.51409	19.30565	11.47395	5.51409	19.30565
50	11.47395	5.51409	19.30566	11.47395	5.51463	19.30777
100	11.47395	5.51409	19.30566	11.47395	5.51518	19.30989
150	11.47395	5.51418	19.30582	11.47395	5.51573	19.31197
200	11.47395	5.51492	19.30733	11.47395	5.51627	19.31346
250	11.47395	5.51453	19.30653	11.47395	5.51633	19.31400
300	11.47395	5.51412	19.30571	11.47395	5.51672	19.31588
	KDCN2			**KDAM2**		
0	11.47395	5.51409	19.30565	11.47395	5.51409	19.30565
50	11.47395	5.51408	19.30564	11.47395	5.51463	19.30777
100	11.47395	5.51408	19.30563	11.47395	5.51517	19.30986
150	11.47395	5.51404	19.30531	11.47395	5.51562	19.31155
200	11.47395	5.51361	19.30230	11.47395	5.51518	19.30925
250	11.47395	5.51384	19.30389	11.47395	5.51577	19.31183
300	11.47395	5.51407	19.30552	11.47395	5.51668	19.31573
	KDCN3			**KDAM3**		
0	11.47395	5.51409	19.30565	11.47395	5.51409	19.30565
50	11.47395	5.51409	19.30565	11.47395	5.51463	19.30776
100	11.47395	5.51409	19.30566	11.47395	5.51517	19.30988
150	11.47395	5.51417	19.30581	11.47395	5.51573	19.31196
200	11.47395	5.51491	19.30731	11.47395	5.51627	19.31344
250	11.47395	5.51453	19.30651	11.47395	5.51633	19.31399
300	11.47395	5.51412	19.30570	11.47395	5.51672	19.31586

4. RLW DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ İÇİN TRİGONOMETRİK KÜBİK B-SPLİNE GALERKİN YÖNTEMİ

Bu bölümde kübik trigonometrik B-spline Galerkin yöntemi ile RLW denkleminin sayısal çözümlerinin bulunması amaçlanmıştır. Bir önceki bölümde olduğu gibi bu bölümde de sayısal çözüm araştırılırken zaman parçalanması için Crank-Nicolson yöntemi ve Crank-Nicolson yöntemine göre doğruluğu daha yüksek olan Adams Moulton yöntemi önerilmiştir. Konum ayrıştırılması için ise kübik trigonometrik B-spline Galerkin yöntemi önerilmiştir. Yöntemlerin uygulanması sonucunda 3 farklı lineerleştirme kullanılmış ve böylece 6 farklı yöntem ile sayısal çözüm araştırılmıştır. Önerilen her yöntemin sonunda RLW denklemi cebirsel bir denklem sistemine dönüştürülmüştür. Cebirsel denklem sistemleri Thomas algoritması yardımı ile çözülerek sistemin bilinmeyenleri elde edilmiş ve yaklaşık çözümde yerine yazılıp yaklaşık çözüm belirlenmiştir. Sayısal çözümün doğruluğu ise iki test problemi için incelenmiştir.

4.1. İç İterasyonlu Lineerleştirme

Bu bölümde lineerleştirme işlemi için iç iterasyon yapılacaktır.

4.1.1. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson yöntemi (KBCN1)

Bir önceki bölümde RLW denkleminde Crank-Nicolson yöntemi kullanılarak zaman parçalanması uygulanmış ve bulunan eşitlik düzenlenerek,

$$u^{n+1}+\frac{\Delta t}{2}\left(u_x\right)^{n+1}+\frac{\Delta t\varepsilon}{2}u^{n+1}\left(u_x\right)^{n+1}-\mu\left(u_{xx}\right)^{n+1}=u^n-\mu\left(u_{xx}\right)^n$$
$$-\frac{\Delta t}{2}\left(u_x\right)^n-\frac{\Delta t\varepsilon}{2}u^n\left(u_x\right)^n$$

formundaki (3.8) eşitliği elde edilmiştir. $W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere, (3.8) eşitliğine Galerkin metodu uygulanarak,

$$\int_a^b W(x)\left(u^{n+1}+\frac{\Delta t}{2}\left(u_x\right)^{n+1}+\frac{\Delta t\varepsilon}{2}u^{n+1}\left(u_x\right)^{n+1}-\mu\left(u_{xx}\right)^{n+1}\right)dx=$$
$$\int_a^b W(x)\left(u^n-\mu\left(u_{xx}\right)^n-\frac{\Delta t}{2}\left(u_x\right)^n-\frac{\Delta t\varepsilon}{2}u^n\left(u_x\right)^n\right)dx$$

(3.9) eşitliği elde edilmiştir. Bu bölümde Galerkin yönteminde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x, u_{xx} yerine T_m trigonometrik kübik B-spline fonksiyonları kullanılacaktır.

$[a,b]$ konum aralığı N eşit uzunluklu alt aralığa parçalanırsa, $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x, u_{xx} yerine T_m trigonometrik kübik B-spline fonksiyonları kullanıldığında (3.9) eşitliğinin düzenlenmiş formu olan

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=m-1}^{m+2}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)\delta_j^{n+1} - \mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j'' dx\right)\delta_j^{n+1}\right.\\
&\left.+\frac{\Delta t}{2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\delta_j^{n+1} + \frac{\Delta t\varepsilon}{2}\sum_{k=m-1}^{m+2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n+1}\right)T_j' dx\right)\delta_j^{n+1}\right\}\\
&-\sum_{j=m-1}^{m+2}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)\delta_j^{n} - \mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j'' dx\right)\delta_j^{n}\right.\\
&\left.-\frac{\Delta t}{2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\delta_j^{n} - \frac{\Delta t\varepsilon}{2}\sum_{k=m-1}^{m+2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n}\right)T_j' dx\right)\delta_j^{n}\right\}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

yaklaşımı elde edilir. Bu yaklaşım $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde olup $m = 0, 1, \ldots, N-1$ değerleri için her bir aralıktaki yaklaşımlar birleştirildiğinde (3.9) eşitliğine dönecektir.

(4.1) yaklaşımında $\xi = x - x_m$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=m-1}^{m+2}\left\{\left(\int_{0}^{h} T_iT_j d\xi\right)\delta_j^{n+1} - \mu\left(\int_{0}^{h} T_iT_j'' d\xi\right)\delta_j^{n+1}\right.\\
&\left.+\frac{\Delta t}{2}\left(\int_{0}^{h} T_iT_j' d\xi\right)\delta_j^{n+1} + \frac{\Delta t\varepsilon}{2}\sum_{k=m-1}^{m+2}\left(\int_{0}^{h} T_iT_k\left(\delta_k^{n+1}\right)T_j' d\xi\right)\delta_j^{n+1}\right\}\\
&-\sum_{j=m-1}^{m+2}\left\{\left(\int_{0}^{h} T_iT_j d\xi\right)\delta_j^{n} - \mu\left(\int_{0}^{h} T_iT_j'' d\xi\right)\delta_j^{n}\right.\\
&\left.-\frac{\Delta t}{2}\left(\int_{0}^{h} T_iT_j' d\xi\right)\delta_j^{n} - \frac{\Delta t\varepsilon}{2}\sum_{k=m-1}^{m+2}\left(\int_{0}^{h} T_iT_k\left(\delta_k^{n}\right)T_j' d\xi\right)\delta_j^{n}\right\}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

ifadesi elde edilir. (4.2) ifadesindeki integralleri hesaplamak için 2. bölümde elde edilen $T_{m-1}, T_m, T_{m+1}, T_{m+2}$ trigonometrik kübik B-spline eşitlikleri kullanılacaktır. Bu durumda her bir alt aralıktaki eleman matrislerinin her bir elemanı i, j, k ; $m-1, m, m+1, m+2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
A_{ij}^e &= \int_0^h T_iT_j d\xi, \quad B_{ij}^e = \int_0^h T_iT_j' d\xi, \\
C_{ij}^e(\boldsymbol{\delta}^n) &= \int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' d\xi, \quad D_{ij}^e = \int_0^h T_iT_j'' d\xi
\end{aligned} \tag{4.3}$$

olarak alınabilir. (4.3) ifadesinde verilen $\mathbf{A}^e$ eleman matrisi

$$\mathbf{A}^e = \begin{bmatrix} A_{m-1,m-1} & A_{m-1,m} & A_{m-1,m+1} & A_{m-1,m+2} \\ A_{m,m-1} & A_{m,m} & A_{m,m+1} & A_{m,m+2} \\ A_{m+1,m-1} & A_{m+1,m} & A_{m+1,m+1} & A_{m+1,m+2} \\ A_{m+2,m-1} & A_{m+2,m} & A_{m+2,m+1} & A_{m+2,m+2} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Matrisin her bir elemanı için gerekli olan integrallerin hesaplanmasında trigonometrik kübik B-spline eşitlikleri kullanılır. $\mathbf{B}^e$ ve $\mathbf{D}^e$ matrislerinin hesaplanması da benzer şekilde yapılır. $\mathbf{C}^e$ elaman matrisi ise integraldeki T_k nedeniyle diğer matrislerden farklı şekilde bulunur. Bu matrisin her bir elemanında k indisinin $m-1, m, m+1, m+2$ adımlarından kaynaklanan dörder elemanı daha olacaktır. $\mathbf{C}^e$ eleman matrisinin ilk elemanını örnek olarak gösterecek olursak $i = j = m-1$ alındığında

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^e_{m-1m-1}(\boldsymbol{\delta}^n) &= \int_0^h T_{m-1}T_{m-1}\left(\delta^n_{m-1}\right)T'_{m-1}d\xi + \int_0^h T_{m-1}T_m\left(\delta^n_m\right)T'_{m-1}d\xi \\ &\quad + \int_0^h T_{m-1}T_{m+1}\left(\delta^n_{m+1}\right)T'_{m-1}d\xi + \int_0^h T_{m-1}T_{m+2}\left(\delta^n_{m+2}\right)T'_{m-1}d\xi \end{aligned}$$

bulunur. Bu bulduğumuz eşitlik, k indisinin değerleri için $\mathbf{C}^e$ eleman matrisinin sadece ilk elemanıdır. Bulunan eleman matrislerinin $m = 0, 1, \ldots, N-1$ için uygun şekilde birbirlerine eklenmesi sonucunda,

$$\boldsymbol{\delta} = (\delta_{-1}, \delta_0, \ldots, \delta_N, \delta_{N+1})^T$$

olmak üzere (4.2) ifadesinden,

$$\left[\mathbf{A}-\mu\mathbf{D}+\frac{\Delta t}{2}\mathbf{B}+\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n+1}\right)\right]\boldsymbol{\delta}^{n+1} = \left[\mathbf{A}-\mu\mathbf{D}-\frac{\Delta t}{2}\mathbf{B}-\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n}\right)\right]\boldsymbol{\delta}^{n} \qquad (4.4)$$

elde edilir.

(4.4) denklem sistemi $N+3$ denklem ve $N+3$ bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. Sınır şartlarını sisteme adapte edebilmek için denklem sistemindeki ilk ve son denklemler silinerek bölgenin uç noktalarındaki

$$u(a,t) = u(b,t) = 0$$

sınır şartları kullanılarak δ_{-1}^{n+1} ve δ_{N+1}^{n+1} yok edilirse (4.4) denklem sistemi $(N+1)\times(N+1)$ matris sistemine indirgenmiş olur. Ulaşılan denklem sistemi 7'li Thomas algoritması yardımıyla çözülebilir.

RLW denkleminin trigonometrik kübik B-spline Galerkin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken elde edilen denklem sisteminin çözülebilmesi için

$$\left(\delta_{-1}^{0},\delta_{0}^{0},\ldots,\delta_{N}^{0},\delta_{N+1}^{0}\right)$$

başlangıç vektörünün bulunması gerekir. Bunun için RLW denkleminin başlangıç şartı olan

$$u\left(x,0\right)=f\left(x\right)$$

ve kübik trigonometrik B-spline eşitlikleri kullanılabilir.

4.1.2. Zaman parçalanması için Adams Moulton yöntemi (KBAM1)

Bir önceki bölümde RLW denklemine $\theta_1=5/12,\theta_2=2/3,\theta_3=-1/12$ seçimleri ile Adams Moulton zaman parçalanması uygulanmış ve elde edilen eşitliğe Galerkin yöntemi uygulanarak aşağıdaki (3.16),

$$\begin{aligned}&\int_{a}^{b}W(x)\left(u^{n+1}+\theta_1\Delta t\left(u_x\right)^{n+1}+\theta_1\Delta t\varepsilon u^{n+1}\left(u_x\right)^{n+1}-\mu\left(u_{xx}\right)^{n+1}\right)dx=\\&\int_{a}^{b}W(x)\left(u^{n}-\mu\left(u_{xx}\right)^{n}-\theta_2\Delta t\left(u_x\right)^{n}-\theta_2\Delta t\varepsilon u^{n}\left(u_x\right)^{n}-\theta_3\Delta t\left(u_x\right)^{n-1}\right.\\&\left.-\theta_3\Delta t\varepsilon u^{n-1}\left(u_x\right)^{n-1}\right)dx\end{aligned}$$

eşitliği elde edilmiştir. Bu bölümde Galerkin yönteminde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x, u_{xx} yerine T_m trigonometrik B-spline fonksiyonları kullanılacaktır.

$[a,b]$ konum aralığı N eşit uzunluklu alt aralığa parçalanırsa, $[x_m,x_{m+1}]$ aralığı üzerinde $W\left(x\right)$ ağırlık fonksiyonu ve u,u_x,u_{xx} yerine T_m trigonometrik kübik B-spline fonksiyonları kullanıldığında (3.16) eşitliğinin düzenlenmiş formu olan

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=m-1}^{m+2}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)-\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j'' dx\right)\right.\\
&\left.+\theta_1\Delta t\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)+\theta_1\Delta t\varepsilon\sum_{j=m-1}^{m+2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n+1}\right)T_j' dx\right)\right\}\delta_j^{n+1}\\
&-\sum_{j=m-1}^{m+2}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)-\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j'' dx\right)-\theta_2\Delta t\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\right.\\
&\left.-\theta_2\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-1}^{m+2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n}\right)T_j' dx\right)\right\}\delta_j^{n}\\
&+\sum_{j=m-1}^{m+2}\theta_3\Delta t\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)+\varepsilon\sum_{k=m-1}^{m+2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' dx\right)\right\}\delta_j^{n-1}
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

yaklaşımı elde edilir. Bu yaklaşım $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde olup $m = 0, 1, \ldots, N-1$ değerleri için her bir aralıktaki yaklaşımlar birleştirildiğinde (3.16) eşitliğine dönecektir.

(4.5) ifadesinde $\xi = x - x_m$ dönüşümü yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=m-1}^{m+2}\left\{\left(\int_0^h T_iT_j d\xi\right)-\mu\left(\int_0^h T_iT_j'' d\xi\right)\right.\\
&\left.+\theta_1\Delta t\left(\int_0^h T_iT_j' d\xi\right)+\theta_1\Delta t\varepsilon\sum_{j=m-1}^{m+2}\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^{n+1}\right)T_j' d\xi\right)\right\}\delta_j^{n+1}\\
&-\sum_{j=m-1}^{m+2}\left\{\left(\int_0^h T_iT_j d\xi\right)-\mu\left(\int_0^h T_iT_j'' d\xi\right)-\theta_2\Delta t\left(\int_0^h T_iT_j' d\xi\right)\right.\\
&\left.-\theta_2\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-1}^{m+2}\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^{n}\right)T_j' d\xi\right)\right\}\delta_j^{n}\\
&+\sum_{j=m-1}^{m+2}\theta_3\Delta t\left\{\left(\int_0^h T_iT_j' d\xi\right)+\varepsilon\sum_{k=m-1}^{m+2}\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' d\xi\right)\right\}\delta_j^{n-1}
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

yaklaşımı elde edilir. (4.6) yaklaşımındaki integralleri hesaplamak için 2. bölümde elde edilen $T_{m-1}, T_m, T_{m+1}, T_{m+2}$ trigonometrik kübik B-spline eşitlikleri kullanılacaktır. Bu durumda her bir alt aralıktaki eleman matrislerinin her bir elemanı i, j, k ; $m-1, m, m+1, m+2$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
A_{ij}^e &= \int_0^h T_iT_j d\xi, \quad B_{ij}^e = \int_0^h T_iT_j' d\xi, \\
C_{ij}^e(\boldsymbol{\delta}^n) &= \int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' d\xi, \quad D_{ij}^e = \int_0^h T_iT_j'' d\xi
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

olarak alınabilir. (4.7) ifadesiyle gösterilen tüm matrisler Crank-Nicolson yönteminde anlatıldığı şekilde hesaplanır. Elde edilen tüm eleman matrislerinin $m = 0, 1, \ldots, N-1$ için uygun şekilde birbirlerine eklenmesi sonucunda,

$$\boldsymbol{\delta} = (\delta_{-1}, \delta_0, \ldots, \delta_N, \delta_{N+1})^T$$

olmak üzere (4.6) yaklaşımından

$$\begin{aligned} &\left[\mathbf{A} - \mu\mathbf{D} + \theta_1 \Delta t \mathbf{B} + \theta_1 \Delta t \varepsilon \mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n+1}\right)\right] \boldsymbol{\delta}^{n+1} = \\ &\left[\mathbf{A} - \mu\mathbf{D} - \theta_2 \Delta t \mathbf{B} - \theta_2 \Delta t \varepsilon \mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n}\right)\right] \boldsymbol{\delta}^{n} \\ &- \left[\theta_3 \Delta t \mathbf{B} + \theta_3 \Delta t \varepsilon \mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)\right] \boldsymbol{\delta}^{n-1} \end{aligned} \tag{4.8}$$

eşitliği elde edilir.

(4.8) denklem sistemi $(N+3)$ denklem ve $(N+3)$ bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. Sınır şartlarını sisteme adapte edebilmek için denklem sistemindeki ilk ve son denklem silinerek bölgenin uç noktalarındaki

$$u(a,t) = u(b,t) = 0$$

sınır şartları kullanılarak δ_{-1}^{n+1} ve δ_{N+1}^{n+1} yok edilirse (4.8) denklem sistemi $(N+1)\times(N+1)$ matris sistemine indirgenmiş olur. Ulaşılan denklem sistemi Thomas algoritması yardımıyla çözülebilir.

RLW denkleminin trigonometrik kübik B-spline Galerkin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken elde edilen (4.8) denklem sisteminin çözülebilmesi için

$$\left(\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \ldots, \delta_{N+1}^0\right)$$

başlangıç vektörü ve

$$\left(\delta_{-1}^1, \delta_0^1, \ldots, \delta_{N+1}^1\right)$$

vektörünün bulunması gerekmektedir. Başlangıç vektörü başlangıç şartından bulunabilirken,

$$\left(\delta_{-1}^1, \delta_0^1, \ldots, \delta_{N+1}^1\right)$$

vektörünün bulunabilmesi için ise Crank Nicolson programda bir kez çalıştırılmalıdır.

4.2. Lineerleştirme 1

Bu bölümde lineerleştirme işlemi için Rubin Graves lineerleştirmesi uygulanacaktır.

4.2.1. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson yöntemi (KBCN2)

Bir önceki bölümde RLW denklemine Crank-Nicolson zaman parçalanması uygulanmış, elde edilen eşitlikteki $(n+1)$. zamana göre lineer olmayan terime Rubin Graves lineerleştirmesi yapılmış ve aşağıdaki (3.22)

$$u^{n+1}+\frac{\Delta t}{2}u_x^{n+1}+\frac{\varepsilon\Delta t}{2}(u^n u_x^{n+1}+u_x^n u^{n+1})-\mu u_{xx}^{n+1}=u^n-\frac{\Delta t}{2}u_x^n-\mu u_{xx}^n$$

eşitliği elde edilmiştir. $W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere (3.22) eşitliğine Galerkin metodu uygulanmış ve

$$\int_a^b W(x)\left(u^{n+1}+\frac{\Delta t}{2}u_x^{n+1}+\frac{\varepsilon\Delta t}{2}(u^n u_x^{n+1}+u_x^n u^{n+1})-\mu u_{xx}^{n+1}\right)dx=$$
$$\int_a^b W(x)\left(u^n-\frac{\Delta t}{2}u_x^n-\mu u_{xx}^n\right)dx$$

(3.23) eşitliği elde edilmiştir. Bu bölümde Galerkin yönteminde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x, u_{xx} yerine T_m trigonometrik B-spline fonksiyonları kullanılacaktır.

$[a,b]$ konum aralığı N eşit uzunluklu alt aralığa parçalanırsa, $[x_m,x_{m+1}]$ aralığı üzerinde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x, u_{xx} yerine T_m trigonometrik kübik B-spline fonksiyonları kullanıldığında (3.23) eşitliğinin düzenlenmiş formu olan

$$\begin{aligned}&\sum_{j=m-1}^{m+2}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}}T_iT_j dx\right)\delta_j^{n+1}+\frac{\Delta t}{2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}}T_iT_j' dx\right)\delta_j^{n+1}-\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}}T_iT_j'' dx\right)\delta_j^{n+1}\right.\\&\left.+\frac{\varepsilon\Delta t}{2}\sum_{k=m-1}^{m+2}\left[\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}}T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' dx\right)\delta_j^{n+1}+\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}}T_iT_k'\left(\delta_k^n\right)T_j dx\right)\delta_j^{n+1}\right]\right\}\\&-\sum_{j=m-1}^{m+2}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}}T_iT_j dx\right)\delta_j^{n}-\frac{\Delta t}{2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}}T_iT_j' dx\right)\delta_j^{n}-\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}}T_iT_j'' dx\right)\delta_j^{n}\right\}\end{aligned}\qquad(4.9)$$

yaklaşımı elde edilir. Bu yaklaşım $[x_m,x_{m+1}]$ aralığı üzerinde olup $m=0,1,\ldots,N-1$ değerleri için her bir aralıktaki yaklaşımlar birleştirildiğinde (3.23) eşitliğine dönecektir.

(4.9) ifadesinde $\xi = x - x_m$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=m-1}^{m+2}\left\{\left(\int_0^h T_i T_j d\xi\right)\delta_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{2}\left(\int_0^h T_i T_j' d\xi\right)\delta_j^{n+1} - \mu\left(\int_0^h T_i T_j'' d\xi\right)\delta_j^{n+1}\right. \\
&\left. + \frac{\varepsilon\Delta t}{2}\sum_{k=m-1}^{m+2}\left[\left(\int_0^h T_i T_k\left(\delta_k^n\right) T_j' d\xi\right)\delta_j^{n+1} + \left(\int_0^h T_i T_k'\left(\delta_k^n\right) T_j d\xi\right)\delta_j^{n+1}\right]\right\} \\
&- \sum_{j=m-1}^{m+2}\left\{\left(\int_0^h T_i T_j d\xi\right)\delta_j^{n} - \frac{\Delta t}{2}\left(\int_0^h T_i T_j' d\xi\right)\delta_j^{n} - \mu\left(\int_0^h T_i T_j'' d\xi\right)\delta_j^{n}\right\}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

ifadesi elde edilir. (4.10) ifadesindeki integralleri hesaplamak için 2. bölümde elde edilen $T_{m-1}, T_m, T_{m+1}, T_{m+2}$ trigonometrik kübik B-spline eşitlikleri kullanılacaktır. Bu durumda her bir alt aralıktaki eleman matrislerinin her bir elemanı i, j, k ; $m-1, m, m+1, m+2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
&A_{ij}^e = \int_0^h T_i T_j d\xi, \quad B_{ij}^e = \int_0^h T_i T_j' d\xi, \quad C_{ij}^e\left(\boldsymbol{\delta}^n\right) = \int_0^h T_i T_k\left(\delta_k^n\right) T_j' d\xi, \\
&D_{ij}^e = \int_0^h T_i T_j'' d\xi, \quad E_{ij}^e\left(\boldsymbol{\delta}^n\right) = \int_0^h T_i T_k'\left(\delta_k^n\right) T_j d\xi
\end{aligned} \tag{4.11}$$

olarak alınabilir. (4.11) ifadesinde gösterilen tüm matrisler bu bölümün başındaki Crank-Nicolson yönteminde anlatıldığı şekilde hesaplanır. Elde edilen tüm eleman matrislerinin $m = 0, 1, \ldots, N-1$ için uygun şekilde birbirlerine eklenmesi sonucunda,

$$\boldsymbol{\delta} = \left(\delta_{-1}, \delta_0, \ldots, \delta_N, \delta_{N+1}\right)^T$$

olmak üzere (4.10) yaklaşımından

$$\left[\mathbf{A} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{B} + \varepsilon\frac{\Delta t}{2}\left(\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^n\right) + \mathbf{E}\left(\boldsymbol{\delta}^n\right)\right) - \mu\mathbf{D}\right]\boldsymbol{\delta}^{n+1} = \left[\mathbf{A} - \frac{\Delta t}{2}\mathbf{B} - \mu\mathbf{D}\right]\boldsymbol{\delta}^n \tag{4.12}$$

elde edilir.

(4.12) denklem sistemi $(N+3)$ denklem ve $(N+3)$ bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. Sınır şartlarını sisteme adapte edebilmek için denklem sistemindeki ilk ve son denklem silinerek bölgenin uç noktalarındaki

$$u(a,t) = u(b,t) = 0$$

sınır şartları kullanılarak δ_{-1}^{n+1} ve δ_{N+1}^{n+1} yok edilirse (4.12) denklem sistemi $(N+1) \times (N+1)$ matris sistemine indirgenmiş olur. Ulaşılan denklem sistemi 7'li Thomas algoritması yardımıyla çözülebilir.

RLW denkleminin trigonometrik kübik B-spline Galerkin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken elde edilen denklem sisteminin çözülebilmesi için

$$\left(\delta_{-1}^{0}, \delta_{0}^{0}, \ldots, \delta_{N+1}^{0}\right)$$

başlangıç vektörünün bulunması gerekir. Bunun için RLW denkleminin başlangıç şartı olan

$$u\left(x,0\right) = f\left(x\right)$$

ve kübik trigonometrik B-spline eşitlikleri kullanılabilir.

4.2.2. Zaman parçalanması için Adams Moulton yöntemi (KBAM2)

Bir önceki bölümde RLW denklemine Adams Moulton zaman parçalanması uygulanmış, elde edilen eşitlikteki $(n+1)$. zamana göre lineer olmayan terime Rubin Graves lineerleştirmesi yapılmış ve aşağıdaki

$$u^{n+1} + \theta_1 \Delta t \left(u_x\right)^{n+1} + \theta_1 \Delta t \varepsilon \left(u^n (u_x)^{n+1} + (u_x)^n u^{n+1}\right) - \mu \left(u_{xx}\right)^{n+1} = u^n - \mu \left(u_{xx}\right)^n$$

$$-\theta_2 \Delta t \left(u_x\right)^n + (\theta_1 \Delta t \varepsilon - \theta_2 \Delta t \varepsilon) u^n \left(u_x\right)^n - \theta_3 \Delta t ((u_x)^{n-1} + \varepsilon u^{n-1} \left(u_x\right)^{n-1})$$

(3.28) eşitliği elde edilmiştir. $W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere (3.28) eşitliğine Galerkin metodu uygulanarak,

$$\int_a^b W(x) \left(u^{n+1} + \theta_1 \Delta t \left(u_x\right)^{n+1} + \theta_1 \Delta t \varepsilon \left(u^n (u_x)^{n+1} + (u_x)^n u^{n+1}\right) - \mu \left(u_{xx}\right)^{n+1}\right) dx =$$

$$\int_a^b W(x) \left(u^n - \mu \left(u_{xx}\right)^n - \theta_2 \Delta t \left(u_x\right)^n + (\theta_1 \Delta t \varepsilon - \theta_2 \Delta t \varepsilon) u^n \left(u_x\right)^n - \theta_3 \Delta t ((u_x)^{n-1}\right.$$

$$\left. + \varepsilon u^{n-1} \left(u_x\right)^{n-1})\right) dx$$

(3.29) eşitliği elde edilmiştir.

$[a,b]$ konum aralığı N eşit uzunluklu alt aralığa parçalanırsa, $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde $W\left(x\right)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x, u_{xx} yerine T_m trigonometrik kübik B-spline fonksiyonları kullanıldığında (3.29) eşitliğinin düzenlenmiş formu olan,

$$\sum_{j=m-1}^{m+2}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)-\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j'' dx\right)+\theta_1\Delta t\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\right.$$
$$\left.+\theta_1\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-1}^{m+2}\left[\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' dx\right)+\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k'\left(\delta_k^n\right)T_j dx\right)\right]\right\}\delta_j^{n+1}$$
$$-\sum_{j=m-1}^{m+2}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)-\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j'' dx\right)-\theta_2\Delta t\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\right. \tag{4.13}$$
$$\left.+\sum_{k=m-1}^{m+2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' dx\right)\left(\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_2\Delta t\varepsilon\right)\right\}\delta_j^n$$
$$+\sum_{j=m-1}^{m+2}\theta_3\Delta t\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)+\varepsilon\sum_{k=m-1}^{m+2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' dx\right)\right\}\delta_j^{n-1}$$

yaklaşımı elde edilir. Bu yaklaşım $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde olup $m = 0, 1, \ldots, N-1$ değerleri için her bir aralıktaki yaklaşımlar birleştirildiğinde (3.29) eşitliğine dönecektir.

(4.13) ifadesinde $\xi = x - x_m$ dönüşümü yapılırsa,

$$\sum_{j=m-1}^{m+2}\left\{\left(\int_0^h T_iT_j d\xi\right)-\mu\left(\int_0^h T_iT_j'' d\xi\right)+\theta_1\Delta t\left(\int_0^h T_iT_j' d\xi\right)\right.$$
$$\left.+\theta_1\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-1}^{m+2}\left[\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' d\xi\right)+\left(\int_0^h T_iT_k'\left(\delta_k^n\right)T_j d\xi\right)\right]\right\}\delta_j^{n+1}$$
$$-\sum_{j=m-1}^{m+2}\left\{\left(\int_0^h T_iT_j d\xi\right)-\mu\left(\int_0^h T_iT_j'' d\xi\right)-\theta_2\Delta t\left(\int_0^h T_iT_j' d\xi\right)\right. \tag{4.14}$$
$$\left.+\sum_{k=m-1}^{m+2}\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' d\xi\right)\left(\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_2\Delta t\varepsilon\right)\right\}\delta_j^n$$
$$+\sum_{j=m-1}^{m+2}\theta_3\Delta t\left\{\left(\int_0^h T_iT_j' d\xi\right)+\varepsilon\sum_{k=m-1}^{m+2}\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' d\xi\right)\right\}\delta_j^{n-1}$$

ifadesi elde edilir. (4.14) ifadesindeki integralleri hesaplamak için 2. bölümde elde edilen $T_{m-1}, T_m, T_{m+1}, T_{m+2}$ trigonometrik kübik B-spline eşitlikleri kullanılacaktır. Bu durumda her bir alt aralıktaki eleman matrislerinin her bir elemanı i, j, k ; $m-1, m, m+1, m+2$ olmak üzere

$$A_{ij}^e=\int_0^h T_iT_j d\xi,\quad B_{ij}^e=\int_0^h T_iT_j' d\xi,\quad C_{ij}^e\left(\boldsymbol{\delta}^n\right)=\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' d\xi, \tag{4.15}$$
$$D_{ij}^e=\int_0^h T_iT_j'' d\xi,\quad E_{ij}^e\left(\boldsymbol{\delta}^n\right)=\int_0^h T_iT_k'\left(\delta_k^n\right)T_j d\xi.$$

olarak alınabilir. (4.15) ifadesinde gösterilen tüm matrisler bu bölümün başındaki Crank-Nicolson yönteminde anlatıldığı şekilde hesaplanır. Elde edilen tüm eleman matrislerinin $m = 0, 1, \ldots, N-1$ için uygun şekilde birbirlerine eklenmesi sonucunda,

$$\boldsymbol{\delta} = (\delta_{-1}, \delta_0, \ldots, \delta_N, \delta_{N+1})^T$$

olmak üzere (4.14) ifadesinden

$$\begin{aligned} &[\mathbf{A} - \mu\mathbf{D} + \theta_1 \Delta t \varepsilon \left(\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{n}}\right) + \mathbf{E}\left(\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{n}}\right)\right) + \theta_1 \Delta t \mathbf{B}]\, \boldsymbol{\delta}^{n+1} = \\ &[\mathbf{A} - \mu\mathbf{D} + \left(\theta_1 \Delta t \varepsilon - \theta_2 \Delta t \varepsilon\right) \mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{n}}\right) - \theta_2 \Delta t \mathbf{B}]\, \boldsymbol{\delta}^{n} \\ &- \left[\theta_3 \Delta t \mathbf{B} + \theta_3 \Delta t \varepsilon \mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{n-1}}\right)\right] \boldsymbol{\delta}^{n-1} \end{aligned} \tag{4.16}$$

elde edilir.

(4.16) denklem sistemi $(N+3)$ denklem ve $(N+3)$ bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. Sınır şartlarını sisteme adapte edebilmek için denklem sistemindeki ilk ve son denklem silinerek bölgenin uç noktalarındaki

$$u(a,t) = u(b,t) = 0$$

sınır şartları kullanılarak δ_{-1}^{n+1} ve δ_{N+1}^{n+1} yok edilirse (4.16) denklem sistemi $(N+1) \times (N+1)$ matris sistemine indirgenmiş olur. Ulaşılan denklem sistemi 7'li Thomas algoritması yardımıyla çözülebilir.

RLW denkleminin trigonometrik kübik B-spline Galerkin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken elde edilen (4.16) denklem sisteminin çözülebilmesi için

$$\left(\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \ldots, \delta_{N+1}^0\right)$$

başlangıç vektörü ve

$$\left(\delta_{-1}^1, \delta_0^1, \ldots, \delta_{N+1}^1\right)$$

vektörünün bulunması gerekmektedir. Başlangıç vektörü başlangıç şartından bulunabilirken,

$$\left(\delta_{-1}^1, \delta_0^1, \ldots, \delta_{N+1}^1\right)$$

vektörünün bulunması için Crank-Nicolson programda bir kez çalıştırılmıştır.

4.3. Lineerleştirme 2

Bu bölümde lineerleştirme işlemi için Rubin Graves lineerleştirmesine benzeyen ve doğruluğu daha yüksek olan ve üçüncü bölümde de kullanılan yeni bir lineerleştirme önerilecektir.

4.3.1. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson yöntemi (KBCN3)

RLW denklemine Crank-Nicolson zaman parçalanması uygulanmış ve elde edilen eşitliği $(n+1)$. zamana göre lineerleştirmek için alternatif bir

$$\begin{aligned}(uu_x)^{n+1} &= 2u_x^n u^{n+1} - u_x^{n-1}u^{n+1} + 2u^n u_x^{n+1} - u^{n-1}u_x^{n+1} + 2u^n u_x^{n-1} \\ &\quad +2u^{n-1}u_x^n - 4u^n u_x^n - u^{n-1}u_x^{n-1} + \mathcal{O}((\Delta t)^4)\end{aligned}$$

(3.34) lineerleştirmesi uygulanarak aşağıdaki (3.35) eşitliği

$$u^{n+1} + \frac{\Delta t}{2}(u_x)^{n+1} + \frac{\Delta t\varepsilon}{2}\left(2(u_x)^n u^{n+1} - (u_x)^{n-1}u^{n+1} + 2u^n(u_x)^{n+1} - u^{n-1}(u_x)^{n+1}\right)$$
$$-\mu(u_{xx})^{n+1} = u^n - \mu(u_{xx})^n - \frac{\Delta t}{2}(u_x)^n + u^n(u_x)^n\left(2\Delta t\varepsilon - \frac{\Delta t\varepsilon}{2}\right)$$
$$-\frac{\Delta t\varepsilon}{2}(2u^{n-1}(u_x)^n + 2(u_x)^{n-1}u^n) + \frac{\Delta t\varepsilon}{2}u^{n-1}(u_x)^{n-1}$$

elde edilmiştir. $W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere (3.35) eşitliğine Galerkin metodu uygulanarak,

$$\begin{aligned}&\int_a^b W(x)\left(u^{n+1} + \frac{\Delta t}{2}(u_x)^{n+1} - \mu(u_{xx})^{n+1} + \right. \\ &\left.\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\left(2(u_x)^n u^{n+1} - (u_x)^{n-1}u^{n+1} + 2u^n(u_x)^{n+1} - u^{n-1}(u_x)^{n+1}\right)\right)dx = \\ &\int_a^b W(x)\left(u^n - \mu(u_{xx})^n - \frac{\Delta t}{2}(u_x)^n + u^n(u_x)^n\left(2\Delta t\varepsilon - \frac{\Delta t\varepsilon}{2}\right)\right. \\ &\left.-\frac{\Delta t\varepsilon}{2}(2u^{n-1}(u_x)^n + 2(u_x)^{n-1}u^n) + \frac{\Delta t\varepsilon}{2}u^{n-1}(u_x)^{n-1}\right)dx\end{aligned}$$

(3.36) eşitliği elde edilmiştir.

$[a,b]$ konum aralığı N eşit uzunluklu alt aralığa parçalanırsa, $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x, u_{xx} yerine T_m trigonometrik kübik B-spline fonksiyonları kullanıldığında (3.36) eşitliğinin düzenlenmiş formu olan,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=m-1}^{m+2}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)-\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j'' dx\right)+\frac{\Delta t}{2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\right.\\
&+\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\sum_{k=m-1}^{m+2}\left[2\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k'\left(\delta_k^n\right)T_j dx\right)-\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k'\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j dx\right)\right.\\
&\left.\left.+2\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' dx\right)-\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' dx\right)\right]\right\}\delta_j^{n+1}\\
&-\sum_{j=m-1}^{m+2}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)-\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j'' dx\right)-\frac{\Delta t}{2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\right.\\
&+\sum_{k=m-1}^{m+2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' dx\right)\left(\frac{3\Delta t\varepsilon}{2}\right)\\
&\left.-\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\sum_{k=m-1}^{m+2}2\left[\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' dx\right)+\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k'\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j dx\right)\right]\right\}\delta_j^n\\
&-\sum_{j=m-1}^{m+2}\left\{\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\sum_{k=m-1}^{m+2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' dx\right)\right\}\delta_j^{n-1}
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

yaklaşımı elde edilir. Bu yaklaşım $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde olup $m = 0, 1, ..., N-1$ değerleri için her bir aralıktaki yaklaşımlar birleştirildiğinde (3.36) eşitliğine dönecektir.

(4.17) yaklaşımında $\xi = x - x_m$ dönüşümü yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=m-1}^{m+2}\left\{\left(\int_0^h T_iT_j d\xi\right)-\mu\left(\int_0^h T_iT_j'' d\xi\right)+\frac{\Delta t}{2}\left(\int_0^h T_iT_j' d\xi\right)\right.\\
&+\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\sum_{k=m-1}^{m+2}\left[2\left(\int_0^h T_iT_k'\left(\delta_k^n\right)T_j d\xi\right)-\left(\int_0^h T_iT_k'\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j d\xi\right)\right.\\
&\left.\left.+2\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' d\xi\right)-\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' d\xi\right)\right]\right\}\delta_j^{n+1}\\
&-\sum_{j=m-1}^{m+2}\left\{\left(\int_0^h T_iT_j d\xi\right)-\mu\left(\int_0^h T_iT_j'' d\xi\right)-\frac{\Delta t}{2}\left(\int_0^h T_iT_j' d\xi\right)\right.\\
&+\sum_{k=m-1}^{m+2}\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' d\xi\right)\left(\frac{3\Delta t\varepsilon}{2}\right)\\
&\left.-\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\sum_{k=m-1}^{m+2}2\left[\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' d\xi\right)+\left(\int_0^h T_iT_k'\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j d\xi\right)\right]\right\}\delta_j^n\\
&-\sum_{j=m-1}^{m+2}\left\{\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\sum_{k=m-1}^{m+2}\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' d\xi\right)\right\}\delta_j^{n-1}
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

yaklaşımı elde edilir. (4.18) ifadesindeki integralleri hesaplamak için 2. bölümde elde

edilen $T_{m-1}, T_m, T_{m+1}, T_{m+2}$ trigonometrik kübik B-spline eşitlikleri kullanılacaktır. Bu durumda her bir alt aralıktaki eleman matrislerinin her bir elemanı i, j, k ; $m-1, m, m+1, m+2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} A_{ij}^e &= \int_0^h T_i T_j d\xi, \quad B_{ij}^e = \int_0^h T_i T_j' d\xi, \quad C_{ij}^e\left(\boldsymbol{\delta}^n\right) = \int_0^h T_i T_k\left(\delta_k^n\right) T_j' d\xi, \\ D_{ij}^e &= \int_0^h T_i T_j'' d\xi, \quad E_{ij}^e\left(\boldsymbol{\delta}^n\right) = \int_0^h T_i T_k'\left(\delta_k^n\right) T_j d\xi \end{aligned} \tag{4.19}$$

olarak alınabilir. (4.19) ifadesinde gösterilen tüm matrisler bu bölümün başındaki Crank-Nicolson yönteminde anlatıldığı şekilde hesaplanmıştır. Elde edilen tüm eleman matrislerinin $m = 0, 1, \ldots, N-1$ için uygun şekilde birbirlerine eklenmesi sonucunda,

$$\boldsymbol{\delta} = \left(\delta_{-1}, \delta_0, \ldots, \delta_N, \delta_{N+1}\right)^T$$

olmak üzere (4.18) ifadesinden

$$\begin{aligned} &\left[\mathbf{A} - \mu\mathbf{D} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{B} + \frac{\Delta t\varepsilon}{2}\left(2\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\delta}^n\right) - \mathbf{E}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right) + 2\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^n\right) - \mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)\right)\right]\boldsymbol{\delta}^{n+1} = \\ &\left[\mathbf{A} - \mu\mathbf{D} - \frac{\Delta t}{2}\mathbf{B} + \mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^n\right)\left(\frac{3\Delta t\varepsilon}{2}\right) - \frac{\Delta t\varepsilon}{2}\left(2\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right) + 2\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)\right)\right]\boldsymbol{\delta}^n \\ &+ \left[\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)\right]\boldsymbol{\delta}^{n-1} \end{aligned} \tag{4.20}$$

sistemi elde edilir.

(4.20) denklem sistemi $(N+3)$ denklem ve $(N+3)$ bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. Sınır şartlarını sisteme adapte edebilmek için denklem sistemindeki ilk ve son denklem silinerek bölgenin uç noktalarındaki

$$u(a,t) = u(b,t) = 0$$

sınır şartları kullanılarak δ_{-1}^{n+1} ve δ_{N+1}^{n+1} yok edilirse (4.20) denklem sistemi $(N+1) \times (N+1)$ matris sistemine indirgenmiş olur. Ulaşılan denklem sistemi 7'li Thomas algoritması yardımıyla çözülebilir.

RLW denkleminin trigonometrik kübik B-spline Galerkin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken elde edilen denklem sisteminin çözülebilmesi için

$$\left(\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \ldots, \delta_{N+1}^0\right)$$

başlangıç vektörünün bulunması gerekir. Bunun için RLW denkleminin başlangıç şartı olan

$$u\left(x,0\right)=f\left(x\right)$$

ve kübik trigonometrik B-spline eşitlikleri kullanılabilir.

4.3.2. Zaman parçalanması için Adams Moulton yöntemi (KBAM3)

Bir önceki bölümde RLW denklemine Adams Moulton zaman parçalanması uygulanmış ve lineerleştirme için (3.34) kullanılarak aşağıda verilen

$$\begin{aligned}
&u^{n+1}+\theta_1\Delta t\left(u_x\right)^{n+1}+\theta_1\Delta t\varepsilon\left(2(u_x)^n u^{n+1}-(u_x)^{n-1}u^{n+1}\right.\\
&\left.+2u^n(u_x)^{n+1}-u^{n-1}(u_x)^{n+1}\right)-\mu\left(u_{xx}\right)^{n+1}=\\
&u^n-\mu\left(u_{xx}\right)^n-\theta_2\Delta t\left(u_x\right)^n+u^n(u_x)^n(4\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_2\Delta t\varepsilon)\\
&-\theta_1\Delta t\varepsilon(2u^{n-1}\left(u_x\right)^n+2(u_x)^{n-1}u^n)-\theta_3\Delta t\left(u_x\right)^{n-1}\\
&+u^{n-1}\left(u_x\right)^{n-1}\left(\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_3\Delta t\varepsilon\right)
\end{aligned}$$

(3.41) eşitliğine ulaşılmıştır. $W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere (3.41) eşitliğine Galerkin metodu uygulanarak,

$$\begin{aligned}
&\int_a^b W(x)\left(u^{n+1}+\theta_1\Delta t\left(u_x\right)^{n+1}+\theta_1\Delta t\varepsilon\left(2(u_x)^n u^{n+1}-(u_x)^{n-1}u^{n+1}\right.\right.\\
&\left.\left.+\,2u^n(u_x)^{n+1}-u^{n-1}(u_x)^{n+1}\right)-\mu\left(u_{xx}\right)^{n+1}\right)dx=\\
&\int_a^b W(x)\left(u^n-\mu\left(u_{xx}\right)^n-\theta_2\Delta t\left(u_x\right)^n+u^n(u_x)^n(4\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_2\Delta t\varepsilon)\right.\\
&-\theta_1\Delta t\varepsilon(2u^{n-1}\left(u_x\right)^n+2(u_x)^{n-1}u^n)-\theta_3\Delta t\left(u_x\right)^{n-1}\\
&\left.+\,u^{n-1}\left(u_x\right)^{n-1}\left(\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_3\Delta t\varepsilon\right)\right)dx
\end{aligned}$$

(3.42) eşitliği elde edilmiştir.

$[a,b]$ konum aralığı N eşit uzunluklu alt aralığa parçalanırsa, $[x_m,x_{m+1}]$ aralığı üzerinde $W\left(x\right)$ ağırlık fonksiyonu ve u,u_x,u_{xx} yerine T_m trigonometrik kübik B-spline fonksiyonları kullanıldığında (3.42) eşitliğinin düzenlenmiş formu olan,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=m-1}^{m+2}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)-\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j'' dx\right)+\theta_1\Delta t\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\right.\\
&+\theta_1\Delta t\varepsilon\left[\sum_{k=m-1}^{m+2} 2\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k'\left(\delta_k^n\right)T_j dx\right)-\sum_{k=m-1}^{m+2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k'\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j dx\right)\right.\\
&\left.\left.+\sum_{k=m-1}^{m+2} 2\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' dx\right)-\sum_{k=m-1}^{m+2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' dx\right)\right]\right\}\delta_j^{n+1}\\
&-\sum_{j=m-1}^{m+2}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)-\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j'' dx\right)-\theta_2\Delta t\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\right.\\
&+\sum_{k=m-1}^{m+2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' dx\right)\left(4\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_2\Delta t\varepsilon\right)\\
&\left.-\theta_1\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-1}^{m+2} 2\left[\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' dx\right)+\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k'\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j dx\right)\right]\right\}\delta_j^n\\
&+\sum_{j=m-1}^{m+2}\left\{\theta_3\Delta t\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\right.\\
&\left.-\sum_{k=m-1}^{m+2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' dx\right)\left(\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_3\Delta t\varepsilon\right)\right\}\delta_j^{n-1}
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

yaklaşımı elde edilir. Bu yaklaşım $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde olup $m = 0, 1, \ldots, N-1$ değerleri için her bir aralıktaki yaklaşımlar birleştirildiğinde (3.42) eşitliğine dönecektir.

(4.21) ifadesinde $\xi = x - x_m$ dönüşümü yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=m-1}^{m+2}\left\{\left(\int_0^h T_iT_jd\xi\right)-\mu\left(\int_0^h T_iT_j''d\xi\right)+\theta_1\Delta t\left(\int_0^h T_iT_j'd\xi\right)\right.\\
&+\theta_1\Delta t\varepsilon\left[\sum_{k=m-1}^{m+2}2\left(\int_0^h T_iT_k'\left(\delta_k^n\right)T_jd\xi\right)-\sum_{k=m-1}^{m+2}\left(\int_0^h T_iT_k'\left(\delta_k^{n-1}\right)T_jd\xi\right)\right.\\
&\left.\left.+\sum_{k=m-1}^{m+2}2\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j'd\xi\right)-\sum_{k=m-1}^{m+2}\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j'd\xi\right)\right]\right\}\delta_j^{n+1}\\
&-\sum_{j=m-1}^{m+2}\left\{\left(\int_0^h T_iT_jd\xi\right)-\mu\left(\int_0^h T_iT_j''d\xi\right)-\theta_2\Delta t\left(\int_0^h T_iT_j'd\xi\right)\right.\\
&+\sum_{k=m-1}^{m+2}\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j'd\xi\right)\left(4\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_2\Delta t\varepsilon\right)\\
&\left.-\theta_1\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-1}^{m+2}2\left[\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j'd\xi\right)+\left(\int_0^h T_iT_k'\left(\delta_k^{n-1}\right)T_jd\xi\right)\right]\right\}\delta_j^n\\
&+\sum_{j=m-1}^{m+2}\left\{\theta_3\Delta t\left(\int_0^h T_iT_j'd\xi\right)\right.\\
&\left.-\sum_{k=m-1}^{m+2}\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j'd\xi\right)\left(\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_3\Delta t\varepsilon\right)\right\}\delta_j^{n-1}
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

ifadesi elde edilir. (4.22) ifadesindeki integralleri hesaplamak için 2. bölümde elde edilen $T_{m-1}, T_m, T_{m+1}, T_{m+2}$ trigonometrik kübik B-spline eşitlikleri kullanılacaktır. Bu durumda her bir alt aralıktaki eleman matrislerinin her bir elemanı i, j, k ; $m-1, m, m+1, m+2$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&A_{ij}^e=\int_0^h T_iT_jd\xi,\quad B_{ij}^e=\int_0^h T_iT_j'd\xi,\quad C_{ij}^e\left(\boldsymbol{\delta}^n\right)=\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j'd\xi,\\
&D_{ij}^e=\int_0^h T_iT_j''d\xi,\quad E_{ij}^e\left(\boldsymbol{\delta}^n\right)=\int_0^h T_iT_k'\left(\delta_k^n\right)T_jd\xi
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

olarak alınabilir. (4.23) ifadesinde gösterilen tüm matrisler bu bölümün başındaki Crank-Nicolson yönteminde anlatıldığı şekilde hesaplanır. Elde edilen tüm eleman matrislerinin $m = 0, 1, \ldots, N-1$ için uygun şekilde birbirlerine eklenmesi sonucunda,

$$\boldsymbol{\delta}=\left(\delta_{-1},\delta_0,\ldots,\delta_N,\delta_{N+1}\right)^T$$

olmak üzere (4.22) yaklaşımından

$$
\begin{aligned}
&\left[\mathbf{A}-\mu\mathbf{D}+\theta_1\Delta t\mathbf{B}+\theta_1\Delta t\varepsilon\left(2\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\delta}^n\right)-\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)+2\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^n\right)-\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)\right)\right]\boldsymbol{\delta}^{n+1}=\\
&\left[\mathbf{A}-\mu\mathbf{D}-\theta_2\Delta t\mathbf{B}+\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^n\right)\left(4\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_2\Delta t\varepsilon\right)-\theta_1\Delta t\varepsilon 2\left(\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)+\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)\right)\right]\boldsymbol{\delta}^n\\
&+\left[-\theta_3\Delta t\mathbf{B}+\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)\left(\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_3\Delta t\varepsilon\right)\right]\boldsymbol{\delta}^{n-1}
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

sistemi elde edilir.

(4.24) denklem sistemi $(N+3)$ denklem ve $(N+3)$ bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. Sınır şartlarını sisteme adapte edebilmek için denklem sistemindeki ilk ve son denklem silinerek bölgenin uç noktalarındaki

$$u(a,t) = u(b,t) = 0$$

sınır şartları kullanılarak δ_{-1}^{n+1} ve δ_{N+1}^{n+1} yok edilirse (4.24) denklem sistemi $(N+1) \times (N+1)$ matris sistemine indirgenmiş olur. Ulaşılan denklem sistemi 7'li Thomas algoritması yardımıyla çözülebilir.

RLW denkleminin trigonometrik kübik B-spline Galerkin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken elde edilen (4.24) denklem sisteminin çözülebilmesi için gerekli olan

$$\left(\delta_{-1}^{0}, \delta_{0}^{0}, \ldots, \delta_{N}^{0}, \delta_{N+1}^{0}\right)$$

başlangıç vektörü başlangıç şartından ve

$$\left(\delta_{-1}^{1}, \delta_{0}^{1} \ldots, \delta_{N}^{1}, \delta_{N+1}^{1}\right)$$

bilinmeyenler vektörü ise Crank-Nicolson yönteminin programda bir kez çalıştırılması ile bulunabilir.

4.4. Test Problemleri

4.4.1 Solitary dalgasının hareketi test problemi

$[a,b]$ aralığında tanımlı $3c$ genlikli, $v = 1+\varepsilon c$ dalga hızlı RLW denkleminin solitary dalga analitik çözümü $k = \sqrt{\dfrac{\varepsilon c}{4\mu v}}$ olmak üzere

$$u(x,t) = 3c\mathrm{sech}^2(k[x - \tilde{x}_0 - vt])$$

olarak ilk bölümde verilmişti. Analitik çözümde $t = 0$ alındığında

$$u(x,0) = 3c\mathrm{sech}^2(k[x - \tilde{x}_0])$$

başlangıç şartı elde edilebilir.

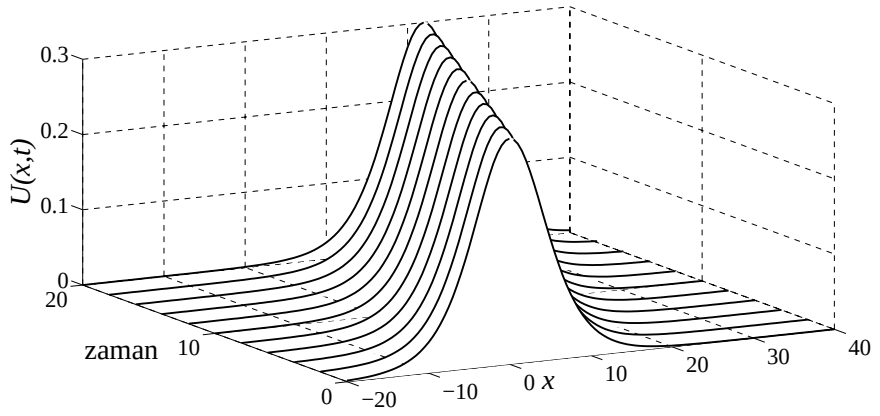
Başlangıç şartı kullanılarak RLW denkleminin üç korunum sabitinin tam değerleri

$$C_1 = \frac{6c}{k}, \quad C_2 = \frac{12c^2}{k} + \frac{48kc^2\mu}{5}, \quad C_3 = \frac{36c^2}{k}\left(1 + \frac{4c}{5}\right)$$

olarak bulunabilir.

Bu test probleminde de aymı 3. bölümde olduğu gibi, $\varepsilon = \mu = 1$, $\tilde{x}_0 = 0$ parametreleri, $-100 \leq x \leq 120$ tanım aralıkları seçilerek $3c$ genlikli, $\tilde{x}_0 = 0$ noktasına tepe noktası karşılık gelecek şekilde yerleştirilmiş bir solitary dalgasının $v = 1+\varepsilon c$ hızla sağa doğru hareketi $0 \leq t \leq 20$ zaman aralığında incelenmiştir. Verilen parametreler ve tanım aralıkları için $c = 0.1$ seçimi yapılarak önerilen tüm yöntemler için elde edilen sonuçlar tablolar halinde ve hata grafikleri çizilerek verilecektir.

$h = \Delta t = 0.1$ seçimi yapılarak belirli zamanlardaki dalganın konumunu gösteren şekil bir önceki bölümdeki gibi sadece bir metot için çizilmiştir. Şekil 4.1., KBCN1 metodu için dalganın zamanla hareketini göstermektedir. Şekil 4.1. incelendiğinde solitary dalgasının zamanla şeklinde bir bozulma olmadan hareket ettiği görülebilir.



Şekil 4.1. $h = \Delta t = 0.1$ için çeşitli zamanlardaki $U(x,t)$.

İlk olarak solitary dalgasının hareketi test problemi ile, önerilen 6 farklı yöntem için hata normları, hesaplama zamanları ve mertebeleri Çizelge 4.1.'de verilmiştir. Öncelikle tüm yöntemlerdeki konum ve zaman artımı değerleri eşit ve azalan değerlerde seçilmiştir. Çizelge 4.1.'den görüldüğü gibi konum ve zaman artımı değerleri azaldıkça, hata normları da azalmaktadır. Bir önceki

bölümde olduğu gibi, Crank-Nicolson yöntemlerinin hata normları birbirlerine yakın iken, Adams Moulton yöntemlerinden iç iterasyonlu lineerleştirme (KBAM1) ve lineerleştirme 3'ün (KBAM3), Rubin Graves lineerleştirmesine (KBAM2) göre daha iyi sonuçlar verdiği söylenebilir. Ayrıca Rubin Graves lineerleştirmesine alternatif olarak önerilen lineerleştirmenin (KBCN3, KBAM3), iç iterasyonlu lineerleştirme kadar iyi sonuçlar verirken aynı zamanda büyük bir hesaplama zamanı avantajı sağladığı gözlemlenmiştir. Son olarak Crank-Nicolson yöntemlerinin kuadratik, Adams Moulton yöntemlerininse kübik mertebelere sahip oldukları Çizelge 4.1.'den söylenebilir.

Çizelge 4.1. $t = 20$ anındaki hata normları, hesaplama zamanları ve mertebe

	KBCN1			**KBAM1**		
$h = \Delta t$	L_∞	Cpu	Mertebe	L_∞	Cpu	Mertebe
2	3.07×10^{-2}	0.23	1.87	1.66×10^{-2}	0.27	2.97
1	8.38×10^{-3}	0.27	1.94	2.12×10^{-3}	0.27	3.04
0.5	2.12×10^{-3}	0.96	1.99	2.58×10^{-4}	0.81	3.00
0.2	3.51×10^{-4}	4.49	2.00	1.65×10^{-5}	4.48	3.00
0.1	8.79×10^{-5}	18.6	2.00	2.06×10^{-6}	17.78	3.00
0.05	2.20×10^{-5}	54.55	2.00	2.57×10^{-7}	49.53	3.00
0.02	3.52×10^{-6}	314.72	2.00	1.65×10^{-8}	313.55	2.91
0.01	8.79×10^{-7}	1252.7		2.20×10^{-9}	1264.84	
	KBCN2			**KBAM2**		
$h = \Delta t$	L_∞	Cpu	Mertebe	L_∞	Cpu	Mertebe
2	2.79×10^{-2}	0.08	1.90	1.70×10^{-2}	0.08	2.89
1	7.48×10^{-3}	0.05	1.95	2.29×10^{-3}	0.05	2.66
0.5	1.94×10^{-3}	0.12	1.99	3.64×10^{-4}	0.12	2.37
0.2	3.12×10^{-4}	0.61	2.00	4.14×10^{-5}	0.61	2.10
0.1	7.81×10^{-5}	2.37	2.00	9.65×10^{-6}	2.42	1.95
0.05	1.95×10^{-5}	9.42	2.00	2.49×10^{-6}	9.52	1.98
0.02	3.12×10^{-6}	59.01	2.00	4.06×10^{-7}	60.25	1.99
0.01	7.81×10^{-7}	235.83		1.02×10^{-7}	236.78	
	KBCN3			**KBAM3**		
$h = \Delta t$	L_∞	Cpu	Mertebe	L_∞	Cpu	Mertebe
2	3.22×10^{-2}	0.19	1.91	1.75×10^{-2}	0.09	3.01
1	8.53×10^{-3}	0.08	1.96	2.17×10^{-3}	0.47	3.03
0.5	2.19×10^{-3}	0.14	2.00	2.65×10^{-4}	0.11	3.01
0.2	3.51×10^{-4}	0.76	2.00	1.68×10^{-5}	0.62	3.00
0.1	8.79×10^{-5}	3.28	2.00	2.10×10^{-6}	2.37	3.00
0.05	2.20×10^{-5}	9.55	2.00	2.62×10^{-7}	9.45	3.00
0.02	3.52×10^{-6}	62.15	2.00	1.68×10^{-8}	59.01	2.91
0.01	8.79×10^{-7}	261.7		2.24×10^{-9}	239.52	

$h = \Delta t = 0.1$ seçilerek her bir önerilen metot için korunum sabitlerinin mutlak hataları farklı zamanlarda hesaplanarak Çizelge 4.2.'de verilmiştir.

Çizelge 4.2. $h = \Delta t = 0.1$ seçimi için korunum sabitlerinin mutlak hataları

	KBCN1			**KBAM1**		
t	$(C_1)_h \times 10^{11}$	$(C_2)_h \times 10^4$	$(C_3)_h \times 10^5$	$(C_1)_h \times 10^{11}$	$(C_2)_h \times 10^4$	$(C_3)_h \times 10^5$
0	0.03	0.00006574	0.00000000	0.03	0.00006574	0.0000000
4	0.01	0.00006052	0.00010774	0.0	0.00499595	0.1670358
8	0.01	0.00004612	0.00040647	0.01	0.01016545	0.3376292
12	0.03	0.00002521	0.00084261	0.02	0.01533499	0.5082237
16	0.04	0.00000036	0.00136366	0.03	0.02050455	0.6788192
20	0.01	0.00002652	0.00193030	0.00	0.02567414	0.8494154
	KBCN2			**KBAM2**		
t	$(C_1)_h \times 10^{11}$	$(C_2)_h \times 10^4$	$(C_3)_h \times 10^5$	$(C_1)_h \times 10^{11}$	$(C_2)_h \times 10^4$	$(C_3)_h \times 10^5$
0	0.03	0.00006574	0.00000000	0.03	0.00065740	0.0000000
4	0.01	0.00006928	0.00014741	0.01	0.00499785	0.1670936
8	0.01	0.00007931	0.00056537	0.01	0.01017298	0.3378596
12	0.02	0.00009437	0.00119564	0.02	0.01535014	0.5086904
16	0.03	0.00011288	0.00197308	0.03	0.02052799	0.6795443
20	0.001	0.00013349	0.00284222	0.00	0.02570574	0.8503970
	KBCN3			**KBAM3**		
t	$(C_1)_h \times 10^{11}$	$(C_2)_h \times 10^4$	$(C_3)_h \times 10^5$	$(C_1)_h \times 10^{11}$	$(C_2)_h \times 10^4$	$(C_3)_h \times 10^5$
0	0.03	0.00006574	0.00000000	0.03	0.00006574	0.0000000
4	0.01	0.00006177	0.00006729	0.01	0.00499497	0.1670034
8	0.01	0.00004863	0.00032490	0.00	0.01016347	0.3375638
12	0.03	0.00002896	0.00072035	0.02	0.01533201	0.5081255
16	0.04	0.00000533	0.00120104	0.02	0.02050058	0.7868811
20	0.01	0.00002034	0.00172753	0.01	0.02566917	0.8492514

Çizelgede $(C_1)_h$, $(C_2)_h$ ve $(C_3)_h$ sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü korunum sabitleri için mutlak hatalara karşılık gelmektedir. Çizelge 4.2.'de görüldüğü gibi, tüm metotlar

için $(C_1)_h$ mutlak hatası sıfıra yakın değerler alırken, $(C_2)_h$ ve $(C_3)_h$ hataları kabul edilebilirdir.

$\Delta t = 0.001$ seçimi yapılarak konum artımının azalan değerleri ile her bir önerilen metot için hata normu ve mertebeler hesaplanarak Çizelge 4.3.'de verilmiştir.

Çizelge 4.3. Sabit $\Delta t = 0.001$ ve farklı konum artımları için hata normları ve mertebeler

	KBCN1		**KBCN2**		**KBCN3**	
h	L_∞	Mertebe	L_∞	Mertebe	L_∞	Mertebe
2	3.30×10^{-3}	4.70	3.30×10^{-3}	4.70	3.30×10^{-3}	4.70
1	1.27×10^{-4}	4.10	1.27×10^{-4}	4.10	1.27×10^{-4}	4.10
0.5	7.37×10^{-6}	3.97	7.37×10^{-6}	3.98	7.37×10^{-6}	3.97
0.2	1.94×10^{-7}	3.25	1.93×10^{-7}	3.32	1.94×10^{-7}	3.25
0.1	2.03×10^{-8}		1.93×10^{-8}		2.03×10^{-8}	
	KBAM1		**KBAM2**		**KBAM3**	
h	L_∞	Mertebe	L_∞	Mertebe	L_∞	Mertebe
2	3.30×10^{-3}	4.70	3.30×10^{-3}	4.70	3.30×10^{-3}	4.70
1	1.27×10^{-4}	4.10	1.27×10^{-4}	4.10	1.27×10^{-4}	4.11
0.5	7.36×10^{-6}	4.02	7.36×10^{-6}	4.02	7.36×10^{-6}	4.02
0.2	1.85×10^{-7}	4.00	1.84×10^{-7}	4.10	1.85×10^{-7}	4.00
0.1	1.15×10^{-8}		1.07×10^{-8}		1.15×10^{-8}	

Çizelge 4.3.'den görüldüğü gibi, zaman artımı mümkün olduğu kadar küçültülüp, konum artımı azalan değerler aldığında yöntemlerin hata normları oldukça azalmıştır.

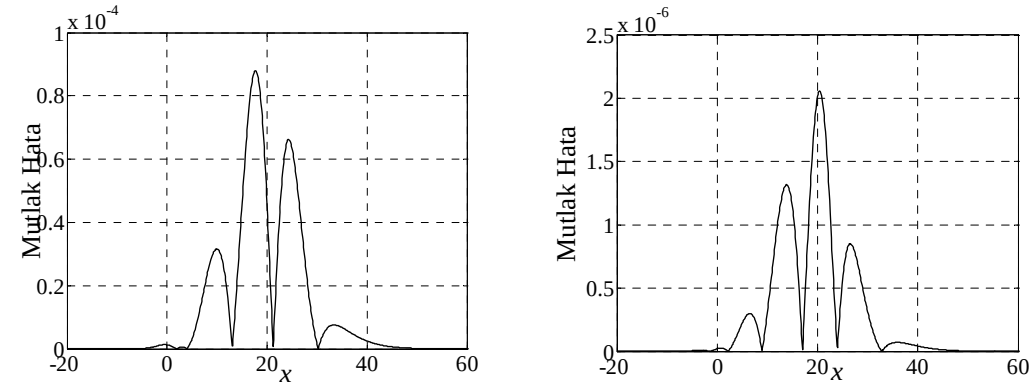
$h = 0.01$ seçimi yapılarak zaman artımının azalan değerleri için her bir önerilen metodun kullanımı sonucunda elde edilen hata normu ve mertebeler Çizelge 4.4.'de verilmiştir.

Çizelge 4.4. Sabit $h = 0.01$ ve farklı zaman artımları için hata normları ve mertebeler

	KBCN1		**KBCN2**		**KBCN3**	
Δt	L_∞	Mertebe	L_∞	Mertebe	L_∞	Mertebe
2	2.97×10^{-2}	1.82	2.68×10^{-2}	1.84	3.10×10^{-2}	1.85
1	8.40×10^{-3}	1.95	7.49×10^{-3}	1.96	8.56×10^{-3}	1.97
0.5	2.17×10^{-3}	1.99	1.93×10^{-3}	1.99	2.18×10^{-3}	1.99
0.2	3.51×10^{-4}	2.00	3.12×10^{-4}	2.00	3.51×10^{-4}	2.00
0.1	8.79×10^{-5}	2.00	7.80×10^{-5}	2.00	8.79×10^{-5}	2.00
0.05	2.20×10^{-5}	2.00	1.95×10^{-5}	2.00	2.20×10^{-5}	2.00
0.02	3.52×10^{-6}	2.00	3.12×10^{-6}	2.00	3.52×10^{-6}	2.00
0.01	8.79×10^{-7}		7.81×10^{-7}		8.79×10^{-7}	
	KBAM1		**KBAM2**		**KBAM3**	
Δt	L_∞	Mertebe	L_∞	Mertebe	L_∞	Mertebe
2	1.58×10^{-2}	2.94	1.56×10^{-2}	2.78	1.57×10^{-2}	2.91
1	2.05×10^{-3}	3.00	2.27×10^{-3}	2.64	2.10×10^{-3}	3.00
0.5	2.56×10^{-4}	3.00	3.65×10^{-4}	2.37	2.62×10^{-4}	3.00
0.2	1.64×10^{-5}	3.00	4.15×10^{-5}	2.10	1.68×10^{-5}	3.00
0.1	2.05×10^{-6}	3.00	9.65×10^{-6}	1.95	2.09×10^{-6}	3.00
0.05	2.57×10^{-7}	2.99	2.49×10^{-6}	1.98	2.62×10^{-7}	3.00
0.02	1.65×10^{-8}	2.91	4.06×10^{-7}	1.99	1.68×10^{-8}	2.91
0.01	2.20×10^{-9}		1.02×10^{-7}		2.24×10^{-9}	

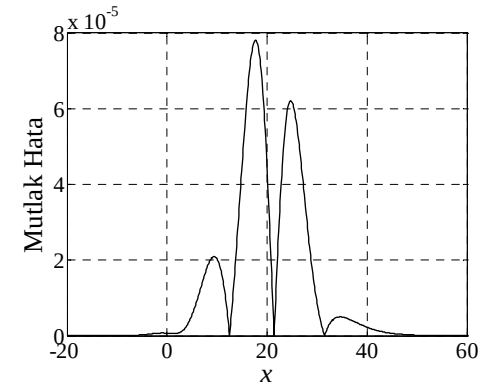
Çizelge 4.4.'den, sabit h ve farklı zaman artımları için hata normlarının Çizelge 4.1.'deki değerler ile uyumlu olduğu görülebilir. Ayrıca Crank-Nicolson yöntemlerinin kuadratik, Adams Moulton yöntemlerinin ise kübik mertebelere sahip oldukları söylenebilir.

Şekil 4.2.'de ise her bir metot için $h = \Delta t = 0.1$ olarak konum ve zaman artımı seçildiğinde $t = 20$ anında bulunan mutlak hataları gösteren şekiller verilmiştir.

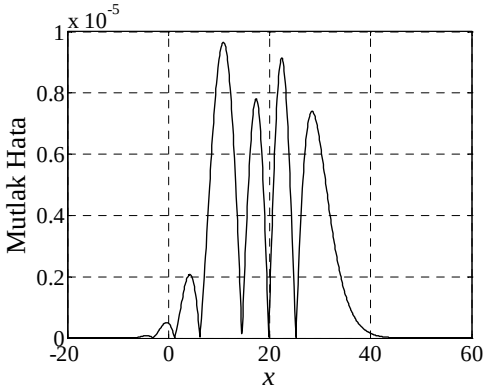


a) KBCN1

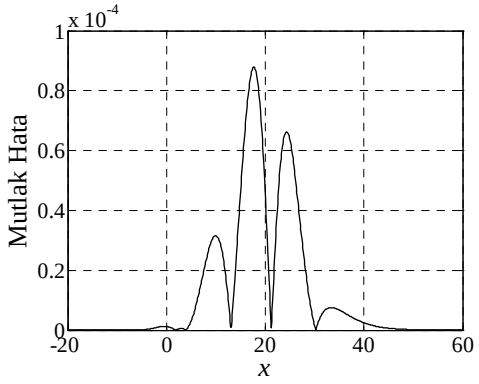
b) KBAM1



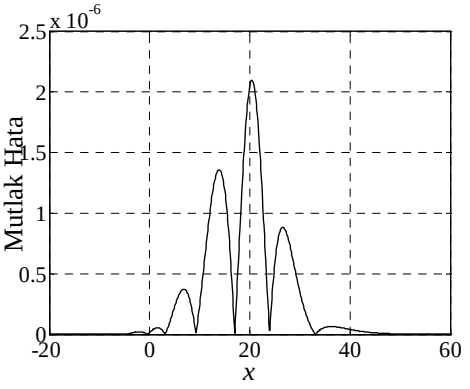
c) KBCN2



d) KBAM2



e) KBCN3



f) KBAM3

Şekil 4.2. $h = \Delta t = 0.1$ için mutlak hata grafikleri

Şekil 4.2.'ye göre her bir yöntemin maksimum hatası konum aralığının ortalarındadır ve Çizelge 4.1. ile uyumludur.

4.4.2 İki solitary dalgasının çarpışması test problemi

Bu bölümde $k_i = \sqrt{\dfrac{\varepsilon c_i}{4\mu\left(1+\varepsilon c_i\right)}}, i = 1, 2$ olmak üzere çalışmanın giriş kısmında da verilen

$$u(x,0) = 3c_1\text{sech}^2(k_1[x-\tilde{x}_1]) + 3c_2\text{sech}^2(k_2[x-\tilde{x}_2]),$$

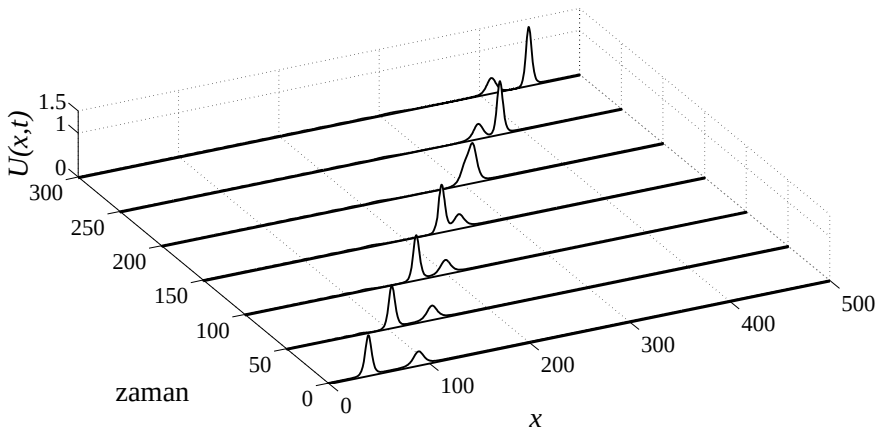
başlangıç şartı kullanılarak iki solitary dalgasının çarpışması test problemi üzerinde çalışılacaktır. Çarpışmanın gerçekleşebilmesi için $0 \leq x \leq 500$ konum aralığında $\varepsilon = \mu = 1$, $c_1 = 0.3$, $c_2 = 0.1$, $\tilde{x}_1 = 40$ ve $\tilde{x}_2 = 90$ değerleri kullanılarak programlar çalıştırılmıştır. Bu durumda genlik değerleri sırasıyla 0.9 ve 0.3 tepe noktaları ise $x = 40$ ve 90 değerlerine karşılık gelen iki solitary dalga elde edilmiştir.

Bu durumda korunum sabitlerinin analitik değerleri bir önceki bölümde de verildiği gibi,

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{6c_1}{k_1} + \frac{6c_2}{k_2} \simeq 11.4739473465046 \\
C_2 &= \frac{12c_1^2}{k_1} + \frac{48k_1c_1^2\mu}{5} + \frac{12c_2^2}{k_2} + \frac{48k_2c_2^2\mu}{5} \simeq 5.5143871404033, \\
C_3 &= \frac{36c_1^2}{k_1}\left(1+\frac{4c_1}{5}\right) + \frac{36c_2^2}{k_2}\left(1+\frac{4c_2}{5}\right) \simeq 19.3056100758906
\end{aligned}$$

olarak hesaplanabilir.

$h = \Delta t = 0.1$ seçimleri yapılarak belirli zamanlardaki dalganın konumunu gösteren şekil, daha önce bahsedilen sebepten dolayı sadece KBCN1 metodu için verilmiştir. Dalgaların yaklaşık $t = 200$ zamanında çarpıştıkları ve daha sonra ayrılarak şekillerinde bir değişiklik olmadan yollarına devam ettikleri Şekil 4.3.'den görülmektedir.



Şekil 4.3. $h = \Delta t = 0.1$ için çeşitli zamanlardaki $U(x,t)$.

Çizelge 4.5.'de iki solitary dalgasının çarpışması test problemi için her bir önerilen metot sonucunda elde edilen korunum sabitlerinin belirli zamanlardaki yaklaşık değerleri verilmiştir.

Çizelge 4.5. İki solitary dalgasının çarpışması problemi için korunum sabitleri

	KBCN1			**KBAM1**		
t	C_1	C_2	C_3	C_1	C_2	C_3
0	11.47395	5.51440	19.30565	11.47395	5.51440	19.30565
50	11.47395	5.51440	19.30565	11.47395	5.51494	19.30777
100	11.47395	5.51440	19.30566	11.47395	5.51548	19.30989
150	11.47395	5.51446	19.30582	11.47395	5.51602	19.31197
200	11.47395	5.51505	19.30733	11.47395	5.51640	19.31346
250	11.47395	5.51474	19.30653	11.47395	5.51654	19.31400
300	11.47395	5.51442	19.30571	11.47395	5.51703	19.31588
	KBCN2			**KBAM2**		
0	11.47395	5.51440	19.30565	11.47395	5.51440	19.30565
50	11.47395	5.51439	19.30564	11.47395	5.51494	19.30777
100	11.47395	5.51439	19.30562	11.47395	5.51548	19.30987
150	11.47395	5.51433	19.30531	11.47395	5.51591	19.31155
200	11.47395	5.51374	19.30230	11.47395	5.51531	19.30925
250	11.47395	5.51405	19.30389	11.47395	5.51598	19.31182
300	11.47395	5.51437	19.30552	11.47395	5.51699	19.31573
	KBCN3			**KBAM3**		
0	11.47395	5.51440	19.30565	11.47395	5.51440	19.30565
50	11.47395	5.51440	19.30565	11.47395	5.51494	19.30776
100	11.47395	5.51440	19.30565	11.47395	5.51548	19.30988
150	11.47395	5.51446	19.30581	11.47395	5.51601	19.31196
200	11.47395	5.51504	19.30731	11.47395	5.51640	19.31344
250	11.47395	5.51474	19.30651	11.47395	5.51654	19.31399
300	11.47395	5.51442	19.30570	11.47395	5.51702	19.31586

Çizelge 4.5.'den de görüldüğü gibi korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri, daha önce hesaplanan analitik değerleri ile uyumludur.

5. RLW DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ İÇİN TRİGONOMETRİK KUARTİK B-SPLİNE GALERKİN YÖNTEMİ

Bu bölümde kuartik trigonometrik B-spline Galerkin yöntemi ile RLW denkleminin sayısal çözümlerinin bulunması amaçlanmıştır. Önceki bölümlerde bahsedildiği gibi sayısal çözüm araştırılırken zaman parçalanması için Crank-Nicolson yöntemi, ve Crank-Nicolson yöntemine göre doğruluğu daha yüksek olan Adams Moulton yöntemi, konum ayrıştırılması için ise kuartik trigonometrik B-spline Galerkin yöntemi önerilmiştir. Yöntemlerin uygulanması sonucunda 3 farklı lineerleştirme kullanılmış ve böylece 6 farklı yöntem ile sayısal çözüm araştırılmıştır. Zaman ve konum ayrıştırması tamamlandığında RLW denklemi cebirsel bir denklem sistemine dönüştürülmüştür. Bu sistem Gauss eleminasyon metodu yardımı ile çözülerek cebirsel denklem sisteminin bilinmeyenleri elde edilmiş ve yaklaşık çözümde yerine yazılıp yaklaşık çözüm belirlenmiştir. Sayısal çözümün doğruluğu ise iki test problemi için incelenmiştir.

5.1. İç İterasyonlu Lineerleştirme

Bu bölümde lineerleştirme işlemi için iç iterasyon yapılacaktır.

5.1.1. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson yöntemi (KRCN1)

Kuadratik Trigonometrik B-spline bölümünde, RLW denklemine Crank-Nicolson zaman parçalanması uygulanmış ve elde edilen eşitlik düzenlenerek aşağıdaki (3.8) eşitliği

$$u^{n+1}+\frac{\Delta t}{2}\left(u_x\right)^{n+1}+\frac{\Delta t\varepsilon}{2}u^{n+1}\left(u_x\right)^{n+1}-\mu\left(u_{xx}\right)^{n+1}=u^n-\mu\left(u_{xx}\right)^n$$
$$-\frac{\Delta t}{2}\left(u_x\right)^n-\frac{\Delta t\varepsilon}{2}u^n\left(u_x\right)^n$$

elde edilmiştir. $W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere (3.8) eşitliğine Galerkin metodu uygulanarak,

$$\int_a^b W(x)\left(u^{n+1}+\frac{\Delta t}{2}\left(u_x\right)^{n+1}+\frac{\Delta t\varepsilon}{2}u^{n+1}\left(u_x\right)^{n+1}-\mu\left(u_{xx}\right)^{n+1}\right)dx=$$
$$\int_a^b W(x)\left(u^n-\mu\left(u_{xx}\right)^n-\frac{\Delta t}{2}\left(u_x\right)^n-\frac{\Delta t\varepsilon}{2}u^n\left(u_x\right)^n\right)dx$$

(3.9) eşitliği elde edilmiştir.

$[a,b]$ konum aralığı N eşit uzunluklu alt aralığa parçalanırsa, $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x, u_{xx} yerine T_m trigonometrik kuartik B-spline fonksiyonları kullanıldığında (3.9) eşitliğinin düzenlenmiş formu olan,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)\delta_j^{n+1} - \mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j'' dx\right)\delta_j^{n+1}\right.\\
&\left.+\frac{\Delta t}{2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\delta_j^{n+1} + \frac{\Delta t\varepsilon}{2}\sum_{k=m-2}^{m+2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n+1}\right)T_j' dx\right)\delta_j^{n+1}\right\}\\
&-\sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)\delta_j^{n} - \mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j'' dx\right)\delta_j^{n}\right.\\
&\left.-\frac{\Delta t}{2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\delta_j^{n} - \frac{\Delta t\varepsilon}{2}\sum_{k=m-2}^{m+2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n}\right)T_j' dx\right)\delta_j^{n}\right\}
\end{aligned} \tag{5.1}$$

yaklaşımı elde edilir. Bu yaklaşım $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde olup $m = 0, 1, \ldots, N-1$ değerleri için her bir aralıktaki yaklaşımlar birleştirildiğinde (3.9) eşitliğine dönecektir.

(5.1) ifadesinde $\xi = x - x_m$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\left(\int_{0}^{h} T_iT_j d\xi\right)\delta_j^{n+1} - \mu\left(\int_{0}^{h} T_iT_j'' d\xi\right)\delta_j^{n+1}\right.\\
&\left.+\frac{\Delta t}{2}\left(\int_{0}^{h} T_iT_j' d\xi\right)\delta_j^{n+1} + \frac{\Delta t\varepsilon}{2}\sum_{k=m-2}^{m+2}\left(\int_{0}^{h} T_iT_k\left(\delta_k^{n+1}\right)T_j' d\xi\right)\delta_j^{n+1}\right\}\\
&-\sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\left(\int_{0}^{h} T_iT_j d\xi\right)\delta_j^{n} - \mu\left(\int_{0}^{h} T_iT_j'' d\xi\right)\delta_j^{n}\right.\\
&\left.-\frac{\Delta t}{2}\left(\int_{0}^{h} T_iT_j' d\xi\right)\delta_j^{n} - \frac{\Delta t\varepsilon}{2}\sum_{k=m-2}^{m+2}\left(\int_{0}^{h} T_iT_k\left(\delta_k^{n}\right)T_j' d\xi\right)\delta_j^{n}\right\}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

elde edilir. (5.2) ifadesindeki integralleri hesaplamak için 2. bölümde elde edilen $T_{m-2}, T_{m-1}, T_m, T_{m+1}, T_{m+2}$ trigonometrik kuartik B-spline eşitlikleri kullanılacaktır. Bu durumda her bir alt aralıktaki eleman matrislerinin her bir elemanı i, j, k ; $m-2, m-1, m, m+1, m+2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
A_{ij}^e &= \int_0^h T_iT_j d\xi, \quad B_{ij}^e = \int_0^h T_iT_j' d\xi, \\
C_{ij}^e(\boldsymbol{\delta}^n) &= \int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' d\xi, \quad D_{ij}^e = \int_0^h T_iT_j'' d\xi
\end{aligned} \tag{5.3}$$

olarak alınabilir. (5.3) eşitliklerinde verilen $\mathbf{A}^e$ eleman matrisi

$$\mathbf{A}^e = \begin{bmatrix} A_{m-2,m-2} & A_{m-2,m-1} & A_{m-2,m} & A_{m-2,m+1} & A_{m-2,m+2} \\ A_{m-1,m-2} & A_{m-1,m-1} & A_{m-1,m} & A_{m-1,m+1} & A_{m-1,m+2} \\ A_{m,m-2} & A_{m,m-1} & A_{m,m} & A_{m,m+1} & A_{m,m+2} \\ A_{m+1,m-2} & A_{m+1,m-1} & A_{m+1,m} & A_{m+1,m+1} & A_{m+1,m+2} \\ A_{m+2,m-2} & A_{m+2,m-1} & A_{m+2,m} & A_{m+2,m+1} & A_{m+2,m+2} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Matrisin her bir elemanı için gerekli olan integrallerin hesaplanmasında trigonometrik kuartik B-spline eşitlikleri kullanılır. $\mathbf{B}^e$ ve $\mathbf{D}^e$ matrislerinin hesaplanması da $\mathbf{A}^e$ eleman matrisiyle benzer şekilde yapılır. $\mathbf{C}^e$ elaman matrisi ise integraldeki T_k nedeniyle diğer matrislerden farklı şekilde bulunur. Bu matrisin her bir elemanında k indisinin $m-2, m-1, m, m+1, m+2$ adımlarından kaynaklanan beşer elemanı daha olacaktır. $\mathbf{C}^e$ eleman matrisinin ilk elemanının bulunuşunu örnek olarak gösterecek olursak $i = j = m-2$ alındığında

$$\begin{aligned} C^e_{m-2m-2}(\boldsymbol{\delta}^n) &= \int_0^h T_{m-2}T_{m-2}\left(\delta^n_{m-2}\right)T'_{m-2}d\xi + \int_0^h T_{m-2}T_{m-1}\left(\delta^n_{m-1}\right)T'_{m-2}d\xi \\ &+ \int_0^h T_{m-2}T_m\left(\delta^n_m\right)T'_{m-2}d\xi + \int_0^h T_{m-2}T_{m+1}\left(\delta^n_{m+1}\right)T'_{m-2}d\xi \\ &+ \int_0^h T_{m-2}T_{m+2}\left(\delta^n_{m+2}\right)T'_{m-2}d\xi \end{aligned}$$

bulunur. Bu bulduğumuz eşitlik, k indisinin değerleri için $\mathbf{C}^e$ eleman matrisinin sadece ilk elemanıdır. Bulunan eleman matrislerinin $m = 0, 1, \ldots, N-1$ için uygun şekilde birbirlerine eklenmesi sonucunda,

$$\boldsymbol{\delta} = (\delta_{-2}, \delta_0, \delta_1, \ldots \delta_N, \delta_{N+1})^T$$

olmak üzere (5.2) ifadesinden,

$$\left[\mathbf{A} - \mu\mathbf{D} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{B} + \frac{\Delta t\varepsilon}{2}\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n+1}\right)\right]\boldsymbol{\delta}^{n+1} = \left[\mathbf{A} - \mu\mathbf{D} - \frac{\Delta t}{2}\mathbf{B} - \frac{\Delta t\varepsilon}{2}\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n}\right)\right]\boldsymbol{\delta}^{n} \qquad (5.4)$$

elde edilir.

(5.4) denklem sistemi $N+4$ denklem ve $N+4$ bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. Sınır şartlarını sisteme adapte edebilmek için denklem sistemindeki ilk

ve son denklemler silinerek bölgenin uç noktalarındaki

$$u(a,t) = u(b,t) = 0$$

sınır şartları kullanılarak δ_{-2}^{n+1} ve δ_{N+1}^{n+1} yok edilirse (5.4) denklem sistemi $(N+2)\times(N+2)$ matris sistemine indirgenmiş olur. Ulaşılan denklem sistemi Gauss eleminasyonu yardımıyla çözülebilir.

RLW denkleminin trigonometrik kuartik B-spline Galerkin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken elde edilen denklem sisteminin çözülebilmesi için

$$\left(\delta_{-2}^{0}, \delta_{0}^{0}, \delta_{1}^{0}, \ldots, \delta_{N}^{0}, \delta_{N+1}^{0}\right)$$

başlangıç vektörünün bulunması gerekir. Bunun için RLW denkleminin başlangıç şartı olan

$$u\left(x,0\right) = f\left(x\right)$$

ve kuartik trigonometrik B-spline eşitlikleri kullanılır.

5.1.2. Zaman parçalanması için Adams Moulton yöntemi (KRAM1)

Daha önce RLW denklemine $\theta_1 = 5/12$, $\theta_2 = 2/3$, $\theta_3 = -1/12$ seçimleri ile Adams Moulton zaman parçalanması uygulanmış, elde edilen eşitlik düzenlenmiş ve aşağıdaki (3.15)

$$u^{n+1} + \theta_1\Delta t\left(u_x\right)^{n+1} + \theta_1\Delta t\varepsilon u^{n+1}\left(u_x\right)^{n+1} - \mu\left(u_{xx}\right)^{n+1} = u^{n} - \mu\left(u_{xx}\right)^{n}$$
$$-\theta_2\Delta t\left(u_x\right)^{n} - \theta_2\Delta t\varepsilon u^{n}\left(u_x\right)^{n} - \theta_3\Delta t\left(u_x\right)^{n-1} - \theta_3\Delta t\varepsilon u^{n-1}\left(u_x\right)^{n-1}$$

eşitliği elde edilmiştir. $W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere (3.15) eşitliğine Galerkin metodu uygulanarak,

$$\int_a^b W(x)\left(u^{n+1} + \theta_1\Delta t\left(u_x\right)^{n+1} + \theta_1\Delta t\varepsilon u^{n+1}\left(u_x\right)^{n+1} - \mu\left(u_{xx}\right)^{n+1}\right)dx =$$
$$\int_a^b W(x)\left(u^{n} - \mu\left(u_{xx}\right)^{n} - \theta_2\Delta t\left(u_x\right)^{n} - \theta_2\Delta t\varepsilon u^{n}\left(u_x\right)^{n} - \theta_3\Delta t\left(u_x\right)^{n-1}\right.$$
$$\left.-\theta_3\Delta t\varepsilon u^{n-1}\left(u_x\right)^{n-1}\right)dx$$

(3.16) eşitliği elde edilmiştir.

$[a,b]$ konum aralığı N eşit uzunluklu alt aralığa parçalanırsa, $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x, u_{xx} yerine T_m trigonometrik kuartik B-spline fonksiyonları kullanıldığında (3.16) eşitliğinin düzenlenmiş formu olan,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j dx\right)\delta_j^{n+1} - \mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j'' dx\right)\delta_j^{n+1}\right.\\
&\left.+\theta_1\Delta t\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j' dx\right)\delta_j^{n+1} + \theta_1\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-2}^{m+2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_k\left(\delta_k^{n+1}\right) T_j' dx\right)\delta_j^{n+1}\right\}\\
&-\sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j dx\right)\delta_j^{n} - \mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j'' dx\right)\delta_j^{n} - \theta_2\Delta t\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j' dx\right)\delta_j^{n}\right.\\
&-\theta_2\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-2}^{m+2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_k\left(\delta_k^{n}\right) T_j' dx\right)\delta_j^{n} - \theta_3\Delta t\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j' dx\right)\delta_j^{n-1}\\
&\left.-\theta_3\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-2}^{m+2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_k\left(\delta_k^{n-1}\right) T_j' dx\right)\delta_j^{n-1}\right\}
\end{aligned}\tag{5.5}$$

yaklaşımı elde edilir. Bu yaklaşım $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde olup $m = 0, 1, \ldots, N-1$ değerleri için her bir aralıktaki yaklaşımlar birleştirildiğinde (3.16) eşitliğine dönecektir.

(5.5) ifadesinde $\xi = x - x_m$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\left(\int_{0}^{h} T_i T_j d\xi\right)\delta_j^{n+1} - \mu\left(\int_{0}^{h} T_i T_j'' d\xi\right)\delta_j^{n+1}\right.\\
&\left.+\theta_1\Delta t\left(\int_{0}^{h} T_i T_j' d\xi\right)\delta_j^{n+1} + \theta_1\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-2}^{m+2}\left(\int_{0}^{h} T_i T_k\left(\delta_k^{n+1}\right) T_j' d\xi\right)\delta_j^{n+1}\right\}\\
&-\sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\left(\int_{0}^{h} T_i T_j d\xi\right)\delta_j^{n} - \mu\left(\int_{0}^{h} T_i T_j'' d\xi\right)\delta_j^{n}\right.\\
&-\theta_2\Delta t\left(\int_{0}^{h} T_i T_j' d\xi\right)\delta_j^{n} - \theta_2\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-2}^{m+2}\left(\int_{0}^{h} T_i T_k\left(\delta_k^{n}\right) T_j' d\xi\right)\delta_j^{n}\\
&\left.-\theta_3\Delta t\left(\int_{0}^{h} T_i T_j' d\xi\right)\delta_j^{n-1} - \theta_3\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-2}^{m+2}\left(\int_{0}^{h} T_i T_k\left(\delta_k^{n-1}\right) T_j' d\xi\right)\delta_j^{n-1}\right\}
\end{aligned}\tag{5.6}$$

yaklaşımı elde edilir. (5.6) yaklaşımınki integralleri hesaplamak için 2. bölümde elde edilen $T_{m-2}, T_{m-1}, T_m, T_{m+1}, T_{m+2}$ trigonometrik kuartik B-spline eşitlikleri kullanılacaktır. Bu durumda her bir alt aralıktaki eleman matrislerinin her bir elemanı

i, j, k ; $m-2$, $m-1$, m, $m+1$, $m+2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} A_{ij}^{e} &= \int_{0}^{h} T_i T_j d\xi, \quad B_{ij}^{e} = \int_{0}^{h} T_i T_j^{'} d\xi, \\ C_{ij}^{e}(\boldsymbol{\delta}^{n}) &= \int_{0}^{h} T_i T_k \left(\delta_k^{n}\right) T_j^{'} d\xi, \quad D_{ij}^{e} = \int_{0}^{h} T_i T_j^{''} d\xi \end{aligned} \tag{5.7}$$

olarak alınabilir. (5.7) ifadesinde gösterilen tüm matrisler Crank-Nicolson yönteminde anlatıldığı şekilde hesaplanır. Elde edilen tüm eleman matrislerinin $m = 0, 1, \ldots, N-1$ için uygun şekilde birbirlerine eklenmesi sonucunda,

$$\boldsymbol{\delta} = \left(\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \ldots, \delta_N, \delta_{N+1}\right)^T$$

olmak üzere (5.6) yaklaşımından

$$\begin{aligned} &\left[\mathbf{A}-\mu\mathbf{D}+\theta_1\Delta t\mathbf{B} + \theta_1\Delta t\varepsilon\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n+1}\right)\right]\boldsymbol{\delta}^{n+1} = \\ &\left[\mathbf{A}-\mu\mathbf{D}-\theta_2\Delta t\mathbf{B}-\theta_2\Delta t\varepsilon\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n}\right)\right]\boldsymbol{\delta}^{n} \\ &-\left[\theta_3\Delta t\mathbf{B}+\theta_3\Delta t\varepsilon\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)\right]\boldsymbol{\delta}^{n-1} \end{aligned} \tag{5.8}$$

sistemi elde edilir.

(5.8) denklem sistemi $N+4$ denklem ve $N+4$ bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. Sınır şartlarını sisteme adapte edebilmek için denklem sistemindeki ilk ve son denklemler silinerek bölgenin uç noktalarındaki

$$u(a,t) = u(b,t) = 0$$

sınır şartları kullanılarak δ_{-2}^{n+1} ve δ_{N+1}^{n+1} yok edilirse (5.8) denklem sistemi $(N+2)\times(N+2)$ matris sistemine indirgenmiş olur. Ulaşılan denklem sistemi Gauss eleminasyonu yardımıyla çözülebilir.

RLW denkleminin trigonometrik kuartik B-spline Galerkin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken elde edilen (5.8) denklem sisteminin çözülebilmesi için

$$\left(\delta_{-2}^{0}, \delta_{-1}^{0}, \ldots, \delta_{N}^{0}, \delta_{N+1}^{0}\right)$$

başlangıç vektörü ve

$$\left(\delta_{-2}^{1}, \delta_{-1}^{1}, \ldots, \delta_{N}^{1}, \delta_{N+1}^{1}\right)$$

vektörünün bulunması gerekmektedir. Başlangıç vektörü başlangıç şartından bulunabilirken,

$$\left(\delta_{-2}^{1}, \delta_{-1}^{1}, \ldots, \delta_{N}^{1}, \delta_{N+1}^{1}\right)$$

vektörünün bulunabilmesi için ise Crank-Nicolson programda bir kez çalıştırılmalıdır.

5.2. Lineerleştirme 1

Bu bölümde lineerleştirme işlemi için Rubin Graves lineerleştirmesi yapılacaktır.

5.2.1. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson yöntemi (KRCN2)

Kuadratik trigonometrik B-spline bölümünde, RLW denklemine Crank-Nicolson zaman parçalanması uygulanmış, elde edilen eşitliği $(n+1)$. zamana göre lineer hale getirmek için Rubin Graves lineerleştirmesi kullanılmış ve bu eşitliğe $W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere Galerkin metodu uygularak,

$$\int_{a}^{b} W(x)\left(u^{n+1}+\frac{\Delta t}{2}u_x^{n+1}+\frac{\varepsilon\Delta t}{2}(u^n u_x^{n+1}+u_x^n u^{n+1})-\mu u_{xx}^{n+1}\right)dx =$$
$$\int_{a}^{b} W(x)\left(u^{n}-\frac{\Delta t}{2}u_x^{n}-\mu u_{xx}^{n}\right)dx$$

(3.23) eşitliğine ulaşılmıştır. Galerkin yönteminde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x, u_{xx} yerine T_m trigonometrik B-spline fonksiyonları kullanılacaktır.

$[a,b]$ konum aralığı N eşit uzunluklu alt aralığa parçalanırsa, $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x, u_{xx} yerine T_m trigonometrik kuartik B-spline fonksiyonları kullanıldığında (3.23) eşitliğinin düzenlenmiş formu olan,

$$\sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j dx\right)+\frac{\Delta t}{2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j' dx\right)-\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j'' dx\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon\Delta t}{2}\sum_{k=m-2}^{m+2}\left[\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_k\left(\delta_k^n\right) T_j' dx\right)+\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_k'\left(\delta_k^n\right) T_j dx\right)\right]\right\}\delta_j^{n+1} \qquad (5.9)$$

$$-\sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j dx\right)-\frac{\Delta t}{2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j' dx\right)-\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j'' dx\right)\right\}\delta_j^{n}$$

yaklaşımı elde edilir. Bu yaklaşım $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde olup $m = 0, 1, \ldots, N-1$ değerleri için her bir aralıktaki yaklaşımlar birleştirildiğinde (3.23) eşitliğine dönecektir.

(5.9) yaklaşımında $\xi = x - x_m$ dönüşümü yapılırsa,

$$\sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \left(\int_0^h T_i T_j d\xi \right) \delta_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_0^h T_i T_j' d\xi \right) - \mu \left(\int_0^h T_i T_j'' d\xi \right) \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+2} \left[\left(\int_0^h T_i T_k \left(\delta_k^n \right) T_j' d\xi \right) + \left(\int_0^h T_i T_k' \left(\delta_k^n \right) T_j d\xi \right) \right] \right\} \delta_j^{n+1} \tag{5.10}$$

$$- \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \left(\int_0^h T_i T_j d\xi \right) - \frac{\Delta t}{2} \left(\int_0^h T_i T_j' d\xi \right) - \mu \left(\int_0^h T_i T_j'' d\xi \right) \right\} \delta_j^n$$

elde edilir. (5.10) ifadesindeki integralleri hesaplamak için 2. bölümde elde edilen $T_{m-2}, T_{m-1}, T_m, T_{m+1}, T_{m+2}$ trigonometrik kuartik B-spline eşitlikleri kullanılacaktır. Bu durumda her bir alt aralıktaki eleman matrislerinin her bir elemanı i, j, k ; $m-2$, $m-1$, m, $m+1$, $m+2$ olmak üzere

$$A_{ij}^e = \int_0^h T_i T_j d\xi, \quad B_{ij}^e = \int_0^h T_i T_j' d\xi, \quad C_{ij}^e \left(\boldsymbol{\delta}^n \right) = \int_0^h T_i T_k \left(\delta_k^n \right) T_j' d\xi,$$

$$D_{ij}^e = \int_0^h T_i T_j'' d\xi, \quad E_{ij}^e \left(\boldsymbol{\delta}^n \right) = \int_0^h T_i T_k' \left(\delta_k^n \right) T_j d\xi \tag{5.11}$$

olarak alınabilir. (5.11) ifadesinde gösterilen tüm matrisler Crank-Nicolson yönteminde anlatıldığı şekilde hesaplanır. Elde edilen tüm eleman matrislerinin $m = 0, 1, \ldots, N-1$ için uygun şekilde birbirlerine eklenmesi sonucunda,

$$\boldsymbol{\delta} = \left(\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \ldots, \delta_N, \delta_{N+1} \right)^T$$

olmak üzere (5.10) ifadesinden

$$\left[\mathbf{A} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{B} + \varepsilon \frac{\Delta t}{2} \left(\mathbf{C} \left(\boldsymbol{\delta}^n \right) + \mathbf{E} \left(\boldsymbol{\delta}^n \right) \right) - \mu \mathbf{D} \right] \boldsymbol{\delta}^{n+1} = \left[\mathbf{A} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{B} - \mu \mathbf{D} \right] \boldsymbol{\delta}^n \tag{5.12}$$

denklem sistemi elde edilir.

(5.12) denklem sistemi $N+4$ denklem ve $N+4$ bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. Sınır şartlarını sisteme adapte edebilmek için denklem sistemindeki ilk ve son denklemler silinerek bölgenin uç noktalarındaki

$$u(a,t) = u(b,t) = 0$$

sınır şartları kullanılarak δ_{-2}^{n+1} ve δ_{N+1}^{n+1} yok edilirse (5.12) denklem sistemi $(N+2) \times (N+2)$ matris sistemine indirgenmiş olur. Ulaşılan denklem sistemi Gauss eleminasyonu yardımıyla çözülebilir.

RLW denkleminin trigonometrik kuartik B-spline Galerkin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken elde edilen denklem sisteminin çözülebilmesi için

$$\left(\delta_{-2}^{0}, \delta_{0}^{0}, \delta_{1}^{0}, \ldots, \delta_{N}^{0}, \delta_{N+1}^{0}\right)$$

başlangıç vektörünün bulunması gerekir. Bunun için RLW denkleminin başlangıç şartı olan

$$u\left(x,0\right)=f\left(x\right)$$

ve kuartik trigonometrik B-spline eşitlikleri kullanılabilir.

5.2.2. Zaman parçalanması için Adams Moulton yöntemi (KRAM2)

RLW denklemine Adams Moulton zaman parçalanması uygulanmış, elde edilen eşitliği $(n+1)$. zamana göre lineerleştirmek için Rubin Graves lineerleştirmesi yapılmış ve (3.28)

$$u^{n+1}+\theta_1\Delta t\left(u_x\right)^{n+1}+\theta_1\Delta t\varepsilon\left(u^n(u_x)^{n+1}+(u_x)^n u^{n+1}\right)-\mu\left(u_{xx}\right)^{n+1}=u^n-\mu\left(u_{xx}\right)^n$$

$$-\theta_2\Delta t\left(u_x\right)^n+(\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_2\Delta t\varepsilon)u^n\left(u_x\right)^n-\theta_3\Delta t((u_x)^{n-1}+\varepsilon u^{n-1}\left(u_x\right)^{n-1})$$

eşitliği elde edilmiştir. $W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere (3.28) eşitliğine Galerkin metodu uygulanarak,

$$\int_a^b W(x)\left(u^{n+1}+\theta_1\Delta t\left(u_x\right)^{n+1}+\theta_1\Delta t\varepsilon\left(u^n(u_x)^{n+1}+(u_x)^n u^{n+1}\right)-\mu\left(u_{xx}\right)^{n+1}\right)dx=$$

$$\int_a^b W(x)\left(u^n-\mu\left(u_{xx}\right)^n-\theta_2\Delta t\left(u_x\right)^n+(\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_2\Delta t\varepsilon)u^n\left(u_x\right)^n-\theta_3\Delta t((u_x)^{n-1}\right.$$

$$\left.+\varepsilon u^{n-1}\left(u_x\right)^{n-1})\right)dx$$

(3.29) eşitliğine ulaşılmıştır.

$[a,b]$ konum aralığı N eşit uzunluklu alt aralığa parçalanırsa, $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde $W\left(x\right)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x, u_{xx} yerine T_m trigonometrik kuartik

B-spline fonksiyonları kullanıldığında (3.29) eşitliğinin düzenlenmiş formu olan,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)-\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j'' dx\right)+\theta_1\Delta t\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\right.\\
&\left.+\theta_1\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-2}^{m+2}\left[\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' dx\right)+\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k'\left(\delta_k^n\right)T_j dx\right)\right]\right\}\delta_j^{n+1}\\
&-\sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)-\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j'' dx\right)-\theta_2\Delta t\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\right.\\
&\left.+\sum_{k=m-2}^{m+2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' dx\right)\left(\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_2\Delta t\varepsilon\right)\right\}\delta_j^{n}\\
&+\sum_{j=m-2}^{m+2}\theta_3\Delta t\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)+\varepsilon\sum_{k=m-2}^{m+2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' dx\right)\right\}\delta_j^{n-1}
\end{aligned}\tag{5.13}$$

yaklaşımı elde edilir. Bu yaklaşım $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde olup $m = 0, 1, \ldots, N-1$ değerleri için her bir aralıktaki yaklaşımlar birleştirildiğinde (3.29) eşitliğine dönecektir.

(5.13) ifadesinde $\xi = x - x_m$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\left(\int_0^h T_iT_j d\xi\right)-\mu\left(\int_0^h T_iT_j'' d\xi\right)+\theta_1\Delta t\left(\int_0^h T_iT_j' d\xi\right)\right.\\
&\left.+\theta_1\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-2}^{m+2}\left[\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' d\xi\right)+\left(\int_0^h T_iT_k'\left(\delta_k^n\right)T_j d\xi\right)\right]\right\}\delta_j^{n+1}\\
&-\sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\left(\int_0^h T_iT_j d\xi\right)-\mu\left(\int_0^h T_iT_j'' d\xi\right)-\theta_2\Delta t\left(\int_0^h T_iT_j' d\xi\right)\right.\\
&\left.+\sum_{k=m-2}^{m+2}\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' d\xi\right)\left(\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_2\Delta t\varepsilon\right)\right\}\delta_j^{n}\\
&+\sum_{j=m-2}^{m+2}\theta_3\Delta t\left\{\left(\int_0^h T_iT_j' d\xi\right)+\varepsilon\sum_{k=m-2}^{m+2}\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' d\xi\right)\right\}\delta_j^{n-1}
\end{aligned}\tag{5.14}$$

elde edilir. (5.14) ifadesindeki integralleri hesaplamak için 2. bölümde elde edilen $T_{m-2}, T_{m-1}, T_m, T_{m+1}, T_{m+2}$ trigonometrik kuartik B-spline eşitlikleri kullanılacaktır. Bu durumda her bir alt aralıktaki eleman matrislerinin her bir elemanı i, j, k ; $m-2, m-1, m, m+1, m+2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&A_{ij}^e=\int_0^h T_iT_j d\xi,\quad B_{ij}^e=\int_0^h T_iT_j' d\xi,\quad C_{ij}^e\left(\boldsymbol{\delta}^n\right)=\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' d\xi,\\
&D_{ij}^e=\int_0^h T_iT_j'' d\xi,\quad E_{ij}^e\left(\boldsymbol{\delta}^n\right)=\int_0^h T_iT_k'\left(\delta_k^n\right)T_j d\xi
\end{aligned}\tag{5.15}$$

olarak alınabilir. (5.15) ifadesinde gösterilen tüm matrisler bu bölümün başındaki Crank-Nicolson yönteminde anlatıldığı şekilde hesaplanır. Elde edilen tüm eleman matrislerinin $m = 0, 1, ..., N-1$ için uygun şekilde birbirlerine eklenmesi sonucunda,

$$\boldsymbol{\delta} = \left(\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \ldots, \delta_N, \delta_{N+1}\right)^T$$

olmak üzere (5.14) ifadesinden

$$\begin{aligned} &[\mathbf{A} - \mu\mathbf{D} + \theta_1 \Delta t \varepsilon \left(\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{n}}\right) + \mathbf{E}\left(\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{n}}\right)\right) + \theta_1 \Delta t \mathbf{B}]\, \boldsymbol{\delta}^{n+1} = \\ &[\mathbf{A} - \mu\mathbf{D} + \left(\theta_1 \Delta t \varepsilon - \theta_2 \Delta t \varepsilon\right) \mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{n}}\right) - \theta_2 \Delta t \mathbf{B}]\, \boldsymbol{\delta}^{n} \\ &- \left[\theta_3 \Delta t \mathbf{B} + \theta_3 \Delta t \varepsilon \mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{n-1}}\right)\right] \boldsymbol{\delta}^{n-1} \end{aligned} \tag{5.16}$$

denklem sistemi elde edilir.

(5.16) denklem sistemi $N+4$ denklem ve $N+4$ bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. Sınır şartlarını sisteme adapte edebilmek için denklem sistemindeki ilk ve son denklemler silinerek bölgenin uç noktalarındaki

$$u(a,t) = u(b,t) = 0$$

sınır şartları kullanılarak δ_{-2}^{n+1} ve δ_{N+1}^{n+1} yok edilirse (5.16) denklem sistemi $(N+2) \times (N+2)$ matris sistemine indirgenmiş olur. Ulaşılan denklem sistemi Gauss eleminasyonu yardımıyla çözülebilir.

RLW denkleminin trigonometrik kuartik B-spline Galerkin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken elde edilen (5.16) denklem sisteminin çözülebilmesi için

$$\left(\delta_{-2}^0, \delta_{-1}^0, \ldots, \delta_N^0, \delta_{N+1}^0\right)$$

başlangıç vektörü ve

$$\left(\delta_{-2}^1, \delta_{-1}^1, \ldots, \delta_N^1, \delta_{N+1}^1\right)$$

vektörünün bulunması gerekmektedir. Başlangıç vektörü başlangıç şartından bulunabilirken,

$$\left(\delta_{-2}^1, \delta_{-1}^1, \ldots, \delta_N^1, \delta_{N+1}^1\right)$$

vektörünün bulunması için Crank-Nicolson programda bir kez çalıştırılmalıdır.

5.3. Lineerleştirme 2

Önceki bölümlerde gösterildiği gibi, bu bölümde de lineerleştirme işlemi için Rubin Graves lineerleştirmesine benzeyen ve doğruluğu daha yüksek olan yeni bir lineerleştirme önerilecektir.

5.3.1. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson yöntemi (KRCN3)

Kuadratik trigonometrik B-spline bölümünde, RLW denklemine Crank-Nicolson zaman parçalanması yapılmış, elde edilen eşitliğe alternatif bir (3.34)

$$\begin{aligned}(uu_x)^{n+1} &= 2u_x^n u^{n+1} - u_x^{n-1}u^{n+1} + 2u^n u_x^{n+1} - u^{n-1}u_x^{n+1} + 2u^n u_x^{n-1} \\ &\quad +2u^{n-1}u_x^n - 4u^n u_x^n - u^{n-1}u_x^{n-1} + \mathcal{O}((\Delta t)^4)\end{aligned}$$

lineerleştirmesi uygulanmış ve gerekli düzenlemeleri yaparak (3.35)

$$u^{n+1} + \frac{\Delta t}{2}(u_x)^{n+1} + \frac{\Delta t\varepsilon}{2}\left(2(u_x)^n u^{n+1} - (u_x)^{n-1}u^{n+1} + 2u^n(u_x)^{n+1} - u^{n-1}(u_x)^{n+1}\right)$$
$$-\mu(u_{xx})^{n+1} = u^n - \mu(u_{xx})^n - \frac{\Delta t}{2}(u_x)^n + u^n(u_x)^n\left(\frac{3\Delta t\varepsilon}{2}\right)$$
$$-\frac{\Delta t\varepsilon}{2}(2u^{n-1}(u_x)^n + 2(u_x)^{n-1}u^n) + \frac{\Delta t\varepsilon}{2}u^{n-1}(u_x)^{n-1}$$

eşitliği elde edilmiştir. $W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere (3.35) eşitliğine Galerkin metodu uygulanarak,

$$\begin{aligned}&\int_a^b W(x)\left(u^{n+1} + \frac{\Delta t}{2}(u_x)^{n+1} - \mu(u_{xx})^{n+1} + \right. \\ &\left.\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\left(2(u_x)^n u^{n+1} - (u_x)^{n-1}u^{n+1} + 2u^n(u_x)^{n+1} - u^{n-1}(u_x)^{n+1}\right)\right)dx = \\ &\int_a^b W(x)\left(u^n - \mu(u_{xx})^n - \frac{\Delta t}{2}(u_x)^n + u^n(u_x)^n\left(\frac{3\Delta t\varepsilon}{2}\right)\right. \\ &\left.-\frac{\Delta t\varepsilon}{2}(2u^{n-1}(u_x)^n + 2(u_x)^{n-1}u^n) + \frac{\Delta t\varepsilon}{2}u^{n-1}(u_x)^{n-1}\right)dx\end{aligned}$$

(3.36) eşitliğine ulaşılmıştır.

$[a,b]$ konum aralığı N eşit uzunluklu alt aralığa parçalanırsa, $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x, u_{xx} yerine T_m trigonometrik kuartik

B-spline fonksiyonları kullanıldığında (3.36) eşitliğinin düzenlenmiş formu olan,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)-\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j'' dx\right)+\frac{\Delta t}{2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\right.\\
&+\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\sum_{k=m-2}^{m+2}\left[2\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k'\left(\delta_k^n\right)T_j dx\right)-\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k'\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j dx\right)\right.\\
&\left.\left.+2\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' dx\right)-\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' dx\right)\right]\right\}\delta_j^{n+1}\\
&-\sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)-\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j'' dx\right)-\frac{\Delta t}{2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\right.\\
&+\sum_{k=m-2}^{m+2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' dx\right)\left(\frac{3\Delta t\varepsilon}{2}\right)\\
&\left.-\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\sum_{k=m-2}^{m+2}2\left[\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' dx\right)+\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k'\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j dx\right)\right]\right\}\delta_j^n\\
&-\sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\sum_{k=m-2}^{m+2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' dx\right)\right\}\delta_j^{n-1}
\end{aligned}\tag{5.17}$$

yaklaşımı elde edilir. Bu yaklaşım $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde olup $m = 0, 1, \ldots, N-1$ değerleri için her bir aralıktaki yaklaşımlar birleştirildiğinde (3.36) eşitliğine dönecektir.

(5.17) ifadesinde $\xi = x - x_m$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\left(\int_0^h T_iT_j d\xi\right)-\mu\left(\int_0^h T_iT_j'' d\xi\right)+\frac{\Delta t}{2}\left(\int_0^h T_iT_j' d\xi\right)\right.\\
&+\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\sum_{k=m-2}^{m+2}\left[2\left(\int_0^h T_iT_k'\left(\delta_k^n\right)T_j d\xi\right)-\left(\int_0^h T_iT_k'\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j d\xi\right)\right.\\
&\left.\left.+2\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' d\xi\right)-\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' d\xi\right)\right]\right\}\delta_j^{n+1}\\
&-\sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\left(\int_0^h T_iT_j d\xi\right)-\mu\left(\int_0^h T_iT_j'' d\xi\right)-\frac{\Delta t}{2}\left(\int_0^h T_iT_j' d\xi\right)\right.\\
&+\sum_{k=m-2}^{m+2}\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' d\xi\right)\left(\frac{3\Delta t\varepsilon}{2}\right)\\
&\left.-\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\sum_{k=m-2}^{m+2}2\left[\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' d\xi\right)+\left(\int_0^h T_iT_k'\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j d\xi\right)\right]\right\}\delta_j^n\\
&-\sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\sum_{k=m-2}^{m+2}\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' d\xi\right)\right\}\delta_j^{n-1}
\end{aligned}\tag{5.18}$$

elde edilir. (5.18) ifadesindeki integralleri hesaplamak için 2. bölümde elde edilen $T_{m-2}, T_{m-1}, T_m, T_{m+1}, T_{m+2}$ trigonometrik kuartik B-spline eşitlikleri kullanılacaktır. Bu durumda her bir alt aralıktaki eleman matrislerinin her bir elemanı i, j, k ; $m-2$, $m-1$, m, $m+1$, $m+2$ olmak üzere

$$A_{ij}^{e}=\int_{0}^{h} T_i T_j d\xi, \quad B_{ij}^{e}=\int_{0}^{h} T_i T_j' d\xi, \quad C_{ij}^{e}\left(\boldsymbol{\delta}^{n}\right)=\int_{0}^{h} T_i T_k\left(\delta_k^{n}\right) T_j' d\xi,$$
$$D_{ij}^{e}=\int_{0}^{h} T_i T_j'' d\xi, \quad E_{ij}^{e}\left(\boldsymbol{\delta}^{n}\right)=\int_{0}^{h} T_i T_k'\left(\delta_k^{n}\right) T_j d\xi \tag{5.19}$$

olarak alınabilir. (5.19) ifadesinde gösterilen tüm matrisler bu bölümün başındaki Crank-Nicolson yönteminde anlatıldığı şekilde hesaplanır. Elde edilen tüm eleman matrislerinin $m=0,1,\ldots,N-1$ için uygun şekilde birbirlerine eklenmesi sonucunda,

$$\boldsymbol{\delta}=\left(\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \ldots, \delta_N, \delta_{N+1}\right)^{T}$$

olmak üzere (5.18) ifadesinden

$$\begin{aligned}&\left[\mathbf{A}-\mu\mathbf{D}+\frac{\Delta t}{2}\mathbf{B}+\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\left(2\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\delta}^{n}\right)-\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)+2\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n}\right)-\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)\right)\right]\boldsymbol{\delta}^{n+1}= \\ &\left[\mathbf{A}-\mu\mathbf{D}-\frac{\Delta t}{2}\mathbf{B}+\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n}\right)\left(\frac{3\Delta t\varepsilon}{2}\right)-\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\left(2\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)+2\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)\right)\right]\boldsymbol{\delta}^{n} \\ &+\left[\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)\right]\boldsymbol{\delta}^{n-1}\end{aligned} \tag{5.20}$$

denklem sistemi elde edilir.

(5.20) denklem sistemi $N+4$ denklem ve $N+4$ bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. Sınır şartlarını sisteme adapte edebilmek için denklem sistemindeki ilk ve son denklemler silinerek bölgenin uç noktalarındaki

$$u(a,t)=u(b,t)=0$$

sınır şartları kullanılarak δ_{-2}^{n+1} ve δ_{N+1}^{n+1} yok edilirse (5.20) denklem sistemi $(N+2)\times(N+2)$ matris sistemine indirgenmiş olur. Ulaşılan denklem sistemi Gauss eleminasyonu yardımıyla çözülebilir.

RLW denkleminin trigonometrik kuartik B-spline Galerkin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken elde edilen denklem sisteminin çözülebilmesi için

$$\left(\delta_{-2}^{0}, \delta_{-1}^{0}, \ldots, \delta_{N}^{0}, \delta_{N+1}^{0}\right)$$

başlangıç vektörünün bulunması gerekir. Bunun için RLW denkleminin başlangıç şartı olan

$$u\left(x,0\right)=f\left(x\right)$$

ve kuartik trigonometrik B-spline eşitlikleri kullanılır.

5.3.2. Zaman parçalanması için Adams Moulton yöntemi (KRAM3)

RLW denklemine Adams Moulton zaman parçalanması uygulayarak elde edilen eşitliği, (3.34) lineerleştirmesi ile $(n+1)$. zamana göre lineer hale getirerek gerekli düzenlemeler yapılarak,

$$\begin{aligned}
&u^{n+1}+\theta_1\Delta t\left(u_x\right)^{n+1}+\theta_1\Delta t\varepsilon\left(2(u_x)^n u^{n+1}-(u_x)^{n-1}u^{n+1}+\right.\\
&\left.2u^n(u_x)^{n+1}-u^{n-1}(u_x)^{n+1}\right)-\mu\left(u_{xx}\right)^{n+1}=\\
&u^n-\mu\left(u_{xx}\right)^n-\theta_2\Delta t\left(u_x\right)^n+u^n(u_x)^n(4\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_2\Delta t\varepsilon)-\\
&\theta_1\Delta t\varepsilon(2u^{n-1}\left(u_x\right)^n+2(u_x)^{n-1}u^n)-\theta_3\Delta t\left(u_x\right)^{n-1}+\\
&u^{n-1}\left(u_x\right)^{n-1}\left(\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_3\Delta t\varepsilon\right)
\end{aligned}$$

(3.41) eşitliğine ulaşılmıştır. $W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere (3.41) eşitliğine Galerkin metodu uygulanarak,

$$\begin{aligned}
&\int_a^b W(x)\left(u^{n+1}+\theta_1\Delta t\left(u_x\right)^{n+1}+\theta_1\Delta t\varepsilon\left(2(u_x)^n u^{n+1}-(u_x)^{n-1}u^{n+1}\right.\right.\\
&\left.\left.+\ 2u^n(u_x)^{n+1}-u^{n-1}(u_x)^{n+1}\right)-\mu\left(u_{xx}\right)^{n+1}\right)dx=\\
&\int_a^b W(x)\left(u^n-\mu\left(u_{xx}\right)^n-\theta_2\Delta t\left(u_x\right)^n+u^n(u_x)^n(4\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_2\Delta t\varepsilon)\right.\\
&-\theta_1\Delta t\varepsilon(2u^{n-1}\left(u_x\right)^n+2(u_x)^{n-1}u^n)-\theta_3\Delta t\left(u_x\right)^{n-1}\\
&\left.+u^{n-1}\left(u_x\right)^{n-1}\left(\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_3\Delta t\varepsilon\right)\right)dx
\end{aligned}$$

(3.42) eşitliği elde edilmiştir.

$[a,b]$ konum aralığı N eşit uzunluklu alt aralığa parçalanırsa, $[x_m,x_{m+1}]$ aralığı üzerinde $W\left(x\right)$ ağırlık fonksiyonu ve u,u_x,u_{xx} yerine T_m trigonometrik kuartik

B-spline fonksiyonları kullanıldığında (3.42) eşitliğinin düzenlenmiş formu olan,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)-\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j'' dx\right)+\theta_1\Delta t\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\right.\\
&+\theta_1\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-2}^{m+2}\left[2\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k'\left(\delta_k^n\right)T_j dx\right)-\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k'\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j dx\right)\right.\\
&\left.\left.+2\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' dx\right)-\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' dx\right)\right]\right\}\delta_j^{n+1}\\
&-\sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)-\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j'' dx\right)-\theta_2\Delta t\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\right.\\
&+\sum_{k=m-2}^{m+2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' dx\right)\left(4\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_2\Delta t\varepsilon\right)\\
&\left.-\theta_1\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-2}^{m+2}2\left[\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' dx\right)+\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k'\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j dx\right)\right]\right\}\delta_j^n\\
&+\sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\theta_3\Delta t\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\right.\\
&\left.-\sum_{k=m-2}^{m+2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' dx\right)\left(\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_3\Delta t\varepsilon\right)\right\}\delta_j^{n-1}
\end{aligned}
\tag{5.21}
$$

yaklaşımı elde edilir. Bu yaklaşım $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde olup $m = 0, 1, \ldots, N-1$ değerleri için her bir aralıktaki yaklaşımlar birleştirildiğinde (3.42) eşitliğine dönecektir.

(5.21) ifadesinde $\xi = x - x_m$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\left(\int_0^h T_iT_jd\xi\right)-\mu\left(\int_0^h T_iT_j''d\xi\right)+\theta_1\Delta t\left(\int_0^h T_iT_j'd\xi\right)\right.\\
&+\theta_1\Delta t\varepsilon\left[\sum_{k=m-2}^{m+2}2\left(\int_0^h T_iT_k'\left(\delta_k^n\right)T_jd\xi\right)-\sum_{k=m-2}^{m+2}\left(\int_0^h T_iT_k'\left(\delta_k^{n-1}\right)T_jd\xi\right)\right.\\
&\left.\left.+\sum_{k=m-2}^{m+2}2\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j'd\xi\right)-\sum_{k=m-2}^{m+2}\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j'd\xi\right)\right]\right\}\delta_j^{n+1}\\
&-\sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\left(\int_0^h T_iT_jd\xi\right)-\mu\left(\int_0^h T_iT_j''d\xi\right)-\theta_2\Delta t\left(\int_0^h T_iT_j'd\xi\right)\right.\\
&+\sum_{k=m-2}^{m+2}\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j'd\xi\right)\left(4\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_2\Delta t\varepsilon\right)\\
&\left.-\theta_1\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-2}^{m+2}2\left[\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j'd\xi\right)+\left(\int_0^h T_iT_k'\left(\delta_k^{n-1}\right)T_jd\xi\right)\right]\right\}\delta_j^n\\
&+\sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\theta_3\Delta t\left(\int_0^h T_iT_j'd\xi\right)\right.\\
&\left.-\sum_{k=m-2}^{m+2}\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j'd\xi\right)\left(\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_3\Delta t\varepsilon\right)\right\}\delta_j^{n-1}
\end{aligned}\tag{5.22}$$

elde edilir. (5.22) ifadesindeki integralleri hesaplamak için 2. bölümde elde edilen $T_{m-2}, T_{m-1}, T_m, T_{m+1}, T_{m+2}$ trigonometrik kuartik B-spline eşitlikleri kullanılacaktır. Bu durumda her bir alt aralıktaki eleman matrislerinin her bir elemanı i, j, k ; $m-2, m-1, m, m+1, m+2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
&A_{ij}^e=\int_0^h T_iT_jd\xi,\quad B_{ij}^e=\int_0^h T_iT_j'd\xi,\quad C_{ij}^e\left(\boldsymbol{\delta}^n\right)=\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j'd\xi,\\
&D_{ij}^e=\int_0^h T_iT_j''d\xi,\quad E_{ij}^e\left(\boldsymbol{\delta}^n\right)=\int_0^h T_iT_k'\left(\delta_k^n\right)T_jd\xi
\end{aligned}\tag{5.23}$$

olarak alınabilir. (5.23) ifadesinde gösterilen tüm matrisler bu bölümün başındaki Crank-Nicolson yönteminde anlatıldığı şekilde hesaplanır. Elde edilen tüm eleman matrislerinin $m = 0, 1, \ldots, N-1$ için uygun şekilde birbirlerine eklenmesi sonucunda, $\boldsymbol{\delta} = \left(\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \ldots, \delta_N, \delta_{N+1}\right)^T$ olmak üzere (5.22) ifadesinden

$$\begin{aligned}
&\left[\mathbf{A}-\mu\mathbf{D}+\theta_1\Delta t\mathbf{B}+\theta_1\Delta t\varepsilon\left(2\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\delta}^n\right)-\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)+2\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^n\right)-\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)\right)\right]\boldsymbol{\delta}^{n+1}=\\
&\left[\mathbf{A}-\mu\mathbf{D}-\theta_2\Delta t\mathbf{B}+\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^n\right)\left(4\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_2\Delta t\varepsilon\right)-2\theta_1\Delta t\varepsilon\left(\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)+\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)\right)\right]\boldsymbol{\delta}^n\\
&+\left[-\theta_3\Delta t\mathbf{B}+\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)\left(\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_3\Delta t\varepsilon\right)\right]\boldsymbol{\delta}^{n-1}
\end{aligned}\tag{5.24}$$

denklem sistemi elde edilir.

(5.24) denklem sistemi $N+4$ denklem ve $N+4$ bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. Sınır şartlarını sisteme adapte edebilmek için denklem sistemindeki ilk ve son denklemler silinerek bölgenin uç noktalarındaki

$$u(a,t) = u(b,t) = 0$$

sınır şartları kullanılarak δ_{-2}^{n+1} ve δ_{N+1}^{n+1} yok edilirse (5.24) denklem sistemi $(N+2)\times(N+2)$ matris sistemine indirgenmiş olur. Ulaşılan denklem sistemi Gauss eleminasyonu yardımıyla çözülebilir.

RLW denkleminin trigonometrik kuartik B-spline Galerkin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken elde edilen (5.24) denklem sisteminin çözülebilmesi için gereken

$$\left(\delta_{-2}^{0}, \delta_{-1}^{0}, \ldots, \delta_{N}^{0}, \delta_{N+1}^{0}\right)$$

başlangıç vektörü başlangıç şartından,

$$\left(\delta_{-2}^{1}, \delta_{-1}^{1} \ldots, \delta_{N}^{1}, \delta_{N+1}^{1}\right)$$

ilk bilinmeyenler vektörü ise Crank-Nicolson metodunun bir kez kullanılması ile bulunur.

5.4. Test Problemleri

5.4.1 Solitary dalgasının hareketi test problemi

$[a,b]$ aralığında tanımlı $3c$ genlikli, $v = 1+\varepsilon c$ dalga hızlı RLW denkleminin solitary dalga analitik çözümü $k = \sqrt{\dfrac{\varepsilon c}{4\mu v}}$ olmak üzere

$$u(x,t) = 3c\,\mathrm{sech}^2(k[x - \tilde{x}_0 - (1+\varepsilon c)t])$$

olarak ilk bölümde verilmişti. Analitik çözümde $t = 0$ alındığında

$$u(x,0) = 3c\,\mathrm{sech}^2(k[x - \tilde{x}_0])$$

başlangıç şartı elde edilebilir.

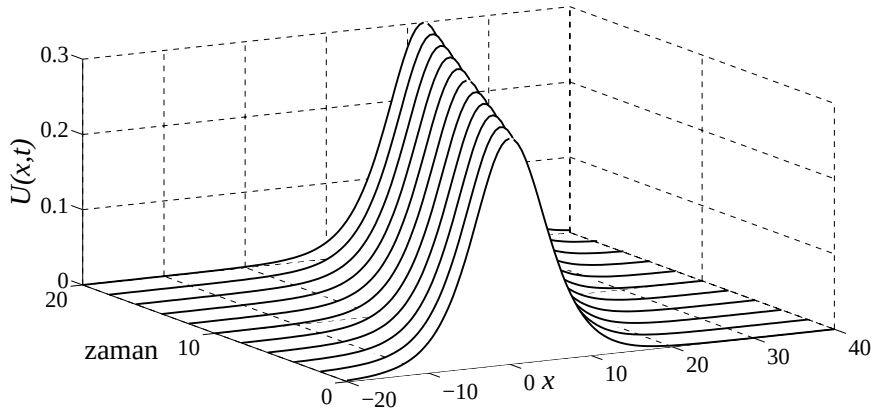
Başlangıç şartı kullanılarak RLW denkleminin üç korunum sabitinin tam değerleri

$$C_1 = \frac{6c}{k}, \quad C_2 = \frac{12c^2}{k} + \frac{48kc^2\mu}{5}, \quad C_3 = \frac{36c^2}{k}\left(1 + \frac{4c}{5}\right)$$

olarak bulunabilir.

Bu test probleminde $\varepsilon = \mu = 1$, $\tilde{x}_0 = 0$ parametreleri, $-100 \leq x \leq 120$ tanım aralıkları seçilerek $3c$ genlikli, $\tilde{x}_0 = 0$ noktasına tepe noktası karşılık gelecek şekilde yerleştirilmiş bir solitary dalgasının $v = 1 + \varepsilon c$ hızla sağa doğru hareketi $0 \leq t \leq 20$ zaman aralığında incelenmiştir. Verilen parametreler ve tanım aralıkları için $c = 0.1$ seçimi yapılarak önerilen tüm yöntemler için elde edilen sonuçlar tablolar halinde ve hata grafikleri çizilerek verilecektir.

$h = \Delta t = 0.1$ seçimi yapılarak belirli zamanlardaki dalganın konumunu gösteren şekil diğer metotlar için çizilen şekillerle arasında görsel biz fark olmamasından dolayı sadece KRCN1 metodu için çizilerek Şekil 5.1.'de verilmiştir. $t = 0$ anında tepe noktası $\tilde{x}_0 = 0$ noktasına karşılık gelecek şekilde yerleştirilen solitary dalgasının zamanla şeklinde bir bozulma olmadan hareket ettiği Şekil 5.1.'den görülebilir.



Şekil 5.1. $h = \Delta t = 0.1$ için çeşitli zamanlardaki $U(x,t)$.

Çizelge 5.1.'de konum ve zaman artımı aynı seçilerek $t = 20$ anındaki hata normları, hesaplama zamanları ve mertebeler verilmiştir. Tüm yöntemler için konum va zaman artımı değerleri 2'den 0.01'e kadar azaldıkça, hata normlarının da azaldıkları görülmektedir. Çizelge 5.1.'e göre Crank-Nicolson yöntemlerinin hata normları birbirlerine yakın sonuçlar verirken, Adams Moulton yöntemlerinden KRAM1 ve KRAM3'ün, KRAM2 yöntemine göre daha iyi sonuçlar verdikleri söylenebilir. KRCN1 ve KRAM1 ile temsil edilen iç iterasyonlu lineerleştirme yöntemleri iyi

sonuçlar vermelerine karşın, uygulanan iç iterasyondan dolayı hesaplama zamanı diğer yöntemlere göre daha fazladır. Bu sorunu gidermek için önerilen, KRCN3 ve KRAM3 ile temsil edilen lineerleştirme 3 yöntemleri, iç iterasyonlu lineerleştirme kadar iyi sonuçlar vermiş, aynı zamanda da hesaplama zamanı açısından büyük avantaj sağlamıştır. Son olarak, Çizelge 5.1.'de verilen tüm yöntemler mertebeye göre kıyaslanacak olursa, Crank-Nicolson yöntemlerinin kuadratik, Adams Moulton yöntemlerinin ise kübik mertebeye sahip oldukları söylenebilir.

Çizelge 5.1. $t = 20$ anındaki hata normları, hesaplama zamanları ve mertebe

	KRCN1			**KRAM1**		
$h = \Delta t$	L_∞	Cpu	Mertebe	L_∞	Cpu	Mertebe
2	3.06×10^{-2}	0.46	1.89	1.63×10^{-2}	0.37	2.99
1	8.26×10^{-3}	0.92	1.93	2.05×10^{-3}	0.84	3.01
0.5	2.17×10^{-3}	3.27	1.99	2.54×10^{-4}	3.15	3.00
0.2	3.51×10^{-4}	15.69	2.00	1.64×10^{-5}	15.36	3.00
0.1	8.79×10^{-5}	55.02	2.00	2.05×10^{-6}	54.16	3.00
0.05	2.20×10^{-5}	191.11	2.00	2.57×10^{-7}	183.81	3.00
0.02	3.52×10^{-6}	1075.81	2.00	1.64×10^{-8}	1019.04	2.91
0.01	8.79×10^{-7}	3900.55		2.05×10^{-9}	3898.52	
	KRCN2			**KRAM2**		
$h = \Delta t$	L_∞	Cpu	Mertebe	L_∞	Cpu	Mertebe
2	2.78×10^{-2}	0.23	1.92	1.57×10^{-2}	0.18	2.79
1	7.36×10^{-3}	0.15	1.93	2.27×10^{-3}	0.14	2.64
0.5	1.93×10^{-3}	0.39	1.99	3.64×10^{-4}	0.39	2.37
0.2	3.12×10^{-4}	2.04	2.00	4.15×10^{-5}	2.04	2.10
0.1	7.80×10^{-5}	8.00	2.00	9.65×10^{-6}	7.95	1.95
0.05	1.95×10^{-5}	31.63	2.00	2.49×10^{-6}	31.51	1.98
0.02	3.12×10^{-6}	207.34	2.00	4.06×10^{-7}	201.67	1.99
0.01	7.81×10^{-7}	792.57		1.02×10^{-7}	812.98	
	KRCN3			**KRAM3**		
$h = \Delta t$	L_∞	Cpu	Mertebe	L_∞	Cpu	Mertebe
2	3.21×10^{-2}	0.29640	1.93	1.71×10^{-2}	0.21	3.03
1	8.41×10^{-3}	0.17160	1.95	2.09×10^{-3}	0.17	3.00
0.5	2.18×10^{-3}	0.46800	1.99	2.61×10^{-4}	0.46	3.00
0.2	3.51×10^{-4}	2.48042	2.00	1.67×10^{-5}	2.52	3.00
0.1	8.79×10^{-5}	9.93726	2.00	2.09×10^{-6}	9.89	3.00
0.05	2.20×10^{-5}	39.68665	2.00	2.61×10^{-7}	39.53	3.00
0.02	3.52×10^{-6}	249.83560	2.00	1.67×10^{-8}	244.78	2.97
0.01	8.79×10^{-7}	993.18037		2.13×10^{-9}	989.42	

$h = \Delta t = 0.1$ seçilerek önerilen metodlar için korunum sabitlerinin mutlak hataları farklı zamanlarda hesaplanarak Çizelge 5.2.'de verilmiştir.

Çizelge 5.2. $h = \Delta t = 0.1$ seçimi için korunum sabitlerinin mutlak hataları

	KRCN1			**KRAM1**		
t	$(C_1)_h \times 10^{11}$	$(C_2)_h \times 10^4$	$(C_3)_h \times 10^5$	$(C_1)_h \times 10^{11}$	$(C_2)_h \times 10^4$	$(C_3)_h \times 10^5$
0	0.03	0.00014829	0.00000000	0.03	0.00014829	0.00000000
4	0.02	0.00015350	0.00010768	0.2	0.00520998	0.16703584
8	0.02	0.00016790	0.00040626	0.02	0.01037948	0.33762919
12	0.02	0.00018880	0.00084220	0.02	0.01554902	0.50822372
16	0.04	0.00021363	0.00136302	0.04	0.02071859	0.67881918
20	0.10	0.00024051	0.00192942	0.10	0.02588817	0.84941539
	KRCN2			**KRAM2**		
t	$(C_1)_h \times 10^{11}$	$(C_2)_h \times 10^4$	$(C_3)_h \times 10^5$	$(C_1)_h \times 10^{11}$	$(C_2)_h \times 10^4$	$(C_3)_h \times 10^5$
0	0.03	0.00014829	0.00000000	0.03	0.00014829	0.00000000
4	0.01	0.00014474	0.00014745	0.01	0.00521188	0.16709370
8	0.06	0.00013471	0.00056546	0.05	0.01038701	0.33785976
12	0.02	0.00011964	0.00119578	0.01	0.01556419	0.50869066
16	0.07	0.00010113	0.00197329	0.05	0.02074204	0.67954461
20	0.13	0.00008051	0.00284252	0.12	0.02591979	0.85039746
	KRCN3			**KRAM3**		
t	$(C_1)_h \times 10^{11}$	$(C_2)_h \times 10^4$	$(C_3)_h \times 10^5$	$(C_1)_h \times 10^{11}$	$(C_2)_h \times 10^4$	$(C_3)_h \times 10^5$
0	0.03	0.00014829	0.00000000	0.03	0.00014829	0.00000000
4	0.03	0.00015225	0.00006722	0.02	0.00520900	0.16700341
8	0.03	0.00016538	0.00032468	0.02	0.01037751	0.33756385
12	0.04	0.00018504	0.00071993	0.03	0.01554605	0.50812549
16	0.06	0.00020866	0.00120039	0.05	0.02071462	0.67868805
20	0.13	0.00023432	0.00172662	0.11	0.02588321	0.84925133

Sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü korunum sabitleri için mutlak hataya karşılık gelen $(C_1)_h$, $(C_2)_h$ ve $(C_3)_h$ değerlerinden, $(C_1)_h$ mutlak hatası sıfıra yakın değerler

alırken, $(C_2)_h$ ve $(C_3)_h$ hatalarının kabul edilebilir olduğu görülebilir.

$\Delta t = 0.001$ seçimi yapılarak konum artımının azalan değerleri ile her bir önerilen metot için hata normu ve mertebeler hesaplanarak Çizelge 5.3.'de verilmiştir.

Çizelge 5.3. Sabit $\Delta t = 0.001$ ve farklı konum artımları için hata normları ve mertebeler

	KRCN1		**KRCN2**		**KRCN3**	
h	L_∞	Mertebe	L_∞	Mertebe	L_∞	Mertebe
2	3.51×10^{-3}	10.67	3.36×10^{-3}	10.61	3.51×10^{-3}	10.67
1	2.15×10^{-6}	6.33	2.15×10^{-6}	6.40	2.15×10^{-6}	6.33
0.5	2.67×10^{-8}	1.20	2.55×10^{-8}	1.28	2.67×10^{-8}	1.21
0.2	8.83×10^{-9}	0.07	7.85×10^{-9}	0.07	8.83×10^{-9}	0.01
0.1	8.79×10^{-9}		7.81×10^{-9}		8.80×10^{-9}	
	KRAM1		**KRAM2**		**KRAM3**	
h	L_∞	Mertebe	L_∞	Mertebe	L_∞	Mertebe
2	3.51×10^{-3}	10.68	3.36×10^{-3}	10.62	3.51×10^{-3}	10.68
1	2.14×10^{-6}	6.50	2.14×10^{-6}	6.56	2.14×10^{-6}	6.50
0.5	2.36×10^{-8}	6.07	2.26×10^{-8}	3.47	2.36×10^{-8}	6.06
0.2	9.08×10^{-11}	5.35	9.38×10^{-10}	-0.13	9.11×10^{-11}	2.97
0.1	2.22×10^{-12}		1.03×10^{-9}		1.16×10^{-11}	

Çizelge 5.3.'den görüldüğü gibi, zaman artımı mümkün olduğu kadar küçültülüp, konum artımı azalan değerler aldığında yöntemlerin hata normları oldukça azalmıştır. Adams Moulton yöntemlerinin Crank-Nicolson yöntemlerine göre, ayrıca 1. ve 3. yöntemin 2. yönteme göre daha iyi sonuçlar verdiği Çizelge 5.3.'den söylenebilir.

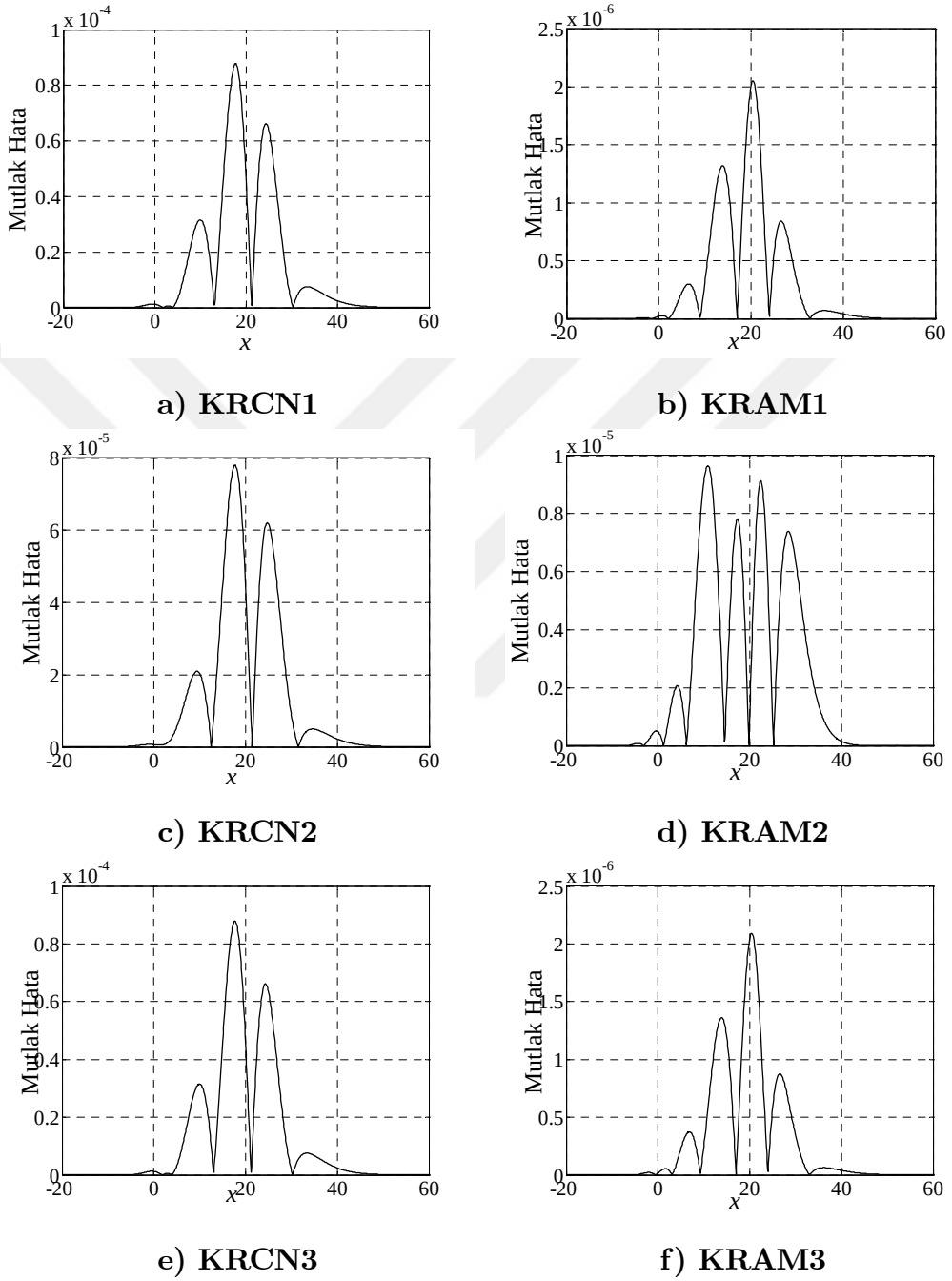
$h = 0.01$ seçimi yapılarak zaman artımının azalan değerleri için her bir önerilen metodun kullanımı sonucunda elde edilen hata normu ve mertebeler Çizelge 5.4.'de verilmiştir.

Çizelge 5.4. Sabit $h = 0.01$ ve farklı zaman artımları için hata normları ve mertebeler

	KRCN1		**KRCN2**		**KRCN3**	
Δt	L_∞	Mertebe	L_∞	Mertebe	L_∞	Mertebe
2	2.97×10^{-2}	1.82	2.68×10^{-2}	1.84	3.10×10^{-2}	1.85
1	8.40×10^{-3}	1.95	7.49×10^{-3}	1.95	8.56×10^{-3}	1.97
0.5	2.17×10^{-3}	1.99	1.93×10^{-3}	1.99	2.18×10^{-3}	1.99
0.2	3.51×10^{-4}	2.00	3.12×10^{-4}	2.00	3.51×10^{-4}	2.00
0.1	8.79×10^{-5}	2.00	7.80×10^{-5}	2.00	8.79×10^{-5}	2.00
0.05	2.20×10^{-5}	2.00	1.95×10^{-5}	2.00	2.20×10^{-5}	2.00
0.02	3.52×10^{-6}	2.00	3.12×10^{-6}	2.00	3.52×10^{-6}	2.00
0.01	8.79×10^{-7}		7.81×10^{-7}		8.79×10^{-7}	
	KRAM1		**KRAM2**		**KRAM3**	
Δt	L_∞	Mertebe	L_∞	Mertebe	L_∞	Mertebe
2	1.57×10^{-2}	2.94	1.57×10^{-2}	2.78	1.57×10^{-2}	2.91
1	2.05×10^{-3}	3.00	2.27×10^{-3}	2.64	2.10×10^{-3}	3.00
0.5	2.56×10^{-4}	3.00	3.65×10^{-4}	2.37	2.62×10^{-4}	3.00
0.2	1.64×10^{-5}	3.00	4.15×10^{-5}	2.10	1.67×10^{-5}	3.00
0.1	2.05×10^{-6}	3.00	9.65×10^{-6}	1.95	2.09×10^{-6}	3.00
0.05	2.57×10^{-7}	3.00	2.49×10^{-6}	1.98	2.62×10^{-7}	3.00
0.02	1.64×10^{-8}	3.00	4.06×10^{-7}	1.99	1.68×10^{-8}	2.97
0.01	2.05×10^{-9}		1.02×10^{-7}		2.14×10^{-9}	

Çizelge 5.4.'e göre, tüm yöntemler için hata normlarının değerleri Çizelge 5.1.'deki değerler ile uyumludur. Ayrıca Crank-Nicolson yöntemlerinin kuadratik, Adams Moulton yöntemlerinin ise kübik mertebelere sahip oldukları söylenebilir.

Şekil 5.2.'de ise her bir metot için $h = \Delta t = 0.1$ olarak konum ve zaman artımı seçildiğinde $t = 20$ anında bulunan mutlak hataları gösteren şekiller verilmiştir.



a) KRCN1 **b) KRAM1**

c) KRCN2 **d) KRAM2**

e) KRCN3 **f) KRAM3**

Şekil 5.2. $h = \Delta t = 0.1$ için mutlak hata grafikleri

Her bir yöntemin maksimum hatasının konum aralığının ortalarında olduğu ve Çizelge 5.1. ile uyumlu olduğu şekilden görülebilir.

5.4.2. İki solitary dalgasının çarpışması test problemi

Diğer bölümlerde de bahsedildiği gibi $k_i = \sqrt{\dfrac{\varepsilon c_i}{4\mu\,(1+\varepsilon c_i)}}, i = 1, 2$ olmak üzere,

$$u(x,0) = 3c_1\text{sech}^2(k_1[x-\tilde{x}_1]) + 3c_2\text{sech}^2(k_2[x-\tilde{x}_2]),$$

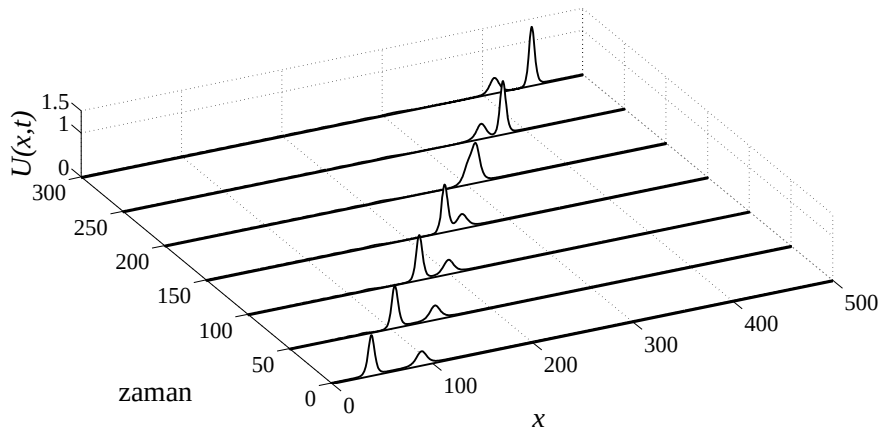
başlangıç şartı kullanılarak iki solitary dalgasının çarpışması test problemi üzerinde çalışılacaktır. Çarpışmanın gerçekleşebilmesi için $0 \leq x \leq 500$ konum aralığında $\varepsilon = \mu = 1$, $c_1 = 0.3$, $c_2 = 0.1$, $\tilde{x}_1 = 40$ ve $\tilde{x}_2 = 90$ değerleri kullanılarak programlar çalıştırılmıştır. Bu durumda genlik değerleri sırasıyla 0.9 ve 0.3 tepe noktaları ise $x = 40$ ve 90 değerlerine karşılık gelen iki solitary dalga elde edilmiştir.

Bu durumda korunum sabitlerinin analitik değerleri

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{6c_1}{k_1} + \frac{6c_2}{k_2} \simeq 11.4739473465046 \\
C_2 &= \frac{12c_1^2}{k_1} + \frac{48k_1c_1^2\mu}{5} + \frac{12c_2^2}{k_2} + \frac{48k_2c_2^2\mu}{5} \simeq 5.5143871404033, \\
C_3 &= \frac{36c_1^2}{k_1}\left(1+\frac{4c_1}{5}\right) + \frac{36c_2^2}{k_2}\left(1+\frac{4c_2}{5}\right) \simeq 19.3056100758906
\end{aligned}$$

olarak hesaplanabilir.

$h = \Delta t = 0.1$ seçimi yapılarak belirli zamanlardaki dalgaların konumunu gösteren şekil KRCN1 metodu için Şekil 5.3.'de verilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi dalgalar $t = 200$ civarında çarpışmış ve daha sonra ayrılarak yollarına devam etmişlerdir.



Şekil 5.3. $h = \Delta t = 0.1$ için çeşitli zamanlardaki $U(x,t)$.

Çizelge 5.5.'de iki solitary dalgasının çarpışması test problemi için korunum sabitlerinin belirli zamanlardaki yaklaşık değerleri verilmiştir.

Çizelge 5.5. İki solitary dalgasının çarpışması problemi için korunum sabitleri

	KRCN1			**KRAM1**		
t	C_1	C_2	C_3	C_1	C_2	C_3
0	11.47395	5.51440	19.30565	11.47395	5.51440	19.30565
50	11.47395	5.51440	19.30565	11.47395	5.51494	19.30777
100	11.47395	5.51440	19.30566	11.47395	5.51548	19.30989
150	11.47395	5.51446	19.30582	11.47395	5.51602	19.31197
200	11.47395	5.51505	19.30733	11.47395	5.51640	19.31346
250	11.47394	5.51474	19.30653	11.47394	5.51654	19.31400
300	11.47399	5.51442	19.30571	11.47399	5.51703	19.31588
	KRCN2			**KRAM2**		
0	11.47395	5.51440	19.30565	11.47395	5.51440	19.30565
50	11.47395	5.51439	19.30564	11.47395	5.51494	19.30777
100	11.47395	5.51439	19.30562	11.47395	5.51548	19.30987
150	11.47395	5.51433	19.30531	11.47395	5.51591	19.31155
200	11.47395	5.51374	19.30230	11.47395	5.51531	19.30925
250	11.47394	5.51405	19.30389	11.47394	5.51598	19.31182
300	11.47399	5.51437	19.30552	11.47399	5.51699	19.31573
	KRCN3			**KRAM3**		
0	11.47395	5.51440	19.30565	11.47395	5.51440	19.30565
50	11.47395	5.51440	19.30565	11.47395	5.51494	19.30776
100	11.47395	5.51440	19.30565	11.47395	5.51548	19.30988
150	11.47395	5.51446	19.30581	11.47395	5.51601	19.31196
200	11.47395	5.51504	19.30731	11.47395	5.51640	19.31344
250	11.47394	5.51474	19.30651	11.47394	5.51654	19.31399
300	11.47399	5.51442	19.30570	11.47399	5.51702	19.31586

Çizelge 5.5.'den de görüldüğü gibi korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri analitik değerleri ile uyumludur.

6. RLW DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ İÇİN TRİGONOMETRİK KUİNTİK B-SPLİNE GALERKİN YÖNTEMİ

Bu bölümde kuintik trigonometrik B-spline Galerkin yöntemi ile RLW denkleminin sayısal çözümlerinin bulunması amaçlanmıştır. Bu bölümde de daha önceki bölümlere benzer şekilde sayısal çözüm araştırılırken zaman parçalanması için Crank-Nicolson yöntemi, ve Crank-Nicolson yöntemine göre doğruluğu daha yüksek olan Adams Moulton yöntemi önerilmiştir. Konum ayrıştırılması için ise kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonları kullanılacaktır. Yöntemlerin uygulanması sonucunda 3 farklı lineerleştirme kullanılmış ve böylece 6 farklı yöntem ile sayısal çözüm araştırılmıştır. Böylece, konum ve zamana göre parçalanmış RLW denklemi cebirsel bir denklem sistemine dönüştürülmüştür. Bu sistem ise Gauss eleminasyonu yardımı ile çözülerek denklem sisteminin bilinmeyenleri elde edilmiş ve yaklaşık çözümde yerine yazılarak yaklaşık çözüm belirlenmiştir. Sayısal çözümün doğruluğu ise iki test problemi için incelenmiştir.

6.1. İç İterasyonlu Lineerleştirme

Bu bölümde lineerleştirme işlemi için iç iterasyon yapılacaktır.

6.1.1. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson yöntemi (KNCN1)

Trigonometrik kuadratik B-spline bölümünde RLW denklemine Crank-Nicolson zaman parçalanması uygulanmış, elde edilen eşitlik düzenlenmiş ve düzenlenen (3.8) eşitliğine $W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere Galerkin metodu uygulanarak,

$$\int_a^b W(x)\left(u^{n+1}+\frac{\Delta t}{2}\left(u_x\right)^{n+1}+\frac{\Delta t\varepsilon}{2}u^{n+1}\left(u_x\right)^{n+1}-\mu\left(u_{xx}\right)^{n+1}\right)dx=$$
$$\int_a^b W(x)\left(u^{n}-\mu\left(u_{xx}\right)^{n}-\frac{\Delta t}{2}\left(u_x\right)^{n}-\frac{\Delta t\varepsilon}{2}u^{n}\left(u_x\right)^{n}\right)dx$$

(3.9) eşitliğine ulaşılmıştır. Galerkin yönteminde $W\left(x\right)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x, u_{xx} yerine T_m trigonometrik kuintik B-spline fonksiyonları kullanılacaktır.

$[a,b]$ konum aralığı N eşit uzunluklu alt aralığa parçalanırsa, $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde $W\left(x\right)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x, u_{xx} yerine T_m trigonometrik kuintik

B-spline fonksiyonları kullanıldığında (3.9) eşitliğinin düzenlenmiş formu olan,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)\delta_j^{n+1}-\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j'' dx\right)\delta_j^{n+1}\right.\\
&\left.+\frac{\Delta t}{2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\delta_j^{n+1}+\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\sum_{k=m-2}^{m+3}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n+1}\right)T_j' dx\right)\delta_j^{n+1}\right\}\\
&-\sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)\delta_j^{n}-\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j'' dx\right)\delta_j^{n}\right.\\
&\left.-\frac{\Delta t}{2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\delta_j^{n}-\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\sum_{k=m-2}^{m+3}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n}\right)T_j' dx\right)\delta_j^{n}\right\}
\end{aligned}\tag{6.1}$$

yaklaşımı elde edilir. Bu yaklaşım $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde olup $m = 0, 1, ..., N-1$ değerleri için her bir aralıktaki yaklaşımlar birleştirildiğinde (3.9) eşitliğine dönecektir.

(6.1) yaklaşımında $\xi = x - x_m$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\left(\int_{0}^{h} T_iT_j d\xi\right)\delta_j^{n+1}-\mu\left(\int_{0}^{h} T_iT_j'' d\xi\right)\delta_j^{n+1}\right.\\
&\left.+\frac{\Delta t}{2}\left(\int_{0}^{h} T_iT_j' d\xi\right)\delta_j^{n+1}+\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\sum_{k=m-2}^{m+3}\left(\int_{0}^{h} T_iT_k\left(\delta_k^{n+1}\right)T_j' d\xi\right)\delta_j^{n+1}\right\}\\
&-\sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\left(\int_{0}^{h} T_iT_j d\xi\right)\delta_j^{n}-\mu\left(\int_{0}^{h} T_iT_j'' d\xi\right)\delta_j^{n}\right.\\
&\left.-\frac{\Delta t}{2}\left(\int_{0}^{h} T_iT_j' d\xi\right)\delta_j^{n}-\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\sum_{k=m-2}^{m+3}\left(\int_{0}^{h} T_iT_k\left(\delta_k^{n}\right)T_j' d\xi\right)\delta_j^{n}\right\}
\end{aligned}\tag{6.2}$$

ifadesi elde edilir. (6.2) ifadesindeki integralleri hesaplamak için 2. bölümde elde edilen $T_{m-2}, T_{m-1}, T_m, T_{m+1}, T_{m+2}, T_{m+3}$ trigonometrik kuintik B-spline eşitlikleri kullanılacaktır. Bu durumda her bir alt aralıktaki eleman matrislerinin her bir elemanı i, j, k ; $m-2$, $m-1$, m, $m+1$, $m+2$, $m+3$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
A_{ij}^e &= \int_0^h T_iT_j d\xi, \quad B_{ij}^e = \int_0^h T_iT_j' d\xi, \\
C_{ij}^e(\boldsymbol{\delta}^n) &= \int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' d\xi, \quad D_{ij}^e = \int_0^h T_iT_j'' d\xi
\end{aligned}\tag{6.3}$$

olarak alınabilir. (6.3) eşitlikleriyle verilen $\mathbf{A}^e$ eleman matrisi

$$\mathbf{A}^e = \begin{bmatrix} A_{m-2,m-2} & A_{m-2,m-1} & A_{m-2,m} & A_{m-2,m+1} & A_{m-2,m+2} & A_{m-2,m+3} \\ A_{m-1,m-2} & A_{m-1,m-1} & A_{m-1,m} & A_{m-1,m+1} & A_{m-1,m+2} & A_{m-1,m+3} \\ A_{m,m-2} & A_{m,m-1} & A_{m,m} & A_{m,m+1} & A_{m,m+2} & A_{m,m+3} \\ A_{m+1,m-2} & A_{m+1,m-1} & A_{m+1,m} & A_{m+1,m+1} & A_{m+1,m+2} & A_{m+1,m+3} \\ A_{m+2,m-2} & A_{m+2,m-1} & A_{m+2,m} & A_{m+2,m+1} & A_{m+2,m+2} & A_{m+2,m+3} \\ A_{m+3,m-2} & A_{m+3,m-1} & A_{m+3,m} & A_{m+3,m+1} & A_{m+3,m+2} & A_{m+3,m+3} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. 6×6'lık eleman matrisinin, her bir elemanını bulmak için gerekli olan integrallerin hesaplanmasında trigonometrik kuintik B-spline eşitlikleri kullanılır. $\mathbf{B}^e$ ve $\mathbf{D}^e$ matrislerinin hesaplanması da $\mathbf{A}^e$ matrisine benzer şekilde yapılır. $\mathbf{C}^e$ matrisi ise, integraldeki T_k nedeniyle, k indisinin $m-2, m-1, m, m+1, m+2$, $m+3$ adımlarından kaynaklanan altışar elemanı daha olacaktır ve bu nedenle diğer matrislerden farklı şekilde bulunur. Bu matrisin her bir elemanında . $\mathbf{C}^e$ matrisinin ilk elemanı $i=j=m-2$ alındığında

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^e_{m-2m-2}\left(\boldsymbol{\delta}^n\right) &= \int_0^h T_{m-2}T_{m-2}\left(\delta^n_{m-2}\right)T'_{m-2}d\xi + \int_0^h T_{m-2}T_{m-1}\left(\delta^n_{m-1}\right)T'_{m-2}d\xi \\ &+ \int_0^h T_{m-2}T_{m}\left(\delta^n_{m}\right)T'_{m-2}d\xi + \int_0^h T_{m-2}T_{m+1}\left(\delta^n_{m+1}\right)T'_{m-2}d\xi \\ &+ \int_0^h T_{m-2}T_{m+2}\left(\delta^n_{m+2}\right)T'_{m-2}d\xi + \int_0^h T_{m-2}T_{m+3}\left(\delta^n_{m+3}\right)T'_{m-2}d\xi \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu bulduğumuz eşitlik, k indisinin değerleri için $\mathbf{C}^e$ eleman matrisinin sadece ilk elemanıdır. Bulunan eleman matrislerinin $m=0,1,\ldots,N-1$ için uygun şekilde birbirlerine eklenmesi sonucunda,

$$\boldsymbol{\delta} = \left(\delta_{-2},\delta_{-1},\delta_0,\ldots,\delta_N,\delta_{N+1},\delta_{N+2}\right)^T$$

olmak üzere (6.2) ifadesinden,

$$\left[\mathbf{A}-\mu\mathbf{D}+\frac{\Delta t}{2}\mathbf{B}+\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n+1}\right)\right]\boldsymbol{\delta}^{n+1} = \left[\mathbf{A}-\mu\mathbf{D}-\frac{\Delta t}{2}\mathbf{B}-\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n}\right)\right]\boldsymbol{\delta}^{n} \qquad (6.4)$$

denklem sistemi elde edilir.

(6.4) denklem sistemi $N+5$ denklem ve $N+5$ bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. Sınır şartlarını sisteme adapte edebilmek için denklem sistemindeki ilk

ve son denklemler silinerek bölgenin uç noktalarındaki

$$u(a,t) = u(b,t) = 0$$

sınır şartları kullanılarak δ_{-2}^{n+1} ve δ_{N+2}^{n+1} yok edilirse (6.4) denklem sistemi $(N+3)\times(N+3)$ matris sistemine indirgenmiş olur. Ulaşılan denklem sistemi Gauss eleminasyonu yardımıyla çözülebilir.

RLW denkleminin trigonometrik kuintik B-spline Galerkin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken elde edilen denklem sisteminin çözülebilmesi için

$$\left(\delta_{-2}^{0}, \delta_{-1}^{0}, \delta_{0}^{0}, \ldots, \delta_{N}^{0}, \delta_{N+1}^{0}, \delta_{N+2}^{0}\right)$$

başlangıç vektörünün bulunması gerekir. Bunun için RLW denkleminin başlangıç şartı olan

$$u\left(x,0\right) = f\left(x\right)$$

ve kuintik trigonometrik B-spline eşitlikleri kullanılabilir.

6.1.2. Zaman parçalanması için Adams Moulton yöntemi (KNAM1)

Trigonometrik kuadratik B-spline bölümünde RLW denklemine Adams Moulton zaman parçalanması uygulanmış, elde edilen denklem düzenlenerek (3.15) eşitliği elde edilmiş, bu eşitliğe $W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere Galerkin metodu uygulanarak,

$$\int_{a}^{b} W(x)\left(u^{n+1} + \theta_1\Delta t\left(u_x\right)^{n+1} + \theta_1\Delta t\varepsilon u^{n+1}\left(u_x\right)^{n+1} - \mu\left(u_{xx}\right)^{n+1}\right)dx =$$
$$\int_{a}^{b} W(x)\left(u^{n} - \mu\left(u_{xx}\right)^{n} - \theta_2\Delta t\left(u_x\right)^{n} - \theta_2\Delta t\varepsilon u^{n}\left(u_x\right)^{n} - \theta_3\Delta t\left(u_x\right)^{n-1}\right.$$
$$\left.-\theta_3\Delta t\varepsilon u^{n-1}\left(u_x\right)^{n-1}\right)dx$$

(3.16) eşitliği bulunmuştur. Galerkin yönteminde $W\left(x\right)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x, u_{xx} yerine T_m trigonometrik kuintik B-spline fonksiyonları kullanılacaktır.

$[a,b]$ konum aralığı N eşit uzunluklu alt aralığa parçalanırsa, $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde $W\left(x\right)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x, u_{xx} yerine T_m trigonometrik kuintik

B-spline fonksiyonları kullanıldığında (3.16) eşitliğinin düzenlenmiş formu olan,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)-\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j'' dx\right)\right.\\
&\left.+\theta_1\Delta t\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)+\theta_1\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-2}^{m+3}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n+1}\right)T_j' dx\right)\right\}\delta_j^{n+1}\\
&-\sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)-\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j'' dx\right)-\theta_2\Delta t\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\right.\\
&\left.-\theta_2\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-2}^{m+3}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n}\right)T_j' dx\right)\right\}\delta_j^{n}\\
&+\sum_{j=m-2}^{m+3}\theta_3\Delta t\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)+\varepsilon\sum_{k=m-2}^{m+3}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' dx\right)\right\}\delta_j^{n-1}
\end{aligned}\tag{6.5}$$

yaklaşımı elde edilir. Bu yaklaşım $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde olup $m = 0, 1, \ldots, N-1$ değerleri için her bir aralıktaki yaklaşımlar birleştirildiğinde (3.16) eşitliğine dönecektir.

(6.5) ifadesinde $\xi = x - x_m$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\left(\int_{0}^{h} T_iT_j d\xi\right)-\mu\left(\int_{0}^{h} T_iT_j'' d\xi\right)\right.\\
&\left.+\theta_1\Delta t\left(\int_{0}^{h} T_iT_j' d\xi\right)+\theta_1\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-2}^{m+3}\left(\int_{0}^{h} T_iT_k\left(\delta_k^{n+1}\right)T_j' d\xi\right)\right\}\delta_j^{n+1}\\
&-\sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\left(\int_{0}^{h} T_iT_j d\xi\right)-\mu\left(\int_{0}^{h} T_iT_j'' d\xi\right)-\theta_2\Delta t\left(\int_{0}^{h} T_iT_j' d\xi\right)\right.\\
&\left.-\theta_2\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-2}^{m+3}\left(\int_{0}^{h} T_iT_k\left(\delta_k^{n}\right)T_j' d\xi\right)\right\}\delta_j^{n}\\
&+\sum_{j=m-2}^{m+3}\theta_3\Delta t\left\{\left(\int_{0}^{h} T_iT_j' d\xi\right)+\varepsilon\sum_{k=m-2}^{m+3}\left(\int_{0}^{h} T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' d\xi\right)\right\}\delta_j^{n-1}
\end{aligned}\tag{6.6}$$

elde edilir. (6.6) ifadesindeki integralleri hesaplamak için 2. bölümde elde edilen $T_{m-2}, T_{m-1}, T_m, T_{m+1}, T_{m+2}, T_{m+3}$ trigonometrik kuintik B-spline eşitlikleri kullanılacaktır. Bu durumda her bir alt aralıktaki eleman matrislerinin her bir elemanı i, j, k ; $m-2$, $m-1$, m, $m+1$, $m+2$, $m+3$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
A_{ij}^e &= \int_0^h T_iT_j d\xi, \quad B_{ij}^e = \int_0^h T_iT_j' d\xi, \\
C_{ij}^e(\boldsymbol{\delta}^n) &= \int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' d\xi, \quad D_{ij}^e = \int_0^h T_iT_j'' d\xi
\end{aligned}\tag{6.7}$$

olarak alınabilir. (6.7) ifadesiyle gösterilen tüm matrisler Crank-Nicolson yönteminde anlatıldığı şekilde hesaplanır. Elde edilen tüm eleman matrislerinin $m = 0, 1, \ldots, N-1$ için uygun şekilde birbirlerine eklenmesi sonucunda,

$$\boldsymbol{\delta} = \left(\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \ldots, \delta_N, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}\right)^T$$

olmak üzere (6.6) ifadesinden

$$\begin{aligned} &\left[\mathbf{A}-\mu\mathbf{D}+\theta_1\Delta t\mathbf{B} + \theta_1\Delta t\varepsilon\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n+1}\right)\right]\boldsymbol{\delta}^{n+1} = \\ &\left[\mathbf{A}-\mu\mathbf{D}-\theta_2\Delta t\mathbf{B}-\theta_2\Delta t\varepsilon\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n}\right)\right]\boldsymbol{\delta}^{n} \\ &-\left[\theta_3\Delta t\mathbf{B}+\theta_3\Delta t\varepsilon\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)\right]\boldsymbol{\delta}^{n-1} \end{aligned} \tag{6.8}$$

denklem sistemi elde edilir.

(6.8) denklem sistemi $N + 5$ denklem ve $N + 5$ bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. Sınır şartlarını sisteme adapte edebilmek için denklem sistemindeki ilk ve son denklemler silinerek bölgenin uç noktalarındaki

$$u(a, t) = u(b, t) = 0$$

sınır şartları kullanılarak δ_{-2}^{n+1} ve δ_{N+2}^{n+1} yok edilirse (6.8) denklem sistemi $(N + 3) \times (N + 3)$ matris sistemine indirgenmiş olur. Ulaşılan denklem sistemi Gauss eleminasyonu yardımıyla çözülebilir.

RLW denkleminin trigonometrik kuintik B-spline Galerkin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken elde edilen (6.8) denklem sisteminin çözülebilmesi için

$$\left(\delta_{-2}^0, \delta_{-1}^0, \ldots, \delta_{N+1}^0, \delta_{N+2}^0\right)$$

başlangıç vektörü ve

$$\left(\delta_{-2}^1, \delta_{-1}^1, \ldots, \delta_{N+1}^1, \delta_{N+2}^1\right)$$

vektörünün bulunması gerekmektedir. Başlangıç vektörü başlangıç şartından bulunabilirken,

$$\left(\delta_{-2}^1, \delta_{-1}^1, \ldots, \delta_{N+1}^1, \delta_{N+2}^1\right)$$

vektörünün bulunabilmesi için ise Crank-Nicolson programda bir kez çalıştırılmalıdır.

6.2. Lineerleştirme 1

Bu bölümde lineerleştirme işlemi için Rubin Graves lineerleştirmesi yapılacaktır.

6.2.1. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson yöntemi (KNCN2)

Daha önce de gösterildiği gibi, RLW denklemine Crank-Nicolson zaman parçalanması uygulanmış, elde edilen eşitlik (3.21) Rubin Graves lineerleştirmesi ile lineerleştirilmiş ve $W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere (3.22) eşitliğine Galerkin metodu uygulanarak,

$$\int_a^b W(x)\left(u^{n+1}+\frac{\Delta t}{2}u_x^{n+1}+\frac{\varepsilon\Delta t}{2}(u^n u_x^{n+1}+u_x^n u^{n+1})-\mu u_{xx}^{n+1}\right)dx=$$
$$\int_a^b W(x)\left(u^n-\frac{\Delta t}{2}u_x^n-\mu u_{xx}^n\right)dx$$

(3.23) eşitliğine ulaşılmıştır. Galerkin yönteminde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x, u_{xx} yerine T_m trigonometrik kuintik B-spline fonksiyonları kullanılacaktır.

$[a,b]$ konum aralığı N eşit uzunluklu alt aralığa parçalanırsa, $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x, u_{xx} yerine T_m trigonometrik kuintik B-spline fonksiyonları kullanıldığında (3.23) eşitliğinin düzenlenmiş formu olan,

$$\begin{aligned}&\sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}}T_iT_j dx\right)+\frac{\Delta t}{2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}}T_iT_j' dx\right)\delta_j^{n+1}-\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}}T_iT_j'' dx\right)\right.\\&\left.+\frac{\varepsilon\Delta t}{2}\sum_{k=m-2}^{m+3}\left[\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}}T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' dx\right)+\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}}T_iT_k'\left(\delta_k^n\right)T_j dx\right)\right]\right\}\delta_j^{n+1}\\&-\sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}}T_iT_j dx\right)-\frac{\Delta t}{2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}}T_iT_j' dx\right)-\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}}T_iT_j'' dx\right)\right\}\delta_j^n\end{aligned}\qquad(6.9)$$

yaklaşımı elde edilir. Bu yaklaşım $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde olup $m=0,1,\ldots,N-1$ değerleri için her bir aralıktaki yaklaşımlar birleştirildiğinde (3.23) eşitliğine dönecektir.

(6.9) ifadesinde $\xi = x - x_m$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned}&\sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\left(\int_0^h T_iT_j d\xi\right)+\frac{\Delta t}{2}\left(\int_0^h T_iT_j' d\xi\right)-\mu\left(\int_0^h T_iT_j'' d\xi\right)\right.\\&\left.+\frac{\varepsilon\Delta t}{2}\sum_{k=m-2}^{m+3}\left[\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' d\xi\right)+\left(\int_0^h T_iT_k'\left(\delta_k^n\right)T_j d\xi\right)\right]\right\}\delta_j^{n+1}\\&-\sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\left(\int_0^h T_iT_j d\xi\right)-\frac{\Delta t}{2}\left(\int_0^h T_iT_j' d\xi\right)-\mu\left(\int_0^h T_iT_j'' d\xi\right)\right\}\delta_j^n\end{aligned}\qquad(6.10)$$

elde edilir. (6.10) ifadesindeki integralleri hesaplamak için 2. bölümde elde edilen $T_{m-2}, T_{m-1}, T_m, T_{m+1}, T_{m+2}, T_{m+3}$ trigonometrik kuintik B-spline eşitlikleri kullanılacaktır. Bu durumda her bir alt aralıktaki eleman matrislerinin her bir elemanı i, j, k ; $m-2, m-1, m, m+1, m+2, m+3$ olmak üzere,

$$A_{ij}^{e} = \int_{0}^{h} T_i T_j d\xi, \quad B_{ij}^{e} = \int_{0}^{h} T_i T_j' d\xi, \quad C_{ij}^{e}\left(\boldsymbol{\delta}^{n}\right) = \int_{0}^{h} T_i T_k\left(\delta_k^{n}\right) T_j' d\xi,$$
$$D_{ij}^{e} = \int_{0}^{h} T_i T_j'' d\xi, \quad E_{ij}^{e}\left(\boldsymbol{\delta}^{n}\right) = \int_{0}^{h} T_i T_k'\left(\delta_k^{n}\right) T_j d\xi \tag{6.11}$$

olarak alınabilir. (6.11) ifadesinde gösterilen tüm matrisler Crank-Nicolson yönteminde anlatıldığı şekilde hesaplanır. Elde edilen tüm eleman matrislerinin $m = 0, 1, \ldots, N-1$ için uygun şekilde birbirlerine eklenmesi sonucunda,

$$\boldsymbol{\delta} = \left(\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \ldots, \delta_N, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}\right)^T$$

olmak üzere (6.10) yaklaşımından

$$\left[\mathbf{A} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{B} + \varepsilon\frac{\Delta t}{2}\left(\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n}\right) + \mathbf{E}\left(\boldsymbol{\delta}^{n}\right)\right) - \mu\mathbf{D}\right]\boldsymbol{\delta}^{n+1} = \left[\mathbf{A} - \frac{\Delta t}{2}\mathbf{B} - \mu\mathbf{D}\right]\boldsymbol{\delta}^{n} \tag{6.12}$$

denklem sistemi elde edilir.

(6.12) denklem sistemi $N+5$ denklem ve $N+5$ bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. Sınır şartlarını sisteme adapte edebilmek için denklem sistemindeki ilk ve son denklemler silinerek bölgenin uç noktalarındaki

$$u(a,t) = u(b,t) = 0$$

sınır şartları kullanılarak δ_{-2}^{n+1} ve δ_{N+2}^{n+1} yok edilirse (6.12) denklem sistemi $(N+3)\times(N+3)$ matris sistemine indirgenmiş olur. Ulaşılan denklem sistemi Gauss eleminasyonu yardımıyla çözülebilir.

RLW denkleminin trigonometrik kuintik B-spline Galerkin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken elde edilen denklem sisteminin çözülebilmesi için

$$\left(\delta_{-2}^{0}, \delta_{-1}^{0}, \delta_0^{0}, \ldots, \delta_N^{0}, \delta_{N+1}^{0}, \delta_{N+2}^{0}\right)$$

başlangıç vektörünün bulunması gerekir. Bunun için RLW denkleminin başlangıç şartı olan

$$u\left(x,0\right) = f\left(x\right)$$

ve kuintik trigonometrik B-spline eşitlikleri kullanılabilir.denklem sistemi elde edilir.

6.2.2. Zaman parçalanması için Adams Moulton yöntemi (KNAM2)

RLW denklemine Adams Moulton zaman parçalanması uygulanmış, elde edilen eşitliği $(n+1)$. zamana göre lineerleştirmek için Rubin Graves lineerleştirmesi yapılarak aşağıdaki (3.28) eşitliği

$$u^{n+1}+\theta_1\Delta t\,(u_x)^{n+1}+\theta_1\Delta t\varepsilon\,(u^n(u_x)^{n+1}+(u_x)^n u^{n+1})-\mu\,(u_{xx})^{n+1}=u^n-\mu\,(u_{xx})^n$$

$$-\theta_2\Delta t\,(u_x)^n+(\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_2\Delta t\varepsilon)u^n\,(u_x)^n-\theta_3\Delta t((u_x)^{n-1}+\varepsilon u^{n-1}\,(u_x)^{n-1})$$

elde edilmiştir. $W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere (3.28) eşitliğine Galerkin metodu uygulayarak,

$$\int_a^b W(x)\left(u^{n+1}+\theta_1\Delta t\,(u_x)^{n+1}+\theta_1\Delta t\varepsilon\,(u^n(u_x)^{n+1}+(u_x)^n u^{n+1})-\mu\,(u_{xx})^{n+1}\right)dx=$$

$$\int_a^b W(x)\left(u^n-\mu\,(u_{xx})^n-\theta_2\Delta t\,(u_x)^n+(\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_2\Delta t\varepsilon)u^n\,(u_x)^n-\theta_3\Delta t((u_x)^{n-1}\right.$$

$$\left.+\varepsilon u^{n-1}\,(u_x)^{n-1})\right)dx$$

(3.29) eşitliğine ulaşılmıştır. Galerkin yönteminde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x, u_{xx} yerine T_m trigonometrik kuintik B-spline fonksiyonları kullanılacaktır.

$[a,b]$ konum aralığı N eşit uzunluklu alt aralığa parçalanırsa, $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x, u_{xx} yerine T_m trigonometrik kuintik B-spline fonksiyonları kullanıldığında (3.29) eşitliğinin düzenlenmiş formu olan,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)-\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j'' dx\right)+\theta_1\Delta t\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\right.\\
&\left.+\theta_1\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-2}^{m+3}\left[\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\,(\delta_k^n)\,T_j' dx\right)+\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k'\,(\delta_k^n)\,T_j dx\right)\right]\right\}\delta_j^{n+1}\\
&-\sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)-\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j'' dx\right)-\theta_2\Delta t\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\right.\\
&\left.+\sum_{k=m-2}^{m+3}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\,(\delta_k^n)\,T_j' dx\right)(\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_2\Delta t\varepsilon)\right\}\delta_j^n\\
&+\sum_{j=m-2}^{m+3}\theta_3\Delta t\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)+\varepsilon\sum_{k=m-2}^{m+3}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' dx\right)\right\}\delta_j^{n-1}
\end{aligned}\tag{6.13}$$

yaklaşımı elde edilir. Bu yaklaşım $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde olup $m = 0, 1, ..., N-1$ değerleri için her bir aralıktaki yaklaşımlar birleştirildiğinde (3.29) eşitliğine dönecektir.

(6.13) yaklaşımında $\xi = x - x_m$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\left(\int_0^h T_iT_jd\xi\right)-\mu\left(\int_0^h T_iT_j''d\xi\right)+\theta_1\Delta t\left(\int_0^h T_iT_j'd\xi\right)\right.\\
&\left.+\theta_1\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-2}^{m+3}\left[\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j'd\xi\right)+\left(\int_0^h T_iT_k'\left(\delta_k^n\right)T_jd\xi\right)\right]\right\}\delta_j^{n+1}\\
&-\sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\left(\int_0^h T_iT_jd\xi\right)-\mu\left(\int_0^h T_iT_j''d\xi\right)-\theta_2\Delta t\left(\int_0^h T_iT_j'd\xi\right)\right.\\
&\left.+\sum_{k=m-2}^{m+3}\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j'd\xi\right)\left(\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_2\Delta t\varepsilon\right)\right\}\delta_j^n\\
&+\sum_{j=m-2}^{m+3}\theta_3\Delta t\left\{\left(\int_0^h T_iT_j'd\xi\right)+\varepsilon\sum_{k=m-2}^{m+3}\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j'd\xi\right)\right\}\delta_j^{n-1}
\end{aligned}\tag{6.14}$$

elde edilir. (6.14) ifadesindeki integralleri hesaplamak için 2. bölümde elde edilen $T_{m-2}, T_{m-1}, T_m, T_{m+1}, T_{m+2}, T_{m+3}$ trigonometrik kuintik B-spline eşitlikleri kullanılacaktır. Bu durumda her bir alt aralıktaki eleman matrislerinin her bir elemanı i, j, k ; $m-2, m-1, m, m+1, m+2, m+3$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
&A_{ij}^e=\int_0^h T_iT_jd\xi,\quad B_{ij}^e=\int_0^h T_iT_j'd\xi,\quad C_{ij}^e\left(\boldsymbol{\delta}^n\right)=\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j'd\xi,\\
&D_{ij}^e=\int_0^h T_iT_j''d\xi,\quad E_{ij}^e\left(\boldsymbol{\delta}^n\right)=\int_0^h T_iT_k'\left(\delta_k^n\right)T_jd\xi
\end{aligned}\tag{6.15}$$

olacaktır. (6.15) ifadesinde gösterilen tüm matrisler Crank-Nicolson yönteminde anlatıldığı şekilde hesaplanır. Elde edilen tüm eleman matrislerinin $m = 0, 1, \ldots, N-1$ için uygun şekilde birbirlerine eklenmesi sonucunda,

$$\boldsymbol{\delta}=\left(\delta_{-2},\delta_{-1},\delta_0,\ldots,\delta_N,\delta_{N+1},\delta_{N+2}\right)^T$$

olmak üzere (6.14) yaklaşımından

$$\begin{aligned}
&\left[\mathbf{A}-\mu\mathbf{D}+\theta_1\Delta t\varepsilon\left(\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{n}}\right)+\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{n}}\right)\right)+\theta_1\Delta t\mathbf{B}\right]\boldsymbol{\delta}^{n+1}=\\
&\left[\mathbf{A}-\mu\mathbf{D}+\left(\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_2\Delta t\varepsilon\right)\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{n}}\right)-\theta_2\Delta t\mathbf{B}\right]\boldsymbol{\delta}^n\\
&-\left[\theta_3\Delta t\mathbf{B}+\theta_3\Delta t\varepsilon\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{n-1}}\right)\right]\boldsymbol{\delta}^{n-1}
\end{aligned}\tag{6.16}$$

denklem sistemi elde edilir.

(6.16) denklem sistemi $N+5$ denklem ve $N+5$ bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. Sınır şartlarını sisteme adapte edebilmek için denklem sistemindeki ilk ve son denklemler silinerek bölgenin uç noktalarındaki

$$u(a,t) = u(b,t) = 0$$

sınır şartları kullanılarak δ_{-2}^{n+1} ve δ_{N+2}^{n+1} yok edilirse (6.16) denklem sistemi $(N+3)\times(N+3)$ matris sistemine indirgenmiş olur. Ulaşılan denklem sistemi Gauss eleminasyonu yardımıyla çözülebilir.

RLW denkleminin trigonometrik kuintik B-spline Galerkin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken elde edilen (6.16) denklem sisteminin çözülebilmesi için

$$\left(\delta_{-2}^{0}, \delta_{-1}^{0}, \ldots, \delta_{N+1}^{0}, \delta_{N+2}^{0}\right)$$

başlangıç vektörü ve

$$\left(\delta_{-2}^{1}, \delta_{-1}^{1}, \ldots, \delta_{N+1}^{1}, \delta_{N+2}^{1}\right)$$

vektörünün bulunması gerekmektedir. Başlangıç vektörü başlangıç şartından bulunabilirken,

$$\left(\delta_{-2}^{1}, \delta_{-1}^{1}, \ldots, \delta_{N+1}^{1}, \delta_{N+2}^{1}\right)$$

vektörünün bulunabilmesi için Crank-Nicolson programda bir kez çalıştırılmalıdır.

6.3. Lineerleştirme 2

Daha önceki bölümlerde bahsedildiği gibi, bu bölümde lineerleştirme işlemi için Rubin Graves lineerleştirmesine benzeyen, doğruluğu daha yüksek olan yeni bir lineerleştirme önerilecektir.

6.3.1. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson yöntemi (KNCN3)

Trigonometrik kuadratik B-spline bölümünde RLW denklemine Crank-Nicolson zaman parçalanması uygulanmış, elde edilen eşitliğe önerilen (3.34)

$$\begin{aligned}(uu_x)^{n+1} &= 2u_x^n u^{n+1} - u_x^{n-1}u^{n+1} + 2u^n u_x^{n+1} - u^{n-1}u_x^{n+1} + 2u^n u_x^{n-1} \\ &\quad +2u^{n-1}u_x^n - 4u^n u_x^n - u^{n-1}u_x^{n-1} + \mathcal{O}((\Delta t)^4)\end{aligned}$$

lineerleştirmesi uygulanmış ve aşağıdaki (3.35)

$$u^{n+1}+\frac{\Delta t}{2}(u_x)^{n+1}+\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\left(2(u_x)^n u^{n+1}-(u_x)^{n-1}u^{n+1}+2u^n(u_x)^{n+1}-u^{n-1}(u_x)^{n+1}\right)$$
$$-\mu(u_{xx})^{n+1}=u^n-\mu(u_{xx})^n-\frac{\Delta t}{2}(u_x)^n+u^n(u_x)^n\left(\frac{3\Delta t\varepsilon}{2}\right)$$
$$-\frac{\Delta t\varepsilon}{2}(2u^{n-1}(u_x)^n+2(u_x)^{n-1}u^n)+\frac{\Delta t\varepsilon}{2}u^{n-1}(u_x)^{n-1}$$

eşitliği elde edilmiştir. $W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere (3.35) eşitliğine Galerkin metodu uygulayarak,

$$\int_a^b W(x)\left(u^{n+1}+\frac{\Delta t}{2}(u_x)^{n+1}-\mu(u_{xx})^{n+1}\right.$$
$$\left.+\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\left(2(u_x)^n u^{n+1}-(u_x)^{n-1}u^{n+1}+2u^n(u_x)^{n+1}-u^{n-1}(u_x)^{n+1}\right)\right)dx=$$
$$\int_a^b W(x)\left(u^n-\mu(u_{xx})^n-\frac{\Delta t}{2}(u_x)^n+u^n(u_x)^n\left(\frac{3\Delta t\varepsilon}{2}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{\Delta t\varepsilon}{2}(2u^{n-1}(u_x)^n+2(u_x)^{n-1}u^n)+\frac{\Delta t\varepsilon}{2}u^{n-1}(u_x)^{n-1}\right)dx$$

(3.36) eşitliğine ulaşılmıştır. Galerkin yönteminde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x, u_{xx} yerine T_m trigonometrik kuintik B-spline fonksiyonları kullanılacaktır.

$[a,b]$ konum aralığı N eşit uzunluklu alt aralığa parçalanırsa, $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x, u_{xx} yerine T_m trigonometrik kuintik B-spline fonksiyonları kullanıldığında (3.36) eşitliğinin düzenlenmiş formu olan,

$$\sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)-\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j'' dx\right)+\frac{\Delta t}{2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\right.$$
$$+\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\sum_{k=m-2}^{m+3}\left[2\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k'\left(\delta_k^n\right)T_j dx\right)-\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k'\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j dx\right)\right.$$
$$\left.\left.+2\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' dx\right)-\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' dx\right)\right]\right\}\delta_j^{n+1}$$
$$-\sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)-\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j'' dx\right)-\frac{\Delta t}{2}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\right. \qquad (6.17)$$
$$+\sum_{k=m-2}^{m+3}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' dx\right)\left(\frac{3\Delta t\varepsilon}{2}\right)$$
$$\left.-\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\sum_{k=m-2}^{m+3}2\left[\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' dx\right)+\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k'\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j dx\right)\right]\right\}\delta_j^n$$
$$-\sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\sum_{k=m-2}^{m+3}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' dx\right)\right\}\delta_j^{n-1}$$

yaklaşımı elde edilir. Bu yaklaşım $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde olup $m = 0, 1, \ldots, N-1$ değerleri için her bir aralıktaki yaklaşımlar birleştirildiğinde (3.36) eşitliğine dönecektir.

(6.17) ifadesinde $\xi = x - x_m$ dönüşümü yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=m-2}^{m+3} \left\{ \left(\int_0^h T_i T_j d\xi \right) - \mu \left(\int_0^h T_i T_j'' d\xi \right) + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_0^h T_i T_j' d\xi \right) \right. \\
&+ \frac{\Delta t \varepsilon}{2} \sum_{k=m-2}^{m+3} \left[2 \left(\int_0^h T_i T_k' \left(\delta_k^n \right) T_j d\xi \right) - \left(\int_0^h T_i T_k' \left(\delta_k^{n-1} \right) T_j d\xi \right) \right. \\
&\left. \left. + 2 \left(\int_0^h T_i T_k \left(\delta_k^n \right) T_j' d\xi \right) - \left(\int_0^h T_i T_k \left(\delta_k^{n-1} \right) T_j' d\xi \right) \right] \right\} \delta_j^{n+1} \\
&- \sum_{j=m-2}^{m+3} \left\{ \left(\int_0^h T_i T_j d\xi \right) - \mu \left(\int_0^h T_i T_j'' d\xi \right) - \frac{\Delta t}{2} \left(\int_0^h T_i T_j' d\xi \right) \right. \\
&+ \sum_{k=m-2}^{m+3} \left(\int_0^h T_i T_k \left(\delta_k^n \right) T_j' d\xi \right) \left(\frac{3 \Delta t \varepsilon}{2} \right) \\
&\left. - \frac{\Delta t \varepsilon}{2} \sum_{k=m-2}^{m+3} 2 \left[\left(\int_0^h T_i T_k \left(\delta_k^{n-1} \right) T_j' d\xi \right) + \left(\int_0^h T_i T_k' \left(\delta_k^{n-1} \right) T_j d\xi \right) \right] \right\} \delta_j^n \\
&- \sum_{j=m-2}^{m+3} \left\{ \frac{\Delta t \varepsilon}{2} \sum_{k=m-2}^{m+3} \left(\int_0^h T_i T_k \left(\delta_k^{n-1} \right) T_j' d\xi \right) \right\} \delta_j^{n-1}
\end{aligned}
\tag{6.18}
$$

elde edilir. (6.18) yaklaşımındaki integralleri hesaplamak için 2. bölümde elde edilen $T_{m-2}, T_{m-1}, T_m, T_{m+1}, T_{m+2}, T_{m+3}$ trigonometrik kuintik B-spline eşitlikleri kullanılacaktır. Bu durumda her bir alt aralıktaki eleman matrislerinin her bir elemanı i, j, k ; $m-2, m-1, m, m+1, m+2, m+3$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
&A_{ij}^e = \int_0^h T_i T_j d\xi, \quad B_{ij}^e = \int_0^h T_i T_j' d\xi, \quad C_{ij}^e \left(\boldsymbol{\delta}^n \right) = \int_0^h T_i T_k \left(\delta_k^n \right) T_j' d\xi, \\
&D_{ij}^e = \int_0^h T_i T_j'' d\xi, \quad E_{ij}^e \left(\boldsymbol{\delta}^n \right) = \int_0^h T_i T_k' \left(\delta_k^n \right) T_j d\xi
\end{aligned}
\tag{6.19}
$$

olacaktır. (6.19) ifadesinde gösterilen tüm matrisler bu bölümün başındaki Crank-Nicolson yönteminde anlatıldığı şekilde hesaplanır. Elde edilen tüm eleman matrislerinin $m = 0, 1, \ldots, N-1$ için uygun şekilde birbirlerine eklenmesi sonucunda,

$$
\boldsymbol{\delta} = \left(\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \ldots, \delta_N, \delta_{N+1}, \delta_{N+2} \right)^T
$$

olmak üzere (6.18) ifadesinden

$$\left[\mathbf{A}-\mu\mathbf{D}+\frac{\Delta t}{2}\mathbf{B}+\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\left(2\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\delta}^{n}\right)-\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)+2\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n}\right)-\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)\right)\right]\boldsymbol{\delta}^{n+1}=$$
$$\left[\mathbf{A}-\mu\mathbf{D}-\frac{\Delta t}{2}\mathbf{B}+\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n}\right)\left(\frac{3\Delta t\varepsilon}{2}\right)-\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\left(2\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)+2\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)\right)\right]\boldsymbol{\delta}^{n} \tag{6.20}$$
$$+\left[\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)\right]\boldsymbol{\delta}^{n-1}$$

denklem sistemi elde edilir.

(6.20) denklem sistemi $N+5$ denklem ve $N+5$ bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. Sınır şartlarını sisteme adapte edebilmek için denklem sistemindeki ilk ve son denklemler silinerek bölgenin uç noktalarındaki

$$u(a,t)=u(b,t)=0$$

sınır şartları kullanılarak δ_{-2}^{n+1} ve δ_{N+2}^{n+1} yok edilirse (6.20) denklem sistemi $(N+3)\times(N+3)$ matris sistemine indirgenmiş olur. Ulaşılan matris sistemi Gauss eleminasyonu yardımıyla çözülebilir.

RLW denkleminin trigonometrik kuintik B-spline Galerkin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken elde edilen denklem sisteminin çözülebilmesi için

$$\left(\delta_{-2}^{0},\delta_{-1}^{0},\ldots,\delta_{N+1}^{0},\delta_{N+2}^{0}\right)$$

başlangıç vektörünün bulunması gerekir. Bunun için RLW denkleminin başlangıç şartı olan

$$u\left(x,0\right)=f\left(x\right)$$

ve kuintik trigonometrik B-spline eşitlikleri kullanılabilir.

6.3.2. Zaman parçalanması için Adams Moulton yöntemi (KNAM3)

RLW denklemine Adams Moulton zaman parçalanması uygulanmış, elde edilen eşitliği $(n+1)$. zamana göre lineerleştirmek için önerilen (3.34) lineerleştirmesi yapılmış ve aşağıdaki

$$u^{n+1}+\theta_1\Delta t\left(u_x\right)^{n+1}+\theta_1\Delta t\varepsilon\left(2(u_x)^n u^{n+1}-(u_x)^{n-1}u^{n+1}\right.$$
$$\left.+2u^n(u_x)^{n+1}-u^{n-1}(u_x)^{n+1}\right)-\mu\left(u_{xx}\right)^{n+1}=$$
$$u^n-\mu\left(u_{xx}\right)^n-\theta_2\Delta t\left(u_x\right)^n+u^n(u_x)^n(4\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_2\Delta t\varepsilon)$$
$$-\theta_1\Delta t\varepsilon(2u^{n-1}\left(u_x\right)^n+2(u_x)^{n-1}u^n)-\theta_3\Delta t\left(u_x\right)^{n-1}$$
$$+u^{n-1}\left(u_x\right)^{n-1}\left(\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_3\Delta t\varepsilon\right)$$

(3.41) eşitliğine ulaşılmıştır. $W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere (3.41) eşitliğine Galerkin metodu uygulanarak,

$$\int_a^b W(x)\left(u^{n+1}+\theta_1\Delta t\left(u_x\right)^{n+1}+\theta_1\Delta t\varepsilon\left(2(u_x)^n u^{n+1}-(u_x)^{n-1}u^{n+1}\right.\right.$$
$$\left.+\ 2u^n(u_x)^{n+1}-u^{n-1}(u_x)^{n+1}\right)-\mu\left(u_{xx}\right)^{n+1}\Big)\,dx=$$
$$\int_a^b W(x)\left(u^n-\mu\left(u_{xx}\right)^n-\theta_2\Delta t\left(u_x\right)^n+u^n(u_x)^n(4\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_2\Delta t\varepsilon)\right.$$
$$-\theta_1\Delta t\varepsilon(2u^{n-1}\left(u_x\right)^n+2(u_x)^{n-1}u^n)-\theta_3\Delta t\left(u_x\right)^{n-1}$$
$$\left.+\ u^{n-1}\left(u_x\right)^{n-1}\left(\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_3\Delta t\varepsilon\right)\right)dx$$

(3.42) eşitliği elde edilmiştir. Galerkin yönteminde $W\left(x\right)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x, u_{xx} yerine T_m trigonometrik kuintik B-spline fonksiyonları kullanılacaktır.

$[a,b]$ konum aralığı N eşit uzunluklu alt aralığa parçalanırsa, $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde $W\left(x\right)$ ağırlık fonksiyonu ve u, u_x, u_{xx} yerine T_m trigonometrik kuintik B-spline fonksiyonları kullanıldığında (3.42) eşitliğinin düzenlenmiş formu olan,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)-\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j'' dx\right)+\theta_1\Delta t\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\right.\\
&+\theta_1\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-2}^{m+3}\left[2\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k'\left(\delta_k^n\right)T_j dx\right)-\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k'\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j dx\right)\right.\\
&\left.\left.+2\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' dx\right)-\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' dx\right)\right]\right\}\delta_j^{n+1}\\
&-\sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j dx\right)-\mu\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j'' dx\right)-\theta_2\Delta t\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\right.\\
&+\sum_{k=m-2}^{m+3}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j' dx\right)\left(4\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_2\Delta t\varepsilon\right)\\
&\left.-\theta_1\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-2}^{m+3}2\left[\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' dx\right)+\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k'\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j dx\right)\right]\right\}\delta_j^n\\
&+\sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\theta_3\Delta t\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_j' dx\right)\right.\\
&\left.-\sum_{k=m-2}^{m+3}\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j' dx\right)\left(\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_3\Delta t\varepsilon\right)\right\}\delta_j^{n-1}
\end{aligned}
\tag{6.21}
$$

yaklaşımı elde edilir. Bu yaklaşım $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde olup $m = 0, 1, \ldots, N-1$ değerleri için her bir aralıktaki yaklaşımlar birleştirildiğinde (3.42) eşitliğine dönecektir.

(6.21) ifadesinde $\xi = x - x_m$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\left(\int_0^h T_iT_jd\xi\right)-\mu\left(\int_0^h T_iT_j''d\xi\right)+\theta_1\Delta t\left(\int_0^h T_iT_j'd\xi\right)\right.\\
&+\theta_1\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-2}^{m+3}\left[2\left(\int_0^h T_iT_k'\left(\delta_k^n\right)T_jd\xi\right)-\left(\int_0^h T_iT_k'\left(\delta_k^{n-1}\right)T_jd\xi\right)\right.\\
&\left.\left.+2\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j'd\xi\right)-\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j'd\xi\right)\right]\right\}\delta_j^{n+1}\\
&-\sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\left(\int_0^h T_iT_jd\xi\right)-\mu\left(\int_0^h T_iT_j''d\xi\right)-\theta_2\Delta t\left(\int_0^h T_iT_j'd\xi\right)\right.\\
&+\sum_{k=m-2}^{m+3}\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j'd\xi\right)\left(4\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_2\Delta t\varepsilon\right)\\
&\left.-\theta_1\Delta t\varepsilon\sum_{k=m-2}^{m+3}\left[2\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j'd\xi\right)+2\left(\int_0^h T_iT_k'\left(\delta_k^{n-1}\right)T_jd\xi\right)\right]\right\}\delta_j^n\\
&+\sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\theta_3\Delta t\left(\int_0^h T_iT_j'd\xi\right)\right.\\
&\left.-\sum_{k=m-2}^{m+3}\left(\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^{n-1}\right)T_j'd\xi\right)\left(\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_3\Delta t\varepsilon\right)\right\}\delta_j^{n-1}
\end{aligned}\tag{6.22}$$

elde edilir. (6.22) ifadesindeki integralleri hesaplamak için 2. bölümde elde edilen $T_{m-2}, T_{m-1}, T_m, T_{m+1}, T_{m+2}, T_{m+3}$ trigonometrik kuintik B-spline eşitlikleri kullanılacaktır. Bu durumda her bir alt aralıktaki eleman matrislerinin her bir elemanı i, j, k ; $m-2, m-1, m, m+1, m+2, m+3$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
&A_{ij}^e=\int_0^h T_iT_jd\xi,\quad B_{ij}^e=\int_0^h T_iT_j'd\xi,\quad C_{ij}^e\left(\boldsymbol{\delta}^n\right)=\int_0^h T_iT_k\left(\delta_k^n\right)T_j'd\xi,\\
&E_{ij}^e\left(\boldsymbol{\delta}^n\right)=\int_0^h T_iT_k'\left(\delta_k^n\right)T_jd\xi,\quad D_{ij}^e=\int_0^h T_iT_j''d\xi
\end{aligned}\tag{6.23}$$

olacaktır. (6.23) ifadesinde gösterilen tüm matrisler bu bölümün başındaki Crank-Nicolson yönteminde anlatıldığı şekilde hesaplanır. Elde edilen tüm eleman matrislerinin $m = 0, 1, ..., N-1$ için uygun şekilde birbirlerine eklenmesi sonucunda,

$$\boldsymbol{\delta}=\left(\delta_{-2},\delta_{-1},\delta_0,\ldots,\delta_N,\delta_{N+1},\delta_{N+2}\right)^T$$

olmak üzere (6.22) ifadesinden

$$\begin{aligned}
&\left[\mathbf{A}-\mu\mathbf{D}+\theta_1\Delta t\mathbf{B}+\theta_1\Delta t\varepsilon\left(2\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\delta}^n\right)-\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)+2\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^n\right)-\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)\right)\right]\boldsymbol{\delta}^{n+1}=\\
&\left[\mathbf{A}-\mu\mathbf{D}-\theta_2\Delta t\mathbf{B}+\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^n\right)\left(4\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_2\Delta t\varepsilon\right)-2\theta_1\Delta t\varepsilon\left(\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)+\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)\right)\right]\boldsymbol{\delta}^n\\
&+\left[-\theta_3\Delta t\mathbf{B}+\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\delta}^{n-1}\right)\left(\theta_1\Delta t\varepsilon-\theta_3\Delta t\varepsilon\right)\right]\boldsymbol{\delta}^{n-1}
\end{aligned}\tag{6.24}$$

denklem sistemi elde edilir.

(6.24) denklem sistemi $N+5$ denklem ve $N+5$ bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. Sınır şartlarını sisteme adapte edebilmek için denklem sistemindeki ilk ve son denklemler silinerek bölgenin uç noktalarındaki

$$u(a,t) = u(b,t) = 0$$

sınır şartları kullanılarak δ_{-2}^{n+1} ve δ_{N+2}^{n+1} yok edilirse (6.24) denklem sistemi $(N+3)\times(N+3)$ matris sistemine indirgenmiş olur. Ulaşılan matris sistemi Gauss eleminasyonu yardımıyla çözülebilir.

RLW denkleminin trigonometrik kuintik B-spline Galerkin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken elde edilen (6.24) denklem sisteminin çözülebilmesi için

$$\left(\delta_{-2}^{0}, \delta_{-1}^{0}, \ldots, \delta_{N+1}^{0}, \delta_{N+2}^{0}\right)$$

başlangıç vektörü ve

$$\left(\delta_{-2}^{1}, \delta_{-1}^{1}, \ldots, \delta_{N+1}^{1}, \delta_{N+2}^{1}\right)$$

vektörünün bulunması gerekmektedir. Başlangıç vektörü başlangıç şartından bulunabilirken,

$$\left(\delta_{-2}^{1}, \delta_{-1}^{1}, \ldots, \delta_{N+1}^{1}, \delta_{N+2}^{1}\right)$$

vektörünün bulunabilmesi için Crank-Nicolson programda bir kez çalıştırılmalıdır.

6.4. Test Problemleri

6.4.1 Solitary dalgasının hareketi test problemi

$[a,b]$ aralığında tanımlı $3c$ genlikli, $v = 1+\varepsilon c$ dalga hızlı RLW denkleminin solitary dalga analitik çözümü $k = \sqrt{\dfrac{\varepsilon c}{4\mu v}}$ olmak üzere

$$u(x,t) = 3c\,\mathrm{sech}^2(k[x - \tilde{x}_0 - (1+\varepsilon c)t])$$

olarak ilk bölümde verilmişti. Analitik çözümde $t = 0$ alındığında

$$u(x,0) = 3c\,\mathrm{sech}^2(k[x - \tilde{x}_0])$$

başlangıç şartı elde edilebilir.

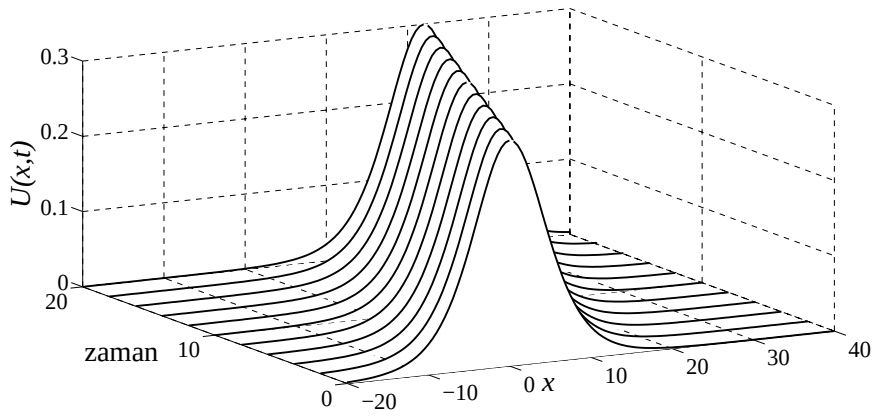
Başlangıç şartı kullanılarak RLW denkleminin üç korunum sabitinin tam değerleri

$$C_1 = \frac{6c}{k}, \quad C_2 = \frac{12c^2}{k} + \frac{48kc^2\mu}{5}, \quad C_3 = \frac{36c^2}{k}\left(1 + \frac{4c}{5}\right)$$

olarak bulunabilir.

Diğer bölümlerde uygulandığı gibi bu test probleminde $\varepsilon = \mu = 1$, $\tilde{x}_0 = 0$ parametreleri, $-100 \leq x \leq 120$ tanım aralıkları seçilerek $3c$ genlikli, $\tilde{x}_0 = 0$ noktasına tepe noktası karşılık gelecek şekilde yerleştirilmiş bir solitary dalgasının $v = 1+\varepsilon c$ hızla sağa doğru hareketi $0 \leq t \leq 20$ zaman aralığında incelenmiştir. Verilen parametreler ve tanım aralıkları için $c = 0.1$ seçimi yapılarak önerilen tüm yöntemler için elde edilen sonuçlar tablolar halinde ve hata grafikleri çizilerek verilecektir.

Aşağıdaki şekil, $h = \Delta t = 0.1$ seçimleri için dalganın belirli zamanlardaki konumunu göstermektedir. Metotlar için çizilen şekiller arasında görsel bir fark olmamasından dolayı şekil sadece KNCN1 metodu için çizilmiştir. Şekil 6.1. incelendiğinde solitary dalgasının zamanla şeklinde bir bozulma olmadan hareket ettiği görülebilir.



Şekil 6.1. $h = \Delta t = 0.1$ için çeşitli zamanlardaki $U(x,t)$.

Çizelge 6.1.'de konum ve zaman artımı değerlerinin eşit ve 2'den 0.01'e kadar azalan değerleri için, hata normları, hesaplama zamanları ve mertebeler verilmiştir. Tüm yöntemler için konum ve zaman artımları değerleri azaldıkça hata normları azalmıştır. Beklendiği şekilde Adams Moulton yöntemi, Crank-Nicolson yöntemine

göre daha iyi sonuçlar vermiştir. Crank-Nicolson yöntemi için elde edilen sonuçlar birbirlerine yakın olmasına karşın, Adams Moulton yöntemlerinde KNAM1 ve KNAM3 ile gösterilen yöntemlerin sonuçları, KNAM2 yöntemine göre daha iyidir. KNCN3 ve KNAM3 ile gösterilen yöntemlerin KNCN1 ve KNAM1 ile gösterilen iç iterasyonlu yöntemler kadar iyi sonuçlar vermesinin yanı sıra, hesaplama zamanı açısından da avantajlı olduğu görülmüştür. Ayrıca Çizelge 6.1.'den Crank-Nicolson yöntemlerinin kuadratik, Adams Moulton yöntemlerininse kübik mertebeye sahip oldukları söylenebilir.

Çizelge 6.1. $t = 20$ anındaki hata normları, hesaplama zamanları ve mertebe

	KNCN1			**KNAM1**		
$h = \Delta t$	L_∞	Cpu	Mertebe	L_∞	Cpu	Mertebe
2	3.11×10^{-2}	1.21	1.92	1.82×10^{-2}	1.15	3.16
1	8.23×10^{-3}	1.71	1.92	2.04×10^{-3}	1.71	3.00
0.5	2.17×10^{-3}	4.71	1.99	2.54×10^{-4}	4.66	2.99
0.2	3.51×10^{-4}	20.59	2.00	1.64×10^{-5}	20.54	3.00
0.1	8.79×10^{-5}	70.06	2.00	2.05×10^{-6}	70.12	3.00
0.05	2.20×10^{-5}	240.38	2.00	2.57×10^{-7}	238.94	3.00
0.02	3.52×10^{-6}	1374.25	2.00	1.64×10^{-8}	1327.14	2.99
0.01	8.79×10^{-7}	5029.09		2.06×10^{-9}	5011.89	
	KNCN2			**KNAM2**		
$h = \Delta t$	L_∞	Cpu	Mertebe	L_∞	Cpu	Mertebe
2	2.86×10^{-2}	1.03	1.96	1.89×10^{-2}	0.95	3.06
1	7.33×10^{-3}	0.86	1.93	2.27×10^{-3}	0.86	2.64
0.5	1.93×10^{-3}	1.28	1.99	3.64×10^{-4}	1.23	2.37
0.2	3.12×10^{-4}	4.16	2.00	4.15×10^{-5}	3.71	2.10
0.1	7.80×10^{-5}	15.91	2.00	9.65×10^{-6}	12.73	1.95
0.05	1.95×10^{-5}	60.78	2.00	2.49×10^{-6}	49.15	1.98
0.02	3.12×10^{-6}	330.11	2.00	4.06×10^{-7}	301.31	1.99
0.01	7.81×10^{-7}	1252.70		1.02×10^{-7}	1214.15	
	KNCN3			**KNAM3**		
$h = \Delta t$	L_∞	Cpu	Mertebe	L_∞	Cpu	Mertebe
2	3.22×10^{-2}	1.12	1.94	1.90×10^{-2}	0.92	3.19
1	8.39×10^{-3}	0.89	1.94	2.08×10^{-3}	0.85	3.00
0.5	2.18×10^{-3}	1.20	1.99	2.61×10^{-4}	1.21	3.00
0.2	3.51×10^{-4}	3.95	2.00	1.67×10^{-5}	3.65	3.00
0.1	8.79×10^{-5}	13.09	2.00	2.09×10^{-6}	12.48	3.00
0.05	2.20×10^{-5}	49.15	2.00	2.61×10^{-7}	47.76	3.00
0.02	3.52×10^{-6}	300.11	2.00	1.67×10^{-8}	296.04	3.01
0.01	8.79×10^{-7}	1179.57		2.07×10^{-9}	1182.61	

$h = \Delta t = 0.1$ seçilerek her bir önerilen metot için korunum sabitlerinin mutlak hataları farklı zamanlarda hesaplanarak Çizelge 6.2.'de verilmiştir.

Çizelge 6.2. $h = \Delta t = 0.1$ seçimi için korunum sabitlerinin mutlak hataları

	KNCN1			**KNAM1**		
t	$(C_1)_h \times 10^{11}$	$(C_2)_h \times 10^4$	$(C_3)_h \times 10^5$	$(C_1)_h \times 10^{11}$	$(C_2)_h \times 10^4$	$(C_3)_h \times 10^5$
0	0.03	0.00000014	0.00000000	0.03	0.00000014	0.00000000
4	0.01	0.00000536	0.00010771	0.02	0.00506184	0.16703585
8	0.01	0.00001976	0.00040632	0.00	0.01023134	0.33762923
12	0.03	0.00004066	0.00084229	0.00	0.01540087	0.50822377
16	0.04	0.00006550	0.00136315	0.01	0.02057044	0.67881925
20	0.02	0.00009238	0.00192957	0.02	0.02574003	0.84941548
	KNCN2			**KNAM2**		
t	$(C_1)_h \times 10^{11}$	$(C_2)_h \times 10^4$	$(C_3)_h \times 10^5$	$(C_1)_h \times 10^{11}$	$(C_2)_h \times 10^4$	$(C_3)_h \times 10^5$
0	0.03	0.00000014	0.00000000	0.03	0.00000014	0.00000000
4	0.01	0.00000340	0.00014741	0.01	0.00506374	0.16709373
8	0.02	0.00001342	0.00056538	0.00	0.01023887	0.33785981
12	0.04	0.00002849	0.00119567	0.01	0015416043	0.50869073
16	0.02	0.00004700	0.00197313	0.05	0.02059389	0.67954471
20	0.02	0.00006761	0.00284232	0.01	0.02577164	0.85039758
	KNCN3			**KNAM3**		
t	$(C_1)_h \times 10^{11}$	$(C_2)_h \times 10^4$	$(C_3)_h \times 10^5$	$(C_1)_h \times 10^{11}$	$(C_2)_h \times 10^4$	$(C_3)_h \times 10^5$
0	0.03	0.00000014	0.00000000	0.03	0.000000014	0.00000000
4	0.01	0.00000410	0.00006726	0.01	0.000506085	0.16700343
8	0.02	0.00001724	0.00032475	0.00	0.001022936	0.33756390
12	0.04	0.00003691	0.00072004	0.01	0.001539790	0.50812557
16	0.05	0.00006052	0.00120054	0.02	0.002056647	0.67868815
20	0.02	0.00008620	0.00172681	0.01	0.002573506	0.84925145

Daha önce de belirtildiği gibi, çizelgede gösterilen $(C_1)_h$, $(C_2)_h$ ve $(C_3)_h$ sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü korunum sabitleri için mutlak hataya karşılık gelmektedir.

Korunum sabitlerinin zaman içerisinde sabit kalmaları beklenir ve,Çizelge 6.3.'den görüldüğü gibi tüm metotlar için $(C_1)_h$ mutlak hatası sıfıra yakın değerler alırken, $(C_2)_h$ ve $(C_3)_h$ hataları kabul edilebilirdir.

$\Delta t = 0.001$ seçimi yapılarak konum artımının azalan değerleri ile her bir önerilen metot için hata normu ve mertebeler hesaplanarak Çizelge 6.3.'de verilmiştir.

Çizelge 6.3. Sabit $\Delta t = 0.001$ ve farklı konum artımları için hata normları ve mertebeler

	KNCN1		**KNCN2**		**KNCN3**	
h	L_∞	Mertebe	L_∞	Mertebe	L_∞	Mertebe
2	8.66×10^{-3}	8.65	8.66×10^{-3}	8.65	8.66×10^{-3}	8.65
1	2.15×10^{-5}	6.30	2.15×10^{-5}	6.30	2.15×10^{-5}	6.30
0.5	2.73×10^{-7}	3.90	2.74×10^{-7}	4.05	2.73×10^{-7}	3.90
0.2	7.69×10^{-9}	-0.19	6.70×10^{-9}	-0.22	7.69×10^{-9}	-0.19
0.1	8.77×10^{-9}		7.80×10^{-9}		8.78×10^{-9}	
	KNAM1		**KNAM2**		**KNAM3**	
h	L_∞	Mertebe	L_∞	Mertebe	L_∞	Mertebe
2	8.66×10^{-3}	8.65	8.66×10^{-3}	8.65	8.66×10^{-3}	8.65
1	2.15×10^{-5}	6.25	2.15×10^{-5}	6.25	2.15×10^{-5}	6.25
0.5	2.82×10^{-7}	6.05	2.83×10^{-7}	5.45	2.82×10^{-7}	6.05
0.2	1.10×10^{-9}	5.93	1.92×10^{-9}	0.90	1.10×10^{-9}	5.87
0.1	1.81×10^{-11}		1.03×10^{-9}		1.88×10^{-11}	

Zaman artımı mümkün olduğu kadar küçültülüp, konum artımı azalan değerler aldığında önerilen yöntemlerin hata normları oldukça azalmıştır. Bölümün başında anlatılan yöntemler ve kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonu seçimleri için Adams Moulton yöntemlerinin Crank-Nicolson yöntemlerine göre, ayrıca 1. ve 3. yöntemin 2. yönteme göre daha iyi sonuçlar verdiği söylenebilir. Ayrıca Çizelge 6.3.'den görüldüğü gibi mertebeler belli bir konum artımı değerinden sonra eksi değerler almaya başlamıştır. Bu durum, zaman ve konum artımı değerlerinin çok küçülmesinden dolayı Crank-Nicolson yönteminin artık daha iyi sonuçlar veremeyeceğinin bir

göstergesidir. Adams Molulton yönteminde ise bu durumun yaşanmaması Adams Moulton yönteminin daha iyi bir yöntem olduğunu gösterebilir.

$h = 0.01$ seçimi yapılarak zaman artımının azalan değerleri için her bir önerilen metodun kullanımı sonucunda elde edilen hata normu ve mertebeler Çizelge 6.4.'de verilmiştir.

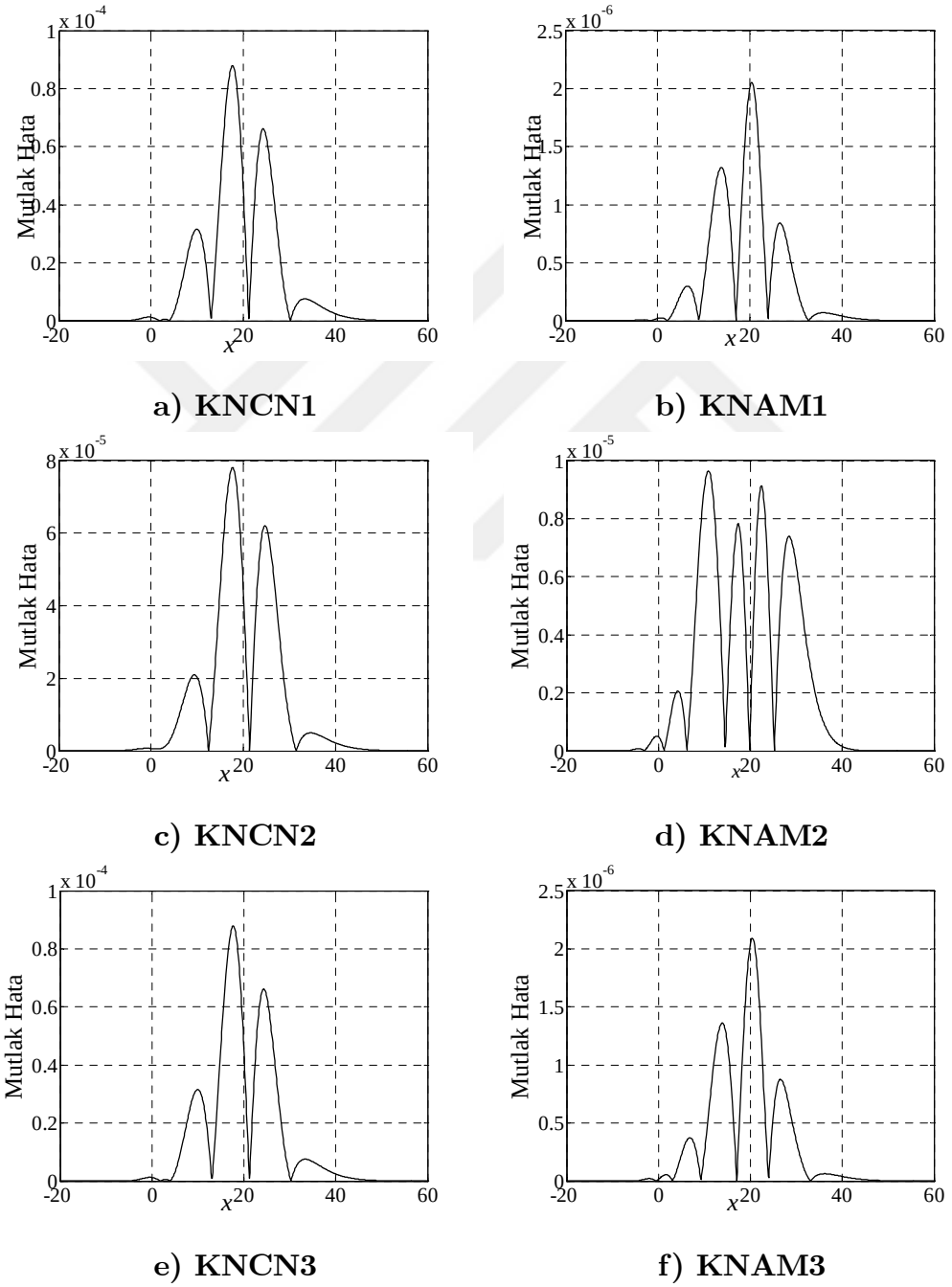
Çizelge 6.4. Sabit $h = 0.01$ ve farklı zaman artımları için hata normları ve mertebeler

	KNCN1		**KNCN2**		**KNCN3**	
Δt	L_∞	Mertebe	L_∞	Mertebe	L_∞	Mertebe
2	2.97×10^{-2}	1.82	2.68×10^{-2}	1.84	3.10×10^{-2}	1.85
1	8.40×10^{-3}	1.95	7.49×10^{-3}	1.95	8.56×10^{-3}	1.97
0.5	2.17×10^{-3}	1.99	1.93×10^{-3}	1.99	2.18×10^{-3}	1.99
0.2	3.51×10^{-4}	2.00	3.12×10^{-4}	2.00	3.51×10^{-4}	2.00
0.1	8.79×10^{-5}	2.00	7.80×10^{-5}	2.00	8.79×10^{-5}	2.00
0.05	2.20×10^{-5}	2.00	1.95×10^{-5}	2.00	2.20×10^{-5}	2.00
0.02	3.52×10^{-6}	2.00	3.12×10^{-6}	2.00	3.52×10^{-6}	2.00
0.01	8.79×10^{-7}		7.81×10^{-7}		8.79×10^{-7}	
	KNAM1		**KNAM2**		**KNAM3**	
Δt	L_∞	Mertebe	L_∞	Mertebe	L_∞	Mertebe
2	1.57×10^{-2}	2.94	1.56×10^{-2}	2.78	1.57×10^{-2}	2.91
1	2.05×10^{-3}	3.00	2.27×10^{-3}	2.64	2.10×10^{-3}	3.00
0.5	2.56×10^{-4}	3.00	3.65×10^{-4}	2.37	2.62×10^{-4}	3.00
0.2	1.64×10^{-5}	3.00	4.15×10^{-5}	2.10	1.67×10^{-5}	3.00
0.1	2.05×10^{-6}	3.00	9.65×10^{-6}	1.95	2.09×10^{-6}	3.00
0.05	2.57×10^{-7}	3.00	2.49×10^{-6}	1.98	2.61×10^{-7}	3.00
0.02	1.65×10^{-8}	3.00	4.06×10^{-7}	1.99	1.68×10^{-8}	2.99
0.01	2.06×10^{-9}		1.02×10^{-7}		2.07×10^{-9}	

Çizelge 6.4.'den, $h = 0.01$ ve farklı zaman artımları için hata normlarının değerlerinin Çizelge 6.1.'dekiler ile uyumlu olduğu ayrıca Crank-Nicolson

yöntemlerinin kuadratik, Adams Moulton yöntemlerinin ise kübik mertebelere sahip oldukları görülebilir.

Şekil 6.2.'de ise her bir metot için $h = \Delta t = 0.1$ olarak konum ve zaman artımı seçildiğinde $t = 20$ anında bulunan mutlak hataları gösteren şekiller verilmiştir.



Şekil 6.2. $h = \Delta t = 0.1$ için mutlak hata grafikleri

Şekil 6.2.'de görüldüğü gibi, her bir yöntemin maksimum hatası konum aralığının ortalarındadır ve Çizelge 6.1. ile uyumludur.

6.4.2 İki solitary dalgasının çarpışması test problemi

Diğer bölümlerde olduğu gibi bu bölümde de $k_i = \sqrt{\dfrac{\varepsilon c_i}{4\mu\,(1+\varepsilon c_i)}}, i = 1, 2$ olmak üzere giriş kısmında da verilen

$$u(x,0) = 3c_1\mathrm{sech}^2(k_1[x-\tilde{x}_1]) + 3c_2\mathrm{sech}^2(k_2[x-\tilde{x}_2]),$$

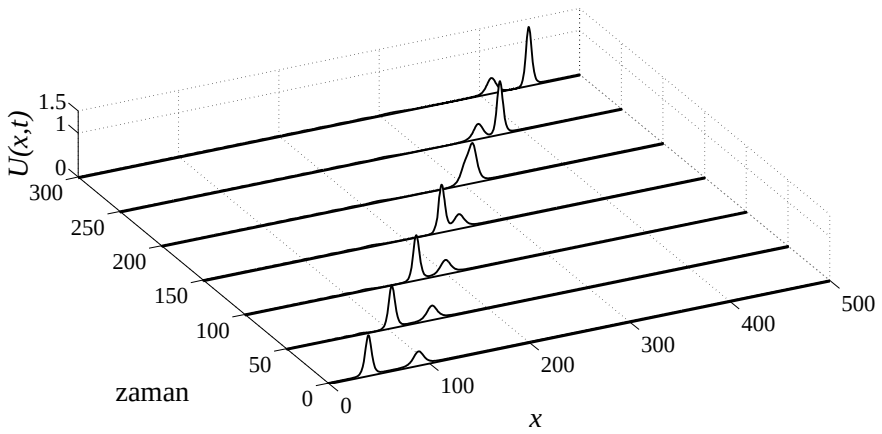
başlangıç şartı kullanılarak iki solitary dalgasının çarpışması test problemi üzerinde çalışılacaktır. Çarpışmanın gerçekleşebilmesi için $0 \leq x \leq 500$ konum aralığında $\varepsilon = \mu = 1$, $c_1 = 0.3$, $c_2 = 0.1$, $\tilde{x}_1 = 40$ ve $\tilde{x}_2 = 90$ değerleri kullanılarak programlar çalıştırılmıştır. Bu durumda genlik değerleri sırasıyla 0.9 ve 0.3 tepe noktaları ise $x = 40$ ve 90 değerlerine karşılık gelen iki solitary dalga elde edilmiştir.

Bu durumda korunum sabitlerinin analitik değerleri

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{6c_1}{k_1} + \frac{6c_2}{k_2} \simeq 11.4739473465046 \\
C_2 &= \frac{12c_1^2}{k_1} + \frac{48k_1c_1^2\mu}{5} + \frac{12c_2^2}{k_2} + \frac{48k_2c_2^2\mu}{5} \simeq 5.5143871404033, \\
C_3 &= \frac{36c_1^2}{k_1}\left(1+\frac{4c_1}{5}\right) + \frac{36c_2^2}{k_2}\left(1+\frac{4c_2}{5}\right) \simeq 19.3056100758906
\end{aligned}$$

olarak hesaplanabilir.

$h = \Delta t = 0.1$ seçimleri için belirli zamanlardaki dalganın konumunu gösteren şekil KNCN1 metodu için Şekil 6.3.'de verilmiştir. Diğer metodlarla arasında görsel bir fark olmamasından dolayı sadece bir yöntem için çizilen şekilden de görüldüğü gibi dalgalar yaklaşık $t = 200$ zamanında çarpışmış ve daha sonra ayrılarak şekillerinde bir bozulma olmadan yollarına devam etmişlerdir.



Şekil 6.3. $h = \Delta t = 0.1$ için çeşitli zamanlardaki $U(x,t)$.

Çizelge 6.5.'de iki solitary dalgasının çarpışması test problemi için her bir önerilen metot sonucunda elde edilen korunum sabitlerinin belirli zamanlardaki yaklaşık değerleri verilmiştir.

Çizelge 6.5. İki solitary dalgasının çarpışması problemi için korunum sabitleri

	KNCN1			**KNAM1**		
t	C_1	C_2	C_3	C_1	C_2	C_3
0	11.47395	5.51440	19.30565	11.47395	5.51440	19.30565
50	11.47395	5.51440	19.30565	11.47395	5.51494	19.30777
100	11.47395	5.51440	19.30566	11.47395	5.51548	19.30989
150	11.47395	5.51446	19.30582	11.47395	5.51602	19.31197
200	11.47395	5.51505	19.30733	11.47395	5.51640	19.31346
250	11.47395	5.51474	19.30653	11.47395	5.51654	19.31400
300	11.47395	5.51442	19.30571	11.47395	5.51703	19.31588
	KNCN2			**KNAM2**		
0	11.47395	5.51440	19.30565	11.47395	5.51440	19.30564
50	11.47395	5.51440	19.30564	11.47395	5.51494	19.30777
100	11.47395	5.51439	19.30562	11.47395	5.51548	19.30987
150	11.47395	5.51433	19.30530	11.47395	5.51591	19.31155
200	11.47395	5.51374	19.30230	11.47395	5.51531	19.30925
250	11.47395	5.51405	19.30389	11.47395	5.51598	19.31182
300	11.47395	5.51437	19.30552	11.47395	5.51699	19.31573
	KNCN3			**KNAM3**		
0	11.47395	5.51440	19.30564	11.47395	5.51440	19.30565
50	11.47395	5.51434	19.30565	11.47395	5.51494	19.30776
100	11.47395	5.51440	19.30565	11.47395	5.51548	19.30988
150	11.47395	5.51446	19.30581	11.47395	5.51602	19.31196
200	11.47395	5.51504	19.30731	11.47395	5.51640	19.31344
250	11.47395	5.51474	19.30651	11.47395	5.51654	19.31399
300	11.47395	5.51442	19.305670	11.47395	5.51702	19.31586

Çizelge 6.5.'den de görüldüğü gibi korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri, daha önce hesaplanan analitik değerleri ile uyumludur.

7. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde RLW denkleminin trigonometrik B-spline Galerkin yöntemi ile sayısal çözümlerinin bulunmasında kullanılan yöntemlerden bahsedilmiş ve çözümlerin doğruluğunu göstermek için incelenen test problemlerinden elde edilen veriler tartışılmıştır.

Bu çalışmada trigonometrik B-spline Galerkin yöntemi ile RLW denkleminin sayısal çözümleri elde edilmiştir. Sayısal çözüm araştırılırken, zaman parçalanması için Crank-Nicolson ve bu yönteme göre doğruluğu daha yüksek olan Adams Moulton yöntemleri kullanılmıştır. Konum ayrıştırması için ise farklı derecelerden trigonometrik B-spline fonksiyonları önerilmiştir. Yöntemlerin uygulanması sonucunda 3 farklı lineerleştirme kullanılmış ve bu şekilde 6 farklı yöntem ile sayısal çözüm araştırılmıştır. Bu yöntemler çalışmanın 3., 4., 5. ve 6. bölümlerinde farklı derecelerden trigonometrik B-spline fonksiyonları için uygulanmıştır. Çözümlerin doğruluğu, solitary dalgasının hareketi ve iki solitary dalgasının çarpışması test problemleri kullanılarak farklı derecelerden trigonometrik B-spline fonksiyonları için çalışmanın her bir bölümünde incelenmiştir.

Her bir bölümde ilk test problemi için öncelikle konum ve zaman artımı aynı seçilerek hata normları, hesaplama zamanları ve mertebeler Çizelge 3.1., 4.1., 5.1. ve 6.1.'de verilmiştir. Bu Çizelge'lerin yorumlanması sonucunda genel olarak, Adams Moulton yönteminin Crank-Nicolson yöntemine göre; ayrıca iç iterasyonlu ve bu çalışmada önerilen lineerleştirmenin (Lineerleştirme 3), Rubin Graves lineerleştirmesine göre daha iyi sonuçlar verdikleri görülmüştür. Bununla birlikte Lineerleştirme 3'ün, iç iterasyonlu lineerleştirme kadar iyi sonuçlar verdiği, aynı zamanda da hesaplama zamanı açısından büyük avantaj sağladığı tüm bölümlerde gözlemlenmiştir. Daha sonra önerilen her bir metot için, önce zaman artımı sabitken konum artımının azalan değerleri, sonra da konum artımı sabitken zaman artımının azalan değerleri için hata normları ve mertebeler elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar her bir bölümde 3. ve 4. Çizelge'ler yardımıyla gösterilmiştir. Bu çizelgelere göre özellikle zaman artımının sabit konum artımının azalan değerleri aldığı sonuçlar için hata normlarının oldukça azaldığı söylenebilir. Yine yöntemlerin kendi içlerindeki

başarıları konum ve zaman artımının eşit seçildiği sonuçlar ile tutarlıdır. Her bir bölümde, korunum sabitlerinin mutlak hataları farklı zamanlar için hesaplanarak Çizelge 3.2., 4.2., 5.2. ve 6.2. ile verilmiştir. Korunum sabitlerinin zaman içerisinde sabit kalmaları gerekmektedir ve çizelgelere göre tüm metotlar için ilk mutlak hatanın sıfıra yakın değerler alırken, ikinci ve üçüncü mutlak hatalarında kabul edilebilir oranda düşüş olduğu görülmüştür. Ayrıca konum ve zaman artımlarının eşit seçimi için belirli zamanlardaki dalganın konumunu gösteren şekil, her bir bölümde Şekil 3.1., Şekil 4.1., Şekil 5.1. ve Şekil 6.1. ile gösterilmiştir. Şekiller incelendiğinde solitary dalgasının zamanla şeklinde bir bozulma olmadan hareket ettiği görülmüştür. İlk test problemi için son olarakta yöntemlerin mutlak hata grafikleri Şekil 3.2., 4.2., 5.2. ve 6.2.ile verilmiştir. Şekillere göre her bir yöntemin maksimum hatası beklendiği gibi konum aralığının ortalarındadır.

RLW denkleminin önerilen yöntemlerle sayısal olarak çözümünün doğruluğu için ikinci olarakta iki solitary dalgasının çarpışması test problemi incelenmiştir. Birbirleriyle çakışmayacak şekilde farklı iki solitary dalgası elde etmek için uygun parametre seçimleri yapılmış ve farklı genliklere sahip iki solitary dalgası elde edilmiştir. Şekil 3.3., 4.3., 5.3. ve 6.3. ile bu dalgaların belirli zamanlardaki konumlarını gösteren şekiller her bir bölüm için verilmiştir. Şekillere göre iki dalganın sağa doğru hareketi sırasında konum olarak daha geride olan büyük genlikli dalga belli bir zamanda küçük genlikli dalgaya yetişmiş ve çarpışma gerçekleşmiştir. Çarpışma sonrasında dalgaların şekillerini korudukları görülmektedir. Son olarak iki solitary dalgasının çarpışması test problemi için her bir önerilen yöntem sonucunda elde edilen korunum sabitlerinin belirli zamanlardaki yaklaşık değerleri Çizelge 3.5., 4.5., 5.5. ve 6.5.'de verilmiştir. Çizelgelerden korunum sabitlerinin yaklaşık değerlerinin analitik değerler ile uyumlu oldukları görülmüştür.

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada RLW denkleminin sayısal çözümü trigonometrik B-spline Galerkin yöntemi ile elde edilmiştir. Çalışmanın başında önerilen yöntemlerin anlaşılabilirliğini arttırmak için gerekli olan temel kavramlardan bahsedilmiştir.

Çalışmada kullanılan trigonometrik B-spline fonksiyonları kuadratik, kübik, kuartik ve kuintik olacak şekilde farklı derecelerden alınmıştır. Öncelikle literatürde bulunan kuadratik ve kübik trigonometrik B-spline fonksiyonları kullanılarak indirgeme bağıntısı yardımıyla (Hamid vd., 2010; Abbas vd., 2014; Walz, 1997) kuartik ve kuintik trigonometrik B-spline'lar elde edilmiştir. Böylece çalışma boyunca kullanılan yöntemler, bu dört farklı dereceden trigonometrik B-spline için uygulanmış ve her biri çalışmanın bir bölümünü oluşturmuştur.

Sayısal çözüm araştırılırken zaman parçalanması için Crank-Nicolson yöntemi ve doğruluğu Crank-Nicolson'a göre daha yüksek olan Adams Moulton yöntemi önerilmiştir. Konum ayrıştırması için ise bahsedilen farklı derecelerden trigonometrik B-spline fonksiyonları kullanılmıştır. Yöntemlerin uygulanması sonucunda, bir tanesi ilk kez önerilen 3 farklı lineerleştirme kullanılmış ve böylece 6 farklı yöntem ile sayısal çözüm araştırılmıştır. Çalışmanın her bir bölümünde bu 6 farklı yöntem, farklı derecelerden trigonometrik B-spline'lar için uygulanmıştır.

Yöntemlerin RLW denklemine uygulanması sonucunda önerilen her yöntem için farklı sonuçlar elde edilmiştir. İlk olarak her dereceden trigonometrik B-spline için, Adams Moulton zaman parçalanması ile elde edilen sonuçlar Crank-Nicolson yöntemiyle elde edilenlere göre daha iyidir. Böylece bu iki zaman parçalanması yönteminin, yapılan çalışma ile uygunluğu gözlemlenmiştir. İkinci olarak önerilen lineerleştirmeler içinde iç iterasyon ve alternatif olarak önerilen lineerleştirme birbirlerine çok yakın ve Rubin Graves lineerleştirmesine göre çok daha iyi sonuçlar vermişlerdir. Son olarak önerilen alternatif lineerleştirme, iç iterasyon ile lineerleştirme kadar iyi sonuçlar verirken, hesaplama zamanı açısından da büyük avantaj sağlamıştır.

RLW denkleminin trigonometrik B-spline Galerkin yöntemi ile sayısal çözümlerinin bulunmasında önerilen yöntemlerin her biri literatürdeki diğer çalışmalarla uyumlu ya da iyi sonuçlar vermiştir. Çalışmanın kendi içinde ise Adams Moulton zaman ayrıştırması ile iç iterasyon ve alternatif olarak önerilmiş olan lineerleştirme en iyi sonuçları vermiştir. Ayrıca alternatif olarak önerilen lineerleştirme hem sonucunun iç iterasyon kadar iyi olması hem de hesaplama zamanının kısa oluşu nedeniyle yapılan çalışma için iyi bir yöntem olmuştur.

Sonuç olarak, sayısal çözümü araştırılan RLW denklemi için trigonometrik B-spline Galerkin yöntemi iyi sonuçlar vermiştir. Bu açıdan bu yöntem, benzer kısmi türevli diferensiyel denklemler için de önerilebilir. Farklı derecelerden trigonometrik B-spline'lar kullanılarak, Galerkin yönteminden farklı sonlu elemanlar yöntemleriyle de benzer denklemlerin çözümleri elde edilebilir. Ayrıca indirgeme bağıntısı kullanılarak çalışmada anlatıldığı şekilde, daha da yüksek trigonometrik B-spline fonksiyonları türetilerek aynı yöntemin diğer sonuçları da elde edilebilir. Son olarak çalışmada önerilen lineerleştirme yöntemi (lineerleştirme 3), benzer diferensiyel denklemlerde çok adımlı yöntemler için Rubin Graves lineerleştirmesine alternatif bir lineerleştirme olarak önerilebilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Abbas, M., Majid, A.A., Ismail, A.I.M., Rashid, A., 2014, Numerical method using cubic trigonometric B-spline technique for nonclassical diffusion problems, Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis, Vol.2014, Article ID 849682, 11p.

Abbas, M., Majid, A.A., Ismail, A.I.M., Rashid, A., 2014, The application of cubic trigonometric B-spline to the numerical solution of the hyperbolic problems, Applied Mathematics and Computation, 239, p.74-88.

Ay, B., Dağ, I., Gorgulu, M.Z., 2015, Trigonometric quadratic B-spline subdomain Galerkin algorithm for the Burgers' equation, Open Phys., 13, p.400-406.

Benjamin, T.B., Bona, J.L., Mohary, J.J., 1972, Model equations for long waves in non-linear dispersive systems, Philosophical Transactions of the Royal Society A-Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 272, p. 47-78.

Crank, J., Nicolson, P., 1947, A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 43, p.50-64.

Dağ, I., 2000, Least-squares quadratic B-spline finite element method for the regularised long wave equation, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 182, p.205-215.

Dağ, I., Özer, M.N., 2001, Approximation of the RLW equation by the least square cubic B-spline finite element method, Applied Mathematical Modelling, 25, p.221-231.

Dağ, I., Doğan, A., Saka, B., 2003, B-spline Collocation methods for numerical solutions of the RLW equation, International Journal of Computer Mathematics, 80, p.743-757.

Dağ, I., Saka, B., Irk, D., 2004, Application of cubic B-splines for numerical solution of the RLW equation, Applied Mathematics and Computation, 159, p.373-389.

Dağ, I., Saka, B., Irk, D., 2006, Galerkin method for the numerical solution of the RLW equation using quintic B-splines, Journal of Computational and Applied Mathematics, 190, p.532-547.

Dağ, I., Ersoy, O., Kacmaz, O., 2014, The trigonometric cubic B-spline algorithm for Burgers' equation, arXiv:1407.5434.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

De Boor, C., 1978, A practical guide to splines, Springer-Verlag, p.392.

Doğan, A., 2001, Numerical solution of regularized long wave equation using Petrov-Galerkin method, Communications in Numerical Methods in Engineering, 17, p.485-494.

Doğan, A., 2002, Numerical solution of RLW equation using linear finite elements within Galerkin's method, Applied Mathematical Modelling, 26, p.771-783.

Esen, A., Kutluay, S., 2006, Application of a lumped Galerkin method to the regularized long wave equation, Applied Mathematics and Computation, 174, p.833-845.

Falkovich, G., 2007, Soliton: A brief history of , http://www.weizmann.ac.il/-home/fnfal/soliton.pdf.

Görgülü, M.Z., Dağ, I., Irk, D., 2015, Galerkin Method for the numerical solution of the RLW equation by using exponential B-splines, arXiv:1504.05901.

Hamid, N.N.A., Majid, A.A., Ismail, A.I.M., 2010, Cubic trigonometric B-spline applied to linear two-point boundary value problems of order two, International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering, Vol 4, No:10, p.1377-1382.

Han, X., 2003, Piecewise quadratic trigonometric polynomial curves, Mathematics of Computation, 72, p.1369-1377.

Han, X., 2006, Quadratic trigonometric polynomial curves concerning local control, Applied Numerical Mathematics, 56, p.105-115.

Irk, D., Dağ, I., Doğan, A., 2005, Numerical integration of the RLW equation using cubic splines, Anziam J., 47, p.131-142.

Irk, D., 2007, Bazı kısmi türevli diferensiyel denklem sistemlerinin B-spline sonlu elemanlar çözümleri, Doktora tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 148 s.

Irk, D., 2012, Solitary wave solutions for the Regularized Long-Wave equation, Physics of Wave Phenomena, 20, p.174-183.

Karakoç, S.B.G., 2011, Sonlu elemanlar yöntemi ile modifiye edilmiş eşit genişlikli dalga denkleminin sayısal çözümleri, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 218 s.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Koch, P.E., 1988, Multivariate trigonometric B-splines, Journal of Approximation Theory, 54, p.162-168.

Koch, P.E., Lyche, T., Neamtu, M., Schumaker, L.L., 1995, Control curves and knot insertion for trigonometric splines, Advances in Computational Mathematics, 3, p.405-424.

Lyche, T., Winther, R., 1979, A stable recurrence relation for trigonometric B-splines, Journal of Approximation Theory, 25, p.266-279.

Nikolis, A., 2004, Numerical solutions of ordinary differential equations with quadratic trigonometric splines, Applied Mathematics E-Notes, 4, p.142-149.

Nikolis, A., Seimenis, I., 2005, Solving dynamical systems with cubic trigonometric splines, Applied Mathematics E-Notes, 5, p.116-123.

Olver, P.J., 1979, Operators and conservation laws of the BBM equation, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 85, p.143-159.

Peregrine, D.H., 1966, Calculations of the development of an undular bore, Journal of Fluid Mechanics, 25 (2), p.321-330.

Prenter, P.M., 1975, Splines and variational methods, Wiley, New York, p. 323.

Raslan, K.R., 2005, A computational method for the regularized long wave (RLW) equation, Applied Mathematics and Computation, 167, p.1101-1118.

Rubin, S.G., Graves, R.A., 1975, A Cubic spline approximation for problems in fluid mechanics, Nasa TR R-436, Washington, DC.

Russel, J.S., 1844, Report on waves, Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science (John Murray, London), p.311-390.

Saka, B., Dağ, I., Doğan, A., 2004, Galerkin method for the numerical solution of the RLW equation using quadratic B-splines, International Journal of Computer Mathematics, 81, p.727-739.

Saka, B., Dağ, I., 2005, A Collocation method for the numerical solution of the RLW equation using cubic B-spline basis, The Arabian Journal for Science and Engineering, 30, p.39-50.

Saka, B., Dağ, I., 2007, Quartic B-spline collocation algorithms for numerical solution of the RLW equation, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 23, p.731-751.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Saka, B., Dağ, I., 2008, A numerical solution of the RLW equation by Galerkin method using quartic B-splines, Communications in Numerical Methods in Engineering, 24, p.1339-1361.

Saka, B., Dağ, I., Irk, D., 2008, Quintic B-spline collocation method for numerical solution of the RLW equation, Anziam J., 49, p.389-410.

Saka, B., Şahin, A., Dağ, I., 2011, B-Spline Collocation Algorithms for Numerical Solution of the RLW Equation, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 27, p.581-607.

Schoenberg, I.J., 1946, Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, Quarterly of Applied Mathematics, 4, p.112-141.

Schoenberg, I.J., 1964, On trigonometric spline interpolation, Journal of Mathematics and Mechanics, 13, p.795-825.

Schumaker, L.L., 2007, Spline functions: Basic theory, Cambridge University Press, p. 582.

Soliman, A.A., Raslan, K.R., 2001, Collocation method using quadratic B-spline for the RLW equation, International Journal of Computer Mathematics, 78, p.399-412.

Soliman, A.A., Hussien, M.H., 2005, Collocation solution for RLW equation with septic spline, Applied Mathematics and Computation, 161, p.623-636.

Walz, G., 1997, Identities for trigonometric B-splines with an application to curve design, BIT, 37, 1, p.189-201.

Wadati, M., 2001, Introduction to solitons, Pramana Journal of Physics 57(5), p.841-847.

Zaki, S.I., 2001, Solitary waves of the splitted RLW equation, Computer Physics Communications, 138, p.80-91.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı:	Pınar Keskin
Uyruğu:	T. C.
Doğum Yeri- Tarihi:	Bandırma- 04.06.1983
Adresi:	Ümit Mah. 2467. Sokak Eras Evler Sitesi B-Blok Daire:6 Ümitköy ANKARA
E-posta Adresi:	pinarkeskin.math@gmail.com
Eğitim Bilgileri:	**Doktora:** Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalı (2011-2016)
	Yüksek Lisans: Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalı (2008-2010) **Tezsiz Yüksek Lisans:** Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Matematik Öğretmenliği Pedagojik Formasyon (2007-2008)
	Lisans: Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2002-2006) Anadolu Üniversitesi Açıköğretim İşletme Fakültesi İşletme Bölümü (2007-2014)
İş Deneyimi:	Türk Hava Kurumu Üniversitesi Pilotaj Bölümü Araştırma Görevlisi (2011-2013)