Lineer Olmayan Diferensiyel Denklemlerin Trial Metot ile Tam Çözümleri

Lütfiye Burçin Asıl

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Mayıs 2019

Exact Solutions of Nonlinear Differential Equations Using Trial Method

Lütfiye Burçin Asıl

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics-Computer

May 2019

Lineer Olmayan Diferensiyel Denklemlerin Trial Metot ile Tam Çözümleri

Lütfiye Burçin Asıl

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Bilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Prof. Dr. Filiz Taşcan Güney

Mayıs 2019

ONAY

Matematik – Bilgisayar Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Lütfiye Burçin Asıl'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Lineer Olmayan Diferensiyel Denklemlerin Trial Metot ile Tam Çözümleri" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman **:** Prof. Dr. Filiz TAŞCAN GÜNEY

İkinci Danışman **: -**

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Filiz TAŞCAN GÜNEY

Üye : Doç. Dr. Sait SAN

Üye : Dr. Öğr. Üy. Mustafa SALTAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Filiz Taşcan Güney danışmanlığında hazırlamış olduğum "Lineer Olmayan Diferensiyel Denklemlerin Trial Metot ile Tam Çözümleri " başlıklı YÜKSEK LİSANS tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ve ilke kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 03/05/2019

Lütfiye Burçin Asıl

İmza

ÖZET

Doğadaki ve disiplinlerarası bilimlerdeki birçok olayın matematiksel modellenmesi, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemler yardımıyla yapılmaktadır. Genellikle kimyasal, biyolojik ve fiziksel olayların tanımda kullanılan bu denklemlerin analitik veya kapalı form çözümlerinin bulunması son zamanlarda büyük önem kazanmıştır. Ayrıca bu tür denklemlerin farklı çözümleri olabileceğinden, çözümlerin sınıflandırılması oldukça önemlidir. Uygulamalı matematik, bu denklemlerin çözümleri ve yeni çözüm yöntemleri geliştirmekle ilgilenir. Lineer olmayan diferensiyel denklemlerin tam çözümlerini bulmak için birçok metot bulunmuştur. Bu tezde trial metot ile çalışılmıştır.

Birinci bölümde çalışılan konu ve tezin amacı hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde ise, literatür araştırması yapılmıştır. Üçüncü bölümde ise, tezde çalışılan temel kavramlar tanıtılmıştır. Dördüncü bölümde soliton ve solitary dalgalardan bahsedilmiştir.

Beşinci bölümde ise uygulamalı matematik alanında önemli yeri olan lineer olmayan diferensiyel denklemlerin tam çözümlerini bulmak için trial metotun nasıl kullanılcağı açıklanmıştır.

Son olarak "materyal ve yöntem" başlığı altında kullanılan yöntemler açıklanmış "bulgular ve tartışma" başlığı altında yapılan çalışmalardan elde edilen çözümler verilmiş ve "sonuç ve öneriler" bölümünde elde edilen sonuçlar yorumlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklem, Trial metot, Tam çözüm, Phi four denklemi, Pochhammer denklemi, ZK-BMM denklemi, Schamel denklemi.

SUMMARY

Mathematical modeling of many phenomena in the natural and interdisciplinary sciences is done with the help of nonlinear partial differential equations. The availability of analytical or implicit form solutions of these equations, which are usually used for describing chemical, biological, and physical phenomena, has recently gained great importance. Furthermore, since such equations can have different solutions, the classification of the solutions is very important. Applied mathematics is interested in solving these equations and developing new solution methods. There are many methods to find exact solutions of nonlinear differential equations.

In the first chapter, both subject and aim of this thesis are mentioned. In the second chapter, literature research is considered about the subject. In the third chapter, same definitions which are required in the next chapter are mentioned. In the fourth chapter, Soliton and solitary waves are given.

In the fifth chapter, trial method used is explained. By this method, exact solutions have been obtained.

Finally, the results obtained using these methods are compared.

Key Words: Nonlinear partial differential equation, Trial Method , Phi four equatin, Pochhammer equation, ZK-BMM equation, Schamel equation

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden gelenden fazlasını sunan, kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Filiz Taşcan Güney'e ve eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen ve her zaman yanımda olan sevgili aileme ve tez çalışması sırasında beni destekleyen eşime teşekkürlerimi bir borç biliyor ve şükranlarımı sunuyorum.

Lütfiye Burçin Asıl

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET vi
SUMMARY vii
TEŞEKKÜR viii
İÇİNDEKİLER ix
ŞEKİLLER DİZİNİ x
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ xi
1. GİRİŞ VE AMAÇ 1
2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI 2
3. TEMEL KAVRAMLAR 5
3.1. Diferensiyel Denklem 5
3.1.1. Adi diferensiyel denklem 5
3.1.2. Kısmi diferensiyel denklem 8
3.1.2.1 Kısmi diferensiyel denklemlerin sınıflandırılması 11
4. SOLITARY DALGALAR VE SOLITON 16
5. LİNEER OLMAYAN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN TAM ÇÖZÜMLERİ 20
5.1. Trial Metot ve Uygulamaları 21
5.1.1. Lineer olmayan Schrödinger denklemi 23
5.1.2. Genelleştirilmiş Fisher denklemi 26
5.1.3. Phi-Four denklemi 28
5.1.4. Pochhammer-Chree denklemi 32
5.1.5. Zakharov-Kuznetsov-Benjamin-Bona-Mahony denklemi 36
5.1.6. Schamel denklemi 40
6. MATERYAL VE YÖNTEM 45
7. BULGULAR VE TARTIŞMA 46
8. SONUÇ VE ÖNERİLER 50
KAYNAKLAR DİZİNİ 52

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil **Sayfa**

4.1. Solitary dalga şekli 18

5.1. Phi- Four denkleminin çözümünün seçilen bazı sabitler için şekli 32

5.2. Pochammer-Chree denkleminin çözümünün seçilen bazı sabitler için şekli 36

5.3. Schamel denkleminin çözümünün seçilen bazı sabitler için şekli 44

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
h	Dalga genliği
k	Dalga sayısı
v	Dalga hızı

Kısaltmalar	Açıklama
BBM	Benjamin-Bona-Mahony
KDV	Korteweg-de Vries
KP	Kadomtsev-Petviashvili
KS	Kuramoto-Sivashinsky
MKDV	Modifiye Korteweg-de Vries
NLS	Lineer olmayan Schrödinger
PC	Pochhammer-Chree
ZK-BBM	Zakharov-Kuznetsov-Benjamin-Bona-Mahony

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Fizik, ekonomi, mühendislik, istatistik ve astronomi gibi alanlarda gerçek hayat problemlerini belirtmek üzere kullanılan matematiksel modellerde, çoğunlukla birden fazla diferensiyel denklem çeşitlerinden yararlanılır. Bu matematiksel modeller üretilirken birbirine bağlı olarak değişen büyüklükler (değişken) ve bir ifadenin diğer bir ifadeye göre değişim oranına (türev) ihtiyaç duyulur. Örneğin; Newton'un ikinci yasasında $F = m.a$ formülü ile gösterilen ivme değişkeni, hızın zamana göre değişimi olarak yorumlandığında birinci mertebeden, mesafenin zamana göre değişimi olarak yorumlandığında ikinci mertebeden bir diferensiyel denklem elde edilir. Üstelik türevler arasındaki ilişkiyi diferensiyel denklem modelleri üzerinden çözmek ve gündelik hayattaki karşılıklarını yorumlamak daha basittir. Yukarıdaki ifadeler ele alınırsa diferensiyel denklemlerin bir veya birden çok değişken ve bu değişkenlerin türevi arasındaki bağıntıyı açıkladığını söyleyebiliriz (Sevimli, 2016).

Diferensiyel denklemlerin çözülmesine ilişkin yıllardır farklı yöntemler geliştirilmeye çalışılmıştır. Fakat doğrusal olmayan bu kısmi diferensiyel denklemlerin çözümünlerini elde etmek için genel bir metot yoktur. Bu tip diferensiyel denklemleri çözmek için bir çok tam çözüm metodu geliştirilmiştir. Bu tam çözümler ise bilimin çeşitli alanlarındaki birçok olgu ve süreçlerin nitel özelliklerini doğru bir şekilde anlamada önemli bir rol oynamaktadır. Doğrusal olmayan bu diferensiyel denklemlerin ise tam çözümleri, çeşitli sayısal, asimtotik ve yaklaşık yöntemlerin doğruluğunun değerlendirilmesi için önemli bir rol oynar. Dahası, kesin çözümleri kabul eden model denklemleri, yeni sayısal, asimtotik ve yaklaşık yöntemlerin geliştirilmesinde temel oluşturmaktadır; bu yöntemler, analitik çözüm bulunmayan daha karmaşık problemleri incelememizi sağlar (Zraiqat ve Al-Hwawcha, 2015).

Bu yüksek lisans tezinde, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerinin trial metot kullanılarak tam çözümleri araştırılacaktır. Bahsedilen denklemler lineer olmayan Schrödinger denklemi, genelleştirilmiş Fisher denklemi, Phi-Four denklemi, Pochhammer-Chree denklemi, Zakharov-Kuznetsov-Benjamin-Bona-Mahony denklemi, Schamel denklemidir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Diferensiyel denklem kavramıyla ilgili ilk araştırılmalar, 17. yüzyılda, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) ve Isaac Newton (1642–1727) tarafından "yerçekimine karşı vücudun hareketini" açıklamak için yapılmıştır (Upton, 2004). Daha sonraki zamanlarda Joseph-Louis Lagrange'ın (1736–1813), Leonhard Euler (1707–1783) ve Daniel Bernoulli (1700–1782) katkılarıyla akışkanlar mekaniğindeki problem durumlarını açıklamak için çeşitli diferensiyel denklem sistemleri ve hesap yöntemleri geliştirilmiştir. Bu nedenle fen bilimciler, diferensiyel denklemleri, fiziksel kural ve modellerin durumunu izah eden bir dil olarak görmektedir (Keene, 2007). Bu kaide ve modelleri örneklendirebiliriz. Sıvı yüzeyinde oluşan dalga hareketinin boyu, radyoaktif bir maddenin parçalanması, bir popülasyonun büyüme aritmetiği ve uçağın kalkış/denge durumunda gerekebilecek hava yakıtının kontrolünü sağlayacak aerodinamik karakterlerdir. Çağımızda gerçek hayat ile bağlantılı birçok problem için çözüm üreten diferensiyel denklemlerin ilk ortaya çıkış biçimi, birinci mertebeden diferensiyel denklemleri açıklamak üzere $dy/dx = f(x, y)$ gösteriminin Newton tarafından 1690 yılında kullanması ile başlamıştır. Diferensiyel denklemlerin ilk ortaya atıldığı dönemde homojen ve değişkenlerine ayrılabilen adi diferensiyel denklemler üzerinde çalışılmış; 18. yüzyılda matematiğin, fizikteki pratik alanlarının ilerlemesiyle birlikte lineer olmayan, birçok çözümü olan kısmi diferensiyel denklem çeşitleri için de hesap yöntemleri geliştirilmiştir. Diferensiyel denklemlerin çözümünde üç çeşit hesap yöntemi göze çarpmaktadır. Bunlar; sayısal hesap, cebirsel ve geometrik yöntemleridir. Bu yöntemlerin kullanılması ile diferensiyel denklemlerin çözümlerinde kullanılabilecek değişik yaklaşımlar ise sırasıyla nitel, analitik ve sayısal yaklaşımlardır. 18. yüzyılın ortalarına kadar diferensiyel denklemlerin çözümü için kullanılan tek yaklaşım analitik iken, diferensiyel denklemlerin çoğunluğunda cebirsel hesap yöntemlerinin uygulanamıyor olması, nümerik yöntemlerinin geliştirilmesine sebep olmuştur. Diferensiyel denklemlerin kendine özgü davranışlarının geometrik olarak yorumlanabilmesi yani topolojik olarak incelenmesine yönelik çalışmalara 20. yüzyılda başlanmıştır. Özellikle teknolojinin son 30 yıldaki ilerlemesine eş değer olarak yüksek matematikte kullanılabilen teknolojik destekli hesaplama araçlarının da ilerlemesi, nitel ve sayısal yaklaşımlar ile diferensiyel denklemlerin daha detaylı analiz edilmesine olanak sağlamıştır. Bugün üniversite se-

viyesinde matematik dersleri içerisinde yer alan diferensiyel denklemler, matematiğin uygulamalarını kullanan farklı programlar için bir ön gerekliliktir (Sevimli, 2016).

Doğrusal olmayan kısmi diferensiyel denklemlerle alakalı geçmiş yıllardan günümüze kadar çok başarılı gelişmeler olmuştur. Dalgaların doğrusal olmayan kısmi diferensiyel denklemlerle modellenmesi ilk kez 1834 yılında Edinburg-Glasgow kanalında John Scott Russell tarafından soliter dalganın yer değişiminin keşfedilmesi ile ortaya çıkmıştır. Russell'in soliter dalgalarla ilk kez karşılaşması 1844 yılında The Bristish Association'daki "Dalgalar Üzerine Rapor" adlı çalışmasında ifade edilmiştir (Russell, 1844). 1870'lerde birbirinden bağımsız olarak J. Boussinesq (1871) ve Lord Rayleigh (1876) tarafından Russell'in düşüncesi ispatlanmıştır. İlerleyen zamanlarda 1895 yılında G. de Vries ve D. J. Korteweg tarafından sığ sulardaki dalga yayılımının gözlenmesiyle lineer olmayan bir oluşum denklemi olan Korteweg-de Vries (KdV) denklemi bulunmuştur. 20. yy'ın ilk yarısına kadar soliter dalgalar ve bağlı oluşum denklemleri bilimsel çalışmaların ana başlıklarından biri değildir.

KdV soliter dalgalarının uygulamalarını ve teorideki modern gelişmeler 1955 yılında Stanislaw Ulam, John Pasta ve Enrico Fermi'nin, lineer olmayan kütle-yay sistemi üzerinde yayınladıkları Los Alamos Bilimsel Laboratuvar çalışmalarıyla başlamaktadır. Lineer olmayan Schrödinger (NLS) denklemi ise ideal bir akışkan serbest yüzeyindeki su dalgaları, kırılım göstergesi dalga genişliğine duyarlı orta bölgedeki lazer ışınının yayılımı ve plazma dalgaları gibi lineer olmayan dalgaların tanımındaki farklı fiziksel durumlardan meydana gelmiştir (Sulem ve Sulem, 1999).

Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin genel çözümlerini elde etmek için genel bir metot yoktur. Bu tip denklemleri çözmek için bir çok tam çözüm yöntemi geliştirilmiştir (Kaplan vd.,2015). Bu yöntemlerden bazıları ters saçılım metodu (Ablowitz ve Clarkson, 1990), Hirota bilineer metodu (Wazwaz, 2007), Bäcklaund dönüşüm metodu (Vakhnenko vd., 2003), homojen denge metodu (Fan ve Zhang, 1998), tanh metodu (Yusufoğlu ve Bekir, 2008), genişletilmiş tanh metodu (Wazwaz, 2007), kompleks tanh metodu (Khuri, 2004), sinüs-kosinüs metodu (Bekir, 2008), açılım metodu (Zhang, 2006), Jakobi eliptik fonksiyon metodu (Inc ve Ergut, 2005), üstel rasyonel fonksiyon metodu (Yusufoglu ve Bekir, 2007), üstel fonksiyon metodu (Boz ve Bekir, 2008), açılım metodu (Bekir, 2008), first integral metodu (Tascan vd., 2009),

trial denklem metodu (Gurefe vd., 2011), ansatz (dark-bright) metodudur (Guner ve Bekir, 2013).

3. TEMEL KAVRAMLAR

3.1 Diferensiyel Denklem

Bilimin her dalında karşılaşılan problemlerin çözümünü bulmak için problemin özelliklerini taşıyan bir matematiksel modelin kurulmasına ihtiyaç vardır. Böyle bir model genel aranan fonksiyon ya da fonksiyonlarla, bağımsız değişkenleri ve bu fonksiyonların bağımsız değişkenlere göre türevini içinde bulunduran bir denklem olarak karşımıza çıkar. Bu tür denklemlere diferensiyel denklem adı veriyoruz (Özer ve Eser, 2010). Bu tanım kısaca, içinde türev bulunan denklemlere diferensiyel denklem denir, şeklinde de yapılabilir.

$$y' = \sin x$$

$$y' = \ln x$$

$$u_x + u_y = 0$$

$$u_{xx} + (u_{yy})^2 = 0$$

örnekleri verilebilir.

Diferensiyel denklemler adi ve kısmi diferensiyel denklemler olmak üzere ikiye ayrılır.

3.1.1 Adi diferensiyel denklem

Bir diferensiyel denklemde eğer bir tek bağımsız değişken varsa adi (bayağı) diferensiyel denklem denir. x bağımsız değişken ve y bağımlı değişken olacak şekilde bir adi diferensiyel denklem genel olarak

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0 \tag{3.1}$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek: y bağımlı, x bağımsız değişken olmak üzere

$$y'' - 2y' + y = 0$$

$$y' + 4y = x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

denklemleri adi diferensiyel denklemlere örnek olarak verilebilir.

Bir adi diferensiyel denklemdeki en yüksek mertebeden türevin mertebesine o denklemin **mertebesi (basamağı)** denir. Bir diferensiyel denklemdeki tüm türevlere göre tam ve rasyonel olacak şekilde yazıldığında, denklemdeki en yüksek türevin derecesine verilen **denklemin derecesi** denir.

Örnek: y bağımlı, x bağımsız değişken olmak üzere;

$$y''' + 2xy' = 0$$

denklemi üçüncü mertebeden ve birinci dereceden adi diferensiyel denklemdir.

Örnek: y bağımlı, x bağımsız değişken olmak üzere;

$$(y'')^2 + 3xy = 0$$

denklemi ikinci mertebeden ve ikinci dereceden adi diferensiyel denklemdir.

Örnek: y bağımlı, x bağımsız değişken olmak üzere;

$$(y'')^3 + y' + 2y = 0$$

denklemi ikinci mertebeden ve üçüncü dereceden adi diferensiyel denklemdir.

Adi diferensiyel denklemler yapısına göre **homojen diferensiyel denklemler** ve **homojen olmayan diferensiyel denklemler** olmak üzere ikiye ayrılır. a_0, $a_{1,...,}$ a_n katsayıları ve $a_0 \neq 0$ olmak üzere;

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x) \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanan n-inci mertebeden diferensiyel denklemde $b(x) \neq 0$ ise (3.2) denklemine **homojen olmayan diferensiyel denklem** denir. Eğer $b(x) = 0$ ise (3.2) denklemine de **homojen diferensiyel denklem** denir.

Örnek:

$$xy'' - 3x^2(y')^3 + 4y = 4x + 1$$

$$3xy''' - y' + 5(x+1)y = 2x^2$$

denklemleri homojen olmayan diferensiyel denklemlere örnek olarak verilebilir.

Örnek:

$$y'' - 7y' + 12y = 0$$

$$ydx + xdy = 0$$

denklemleri homojen diferensiyel denklemlere örnek olarak verilebilir.

Adi diferensiyel denklemler bağımlı değişkenler ve türevlerinin katsayılarının cinsine göre **sabit katsayılı diferensiyel denklemler** ve **değişken katsayılı diferensiyel denklemler** olmak üzere ikiye ayrılır.

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x) \tag{3.3}$$

denkleminde y bağımlı değişken, x bağımsız değişken olmak üzere n-inci mertebeden diferensiyel denklemin türevlerinin $a_0, a_{1,...,}a_n$ katsayıları hepsi reel sabitlerden oluşuyorsa denkleme **sabit katsayılı diferensiyel denklem** denir. Eğer $a_0, a_{1,...,}a_n$ katsayılarından en az biri x bağımsız değişkenine bağlı ise denkleme **değişken katsayılı diferensiyel denklem** adı verilir.

Örnek:

$$y' - x^2 = 0$$

$$y'' + 3y' + 2 = 4x + 3$$

$$y''' + 4y'' + 4y = \ln x$$

denklemleri sabit katsayılı diferensiyel denklemlere örnek olarak verilebilir.

Örnek:

$$y'' + (3x + 4)y' - 3y = 0$$

$$7x^2y'' + 8xy' + y = x + 5$$

$$x^2y'' - xy' + y = x - 3$$

denklemleri değişken katsayılı diferensiyel denklemlere örnek olarak verilebilir.

3.1.2 Kısmi diferensiyel denklem

İki ya da daha çok bağımsız değişkene bağlı bir fonksiyonun bu bağımsız değişkenlere göre türevlerini içeren bir denkleme **kısmi diferensiyel denklem** denir. u bağımlı , (x, y) bağımsız değişkenler olacak şekilde bir kısmi diferensiyel denklem genel olarak

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}...) = 0 \tag{3.4}$$

şeklinde yazılır. Ayrıca birinci mertebeden iki bağımsız değişkenli bir kısmi diferensiyel denklem en genel olarak;

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \tag{3.5}$$

şeklindedir. Birinci mertebeden lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin, çalışmaları ilk olarak Lagrange tarafından bulunmuştur.

Örnek: u bağımlı, x, y, t bağımsız değişkenler olmak üzere;

$$u_{tt} - u_{xx} - u + u^3 = 0$$

$$u_t + uu_x - u_{xx} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial_x \partial_y} = 4 \sin x$$

örnekleri verilebilir.

Bir diferensiyel denklemdeki en yüksek mertebeden türevin mertebesine o denklemin **mertebesi (basamağı)** denir. Bir diferensiyel denklem, denklemdeki tüm

türevlere göre rasyonel ve tam olacak şekilde yazıldığında, denklemdeki en yüksek türevin derecesine o **denklemin derecesi** denir.

Örnek: u bağımlı değişken, x, y bağımsız değişken olmak üzere

$$uu_{xy} - u_x u_y = 0$$

denklemi ikinci mertebeden ve birinci dereceden bir kısmi diferensiyel denklemdir.

Örnek: u bağımlı değişken, t, x bağımsız değişken olmak üzere

$$u_{tt} - u_{xxx} - u\left(1 - u^2\right) = 0$$

denklemi üçüncü mertebeden ve birinci dereceden bir kısmi diferensiyel denklemdir.

Örnek: u bağımlı değişken, x, y bağımsız değişken olmak üzere

$$\left(u_{xy}\right)^2 + u_x = 0$$

denklemi ikinci mertebeden ve ikinci dereceden bir kısmi diferensiyel denklemdir.

Kısmi diferensiyel denklemler yapısına göre **homojen olan kısmi diferensiyel denklemler** ve **homojen olmayan kısmi diferensiyel denklemler** olmak üzere ikiye ayrılır. İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci mertebeden lineer kısmi türevli denklemlerin genel formları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$R(x,y)u_x + S(x,y)u_y + T(x,y)u = Q(x,y) \tag{3.6}$$

$$K(x,y)u_{xx} + L(x,y)u_{xy} + M(x,y)u_{yy} + N(x,y)u_x + O(x,y)u_y + P(x,y)u = H(x,y) \tag{3.7}$$

denklemlerinde x, y bağımsız; u bağımlı değişkendir. $Q(x,y) = 0$ ve $H(x,y) = 0$ ise **homojen kısmi diferensiyel denklem** adını alır. Eğer $Q(x,y) \neq 0$ ve $H(x,y) \neq 0$ ise **homojen olmayan kısmi diferensiyel** denir.

Örnek: u bağımlı değişken, x, y bağımsız değişken olmak üzere

$$u_{xx} - u_{xy} - 6u_{yy} = 0$$

$$7u_{xyyy} - u_{yyyy} = 0$$

denklemleri homojen olan kısmi diferensiyel denklemlere örnek olarak verilebilir.

Örnek: u bağımlı değişken, x, y bağımsız değişken olmak üzere

$$u_{xx} + 5u_{xy} + 6u_{yy} = \ln(x - y)$$

$$u_{xxx} - u_{xy} + u_x = xy$$

denklemleri homojen olmayan kısmi diferensiyel denklemlere örnek olarak verilebilir.

Kısmi diferensiyel denklemler bağımlı değişkenler ve türevlerinin katsayılarının cinsine göre **sabit katsayılı kısmi diferensiyel denklemler** ve **değişken katsayılı kısmi diferensiyel denklemler** olmak üzere ikiye ayrılır. İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci mertebeden lineer kısmi türevli denklemlerin genel formları sırasıyla (3.6) ve (3.7) gibidir.

Kısmi türevli denklemde kısmi türevlilerin $R, T, S, K, L, ...$ katsayıları hepsi reel sabitlerden oluşuyorsa denkleme **sabit katsayılı kısmi diferensiyel denklem** denir. Eğer $R, T, S, K, L, ...$ katsayılarından en az biri bağımsız değişken olan x e bağlı ise denkleme **değişken katsayılı kısmi diferensiyel denklem** adı verilir.

Örnek: u bağımlı değişken, x, y bağımsız değişken olmak üzere

$$2u_{xx} + 5u_{xy} + 6u_{yy} = 0$$

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

denklemleri sabit katsayılı kısmi diferensiyel denklemlere örnek olarak verilebilir.

Örnek: u bağımlı değişken, x, y bağımsız değişken olmak üzere

$$u_{xx} + xuu_y = \sin y$$

$$xy^3u_x + x^2yu = \cos 2y$$

denklemleri değişken katsayılı kısmi diferensiyel denklemlere örnek olarak verilebilir.

Bir diferensiyel denklemdeki bağımsız değişken sayısı ve denklemin mertebesi gibi özelliklerin çözüm üzerinde önemli etkileri olacağı açıktır. Bu yüzden diferensiyel denklemlerde çözüm kavramının tanımı ve izahı, sadece bir bağımsız değişken ihtiva eden, adi diferensiyel denklemlerdeki çözüm kavramı kadar basit değildir. Bir diferensiyel denklemin çözümü; özel çözüm, genel çözüm ve tekil çözüm olmak üzere üç kısma ayrılır. Bir diferensiyel denklemi özdeş olarak sağlayan ve keyfi fonksiyon veya keyfi parametre kapsamayan bir fonksiyona bu diferensiyel denklemin bir **özel çözümü** denir. Bir diferensiyel denklemin mertebesi kadar keyfi fonksiyon kapsayan ve diferensiyel denklemi özdeş olarak sağlayan bir yüzey ailesine bu diferensiyel denklemin **genel çözümü** denir. Keyfi fonksiyon içeren bir yüzey ailesinin, bir diferensiyel denklemin genel çözümü olabilmesi için bu fonksiyon veya fonksiyonların en az denklemin mertebesi kadar sürekli türevlenebilir olması gerekir. Ve bu genel çözümdeki integral sabitine seçilen değerler verilerek elde edilemeyen fakat denklemi gerçekleştiren çözümlere de **tekil çözüm** denir.

Örnek:

$$y' = \sqrt{1 - y^2}$$

denkleminin genel çözümü

$$y = \sin(x + c)$$

olup $c = 0$ için özel çözümü

$$y = \sin x$$

ve tekil çözümü ise

$$y = 1, \quad y = 0$$

dır.

3.1.2.1 Kısmi diferensiyel denklemlerin sınıflandırılması

Bir kısmi türevli denklemdeki bağımlı değişken (birden fazla bağımlı değişken olması halinde bağımlı değişkenler) ve denklemdeki bütün kısmi türevleri birinci dereceden ve denklemi, bağımlı değişken ile onun türevleri parantezinde yazdığımızda katsayılar yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonu oluyorsa bu denkleme **lineerdir** denir (Koca,

2008). İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci mertebeden lineer kısmi türevli denklemlerin genel formları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$R(x,y)z_x + S(x,y)z_y + T(x,y)z = Q(x,y) \tag{3.8}$$

$$K(x,y)z_{xx}+L(x,y)z_{xy}+M(x,y)z_{yy}+N(x,y)z_x+O(x,y)z_y+P(x,y)z = H(x,y) \tag{3.9}$$

denklemlerinde $x,\ y$ bağımsız; z bağımlı değişkendir.

Örnek: u bağımlı ; x, y, t bağımsız değişken; k sabit olmak üzere ısı denklemi

$$u_t - k(u_{xx} + u_{yy}) = 0$$

ikinci mertebeden lineer bir denklemdir.

Örnek: z bağımlı değişken ; $x,\ y$ bağımsız değişken olmak üzere Laplace Denklemi

$$z_{xx} + z_{yy} \quad = \quad 0$$

ikinci mertebeden lineer bir denklemdir.

Örnek: u bağımlı değişken; x, t bağımsız değişken olmak üzere Telgraf Denklemi

$$u_{xx} = au_{tt} + bu_t + cu$$

ikinci mertebeden lineer bir denklemdir.

Örnek: u bağımlı değişken; x, t bağımsız değişken olmak üzere Lineer Schrödinger Denklemi

$$iu_t + u_{xx} = 0, \quad i = \sqrt{-1}$$

ikinci mertebeden lineer bir denklemdir.

Lineer olmayan diferensiyel denklemler ise lineer diferensiyel denklemlere yapı olarak benzemektedir. Ancak lineer olmayan diferensiyel denlemlerde doğrusallığı bozan terim olarak trigonometrik ifadeler, kübik ve katları terimler bulunmaktadır.

Örnek:

$$uu_{xy} - u_x u_y = 0$$

$$u_{xy}u_{xx} - 3u_{yy} - 6xu_y + xyu = 0$$

$$u_x(u_{xy})^2 + 2xuu_{yy} - 3xyu_y = 0$$

örnekleri lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlere örnek olarak verilebilir.

Aşağıda ilerde çalışacağımız bazı denklemler ve bunların dışında lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlere örnekler verilmiştir. **Örnek: 1)** Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi (NLS):

$$iu_t + u_{xx} + |u|^2 u = 0$$

2) Burger Denklemi:

$$u_t + uu_x = u_{xx}$$

3) Korteweg-de Vries Denklemi(KdV):

$$u_t + uu_x + bu_{xxx} = 0$$

4) Modifiye Kdv Denklemi (mKdV):

$$u_t - 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0$$

5) Boussinesq Denklemi:

$$u_{tt} - u_{xx} + 3(u)^2_{xx} - u_{xxxx} = 0$$

6) Fisher Denklemi:

$$u_{t-}u_{xx} + u(1-u) = 0$$

7) Phi- Four Denklemi:

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} - \lambda u + \beta u^3 = 0$$

8) Pochhammer-Chree (PC) Denklemi:

$$u_{tt} - u_{ttxx} - (\alpha u - \beta u^3 - \gamma u^5)_{xx} = 0$$

9) ZK-BBM denklemi:

$$u_t + u_x - \alpha(u^2)_x + (\beta u_{xt} + k u_{yt})_x = 0$$

örnekleri verilebilir.

Bir kısmi türevli denklem, denklemde bulunan en yüksek basamaktan kısmi türevlere göre (denklemdeki düşük basamaktaki türevlerin ve bağımlı değişkenin bulunuş şeklinden bağımsız olarak) lineer ise bu denklem **yarı-lineer (kuasi lineer)** adını alır. İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci basamaktan yarı-lineer denklemlerin genel şekilleri aşağıdaki gibidir.

$$R(x,y,z)z_x + S(x,y,z)z_y = T(x,y,z)$$

$$M(x,y,z,z_x,z_y)z_{xx} + N(x,y,z,z_x,z_y)z_{xy} + K(x,y,z,z_x,z_y)z_{yy} + L(x,y,z,z_x,z_y) = 0$$

Her lineer denklem aynı zamanda yarı-lineerdir, fakat yarı -lineer bir denklem lineer olmayabilir.

Örnek:

$$\begin{aligned} u_x u_{xx} + x u u_y &= \sin y \\ u_{xy} + 2\frac{\partial}{\partial_x}(u_x^2 + u) - 6xu^3 \sin y &= 0 \\ u_y u_{xx} - 3x^3 u u_{xy} + 2u_x - x^3 y u &= 0 \end{aligned}$$

denklemlerinin tümü yarı-lineer denklemdir.

Bir kısmi türevli denklem kuasi-lineer ve denklemde görülen en yüksek basamaktan türevlerin katsayıları yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonları ise bu denkleme

hemen-hemen lineerdir denir. İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip ikinci basamaktan hemen-hemen lineer bir denklemin genel şekli

$$A(x,y)z_{xx} + B(x,y)z_{xy} + C(x,y)z_{yy} + D(x,y,z,z_x,z_y) = 0$$

formundadır.

Örnek:

$$x\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + t\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + U^3\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 = t+1$$

$$3xU_{xx} + 4xyU_{yy} + 5xz^3U_{zz} + 2zU_{xy} + 2zU_{xy} - 4U_{yz} + U^2U_x - U_y + xye^z = 0$$

4. SOLITARY DALGALAR VE SOLITON

Fizik alanında dalganın tanımı, madde içerisinde veya boşlukta yayılan ve genellikle enerjinin taşınmasına neden olan ritmik olaya verilen isimdir (Karaoğlu, 2013). En çok bilinen dalga örnekleri ses ve su dalgasıdır. Bunun yanı sıra radar, radyo, kızıl ötesi dalgaları gibi elektromanyetik ve gözle görünemeyen dalgalar olarak isimlendirilen dalga çeşitleri de bulunmaktadır.

Bir dalganın en önemli özellikleri o dalganın dalga boyu, genliği ve frekansıdır. Her dalganın bir dalga boyu vardır. Bu ise dalganın ardışık çukur ya da ardışık tepeleri kısımları arasındaki mesafeye denir. Genlik ise bir dalganın yüzey mesafesinden alçaldığı ve yükseldiği mesafe olarak tanımlanır. Bu nedenle dalganın büyüklüğü genliğe bağlıdır. Frekans birim zamanda belirli bir olayın yineleme sıklığı olarak tanımlanırsa her bir dalganın da bir frekansa sahip olacağını düşünebiliriz. Bu durum için ise frekans, birim zamanda bir yerden geçen dalga sayısıdır. Bir saniyede geçen dalga sayısı ya da titreşim olarak frekansın birimi Hertz' dir. Dalga boyu ile frekans arasında bir ilişki vardır. Frekans azaldığında dalga boyu artar. Bu nedenle kısa dalgalar yüksek frekansa, uzun dalgalar ise düşük frekansa sahip olurlar. Bir dalganın hızı ise dalga boyu ve dalganın frekansının çarpımı olarak tanımlanır. Doğrusal olmayan kısmi diferensiyel denklemler ile ilgili kavramlardan biride solitonlar ve solitary dalgalardır. Bunu ilk raporlayan kişi sığ sudaki bir dalganın yayılımını tanımlayan İskoç mühendis John Scott-Russell (1808-1882)' dır. Kendine has bir tanımlanın olmamasıyla birlikte soliton aşağıdaki özellikleri gerçekleştiren kısmi diferensiyel denklemin bir çözümü olan lineer olmayan bir dalgadır (Wadati, 2001; Wazwaz, 2009).

1) Hız ve şekil gibi özelliklerini kaybetmeden yayılan yerel dalgalardır.

2) Karşılıklı çarpışmalara karşı kararlıdırlar ve çarpışma sonrasında özelliklerini korurlar.

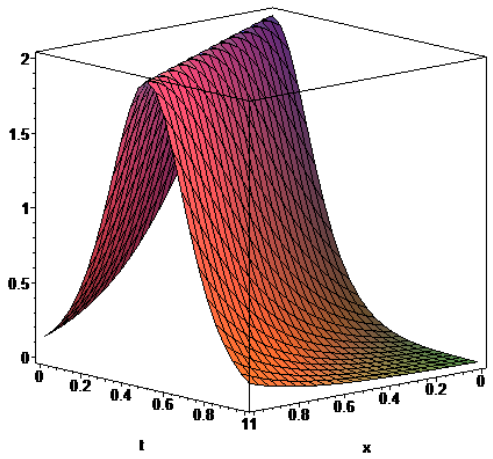
Birincisi 19. yy. dan beri hidrodinamikte bilinen bir solitary dalga koşuludur. İkincisi ise dalganın bir parçacık özelliğine sahip olması anlamına gelir. Modern fizikte -on takısı, bir parçanın özelliği işaret edilmek istendiğinde kullanılır. Örneğin elastik bir dalgadaki kuantum enerjisine bir "phonon" denmesi veya elektromanyetik dalganın

toplam enerjisini oluşturan enerji paketçiklerinden her biri için kullanılan "photon" gibi. Zabusky ve Kruskal (1965) solitary dalganın bir parçacık özelliğini 'soliton' adı ile isimlendirdi. Solitonun keşfedilmesine yol açan hikâye ilginç ve etkileyicidir (Wadati, 2001; Drazin ve Johnson, 1996). Solitary dalganın ilk kanıtlanmış gözlemi, 1834 yılı Ağustos ayının bir gününde İskoç bilim adamı John Scott-Russell tarafından Edinburg-Glasgow kanalında yapılmıştır. Russell, gözlemlerini 1844 yılında "Dalgalar üzerine Rapor" başlığı altında İngiliz Kültür Derneği Raporlarında şu sözleri ile yapmıştır (Russell, 1844): Dar bir kanal boyunca bir çift at tarafından hızlı bir şekilde çekilen bir botun hareketini gözlemliyordum. Bot aniden durduğunda kanal içindeki su kütlesi hareketini sürdürdü ve şiddetli bir sarsıntıyla botun baş tarafının kenarında toplandı. Sonra aniden orayı arkasında bırakarak büyük bir hızla ileriye doğru yayıldı. Büyük bir solitary yüksekliği şeklinde düşündüğüm düzgün su kütlesi, hızında bir azalma ya da şeklinde bir değişme olmaksızın kanal boyunca yoluna devam etti. Onu at sırtında takip ettim ve yakaladığımda yüksekliği 1.5, bir ayağından bir ayağına 30 feet uzunluğunda orijinal şeklini koruyarak 8 ya da 9 millik bir hızla hareketine devam ediyordu. Yüksekliği yavaşça azaldı ve 1 ya da 2 millik bir takipten sonra kanalı dönerken onu kaybettim. Böylece 1834 yılının Ağustos ayında "ötelenme dalgası" olarak isimlendireceğim bu muhteşem olaya şans eseri tanık oldum.

"Solitary dalga" kelimesi ilk olarak Scott-Russell tarafından telaffuz edilmiştir (Wadati, 2001). Russell gözleminden sonra takip eden 10 yıl boyunca su tankları ve kanallarda solitary dalga çalışmalarına devam etti ve solitary dalgaların özellikleri hakkında şu tespitlerde bulundu:

(i) Normal dalgaların aksine solitary dalgaları asla birleşmezler. Bu sebeple küçük genliğe sahip bir solitary dalgası ile büyük genliğe sahip bir solitary dalgası birbirleri ile çarpıştıktan sonra, iki solitary dalgası birbirlerinden ayrılarak, şekillerini kaybetmeden yollarına devam edebilirler. Normal dalgalar, ya dikleşerek söner ya da düzleşmeye başlar, şekilde hareket ederlerken, solitary dalgaları kararlıdır ve uzun mesafelerde yolculuk yapabilirler.

(ii) Solitary dalgaları $hsech^2(k(x-vt))$ şeklindedir. (Şekil 4.1) Burada v dalganın hızını, h dalganın genliğini, t zamanı, k dalga sayısını, x ise dalganın yayılım yönündeki uzay koordinatını göstermektedir.



Şekil 4.1

(iii) Yeterli şekilde büyük miktardaki su kütlesi, iki veya daha çok bağımsız solitary dalgası üretir.

(iv) g yerçekimi ivmesi olmak koşuluyla, h yükseklik ve d derinliğindeki bir kanalda hareket eden bir solitary dalgası

$$v = \sqrt{g(d+h)}$$

ile ifade edilen bir hıza sahiptir. Diğer bir ifade ile dalganın hızı, yüksekliğine ve suyun derinliğine bağlıdır. Bu ifade büyük genliğe sahip olan solitary dalganın, küçük genlikli solitary dalgadan daha hızlı yol alacağını ifade eder (Falkovich, 2007).

Russel' ın solitary dalganın varlığını öne sürdüğü bu dönemde tahminini destekleyici herhangi bir matematiksel teori yoktu. Ayrıca fikirleri en başta o günkü bilim dünyasına yön veren önemli ve saygın bilim adamları tarafından büyük bir kuşku ile karşılandı. Özellikle en başlarda Airy ve Stokes' un sert eleştirilerine maruz kaldı (Ablowitz ve Segur, 1981; Newell, 1985). 1870' ler de Russell' ın bilim dünyasındaki önemi ve etkinliği arttı. Bu yıllarda bağımsız olarak Boussinesq (1871) uzun dalgaları modelleyen bir oluşum denklemi türetti. Kısa süre sonra Boussinesq (1872) ve

Rayleigh (1876) solitary dalga çözümleri elde ederek Russell' in solitary dalga üzerine yaptığı öngörüleri doğruladılar (Debnath, 2007). Bu konu üzerinde uzun yıllar süre gelen anlaşmazlık, yaklaşık elli yıl sonra Hollandalı iki Matematikçi Diederik Johannes Korteweg ve öğrencisi Gustav de Vries tarafından çözüldü. Korteweg ve de Vries (1895), Airy ve Stokes' un eleştirilerine cevap verme amacıyla, Boussinesq ve Rayleigh' in çalışmalarından habersiz, Russell' ın problemine indirgenen ve onun gözlemlediği olgunun temel özelliklerine sahip, yüzeysel su dalgalarına ait bir teori yayınladılar. Bu yayının sonuçlarından biri soliton teoride anahtar rol oynayan ve su yüzeyinde tek doğrultudaki dalgaların yayılımını modelleyen ve KdV denklemi olarak bilinen formundaki doğrusal olmayan kısmi diferensiyel denklemi oldu.

5. LİNEER OLMAYAN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN TAM ÇÖZÜMLERİ

Doğadaki ve disiplinlerarası bilimlerdeki birçok olayın matematiksel modellenmesi, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemler yardımıyla yapılmaktadır. Genellikle fiziksel, biyolojik ve kimyasal olayların tanımında kullanılan bu denklemlerin kapalı form veya analitik çözümlerinin bulunması son zamanlarda büyük önem kazanmıştır. Ayrıca bu gibi denklemlerin farklı çözümleri olabileceğinden, çözümlerin sınıflandırılması oldukça önemlidir. Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin genel çözümleri daima sonuçlanmayabilir. Birinci mertebeden lineer olmayan kısmi türevli denklemlerin genel çözümleri Lagrange-Charpit metodu ile bulunabilir. Ancak yüksek mertebeden doğrusal olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin genel çözümünün bulunması için kesin bir metot yoktur. Bu sebeple bu gibi denklemleri sağlayacak çözümler tam çözümler olarak tanımlanır (Kaplan, 2013).

Lineer olmayan diferensiyel denklemlerin tam çözümlerini bulmak için birden fazla metot bulunmuştur. Bu metodlardan bazıları Jakobi eliptik fonksiyon metodu, ters saçılım metodu, kompleks tanh metodu, üstel rasyonel fonksiyon metodu, Bäcklaund dönüşüm metodu , first integral metodu, trial denklem metodu, Hirota bilineer metodu, homojen denge metodu, sinüs-kosinüs metodu, tanh metodu, açılım metodu, üstel fonksiyon metodu, genişletilmiş tanh metodu, (G'/G) açılım metodu , ansatz (dark-bright) ve $1/G'$ açılım metodur (Kaplan vd., 2015). Biz bu çalışmamızda trial metot ile ilgileneceğiz.

Lineer olmayan diferensiyel denklemlerin tam çözümleri periyodik, kompleks, kink, soliton ve kompakton olarak elde edilir. Peridoyik çözümler; sin, cos, tan, cot, sec, csc fonksiyonlarını, kompleks çözümler; karmaşık fonksiyonları, kink çözümler $a+tanh$ ve $a+coth$ fonksiyonlarını, kompakton çözümler sin^2, cos^2, sec^2, $cosec^2$ fonksiyonları, soliton çözümler için $sinh$, $cosh$, $tanh$, $coth$ fonksiyonlarını ve bu fonksiyonların kendi içlerinde ise bright soliton çözüm $sinh$ fonksiyonu, dark soliton çözüm $cosh$ fonksiyonu, topolojik soliton çözüm $tanh$ fonksiyonu , singüler soliton çözüm ise $coth$ fonksiyonu içeren çözümlerdir.

5.1 Trial Metot Ve Uygulamaları

Trial metot Ma ve Fuchssteiner tarafından bulunmuş ve üzerine çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Bu yöntem, verilen diferensiyel denklemlerin çözümlerinin çözülebilir diferensiyel denklemlerin çözüm fonksiyonu olarak genişletilmesi esasına dayanmaktadır. Bu yöntem tanh yöntemi, homojen denge yöntemi, üstel fonksiyon yöntemi ve Jakobi eliptik fonksiyon yöntemi gibi tam çözüm yöntemlerini birleştirmektedir.

Ma-Fuchssteiner'in yaklaşımı ve Liu'nun gerçel denklemler için trial yöntemine göre trial denklem, hem reel hem de kompleks katsayılı denklemler için aşağıdaki şekilde ifade edilebilir (Liu,2011):

$$F(x,t,u,u_x,u_t,u_{tt},u_{xt},u_{tt}...)=0 \tag{5.1}$$

lineer olmayan diferensiyel denklemi ele alınsın. Reel denklem için

$$u(x,t)=U(\xi), \qquad \xi=kx+wt \tag{5.2}$$

ve karmaşık denklem için

$$\begin{aligned} u(x,t)&=U(\xi)e^{i\zeta},\\ \xi&=kx+wt,\\ \zeta&=sx+rt \end{aligned} \tag{5.3}$$

dalga dönüşümü yapılabilir. Reel denklem için çözüm; (5.2) dönüşümü (5.1) de yerine yazılırsa;

$$P(t,x,k,w,U,U^{'},U^{''},...)=0 \tag{5.4}$$

adi diferensiyel denklemi elde edilir. Kompleks denklemler için çözüm ise (5.3) dönüşümü (5.1) denkleminde yerine yazılırsa;

$$P(t,x,k,w,s,r,U,U^{'},U^{''},...)=0 \tag{5.5}$$

adi diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklem

$$P_1(t,x,k,w,s,r,U,U^{'},U^{''},...)=0 \tag{5.6}$$

gerçel ve

$$P_2(t, x, k, w, s, r, U, U^{'}, U^{''}, ...) = 0 \tag{5.7}$$

sanal kısımlardan oluşur. Trial denklemi ele alarak çözümü adım adım inceleyelim.

Adım 1:

$$(U^{'})^2 = F(U) = \sum_{l=0}^{s} a_l.U^l, \quad l = 0, 1, ..., s \tag{5.8}$$

burada s sabiti dengelenme prensibine göre belirlenecektir. Elde edilen adi diferensiyel denklemin hareketli dalga çözümünün bir seri toplamı şeklinde olduğu kabul edilmekte ve bu seri toplamının üst sınırı s **dengelenme sayısı** olarak tanımlanmaktadır. Dengelenme sayısı, lineer olmayan herhangi bir adi diferensiyel denklemde en yüksek mertebeden lineer terim ile en yüksek dereceden lineer olmayan terim arasında elde edilen bir sayıdır. (5.8) formundaki lineer olmayan bir adi diferensiyel denklem için, dengelenme sayısı; $(U^n)^{''}$ ile U^{m+1} terimler arasında şu şekilde bulunur (Gurefe vd., 2011).

$$s = \frac{2m + 4}{n + 1}.$$

Adım2:

$$(U^{'})^2 = F(U) = \sum_{l=0}^{s} a_l.U^l \tag{5.9}$$

dengelenme sayısı s için seriyi açalım

$$(U^{'})^2 = F(U) = a_0 + a_1U + a_2U^2 + a_3U^3 + ... + a_sU^s. \tag{5.10}$$

(5.10) denkleminin bir kez türevini alalım.

$$2U^{'}U^{''} = a_1U^{'} + 2a_2UU^{'} + 3a_3U^2U^{'} + ... + sa_sU^{s-1}U^{'} \tag{5.11}$$

(5.11) denkleminin her iki tarafı $2U^{'}$ ile bölünür ve $U^{''}$ yalnız bırakılır. Bu şekilde diğer türev değerleri denklemde varsa bulunur. Reel denklemin çözümü için (5.4) denkleminde yerine yazılır. Kompleks denklemin çözümü için ise (5.6) ve (5.7) denklemlerinde yerine yazılır. Elde edilen fonksiyonların katsayıları sıfıra eşitlenmesiyle adi diferensiyel denklem sistemi elde edilir. Bu denklemlerin çözülmesiyle k, w, s, r ve a_l $(l = 0, ..., s)$ değerleri bulunur. Ve (5.9) denklemi

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{1}{\sqrt{F(U)}} dU \tag{5.12}$$

olarak yazılır. Son olarak (5.12) integralinin çözülmesiyle (5.1) denkleminin tam çözümleri elde edilmiş olur. Lineer olmayan kısmi difrensiyel denklemlerin tam çözümlerini veren örnekler verelim.

5.1.1 Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi

Lineer olmayan Schrödinger denklemini (NLS) ele alalım (El-Borai vd., 2017)

$$iu_t + pu_{xx} + q\left|u\right|^2 u = 0. \tag{5.13}$$

Bu denklem su dalgalarının oluşumunu modeller. Ayrıca hidromanyetik ve plazma dalgalarında, katı bir cisimdeki ısı iletiminde, lineer olmayan optiklerde, lineer olmayan kararsızlık problemlerinde ve sıvı ile dolu elastik bir tüpteki lineer olmayan dalgalarda görülmektedir.

Lineer olmayan Schrödinger denklemi, kırılım göstergesi dalga genişliğine duyarlı orta bölgedeki lazer ışının yayılımı, plazma dalgaları ve ideal akışkanın serbest yüzeyindeki su dalgaları gibi lineer olmayan dalgaların tanımındaki çeşitli fiziksel durumlardan ortaya çıkmıştır (Sulem ve Sulem, 1999).

Burada u kompleks değerli fonksiyon ve p, q sabitler olmak üzere u bağımlı, x ve t bağımsız değişkenlerdir. Bu denklem için

$$u(x,t) = e^{i\eta}U(\xi), \qquad \eta = \alpha x + \beta t + \theta, \qquad \xi = x - 2p\alpha t$$

dalga dönüşümü kullanılarak elde edilen adi diferensiyel denklem aşağıdaki formda olur

$$pU^{''} - (\beta + p\alpha^2)U + qU^3 = 0. \tag{5.14}$$

(5.14) denklemindeki dengelenme sayısı $(U^n)^{''}$ ile U^{m+1} arasında yani $U^{''}$ ile U^3 terimleri arasındadır. $m = 2$ ve $n = 1$ için

$$s = \frac{2m+4}{n+1}$$

$s = 4$ olarak bulunur. Buna göre seri aşağıdaki formda yazılır.

$$(U^{'})^2 = F(U) = a_0 + a_1U + a_2U^2 + a_3U^3 + a_4U^4 \tag{5.15}$$

(5.15) denkleminin bir kere türevi alınır.

$$2U^{'}U'' = a_1U' + 2a_2UU' + 3a_3U^2U' + 4a_4U^3U'$$

$$U'' = \frac{a_1}{2} + a_2U + \frac{3}{2}a_3U^2 + 2a_4U^3$$

Bulunan bu ifadeler (5.14) adi diferensiyel denkleminde yerine yazılarak

$$p(\frac{a_1}{2} + a_2U + \frac{3}{2}a_3U^2 + 2a_4U^3) - (\beta + p\alpha^2)U + qU^3 = 0 \tag{5.16}$$

denklemi elde edilir ve oluşan bu denklemde U^0, U^1, U^2, U^3 katsayıları sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklemler bulunur

$$U^0 : \quad \frac{a_1 p}{2} = 0$$

$$U^1 : \quad a_2 p - (\beta + p\alpha^2) = 0$$

$$U^2 : \quad p\frac{3}{2z}a_3 = 0$$

$$U^3 : \quad 2a_4 p + q = 0.$$

Bu denklem sisteminden katsayılar

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_2 &= \frac{\beta + p\alpha^2}{p} \\ a_3 &= 0 \\ a_4 &= -\frac{q}{2p} \end{aligned}$$

şeklindedir. Böylece elde edilen

$$F(U) = a_0 + a_1U + \frac{\beta + p\alpha^2}{p}U^2 - \frac{q}{2p}U^4$$

ifadesi integral formda yerine yazılırsa a_0 sabit olmak üzere;

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{1}{\sqrt{a_0 + \frac{\beta + p\alpha^2}{p}U^2 - \frac{q}{2p}U^4}} dU$$

elde edilir. Buradaki integralin alınabilmesi için a_0 ın farklı durumlarını inceleyelim.

Durum 1: Eğer $a_0 = 0$ ve $p(\beta + p\alpha^2) > 0$ alınırsa

$$u(x,t) = \pm\sqrt{\frac{2(\beta + p\alpha^2)}{q}}\,\sec h\left(\sqrt{\frac{\beta + p\alpha^2}{p}}(x - 2p\alpha t - \xi_0)\right)e^{i(\alpha x + \beta t + \theta)}$$

$$u(x,t) = \pm\sqrt{\frac{2(\beta + p\alpha^2)}{q}}\,\csc h\left(\sqrt{\frac{\beta + p\alpha^2}{p}}(x - 2p\alpha t - \xi_0)\right)e^{i(\alpha x + \beta t + \theta)}$$

tam çözümleri sırasıyla *sech* cinsinden elde edildiğinden bright, *csch* cinsinden elde edildiğinden ise dark-1 soliton çözümlerdir.

Eğer $p(\beta + p\alpha^2) < 0$ alınırsa

$$u(x,t) = \pm\sqrt{\frac{2(\beta+p\alpha^2)}{q}}\sec\left(\sqrt{\frac{\beta+p\alpha^2}{p}}(x-2p\alpha t-\xi_0)\right)e^{i(\alpha x+\beta t+\theta)}$$

$$u(x,t) = \pm\sqrt{\frac{2(\beta+p\alpha^2)}{q}}\csc\left(\sqrt{\frac{\beta+p\alpha^2}{p}}(x-2p\alpha t-\xi_0)\right)e^{i(\alpha x+\beta t+\theta)}$$

tam çözümleri sırasıyla *sec* cinsinden elde edildiğinden periyodik ve *cosec* cinsinden elde edildiğinden dolayı singüler çözümlerdir.

Durum 2: Eğer $a_0 = \dfrac{-(\beta+p\alpha^2)^2}{(2pq)} > 0$ ve $p(\beta + p\alpha^2) < 0$ alınırsa

$$u(x,t) = \pm\sqrt{\frac{(\beta+p\alpha^2)}{q}}\tanh\left(\sqrt{-\frac{\beta+p\alpha^2}{2pq}}(x-2p\alpha t-\xi_0)\right)e^{i(\alpha x+\beta t+\theta)}$$

$$u(x,t) = \pm\sqrt{\frac{(\beta+p\alpha^2)}{q}}\coth\left(\sqrt{-\frac{\beta+p\alpha^2}{2pq}}(x-2p\alpha t-\xi_0)\right)e^{i(\alpha x+\beta t+\theta)}$$

sırasıyla tam çözümler *tanh* cinsinden elde edildiği için topolojik 1-soliton ve *coth* cinsinden elde edildiği için singüler 1-soliton çözümlerdir.

Eğer $p(\beta + p\alpha^2) > 0$

$$u(x,t) = \pm\sqrt{-\frac{(\beta+p\alpha^2)}{q}}\tan\left(\sqrt{\frac{\beta+p\alpha^2}{2pq}}(x-2p\alpha t-\xi_0)\right)e^{i(\alpha x+\beta t+\theta)}$$

$$u(x,t) = \pm\sqrt{-\frac{(\beta+p\alpha^2)}{q}}\cot\left(\sqrt{\frac{\beta+p\alpha^2}{2pq}}(x-2p\alpha t-\xi_0)\right)e^{i(\alpha x+\beta t+\theta)}$$

sırasıyla *tan* cinsinden elde edildiğinden periyodik ve *cot* cinsinden elde edildiğinde ise singüler çözümler elde edilir.

5.1.2 Genelleştirilmiş Fisher Denklemi

Genelleştirilmiş lineer olmayan Fisher Denklemini ele alalım (Wazwaz ve Triki, 2016)

$$u_t = \alpha^2(t)u_{xx} + b(t)u - c(t)u^3.$$

burada u bağımlı x ve t bağımsız değişkenlerdir. Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemi adi diferensiyel denkleme dönüştürmek için

$$u(x,t) = U(\xi), \qquad \xi = k(t)x + w(t)$$

dalga dönüşümü kullanılabilir. Burada u, ξ nin bir fonksiyonu ve $k(t)$ ve $w(t)$ zamana bağlı fonksiyonlar olmak üzere, bu dalga dönüşümünü kullanarak

$$[k^{'}(t)x + w^{'}(t)]U^{'} - \alpha^2(t)k^2(t)U^{''} + b(t)U - c(t)U^3 = 0 \tag{5.17}$$

adi diferensiyel denklemi elde edilir. $a_l \;\; (l = 0, 1, 2, ..., m)$ sabitleri olmak üzere

$$(U^{'})^2 = F(U) = \sum_{l=0}^{s} a_l.U^l.$$

Burada dengelenme $U^{''}$ ile U^3 terimleri arasındadır. $m = 2$ ve $n = 1$ için;

$$s = \frac{2m+4}{n+1}$$

$s = 4$ bulunur. Belirlenen s sayısı için;

$$(U^{'})^2 = \quad F(U) = a_0 + a_1U + a_2U^2 + a_3U^3 + a_4U^4 \tag{5.18}$$

(5.18) açılımının bir kere türevi alınır.

$$2U^{'}U^{''} = \quad a_1U^{'} + 2a_2UU^{'} + 3a_3U^2U^{'} + 4a_4U^3U^{'}$$

$$U^{''} = \quad \frac{a_1}{2} + a_2U + \tfrac{3}{2}a_3U^2 + 2a_4U^3$$

Bulunan bu ifadeler (5.17) denkleminde yerine yazılarak;

$$[k^{'}(t)x + w^{'}(t)]U^{'} - \alpha^2(t)k^2(t)(\frac{a_1}{2} + a_2U + \frac{3}{2}a_3U^2 + 2a_4U^3) + b(t)U - c(t)U^3 = 0$$

adi diferensiyel denklemi elde edilir ve buradan $U^{'}, U^0, U^1, U^2, U^3$ kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$U^{'}: \qquad k^{'}(t)x + w^{'}(t) = 0$$

$$U^0: \qquad -\alpha^2(t)k^2(t)\frac{a_1}{2} = 0$$

$$U^1: \quad -\alpha^2(t)k^2(t)a_2 + b(t) = 0$$

$$U^2: \qquad -\alpha^2(t)k^2(t)\frac{3}{2}a_3 = 0$$

$$U^3: \quad -\alpha^2(t)k^2(t)2a_4 - c(t) = 0.$$

Bu denklem sisteminden katsayılar

$$c(t) = c_2k^2\alpha^2(t), \quad b(t) = c_1k^2\alpha^2(t), \quad k(t) = k, \quad w(t) = w,$$

$$\begin{aligned} a_0 &= c_3 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= c_1 \\ a_3 &= 0 \\ a_4 &= -\frac{c_2}{2} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. k, w, c_1, c_2 ve c_3 keyfi sabitlerdir. Böylece

$$F(U) = c_3 + c_1U^2 - \frac{c_2}{2}U^4$$

formundadır. $U = \pm\sqrt{(4a_4)^{\frac{-1}{3}}w}$ dönüşümü yapılacak olursa;

$$\pm(4a_4)^{\frac{1}{3}}(\xi - \xi_0) = \int \frac{1}{\sqrt{w(w^2 + b_1w + b_0)}}dw$$

elde edilir. Burada $b_1 = 4a_2(4a_4)^{\frac{-2}{3}}$ ve $b_0 = 4a_0(4a_4)^{\frac{-1}{3}}$ dir. $\Delta = b_1^2 - 4b_0$ olduğunu belirterek Fisher denkleminin soliton çözümlerini bulalım.

Durum 1: $\Delta = b_1^2 - 4b_0 > 0$ ve $b_0 = 0$. $w > -b_1$ olduğu zaman eğer $a_2 > 0$ ve $a_4 > 0$ ise

$$U_1(\xi) = \pm\sqrt{\frac{a_2}{a_4}}\left(\frac{\sec h[\sqrt{a_2}(\xi - \xi_0)]}{1 - \sqrt{2}\tanh[\sqrt{a_2}(\xi - \xi_0)]}\right),$$

Durum 2: $\Delta = b_1^2 - 4b_0 > 0$ ve $b_0 = 0$. $w > -b_1$ olduğu zaman eğer $a_2 > 0$ ve $a_4 < 0$ ise

$$U_2(\xi) = \pm\sqrt{\frac{2a_2}{a_4}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\cosh[2\sqrt{a_2}(\xi-\xi_0)]}}\right),$$

Durum 3: $\Delta = b_1^2 - 4b_0 > 0$ ve $b_0 = 0$. $w > -b_1$ olduğu zaman eğer $a_2 > 0$ ve $a_4 < 0$ ise

$$U_3(\xi) = \pm\sqrt{\frac{a_2}{a_4}}\sec h[\sqrt{a_2}(\xi-\xi_0)],$$

Durum 4: $\Delta = b_1^2 - 4b_0 = 0$ ve $b_0 = 0$. $w > 0$ olduğu zaman eğer $a_2 < 0$ ve $a_4 < 0$ ise

$$U_4(\xi) = \pm\sqrt{\frac{a_2}{2a_4}}\tanh\left(\sqrt{\frac{-a_2}{2}}(\xi-\xi_0)\right),$$

Durum 5: $\Delta = b_1^2 - 4b_0 > 0$ ve $b_0 = 0$. $w > -b_1$ olduğu zaman eğer $a_2 > 0$ ve $a_4 > 0$ ise

$$U_5(\xi) = \pm\sqrt{\frac{a_2}{a_4}}\left\{\frac{1}{2}\tanh^2\left(\sqrt{\frac{a_2}{2}}(\xi-\xi_0)\right)-1\right\}^2$$

tam çözüm formları bu şekilde bulunur.

5.1.3 Phi-Four Denklemi

Phi-Four denklemini ele alalım

$$u_{tt} - au_{xx} - \lambda u + \beta u^3 = 0. \tag{5.19}$$

Bu denklem Klein-Gordon denkleminin özel bir formu olarak örneklenen Phi-Four denklemi tekil dalgaların etkinleştiği yer olarak modellenmiştir. Burada u bağımlı x ve t bağımsız değişkenlerdir. Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemi adi diferensiyel denkleme dönüştürmek için;

$$u(x,t) = U(\xi), \qquad \xi = x - ct$$

dalga dönüşümü kullanılır.

$$u_{tt} = \ c^2U'' \ , \qquad u_{xx} = \ U'' \ \text{ olmak üzere}$$

$$c^2U'' - \alpha U'' - \lambda U + \beta U^3 = 0$$

$$U''(c^2-\alpha) - \lambda U + \beta U^3 = 0 \tag{5.20}$$

şeklinde bulunur. (5.20) adi diferensiyel denklemindeki dengelenme sayısı $(U^n)''$ ile U^{m+1} terimleri arasında yani $(U)''$ ile U^3arasındadır. $m = 2$ ve $n = 1$ olmak üzere

$$s = \frac{2m+4}{n+1} = \frac{8}{2} = 4$$

bulunur.

$$(U')^2 = F(U) = \sum_{l=0}^{s} a_l.U^l = a_0 + a_1U + a_2U^2 + a_3U^3 + a_4U^4 \tag{5.21}$$

olmak üzere (5.21) denkleminin bir kere türevi alınır.

$$2U'U'' = a_1U' + 2a_2U\ U' + 3a_3U^2U' + 4a_4U^3U'$$

$$U'' = \frac{a_1}{2} + a_2U + \frac{3}{2}a_3U^2 + 2a_4U^3$$

Bulunan ifadeler (5.20) diferensiyel denkleminde yerine yazılarak;

$$(c^2 - \alpha)(\frac{a_1}{2} + a_2U + \frac{3}{2}a_3U^2 + 2a_4U^3) - \lambda U + \beta U^3 = 0 \tag{5.22}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde U^0, U^1, U^2, U^3 kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklemler elde edilir

$$U^0: \quad (c^2 - \alpha)\frac{a_1}{2} = 0$$

$$U^1: \quad (c^2 - \alpha)a_2 - \lambda = 0$$

$$U^2: \quad (c^2 - \alpha)\frac{3}{2}a_3 = 0$$

$$U^3: \quad (c^2 - \alpha)2a_4 + \beta = 0.$$

Bu denklem sisteminden katsayılar

$$\begin{aligned} a_0 &= a_0 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= \frac{\lambda}{(c^2 - \alpha)} \\ a_3 &= 0 \\ a_4 &= -\frac{\beta}{2(c^2 - \alpha)} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Böylece

$$F(U) = a_0 + \frac{\lambda}{(c^2 - \alpha)}U^2 - \frac{\beta}{2(c^2 - \alpha)}U^4$$

formundadır. Elde edilen $F(U)$ integral formda yerine yazılırsa

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{1}{\sqrt{a_0 + a_2U^2 + a_4U^4}} dU$$

elde edilir. Buradaki integralin alınabilmesi için a_0 katsayısının farklı durumlarını inceleyelim.

i) Eğer $a_0 = 0$ ise;

$$\begin{aligned}
\pm(\xi - \xi_0) &= \int \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda}{(c^2-\alpha)}U^2 - \frac{\beta}{2(c^2-\alpha)}U^4}} dU \\
\pm(\xi - \xi_0) &= \int \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda}{(c^2-\alpha)}}U\sqrt{1 - \frac{(c^2-\alpha)}{\lambda}\frac{\beta}{2(c^2-\alpha)}U^2}} dU \\
\pm(\xi - \xi_0) &= \int \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda}{(c^2-\alpha)}}U\sqrt{1 - \frac{\beta}{2\lambda}U^2}} dU \\
\sqrt{\frac{\lambda}{(c^2-\alpha)}}(\xi - \xi_0) &= \operatorname{arcsec} h(\sqrt{\frac{\beta}{2\lambda}}U) \\
\sec h\sqrt{\frac{\lambda}{(c^2-\alpha)}}(\xi - \xi_0) &= \sqrt{\frac{\beta}{2\lambda}}U \\
U &= \pm\sqrt{\frac{2\lambda}{\beta}}\sec h\sqrt{\frac{\lambda}{(c^2-\alpha)}}(\xi - \xi_0).
\end{aligned}$$

Yani verilen denklemin çözümü

$$u(x,t) = \pm\sqrt{\frac{2\lambda}{\beta}}\sec h\sqrt{\frac{\lambda}{(c^2-\alpha)}}(x - ct - \xi_0)$$

şeklinde bulunur.

ii) Eğer $a_0 = \dfrac{-\lambda^2}{2\beta(c^2-a)}$, $\dfrac{a-c^2}{\beta} > 0$, $\dfrac{\lambda}{\beta} > 0$ ve $\dfrac{(\alpha - c^2)}{\lambda} > 0$ olmak üzere;

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{1}{\sqrt{\dfrac{-\lambda^2}{2\beta(c^2-a)} + \dfrac{\lambda}{(c^2-\alpha)}U^2 - \dfrac{\beta}{2(c^2-\alpha)}U^4}} dU$$

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\beta}{2(\alpha-c^2)}\left(\dfrac{\lambda^2}{\beta^2} - \dfrac{2\lambda}{\beta}U^2 + U^4\right)}} dU$$

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\beta}{2(\alpha-c^2)}}\sqrt{\left(\dfrac{\lambda^2}{\beta^2} - \dfrac{2\lambda}{\beta}U^2 + U^4\right)}} dU$$

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\beta}{2(\alpha-c^2)}}\sqrt{\left(U^2 - \dfrac{\lambda}{\beta}\right)^2}} dU$$

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \sqrt{\frac{2(\alpha-c^2)}{\beta}} \frac{1}{U^2 - \dfrac{\lambda}{\beta}} dU$$

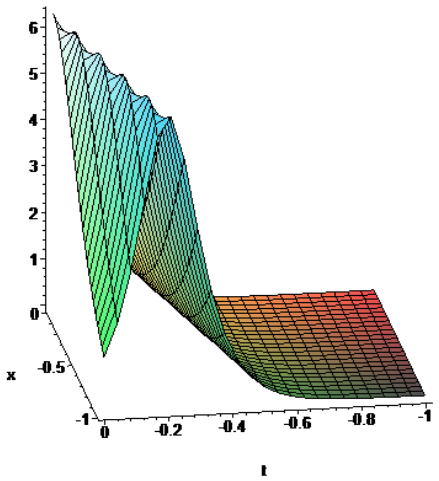
$$\pm(\xi - \xi_0) = \sqrt{\frac{2(\alpha-c^2)}{\beta}} \int \frac{1}{U^2 - \dfrac{\lambda}{\beta}} dU$$

$$\pm(\xi - \xi_0) = -\sqrt{2\frac{(\alpha-c^2)}{\lambda}} \arctan h(\sqrt{\frac{\beta}{\lambda}}U)$$

$$U = \sqrt{\frac{\lambda}{\beta}} \tanh\left(\pm(\xi - \xi_0)\sqrt{\frac{\lambda}{2(a-c^2)}}\right)$$

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{\lambda}{\beta}} \tanh\left(\pm(x - ct - \xi_0)\sqrt{\frac{\lambda}{2(a-c^2)}}\right).$$

Bu çözümdeki sabitlerin $\alpha = 6$, $\beta = 1$, $c = 2$, $\lambda = 4$ değerleri için (Şekil 5.1) elde edilir.



Şekil 5.1

5.1.4 Pochhammer-Chree Denklemi

Pochhammer-Chree denklemini ele alalım

$$u_{tt} - u_{ttxx} - (\alpha u - \beta u^3 - \gamma u^5)_{xx} = 0. \tag{5.23}$$

Deformasyon dalgaların boyuna yayılması PC denklemi tarafından modellenmiştir. Burada u bağımlı x ve t bağımsız değişkenlerdir. Bu denklemde $\gamma = 0$ olacak şekilde keyfi sabiti seçilirse ;

$$u_{tt} - u_{ttxx} - (\alpha u - \beta u^3)_{xx} = 0$$

halini alır.

$$\xi = kx + wt$$

dalga dönüşümünü kullanılarak adi diferensiyel denkleme dönüştürülür.

$$u_{tt} = \quad w^2 U'' \quad , \quad u_{ttxx} = \quad k^2 w^2 U'''' \text{ olmak üzere}$$

$$w^2 U'' - k^2 w^2 U'''' - (\alpha U - \beta U^3)'' = 0 \text{ elde edilir.} \tag{5.24}$$

(5.24) diferensiyel denklemi iki kere integre ederek ve integral sabitleri sıfır alınarak

$$w^2U - k^2w^2U'' - (\alpha U - \beta U^3) = 0 \tag{5.25}$$

denklemi elde edilir. (5.25) diferensiyel denkleminde dengelenme sayısı $(U^n)''$ ile U^{m+1} terimleri arasında yani $(U)''$ ile U^3arasındadır. $m = 2$ ve $n = 1$ için;

$$s = \frac{2m+4}{n+1} = \frac{8}{2} = 4$$

bulunur. Buna göre

$$(U')^2 = F(U) = \sum_{l=0}^{s} a_l.U^l = a_0 + a_1U + a_2U^2 + a_3U^3 + a_4U^4 \tag{5.26}$$

(5.26) açılımının bir kere türevi alınırsa;

$$2U'U'' = a_1U' + 2a_2U\ U' + 3a_3U^2U' + 4a_4U^3U'$$

$$U'' = \frac{a_1}{2} + a_2U + \frac{3}{2}a_3U^2 + 2a_4U^3$$

olur. Bulunan ifadeler (5.25) diferensiyel denkleminde yerine yazılarak;

$$w^2U - k^2w^2(\frac{a_1}{2} + a_2U + \frac{3}{2}a_3U^2 + 2a_4U^3) - (\alpha U - \beta U^3) = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemdeki U^0, U^1, U^2, U^3 katsayıları sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklemler elde edilir

$$\begin{aligned}
U^0 :&\quad (-k^2w^2)\frac{a_1}{2} = 0\\
U^1 :&\quad w^2 - k^2w^2a_2 - \alpha = 0\\
U^2 :&\quad -\frac{3}{2}k^2w^2a_3 = 0\\
U^3 :&\quad -2k^2w^2a_4 + \beta = 0.
\end{aligned}$$

Bu denklem sisteminden katsayılar

$$\begin{aligned}
a_0 &= a_0\\
a_1 &= 0\\
a_2 &= \frac{w^2-\alpha}{k^2w^2}\\
a_3 &= 0\\
a_4 &= \frac{\beta}{2k^2w^2}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Böylece $F(U)$ ifadesi

$$F(U) = a_0 + \frac{w^2-\alpha}{k^2w^2}U^2 + \frac{\beta}{2k^2w^2}U^4$$

formundadır. Elde edilen $F(U)$ integral formda yerine yazılırsa

$$\pm(\xi-\xi_0)=\int\frac{1}{\sqrt{a_0+\dfrac{w^2-\alpha}{k^2w^2}U^2+\dfrac{\beta}{2k^2w^2}U^4}}dU$$

elde edilir. Buradaki integralin alınabilmesi için a_0 katsayısının farklı durumlarını inceleyelim.

i) Eğer $a_0=0$ ise,

$$\pm(\xi-\xi_0)=\int\frac{1}{\sqrt{\dfrac{w^2-\alpha}{k^2w^2}U^2+\dfrac{\beta}{2k^2w^2}U^4}}dU$$

$$\pm(\xi-\xi_0)=\int\frac{1}{\dfrac{\sqrt{\alpha-w^2}}{kw}U\sqrt{-1+\dfrac{\beta}{2(\alpha-w^2)}U^2}}dU$$

$$\pm(\xi-\xi_0)=\int\frac{kw}{\sqrt{\alpha-w^2}U\sqrt{-1+\dfrac{\beta}{2(\alpha-w^2)}U^2}}dU$$

$$\frac{\sqrt{\alpha-w^2}}{kw}(\xi-\xi_0)=arc\sec h(\sqrt{\frac{\beta}{2(\alpha-w^2)}}U)$$

$$\sec h\left(\frac{\sqrt{\alpha-w^2}}{kw}(\xi-\xi_0)\right)=\sqrt{\frac{\beta}{2(\alpha-w^2)}}U$$

$$U=\pm\sqrt{\frac{2(\alpha-w^2)}{\beta}}\sec h\left(\frac{\sqrt{w^2-a}}{kw}(\xi-\xi_0)\right)$$

U çözümü bulunur.Yani verilen denklemin çözümü

$$u(x,t)=\pm\frac{2(\alpha-w^2)}{\beta}\sec h\left(\frac{\sqrt{(\alpha-w^2)}}{kw}(kx+wt-\xi_0)\right)$$

şeklindedir.

ii) Eğer $a_0 = \dfrac{(w^2-\alpha)^2}{2\beta k^2 w^2}$ alalım ve $\beta > 0, a > 0$ olmak üzere;

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{1}{\sqrt{\dfrac{(w^2-\alpha)^2}{2\beta k^2 w^2} - \dfrac{w^2-\alpha}{k^2 w^2}U^2 + \dfrac{\beta}{2k^2 w^2}U^4}} dU$$

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{1}{\sqrt{\dfrac{(w^2-\alpha)^2}{2\beta k^2 w^2}\left(1 - \dfrac{2\beta}{w^2-\alpha}U^2 + \dfrac{\beta^2}{(w^2-\alpha)^2}U^4\right)}} dU$$

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{1}{\dfrac{w^2-\alpha}{\sqrt{2\beta}kw}\sqrt{\left(1 - \dfrac{\beta}{w^2-\alpha}U^2\right)^2}} dU$$

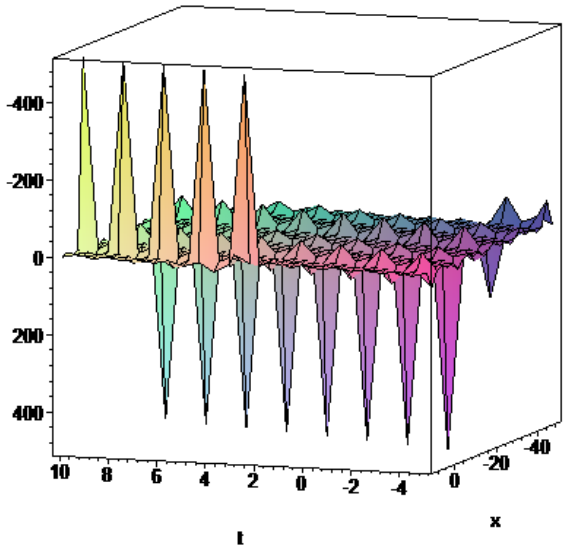
$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{\sqrt{2\beta}kw}{(w^2-\alpha)\left(1 - \dfrac{\beta}{w^2-\alpha}U^2\right)} dU$$

$$\pm(\xi - \xi_0) = -\sqrt{2}\frac{kw}{\sqrt{a-w^2}} \arctan h\left(\sqrt{\frac{\beta}{w^2-\alpha}}U\right)$$

$$U = \sqrt{\frac{a-w^2}{\beta}} \tanh\left(\frac{\mp\sqrt{a-w^2}(\xi-\xi_0)}{\sqrt{2}kw}\right)$$

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{a-w^2}{\beta}} \tanh\left(\frac{\mp\sqrt{a}(kx+wt-\xi_0)}{\sqrt{2}kw}\right)$$

şeklinde bulunur. Buradaki sabitlerin $\alpha = 100$, $\beta = 1$, $k = 3$, $w = 4$ değerleri için aşağıdaki Şekil 5.2 elde edilir.



Şekil 5.2

5.1.5 Zakharov-Kuznetsov-Benjamin-Bona-Mahony (ZK-BBM) Denklemi

ZK-BBM (Zakharov-Kuznetsov-Benjamin-Bona-Mahony) denklemini ele alalım

$$u_t + u_x - \alpha(u^2)_x + (\beta u_{xt} + k u_{yt})_x = 0. \tag{5.27}$$

Doğrusal olmayan bir adi diferensiyel denklem sistemi tarafından yönetilen ZK-BBM denklemi için hareket dalgası olarak düşünülmektedir. Burada u bağımlı x,y ve t bağımsız değişkenlerdir. Lineer olmayan kısmi diferensiyeli adi diferensiyel denkleme dönüştürmek için

$$u(x,t) = U(\xi), \qquad \xi = x + y - ct$$

dalga dönüşümü kullanılır, buradan gerekli türevleri alıp yerine yazıldığında

$$u_t = \quad -cU^{'}$$

$$u_x = \quad U^{'}$$

$$u_{xtx} = \quad -cU^{'''}$$

$$u_{ytx} = \quad -cU^{'''}$$

olmak üzere elde edeceğimiz adi diferensiyel denklem

$$(-c+1)U^{'} - 2\alpha UU^{'} - (\beta c + kc)U^{'''} = 0 \tag{5.28}$$

şeklinde olur. (5.28) adi diferensiyel denklemi bir kere integre edilerek

$$(-c+1)U - \alpha U^2 - (\beta c + kc)U^{''} = 0 \tag{5.29}$$

denklemi elde edilir. (5.29) denkleminde dengelenme sayısı $(U^n)^{''}$ ile U^{m+1} terimleri arasında yani $(U)^{''}$ ile U^2arasındadır. $m = 1$ ve $n = 1$ olmak üzere;

$$s = \frac{2m+4}{n+1} = \frac{6}{2} = 3$$

bulunur.

$$(U^{'})^2 = F(U) = \sum_{l=0}^{s} a_l.u^l = a_0 + a_1U + a_2U^2 + a_3U^3 \tag{5.30}$$

(5.30) denkleminin bir kere türevi alınır.

$$2U^{'}U'' = a_1U^{'} + 2a_2U\ U' + 3a_3U^2U'$$

$$U'' = \frac{a_1}{2} + a_2U + \frac{3}{2}a_3U^2$$

Bulunan bu ifadeler (5.29) adi diferensiyel denkleminde yerine yazılarak;

$$(-c+1)U - \alpha U^2 - (\beta c + kc)(\frac{a_1}{2} + a_2U + \frac{3}{2}a_3U^2) = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemdeki U^0, U^1, U^2 katsayılarını sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklemler şu şekilde olur

$$\begin{aligned} U^0 :&\quad -(\beta c + kc)\frac{a_1}{2} = 0 \\ U^1 :&\quad (-c+1) - (\beta c + kc)a_2 = 0 \\ U^2 :&\quad -\alpha - \frac{3}{2}(\beta c + kc)a_3 = 0. \end{aligned}$$

Bu denklem sisteminden katsayılar

$$\begin{aligned} a_0 &= a_0 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= \frac{1-c}{c(\beta+k)} \\ a_3 &= \frac{-2\alpha}{3c(\beta+k)} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Böylece

$$F(U) = a_0 + a_1 U + a_2 U^2 + a_3 U^3$$

formundadır. Elde edilen $F(U)$ integral formda yerine yazılırsa

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{1}{\sqrt{a_0 + a_2 U^2 + a_3 U^3}} dU$$

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{1}{\sqrt{a_0 + \frac{1-c}{c(\beta+k)} U^2 + \frac{2\alpha}{3c(\beta+k)} U^3}} dU$$

elde edilir. Buradaki integralin alınabilmesi için a_0 katsayısının farklı durumlarını inceleyelim.

i) Eğer $a_0 = 0$ için elde edilen integral form;

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{1}{U\sqrt{\frac{1-c}{c(\beta+k)} - \frac{2\alpha}{3c(\beta+k)} U}} dU$$

şeklindedir. İşlemlerin daha kolay olması için

$$A = \frac{1-c}{c(b+k)} \qquad B = \frac{-2\alpha}{3c(\beta+k)}$$

kısaltmaları yapılırsa ;

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{1}{U\sqrt{A + BU}} dU$$

integral formu elde edilir.

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{1}{|U|\sqrt{A}\sqrt{1 + \frac{B}{A} U}} dU$$

$$1 + \frac{B}{A} U = t^2 \text{ değişken değiştirmesi yapılarak}$$

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{2}{\sqrt{A}(t^2 - 1)} dt = \frac{2}{\sqrt{A}} \operatorname{arctanh} t$$

şeklinde bulunur.

$$\begin{aligned} \pm(\xi-\xi_0) &= \frac{2}{\sqrt{A}}\operatorname{arctanh}(\sqrt{1+\frac{B}{A}U}) \\ \sqrt{1+\frac{B}{A}U} &= \tanh\left(\frac{\pm\sqrt{A}(\xi-\xi_0}{2}\right) \end{aligned} \tag{5.31}$$

Buradan U ifadesi yalnız bırakılır ve (5.31) denkleminde A ve B yerine yazılırsa

$$U=\frac{3(1-c)}{2\alpha}[\tan^2 h(\frac{\sqrt{\frac{1-c}{c(\beta+k)}}(\xi-\xi_0)}{2})-1]$$

tam çözüm elde edilir. Dolayısıyla verilen kısmi diferensiyel denklemin çözümü

$$u(x,t)=\frac{3(1-c)}{2\alpha}[\tan^2 h(\frac{\sqrt{\frac{1-c}{c(\beta+k)}}(x+y-ct-\xi_0)}{2})-1]$$

şeklinde bulunur.

ii)Eğer $\Delta_0=a_2^2\neq 0$ ve $\Delta=\dfrac{-4(c-1)^3a_0}{c^3(\beta+k)^3}-\dfrac{12\alpha^2a_0^2}{c^2(b+k)^2}=0$ ise üç kökten ikisi çakışıktır. Burada $a_0\neq 0$ olduğundan $a_0=\dfrac{(c-1)^3}{-3\alpha^2c(\beta+k)}$ seçelim.

$$\pm(\xi-\xi_0) = \int\frac{1}{\sqrt{a_0+a_2U^2+a_3U^3}}dU$$

$$\pm(\xi-\xi_0) = \int\frac{1}{\left(U-\dfrac{9a_3a_0}{2a_2^2}\right)\sqrt{U-\dfrac{9a_3^2a_0-a_2^2}{a_3a_2^2}}}$$

$$A = \frac{9a_3a_0}{2a_2^2}$$

$$B = \frac{9a_3^2a_0-a_2^2}{a_3a_2^2}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} \pm(\xi-\xi_0) &= \left(\frac{2arctan\dfrac{\sqrt{U-B}}{\sqrt{B-A}}}{\sqrt{B-A}}\right) \\ \tan\left(\frac{\pm(\xi-\xi_0)\sqrt{B-A}}{2}\right) &= \sqrt{\frac{U-B}{B-A}} \\ \tan^2\left(\frac{\pm(\xi-\xi_0)\sqrt{B-A}}{2}\right) &= \frac{U-B}{B-A} \end{aligned} \tag{5.32}$$

(5.32) denklemlerinden;

$$U = (B-A)\tan^2\left(\frac{\pm(\xi-\xi_0)\sqrt{B-A}}{2}\right)+B \tag{5.33}$$

(5.33) denklemi elde edilir ve bu denklemde A ve B yerine yazılırsa

$$U = \frac{2c-2+3c(\beta+k)}{-2\alpha}\tan^2\left(\frac{\pm(\xi-\xi_0)\sqrt{\dfrac{2c-2+3c(\beta+k)}{-2\alpha}}}{2}\right)$$

tam çözümü elde edilir.Dolayısıyla verilen kısmi diferensiyel denklemin çözümü

$$u(x,y,t) = \frac{2c-2+3c(\beta+k)}{-2\alpha}\tan^2\left(\frac{\pm(x+y-ct-\xi_0)\sqrt{\dfrac{2c-2+3c(\beta+k)}{-2\alpha}}}{2}\right)$$

şeklinde bulunur.

5.1.6 Schamel Denklemi

Kdv-Schamel denklemini ele alalım

$$u_t + (\alpha u^{\frac{1}{2}} + \beta u)u_x + \delta u_{xxx} = 0. \tag{5.34}$$

Burada u bağımlı x ve t bağımsız değişkenlerdir. $\alpha = 0$ alındığında KdV , $\beta = 0$ alındığında ise denklem Schamel denklemine dönüşür. Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemi adi diferensiyel denkleme dönüştürmek için

$$u = v^2$$

$$v = v(\xi)$$

$$\xi = kx - wt$$

dönüşümleri kullanılır, buradan gerekli türevleri alınıp

$$u_t = \quad -2wvv^{'}$$

$$u_x = \quad 2kvv'$$

$$u_{xx} = \quad k^2(2(v^{'})^2 + 2vv^{''})$$

$$u_{xxx} = \quad k^3(4v^{'}v^{''} + 2v^{'}v^{''} + 2vv^{'''})$$

$$-2wvv^{'} + 2\alpha kv^2v^{'} + \delta k^3(6v^{'}v^{''} + 2vv^{'''}) = 0 \tag{5.35}$$

(5.34) denkleminde yerine yazıldığında (5.35) denklemi bulunur ve bu denklemin her iki tarafı 2 ile bölündüğünde;

$$-wvv^{'} + \alpha kv^2v^{'} + \delta k^3(3v^{'}v^{''} + vv^{'''}) = 0 \tag{5.36}$$

(5.36) denklemi elde edilir. ve bu denklemi bir kere integre ederek (5.37) denklemine dönüştüğü görülür

$$-\frac{w}{2}v^2 + \frac{\alpha k}{3}v^3 + \delta k^3((v^{'})^2 + vv^{''}) = 0. \tag{5.37}$$

Bu denklemde dengelenme sayısı $(u^n)^{''}$ ile u^{m+1} arasında yani $vv^{''}$ ile v^3arasındadır. $m = 2$ ve $n = 1$ olmak üzere

$$s = \frac{2m+4}{n+1} = \frac{8}{2} = 4$$

bulunur.

$$(v^{'})^2 = F(u) = \sum_{l=0}^{s} a_l.v^l = a_0 + a_1v + a_2v^2 + a_3v^3 + a_4v^4 \tag{5.38}$$

(5.38) denkleminin bir kere türevi alınır.

$$2v^{'}v'' = a_1v^{'} + 2a_2v\ v' + 3a_3v^2v' + 4a_4v^3v^{'}$$

$$v'' = \frac{a_1}{2} + a_2v + \frac{3}{2}a_3v^2 + 2a_4v^3$$

Bulunan bu ifadeler (5.37) adi diferensiyel denkleminde yerine yazılarak;

$$-\frac{w}{2}v^2+\frac{\alpha k}{3}v^3+\delta k^3(a_0+a_1v+a_2v^2+a_3v^3+a_4v^4+v(\frac{a_1}{2}+a_2v+\frac{3}{2}a_3v^2+2a_4v^3))=0$$

$$-\frac{w}{2}v^2+\frac{\alpha k}{3}v^3+\delta k^3(a_0+a_1v+a_2v^2+a_3v^3+a_4v^4)+\delta k^3(\frac{a_1}{2}v+a_2v^2+\frac{3}{2}a_3v^3+2a_4v^4))=0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemdeki v^0, v^1, v^2, v^3, v^4 katsayıları sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned}
v^0: &\quad \delta k^3 a_0 = 0\\
v^1: &\quad \delta k^3 a_1 + \delta k^3 \frac{a_1}{2} = 0\\
v^2: &\quad -\frac{w}{2} + 2\delta k^3 a_2 = 0\\
v^3: &\quad \tfrac{5}{2}\delta k^3 a_3 + \frac{\alpha k}{3} = 0\\
v^{4:} &\quad 3\delta k^3 a_4 = 0
\end{aligned}$$

Bu denklem sisteminden katsayılar

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0\\
a_1 &= 0\\
a_2 &= \frac{w}{4\delta k^3}\\
a_3 &= \frac{-2\alpha}{15\delta k^2}\\
a_4 &= 0
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Elde edilen $F(u)$ integral formda yerine yazılırsa

$$\pm(\xi-\xi_0)=\int\frac{1}{\sqrt{a_2v^2+a_3v^3}}dv$$

$$\pm(\xi-\xi_0)=\int\frac{1}{\sqrt{\frac{w}{4\delta k^3}v^2-\frac{2\alpha}{15\delta k^2}v^3}}dv$$

dir. İşlemlerin daha kolay olması için

$$A=\frac{w}{4\delta k^3}\qquad B=\frac{-2\alpha}{15\delta k^2}$$

kısaltmaları yapılırsa;

$$\pm(\xi-\xi_0)=\int\frac{1}{|v|\sqrt{A+Bv}}dv$$

integral formu elde edilir.

$$\pm(\xi-\xi_0)=\int\frac{1}{|v|\sqrt{A}\sqrt{1+\frac{B}{A}v}}dv$$

$1+\frac{B}{A}v=t^2$ değişken değiştirilmesi yapılırsa;

$$\pm(\xi-\xi_0)=\int\frac{2}{\sqrt{A}(t^2-1)}dt=\frac{2}{\sqrt{A}}\operatorname{arctanh}t$$

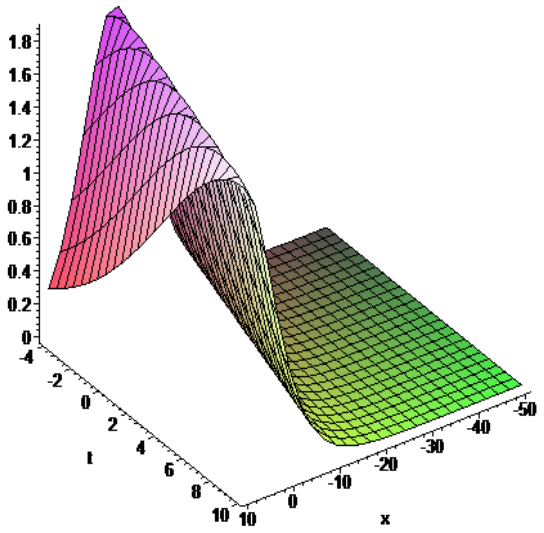
şeklinde bulunur. Buradan v çözümü;

$$\begin{aligned}
\pm(\xi-\xi_0) &= \frac{2}{\sqrt{A}}\operatorname{arctanh}\left(\sqrt{1+\frac{B}{A}v}\right)\\
\sqrt{1+\frac{B}{A}v} &= \tanh\left(\frac{\pm\sqrt{A}(\xi-\xi_0}{2}\right)\\
1+\frac{B}{A}v &= \tanh^2\left(\frac{\pm\sqrt{A}(\xi-\xi_0)}{2}\right)\\
v &= -\frac{A}{B}+\frac{A}{B}\tan^2 h\left(\frac{\pm\sqrt{A}(\xi-\xi_0)}{2}\right)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur ve A ve B yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
v &= \frac{15w}{8\alpha k}-\frac{15w}{8\alpha k}\tan^2 h(\frac{\pm\sqrt{\frac{w}{4\delta k^3}}(\xi-\xi_0)}{2})\\
\sqrt{u} &= v=\frac{15w}{8\alpha k}-\frac{15w}{8\alpha k}\tan^2 h\left(\frac{\pm\sqrt{\frac{w}{\delta k^3}}(\xi-\xi_0)}{4}\right)\\
u &= v^2=\left(\frac{15w}{8\alpha k}-\frac{15w}{8\alpha k}\tan^2 h\left(\frac{\pm\sqrt{\frac{w}{\delta k^3}}(\xi-\xi_0)}{4}\right)\right)^2\\
u(x,t) &= v^2=\left(\frac{15w}{8\alpha k}-\frac{15w}{8\alpha k}\tan^2 h\left(\frac{\pm\sqrt{\frac{w}{\delta k^3}}(kx-wt-\xi_0)}{4}\right)\right)^2
\end{aligned}$$

tam çözümü elde edilir. Buradaki sabitlerin $\alpha=1$, $k=3$, $w=3$, $\delta=5$ değerleri için aşağıdaki Şekil 5.3 elde edilir.



Şekil 5.3

6. MATERYAL VE YÖNTEMLER

Bu tez yazımında makaleler taranıp, tez araştırılmaları yapılmıştır. Temel kavramlardan bahsedilerek giriş yapılmıştır. Soliton ve solitary dalgaların tanımı yapılarak gerekli açıklamalarda bulunulmuştur. Tam çözümlerin niçin gerekli olduğundan bahsedilmiştir. Tam çözüm metodlarından trial metodu açıklanmıştır. Dengelenme sayısının nasıl bulunduğuna dair açıklamalar yapılmıştır. Bu indirgemeler sayesinde metodun gerektirdiği işlemler adım adım kullanılarak denklemlerin tam çözümlerine ulaşılmıştır. Kullanılan denklemler Lineer olmayan Schrödinger denklemi, genelleştirilmiş Fisher denklemi, Pochhammer-Chree denklemi, Phi-four denklemi,Zakharov-Kuznetsov-Benjamin-Bona-Mahony denklemi ve Schamel denklemleridir.

7.BULGULAR VE TARTIŞMA

Lineer olmayan denklemlerin tam çözüm örnekleri Schrödinger denklemi, genelleştirilmiş Fisher denklemi, Phi-Four denklemi, Pochammer-Chree denklemi Zakharov-Kuznetsov-Benjamin-Bono-Mahony denklemi, Schamel denklemi için uygulanmıştır. Bu tam çözümler aşağıda verilmiştir.

Lineer olmayan Schrödinger denklemini ele alalım

$$iu_t + pu_{xx} + q\left|u\right|^2 u = 0.$$

Bu denklem için tam çözümler;

Durum 1: Eğer $a_0 = 0$ ve $p(\beta + p\alpha^2) > 0$ ise;

$$U(\xi) = \pm\sqrt{\frac{2(\beta+p\alpha^2)}{q}}\,\sec h\left(\sqrt{\frac{\beta+p\alpha^2}{p}}(\xi-\xi_0)\right)e^{i(\alpha x+\beta t+\theta)}$$

$$U(\xi) = \pm\sqrt{\frac{2(\beta+p\alpha^2)}{q}}\,\csc h\left(\sqrt{\frac{\beta+p\alpha^2}{p}}(\xi-\xi_0)\right)e^{i(\alpha x+\beta t+\theta)}$$

sırayla bright ve dark 1-soliton çözümler elde edilir.

Eğer $p(\beta + p\alpha^2) < 0$ ise;

$$U(\xi) = \pm\sqrt{\frac{2(\beta+p\alpha^2)}{q}}\,\sec\left(\sqrt{\frac{\beta+p\alpha^2}{p}}(\xi-\xi_0)\right)e^{i(\alpha x+\beta t+\theta)}$$

$$U(\xi) = \pm\sqrt{\frac{2(\beta+p\alpha^2)}{q}}\,\csc\left(\sqrt{\frac{\beta+p\alpha^2}{p}}(\xi-\xi_0)\right)e^{i(\alpha x+\beta t+\theta)}$$

sırasıyla periyodik ve singüler çözümler elde edilir.

Durum2: Eğer $a_0 = \dfrac{-(\beta+p\alpha^2)^2}{(2pq)} > 0$ ve $p(\beta + p\alpha^2) < 0$ ise

$$U(\xi) = \pm\sqrt{\frac{(\beta+p\alpha^2)}{q}}\,\tanh\left(\sqrt{-\frac{\beta+p\alpha^2}{2pq}}(\xi-\xi_0)\right)e^{i(\alpha x+\beta t+\theta)}$$

$$U(\xi) = \pm\sqrt{\frac{(\beta+p\alpha^2)}{q}}\,\coth\left(\sqrt{-\frac{\beta+p\alpha^2}{2pq}}(\xi-\xi_0)\right)e^{i(\alpha x+\beta t+\theta)}$$

sırasıyla topolojik 1-soliton ve singüler 1-soliton çözümleri elde edilir.

Eğer $p(\beta + p\alpha^2) > 0$ ise;

$$U(\xi) = \pm\sqrt{-\frac{(\beta + p\alpha^2)}{q}} \tan\left(\sqrt{\frac{\beta + p\alpha^2}{2pq}}(\xi - \xi_0)\right) e^{i(\alpha x + \beta t + \theta)}$$

$$U(\xi) = \pm\sqrt{-\frac{(\beta + p\alpha^2)}{q}} \cot\left(\sqrt{-\frac{\beta + p\alpha^2}{2pq}}(\xi - \xi_0)\right) e^{i(\alpha x + \beta t + \theta)}$$

şeklinde bulunur.

Genelleştirilmiş Fisher Denklemini ele alalım

$$u_t = \alpha^2(t)u_{xx} + b(t)u - c(t)u^3.$$

Bu denklem için tam çözümler;

Durum 1: $\Delta = b_1^2 - 4b_0 > 0$ ve $b_0 = 0$. $w > -b_1$ olduğu zaman eğer $a_2 > 0$ ve $a_4 > 0$ ise

$$U_1(\xi) = \pm\sqrt{\frac{a_2}{a_4}}\left(\frac{\sec h[\sqrt{a_2}(\xi - \xi_0)]}{1 - \sqrt{2}\tanh[\sqrt{a_2}(\xi - \xi_0)]}\right),$$

Durum 2: $\Delta = b_1^2 - 4b_0 > 0$ ve $b_0 = 0$. $w > -b_1$ olduğu zaman eğer $a_2 > 0$ ve $a_4 < 0$ ise

$$U_2(\xi) = \pm\sqrt{\frac{2a_2}{a_4}}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \cosh[2\sqrt{a_2}(\xi - \xi_0)]}}\right),$$

Durum 3: $\Delta = b_1^2 - 4b_0 > 0$ ve $b_0 = 0$. $w > -b_1$ olduğu zaman eğer $a_2 > 0$ ve $a_4 < 0$ ise

$$U_3(\xi) = \pm\sqrt{\frac{a_2}{a_4}}\sec h[\sqrt{a_2}(\xi - \xi_0)],$$

Durum 4: $\Delta = b_1^2 - 4b_0 = 0$ ve $b_0 = 0$. $w > 0$ olduğu zaman eğer $a_2 < 0$ ve $a_4 < 0$ ise

$$U_4(\xi) = \pm\sqrt{\frac{a_2}{2a_4}}\tanh\left(\sqrt{\frac{-a_2}{2}}(\xi - \xi_0)\right),$$

Durum 5: $\Delta = b_1^2 - 4b_0 > 0$ ve $b_0 = 0$. $w > -b_1$ olduğu zaman eğer $a_2 > 0$ ve $a_4 > 0$ ise

$$U_5(\xi) = \pm\sqrt{\frac{a_2}{a_4}}\left\{\frac{1}{2}\tanh^2\left(\sqrt{\frac{a_2}{2}}(\xi - \xi_0)\right) - 1\right\}^2$$

şeklinde bulunur.

Phi-Four denklemini ele alalım

$$u_{tt} - au_{xx} - \lambda u + \beta u^3 = 0.$$

Bu denklem için tam çözümler

$$U = \pm\sqrt{\frac{2\lambda}{\beta}}\sec h\sqrt{\frac{\lambda}{(c^2-\alpha)}}(\xi-\xi_0)$$

$$U = \sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}\tanh\left(\pm(\xi-\xi_0)\sqrt{\frac{\lambda}{2(a-c^2)}}\right)$$

şeklinde bulunur.

Pochhammer-Chree denklemini ele alalım

$$u_{tt} - u_{ttxx} - (\alpha u - \beta u^3 - \gamma u^5)_{xx} = 0.$$

Bu denklem için tam çözümler;

$$U = \pm\sqrt{\frac{2(w^2-\alpha)}{\beta}}\sec\left(\frac{\sqrt{w^2-\alpha}}{kw}(\xi-\xi_0)\right)$$

$$U = \sqrt{\frac{a-w^2}{\beta}}\tanh(\frac{\sqrt{a-w^2}(\xi-\xi_0)}{\sqrt{2}kw})$$

şeklinde bulunur.

Zakharov-Kuznetsov-Benjamin-Bona-Mahony (ZK-BBM) denklemini ele alalım

$$u_t + u_x - \alpha(u^2)_x + (\beta u_{xt} + ku_{yt})_x = 0.$$

Bu denklem için tam çözümler

$$U = \frac{3(1-c)}{2\alpha}[\tan^2 h(\frac{\sqrt{\frac{1-c}{c(\beta+k)}}(\xi-\xi_0)}{2}) - 1]$$

$$U = \frac{2c-2+3c(\beta+k)}{-2\alpha}\tan^2\left(\frac{\pm(\xi-\xi_0)\sqrt{\frac{2c-2+3c(\beta+k)}{-2\alpha}}}{2}\right)$$

şeklinde bulunur.

Schamel denklemini ele alalım

$$u_t + (\alpha u^{\frac{1}{2}})u_x + \delta u_{xxx} = 0.$$

Bu denklemin tam çözümü ise**;**

$$u \quad = \quad v^2 = \left(\frac{15w}{8\alpha k} - \frac{15w}{8\alpha k} \tan^2 h \left(\frac{\pm\sqrt{\frac{w}{\delta k^3}}(\xi - \xi_0)}{4} \right) \right)^2$$

şeklindedir.

8.SONUÇ VE ÖNERİLER

İlk olarak tezin ilerleyen kısımlarında kullanacağımız diferensiyel denklemlerin temel kavramlarından bahsedilmiştir. Adi ve kısmi diferensiyel denklemlerin sınıflandırılması yapıldıktan sonra kısmi diferensiyel denklemleri de sınıflandırıp lineer ve lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlere örnekler verilmiştir. Lineer kısmi diferensiyel denklemlerin çözümleri literatürdeki çözüm metotları ile bulunabilmektedir. Buna karşı lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin genel çözümlerinin sonuçlarını her zaman bulanamayabilir. Bu sebepten bu tip denklemleri sağlayan, içinde keyfi fonksiyon ve keyfi sabitler içeren tam çözümler elde edilmiştir.

Lineer olmayan diferensiyel denklemlerin tam çözümlerini bulmak için birçok metot vardır ve bu metodlardan bazıları, homojen denge metodu , Jakobi eliptik fonksiyon metodu, (G'/G) açılım metodu, kompleks tanh metodu, $1/G'$ açılım metodu, tanh metodu, Jakobi eliptik fonksiyon metodu, genişletilmiş tanh metodu, sinüs-kosinüs metodu, açılım metodu, üstel rasyonel fonksiyon metodu, first integral metodu, ansatz (dark-bright) ve trial denklem metodudur. Bu tez kapsamında bu tam çözüm metodlarından trial metot ile ilgilenilmiştir. Bu yöntem, verilen diferensiyel denklemlerin çözümlerinin, çözülebilir diferensiyel denklemlerin çözüm fonksiyonu olarak genişletilmesi esasına dayanmaktadır. Ve bu yöntem tanh yöntemi, homojen denge yöntemi, üstel fonksiyon yöntemi ve Jakobi eliptik fonksiyon yöntemi gibi tam çözüm yöntemlerini birleştirmektedir. Bu çalışmada lineer olmayan Schrödinger denklemi, genelleştirilmiş Fisher denklemi, Pochhammer-Chee denklemini, Phi-four denklemi, Zakharov-Kuznetsov-Benjamin-Bona-Mahony ve Schamel denklemlerinin tam çözümleri elde edilmiştir. Tez sırasında yapılan bütün çalışmalar Maple 13 programı ile kontrol edilerek denklemleri sağladığı görülmüştür.

Lineer olmayan diferensiyel denklemlerin tam çözümleri sadece bunlarla sınırlı değildir. İlerleyen çalışmalarda kullanılan denklemlerin başka metotlar yardımıyla da tam çözümleri bulunabilir. Bunun haricinde lineer olmayan diferensiyel denklemlerin başka sınıflarıda (integro diferensiyel denklem, kesir mertebeli denklemler,...) bu yöntemler kullanılarak çözülmeye çalışabilir. Lineer olmayan diferensiyel denklemlerin tam

çözümleri fizik, biyoloji, kimya bilim insanları için bugün ve ilerleyen zamanlarda da çok faydalı olacaktır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Ablowitz , M. J., Clarkson, P.A., 1990, Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering transform, Cambridge University Press, Cambridge.

Ablowitz, M.J., Segur, H., 1981, Solitons and The Inverse Scattering Transform, SIAM Publications, Philadelphia, 1-4.

Bekir, A., 2008, New solitons and periodic wave solutions for some nonlinear physical models by using the sine–cosine method, Physica Scripta, 77, 4, 501-504 .

Bekir, A., 2008, Application of the (G'/G) -expansion method for nonlinear evolution equations, Physics Letters A, 372, 19, 3400-3406.

Boz, A., Bekir, A., 2008, Application of Exp-function method for (3+1)-dimensional nonlinear evolution equations, Computers & Mathematics with Applications 56, 5, 1451-1456.

Debnath, L., 2007, A Brief Historical Introduction to Solitons and the Inverse Scattering Transform--A Vision of Scott Russell, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38 (8), 1003-1028.

Drazin, P.G., Johnson, R.S., 1996, Solitons an introduction, Cambridge University Press, New York, 7-16.

El-Borai, M.M., El-Owaidy, Ahmed, H.M., Arnous, A.H., 2017, Soliton solutions of the nonlinear Schrödinger equation by three integration schemes, Nonlinear Science Letters,8(1),32-40.

Fan, E., Zhang H., 1998,A note on the homogeneous balance method, Physics Letters A, 246 , 403-406

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Gurefe, Y., Sonmezoglu, A., Misirli, E., 2011, Application of the trial equation method for solving some nonlinear evolution equations arising in mathematical physics, Journal of Physics: Indian Academy of Sciences, 77, 6, 1023–1029.

Guner, O,. Bekir, A., 2013, Topological (dark) soliton solutions for the Camassa–Holm type equations, Ocean Engineering, 74, 276-279.

Inc , M., Ergut, M., 2005, Periodic wave solutions for the generalized shallow water wave equation by the improved Jacobi elliptic function method, Appl. Math. E-Notes 5 89–96.

Kaplan, M., 2013, Lineer olmayan Schrödinger denkleminin tam Çözümleri, Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü 85s.

Kaplan, M., Akbulut, A., Özer, M. N., 2015, Lineer olmayan oluşum denklemlerinin üstel rasyonel fonksiyon metoduyla çözümü, Journal of the Institute of Science & Technology of the Dumlupinar University / Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, Issue 34, p1-7,7p.

Karaoğlu, O., 2013, Zamana bağlı kısmi diferensiyel denklemlerin çözümleri için hiperbolik tanjant ve varyasyonel hibrit yöntemleri, Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 85s.

Keene, K. (2007). A characterization of dynamic reasoning: Reasoning with time as parameter. Journal of Mathematical Behavior, 26(3), 230–246.

Khuri, S. A., 2004, A complex tanh-function method applied to nonlinear equations of Schrödinger type, Chaos, Solitons and Fractals, 20, 5, 1037-1040.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Liu, Y.,2011, Exact solutions to nonlinear Schrödinger equation with variable coefficients, Applied Mathematics and Computation, 217, 5866-5869.

Newell, A.C., 1985, Solitons in Mathematics and Physics, 48, SIAM Publications,Philadelphia, 1-3.

Sevimli, E., 2016, Diferansiyel Denklemlerin Öğreniminde Yaşanan Zorluklar ve Alternatif Öğretim Yaklaşımları, Sakarya University Journal of Education,154-171.

Tascan, F., Bekir, A., Koparan, A., 2009, Travelling wave solutions of nonlinear evolution equations by using the first integral method, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 14, 1810-1815.

Triki, H., Wazwaz, A.M., 2016, Trial equation method for solving the generalized Fisher equation with variable coefficients, Physics Letters A,380,1260-1262

Russell, J.S., 1844, Report on waves. Rept. Fourteenth Meeting of the British

Association for the Advancement of Science, John Murray, London, 311-390.

Sulem, C., Sulem P.L., 1999, The Nonlinear Schrödinger Equation Self-Focusing and Wave Collapse, Springer, New-York.

Upton, S. D. (2004). Students' solution strategies to differerential equations problems in mathematical and nonmathematical contexts. Unpublished doctoral dissertation. The Arizona State Universıty.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Vakhnenko, V.O., Parkes, E.J., Morrison, A.J. , 2003, A Bäcklund transformation and the inverse scattering transform method for the generalised Vakhnenko equation, Chaos Solitons Fractals, 174, 683-692.

Wadati, M., 2001, Introduction to solitons, Indian Academy of Sciences, 57 (5-6), 841-847.

Wazwaz, A.M., 2007, Multiple-soliton solutions for the KP Equation by Hirota's bilinear method and by the tanh–coth method, Appl. Math. Comput. 190, 1, 633-640

Wazwaz, A.M., 2007, The extended tanh method for new soliton solutions for many forms of the fifth-order KdV equations, Applied Mathematics and Computation, 184, 1002-1014 .

Wazwaz, A. M., 2009, Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory, 1-2, Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin, Heidelberg.

Yusufoglu,E., Bekir, A., 2008, Exact Solutions of Coupled Nonlinear Evolution Equations, Chaos, Solitons and Fractals, 37, 3, 842-848.

Yusufoglu, E., Bekir, A., 2007, A travelling wave solution to the Ostrovsky equation, Applied Mathematics and Computation, 186, 1, 256–260.

Zhang, S., 2006., The periodic wave solutions for the (2 + 1)-dimensional Konopelchenko–Dubrovsky equations, Chaos Solitons Fractals 30, 1213–1220.

Zraiqat, A., Al-Hwawcha, L. K., 2015, On Exact Solutions of Second Order Nonlinear Ordinary Differential Equations , 6,953-957.