Taksi ve Maksimum Düzlemde Apollon Kümeleri Üzerine

Damla Yıldırım

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Haziran 2022

On Apollonian Sets In Taxicab and Maximum Planes

Damla Yıldırım

MASTER OF SCIENCE THESIS

Deparment of Mathematics - Computer

June 2022

Taksi ve Maksimum Düzlemde Apollon Kümeleri Üzerine

Damla Yıldırım

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Süheyla Ekmekçi

Haziran 2022

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Süheyla Ekmekçi danışmanlığında hazırlamış olduğum "**Taksi ve Maksimum Düzlemde Apollon Kümeleri Üzerine**" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 13/06/2022

Damla Yıldırım

ÖZET

Bu tezde, taksi düzlemde ve maksimum düzlemde, sırasıyla taksi Apollon kümeleri ve maksimum Apollon kümeleri çalışılmıştır.

Tez yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, giriş ve tezin amacı verilmektedir. İkinci bölümde, tez çalışmasıyla ilgili literatür araştırmasına yer verilmektedir. Üçüncü bölümde, tez konusu ile ilgili taksi düzlemdeki ve maksimum düzlemdeki bazı temel tanımlar, teoremler ve kavramlar sunulmuştur. Dördüncü bölümde, taksi Apollon kümeleri incelenmiş, elde edilen sonuçlar verilmiştir. Beşinci bölümde, maksimum Apollon kümeleri tanımlanmış, özellikleri incelenmiş, elde edilen sonuçlar verilmiştir. Altıncı bölümde, çalışmayla ilgili bulgular ve tartışmalara yer verilmiştir. Son olarak yedinci bölümde, sonuç ve öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Taksi düzlem, maksimum düzlem, Apollon kümeleri

SUMMARY

In this thesis, the Apollonian sets are studied in the taxicab plane and in the maximum plane.

It is formed seven chapters. In the first chapter, the introduction and the purpose of the thesis are given. In the second chapter, the literature research on the thesis is included. In the third chapter, some basic definitions, theorems and concepts related to the thesis in the taxicab plane and the maximum plane are introduced. In the fourth chapter, the taxi Apollonian set and its properties are studied. The results about the taxi Apollonian sets are given. In the fifth chapter, the maximum Apollonian set is defined. Its properties are explored. The characterizations of the maximum Apollonian sets are studied. And the results about the maximum Apollonian sets are presented. In the sixth chapter,the finding and the disccussions on the thesis are mentioned. In the last chapter, the conclusions and the suggestions are adverted.

Keywors: The taxicab plane, the maximum plane, the Apollonian sets

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET . . . . . **vi**

SUMMARY . . . . . **vii**

TEŞEKKÜR . . . . . **viii**

İÇİNDEKİLER . . . . . **ix**

ŞEKİLLER DİZİNİ . . . . . **x**

1. GİRİŞ VE AMAÇ **1**

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI **2**

3. TEMEL KAVRAMLAR **3**

3.1. Taksi Düzlemde Temel Kavramlar 3

3.1.1. Taksi Düzlemde Doğruların Sınıflandırılması 5

3.1.2. Taksi Düzlemde Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı 5

3.1.3. Taksi Düzlemde En Kısa Uzaklık Kümesi 6

3.1.4. Taksi Düzlemde İki Noktanın Orta Kümesi 6

3.1.5. Taksi Düzlemin İzometrileri 9

3.2. Maksimum Düzlemde Temel Kavramlar 9

4. TAKSİ DÜZLEMİNDE APOLLON KÜMELERİNİN İNCELENMESİ . . . **15**

4.1. Taksi Düzlem 15

4.2. Taksi Apollon Kümeleri 20

4.3. Taksi Apollon Küme Örnekleri 48

5. MAKSİMUM DÜZLEMİNDE APOLLON KÜMELERİNİN İNCELENMESİ 74

5.1. Maksimum Düzlem 74

5.2. Maksimum Apollon Kümeleri 76

5.3. Maksimum Apollon Küme Örnekleri 82

6. BULGULAR VE TARTIŞMA **110**

7. SONUÇ VE ÖNERİLER **111**

KAYNAKLAR DİZİNİ **112**

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil **Sayfa**

3.1. Taksi çemberi 4
3.2. Taksi merkezil çember 4
3.3. Taksi birim çember 5
3.4. En kısa uzaklık kümesi 6
3.5. PQ doğrusu sırasıyla x-eksenine ve y-eksenine paralel ise taksi orta küme . . . 7
3.6. PQ doğrusunun eğimi 1 ise taksi orta küme 7
3.7. PQ doğrusunun eğimi -1 ise taksi orta küme 8
3.8. PQ doğrusu sırasıyla dikeysel ve yataysal bir doğru parçası ise taksi orta küme 8
3.9. Maksimum çemberi 10
3.10. Maksimum birim çember 10
3.11. A ve B noktalarının maksimum orta kümesi 12
3.12. Maksimum düzlemde Q noktasının koordinat doğruları ve Q-bölgeler 13
3.13. Maksimum düzlemde P ve Q noktalarının koordinat dikdörtgeni 13

4.1. P ve Q noktalarının koordinat tamamlayıcıları 15
4.2. P ve Q noktalarının koordinat dikdörtgeni 16
4.3. P noktasının kılavuz doğruları 16
4.4. P ve Q noktalarının kılavuz tamamlayıcıları 17
4.5. P ve Q aynı kılavuz doğru üzerinde iken kılavuz tamamlayıcılar 18
4.6. bb(A,B) 18
4.7. $P_{A,B}(c^1)$ kümesi 19
4.8. $lb^1(A,B)$ ve $lb^2(A,B)$ 19
4.9. x-ekseni üzerindeki alınan P ve Q noktalarının Apollon kümesi 22
4.10. $0 < k < 1$ için $A(P,Q;k)$ 23
4.11. $k > 1$ için A(P,Q;k) 23
4.12. $0 < k < 1$ için A(P,Q;k) 24
4.13. P ve Q aynı kılavuz doğru üzerinde ve $k > 1$ iken A(P,Q;k) 26
4.14. P ve Q aynı kılavuz doğru üzerinde ve $0 < k < 1$iken A(P,Q;k) 28
4.15. P ve Q aynı koordinat yada aynı kılavuz doğrusu üzerinde olmadığında $k > 1$ için $k.m < 1$ iken A(P,Q;k) kümesi 31
4.16. P ve Q aynı koordinat yada aynı kılavuz doğrusu üzerinde olmasın ve $k > 1$ için $k.m \geq 1$ iken A(P,Q;k) 33
4.17. $\mathbb{R}_i$ bölgeler 35
4.18. 42

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

Şekil **Sayfa**

4.19. $\bigcup_{k\in[0,1]} A(P,Q;k)$ kümesi 44
4.20. 45
4.21. $P_{c^1,c^2}(Q)$ 46
4.22. $B(P,Q;k) = B(g^+,Q;k) \cup B(g^-,Q;k)$ 48
4.23. $P = (0,0)$ ve $Q = (3,1)$ ve $k = 1$ 49
4.24. $P = (0,0)$ ve $Q = (3,1)$ ve $k = 2$ 51
4.25. $P = (0,0)$ ve $Q = (3,1)$ ve $k = 3$ 52
4.26. $P = (0,0)$ ve $Q = (3,1)$ ve $k = 4$ 53
4.27. $P = (0,0)$ ve $Q = (3,1)$ ve $k = \frac{1}{2}$ 54
4.28. $P = (0,0)$ ve $Q = (3,1)$ ve $k = \frac{1}{3}$ 55
4.29. $P = (0,0)$ ve $Q = (3,1)$ ve $k = \frac{1}{4}$ 57
4.30. $P = (0,0)$ ve $Q = (3,1)$ için $A(P,Q;k)$ kümeleri 57
4.31. $P = (0,0)$ ve $Q = (1,0)$ için $k = 1$ 58
4.32. $P = (0,0)$ ve $Q = (1,0)$ için $k = 2$ 59
4.33. $P = (0,0)$ ve $Q = (1,0)$ için $k = 3$ 60
4.34. $P = (0,0)$ ve $Q = (1,0)$ için $k = 4$ 61
4.35. $P = (0,0)$ ve $Q = (1,0)$ için $k = \frac{1}{2}$ 62
4.36. $P = (0,0)$ ve $Q = (1,0)$ için $k = \frac{1}{3}$ 63
4.37. $P = (0,0)$ ve $Q = (1,0)$ için $k = \frac{1}{4}$ 64
4.38. $P = (0,0)$ ve $Q = (1,0)$ için $A(P,Q;k)$ kümeleri 65
4.39. $P = (0,0)$ ve $Q = (2,2)$ için $k = 1$ 67
4.40. $P = (0,0)$ ve $Q = (2,2)$ için $k = 2$ 68
4.41. $P = (0,0)$ ve $Q = (2,2)$ için $k = 3$ 68
4.42. $P = (0,0)$ ve $Q = (2,2)$ için $k = 4$ 70
4.43. $P = (0,0)$ ve $Q = (2,2)$ için $k = \frac{1}{2}$ 71
4.44. $P = (0,0)$ ve $Q = (2,2)$ için $k = \frac{1}{3}$ 72
4.45. $P = (0,0)$ ve $Q = (2,2)$ için $k = \frac{1}{4}$ 73
4.46. $P = (0,0)$ ve $Q = (2,2)$ için $A(P,Q;k)$ kümeleri 73

5.1. P ve Q noktalarının koordinat tamamlayıcıları 74
5.2. P ve Q noktalarının koordinat dikdörtgeni 75

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

Şekil		Sayfa
5.3.	P noktasının kılavuz doğruları	75
5.4.	P ve Q noktalarının kılavuz tamamlayıcıları	77
5.5.	$P = (0,0)$ ve $Q = (3,1)$ için $k = 1$	83
5.6.	$P = (0,0)$ ve $Q = (3,1)$ için $k = 2$	84
5.7.	$P = (0,0)$ ve $Q = (3,1)$ için $k = 3$	85
5.8.	$P = (0,0)$ ve $Q = (3,1)$ için $k = 4$	86
5.9.	$P = (0,0)$ ve $Q = (3,1)$ için $k = \frac{3}{2}$	88
5.10.	$P = (0,0)$ ve $Q = (3,1)$ için $k = \frac{1}{2}$	89
5.11.	$P = (0,0)$ ve $Q = (3,1)$ için $k = \frac{1}{3}$	90
5.12.	$P = (0,0)$ ve $Q = (3,1)$ için $k = \frac{1}{4}$	91
5.13.	$P = (0,0)$ ve $Q = (3,1)$ için $A(P,Q;k)$ kümeleri	92
5.14.	$P = (0,0)$ ve $Q = (1,0)$ için $k = 1$	93
5.15.	$P = (0,0)$ ve $Q = (1,0)$ için $k = 2$	94
5.16.	$P = (0,0)$ ve $Q = (1,0)$ için $k = 3$	95
5.17.	$P = (0,0)$ ve $Q = (1,0)$ için $k = 4$	96
5.18.	$P = (0,0)$ ve $Q = (1,0)$ için $k = \frac{3}{2}$	97
5.19.	$P = (0,0)$ ve $Q = (1,0)$ için $k = \frac{1}{2}$	98
5.20.	$P = (0,0)$ ve $Q = (1,0)$ için $k = \frac{1}{3}$	99
5.21.	$P = (0,0)$ ve $Q = (1,0)$ için $k = \frac{1}{4}$	100
5.22.	$P = (0,0)$ ve $Q = (1,0)$ için $A(P,Q;k)$ kümeleri	100
5.23.	$P = (0,0)$ ve $Q = (2,2)$ $k = 1$ için	102
5.24.	$P = (0,0)$ ve $Q = (2,2)$ $k = 2$ için	103
5.25.	$P = (0,0)$ ve $Q = (2,2)$ $k = 3$ için	103
5.26.	$P = (0,0)$ ve $Q = (2,2)$ $k = 4$ için	104
5.27.	$P = (0,0)$ ve $Q = (2,2)$, $k = \frac{3}{2}$ için	106
5.28.	$P = (0,0)$ ve $Q = (2,2)$, $k = \frac{1}{2}$ için	107
5.29.	$P = (0,0)$ ve $Q = (2,2)$ $k = \frac{1}{3}$ için	107
5.30.	$P = (0,0)$ ve $Q = (2,2)$ $k = \frac{1}{4}$ için	108
5.31.	$P = (0,0)$ ve $Q = (2,2)$ için $A(P,Q;k)$ kümeleri	109

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Öklidyen düzlemde, $X = (x_1, x_2)$ ve $Y = (y_1, y_2)$ noktaları arasındaki uzaklık

$$d_E(X, Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 + x_2)^2}$$

eşittir. X ve Y noktaları arasındaki öklidyen uzaklık X noktasından Y noktasına kuş uçuşu olarak ifade edilir. X ve Y noktaları arasındaki taksi uzaklığı, XY hipotenüslü dik üçgenin koordinat eksenlerine paralel kenar uzunlukları toplamı ile hesaplanır. Bu uzaklık

$$d_T(X, Y) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$$

eşittir. Öklidyen düzlemin noktaları ve doğruları aynı olmak üzere uzaklık olarak 'taksi uzaklığı' kullanıldığında taksi düzlem elde edilir. Bu düzlem $\mathbb{R}^2_T$ ile gösterilir.
X ve Y noktaları arasındaki maksimum uzaklığı, XY hipotenüslü dik üçgende koordinat eksenlerine paralel kenarların uzunluklarının en büyüğüne eşittir. Bu cebirsel olarak

$$d_M(X, Y) = max\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|\}$$

eşittir. Öklidyen düzlemin noktaları ve doğruları aynı, sadece uzaklık fonksiyonu olarak "maksimum uzaklık" kullanıldığında maksimum düzlem elde edilir. Bu düzlem $\mathbb{R}^2_M$ ile gösterilir.
Öklidyen düzlemde Apollon kümesi, verilen iki noktaya uzaklıklarının oranı sabit bir $k > 0$ sayısı olan noktaların kümesi olarak tanımlanır. $k = 0$ ve $k = 1$ durumları apollon kümesinin dejenere durumları olarak ifade edilir. Bu durumların dışında Apollon kümesi bir çemberdir.
Farklı metrik uzaylarda Apollon kümesini tanımlamak mümkündür. Bu uzaylarda Apollon kümelerinin, çember olması gerekmez. Bu çalışmada, taksi düzlemde ve maksimum düzlemde Apollon kümeleri çalışılıyor. Taksi Apollon kümesi ve maksimum Apollon kümesinin özellikleri incelenmiş, sınıflamaları verilmiştir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Apollon, çemberin verilen iki noktaya uzaklıkları oranı sabit bir sayıya eşit olan noktaların geometrik yeri olarak tanımlanacağını gösterdi.
$X = (x_1, x_2)$ ve $Y = (y_1, y_2)$ noktaları arasındaki Minkowski uzaklığı

$$d(X,Y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|^p}$$

olarak Minkowski tarafından tanımlanmıştır. $p = 1$ iken bu uzaklık taksi uzaklığı, $p = 2$ iken Öklidyen uzaklık ve $p \to \infty$ iken limit durumda maksimum uzaklığa karşılık gelir.
"Taksi geometri" terimi ilk kez K.Menger tarafından kullanıldı. Daha sonra Krause tarafından geliştirildi.
Kaya vd (2000) , de taksi düzleminde konikler tanımlanmış, özellikleri verilmiştir.
Bahuaud vd (2020) de taksi düzlem geometride Apollon kümelerini incelenmiş ve elde edilen sonuçlar sunulmuştur.
Salihova (2006) da maksimum düzlem inşa edilip, geliştirilmiş ve sonuçlar sunulmuştur.

3. TEMEL KAVRAMLAR

3.1. Taksi Düzlemde Temel Kavramlar

Taksi düzleminde noktalar, doğrular ve açıların ölçülmesi Öklidyen düzlem ile benzer şekilde hesaplanır. Fakat taksi düzlemi Öklidyen düzlemden ayıran en önemli durum kenar-açı-kenar özelliğini sağlamayan bir geometri olmasıdır. Bu sebepten dolayı noktalar arasındaki uzaklık hesaplaması bu iki geometriyi birbirinden ayırır.

Tanım 3.1.1. Taksi düzlemde $P = (x_1, y_1)$ ve $Q = (x_2, y_2)$ noktaları arasındaki taksi uzaklığı

$$d_T(P, Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.1.1. *Taksi uzaklık bir metrik belirtir.*

Teorem 3.1.2. *Analitik düzlemde $A = (x_1, y_1)$ ve $B = (x_2, y_2)$ farklı iki nokta ve m, AB doğrusunun eğimi olsun,*

i. $m \in \mathbb{R}$ *iken,* $d_E(A, B) = \left(\dfrac{\sqrt{1 + m^2}}{1 + |m|} \right) . d_T(A, B)$

ii. $m \to \infty$ *iken,* $d_E(A, B) = d_T(A, B)$

dir.

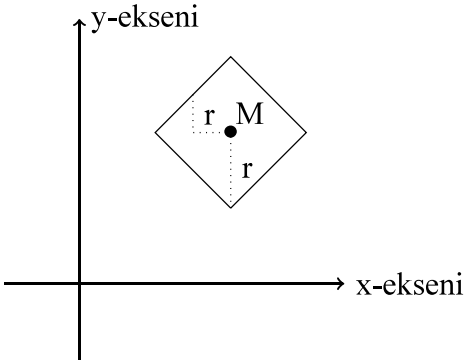
Teorem 3.1.3. *Analitik düzlemde $A = (x_1, y_1)$ ve $B = (x_2, y_2)$ farklı iki nokta, $P = (x, y)$, AB doğrusu üzerinde ve B noktasından farklı bir nokta olsun,*

$$\frac{d_E(A, P)}{d_E(B, P)} = \frac{d_T(A, P)}{d_T(B, P)}$$

dir.

Tanım 3.1.2. Taksi düzlemde sabit bir noktadan sabit bir taksi uzaklığındaki noktaların geometrik yerine taksi çemberi denir. Burada sabit nokta taksi çemberinin merkezini, sabit taksi uzaklığı ise taksi çemberinin yarıçap uzunluğunu belirtir. Analitik düzlemde $M = (p, q)$ merkezli r yarıçaplı bir taksi çemberi aşağıdaki küme ile gösterilir.

$$C = \{(x, y) : |x - p| + |y - q| = r,\ x, y \in \mathbb{R}\ ve\ r > 0\}$$

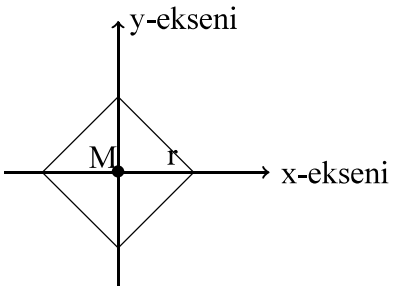


Şekil 3.1 Taksi çemberi

Tanım 3.1.3. Taksi düzlemde merkezil çember,

$$C = \{(x, y) : |x| + |y| = r,\ x, y \in \mathbb{R}\ ve\ r > 0\}$$

kümesidir.

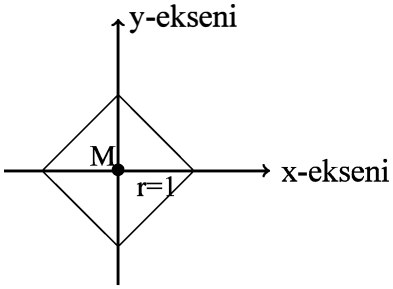


Şekil 3.2 Taksi merkezil çember

$r = 1$ iken

$$C = \{(x, y) : |x| + |y| = 1,\ x, y \in \mathbb{R}\ ve\ r > 0\}$$

kümesine taksi birim çember denir. Bu çember köşeleri $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$ noktaları olan karedir.



Şekil 3.3 Taksi birim çember

3.1.1. Taksi Düzlemde Doğruların Sınıflandırılması

Taksi düzlemde verilen $ax + by + c = 0$ doğrusuna,

$|\frac{-a}{b}| > 1$ ise bu doğruya **dikeysel doğru**,

$|\frac{-a}{b}| < 1$ ise bu doğruya **yataysal doğru**,

$|\frac{-a}{b}| = 1$ ise bu doğruya **ayıraç doğru**,

denir. Bu çalışmada ayıraç(kılavuz) doğrusu ifadesi ”kılavuz doğrusu” şeklinde kullanılacaktır.

3.1.2. Taksi Düzlemde Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı

Taksi düzlemde verilen bir Q noktasının verilen bir d doğrusuna olan uzaklığı, Q noktasının verilen doğru üzerindeki noktalara uzaklıklarından en küçüğü şeklinde tanımlanır.

$$d_T(Q, d) = min d_T(X, Q)$$

Burada $X \in d$ dir.

Taksi düzlemdeki bir Q noktasının verilen bir d doğrusuna olan uzaklığını bulmak için başka bir yol ise şu şekildedir. Q noktasını merkez kabul eden bir taksi çemberinin yarıçapını, çember d doğrusuna değene kadar büyütmektir. Çember doğruya değdiği zaman çemberin yarıçapı, Q noktasının d doğrusuna olan en kısa uzaklığı olur. Bu durumda,
i) Eğer d doğrusu yataysal bir doğru ise, Q noktasının d doğrusuna uzaklığı, Q noktasından d doğrusuna y-eksenine paralel uzaklıktır.
ii) Eğer d doğrusu dikeysel bir doğru ise, Q noktasının d doğrusuna uzaklığı, Q noktasından d doğrusuna x-eksenine paralel uzaklıktır.

iii) Eğer d doğrusu ayıraç doğru ise, Q noktasının d doğrusuna uzaklığı, Q noktasından d doğrusuna x-eksenine paralel veya y-eksenine paralel uzaklıktır.

Teorem 3.1.4. *Taksi düzlemde verilen herhangi bir $Q = (x_0, y_0)$ noktasının $ax + by + c = 0$ denklemli d doğrusuna olan taksi uzaklığı*

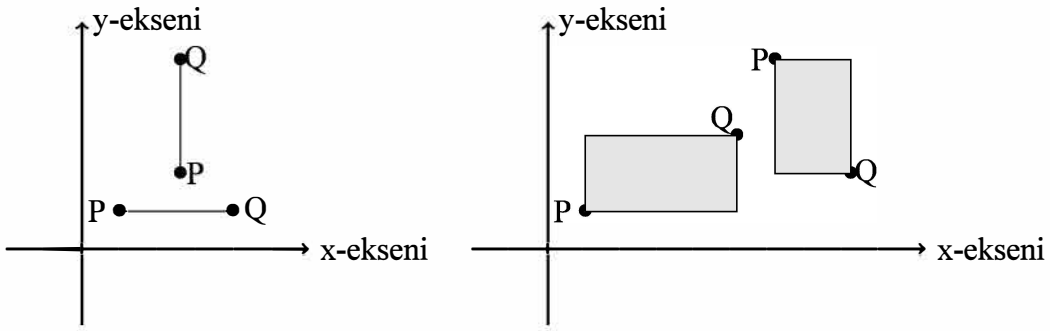
$$d_T(Q, d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{max\{|a|, |b|\}}$$

dir.

3.1.3. Taksi Düzlemde En Kısa Uzaklık Kümesi

Taksi düzlemde verilen herhangi P ve Q noktaları için $d_T(P, X) + d_T(Q, X) = d_T(P, Q)$ koşulunu sağlayan tüm X noktalarının kümesine P ve Q noktalarının en kısa uzaklık kümesi denir.

Teorem 3.1.5. *Taksi düzlemde farklı iki P ve Q noktalarının en kısa uzaklık kümesi,*
i. *P ve Q noktaları aynı apsis veya aynı ordinata sahipse, PQ doğru parçasıdır.*
ii. *P ve Q noktaları farklı apsis ve ordinata sahipse, iki köşesi P ve Q olan ayrıca kenarları eksenlere paralel olan dikdörtgensel bölgedir.*



Şekil 3 .4 En kısa uzaklık kümesi

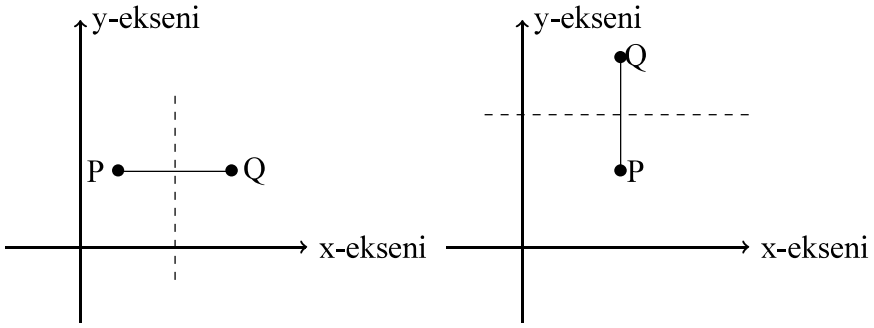
3.1.4. Taksi Düzlemde İki Noktanın Orta Kümesi

Taksi düzlemde verilen herhangi P ve Q noktalarına eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yerine P ve Q noktalarının orta kümesi denir. Bu küme

$$\{X = (x, y) : d_T(X, P) = d_T(X, Q), x, y \in \mathbb{R}\}$$

biçiminde ifade edilir. P ve Q noktalarının konumlarına göre taksi orta küme incelendiğinde şu sonuçlar elde edilir:

1) PQ doğrusu x-eksenine veya y-eksenine paralel ise bu noktaların taksi orta kümesi P ve Q noktalarının orta noktasından geçen PQ doğrusuna dik olan doğrudur.



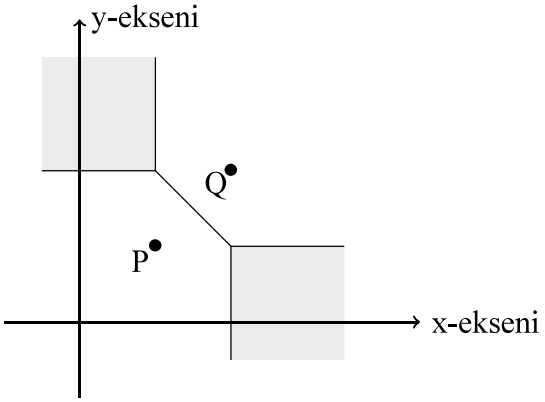
Şekil 3.5 PQ doğrusu sırasıyla x-eksenine ve y-eksenine paralel ise taksi orta küme

2) a) PQ doğrusunun eğimi 1 ise taksi orta küme P ve Q noktalarının orta noktasından geçen PQ doğru parçasına dik doğru parçası ile bu doğru parçasının ucundaki iki bölgeden oluşur. Eğer $P = (x_1, y_1)$ ve $Q = (x_2, y_2)$ ise taksi orta kümesi,

$$\left\{(x, y) : x + y = \frac{x_1 + x_2 + y_1 + y_2}{2}, x_1 < x < x_2\right\}$$

doğru parçası,

$\left\{(x, y) : x \leq x_1, y \geq y_2\right\}$ ve $\left\{(x, y) : x \geq x_2, y \leq y_1\right\}$ bölgelerinden oluşur.



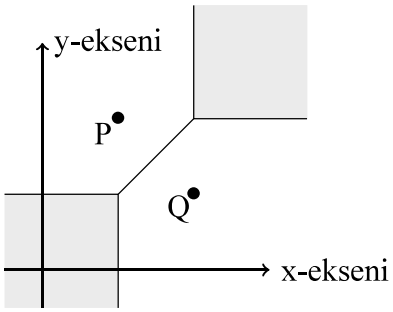
Şekil 3.6 PQ doğrusunun eğimi 1 ise taksi orta küme

b)PQ doğru parçasının eğimi -1 ise taksi orta küme P ve Q noktalarının orta noktasından geçen ve PQ ya dik olan doğru parçası ile bu doğru parçasının ucundaki iki düzlemsel bölgeden oluşur. Eğer $P = (x_1, y_1)$ ve $Q = (x_2, y_2)$ ise

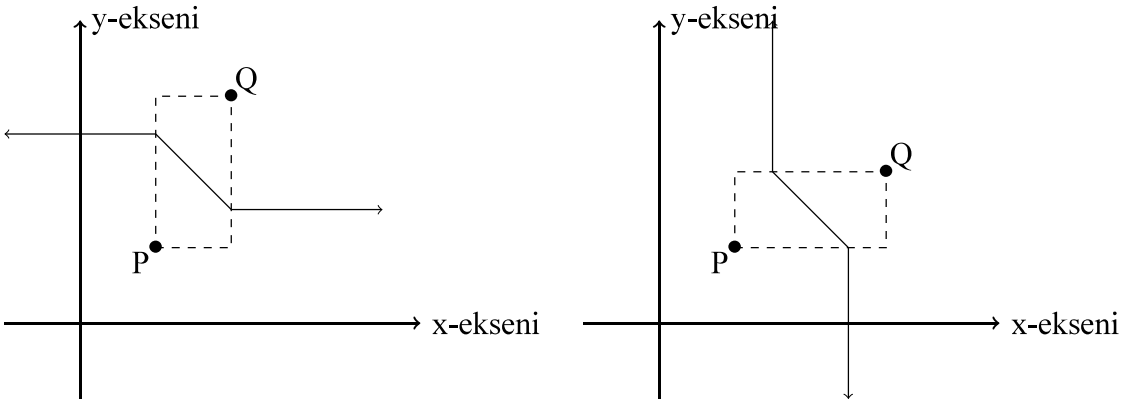
$$\left\{(x, y) : x - y = \frac{x_1 + x_2 - y_1 - y_2}{2}, x_1 < x < x_2\right\}$$

doğru parçası ile

$\left\{(x, y) : x \leq x_1, y \leq y_2\right\}$ ve $\left\{(x, y) : x \geq x_2, y \leq y_1\right\}$ bölgelerinden oluşur.



Şekil 3.7 PQ doğrusunun eğimi -1 ise taksi orta küme



Şekil 3.8 PQ doğrusu sırasıyla dikeysel ve yataysal bir doğru parçası ise taksi orta küme

3) PQ dikeysel bir doğru parçası ise taksi orta küme P ve Q noktalarının orta noktasından geçen ve PQ nun eğimi ile zıt işaretli ∓ 1 eğimli doğru parçası ve bu doğru parçasının PQ köşegenli dikdörtgeni kestiği noktaları başlangıç kabul eden iki yatay ışından oluşmaktadır.

4) PQ yataysal bir doğru parçası ise taksi orta küme P ve Q noktalarının orta noktasından geçen ve PQ nun eğimi ile zıt işaretli ∓ 1 eğimli doğru parçası ve bu doğru parçasının PQ köşegenli dikdörtgeni kestiği noktaları başlangıç kabul eden iki dikey ışından oluşmaktadır.

3.1.5. Taksi Düzlemin İzometrileri

Tanım 3.1.4. $\mathbb{R}^2_T$ taksi düzleminde $\phi : \mathbb{R}^2_T \to \mathbb{R}^2_T$ dönüşümü her $P, Q \in \mathbb{R}^2_T$ noktaları için

$$d_T(P,Q) = d_T(\phi(P), \phi(Q))$$

ise ϕ ye taksi düzleminde izometri denir.

Teorem 3.1.6. *Bütün ötelemeler taksi düzlemde izometridir.*

Teorem 3.1.7.

$$S = \{(x,y) : x = 0, y = 0, y = x \; ve \; y = -x\}$$

kümesindeki doğrulara göre yansımalar taksi düzleminde izometridir.

Teorem 3.1.8.

$$\{\theta : \theta = k.\frac{\pi}{2}, k = 0, 1, 2, 3\}$$

kümesindeki θ-açılı dönmeler taksi düzleminde izometridir.

3.2. Maksimum Düzlemde Temel Kavramlar

Tanım 3.2.1. Analitik düzlemde her $X = (x_1, x_2)$ ve $Y = (y_1, y_2)$ noktaları için

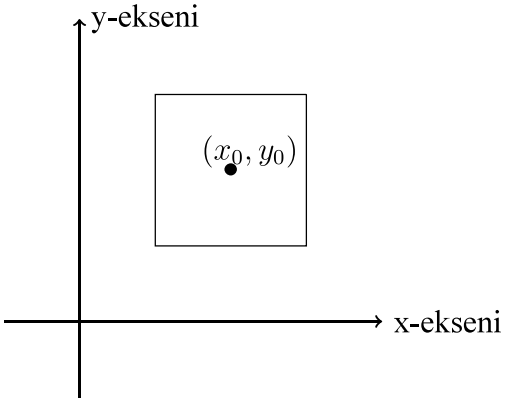
$$d_M : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, \infty)$$

$$X, Y \longmapsto d_M(X,Y) = max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

fonksiyonuna Maksimum Uzaklık Fonksiyonu denir.

Teorem 3.2.1. *d_M uzaklık foksiyonu bir metriktir.*

Tanım 3.2.2. d_M uzaklık fonksiyonu ile donatılmış düzleme maksimum düzlem denir ve $\mathbb{R}^2_M$ ile gösterilir.



Şekil 3.9 Maksimum çemberi

Tanım 3.2.3. $(x_0, y_0) \in {\mathbb{R}_{\mathbb{M}}}^2, r > 0$ olsun.

$$C = \{(x, y) : max\{|x - x_0|, |y - y_0|\} = r\}$$

kümesine maksimum düzlemde (x_0, y_0) merkezli r-yarıçaplı maksimum çemberi denir.

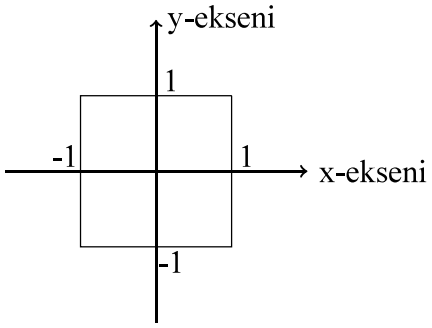
Maksimum düzlemde merkezil çember

$$C = \{(x, y) : max\{|x|, |y|\} = r, r > 0\}$$

kümesidir. $r = 1$ iken

$$C = \{(x, y) : max\{|x|, |y|\} = 1\}$$

kümesine maksimum birim çember denir. Bu çember köşeleri $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$ noktaları olan karedir.



Şekil 3.10 Maksimum birim çember

Tanım 3.2.4. $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2), \mathbb{R}_{\mathbb{M}}{}^2$ de iki nokta olsun. A dan B ye minimum uzaklıktaki noktaların kümesi

$$\{X | d_M(A, X) + d_M(X, B) = d_M(A, B)\}$$

olarak tanımlanır. A ve B noktalarından geçen doğrunun eğimi m olsun. $m = 1$ iken bu küme, AB doğru parçasına eşittir. $m = 0$ ve $m \to \infty$ iken , köşegeni AB doğru parçası, kenarları ∓ 1 eğimli doğrular olan dikdörtgendir.

Tanım 3.2.5. Maksimum düzleminde verilen iki noktaya eşit uzaklıktaki noktaların kümesine bu noktaların orta kümesi denir. Yani maksimum düzlemindeki $A = (x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$, noktaları için orta küme

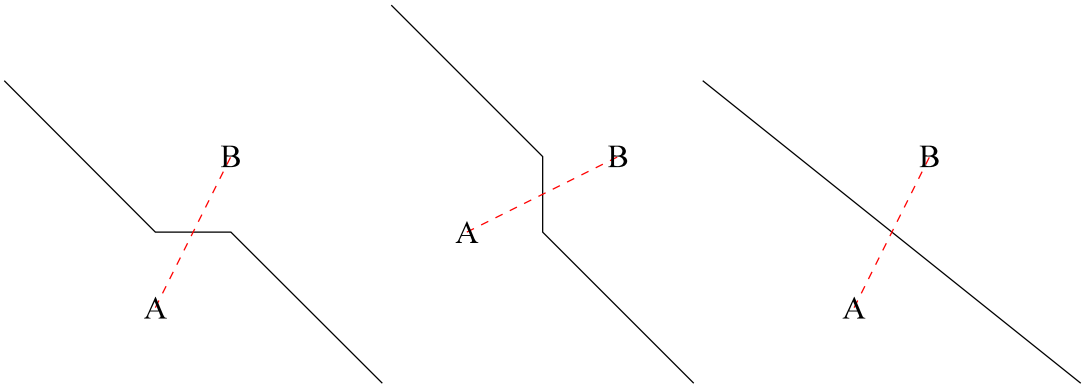
$$\{X : d_M(A, X) = d_M(B, X), X \in \mathbb{R}^2_M\}$$

dir. Dolayısıyla $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2_M$ için

$$max\{|x - x_1|, |y - y_1|\} = max\{|x - x_2|, |y - y_2|\}$$

eşitliğini sağlayan noktalar kümesi A ve B noktalarının orta kümesini oluşturur.
A ve B noktalarının konumlarına göre maksimum orta küme incelendiğinde şu sonuçlar elde edilir:
1) AB doğru parçası koordinat eksenlerine paralel ise maksimum orta küme bir doğru parçası ve iki düzlemsel bölgeden oluşur:
i) Doğru parçası, AB nin orta noktasından geçer ve AB ye diktir.
ii) İki bölge, doğru parçasının uç noktalarından oluşur ve A ve B noktalarının kılavuz doğruları tarafından sınırlandırılır.
2) AB doğru parçası kılavuz doğrusu üzerinde ise maksimum orta küme AB nin orta noktasından geçen diğer kılavuz doğrusudur.
3) AB doğru parçası yataysal doğru üzerinde ise maksimum orta küme bir doğru parçası ve iki ışından oluşur.
i) Doğru parçası,AB nin orta noktasından geçer, en kısa uzaklık kümesinin içinde kalır ve y-eksenine paraleldir.
ii) İki ışın, A ve B nin ikisi paralel üç kılavuz doğrusu tarafından sınırlanan bölgelerdedir ve doğru parçasının en kısa uzaklık kümesini kestiği noktalar başlangıç noktalarıdır. Üstelik bu ışınlar arakesit noktalarından geçen kılavuz doğruları üzerindedir.
4) AB doğru parçası dikeysel doğru üzerinde ise maksimum orta küme bir doğru parçası ve iki ışından oluşur:
i) Doğru parçası,AB nin orta noktasından geçer, en kısa uzaklık kümesinin içinde kalır ve x-eksenine paraleldir.
ii) İki ışın, A ve B nin ikisi paralel üç kılavuz doğrusu tarafından sınırlanan bölgelerdedir ve doğru parçasının en kısa uzaklık kümesini kestiği noktalar başlangıç noktalarıdır. Üstelik

bu ışınlar arakesit noktalarından geçen kılavuz doğruları üzerindedir.



Şekil 3.11 A ve B noktalarının maksimum orta kümesi

Tanım 3.2.6. Maksimum düzlemdeki bir $F = (x_1, y_1)$ odak noktasına maksimum uzaklığının ve $ax + by + c = 0$ denklemli l (doğrultman) doğrusuna maksimum uzaklığı oranı, verilen bir e(dış merkezlik) sayısı olan noktaların oluşturduğu kümeye maksimum düzleminde odak-doğrultman koniği denir. Bu küme

$$\{X : \frac{d_M(X,F)}{d_M(X,l)} = e\}$$

dir. Bu konik,

$$\begin{cases} e < 1 \; iken, & \text{maksimum odak doğrultman elipsi} \\ e = 1 \; iken, & \text{maksimum odak doğrultman parabolü} \\ e > 1 \; iken, & \text{maksimum odak doğrultman hiperbolü} \end{cases}$$

belirtir. Maksimum odak-doğrultman koniklerinin denklemi

$$max\{|x - x_1|, |y - y_1|\} - e\frac{|ax + by + c|}{|a| + |b|} = 0$$

olarak ifade edilir.

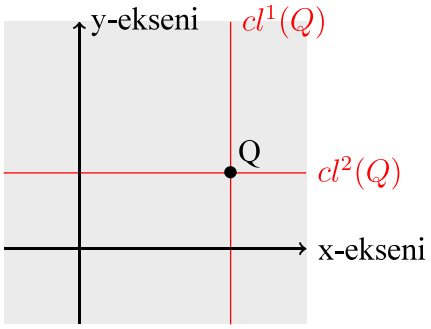
Tanım 3.2.7. $\mathbb{R}^2_M$ de $P = (p_1, p_2)$ noktası için

$$cl_1(P) = \{(x_1, x_2) : x_1 = p_1\} = \{(p_1, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\}$$

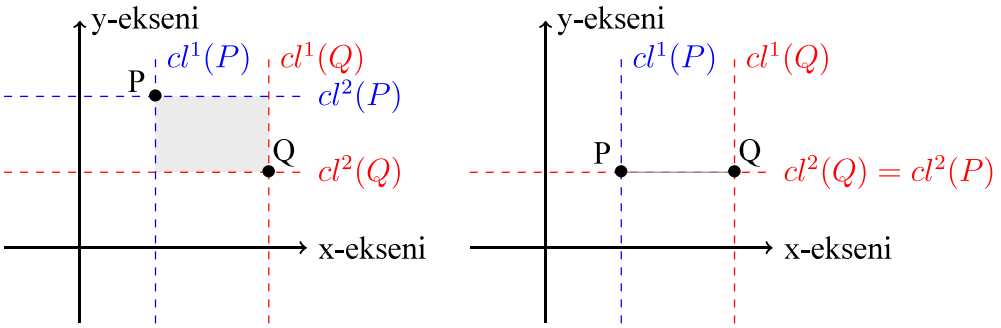
$$cl_2(P) = \{(x_1, x_2) : x_2 = p_2\} = \{(x_1, p_2) : x_1 \in \mathbb{R}\}$$

kümeleri ile tanımlanan doğrulara P noktasının koordinat doğruları denir. Yani P noktasından koordinat eksenlerine çizilen paralel doğrular P noktasının koordinat doğrularıdır. Özel olarak $P = O$ noktasının koordinat doğruları koordinat eksenleridir.

Tanım 3.2.8. Q, maksimum düzlemde bir nokta olsun. Q noktasının koordinat doğruları maksimum düzlemini dört bölgeye ayırır. Bu bölgelere Q-bölgeler denir.
Çalışmada bölgelerin sınırları dahil edilecektir.



Şekil 3.12 Maksimum düzlemde Q noktasının koordinat doğruları ve Q-bölgeler



Şekil 3.13 Maksimum düzlemde P ve Q noktalarının koordinat dikdörtgeni

Tanım 3.2.9. P ve Q maksimum düzlemde iki nokta olsun.

$$c^1(P,Q) = cl^1(P) \cap cl^2(Q) = (p_1, q_2)$$

$$c^(P,Q) = cl^(P) \cap cl^(Q) = (q_1, p_2)$$

noktalarına P ve Q noktalarının koordinat tamamlayıcıları denir.

Tanım 3.2.10. P ve Q maksimum düzlemde iki nokta olsun. $P, Q, cl^1(P,Q)$ ve $cl^2(P,Q)$ köşe noktaları olan dikdörtgensel bölgeye P ve Q noktalarının koordinat dikdörtgeni denir. Özel olarak P ve Q noktaları aynı koordinat doğrusu üzerinde ise koordinat dikdörtgeni bir doğru parçasıdır.

4. TAKSİ DÜZLEMİNDE APOLLON KÜMELERİNİN İNCELENMESİ

Bu bölümde klasik Apollon kümeleri taksi uzaklık fonksiyonu kullanılarak incelenmektedir. Önce taksi düzleminde apollon kümelerinin özelliklerini belirlemek ve bu kümeleri sınıflamak için gerekli tanımlar verilmektedir.

4.1. Taksi Düzlem

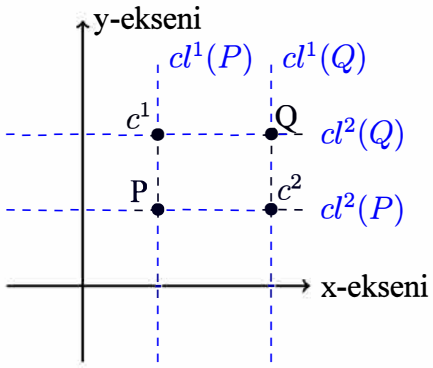
Tanım 4.1.1. Taksi düzlemde herhangi bir $X = (x_0, y_0)$ noktası verildiğinde, $x = x_0$ ve $y = y_0$ doğrularına X noktasının koordinat doğruları denir ve sırasıyla $cl^1(P)$ ve $cl^2(P)$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.2. Taksi düzlemde bir Q noktası verilsin. Bu noktanın koordinat doğrularının ayırdığı dört bölge, Q-bölgeler olarak adlandırılır.

Tanım 4.1.3. Taksi düzlemde herhangi $P = (x_1, y_1)$ ve $Q = (x_2, y_2)$ noktaları verildiğinde, bu noktaların koordinat doğrularının kesiştiği noktalara P ve Q noktalarının koordinat tamamlayıcıları denir ve $c^1(P, Q)$ ve $c^2(P, Q)$ şeklinde ifade edilir.

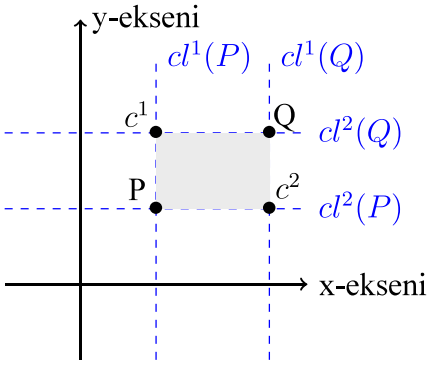
$$c^1(P, Q) = cl^1(P) \cap cl^2(Q) = (x_1, y_2)$$

$$c^2(P, Q) = cl^2(P) \cap cl^1(Q) = (y_1, x_2)$$



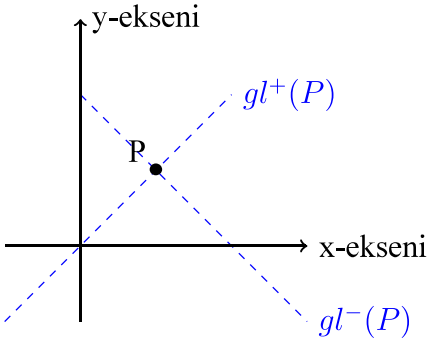
Şekil 4.1 P ve Q noktalarının koordinat tamamlayıcıları

Tanım 4.1.4. Taksi düzlemde herhangi P ve Q noktaları verildiğinde, P ve Q noktalarının koordinat doğruları aracılığıyla belirlenen ve köşe noktaları P, Q, c^1, c^2 olan dörtgene P ve Q noktalarının koordinat dikdörtgeni denir.



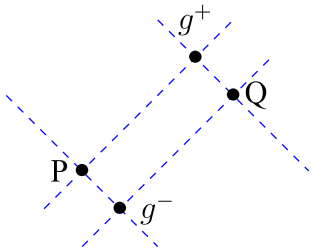
Şekil 4.2 P ve Q noktalarının koordinat dikdörtgeni

Tanım 4.1.5. Taksi düzlemde herhangi bir $P = (x_0, y_0)$ noktası verildiğinde, bu noktadan geçen ∓ 1 eğimli doğrulara kılavuz doğruları denir ve gl^+ ve gl^- ile gösterilir.



Şekil 4.3 P noktasının kılavuz doğruları

Tanım 4.1.6. Taksi düzlemde herhangi P ve Q noktaları verildiğinde, P ve Q noktalarının kılavuz doğrularının, P ve Q haricindeki diğer iki köşesine bu noktaların kılavuz tamamlayıcılar denir ve g^+ ve g^- şeklinde gösterilir.



Şekil 4.4 P ve Q noktalarının kılavuz tamamlayıcıları

Kılavuz tamamlayıcı noktalar apollon kümeleri için önemlidir. Noktalar ve onlarla belirlenen kılavuz tamamlayıcılar arasındaki ilişkiyi belirleyen iki teorem aşağıdaki gibidir:

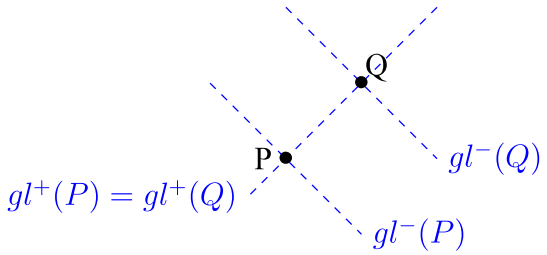
Yardımcı Teorem 4.1.1. *Taksi düzleminde farklı iki P ve Q noktaları verilsin.*
i) *P ve Q aynı kılavuz doğrusu üzerinde değil ise $g^+(P,Q)$ ve $g^-(P,Q)$ kılavuz tamamlayıcıları olan noktalar P ve Q noktalarının koordinat dikdörtgeninin dışındadır.*
ii) *P ve Q aynı kılavuz doğru üzerinde ise kılavuz tamamlayıcılar P ve Q noktalarıdır.*

İspat. **i)** P ve Q noktaları aynı kılavuz doğru üzerinde olmasın. O zaman P noktasının kılavuz doğrularından birisi koordinat dikdörtgenini sadece P noktasında keser. Ayrıca bu kılavuz doğrusuna paralel olan ve Q noktasından geçen doğruda dikdörtgeni sadece Q noktasında keser. Bu kılavuz doğrular üzerindeki kılavuz tamamlayıcıları dikdörtgenin dışında kalır.
ii) P ve Q aynı kılavuz doğru üzerinde olsun.

$$g^+(P,Q) = gl^+(P) \cap gl^-(Q) = Q$$
$$g^-(P,Q) = gl^-(P) \cap gl^+(Q) = P$$

dir.

□

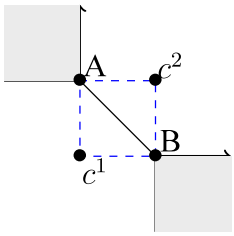


Şekil 4.5 P ve Q aynı kılavuz doğru üzerinde iken kılavuz tamamlayıcılar

Yardımcı Teorem 4.1.2. *Taksi düzleminde farklı iki P ve Q noktaları verilsin. G, P ve Q noktalarının kılavuz tamamlayıcılarından birisi olsun. P ve Q noktaları aynı kılavuz doğrusu üzerinde değil ise P ve Q noktaları farklı G-bölgelerindedir.*

İspat. G noktası ya $gl^+(P) \cap gl^-(Q)$ yada $gl^-(P) \cap gl^+(Q)$ noktasıdır. P ve Q noktalarının aynı G-bölgede olduğunu varsayalım. O zaman PG ve QG doğrularının eğimleri aynı işaretli olur. Bu çelişkidir. Çünkü G noktası için PG ve QG doğrularının eğimleri zıt işaretli olmalıdır. Buna göre P ve Q farklı G-bölgededir. □

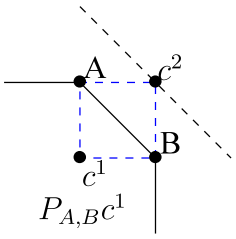
Taksi düzleminde farklı iki A ve B noktaları bir gl kılavuz doğrusu üzerinde olsun. B-bölgesini içermeyen gl kılavuz doğrusunun yarısını kapsayan A-bölgesi, A-bölgesini içermeyen gl kılavuz doğrusunun yarısını kapsayan B-bölgesi ve gl doğru parçasının birleşiminden oluşan kümeye $bb(A, B)$ denir.



Şekil 4.6 bb(A,B)

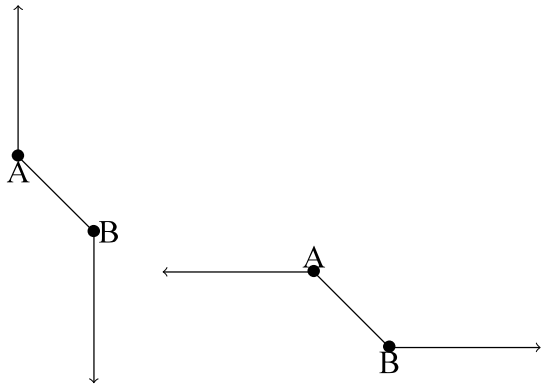
$bb(A, B)$ kümesinin komplementleri iki parçadan oluşur. Her bir parça A ve B noktalarının c^i, $i = 1, 2$ koordinat tamamlayıcılarından birisini içerir. Bu parçalar $P_{A,B}(c^i)$ ile gösterilir. $bb(A, B)$ kümesi, aslında A ve B noktalarının koordinat tamamlayıcıları olan c^1 ve c^2 noktalarının orta kümesidir. $P_{A,B}(c^i)$ iki açık kümedir. Bu kümelerin sınır eğrileri

taksi düzleminde taksi parabolüdür. Bu yüzden bu açık bölgeler tanımlanırken "P" harfi kullanılmıştır.
$P_{A,B}(c^1)$ kümesinin sınırı, odak noktası c^1 ve doğrultmanı c^2 noktasından geçen ve c^1 noktasından geçmeyen kılavuz doğrusu olan bir taksi parabolüdür.



Şekil 4.7 $P_{A,B}(c^1)$ kümesi

$bb(A,B)$ kümesi ve $R_2 \cup R_5 \cup R_8$ kümesinin arakesiti $lb^1(A,B)$ ile gösterilir. $lb^1(A,B)$ noktalar kümesine dikeysel(1.tip) lightning bolt denir. Benzer şekilde $bb(A,B)$ ve $R_4 \cup R_5 \cup R_6$ yatay şeridinin arakesiti $lb^2(A,B)$ ile gösterilir ve yataysal (2.tip) lightning bolt olarak adlandırılır.



Şekil 4.8 $lb^1(A,B)$ ve $lb^2(A,B)$

4.2. Taksi Apollon Kümeleri

Apollon küme tanımında uzaklık fonsiyonu olarak Öklidyen standart metrik kullanıldığında şunlar elde edilir:
(i) $k = 1$ iken $A(P, Q; 1)$ Apollon kümesi

$$d_E(P, X) = d_E(Q, X)$$

eşitliğini sağlayan X noktalarıdır. Bu noktalar P ve Q noktalarının orta noktasından geçen ve PQ doğrusuna dik bir doğrudur.
(ii) $k = 0$ iken $A(P, Q; 0)$ Apollon kümesi sadece P noktasından oluşan kümedir.
(iii) $k \to \infty$ iken $A(P, Q; \infty)$ Apollon kümesi sadece Q noktasından oluşur.
(iv) $k \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ iken $A(P, Q; k)$ Apollon kümesi bir çemberdir.
Bu tanım taksi düzleminde şu şekilde ifade edilmektedir:

Tanım 4.2.1. P ve Q taksi düzleminde iki farklı nokta, $k \geq 0$ ve $k \in \mathbb{R}^+$ olsun.

$$A(P, Q; k) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 | \frac{d(X, P)}{d(X, Q)} = k\right\}$$

kümesine taksi Apollon kümesi denir.
k nın bazı özel değerleri için taksi Apollon kümeleri şu şekildedir:
(i) $k = 0$ iken $A(P, Q; 0)$ taksi Apollon kümesi P noktasından oluşur.
(ii)$k \to \infty$ iken $A(P, Q; \infty)$ taksi Apollon kümesi Q noktasından oluşur.
(iii) $k = 1$ iken $A(P, Q; 1)$ taksi Apollon kümesi P ve Q noktalarının taksi orta kümesinden oluşmaktadır.

$k \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ iken $A(P, Q; k)$ taksi apollon kümesi ve özellikleri bu bölümde incelenecektir. Taksi apollon kümesi P ve Q noktalarının konumlarına ve k nın aldığı değerlere göre farklı sonuçlar elde edilmektedir. Bu sonuçlar elde edilirken P noktasını orijin almak genelliği bozmayacaktır. Q noktası ve k değerinin farklı seçilmesiyle elde edilen taksi apollon kümeleri aşağıdaki teoremlerde ifade edilmektedir.

Teorem 4.2.1. *Taksi düzleminde P ve Q noktaları koordinat eksenleri üzerinde iki farklı nokta ve $k \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ olsun. O zaman $A(P, Q; k)$ taksi Apollon kümesi şu özelliklere sahiptir:*
1) *Bütün köşeleri Q noktasının koordinat doğruları üzerindedir.*
2) *PQ doğrusuna göre simetriktir.*
3) *Doğruların eğimleri $\frac{1+k}{1-k}$, $\frac{1+k}{k-1}$ ve ∓ 1 dir.*

İspat. Taksi düzleminde $P = (0, 0)$ ve $Q = (x_0, 0)$ noktaları x-ekseni üzerinde ve $k > 1$ olmak üzere

$\forall X = (x, y) \in \mathbb{R}^2_T$ için taksi apollon kümesi

$$\frac{d_T(P, X)}{d_T(Q, X)} = k$$

olup,

$$|x| + |y| = k(|x - x_0| + |y|)$$

eşitliğine sahiptir.

(i) $x < 0$, $y < 0$ için

$$(k - 1)x + (k - 1)y = kx_0$$

olup, bu eşitliğin $x < 0$ ve $y < 0$ bölgesinde çözümü yoktur.

(ii) $x < 0$, $y \geq 0$ için

$$(k - 1)x + (-k + 1)y = kx_0$$

olup, bu eşitliğin $x < 0$ ve $y \geq 0$ bölgesinde çözümü yoktur.

(iii) $0 \leq x < x_0$, $y < 0$ için

$$(1 + k)x + (k - 1)y = kx_0$$

olup, bu eşitlik bu bölgedeki doğru parçasını belirtir.

(iv) $0 \leq x < x_0$, $y \geq 0$ için

$$(1 + k)x + (1 - k)y = kx_0$$

olup, bu eşitlik bu bölgedeki doğru parçasını belirtir.

(v) $x \geq x_0$, $y < 0$ için

$$(1 - k)x + (k - 1)y = -kx_0$$

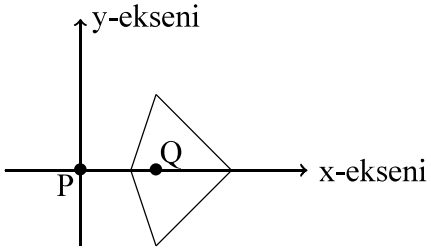
olup, bu eşitlik bu bölgedeki doğru parçasını belirtir.

(vi) $x \geq x_0$, $y \geq 0$ için

$$(1 - k)x + (1 - k)y = -kx_0$$

olup, bu eşitlik bu bölgedeki doğru parçasını belirtir.

Elde edilen sonuçlardan $k > 1$ için x-ekseni üzerinde alınan P ve Q noktalarının taksi Apollon kümesi aşağıdaki gibidir;



Şekil 4.9 x-ekseni üzerindeki alınan P ve Q noktalarının Apollon kümesi

Bu küme x-eksenine göre simetriktir ve Q noktasını içeren doğru parçalarının oluşturduğu kapalı eğridir. Köşegenlerin kesiştiği yer Q noktası olduğu için bu şekildeki taksi Apollon kümesine Q-merkezli taksi Apollon kümesi diyeceğiz.
x-ekseni üzerindeki P ve Q noktaları için $0 < k < 1$ iken taksi Apollon kümesi

$$A(P,Q;k) = \{X | \frac{d(P,X)}{d(Q,X)} = k, 0 < k < 1\}$$

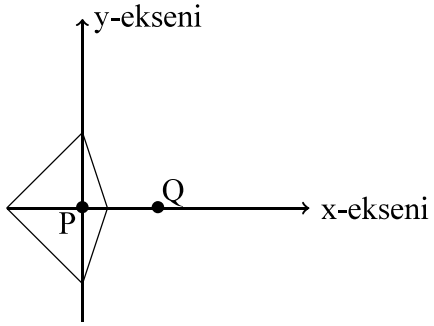
dir. $k = \frac{1}{k'}, k' > 1$ olacak şekilde $k' \in \mathbb{R}^+$ sayısı vardır. Bu durumda

$$A(P,Q;k) = \{X | \frac{d(P,X)}{d(Q,X)} = \frac{1}{k'}, k' > 1\}$$

$$= \{X | \frac{d(Q,X)}{d(P,X)} = k', k' > 1\}$$

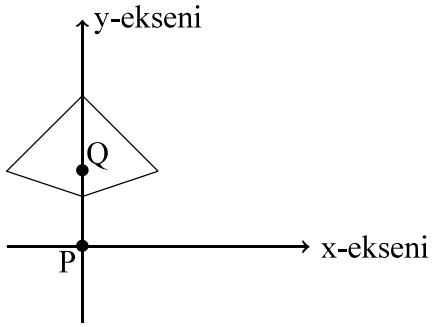
$$= A(Q,P;k')$$

elde edilir. Böylece P ,Q noktaları x-ekseni üzerinde ve $0 < k < 1$ için taksi apollon kümesi, $k' = \frac{1}{k} > 1$ için $A(Q,P;k')$ taksi apollon kümesine eşittir. Dolayısıyla özellikleri, $A(P,Q;k')$ kümesinde Q yerine P alınarak hemen elde edilebilir. Böylece taksi apollon kümesi P noktasını içeren x-eksenine göre simetrik doğru parçalarının oluşturduğu kapalı eğridir.



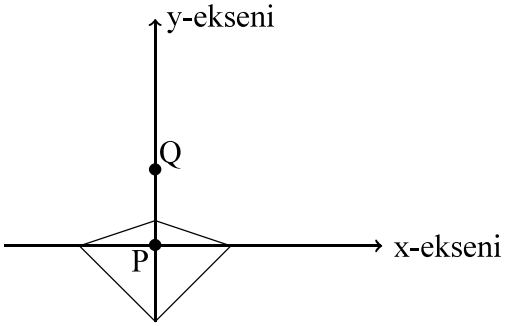
Şekil 4.10 $0 < k < 1$ için $A(P, Q; k)$

Eğer P ve Q noktaları y-ekseni üzerinde farklı iki nokta ise $k > 1$ için taksi Apollon kümesi Q noktasını içeren doğru parçalarının oluşturduğu y-eksenine göre simetrik kapalı eğridir.



Şekil 4.11 $k > 1$ için A(P,Q;k)

$0 < k < 1$ için taksi Apollon kümesi P noktasını içeren doğru parçalarının oluşturduğu y-eksenine göre simetrik kapalı bir eğridir. □



Şekil 4.12 $0 < k < 1$ için A(P,Q;k)

Sonuç Taksi düzlemde P ve Q koordinat eksenleri üzerinde iki farklı nokta ve $k_1 > 1, 0 < k_2 < 1, k_1.k_2 = 1$ ve $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$ olsun. $A(P,Q;k_1)$ ve $A(P,Q;k_2)$ taksi Apollon kümeleri P ve Q noktalarının taksi orta kümesine göre simetriktir.

İspat. x-ekseni üzerindeki $P = (0,0)$ ve $Q = (x_0, 0)$ noktalarının taksi orta kümesi

$$\{(x,y) : x = \frac{x_0}{2}\}$$

dır. Teoremden elde edilen $A(P,Q;k_1)$ ve $A(P,Q;k_2)$ kümeleri $x = \frac{x_0}{2}$ doğrusuna göre simetriktir. Benzer şekilde $P = (0,0)$ ve $Q = (0, y_0)$ noktaları için $A(P,Q;k_1)$ ve $A(P,Q;k_2)$ taksi Apollon kümeleri $y = \frac{y_0}{2}$ doğrusuna göre simetriktir. □

Teorem 4.2.2. *Taksi düzleminde P ve Q aynı kılavuz doğrusu üzerinde iki farklı nokta olsun. $k > 1, k \in \mathbb{R}^+$ için $A(P,Q;k)$ taksi Apollon kümesi aşağıdaki özelliklere sahiptir.*

1) *P, Q noktalarının üzerinde bulunduğu kılavuz doğrusuna göre simetriktir.*

2) *Taksi Apollon kümesinin bütün köşeleri Q noktasının koordinat doğruları üzerindedir.*

3) *Taksi Apollon kümesinin yan kenarlarını oluşturan doğru parçalarını içeren doğrular P noktasında kesişir.*

4) *PQ kılavuz doğrusunun eğimi m olmak üzere taksi Apollon kümelerinin yan kenarlarının eğimleri $m\frac{k+1}{k-1}$ ve $m\frac{k-1}{k+1}$ dir.*

İspat. Taksi düzleminde $P = (0,0)$ ve $Q = (x_0, y_0)$ farklı noktalarının $y = x$ kılavuz doğrusu üzerinde olduğunu kabul edelim. $k > 1$ olmak üzere taksi apollon kümesi

$$\frac{d_T(P,X)}{d_T(Q,X)} = k$$

eşitliğini sağlar. Buradan

$$|x| + |y| = k(|x - x_0| + |y - x_0|)$$

eşitliği incelenirse:
(1) $x < 0, y < 0$ iken

$$(k-1)x + (k-1)y = 2kx_0$$

eşitliği elde edilir ve çözüm yoktur.
(2) $x < 0, 0 \leq y_0 < x_0$ iken

$$(k-1)x + (k+1)y = 2kx_0$$

eşitliği elde edilir ve çözüm yoktur.
(3) $x < 0, y \geq x_0$ iken

$$y = x$$

olup, çözüm yoktur.
(4) $0 \leq x_0 < x, y < 0$ iken

$$(1+k)x + (k-1)y = 2kx_0$$

olup, çözüm boş kümedir.
(5) $0 \leq x_0 < x, 0 \leq y_0 < x_0$ iken

$$x + y = \frac{2k}{1+k}x_0$$

eşitliği elde edilir. Bu doğrunun bölge içinde kalan noktaların oluşturduğu doğru parçası çözümdür.
(6) $0 \leq x_0 < x, y \geq x_0$ iken

$$y = \frac{1+k}{k-1}x$$

denklemli doğru parçası çözümdür.
(7) $x \geq x_0, y < 0$ iken

$$y = x$$

eşitliği için çözüm yoktur.
(8) $x \geq x_0, 0 \leq y < x_0$ iken

$$y = \frac{k-1}{k+1}x$$

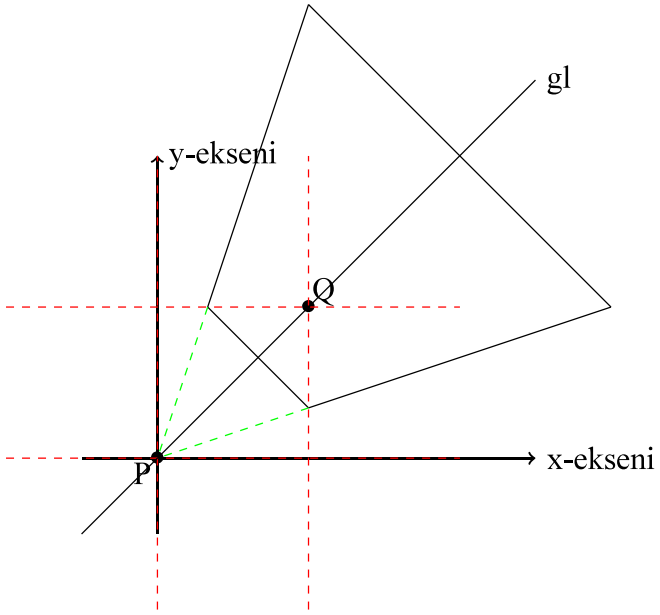
denklemli doğru parçası bölge için çözümdür.

(9) $x \geq x_0, y \geq x_0$ iken

$$x + y = \frac{2k}{k-1}x_0$$

denklemli doğru parçası bölge için çözümü oluşturur.

Buna göre elde edilen sonuçlardan taksi apollon kümesi şekildeki gibidir.



Şekil 4.13 P ve Q aynı kılavuz doğru üzerinde ve $k > 1$ iken A(P,Q;k)

PQ kılavuz doğrusu yani $y = x$ doğrusuna göre yansıma dönüşümü $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2_T$ için $T(x, y) = (y, x)$ dönüşümüdür.

$A(P, Q; k)$ taksi apollon kümesinin yan kenarı olan

$$y = \frac{1+k}{k-1}x$$

denklemli doğru parçası üzerindeki her $(x, \frac{1+k}{k-1}x)$ noktasının T dönüşümü altındaki görüntüsü $(\frac{1+k}{k-1}x, x)$ noktalarıdır. Bu noktalar $y = \frac{k-1}{1+k}x$ denklemli doğru parçasının üzerindedir. Ayrıca $x + y = \frac{2k}{1+k}x_0$ ve $x + y = \frac{2k}{k-1}x_0$ denklemli doğru parçaları kılavuz doğrusuna dik olduğundan yansıma altında bunlar sabit kalır. Böylece taksi apollon kümesi PQ kılavuz doğrusuna göre simetriktir. $A_1 = (x_0, \frac{k-1}{1+k}x_0), A_2 = (\frac{1+k}{k-1}x_0, x_0), A_3 = (x_0, \frac{1+k}{k-1}x_0), A_4 = (\frac{k-1}{k+1}x_0, x_0)$ köşe noktaları Q noktasının koordinat doğruları üzerindedir. Yan kenarlar

$$y = \frac{1+k}{k-1}x$$

ve

$$y = \frac{k-1}{1+k}x$$

denklemli doğrular üzerindedir ve bu doğrular P noktasından geçer. P ve Q noktaları diğer kılavuz doğrusu yani $y = -x$ doğrusu üzerinde olması durumunda benzer hesaplamalar ile aynı sonuçlar elde edilir. □

Teorem 4.2.3. *Taksi düzleminde P ve Q aynı kılavuz doğrusu üzerinde farklı iki nokta ve $0 < k < 1, k \in \mathbb{R}^+$ olsun. $A(P,Q;k)$ taksi apollon kümesi aşağıdaki özelliklere sahiptir:*
1) *PQ kılavuz doğrusuna göre simetriktir.*
2) *$A(P,Q;k)$ nın bütün köşeleri P noktasının koordinat doğruları üzerindedir.*
3) *$A(P,Q;k)$ nın yan kenarlarının üzerindeki doğrular Q noktasında kesişir.*
4) *$A(P,Q;k)$ nın yan kenarlarının eğimleri $m\dfrac{1-k}{1+k}$ ve $m\dfrac{k+1}{1-k}$ dır. Burada m PQ kılavuz doğrusunun eğimidir.*

İspat. Taksi düzleminde $P = (0,0)$ ve $Q = (x_0, y_0)$ farklı noktaları $y = x$ kılavuz doğrusu üzerinde olsun. $0 < k < 1$ olmak üzere taksi apollon kümesi

$$\frac{d_T(P,X)}{d_T(Q,X)} = k$$

dır. $k = \dfrac{1}{k'}$ olacak şekilde $k' > 1$ reel sayısı vardır. Buna göre

$$k' d_T(P,X) = d_T(Q,X)$$

eşitliğinden

$$k'(|x| + |y|) = |x - x_0| + |y - x_0|$$

elde edilir. Bu eşitlik incelenirse
1) $x < 0, y < 0$ iken

$$x + y = \frac{2}{1-k'}x_0$$

eşitliği bu bölgedeki doğru parçasını belirtir.
2) $x < 0, 0 \leq y < x_0$ iken

$$(1-k')x + (1+k')y = 2x_0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik, bölgedeki eğimi $\dfrac{k'-1}{k'+1}$ olan doğru parçası denklemidir.
3) $x < 0, y \geq x_0$ iken

$$y = x$$

eşitliği elde edilir. Ancak bölgede çözüm yoktur.
4) $0 \leq x < x_0, y < 0$ iken

$$(1+k')x + (1-k')y = 2x_0$$

elde edilir. Bu bölgede eğimi $\frac{1+k'}{k'-1} = \frac{k+1}{1-k}$ olan doğru parçasını belirtir.

5) $0 \leq x < x_0, 0 \leq y < x_0$ iken

$$x + y = \frac{2}{1+k'}x_0$$

eşitliği bu bölgedeki doğru parçasını belirtir.

6) $0 \leq x < x_0, y \geq x_0$ iken

$$y = \frac{1+k'}{1-k'}x$$

eşitliği elde edilir. Ancak bu bölgede çözüm yoktur.

7) $x \geq x_0, y < 0$ iken

$$y = x$$

eşitliği elde edilir. Ancak bu bölgede bu eşitlik çözüme sahip değildir.

8) $x \geq x_0, 0 \leq y < x_0$ iken

$$y = \frac{1-k'}{k'+1}x$$

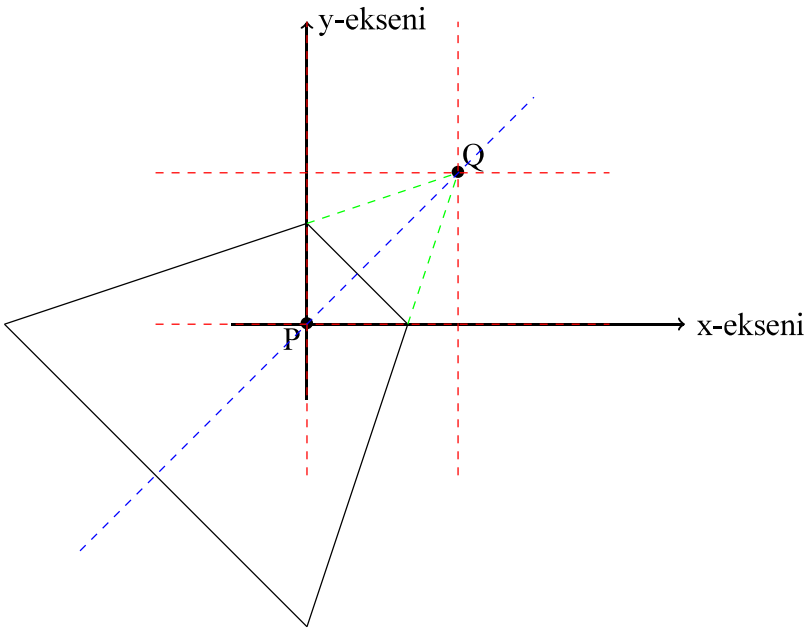
eşitliği elde edilir. Ancak bu bölgede bu eşitlik çözüme sahip değildir.

9) $x \geq x_0, y \geq x_0$ iken

$$x + y = \frac{-2}{k'-1}x_0$$

eşitliği elde edilir. Ancak bu bölgede bu eşitlik çözüme sahip değildir.

Elde edilen hesaplamalardan taksi apollon kümesi aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.14 P ve Q aynı kılavuz doğru üzerinde ve $0 < k < 1$iken A(P,Q;k)

$A_1 = \left(0, \frac{2x_0}{1-k'}\right)$, $A_2 = \left(\frac{2x_0}{1-k'}, 0\right)$, $A_3 = \left(0, \frac{2x_0}{1+k'}\right)$, $A_4 = \left(\frac{2x_0}{1+k'}, 0\right)$ köşe noktaları P noktasının koordinat doğruları üzerindedir. A_1A_4 ve A_2A_3 kenarlarının eğimleri $\frac{1-k}{1+k}$ ve $\frac{k+1}{1-k}$ dır.

Önceki teoremdeki gibi taksi apollon kümesi PQ kılavuz doğrusuna göre simetriktir. Ayrıca A_1A_2 ve A_3A_4 kenarları PQ doğrusuna dik paralel iki kenardır. Böylece taksi apollon kümesi P merkezlidir. P ve Q nun $y = -x$ kılavuz doğrusu üzerinde olması durumunda da benzer hesaplamalarla aynı sonuçlar elde edilir. □

Teorem 4.2.4. *Taksi düzleminde P ve Q noktaları aynı kılavuz doğrusu ve aynı koordinat doğrusu üzerinde olmayan iki farklı nokta olsun. PQ doğru parçasının eğimi m ve $|m| < 1$, $k \in \mathbb{R}^+, k > 1$ için $k.m < 1$ iken $A(P, Q; k)$ taksi apollon kümesi aşağıdaki özelliklere sahiptir:*

1) *Altı doğru parçasından oluşur. Bu doğru parçalarının eğimleri $\frac{1+k}{1-k}, \frac{1+k}{k-1}, \frac{k-1}{k+1}, \frac{1-k}{k+1}, -1$ ve 1 dir.*

2) *Altı köşe noktasının dört tanesi Q noktasının koordinat doğruları üzerinde, diğer ikisi P noktasının aynı koordinat doğrusu üzerindedir.*

3) *Q-merkezlidir.*

4) *İki paralel kenarı vardır. Bu kenarlar $sgn(-m)$ eğimli kılavuz doğrsu parçalarından oluşur.*

İspat. PQ doğru parçasının eğimi m ve $|m| < 1$ ise $-1 < m < 1$ dir. Önce $0 < m < 1$ durumunu düşündüğümüzde, genelliği bozmaksızın taksi düzleminde $P = (0, 0), Q = (x_0, y_0)$ ve $0 < y_0 < x_0$ alabiliriz. $k > 1$ olmak üzere taksi apollon kümesi

$$\frac{d_T(P, X)}{d_T(Q, X)} = k$$

eşitliğinden

$$|x| + |y| = k(|x - x_0| + |y - y_0|)$$

elde edilir.

1) $x < 0, y < 0$ iken

$$x + y = \frac{k}{k-1}(x_0 + y_0)$$

elde edilir. Ancak bu bölgede eşitliğin çözümü yoktur.

2) $x < 0, 0 \leq y < y_0$ iken

$$(k-1)x + (1+k)y = k(x_0 + y_0)$$

elde edilir. Ancak bu bölgede eşitliğin çözümü yoktur.

3) $x < 0, y \geq y_0$ iken

$$x - y = \frac{k}{k-1}(x_0 - y_0)$$

elde edilir. Ancak bu bölgede eşitliğin çözümü yoktur.
4) $0 < x \leq x_0, y < 0$ iken

$$(1+k)x + (-1+k)y = k(x_0 + y_0)$$

elde edilir. Bu denklem, bölgede x-eksenini $x = \frac{k}{k+1}(x_0 + y_0)$ apsisli A_2 noktasında kesen ve $x = x_0$ doğrusunu $y = \frac{ky_0 - x_0}{k-1}$ ordinatlı A_1 noktasında kesen doğru parçasını belirtir.
5) $0 < x \leq x_0, 0 \leq y < y_0$ iken

$$(1+k)x + (1+k)y = k(x_0 + y_0)$$

elde edilir. Bu denklem, bölgede x-eksenini $x = \frac{k}{k+1}(x_0 + y_0)$ apsisli A_2 noktasında ve $y = y_0$ doğrusunu $x = \frac{kx_0 - y_0}{1+k}$ apsisli A_3 noktasında keser.
Dolayısıyla bu noktaları birleştiren kılavuz doğru parçası bölgde çözümü oluşturur.
6) $0 < x \leq x_0, y \geq y_0$ iken

$$(1+k)x + (1-k)y = k(x_0 - y_0)$$

elde edilir. Bu denklem bölgede $A_3(\frac{kx_0 - y_0}{1+k}, y_0)$ ve $A_4(x_0, \frac{x_0 + ky_0}{k-1})$ noktalarını birleştiren doğru parçasını gösterir.
7) $x \geq x_0, y < 0$ iken

$$(1-k)x + (-1+k)y = k(-x_0 + y_0)$$

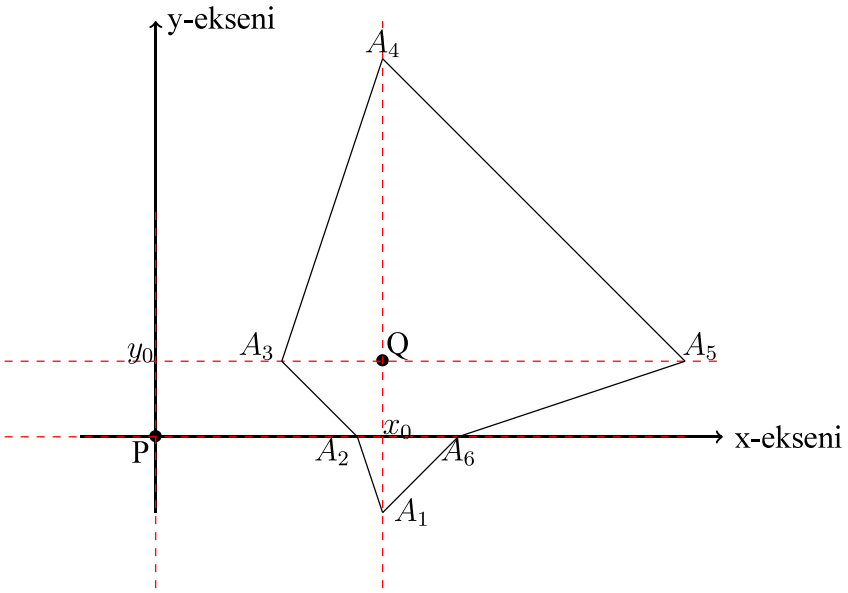
elde edilir. Bu denklem, bölgede $A_1(x_0, \frac{-x_0 + ky_0}{k-1})$ ve $A_6(\frac{k}{k-1}(x_0 - y_0), 0)$ noktalarının belirttiği doğru parçasıdır.
8) $x \geq x_0, 0 \leq y < y_0$ iken

$$(1-k)x + (1+k)y = k(-x_0 + y_0)$$

elde edilir. Bu denklem, bölgede $A_6(x_0, \frac{ky_0 - x_0}{k+1})$ ve $A_5(\frac{kx_0 + y_0}{k-1}, y_0)$ noktalarını birleştiren doğru parçasıdır.
9) $x \geq x_0, y \geq y_0$ iken

$$(1-k)x + (1-k)y = k(-x_0 - y_0)$$

elde edilir. Bu denklem, bölgede $A_5(\frac{kx_0 + y_0}{k-1}, y_0)$ ve $A_4(x_0, \frac{x_0 + ky_0}{k-1})$ noktalarını birleştiren doğru parçasıdır.
Elde edilen hesaplamalardan $A(P, Q; k)$ taksi apollon kümesi aşağıdaki gibi elde edilir. Şekil4.15den de görüldüğü gibi özellikler kolayca anlaşılır. □



Şekil 4.15 P ve Q aynı koordinat yada aynı kılavuz doğrusu üzerinde olmadığında $k > 1$ için $k.m < 1$ iken A(P,Q;k) kümesi

Benzer şekilde PQ doğru parçasının eğimi $-1 < m < 0$ iken genellik bozulmaksızın $P = (0,0)$ $Q = (x_0, y_0)$ noktaları $y_0 < 0 < x_0$ olacak şekilde seçilebilir. Bu durumda taksi apollon kümesi $0 \leq x < x_0$, $y < y_0$ bölgesinde $(1+k)x + (k-1)y = k(x_0 + y_0)$ denklemi doğru parçası, $0 \leq x < x_0$, $y_0 \leq y < 0$ bölgesinde $x - y = \dfrac{k}{k+1}(x_0 - y_0)$ denklemli doğru parçası, $0 \leq x < x_0$, $y \geq 0$ bölgesinde $(1+k)x + (1-k)y = k(x_0 - y_0)$ denklemli doğru parçası, $x \geq x_0$, $y < y_0$ bölgesinde $-x + y = \dfrac{k}{k-1}(-x_0 + y_0)$ denklemli doğru parçası, $x \geq x_0$, $y_0 \leq y < 0$ iken $(1-k)x - (1+k)y = k(-x_0 + y_0)$ denklemli doğru parçası ve $x \geq x_0$, $y \geq 0$ bölgesinde $x + y = \dfrac{k}{1-k}(-x_0 + y_0)$ denklemli doğru parçalarından oluşur.

Teorem 4.2.5. *Taksi düzleminde P ve Q noktaları aynı kılavuz doğrusu ve aynı koordinat doğrusu üzerinde olmasın. PQ doğru parçasının eğimi m ve $|m| < 1$, $k \in \mathbb{R}^+, k > 1$ için $k.m \geq 1$ iken $A(P,Q;k)$ taksi apollon kümesi aşağıdaki özelliklere sahiptir:*

1) *Dört doğru parçasından oluşur. Bu doğru parçalarının eğimleri $sgn(m)(\dfrac{k+1}{k-1}), sgn(m)(\dfrac{k-1}{k+1}), sgn(-m).1$ dir.*

2) *Dört köşe noktasıda Q noktasının koordinat doğruları üzerindedir.*

3) *Q-merkezlidir.*

4) *İki paralel kenarı vardır. Bu kenarlar eğimleri $sgn(-m).1$ olan kılavuz doğrularıdır.*

İspat. Önce $0 < m < 1$ durumu ele alınırsa genelliği bozmaksızın taksi düzleminde $P = (0,0), Q = (x_0, y_0)$ ve $0 < y_0 < x_0$ olacak şekilde seçilir. $k > 1$ olmak üzere taksi Apollon

kümesi

$$\frac{d_T(P,X)}{d_T(Q,X)} = k$$

eşitliğinden

$$|x| + |y| = k(|x - x_0| + |y - y_0|)$$

elde edilir.

1) $x < 0, y < 0$ iken

$$x + y = \frac{k}{k-1}(x_0 + y_0))$$

elde edilir. Ancak bu bölgede eşitliğin çözümü yoktur.

2) $x < 0, 0 \leq y < y_0$ iken

$$(k-1)x + (1+k)y = k(x_0 + y_0)$$

elde edilir. Ancak bu bölgede eşitliğin çözümü yoktur.

3) $x < 0, y \geq y_0$ iken

$$x - y = \frac{k}{k-1}(x_0 - y_0)$$

elde edilir. Ancak bu bölgede eşitliğin çözümü yoktur.

4) $0 \leq x < x_0, y < 0$ iken

$$(1+k)x + (-1+k)y = k(x_0 + y_0)$$

elde edilir. Bu denklem, $(\frac{k}{k+1}(x_0 - y_0), 0)$ ve $(\frac{kx_0 + y_0}{k+1}, y_0)$ noktalarını birleştiren doğru parçasıdır. Ancak bölgede bir çözüme sahip değildir.

5) $0 \leq x < x_0, 0 \leq y < y_0$ iken

$$x + y = \frac{k}{k+1}(x_0 + y_0)$$

elde edilir. Bu denklem, $(x_0, \frac{ky_0 - x_0}{k+1})$ ve $(\frac{kx_0 - y_0}{1+k}, y_0)$ noktalarını birleştiren doğrunun bölgedeki parçasını belirtir.

6) $0 \leq x < x_0, y \geq y_0$ iken

$$(1+k)x + (1-k)y = k(x_0 - y_0)$$

elde edilir. Bu denklem, $(\frac{kx_0 - y_0}{1+k}, y_0)$ ve $(x_0, \frac{x_0 + ky_0}{k-1})$ noktalarını birleştiren doğrunun bölgedeki parçasını belirtir.

7) $x \geq x_0, y < 0$ iken

$$(1-k)x + (-1+k)y = k(-x_0 + y_0)$$

elde edilir. Bu denklem, $(x_0, \frac{-x_0 + ky_0}{k-1})$ ve $(\frac{k}{k-1}(x_0 - y_0), 0)$ noktalarını birleştiren doğrudur. Ancak $\frac{-x_0 + ky_0}{k-1} > 0$,$\frac{k}{k-1}(x_0 - y_0) < x_0$ olduğundan bölgede çözüm yoktur.

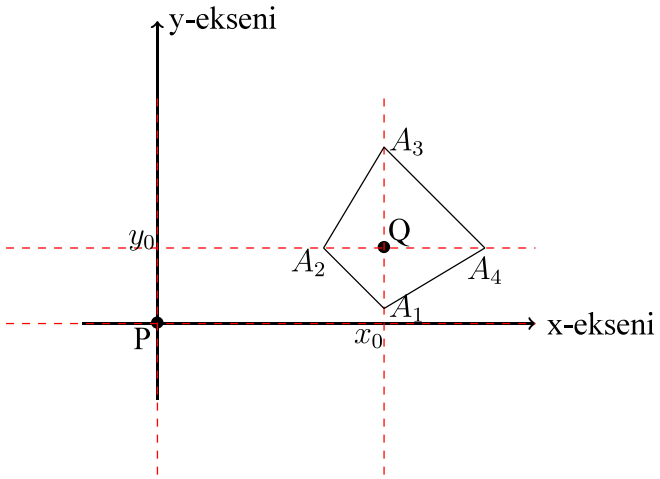
8) $x \geq x_0, 0 \leq y < y_0$ iken

$$(1-k)x + (1+k)y = k(-x_0 + y_0)$$

elde edilir. Bu denklem, $(x_0, \frac{ky_0 - x_0}{k+1})$ ve $(\frac{kx_0 + y_0}{k-1}, y_0)$ noktalarından geçen doğrunun bölgedeki parçasıdır. Burada $0 \leq \frac{ky_0 - x_0}{k+1} < y_0$ ve $\frac{kx_0 + y_0}{k-1} > x_0$ dır.
9) $x \geq x_0, y \geq y_0$ iken

$$(1-k)x + (1-k)y = k(-x_0 - y_0)$$

elde edilir. Bu denklem, $(x_0, \frac{x_0 + ky_0}{k-1})$ ve $(\frac{kx_0 + y_0}{k-1}, y_0)$ noktalarından geçen doğruyu belirtir. $\frac{kx_0 + y_0}{k-1} \geq x_0$ ve $\frac{x_0 + ky_0}{k-1} \geq y_0$ olduğundan çözüm, bölgede bu doğrunun parçasıdır.
Böylece elde edilen hesaplamalardan $A(P, Q; k)$ taksi apollon kümesi aşağıdaki gibi elde edilir. □



Şekil 4.16 P ve Q aynı koordinat yada aynı kılavuz doğrusu üzerinde olmasın ve $k > 1$ için $k.m \geq 1$ iken A(P,Q;k)

PQ doğru parçasının eğimi $m, -1 < m < 0$ iken genellik bozulmaksızın $P = (0,0), Q = (x_0, y_0)$ noktaları $y_0 < 0 < x_0$ olacak şekilde seçilerek benzer hesaplamalarla sonuç elde edilir. Ayrıca $|m| > 1$ durumunda P, Q noktaları dikeysel doğru üzerindedir. $k < m, k < 1, k \in \mathbb{R}^+$ iken $A(P, Q; k)$ taksi Apollon kümesi teorem 4.2.4 ve $k \geq m$ iken teorem 4.2.5 deki sonuçların benzerleri elde edilir.

Taksi Apollon küme, P ve Q noktalarının konumlarına ve k değerine bağlı olarak farklı şekil aldığı görülür. k'nın $0, 1$ yada ∞ olduğu durumlar dışında, taksi Apollon kümeleri parçalı-doğrusal basit kapalı eğrilerdir. Şimdi taksi Apollon kümeleri tarafından sınırlanan bölgeler ele alınacaktır.

Tanım 4.2.2. Taksi düzleminde P ve Q iki nokta, $k \in \mathbb{R}^+$ olsun.

$k > 1$ olmak üzere bütün taksi Apollon kümelerinin birleşimi olan küme

$$\{x \in \mathbb{R}^2_T | \frac{d(X,P)}{d(X,Q)} \geqslant k\} = \bigcup_{\kappa \in [k,\infty]} A(P,Q;\kappa)$$

olup, bu küme $B(P,Q;k)$ ile gösterilir. Bu kümeye taksi dolu Apollon kümesi denir. Benzer şekilde

$k < 1$ olmak üzere

$$B(P,Q;k) = \{x \in \mathbb{R}^2_T | \frac{d(X,P)}{d(X,Q)} \leqslant k\} = \bigcup_{\kappa \in [0,k]} A(P,Q;\kappa)$$

kümesi de taksi dolu Apollon kümesidir.

Taksi düzleminde P, Q noktaları ve $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ için taksi uzaklıkların lineer bileşkesi

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \alpha d(X,P) + \beta d(X,Q) = \gamma\}$$

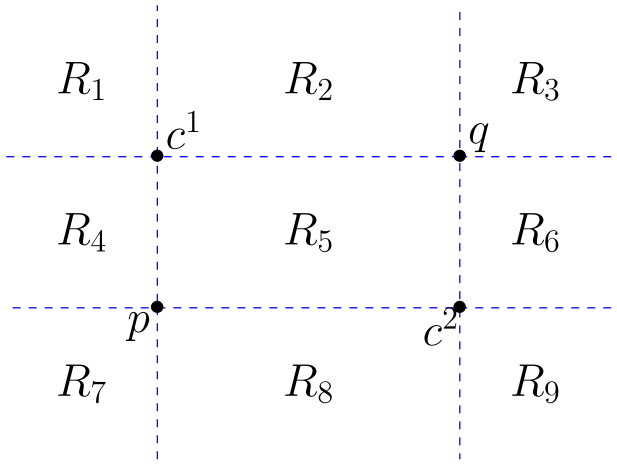
kümesi olarak tanımlanır. Bu küme $S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma)$ ile gösterilir. $S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma)$, α,β,γ nın değerlerine göre taksi çemberi,taksi elipsi,taksi hiperbolünü içerir.
$\alpha = 1, \beta = -k, \gamma = 0$ alındığında $S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma)$ taksi apollon kümesidir. $S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma)$ kümesi $\forall X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_T$ için

$$\alpha(|x_1 - p_1| + |x_2 - p_2|) + \beta(|x_1 - q_1| + |x_2 - q_2|) = \gamma$$

eşitliğine sahiptir.
$S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma)$ kümesinin $\mathbb{R}_i$ bölgelerindeki çözümleri ile ilgili elde edilen sonuçlar aşağıdaki teoremlerde sunulmaktadır.

Yardımcı Teorem 4.2.6. *Taksi düzleminde farklı iki P ve Q noktaları ve $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ için $S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma) \cap R_i = R_i$ olsun. O zaman $\alpha = \beta = \gamma = 0$ veya i tektir. Üstelik $i \neq 5$ ise $\alpha = -\beta$ ve $i = 5$ ise $\alpha = \beta$.*

İspat. Taksi düzleminde P ve Q farklı iki nokta olsun. $P = (0,0), Q = (x_0, y_0)$ almak genelliği bozmayacaktır. P ve Q noktalarının koordinat doğruları ile oluşan R_i bölgeleri ile $S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma)$ kümesinin arakesitlerini irdeleyeceğiz:
Kabul edelim ki $S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma) \cap R_1 = R_1$ olsun.



Şekil 4.17 $\mathbb{R}_i$ bölgeler

R_1 bölgesindeki her $X = (x, y)$ noktası için $x < 0, y \geq y_0$ olduğundan $S(P, Q; \alpha, \beta, \gamma)$ kümesi

$$x(-\alpha - \beta) + y(\alpha + \beta) = \gamma - \beta(x_0 - y_0)$$

eşitliğine sahiptir. $S(P, Q; \alpha, \beta, \gamma) \cap R_1 = R_1$ olması için $\alpha = -\beta$ ve $\gamma = \beta(x_0 - y_0)$ olmalıdır.

$S(P, Q; \alpha, \beta, \gamma) \cap R_2 = R_2$ olması durumunda $S(P, Q; \alpha, \beta, \gamma)$ kümesi

$$x(\alpha - \beta) + y(\alpha + \beta) + \beta(x_0 - y_0) = \gamma$$

eşitliğine sahiptir.
R_2 bölgesindeki her noktanın kümede olabilmesi için

$$\alpha = \beta = \gamma = 0$$

olmalıdır.
Kalan diğer bölgeler için benzer işlemler aşağıdaki gibi yapılır:

$S(P, Q; \alpha, \beta, \gamma) \cap R_3 = R_3$ olması durumunda

$$x(\alpha + \beta) + y(\alpha + \beta) - \beta(x_0 + y_0) = \gamma$$

olup, $\alpha = -\beta$ ve $\gamma = -\beta(x_0 + y_0)$ olmalıdır.

$S(P, Q; \alpha, \beta, \gamma) \cap R_4 = R_4$ olması durumunda

$$x(-\alpha - \beta) + y(\alpha - \beta) + \beta(x_0 + y_0) = \gamma$$

olup, $\alpha = \beta = \gamma = 0$ olmalıdır.

$S(P, Q; \alpha, \beta, \gamma) \cap R_5 = R_5$ olması durumunda

$$x(\alpha - \beta) + y(\alpha - \beta) + \beta(x_0 + y_0) = \gamma$$

olup, $\alpha = \beta$ ve $\gamma = \beta(x_0 + y_0)$ olmalıdır.

$S(P, Q; \alpha, \beta, \gamma) \cap R_6 = R_6$ olması durumunda

$$x(\alpha + \beta) + y(\alpha - \beta) + \beta(-x_0 + y_0) = \gamma$$

olup, $\alpha = \beta = \gamma = 0$ olmalıdır.

$S(P, Q; \alpha, \beta, \gamma) \cap R_7 = R_7$ olması durumunda

$$x(-\alpha - \beta) + y(-\alpha - \beta) + \beta(x_0 + y_0) = \gamma$$

olup, $\alpha = -\beta$ ve $\gamma = \beta(x_0 + y_0)$ olmalıdır.

$S(P, Q; \alpha, \beta, \gamma) \cap R_8 = R_8$ olması durumunda

$$x(\alpha - \beta) + y(-\alpha - \beta) + \beta(x_0 + y_0) = \gamma$$

olup, $\alpha = \beta = \gamma = 0$ olmalıdır.

$S(P, Q; \alpha, \beta, \gamma) \cap R_9 = R_9$ olması durumunda

$$x(\alpha + \beta) + y(-\alpha - \beta) + \beta(-x_0 + y_0) = \gamma$$

olup, $\alpha = -\beta$ ve $\gamma = \beta(-x_0 + y_0)$ olmalıdır.

Böylece $S(P, Q; \alpha, \beta, \gamma) \cap R_i = R_i$ durumunda $i \neq 5$ ve i tek iken $\alpha = -\beta$, i çift iken $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ve $i = 5$ iken $\alpha = \beta$ sonucu elde edilir. □

Yardımcı Teorem 4.2.7. *Taksi düzleminde P ve Q farklı iki nokta, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ve i tek sayı olsun. $S(P, Q; \alpha, \beta, \gamma) \cap R_i$ kümesi bir doğru parçası ise bu, kılavuz doğrusunun bir parçasıdır. Daha özel olarak, $i = 1, 9$ için eğim $+1$, $i = 3, 7$ için eğim -1 ve $i = 5$ için eğimin işareti, P ve Q 'yu birleştiren doğru parçasının eğiminin zıt işaretlisidir.*

İspat. Taksi düzleminde P ve Q noktalarını $P = (0, 0), Q = (x_0, y_0)$ almak genelliği bozmayacağından $S(P, Q; \alpha, \beta, \gamma)$ kümesi

$$\alpha(|x| + |y|) + \beta(|x - x_0| + |y - y_0|) = \gamma$$

dir. i tek sayı olduğu için incelememiz gereken R_1, R_3, R_5, R_7, R_9 bölgeleridir.
$S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma) \cap R_1$ kümesi

$$x(-\alpha-\beta)+y(\alpha+\beta)+\beta(x_0-y_0)=\gamma$$

eşitliğine sahiptir. Buradan,

$$y-x=\frac{\gamma-\beta(x_0-y_0)}{\alpha+\beta} \tag{4.1}$$

dır. $\alpha \neq -\beta$ iken (4.1) denklemi, $+1$ eğimli bir doğrunun bölgedeki parçasıdır. Aksi durumda çözüm ya boş küme yada R_2 bölgesidir.
$S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma) \cap R_9$ incelendiğinde de aynı şekilde; $\alpha \neq -\beta$ iken çözüm $+1$ eğimli bir doğrunun bölgedeki parçasıdır. Aksi durumda küme ya boş küme yada R_9 bölgesidir.
$S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma) \cap R_3$ kümesi

$$x(\alpha+\beta)+y(\alpha+\beta)+\beta(-x_0-y_0)=\gamma$$

eşitliğine sahiptir. Buradan,

$$y+x=\frac{\gamma+\beta(x_0+y_0)}{\alpha+\beta}$$

olup bu denklem $\alpha \neq -\beta$ iken çözüm -1 eğimli bir doğrunun bölgedeki parçasıdır. Diğer durumda küme boş küme veya R_3 bölgesidir.
$S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma) \cap R_7$ içinde aynı durum söz konusudur.
$S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma) \cap R_5$ için

$$y+x=\frac{\gamma-\beta(x_0+y_0)}{\alpha-\beta}$$

olup $\alpha \neq \beta$ iken çözüm eğimi -1 olan bir doğrunun bölgedeki parçasıdır. $\alpha \neq \beta$ değil iken çözüm boş küme veya R_5 bölgesidir.

□

Yardımcı Teorem 4.2.8. *Taksi düzleminde P ve Q farklı iki nokta, $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ ve $i \in \{2,4,6,8\}$ olsun. $S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma) \cap R_i$ kümesi eğimi $m \in [-\infty,\infty]$ olan bir doğru parçası olsun. $S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma) \cap R_{10-i}$ kümesi boş değilse, bu küme eğimi $-m$ olan bir doğru parçasıdır. Ayrıca j çift ve $j \neq i$ yada $j \neq 10-i$ ve $S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma) \cap R_j \neq \emptyset$ ise, o zaman bu küme $\mp\frac{1}{m}$ eğimli bir doğru parçası olup, eğimin işareti P ve Q noktalarının konumlarına ve bulundukları bölgeye bağlıdır. Bunlar birlikte ele alındığında, çift sayılı bölgelerdeki doğru parçalarının eğimleri m yada $\frac{1}{m}$ mutlak değerine sahiptir.*

İspat. Taksi düzlemindeki $P=(0,0), Q=(x_0,y_0)$ ve $i \in \{2,4,6,8\}$ olmak üzere
$i=2$ için $S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma) \cap R_2$ kümesi

$$x(\alpha-\beta)+y(\alpha+\beta)+\beta(x_0-y_0)=\gamma$$

eşitliğine sahiptir. Bu denklem, eğimi $m = -\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$ olan doğrunun parçasıdır.
$j \neq i = 2$ ise $j = (10-i) = 8$ ve $S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma) \cap R_8 \neq \emptyset$ olsun. $S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma) \cap R_8$ kümesi

$$x(\alpha-\beta) + y(-\alpha-\beta) + \beta(x_0 - y_0) = \gamma$$

eşitliğine sahiptir. Bu küme boş kümeden farklı ise bu denklem, $\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} = -m$ eğimli bir doğrudur.
$i \neq j$ veya $j \neq (10-i)$ koşulunu sağlayan çift bir j sayısı seçelim. $j \in \{2,4,6\}$ yada $j \in \{4,6,8\}$ olabilir. Varsayalım ki $j = 4$ olsun. $S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma) \cap R_4$ kümesi

$$x(-\alpha-\beta) + y(\alpha-\beta) + \beta(x_0 + y_0) = \gamma$$

eşitliğini sağlar. $S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma) \cap R_4 \neq \emptyset$ ise $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ ve $\alpha \neq \beta$ dır. Bu denklem, bölgede $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = -\dfrac{1}{m}$ eğimli bir doğru parçasıdır. $j = 6$ olursa, $S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma) \cap R_6$

$$x(\alpha+\beta) + y(\alpha-\beta) + \beta(-x_0 + y_0) = \gamma$$

eşitliğine sahiptir. $S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma) \cap R_6 \neq \emptyset$ ise bu denklem, bölgede $-\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \dfrac{1}{m}$ eğimli bir doğru parçasını belirtir. $j = 8$ alındığında, $S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma) \cap R_8$ kümesi

$$x(\alpha-\beta) + y(-\alpha-\beta) + \beta(x_0 + y_0) = \gamma$$

eşitliğine sahiptir. $S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma) \cap R_8 \neq \emptyset$ ise bu denklem, bölgede $\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} = -m$ eğimli bir doğru parçası belirtir. $j \in 2,4,6$ olması durumunda da benzer sonuçlar elde edilir. P ve Q noktaları aynı koordinat doğrusu üzerinde $S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma) \cap R_i$ kümesi bir ışın olabilir. $P = (0,0), Q = (0,y_0)$ noktaları için $S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma) \cap R_2$

$$x(\alpha+\beta) + y(\alpha+\beta) + \beta(-y_0) = \gamma$$

olup, bu denklem bölgede -1 eğimli bir doğru parçası belirtir. $S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma) \cap R_4$ kümesi

$$x(\alpha+\beta) + y(\alpha-\beta) + \beta(y_0) = \gamma$$

denklemini sağlar, bu bölgede eğimi $-\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$ olan doğru parçası belirtir. $\alpha + \beta = 0$ ise $y = \dfrac{\gamma - \beta y_0}{2\alpha}$ ışını elde edilir. $S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma) \cap R_6$ kümesi

$$x(\alpha+\beta) - y(\alpha+\beta) + \beta(y_0) = \gamma$$

$+1$ eğimli eğimli bir doğru parçası elde edilir.
sonuç olarak çift sayılı bölgelerdeki doğru parçalarının eğimleri $|m|$ veya $|\dfrac{1}{m}|$ değerine sahiptir.

□

Yardımcı Teorem 4.2.9. *Taksi düzleminde P ve Q farklı iki nokta, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ olsun. R_i ve R_j bitişik iki komşu bölge ve $R_i \cap R_j = E$ olsun. Varsayalım ki $S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma) \cap R_i$ kümesi, E ile P, Q, $c^1(P,Q)$ ve $c^2(P,Q)$ noktalarından farklı bir B noktasında kesişen bir doğru parçası olsun. O zaman $S \cap R_j$, E ile B noktasında kesişen bir doğru parçasıdır.*

İspat. $S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma) \cap R_i$ bir doğru parçası olduğu kabul edilsin. $b \in E \subset R_j$ olduğundan $S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma) \cap R_j \neq \emptyset$ dir. Fakat $S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma) \cap R_j \neq R_j$ dir. $S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma) \cap R_j = R_j$ olursa $S \cap E = E$ olup, $S \cap R_j$ kümesi ile birden fazla noktada kesişir. Bu çelişki olduğu anlamına gelir. Geriye kalan tek olasılık $S \cap R_j$ kümesinin bir doğru parçası olmasıdır. E kümesini b noktasından farklı başka bir noktada kesemez. Eğer $S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma) \cap R_i$ ve $S(P,Q;\alpha,\beta,\gamma) \cap R_j$ kümeleri E kümesini farklı noktalarda kesseydiler $S \cap E$ de birden çok nokta olurdu, bu çelişkidir. Bu $S \cap E$ kümesinin birden fazla noktadan oluştuğu anlamına gelir. □

Yardımcı Teorem 4.2.10. *Taksi düzleminde P ve Q iki nokta olsun. Taksi düzlemindeki tüm X noktaları için $X \in A(P,Q;k)$ olacak şekilde bir tek $k \in [0,\infty]$ mevcuttur.*

İspat. Taksi düzleminde P ve Q noktaları verilsin. $\forall X \in \mathbb{R}^2$ için $\dfrac{d(X,P)}{d(X,Q)} = k$ olacak şekilde birtek $k \in [0,\infty]$ vardır. Hatta özel olarak $X = P$ iken $k = 0$, $X = Q$ iken $k = \infty$ ve $P = Q$ olduğu durumda $k = 1$ sonucuna varırız. □

Yardımcı Teorem 4.2.11. *Taksi düzleminde P ve Q iki nokta ve $k \in \mathbb{R}^+$ olsun. $A(P,Q;k) \cap R_5$ kümesi daima bir doğru parçasıdır.*

İspat. $P = (0,0)$, $Q = (x_0, y_0)$ ve $X = (x,y)$ olmak üzere taksi apollon kümesi

$$A(P,Q;k) = \left\{ X \in \mathbb{R}^2 | \frac{d(X,P)}{d(X,Q)} = k \right\}$$

kümesi

$$|x| + |y| = k|x - x_0| + k|y - y_0|$$

eşitliğine sahiptir. $\forall X = (x,y) \in R_5$ için $0 \leq x \leq x_0$, $0 \leq y \leq y_0$ olmak üzere

$$x + y = \frac{k}{k+1}(x_0 + y_0)$$

elde edilir. Burada $\dfrac{k}{k+1}(x_0 + y_0)$ sabiti seçilen P, Q noktaları ve k değerine göre değişir. Sonuç olarak $A(P,Q;k) \cap R_5$ kümesi daima bir doğru parçası elde edilir. □

Yardımcı Teorem 4.2.12. *Taksi düzleminde P ve Q iki nokta ve $k \in \mathbb{R}^+$ olsun. O zaman $A(P,Q;\dfrac{1}{k}) = A(Q,P;k)$ dir.*

İspat. Taksi düzleminde P ve Q noktaları için

$$A(P,Q;\frac{1}{k}) = \{X \in \mathbb{R}^2 | \frac{d(X,P)}{d(X,Q)} = \frac{1}{k}\} = \{X \in \mathbb{R}^2 | \frac{d(X,Q)}{d(X,P)} = k\} = A(Q,P;k)$$

elde edilir. Özel olarak $k \to \infty$ iken $\frac{1}{k} \to 0$ ve $k \to 0$ iken $\frac{1}{k} \to \infty$ dır. □

Yardımcı Teorem 4.2.13. *Taksi düzleminde P ve Q iki nokta ve $k \in [0,\infty]$ olsun. φ taksi düzlemin bir izometrisi ise o zaman,*

$$\varphi(A(P,Q;k)) = A(\varphi(P),\varphi(Q);k)$$

ve

$$\varphi(B(P,Q;k)) = B(\varphi(P),\varphi(Q);k)$$

dir.

İspat. $Y \in A(\varphi(P),\varphi(Q);k)$ olsun. Bu durumda

$$\frac{d(Y,\varphi(P))}{d(Y,\varphi(Q))} = k$$

eşitliği geçerlidir. φ izometri olduğundan birebir-örtendir. Bu yüzden $\varphi(X) = Y$ olacak şekilde taksi düzleminde bir tek X noktası vardır. Buna göre

$$\frac{d(\varphi(X),\varphi(P))}{d(\varphi(X),\varphi(Q)} = k$$

olup, φ izometri olduğundan

$$\frac{d(X,P)}{d(X,Q)} = k$$

dir. Böylece $X \in A(P,Q;k)$ dir. O halde $Y = \varphi(X) \in \varphi(A(P,Q;k))$ dır.

$$A(\varphi(P),\varphi(Q);k) \subset \varphi(A(P,Q;k))$$

elde edilir. Benzer şekilde her $X \in A(P,Q;k)$ için

$$\frac{d(X,P)}{d(X,Q)} = k$$

dir. φ izometri olduğundan

$$\frac{d(X,P)}{d(X,Q)} = \frac{d(\varphi(X),\varphi(P))}{d(\varphi(X),\varphi(Q)} = k$$

dir. φ birebir-örten olduğundan $Y = \varphi(X)$ olacak şekilde bir tek Y noktası vardır. Buna göre

$$\frac{d(Y,\varphi(P))}{d(Y,\varphi(Q))} = k$$

$Y \in A(\varphi(P), \varphi(Q); k)$ ve $\varphi(A(P, Q; k)) = A(\varphi(P), \varphi(Q); k)$ dir.

$$\varphi(B(P, Q; k)) = \varphi(\bigcup_{\kappa \in [0,k]} A(P, Q; \kappa))$$

$$= \bigcup \varphi(A(P, Q; \kappa))$$

$$= \bigcup (A(\varphi(P), \varphi(Q); \kappa))$$

$$= B(\varphi(P), \varphi(Q); \kappa)$$

O halde $B(\varphi(P), \varphi(Q); k) \subset \varphi(B(P, Q; k))$ elde edilir. Diğer yönde

$$B(\varphi(P), \varphi(Q); k) = \bigcup (A(\varphi(P), \varphi(Q); \kappa))$$

$$= \bigcup \varphi(A(P, Q; \kappa))$$

$$= \varphi(\bigcup_{\kappa \in [0,k]} A(P, Q; \kappa))$$

$$= \varphi(B(P, Q; k))$$

$$\varphi(B(P, Q; k)) \subset B(\varphi(P), \varphi(Q); k)$$

elde edilir. Buradan $\varphi(B(P, Q; k)) = B(\varphi(P), \varphi(Q); k)$ dır. □

Yardımcı Teorem 4.2.14. *Taksi düzleminde P ve Q iki nokta ve φ izometrisi $m(P, Q)$ noktasında π-açılı dönme dönüşümü olsun. O zaman*

$$\varphi(A(P, Q; k)) = A(P, Q; \frac{1}{k})$$

dir.

İspat. P ve Q noktalarını birleştiren doğru parçasının orta noktası $m(P, Q)$ olsun, $m(P, Q)$ noktasında π-açılı dönme olduğundan $\varphi(P) = Q$ ve $\varphi(Q) = P$ dir. Buna göre

$$\varphi(A(P, Q; k)) = A(\varphi(P), \varphi(Q); k)$$

$$= A(Q, P; k)$$

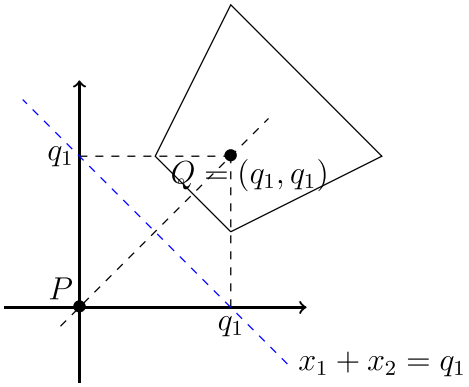
$$= A(P, Q; \frac{1}{k})$$

elde edilir. □

Aşağıdaki yardımcı teoremlerde taksi Apollon kümelerinin sınırları ile ilgili elde edilen sonuçlar verilmektedir.

Yardımcı Teorem 4.2.15. *Taksi düzleminde P ve Q aynı kılavuz doğrusu üzerinde iki nokta ve $c^1(P,Q)$ ve $c^2(P,Q)$, P ve Q noktalarının koordinat tamamlayıcıları olsun. O zaman $X \in P_{c^1,c^2}(Q)$ olması için gerek ve yeter koşul $\dfrac{d(X,P)}{d(X,Q)} > 1$ olmasıdır.*

İspat. Taksi düzlemde P ve Q noktaları aynı kılavuz doğrusu üzerinde iki nokta olsun. Genelliği bozmaksızın $P = (0,0)$ ve $Q = (q_1, q_1)$alınabilir.



Şekil 4.18

$\dfrac{d(X,P)}{d(X,Q)} > 1$ olsun. Bu durumda X noktaları 4.21 de pembe taralı bölgededir. Yani $x > 0, y > 0, x + y > q_1$ dir.

$$P = P_{c^1,c^2}(Q) = \left\{X \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y > 0, x + y > q_1\right\}$$

olduğunda $X \in P_{c^1,c^2}(Q)$ olur.

Diğer yönden $X \in P$ olsun. O zaman $x > 0, y > 0, x+y > q_1$ eşitsizlikleri geçerlidir. X noktası R_2, R_3, R_5 yada R_6 bölgesinde bulunur. $\dfrac{d(X,P)}{d(X,Q)} > 1$ değeri bu bölgelerin her birinde hemen kontrol edilebilir.
Örneğin $X = (x,y) \in R_5$ ise bu durumda $0 < x \leq q_1$ ve $0 < y \leq q_1$ dir. Böylece $x+y > q_1$ olduğu için

$$\frac{d(X,P)}{d(X,Q)} = \frac{x+y}{-x+q_1-y+q_1} = \frac{x+y}{2q_1-(x+y)}$$

$x + y > q_1$ olduğundan

$$> \frac{q_1}{2q_1 - q_1} = 1$$

elde edilir. Diğer üç bölge için benzer işlemler yapılır.
$X = (x, y) \in R_2$ ise $0 < x \leq q_1$ ve $y > q_1$ ve $x + y > q_1$ olmak üzere,

$$\frac{d(X,P)}{d(X,Q)} = \frac{x+y}{-x+q_1+y-q_1} = \frac{x+y}{-x+y} > 1$$

elde edilir.
$X(x, y) \in R_3$ ise $x > q_1$ ve $y > q_1$ ve $x + y > q_1$ olup, $x + y > 2q_1$ olduğundan

$$\frac{d(X,P)}{d(X,Q)} = \frac{x+y}{x-q_1+y-q_1} = \frac{x+y}{x+y-2q_1} > 1$$

elde edilir.
$X = (x, y) \in R_6$ ise $x > q_1$ ve $0 < y < q_1$ ve $x + y > q_1$ olup

$$\frac{d(X,P)}{d(X,Q)} = \frac{x+y}{x-q_1-y+q_1} = \frac{x+y}{x-y} > 1$$

elde edilir. Böylece $\forall X \in P$ için $\dfrac{d(X,P)}{d(X,Q)} > 1$ dir.

□

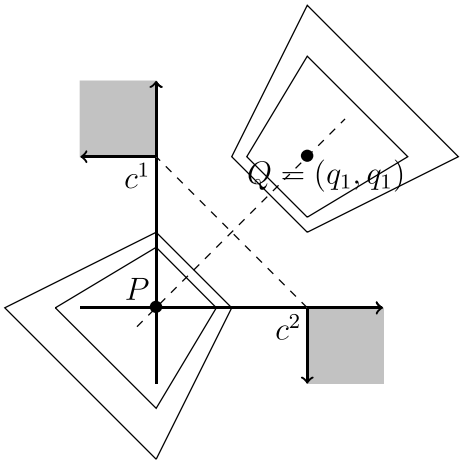
Yardımcı Teorem 4.2.16. *Taksi düzleminde P ve Q aynı kılavuz doğrusu üzerinde iki nokta, c^1 ve c^2; P ve Q noktalarının koordinat tamamlayıcıları olsun. O zaman $A(P, Q; k)$ ve $B(P, Q; k)$ kümelerinin, $P_{c^1,c^2}(Q)$ kümesinin altkümeleri olmaları için gerek ve yeter koşul $k > 1$ olmasıdır.*

Yardımcı Teorem 4.2.17. *Taksi düzleminde P ve Q aynı kılavuz doğrusu üzerinde iki nokta ve c^1 ve c^2; P ve Q noktalarının koordinat tamamlayıcıları olsun. O zaman $\bigcup_{k\in[0,1]} A(P, Q; k)$ kümesi, $P_{c^1,c^2}(Q)$ kümesinin tamamlayıcısıdır öyleki bu küme Q noktasını içermeyen üç P bölgeyi içerir.*

İspat. $k > 1$ iken $A(P, Q; k)$, Q noktasını içerir. $0 < k < 1$ iken $A(P, Q; k)$, P noktasını içerir. Dolayısıyla $\bigcup_{k\in[0,1]} A(P, Q; k)$, $P_{c^1,c^2}(Q)$ nun tamamlayıcısıdır ve dolayısıyla Q noktasını içermeyen üç P-bölgesini içerir. □

Yardımcı Teorem 4.2.18. *Taksi düzleminde P ve Q, aynı kılavuz doğrusu üzerinde iki nokta ve c^1 ve c^2; P ve Q noktalarının koordinat tamamlayıcıları olsun. O zaman $\bigcup_{k\in[1,\infty)} A(P, Q; k)$ kümesi $P_{c^1,c^2}(P)$ kümesinin tamamlayıcısıdır ve P noktasını içermeyen üç Q bölgeyi içerir.*

İspat. P ve Q, aynı kılavuz doğrusu üzerinde olsun. Genelliği bozmaksızın $P = (0, 0)$ ve $Q = (q_1, q_1)$ alabiliriz. c^1 ve c^2, P ve Q noktalarının koordinat tamamlayıcıları olduğundan



Şekil 4.19 $\bigcup_{k\in[0,1]} A(P,Q;k)$ kümesi

bunların koordinatları sırasıyla $c^1 = (0, q_1)$ ve $c^2 = (q_1, 0)$ dır. O zaman $\bigcup_{k\in[1,\infty]} A(P,Q;k)$ kümesi;

$k = 1$ iken

$$A(P,Q;1) = \{X | d(X,P) = d(X,Q)\}$$

olup, bu küme P ve Q noktalarının taksi orta kümesidir.

$k > 1$ iken

$$A(P,Q;k) = \{X | \frac{d(X,P)}{d(X,Q)} = k > 1\},$$

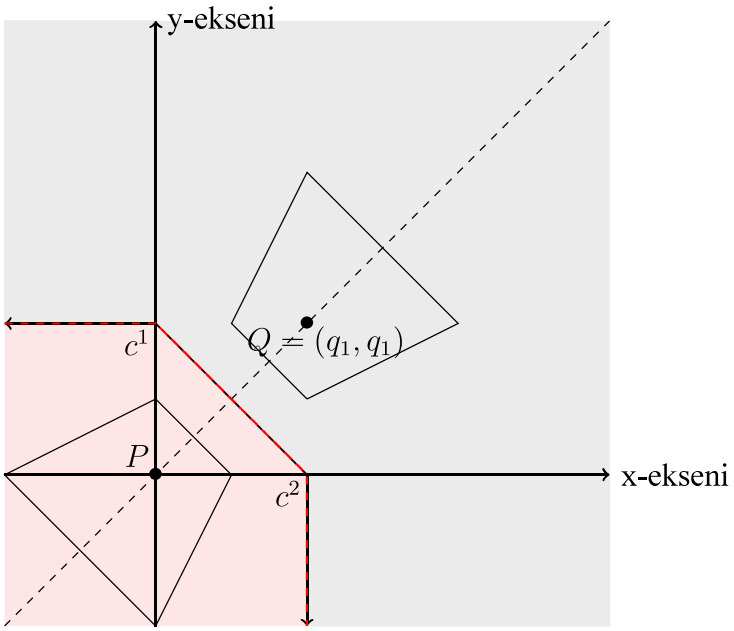
$k = \infty$ iken

$$A(P,Q;\infty) = \{X | \frac{d(X,P)}{d(X,Q)} = \infty\} = \{Q\}$$

dir. $\bigcup_{k\in[1,\infty]} A(P,Q;k)$ kümesi P noktasını içermeyen üç Q bölgeyi içerir. Bu küme $P_{c^1,c^2}(P)$ kümesinin tamamlayıcısıdır. □

4.20 'de pembe taralı bölge $P = P_{c^1,c^2}(P)$ bölgesidir. Gri taralı alan ise P kümesinin tamamlayıcısıdır.

4.21'de pembe taralı alan $P = P_{c^1,c^2}(Q)$ bölgesidir. Gri taralı alan ise P kümesinin tamamlayıcısıdır.



Şekil 4.20

Yardımcı Teorem 4.2.19. *Taksi düzleminde P ve Q iki nokta olsun. g^+ ve g^- bu iki noktanın kılavuz tamamlayıcıları ise*

$$\left[\bigcup_{k\in[0,1]} A(P,g^+;k)\right] \cup \left[\bigcup_{k\in[0,1]} A(P,g^-;k)\right] = {\mathbb{R}_{\mathbb{T}}}^2$$

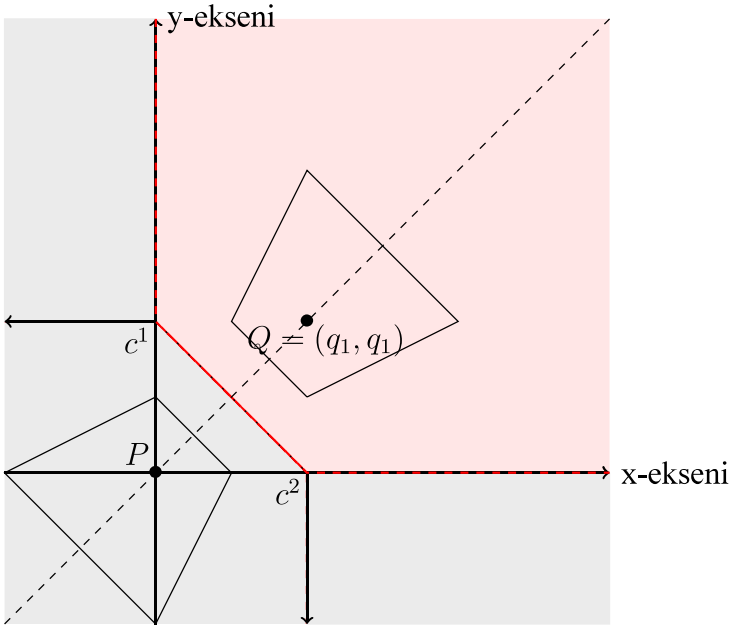
dir.

İspat. Taksi düzleminde P ve Q iki nokta olsun. Bu iki noktayı, $P = (0,0)$ ve $Q = (q_1, q_2)$ alalım. g^+ ve g^- bu iki noktanın kılavuz tamamlayıcıları olsun. Bu iki noktanın koordinatları da sırasıyla g^+ ve g^- ise $\bigcup_{k\in[0,1]} A(P,g^+;k)$ kümesi için , g^+ noktasını içermeyen tüm P bölgelerini içerir ve $\bigcup_{k\in[0,1]} A(P,g^-;k)$, g^- noktasını içermeyen tüm P bölgelerini içerir. g^+ ve g^- farklı P bölgelerinde bulunduğundan, bunların birleşim kümesi ${\mathbb{R}_{\mathbb{T}}}^2$ nin tamamı olmalıdır. □

Teorem 4.2.20. *Taksi düzleminde P ve Q, aynı kılavuz doğrusu üzerinde ise $A(P,Q;1)$ taksi Apollon kümesi, $bb(c^1(P,Q), c^2(P,Q))$ kümesidir.*

İspat. P ve Q, aynı kılavuz doğru üzerinde iki nokta ise

$$A(P,Q;1) = \bigcup_{k\in[0,1]} A(P,Q;k) \cap \bigcup_{k\in[1,\infty]} A(P,Q;k)$$



Şekil 4.21 $P_{c^1,c^2}(Q)$

$$A(P,Q;1) = [P_{c^1,c^2}(Q)]^c \cap [P_{c^1,c^2}(P)]^c$$
$$= [P_{c^1,c^2}(Q) \cup P_{c^1,c^2}(P)]^c = bb(c^1, c^2)$$

elde edilir. □

Teorem 4.2.21. *Taksi düzleminde P ve Q aynı kılavuz doğrusu üzerinde olmayan noktalar ise $m(P,Q)$ orta noktasından geçen ve PQ doğru parçasının eğiminin işareti ile zıt işaretli olan gl kılavuz doğrusu, R_5 bölgesinin sınırlarını A ve B noktalarında kessin. $A(P,Q;1)$ taksi Apollon kümesi, P, Q nun taksi orta kümesi, A ve B noktalarından geçen $lb(A,B)$ lightning bolttur.*

Teorem 4.2.22. *Taksi düzleminde P, Q iki nokta, g^+ ve g^-, P ve Q noktalarının kılavuz tamamlayıcıları, $k \in [0,1) \cup (1,\infty)$ olsun. Bu durumda*

$$B(P,Q;k) = B(g^+,Q;k) \cup B(g^-,Q;k)$$

dır.

İspat. Genelliği bozmaksızın $k > 1$ olduğunu varsayalım. Öncelikle $B(g^+,Q;k) \cup B(g^-,Q;k) \subset B(P,Q;k)$ olduğunu göstermeliyiz. $\forall X \in B(g^+,Q;k)$ olsun. X noktası, Q noktasını içeren g^+ bölgesindedir. P ve Q noktaları aynı kılavuz doğrusu üzerinde olmadığından farklı iki g^+ bölgededir. Dolayısıyla X noktası P noktasının bulunduğu g^+ bölgesinde olamaz. Bu yüzden g^+ ve Q noktaları aynı kılavuz

doğrusu üzerinde ve c^1 ve c^2 koordinat tamamlayıcılarına sahip olduğundan $\bigcup_{k\in[1,\infty)} A(g^+,Q;k)$ kümesi $P_{c^1,c^2}(g^+)$ nın tamamlayıcısıdır ve bu küme g^+ noktasını içermeyen üç Q bölgesi içerir. P ve g^+ noktaları aynı kılavuz doğrusu üzerindedir. Üstelik c^1 ve c^2 noktaları P ve g^+ noktalarının koordinat tamamlayıcılarıdır. $\bigcup_{k\in[1,\infty)} A(P,g^+;k)$ kümesi $P_{c^1,c^2}(P)$ kümesinin tamamlayıcısıdır ve bu küme P noktasını içermeyen üç g^+ bölgesi içerir.

$$d(X,P) \geq \kappa d(X,g^+) \geq d(X,g^+)$$

$X \in B(g^+,Q;k)$ olduğundan $\dfrac{d(X,g^+)}{d(X,Q)} \geq k$ olup, buradan $d(X,g^+) \geq kd(X,Q)$ dır. Böylece

$d(X,P) \geq \kappa d(X,g^+) \geq d(X,q^+) \geq kd(X,Q)$ eşitsizliği elde edilir. Buradan $d(X,P) \geq kd(X,Q)$ olup $X \in B(P,Q;k)$ dır. $X \in B(g^-,Q;k)$ alındığında benzer işlemler sonucu $X \in B(P,Q;k)$ elde edilir. Daha sonra $X \notin B(g^+,Q;k)$ ve $X \notin B(g^-,Q;k)$ ise $d(X,g^+) < kd(X,Q)$ ve $d(X,g^-) < kd(X,Q)$ olur.

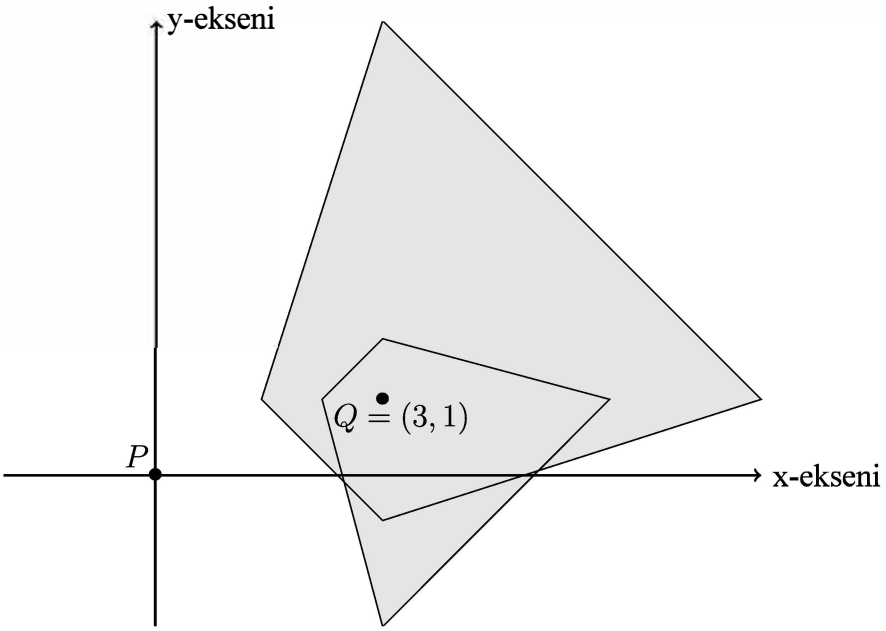
$$\bigcup_{k\in[0,1]} A(P,g^+;k) \cup \bigcup_{k\in[0,1]} A(P,g^-;k) = \mathbb{R}^2$$

$X \in \mathbb{R}^2$ noktası için $X \in \bigcup_{k\in[0,1]} A(P,g^+;k)$ veya $X \in \bigcup_{k\in[0,1]} A(P,g^-;k)$ dir. Öyle bir $\kappa \in [0,1]$ vardır ki $X \in A(P,g^+;\kappa)$ veya $X \in A(P,g^-;\kappa)$dır.

$$X \in A(P,g^+;\kappa) \text{ise} d(X,P) \leq \kappa d(X,g^+) \leq d(X,g^+)$$

$$\frac{d(X,P)}{d(X,Q)} = \frac{d(X,P)d(X,g^+)}{d(X,g^+)d(X,Q)} < k$$

olup, $X \notin B(P,Q;k)$dır. Benzer şekilde $X \in A(P,g^-;\kappa)$ iken $X \notin B(P,Q;k)$ olduğu elde edilir. □



Şekil 4.22 $B(P,Q;k) = B(g^+,Q;k) \cup B(g^-,Q;k)$

4.3. Taksi Apollon Küme Örnekleri

Bu bölümde, taksi düzleminde P ve Q noktalarının çeşitli konumlarına ve $k \in \mathbb{R}^+$ sayısına göre taksi apollon kümelerine örnekler verilmektedir.

1) **Noktaların aynı koordinat doğrusu yada aynı kılavuz doğrusu üzerinde olmama durumu**

Bu kısım, $P = (0,0)$ ve $Q = (3,1)$ noktaları alınarak $k \geq 1$ için ve $0 < k < 1$ değerleri için taksi Apollon küme örnekleri incelenmektedir. Bunun için $k = 1,2,3,4$ ve $k = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ değerleri alınmaktadır. Taksi Apollon kümesi

$$A(p,q;k) = \left\{ x \in \mathbb{R}_T^2 | \frac{d_T(X,P)}{d_T(X,Q)} = k \right\}$$

dir. Bunun için önce $k \geq 1$ için ve daha sonra $0 < k < 1$ değerlerine göre inceleme yapılacaktır.

a) $k = 1$ iken $A(p,q;k)$ kümesi

$$d_T(X,P) = d_T(X,Q)$$

eşitliğine sahiptir. Bu eşitlikten

$$|x| + |y| = |x-3| + |y-1| \tag{4.2}$$

elde edilir. Burada aşağıdaki durumlara göre çözümleri inceleyelim.

$x < 0$ iken (4.2) eşitliği çözüme sahip değildir.

$0 \leq x \leq 3$ ve $y < 0$ iken

$$x = 2$$

elde edilir. Burada çözüm, $x = 2$ doğrusunun $(2, 0)$ başlangıç noktasına sahip $(2, -1)$ noktasından geçen ışındır.

$0 \leq x \leq 3$ ve $0 \leq y \leq 1$ iken

$$x + y = 2$$

olup, bu bölgede $(2, 0)$ ve $(1, 1)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

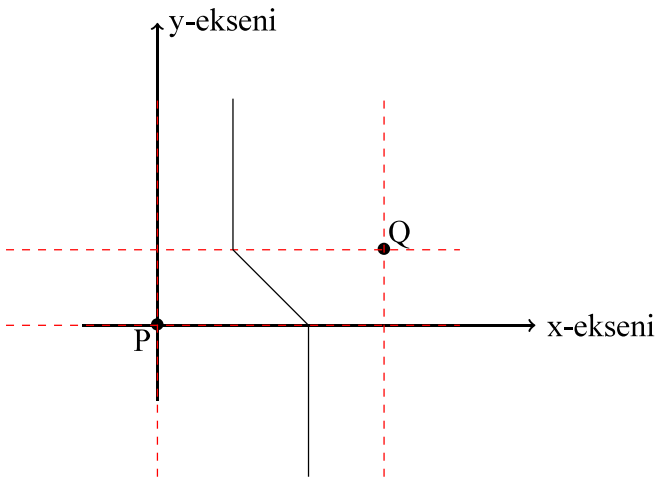
$0 \leq x \leq 3$ ve $y > 1$ ise

$$x = 1$$

elde edilir. Burada çözüm, $x = 1$ doğrusunun $(1, 1)$ başlangıç noktasına sahip $(1, 2)$ noktasından geçen ışındır.

$x > 3$ iken (4.2) eşitliği çözüme sahip değildir.

Sonuç olarak $k = 1$ durumunda şekil 4.23 elde edilir.



Şekil 4.23 $P = (0, 0)$ ve $Q = (3, 1)$ ve $k = 1$

b) $k = 2$ iken $A(P, Q; k)$ kümesi

$$d_T(X, P) = 2d_T(X, Q)$$

eşitliğine sahiptir. Bu eşitlikten

$$|x| + |y| = 2|x - 3| + 2|y - 1| \tag{4.3}$$

denklemi elde edilir. (4.3) denklemi incelenerek, aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$x < 0$ durumunda (4.3) eşitliği çözüme sahip değildir.

$0 \leq x \leq 3$ ve $y < 0$ iken

$$y = 8 - 3x$$

elde edilir, bu $(\frac{8}{3}, 0)$ ve $(3, -1)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

$0 \leq x \leq 3$ ve $0 \leq y \leq 1$ iken

$$y = \frac{8 - 3x}{3}$$

olup, bu $(\frac{8}{3}, 0)$ ve $(\frac{5}{3}, 1)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

$0 \leq x \leq 3$ ve $y > 1$ iken

$$y = 3x - 4$$

olup, bu $(3, 5)$ ve $(\frac{5}{3}, 1)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

$x > 3$ iken (4.3) eşitliğinde üç durum inceleyeceğiz.

$x > 3$ ve $y < 0$ iken

$$y = x - 4$$

olup, bu $(3, -1)$ ve $(4, 0)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

$x > 3$ ve $0 \leq y \leq 1$ iken

$$y = \frac{x - 4}{3}$$

olup, bu $(4, 0)$ ve $(7, 1)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

$x > 3$ ve $y > 1$ iken

$$y = 8 - x$$

olup, bu $(3, 5)$ ve $(7, 1)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

Sonuç olarak $k = 2$ durumunda şekil 4.24 elde edilir.

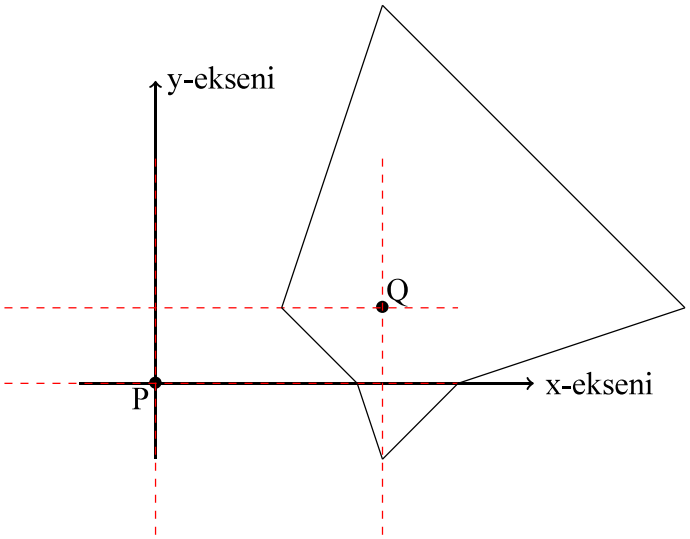
c) $k = 3$ iken $A(P, Q; k)$ kümesi için

$$d_T(X, P) = 3d_T(X, Q)$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlik

$$|x| + |y| = 3|x - 3| + 3|y - 1| \tag{4.4}$$

denklemine sahiptir. (4.4) denklemi incelendiğinde aşağıdaki sonuçlar elde edilir.



Şekil 4.24 $P = (0, 0)$ ve $Q = (3, 1)$ ve $k = 2$

$x < 0$ ve $0 \leq x < 3$, $y < 0$ ve $x \geq 3$, $y < 0$ durumlarında (4.4) denklemi çözüme sahip değildir.

$0 \leq x < 3$ ve $0 \leq y \leq 1$ iken

$$y = 3 - x$$

olup, bu $(3, 0)$ ve $(2, 1)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

$0 \leq x < 3$ ve $y > 1$ iken

$$y = 2x - 3$$

olup, bu $(2, 1)$ ve $(3, 3)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

$x \geq 3$ ve $0 \leq y \leq 1$ ise

$$y = \frac{2x - 6}{4}$$

olup, bu $(3, 0)$ ve $(5, 1)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

$x \geq 3$ ve $y > 1$ ise

$$y = 6 - x$$

olup, bu $(3, 3)$ ve $(5, 1)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

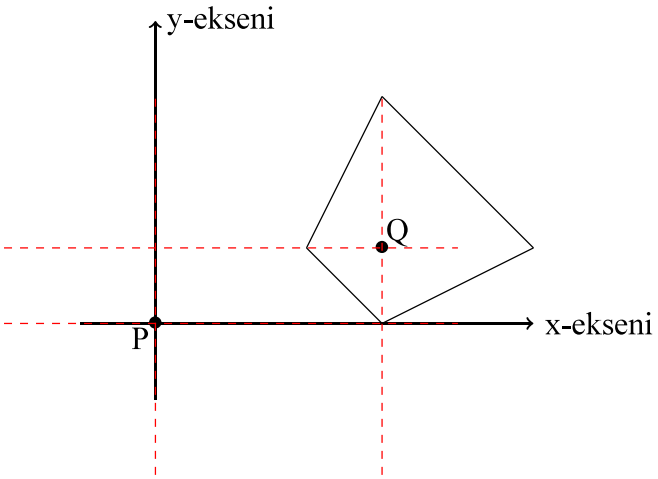
Sonuç olarak $k = 3$ durumunda şekil 4.25 elde edilir.

d)$k = 4$ iken $A(P, Q; k)$ kümesi için

$$d_T(X, P) = 4d_T(X, Q)$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlik

$$|x| + |y| = 4|x - 3| + 4|y - 1| \tag{4.5}$$



Şekil 4.25 $P = (0, 0)$ ve $Q = (3, 1)$ ve $k = 3$

denklemine sahiptir. (4.5) denklemi incelendiğinde aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$x < 0$ durumunda, $0 \leq x \leq 3$ ve $y < 0$ durumunda ve $x > 3$, $y < 0$ durumlarında (4.5) denklemi çözüme sahip değildir.

$0 \leq x \leq 3$ ve $0 \leq y \leq 1$ iken

$$y = \frac{16 - 5x}{5}$$

olup, bu $(3, \frac{1}{5})$ ve $(\frac{11}{5}, 1)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

$0 \leq x \leq 3$ ve $y > 1$ iken

$$y = \frac{5x - 8}{3}$$

olup, bu $(\frac{11}{5}, 1)$ ve $(3, \frac{7}{3})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

$x > 3$ ve $0 \leq y \leq 1$ iken

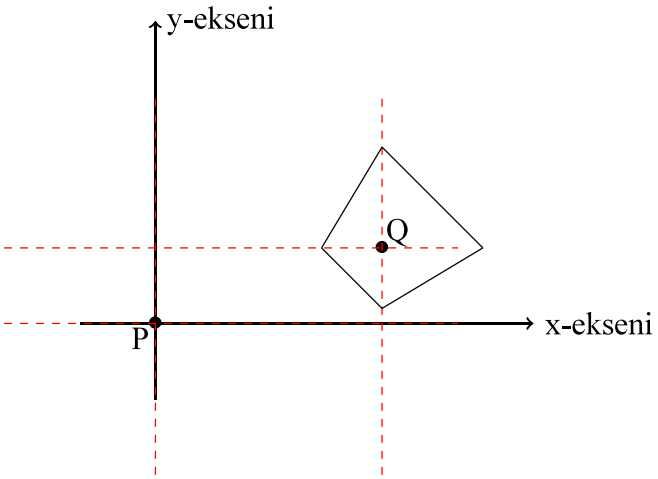
$$y = \frac{3x - 8}{5}$$

olup, bu $(3, \frac{1}{5})$ ve $(\frac{13}{3}, 1)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

$x > 3$ ve $y > 1$ iken

$$y = \frac{16 - 3x}{3}$$

olup, bu $(\frac{13}{3}, 1)$ ve $(3, \frac{7}{3})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
Sonuç olarak $k = 4$ durumunda şekil 4.26 elde edilir.



Şekil 4.26 $P = (0, 0)$ ve $Q = (3, 1)$ ve $k = 4$

Şekillerden görüldüğü gibi k değeri büyüdükçe Apollon kümesi Q noktasına doğru yaklaşır. Şimdi $0 < k < 1$ aralığında k değerlerini büyükten küçüğe doğru alarak Apollon kümelerini inceleyelim.

a) $k = \dfrac{1}{2}$ iken $A(P, Q; k)$ kümesi için

$$2d_T(X, P) = d_T(X, Q)$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlik

$$2|x| + 2|y| = |x - 3| + |y - 1| \tag{4.6}$$

denklemine sahiptir. (4.6) denklemi incelenerek aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$x > 3$ durumlarında (4.6) denklemi çözüme sahip değildir.

$x < 0$ ve $y < 0$ iken

$$y = -x - 4$$

olup, bu $(0, -4)$ ve $(-4, 0)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

$x < 0$ ve $0 \leq y \leq 1$ iken

$$y = \frac{x + 4}{3}$$

olup, bu $(-4, 0)$ ve $(-1, 1)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

$x < 0$ ve $y > 1$ iken

$$y = x + 2$$

olup, bu $(-1, 1)$ ve $(0, 2)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

$0 \leq x \leq 3$ ve $y < 0$ iken

$$y = 3x - 4$$

olup, bu $(0, -4)$ ve $(\frac{4}{3}, 0)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

$0 \leq x \leq 3$ ve $0 \leq y \leq 1$ iken

$$y = \frac{4 - 3x}{3}$$

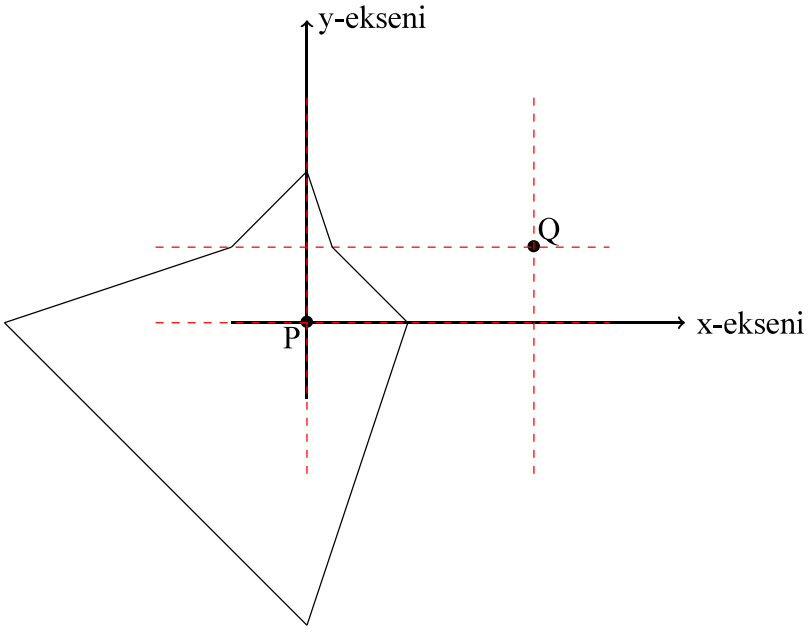
olup, bu $(\frac{4}{3}, 0)$ ve $(\frac{1}{3}, 1)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

$0 \leq x \leq 3$ ve $y > 1$ iken

$$y = 2 - 3x$$

olup, bu $(\frac{1}{3}, 1)$ ve $(0, 2)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

Sonuç olarak $k = \frac{1}{2}$ durumunda şekil 4.27 elde edilir.



Şekil 4.27 $P = (0, 0)$ ve $Q = (3, 1)$ ve $k = \frac{1}{2}$

b) $k = \frac{1}{3}$ iken $A(P, Q; k)$ kümesi için

$$3d_T(X, P) = d_T(X, Q)$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlik

$$3|x| + 3|y| = |x - 3| + |y - 1| \tag{4.7}$$

denklemine sahiptir. (4.7) denklemi incelenerek aşağıdaki sonuçlar elde edilir.
$x > 3$ durumlarında ve $y > 1$ durumlarında (4.7) denklemi çözüme sahip değildir.
$x < 0$ ve $y < 0$ iken

$$y = -x - 2$$

olup, bu $(0, -2)$ ve $(-2, 0)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$x < 0$ ve $0 \leq y \leq 1$ iken

$$y = \frac{x + 2}{2}$$

olup, bu $(-2, 0)$ ve $(0, 1)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$0 \leq x \leq 3$ ve $y < 0$ iken

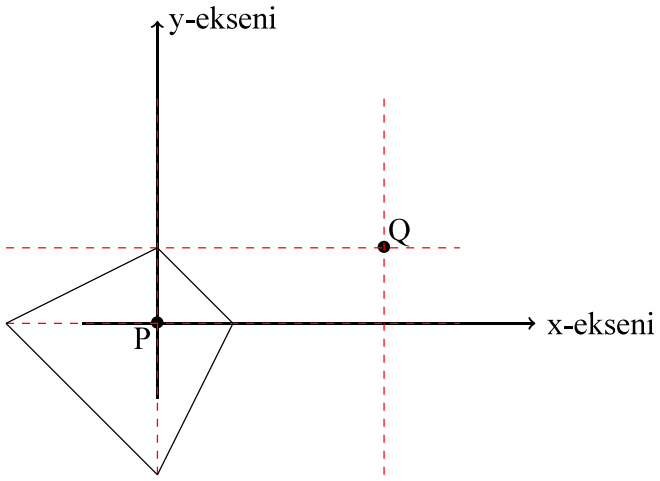
$$y = 2x - 2$$

olup, bu $(0, -2)$ ve $(1, 0)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$0 \leq x \leq 3$ ve $0 \leq y \leq 1$ iken

$$y = 1 - x$$

olup, bu $(1, 0)$ ve $(0, 1)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

Sonuç olarak $k = \frac{1}{3}$ durumunda şekil 4.28 elde edilir.



Şekil 4.28 $P = (0, 0)$ ve $Q = (3, 1)$ ve $k = \frac{1}{3}$

c)$k = \frac{1}{4}$ iken $A(P, Q; k)$ kümesi için

$$4d_T(X, P) = d_T(X, Q)$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlik

$$4|x| + 4|y| = |x - 3| + |y - 1| \tag{4.8}$$

denklemine sahiptir. (4.8) denklemi incelenerek aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$x > 3$ durumlarında ve $y > 1$ durumlarında (4.8) denklemi çözüme sahip değildir.
$x < 0$ ve $y < 0$ iken

$$y = \frac{-3x - 4}{3}$$

olup, bu $(0, \frac{-4}{3})$ ve $(\frac{-4}{3}, 0)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$x < 0$ ve $0 \leq y \leq 1$ iken

$$y = \frac{3x + 4}{5}$$

olup, bu $(\frac{-4}{3}, 0)$ ve $(0, \frac{4}{5})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$0 \leq x \leq 3$ ve $y < 0$ iken

$$y = \frac{5x - 4}{3}$$

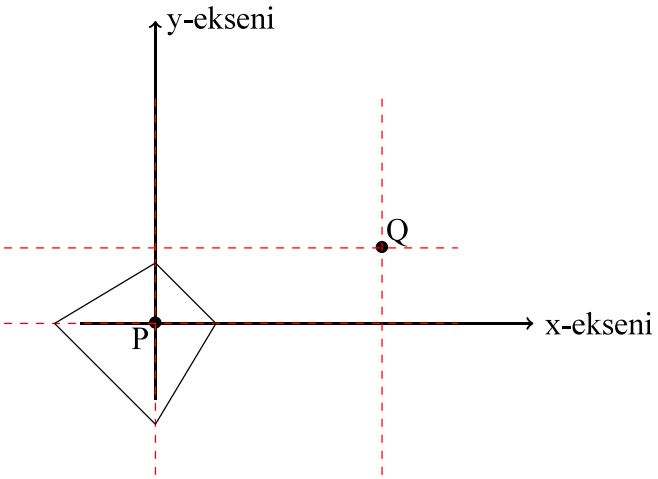
olup, bu $(0, \frac{-4}{3})$ ve $(\frac{4}{5}, 0)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$0 \leq x \leq 3$ ve $0 \leq y \leq 1$ ise

$$y = \frac{4 - 5x}{5}$$

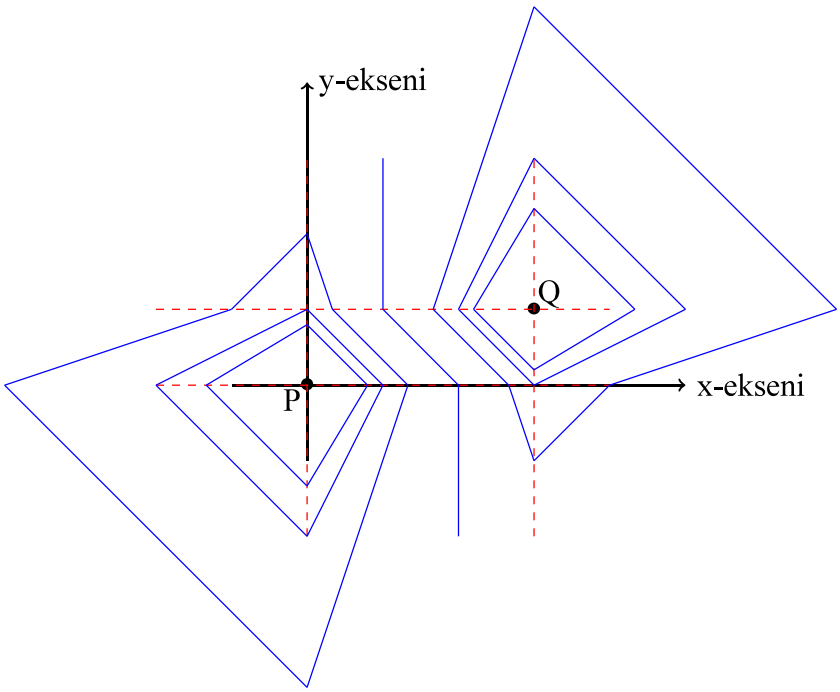
olup, bu $(\frac{4}{5}, 0)$ ve $(0, \frac{4}{5})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

Sonuç olarak $k = \frac{1}{4}$ durumunda şekil 4.29 elde edilir.

Böylece aynı koordinat doğrusu veya kılavuz doğrusu üzerinde olmayan P ve Q noktaları için $k \geq 1$ ve $0 < k < 1$ değerleri için $A(P, Q; k)$ Apollon kümeleri incelenerek şekil 4.30 elde edilmiştir. Görülüyor ki $\{A(P, Q; k)|k > 1ve0 < k < 1\}$ kümesi P ve Q noktalarını merkez alan Apollon kümelerinden oluşur.



Şekil 4.29 $P = (0, 0)$ ve $Q = (3, 1)$ ve $k = \frac{1}{4}$



Şekil 4.30 $P = (0, 0)$ ve $Q = (3, 1)$ için $A(P, Q; k)$ kümeleri

2)Noktaların aynı koordinat doğrusu üzerinde olma durumu

Bu kısım, $P = (0, 0)$ ve $Q = (1, 0)$ noktaları alınarak $k \geq 1$ için ve $0 < k < 1$ değerleri için taksi apollon küme örnekleri incelenmektedir. Bunun için $k = 1, 2, 3, 4$ ve

$k = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ değerleri alınmaktadır. Taksi Apollon kümesi

$$A(P,Q;k) = \{x \in \mathbb{R}^2_T | \frac{d_T(X,P)}{d_T(X,Q)} = k\}$$

dir. Bunun için önce $k \geq 1$ için ve daha sonra $0 < k < 1$ değerlerine göre inceleme yapılacaktır.

a) $k = 1$ iken $A(P,Q;k)$ kümesi

$$d_T(X,P) = d_T(X,Q)$$

eşitliğine sahiptir. Bu eşitlikten

$$|x| + |y| = |x-1| + |y| \tag{4.9}$$

elde edilir. Burada aşağıdaki durumlara göre çözümleri inceleyelim.

$x < 0$ durumlarında ve $x > 1$ durumlarında (4.9) eşitliği çözüme sahip değildir.

$0 \leq x \leq 1$ ve $y < 0$ iken

$$x = \frac{1}{2}$$

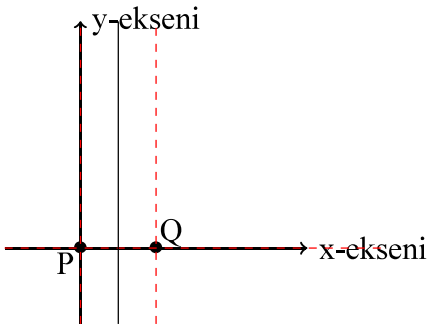
elde edilir. Burada çözüm, $x = \frac{1}{2}$ doğrusunun $(\frac{1}{2}, 0)$ başlangıç noktasına sahip $(\frac{1}{2}, -1)$ noktasından geçen ışındır.

$0 \leq x \leq 1$ ve $y \geq 0$ ise

$$x = \frac{1}{2}$$

elde edilir. Burada çözüm, $x = \frac{1}{2}$ doğrusunun $(\frac{1}{2}, 0)$ başlangıç noktasına sahip $(\frac{1}{2}, 1)$ noktasından geçen ışındır.

Sonuç olarak $k = 1$ durumunda şekil 4.31 elde edilir.



Şekil 4.31 $P = (0,0)$ ve $Q = (1,0)$ için $k = 1$

b) $k = 2$ iken $A(P,Q;k)$ kümesi

$$d_T(X,P) = 2d_T(X,Q)$$

eşitliğine sahiptir. Bu eşitlikten

$$|x| + |y| = 2|x - 1| + 2|y| \tag{4.10}$$

elde edilir. Burada aşağıdaki durumlara göre çözümleri inceleyelim.
$x < 0$ iken (4.10) eşitliği çözüme sahip değildir.
$0 \leq x \leq 1$ ve $y < 0$ iken

$$y = 2 - 3x$$

olup, bu $(1, -1)$ ve $(\frac{2}{3}, 0)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$0 \leq x \leq 1$ ve $y \geq 0$ iken

$$y = 3x - 2$$

olup, bu $(1, 1)$ ve $(\frac{2}{3}, 0)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$x > 1$ ve $y < 0$ iken

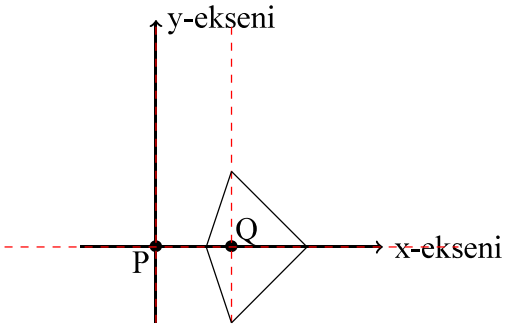
$$y = x - 2$$

olup, bu $(1, -1)$ ve $(2, 0)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$x > 1$ ve $y \geq 0$ iken

$$y = 2 - x$$

olup, bu $(1, 1)$ ve $(2, 0)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

Sonuç olarak $k = 2$ durumunda şekil 4.32 elde edilir.



Şekil 4.32 $P = (0, 0)$ ve $Q = (1, 0)$ için $k = 2$

c) $k = 3$ iken $A(P, Q; k)$ kümesi

$$d_T(X, P) = 3d_T(X, Q)$$

eşitliğine sahiptir. Bu eşitlikten

$$|x| + |y| = 3|x - 1| + 3|y| \tag{4.11}$$

elde edilir. Burada aşağıdaki durumlara göre çözümleri inceleyelim.
$x < 0$ iken (4.11) eşitliği çözüme sahip değildir.
$0 \leq x \leq 1$ ve $y < 0$ iken

$$y = \frac{3 - 4x}{2}$$

olup, bu $(1, \frac{-1}{2})$ ve $(\frac{3}{4}, 0)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$0 \leq x \leq 1$ ve $y \geq 0$ iken

$$y = \frac{4x - 3}{2}$$

olup, bu $(\frac{3}{4}, 0)$ ve $(1, \frac{1}{2})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$x > 1$ ve $y < 0$ iken

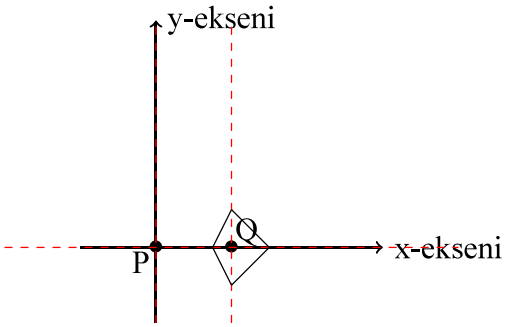
$$y = \frac{2x - 3}{2}$$

olup, bu $(1, \frac{-1}{2})$ ve $(\frac{3}{2}, 0)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$x > 1$ ve $y \geq 0$ iken

$$y = \frac{3 - 2x}{2}$$

olup, bu $(\frac{3}{2}, 0)$ ve $(1, \frac{1}{2})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

Sonuç olarak $k = 3$ durumunda şekil 4.33 elde edilir.



Şekil 4.33 $P = (0, 0)$ ve $Q = (1, 0)$ için $k = 3$

d) $k = 4$ iken $A(P, Q; k)$ kümesi

$$d_T(X, P) = 4d_T(X, Q)$$

eşitliğine sahiptir. Bu eşitlikten

$$|x| + |y| = 4|x - 1| + 4|y| \tag{4.12}$$

elde edilir. Burada aşağıdaki durumlara göre çözümleri inceleyelim.
$x < 0$ iken (4.12) eşitliği çözüme sahip değildir.
$0 \leq x \leq 1$ ve $y < 0$ iken

$$y = \frac{4 - 5x}{3}$$

olup, bu $(1, \frac{-1}{3})$ ve $(\frac{4}{5}, 0)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$0 \leq x \leq 1$ ve $y \geq 0$ iken

$$y = \frac{5x - 4}{3}$$

olup, bu $(\frac{4}{5}, 0)$ ve $(1, \frac{1}{3})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder
$x > 1$ ve $y < 0$ iken

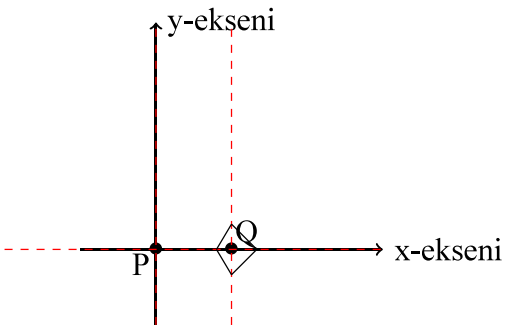
$$y = \frac{3x - 4}{3}$$

olup, bu $(1, \frac{-1}{3})$ ve $(\frac{4}{3}, 0)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$x > 1$ ve $y \geq 0$ ise

$$y = \frac{4 - 3x}{3}$$

olup, bu $(\frac{4}{3}, 0)$ ve $(1, \frac{1}{3})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

Sonuç olarak $k = 4$ durumunda şekil 4.34 elde edilir.



Şekil 4.34 $P = (0, 0)$ ve $Q = (1, 0)$ için $k = 4$

Şekillerden görüldüğü gibi k değeri büyüdükçe Apollon kümesi Q noktasına doğru yaklaşır. Şimdi $0 < k < 1$ aralığında k değerlerini büyükten küçüğe doğru alarak Apollon kümelerini inceleyelim.
a) $k = \frac{1}{2}$ iken $A(P, Q; k)$ kümesi

$$2d_T(X, P) = d_T(X, Q)$$

eşitliğine sahiptir. Bu eşitlikten

$$2|x| + 2|y| = |x - 1| + |y| \tag{4.13}$$

elde edilir. Burada aşağıdaki durumlara göre çözümleri inceleyelim.
$x > 1$ iken (4.13) eşitliği çözüme sahip değildir.
$x < 0$ ve $y < 0$ iken

$$y = -x - 1$$

olup, bu $(0, -1)$ ve $(-1, 0)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$x < 0$ ve $y \geq 0$ ise

$$y = x + 1$$

olup, bu $(-1, 0)$ ve $(0, 1)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$0 \leq x \leq 1$ ve $y < 0$ ise

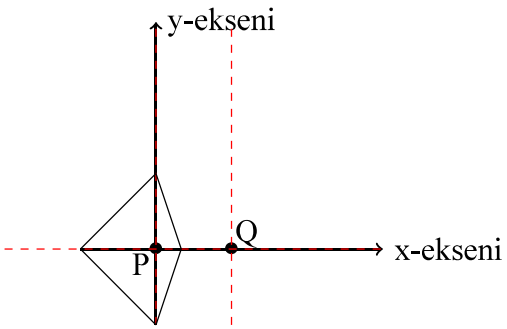
$$y = 3x - 1$$

olup, bu $(0, -1)$ ve $(\frac{1}{3}, 0)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$0 \leq x \leq 1$ ve $y \geq 0$ ise

$$y = 1 - 3x$$

olup, bu $(\frac{1}{3}, 0)$ ve $(0, 1)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

Sonuç olarak $k = \frac{1}{2}$ durumunda 4.35 elde edilir.



Şekil 4.35 $P = (0, 0)$ ve $Q = (1, 0)$ için $k = \frac{1}{2}$

b) $k = \frac{1}{3}$ iken $A(P, Q; k)$ kümesi

$$3d_T(X, P) = d_T(X, Q)$$

eşitliğine sahiptir. Bu eşitlikten

$$3|x| + 3|y| = |x - 1| + |y| \tag{4.14}$$

elde edilir. Burada aşağıdaki durumlara göre çözümleri inceleyelim.
$x > 1$ iken (4.14) eşitliği çözüme sahip değildir.
$x < 0$ ve $y < 0$ ise

$$y = \frac{-2x - 1}{2}$$

olup, bu $(0, \frac{-1}{2})$ ve $(\frac{-1}{2}, 0)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$x < 0$ ve $y \geq 0$ ise

$$y = \frac{2x + 1}{2}$$

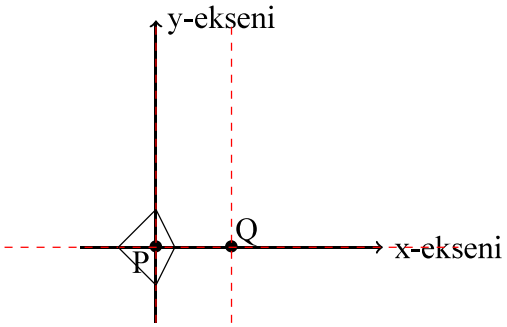
olup, bu $(\frac{-1}{2}, 0)$ ve $(0, \frac{1}{2})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$0 \leq x \leq 1$ ve $y < 0$ ise

$$y = \frac{4x - 1}{2}$$

olup, bu $(0, \frac{-1}{2})$ ve $(\frac{1}{4}, 0)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$0 \leq x \leq 1$ ve $y \geq 0$ ise

$$y = \frac{1 - 4x}{2}$$

olup, bu $(\frac{1}{4}, 0)$ ve $(0, \frac{1}{2})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
Sonuç olarak $k = \frac{1}{3}$ durumunda şekil 4.36 elde edilir.



Şekil 4.36 $P = (0, 0)$ ve $Q = (1, 0)$ için $k = \frac{1}{3}$

c) $k = \frac{1}{4}$ iken $A(P, Q; k)$ kümesi

$$4d_T(X, P) = d_T(X, Q)$$

eşitliğine sahiptir. Bu eşitlikten

$$4|x| + 4|y| = |x - 1| + |y| \tag{4.15}$$

elde edilir. Burada aşağıdaki durumlara göre çözümleri inceleyelim.
$x > 1$ iken (4.15) eşitliği çözüme sahip değildir.
$x < 0$ ve $y < 0$ ise

$$y = \frac{-3x - 1}{3}$$

olup, bu $(0, \frac{-1}{3})$ ve $(\frac{-1}{3}, 0)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$x < 0$ ve $y \geq 0$ ise

$$y = \frac{3x + 1}{3}$$

olup, bu $(\frac{-1}{3}, 0)$ ve $(0, \frac{1}{3})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$0 \leq x \leq 1$ ve $y < 0$ ise

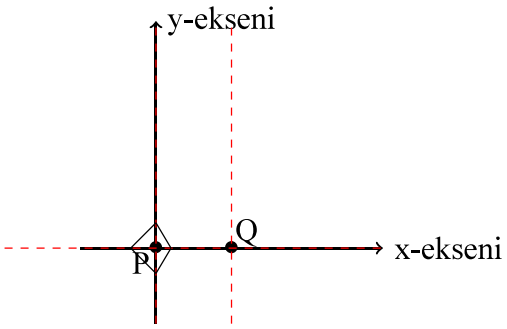
$$y = \frac{5x - 1}{3}$$

olup, bu $(0, \frac{-1}{3})$ ve $(\frac{1}{5}, 0)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$0 \leq x \leq 1$ ve $y \geq 0$ ise

$$y = \frac{1 - 5x}{3}$$

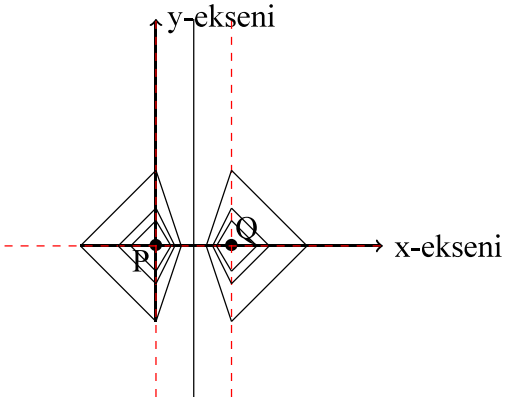
olup, bu $(\frac{1}{5}, 0)$ ve $(0, \frac{1}{3})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

Sonuç olarak $k = \frac{1}{4}$ durumunda şekil 4.37 elde edilir.



Şekil 4.37 $P = (0, 0)$ ve $Q = (1, 0)$ için $k = \frac{1}{4}$

Şekillerden görüldüğü gibi k değeri $0 < k < 1$ aralığında küçüldükçe Apollon kümesi P noktasına doğru yaklaşır. Şimdi $0 < k < 1$ aralığındaki ve $k \geq 1$ değerlerinde oluşan Apollon kümelerini birlikte şekil 4.38 görelim.



Şekil 4.38 $P=(0,0)$ ve $Q=(1,0)$ için $A(P,Q;k)$ kümeleri

3)Noktaların aynı kılavuz doğrusu üzerinde olma durumu

Bu kısım, $P=(0,0)$ ve $Q=(2,2)$ noktaları alınarak $k\geq 1$ için ve $0<k<1$ değerleri için taksi Apollon küme örnekleri incelenmektedir. Bunun için $k=1,2,3,4$ ve $k=\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$ değerleri alınmaktadır. Taksi Apollon kümesi

$$A(P,Q;k)=\left\{x\in\mathbb{R}^2_T|\frac{d_T(X,P)}{d_T(X,Q)}=k\right\}$$

dir. Bunun için önce $k\geq 1$ için ve daha sonra $0<k<1$ değerlerine göre inceleme yapılacaktır.

a) $k=1$ iken $A(P,Q;k)$ kümesi

$$d_T(X,P)=d_T(X,Q)$$

eşitliğine sahiptir. Bu eşitlikten

$$|x|+|y|=|x-2|+|y-2| \tag{4.16}$$

elde edilir. Burada aşağıdaki durumlara göre çözümleri inceleyelim.

$x<0, y<0$ durumlarında ve $x>2, y>2$ durumlarında (4.16) eşitliği çözüme sahip değildir.

$x<0$ ve $0\leq y\leq 2$ iken

$$y=2$$

elde edilir. Burada çözüm, $y=2$ doğrusunun $(0,2)$ başlangıç noktasına sahip $(-1,2)$ noktasından geçen ışındır.

$x<0$ ve $y>2$ iken

$$-x+y=-x+y$$

elde edilir. Burada çözüm, $x = 0$ ve $y = 2$ doğrularının ayırdığı dört bölgeden x in negatif olduğu ve $y > 2$ koşullarını sağlayan bölgedir.
$0 \leq x \leq 2$ ve $y < 0$ iken

$$x = 2$$

elde edilir. Burada çözüm, $x = 2$ doğrusunun $(2, 0)$ başlangıç noktasına sahip $(2, -1)$ noktasından geçen ışındır.
$0 \leq x \leq 2$ ve $0 \leq y \leq 2$ iken

$$y = 2 - x$$

olup bu $(2, 0)$ ve $(0, 2)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$0 \leq x \leq 2$ ve $y > 2$ iken

$$x = 0$$

elde edilir. Burada çözüm, $x = 0$ doğrusunun $(0, 2)$ başlangıç noktasına sahip $(0, 3)$ noktasından geçen ışındır.
$x > 2$ ve $y < 0$ iken

$$x - y = x - y$$

elde edilir. Burada çözüm, $x = 2$ ve $y = 0$ doğrularının ayırdığı dört bölgeden y in negatif olduğu ve $x > 2$ koşullarını sağlayan bölgedir.
$x > 2$ ve $0 \leq y \leq 2$ iken

$$y = 0$$

elde edilir. Burada çözüm, $y = 0$ doğrusunun $(2, 0)$ başlangıç noktasına sahip $(3, 0)$ noktasından geçen ışındır.

Sonuç olarak $k = 1$ durumunda şekil 4.39 elde edilir.
b) $k = 2$ iken $A(P, Q; k)$ kümesi

$$d_T(X, P) = 2d_T(X, Q)$$

eşitliğine sahiptir. Bu eşitlikten

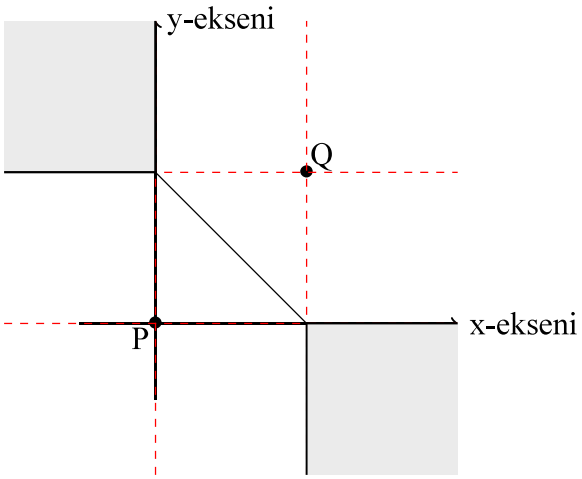
$$|x| + |y| = 2|x - 2| + 2|y - 2| \tag{4.17}$$

elde edilir. Burada aşağıdaki durumlara göre çözümleri inceleyelim.
$x < 0$ durumlarında ve $y < 0$ durumlarında (4.17) eşitliği çözüme sahip değildir.
$0 \leq x \leq 2$ ve $0 \leq y \leq 2$ iken

$$y = \frac{8 - 3x}{3}$$

olup, bu $(2, \frac{2}{3})$ ve $(\frac{2}{3}, 2)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$0 \leq x \leq 2$ ve $y > 2$ iken

$$y = 3x$$



Şekil 4.39 $P = (0, 0)$ ve $Q = (2, 2)$ için $k = 1$

olup, bu $(\frac{2}{3}, 2)$ ve $(2, 6)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$x > 2$ ve $0 \leq y \leq 2$ iken

$$y = \frac{x}{3}$$

olup, bu $(2, \frac{2}{3})$ ve $(6, 2)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$x > 2$ ve $y > 2$ iken

$$y = 8 - x$$

olup, bu $(6, 2)$ ve $(2, 6)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
Sonuç olarak $k = 2$ durumunda şekil 4.40 elde edilir.
c) $k = 3$ iken $A(P, Q; k)$ kümesi

$$d_T(X, P) = 3d_T(X, Q)$$

eşitliğine sahiptir. Bu eşitlikten

$$|x| + |y| = 3|x - 2| + 3|y - 2| \tag{4.18}$$

elde edilir. Burada aşağıdaki durumlara göre çözümleri inceleyelim.
$x < 0$ durumlarında ve $y < 0$ durumlarında (4.18) eşitliği çözüme sahip değildir.
$0 \leq x \leq 2$ ve $0 \leq y \leq 2$ iken

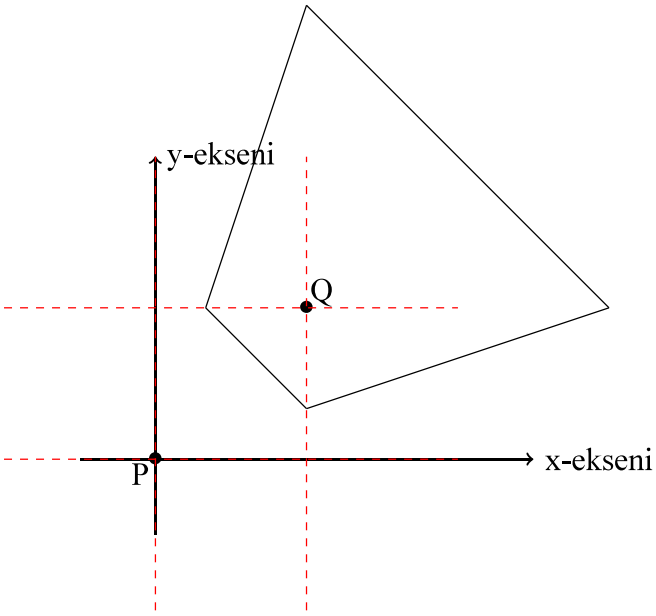
$$y = 3 - x$$

olup, bu $(2, 1)$ ve $(1, 2)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$0 \leq x \leq 2$ ve $y > 2$ iken

$$y = 2x$$

olup, bu $(1, 2)$ ve $(2, 4)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$x > 2$ ve $0 \leq y \leq 2$ iken

$$y = \frac{x}{2}$$

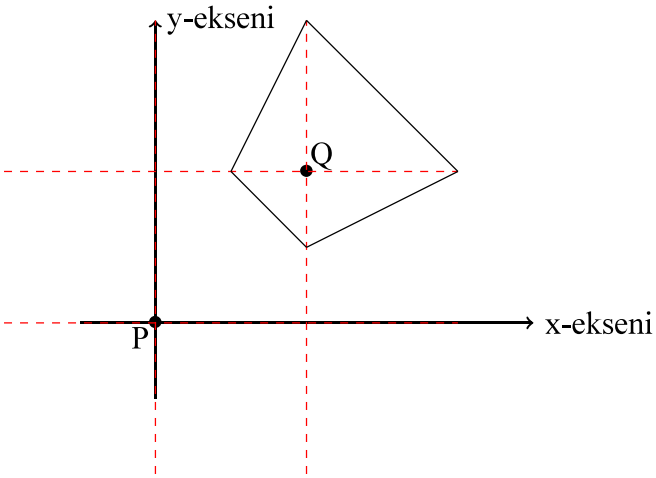


Şekil 4.40 $P = (0, 0)$ ve $Q = (2, 2)$ için $k = 2$

olup, bu $(2, 1)$ ve $(4, 2)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$x > 2$ ve $y > 2$ iken

$$y = 6 - x$$

olup, bu $(4, 2)$ ve $(2, 4)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
Sonuç olarak $k = 3$ durumunda şekil 4.41 elde edilir.



Şekil 4.41 $P = (0, 0)$ ve $Q = (2, 2)$ için $k = 3$

d) $k = 4$ iken $A(P, Q; k)$ kümesi

$$d_T(X, P) = 4d_T(X, Q)$$

eşitliğine sahiptir. Bu eşitlikten

$$|x| + |y| = 4|x - 2| + 4|y - 2| \tag{4.19}$$

elde edilir. Burada aşağıdaki durumlara göre çözümleri inceleyelim.
$x < 0$ durumlarında ve $y < 0$ durumlarında (4.19) eşitliği çözüme sahip değildir.
$0 \leq x \leq 2$ ve $0 \leq y \leq 2$ iken

$$y = \frac{16 - 5x}{5}$$

olup, bu $(2, \frac{6}{5})$ ve $(\frac{6}{5}, 2)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$0 \leq x \leq 2$ ve $y > 2$ iken

$$y = \frac{5x}{3}$$

olup, bu $(\frac{6}{5}, 2)$ ve $(2, \frac{10}{3})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$x > 2$ ve $0 \leq y \leq 2$ iken

$$y = \frac{3x}{5}$$

olup, bu $(2, \frac{6}{5})$ ve $(\frac{10}{3}, 2)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$x > 2$ ve $y > 2$ iken

$$y = \frac{16 - 3x}{3}$$

olup, bu $(\frac{10}{3}, 2)$ ve $(2, \frac{10}{3})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
Sonuç olarak $k = 4$ durumunda şekil 4.42 elde edilir.

Şekillerden görüldüğü gibi k değeri büyüdükçe Apollon kümesi Q noktasına doğru yaklaşır. Şimdi $0 < k < 1$ aralığında k değerlerini büyükten küçüğe doğru alarak Apollon kümelerini inceleyelim.
a) $k = \frac{1}{2}$ iken $A(P, Q; k)$ kümesi

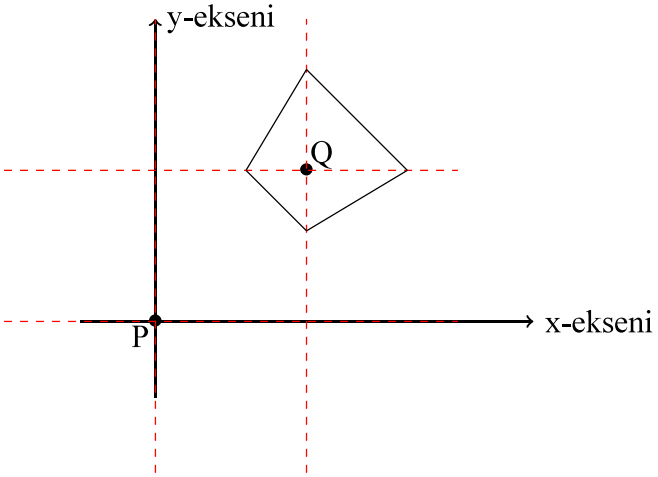
$$2d_T(X, P) = d_T(X, Q)$$

eşitliğine sahiptir. Bu eşitlikten

$$2|x| + 2|y| = |x - 2| + |y - 2| \tag{4.20}$$

elde edilir. Burada aşağıdaki durumlara göre çözümleri inceleyelim.
$x > 2$ durumlarında ve $y > 2$ durumlarında (4.20) eşitliği çözüme sahip değildir.
$x < 0$ ve $y < 0$ iken

$$y = -x - 4$$



Şekil 4.42 $P = (0, 0)$ ve $Q = (2, 2)$ için $k = 4$

olup, bu $(-4, 0)$ ve $(0, -4)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$x < 0$ ve $0 \leq y \leq 2$ iken

$$y = \frac{x + 4}{3}$$

olup, bu $(0, \frac{4}{3})$ ve $(-4, 0)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$0 \leq x \leq 2$ ve $y < 0$ iken

$$y = 3x - 4$$

olup, bu $(\frac{4}{3}, 0)$ ve $(0, -4)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$0 \leq x \leq 2$ ve $0 \leq y \leq 2$ iken

$$y = \frac{4 - 3x}{3}$$

olup, bu $(\frac{4}{3}, 0)$ ve $(0, \frac{4}{3})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
Sonuç olarak $k = \frac{1}{2}$ durumunda şekil 4.43 elde edilir.
b) $k = \frac{1}{3}$ iken $A(P, Q; k)$ kümesi

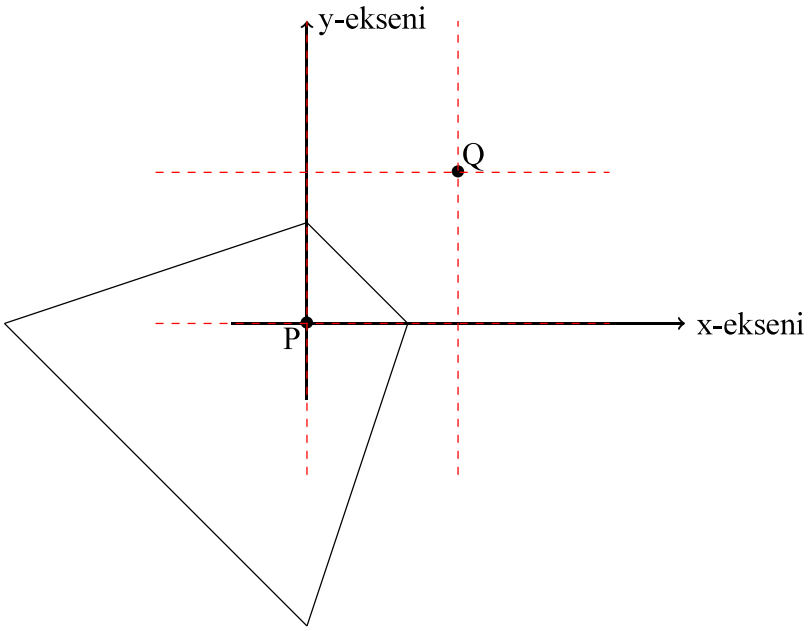
$$3d_T(X, P) = d_T(X, Q)$$

eşitliğine sahiptir. Bu eşitlikten

$$3|x| + 3|y| = |x - 2| + |y - 2| \tag{4.21}$$

elde edilir. Burada aşağıdaki durumlara göre çözümleri inceleyelim.
$x > 2$ durumlarında ve $y > 2$ durumlarında (4.21) eşitliği çözüme sahip değildir.
$x < 0$ ve $y < 0$ iken

$$y = -2 - x$$



Şekil 4.43 $P = (0, 0)$ ve $Q = (2, 2)$ için $k = \dfrac{1}{2}$

olup, bu $(-2, 0)$ ve $(0, -2)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$x < 0$ ve $0 \leq y \leq 2$ iken

$$y = \frac{x+2}{2}$$

olup, bu $(-2, 0)$ ve $(0, 1)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$0 \leq x \leq 2$ ve $y < 0$ iken

$$y = 2x - 2$$

olup, bu $(1, 0)$ ve $(0, -2)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$0 \leq x \leq 2$ ve $0 \leq y \leq 2$ iken

$$y = 1 - x$$

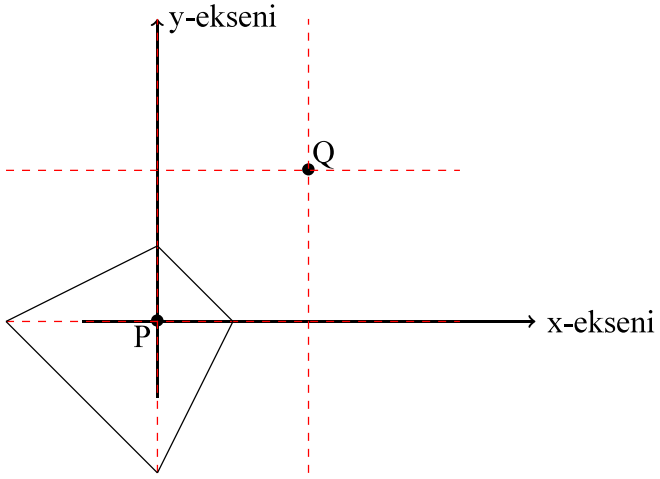
olup, bu $(1, 0)$ ve $(0, 1)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
Sonuç olarak $k = \dfrac{1}{3}$ durumunda şekil 4.44 elde edilir.
c) $k = \dfrac{1}{4}$ iken $A(P, Q; k)$ kümesi

$$4d_T(X, P) = d_T(X, Q)$$

eşitliğine sahiptir. Bu eşitlikten

$$4|x| + 4|y| = |x - 2| + |y - 2| \tag{4.22}$$

elde edilir. Burada aşağıdaki durumlara göre çözümleri inceleyelim.
$x > 2$ durumlarında ve $y > 2$ durumlarında (4.22) eşitliği çözüme sahip değildir.



Şekil 4.44 $P = (0, 0)$ ve $Q = (2, 2)$ için $k = \frac{1}{3}$

$x < 0$ ve $y < 0$ iken

$$y = \frac{-3x - 4}{3}$$

olup, bu $(\frac{-4}{3}, 0)$ ve $(0, \frac{-4}{3})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$x < 0$ ve $0 \leq y \leq 2$ iken

$$y = \frac{3x + 4}{5}$$

olup, bu $(\frac{-4}{3}, 0)$ ve $(0, \frac{4}{5})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$0 \leq x \leq 2$ ve $y < 0$ iken

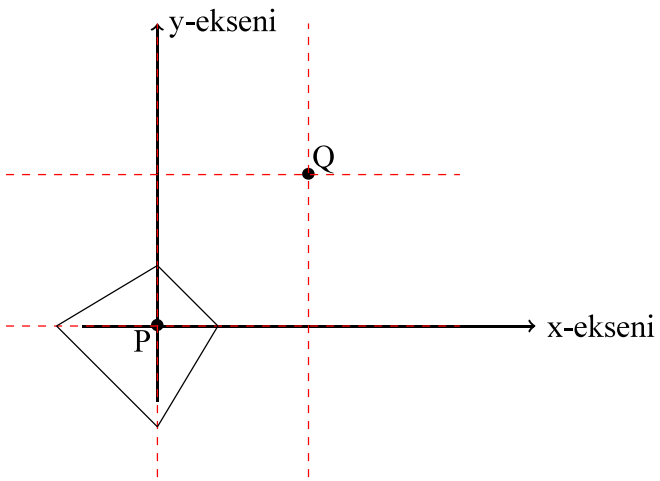
$$x = \frac{5x - 4}{3}$$

olup, bu $(\frac{4}{5}, 0)$ ve $(0, \frac{-4}{3})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$0 \leq x \leq 2$ ve $0 \leq y \leq 2$ iken

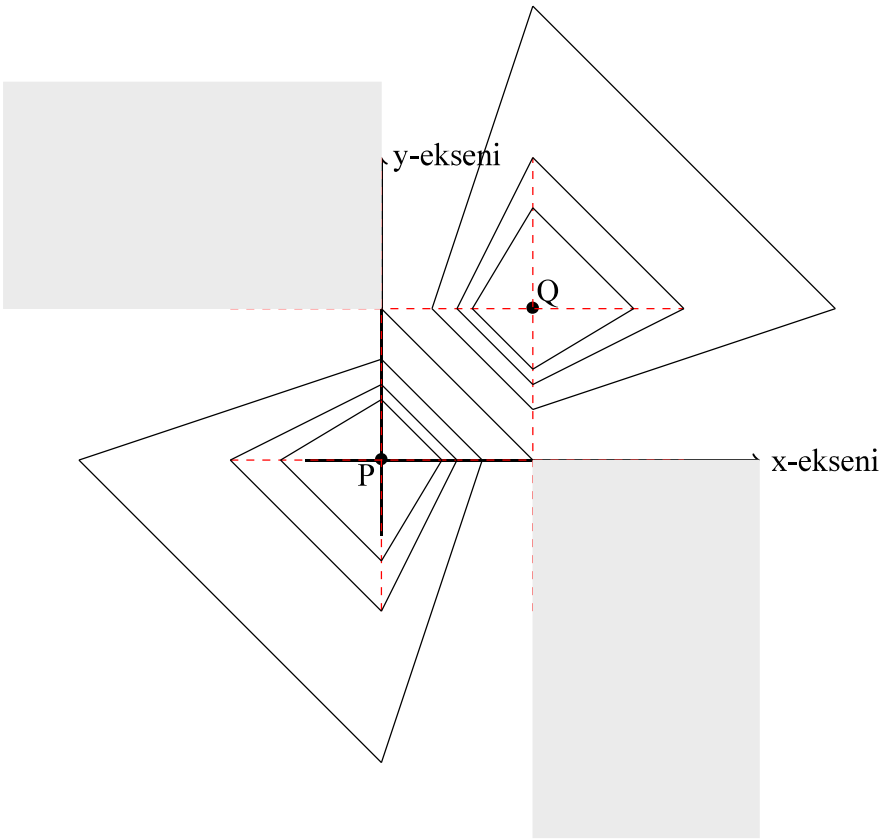
$$y = \frac{4 - 5x}{5}$$

olup, bu $(\frac{4}{5}, 0)$ ve $(0, \frac{4}{5})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
Sonuç olarak $k = \frac{1}{4}$ durumunda şekil 4.45 elde edilir.

Şekillerden görüldüğü gibi k değeri $0 < k < 1$ aralığında küçüldükçe Apollon kümesi P noktasına doğru yaklaşır. Şimdi $0 < k < 1$ aralığındaki ve $k \geq 1$ değerlerinde oluşan Apollon kümelerini birlikte şekil 4.46 görelim.



Şekil 4.45 $P = (0, 0)$ ve $Q = (2, 2)$ için $k = \frac{1}{4}$



Şekil 4.46 $P = (0, 0)$ ve $Q = (2, 2)$ için $A(P, Q; k)$ kümeleri

5. MAKSİMUM DÜZLEMİNDE APOLLON KÜMELERİNİN İNCELENMESİ

Bu bölümde klasik Apollon kümeleri maksimum düzlemde tanımlanmaktadır. Daha sonra sınıflamalar için koşullar verilerek, özellikleri sunulmaktadır.

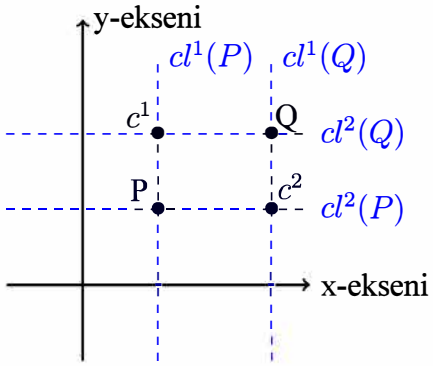
5.1. Maksimum Düzlem

Tanım 5.1.1. Maksimum düzlemde herhangi bir $X = (x_0, y_0)$ noktası verildiğinde, $x = x_0$ ve $y = y_0$ doğrularına X noktasının koordinat doğruları denir ve sırasıyla $cl^1(P)$ ve $cl^2(P)$ ile gösterilir.

Tanım 5.1.2. Maksimum düzlemde bir Q noktası verilsin. Bu noktanın koordinat doğrularının ayırdığı dört bölge, Q-bölgeler olarak adlandırılır.

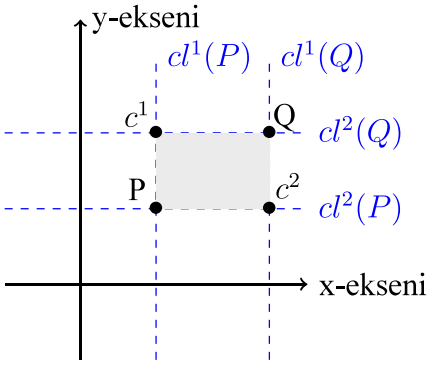
Tanım 5.1.3. Maksimum düzlemde herhangi $P = (x_1, y_1)$ ve $Q = (x_2, y_2)$ noktaları verildiğinde, bu noktaların koordinat doğrularının kesiştiği noktalara P ve Q noktalarının koordinat tamamlayıcıları denir ve $c^1(P, Q)$ ve $c^2(P, Q)$ şeklinde ifade edilir.

$$c^1(P, Q) = cl^1(P) \cap cl^2(Q) = (x_1, y_2)$$
$$c^2(P, Q) = cl^2(P) \cap cl^1(Q) = (y_1, x_2)$$



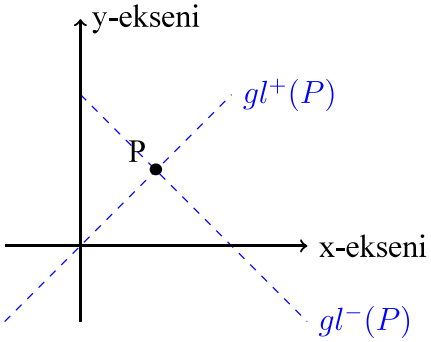
Şekil 5.1 P ve Q noktalarının koordinat tamamlayıcıları

Tanım 5.1.4. Maksimum düzlemde herhangi P ve Q noktaları verildiğinde, P ve Q noktalarının koordinat doğruları aracılığıyla belirlenen ve köşe noktaları P, Q, c^1, c^2 olan dörtgene P ve Q noktalarının koordinat dikdörtgeni denir.



Şekil 5.2 P ve Q noktalarının koordinat dikdörtgeni

Tanım 5.1.5. Maksimum düzlemde herhangi bir $P = (x_0, y_0)$ noktası verildiğinde, bu noktadan geçen ∓ 1 eğimli doğrulara kılavuz doğruları denir ve gl^+ ve gl^- ile gösterilir.



Şekil 5.3 P noktasının kılavuz doğruları

Tanım 5.1.6. Maksimum düzlemde herhangi P ve Q noktaları verildiğinde, P ve Q noktalarının kılavuz doğrularının, P ve Q haricindeki diğer iki köşesine bu noktaların kılavuz tamamlayıcılar denir ve g^+ ve g^- şeklinde gösterilir.

5.2. Maksimum Apollon Kümeleri

Bu bölümde önce maksimum düzlemde Apollon kümesi tanımlanıyor. Daha sonra noktaların konumlarına göre maksimum Apollon kümeleri inceleniyor. k sayısı üzerindeki koşullara göre maksimum Apollon kümeleri sınıflandırılıyor.

Tanım 5.2.1. P ve Q, maksimum düzleminde iki farklı nokta, $k \geq 0$ ve $k \in \mathbb{R}^+$ olsun.

$$A(P,Q;k) = \{X \in {\mathbb{R}_{\mathbb{M}}}^2 | \frac{d_M(X,P)}{d_M(X,Q)} = k\}$$

kümesine maksimum Apollon kümesi denir.
k nın bazı özel değerleri için maksimum Apollon kümeleri şu şekildedir:
i) $k = 0$ iken $A(P,Q;0)$ maksimum Apollon kümesi sadece P noktasından oluşur.
ii) $k = \infty$ iken $A(P,Q;\infty)$ maksimum Apollon kümesi sadece Q noktasından oluşur.
iii) $k = 1$ iken $A(P,Q;1)$ maksimum Apollon kümesi P ve Q noktalarının maksimum orta kümesinden oluşur.

Teorem 5.2.1. *Maksimum düzlemde*

$$A(P,Q;k) = A(Q,P;\frac{1}{k})$$

dır.

İspat. $\forall P,Q \in {\mathbb{R}_{\mathbb{M}}}^2$, $P \neq Q$ noktaları için $k \geq 0$ olmak üzere

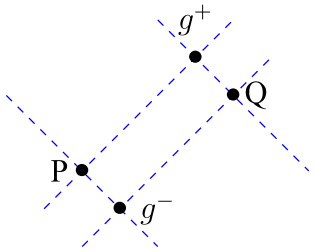
$$A(P,Q;k) = \{X \in {\mathbb{R}_{\mathbb{M}}}^2 | \frac{d_M(P,X)}{d_M(Q,X)} = k\}$$

$$= \{X \in {\mathbb{R}_{\mathbb{M}}}^2 | \frac{d_M(Q,X)}{d_M(P,X)} = \frac{1}{k}\}$$

$$= A(Q,P;\frac{1}{k})$$

Böylece maksimum düzlemde $k > 1$ için maksimum Apollon kümelerini incelemek yeterli olacaktır. Şimdi P ve Q noktalarının aldığı konumlar ve k değerleri için elde edilen sonuçlar verilecektir. □

Teorem 5.2.2. *Maksimum düzleminde P ve Q noktaları aynı kılavuz doğrusu ve aynı koordinat doğrusu üzerinde olmayan farklı iki nokta olsun. PQ doğru parçasının eğimi m, $0 < m < 1$ ve $k \in \mathbb{R}^+$, $k > 1$ için $k < \frac{m+1}{1-m}$ iken maksimum Apollon kümesi aşağıdaki özelliklere sahiptir:*



Şekil 5.4 P ve Q noktalarının kılavuz tamamlayıcıları

1) *Altı doğru parçasından oluşur. Üç doğru parçasının eğimleri* $\mp\frac{1}{k}, -k$*, diğer üçü koordinat eksenlerine paraleldir.*
2) *Altı köşe noktasının dört tanesi* Q *noktasının kılavuz doğruları üzerinde diğer ikisi* P *noktasının aynı kılavuz doğrusu üzerindedir.*
3) Q*-merkezlidir.*

İspat. Genelliği bozmaksızın maksimum düzleminde $P = (0,0)$ ve $Q = (x_0, y_0)$ ve $0 < y_0 < x_0$ olsun. $k > 1$ olmak üzere maksimum Apollon kümesi

$$\frac{d_M(P,X)}{d_M(Q,X)} = k$$

eşitliğinden

$$max\{|x|,|y|\} = kmax\{|x-x_0|,|y-y_0|\}$$

1)$|x| > |y|, |x-x_0| > |y-y_0|$

$$|x| = k|x-x_0|$$

$x < 0$ iken $(k-1)x = kx_0$ olup $x = \frac{k}{k-1}x_0 > 0$ olduğundan denklemin bu bölgede çözümü yoktur.
$0 \leq x < x-0$ iken $(k+1)x = kx_0$ olup, $x = \frac{k}{k+1}x_0 < x_0$ olduğundan, çözüm bu bölgede $A_1 = (\frac{k}{k+1}x_0, -\frac{x_0}{k+1} + y_0)$ ve $A_2 = (\frac{k}{k+1}x_0, \frac{k}{k+1}x_0)$ noktalarını birleştiren doğru parçasıdır.
$x \geq x_0$ iken

$$(1-k)x = -kx_0$$
$$x = -\frac{k}{k-1}x_0 = \frac{k}{k-1}x_0 > x_0$$

olup, çözüm bu bölgede $A_3 = (\frac{k}{k-1}x_0, \frac{x_0}{k-1} + y_0)$ ve $A_4 = (\frac{k}{k-1}x_0, -\frac{x_0}{k-1}x_0 + y_0)$ noktalarını birleştiren doğru parçasıdır.
2) $|x| > |y|, |x-x_0| \leq |y-y_0|$ durumunda maksimum Apollon kümesi

$$|x| = k|y-y_0|$$

denklemine sahiptir. $x < 0$ iken çözüm yoktur.
$x \geq 0, y < y_0$ iken

$$x + ky = ky_0$$

elde edilir. Bu denklem, $A_1 = (\frac{k}{k+1}x_0, -\frac{x_0}{k+1} + y_0)$ ve $A_4 = (\frac{k}{k-1}x_0, -\frac{x_0}{k-1} + y_0)$ noktalarını birleştiren doğru parçasıdır.
$x \geq 0$, $y \geq y_0$ iken

$$x - ky = -ky_0$$

elde edilir. Bu denklem $A_3 = (\frac{k}{k-1}x_0, \frac{x_0}{k-1} + y_0)$ ve $A_5 = (\frac{k}{k-1}y_0, \frac{k}{k-1}y_0)$ noktalarını birleştiren doğru parçasıdır.
3)$|x| \leq |y|$, $|x - x_0| > |y - y_0|$ durumunda maksimum Apollon kümesi

$$|y| = k|x - x_0|$$

denklemine sahiptir. $x < x_0$, $y < 0$ iken

$$kx - y = kx_0$$

elde edilir. Bu denklem, bölgenin sınırlarını $(x_0 + \frac{y_o}{k-1}, \frac{k}{k-1}y_0)$ ve $(\frac{k}{k-1}y_0, \frac{k}{k-1}y_0)$ noktalarında keser. $\frac{k}{k-1}y_0 > 0$ olduğundan çözüm boş kümedir.
$x < x_0, y \geq 0$ iken $kx + y = kx_0$ elde edilir. Bu denklem, bölgede $A_2 = (\frac{k}{k+1}x_0, \frac{k}{k+1}x_0)$ ve $A_6 = (x_0 - \frac{y_0}{k-1}x_0, \frac{k}{k-1}y_0)$ noktalarından geçen doğru parçasıdır.
4)$|x| \leq |y|$, $|x - x_0| \leq |y - y_0|$ durumunda maksimum Apollon kümesi

$$|y| = k|y - y_0|$$

denklemine sahiptir. $y < 0$ iken

$$(k-1)y = ky_0$$
$$y = \frac{k}{k-1}y_0 > 0$$

olduğundan bölgede çözüm yoktur. $y \geq y_0$ iken

$$y = \frac{k}{k-1}y_0$$

elde edilir. Bu denklem, bölgede A_5 ve A_6 noktalarından geçen doğru parçasıdır. □

P ve Q noktaları, eğimi $(-1, 0)$ aralığında olacak şekilde seçildiğinde, benzer hesaplamalar yapılarak benzer sonuçlar elde edilir.

Teorem 5.2.3. *Maksimum düzleminde P ve Q noktaları aynı kılavuz doğrusu ve aynı koordinat doğrusu üzerinde olmayan farklı iki nokta olsun. PQ doğru parçasının eğimi m, $0 < m < 1$ ve $k \in \mathbb{R}^+$, $k > 1$ olmak üzere $k \geq \dfrac{m+1}{1-m}$ iken maksimum Apollon kümesi aşağıdaki özelliklere sahiptir:*

1) *Dört doğru parçasından oluşur. Bu doğru parçalarının ikisi $\mp\dfrac{1}{k}$ eğimlidir, diğer ikisi aynı koordinat eksenine dik olan doğru üzerindedir.*

2) *Dört köşe noktasıda Q noktasının kılavuz doğruları üzerindedir.*

3) *Q-merkezlidir.*

4) *İki paralel kenarı vardır.*

5) *Yan kenarlar Q noktasının koordinat doğrusu üzerinde kesişir.*

6) $|A_1A_3|_M = |A_2A_4|_M$

İspat. $P = (0,0)$, $Q = (x_0, y_0)$ ve $0 < y_0 < x_0$ olsun. $k > 1$ olmak üzere maksimum Apollon kümesi, $\forall (x,y) \in \mathbb{R_M}^2$ için

$$\frac{d_M(P,X)}{d_M(Q,X)} = k$$

eşitliğinden

$$max\{|x|,|y|\} = kmax\{|x-x_0|,|y-y_0|\}$$

elde edilir.

1) $|x| > |y|$, $|x-x_0| > |y-y_0|$ eşitsizliklerinden $|x| = k|x-x_0|$ elde edilir. $x < 0$ iken mutlak değerli denklem çözüme sahip değildir. $0 \leq x < x_0$ iken $x = \dfrac{k}{k+1}x_0$ denklemi elde edilir. $0 < \dfrac{k}{k+1}x_0 < x_0$ ve $\dfrac{k}{k+1}x_0 > \dfrac{x_0+y_0}{2}$ dir. Bu denklem, bölgede $A_1 = (\dfrac{k}{k+1}x_0, -\dfrac{x_0}{k+1} + y_0)$ ve $A_2 = (\dfrac{k}{k+1}x_0, \dfrac{x_0}{k+1} + y_0)$noktalarını birleştiren doğru parçasıdır. $x \geq x_0$ iken $x = \dfrac{k}{k-1}x_0$ elde edilir. Bu, bölgede $A_3 = (\dfrac{k}{k-1}x_0, \dfrac{x_0}{k-1} + y_0)$ ve $A_4 = (\dfrac{k}{k-1}x_0, -\dfrac{x_0}{k-1} + y_0)$noktalarını birleştiren doğru parçasıdır.

2) $|x| > |y|$, $|x-x_0| \leq |y-y_0|$ durumundan $|x| = k|y-y_0|$ elde edilir. $x < 0$ iken denklemin bölgede çözümü yoktur. $x \geq 0$, $y < y_0$ iken $x + ky = ky_0$ elde edilir. Bu denklem, bölgede A_1 ve A_4noktalarını birleştiren doğru parçasıdır. $x \geq 0$, $y \geq y_0$ iken $x - ky = -ky_0$ elde edilir. Bu denklem, A_2 ve A_3 noktalarını birleştiren doğru parçasıdır.

3) $|x| \leq |y|$, $|x-x_0| > |y-y_0|$ durumunda $|y| = k|x-x_0|$ elde edilir. $x < 0$, $y < 0$ iken $kx - y = kx_0$ elde edilir. Bu doğru bölgenin sınırlarını belirleyen doğruları $\dfrac{k}{k-1}x_0, \dfrac{k}{k-1}x_0$ ve $x_0 + \dfrac{y_0}{k-1}, \dfrac{k}{k-1}y_0$ noktalarında ve $y = -x$ doğrusunu $\dfrac{k}{k+1}x_0, -\dfrac{k}{k+1}x_0$ noktasında keser. $-\dfrac{k}{k+1}x_0 < \dfrac{-x_0+y_0}{2}$ ve $\dfrac{k}{k-1}y_0 > 0$ olduğunda çözüm yoktur. $x < x_0$, $y \geq 0$ iken $kx + y = kx_0$ elde edilir. Bu denklemli doğru, bölgenin

sınırlarını oluşturan doğruları $\frac{k}{k+1}x_0, \frac{k}{k+1}x_0$, $x_0 - \frac{y_0}{k-1}, \frac{k}{k-1}y_0$ ve $\frac{k}{k-1}x_0, -\frac{k}{k-1}x_0$ noktalarında keser. $\frac{k}{k+1}x_0 > \frac{x_0+y_0}{2}$ olduğundan bölgede çözüm yoktur. $x \geq x_0$ iken çözüm yoktur.

4) $|x| \leq |y|$, $|x-x_0| \leq |y-y_0|$ durumunda $|y| = k|y-y_0|$ elde edilir. $y < 0$ iken $y = \frac{k}{k-1}y_0 > 0$ olduğundan ve $0 \leq y < y_0$ iken çözüm yoktur. □

P ve Q noktaları eğimi $(-1, 0)$ aralığında olacak şekilde seçilirse, benzer hesaplamalar yapılarak benzer sonuçlar elde edilir.

Sonuç: Maksimum düzleminde P ve Q noktaları aynı kılavuz doğrusu ve aynı koordinat doğrusu üzerinde olmayan farklı iki nokta olsun. PQ doğru parçasının eğimi m, $0 < m < 1$ ve $k \in \mathbb{R}^+$, $k > 1$ olmak üzere $k \geq \frac{m+1}{1-m}$ iken maksimum Apollon kümesi Q noktasının $y = y_0$ koordinat doğrusuna göre simetriktir.

İspat. $Q = (x_0, y_0)$ noktasının $y = y_0$ koordinat doğrusuna göre yansıma, $\forall (x, y) \in {\mathbb{R}_{\mathbb{M}}}^2$ için $\Omega(x, y) = (x, 2y_0 - y)$ dönüşümüdür. Maksimum Apollon kümesinin $x - ky = -ky_0$ denklemli yan kenarı Ω yansıması altında $x + ky = ky_0$ denklemli diğer yan kenara dönüştüğünden maksimum Apollon kümesi $y = y_0$ doğrusuna göre simetriktir.

□

Teorem 5.2.4. *Maksimum düzleminde P ve Q, koordinat eksenleri üzerinde iki farklı nokta ve $k > 1$, $k \in \mathbb{R}^+$ olsun. O zaman maksimum Apollon kümesi aşağıdaki özelliklere sahiptir.*

1) *Dört doğru parçasından oluşur. Bu doğru parçalarının ikisi $\mp\frac{1}{k}$ eğimlidir. Diğer ikisi PQ doğrusuna dik olan doğrular üzerindedir.*

2) *Köşeler, Q noktasının kılavuz doğruları üzerindedir.*

3) *Q-merkezlidir.*

4) *İki paralel kenarı vardır.*

5) *Yan kenarların üzerinde bulunduğu doğrular P noktasında kesişirler.*

6) $|A_1A_3|_M = |A_2A_4|_M$

İspat. Maksimum düzlemde $P = (0, 0)$ ve $Q = (x_0, 0)$ ve $0 < x_0$ almak genelliği bozmayacaktır. $\forall X = (x, y) \in {\mathbb{R}_{\mathbb{M}}}^2$ için maksimum Apollon kümesi

$$\{X | \frac{d_M(P, X)}{d_M(Q, X)} = k\}$$

dır. Bu küme

$$max\{|x|, |y|\} = kmax\{|x - x_0|, |y|\}$$

eşitliğine sahiptir.
1)$|x| > |y|$ ve $|x - x_0| > |y|$ eşitsizliklerinden $|x| = k|x - x_0|$ elde edilir. $0 \leq x < x_0$ iken $x = \frac{k}{k+1}x_0$ olup, $\frac{x_0}{2} < \frac{k}{k+1}x_0 < x_0$ olduğundan denklem $A_1 = (\frac{k}{k+1}x_0, \frac{x_0}{k+1})$ ve $A_2 = (\frac{k}{k+1}x_0, -\frac{x_0}{k+1})$ noktalarını birleştiren doğru parçasını belirtir. $x \geq x_0$ iken $x = \frac{k}{k-1}x_0$ olduğundan $\frac{k}{k-1}x_0 > x_0$ olduğundan bu denklem $A_3 = (\frac{k}{k-1}x_0, \frac{x_0}{k-1})$ ve $A_4 = (\frac{k}{k-1}x_0, -\frac{x_0}{k-1})$ noktalarını birleştiren doğru parçasıdır.
2) $|x| > |y|$ ve $|x-x_0| \leq |y|$ durumunda $|x| = k|y|$ elde edilir. $x < 0$ iken denklemin çözümü yoktur. $x \geq 0, y < 0$ iken $x = -ky$ olup, bu denklem bölgede A_2 ve A_4 noktalarından geçen doğru parçasını belirtir. Benzer şekilde $x \geq 0, y \geq 0$ iken $x = ky$ olup, bu denklem A_1 ve A_3 noktalarından geçen doğru parçasını belirtir. Üstelik $x = -ky$ ve $x = ky$ denklemli doğrular P noktasından geçer.
3) $|x| \leq |y|$ ve $|x - x_0| > |y|$ durumunda $|y| = k|x - x_0|$ elde edilir. $y < 0, x < x_0$ iken $kx - y = kx_0$ olup, Q noktasından geçen dikeysel bir doğru olduğundan bölgede çözüm mevcut değildir. $y \geq 0, x < x_0$ iken $y = -kx + kx_0$ olup, bu Q noktasından geçen dikeysel bir doğru olduğundan bölgede çözüm mevcut değildir.
4) $|x| \leq |y|$ ve $|x - x_0| \leq |y|$ durumunda $y = 0$ olup, çözüm mevcut değildir. □

Sonuç: Maksimum düzleminde P ve Q, koordinat eksenleri üzerinde iki farklı nokta ve $k > 1$, $k \in \mathbb{R}^+$ olsun. O zaman maksimum Apollon kümesi PQ doğrusuna göre simetriktir.

Teorem 5.2.5. *Maksimum düzleminde P ve Q aynı kılavuz doğrusu üzerinde farklı iki nokta olsun. $k > 1, k \in \mathbb{R}^+$ için maksimum Apollon kümesi aşağıdaki özelliklere sahiptir:*
***1)** Dört doğru parçasına sahiptir. İki doğru parçası koordinat eksenlerine paraleldir. PQ doğru parçasının eğimi m olmak üzere diğer iki doğru parçası $-m\frac{1}{k}$ ve $-mk$ eğimlidir.*
***2)** Bütün köşeler Q noktasının kılavuz doğruları üzerindedir.*
***3)** PQ kılavuz doğrusuna göre simetriktir.*

İspat. Maksimum düzlemde $P = (0, 0)$ ve $Q = (x_0, x_0)$ ve $0 < x_0$ almak genelliği bozmayacaktır. $\forall X = (x, y) \in {\mathbb{R}_{\mathbb{M}}}^2$ için maksimum Apollon kümesi

$$\{X | \frac{d_M(P, X)}{d_M(Q, X)} = k\}$$

dır. Bu küme

$$max\{|x|, |y|\} = kmax\{|x - x_0|, |y - x_0|\}$$

eşitliğine sahiptir.
1) $|x| > |y|, |x - x_0| > |y - x_0|$ durumunda $|x| = k|x - x_0|$ elde edilir. Bu eşitliğin sadece

$x \geq x_0$ durumunda $x = \dfrac{k}{k-1}x_0$ denklemli doğru parçası olarak çözümü mevccuttur.

2) $|x| > |y|, |x - x_0| \leq |y - x_0|$ durumunda $|x| = k|y - x_0|$ elde edilir. $x \geq 0, y < x_0$ iken $x + ky = kx_0$ olup, bu bölgede $A_1 = (\dfrac{k}{k+1}x_0, \dfrac{k}{k+1}x_0)$ ve $A_2 = (\dfrac{k}{k-1}x_0, \dfrac{k-2}{k-1}x_0)$ noktalarından geçen doğru parçasını belirtir.

3) $|x| \leq |y|, |x - x_0| > |y - x_0|$ durumunda $|y| = k|x - x_0|$ elde edilir. Bu denklem, $x < x_0, y \geq 0$ iken $kx + y = kx_0$ olup, bu bölgede A_1 ve $A_3 = (\dfrac{k-2}{k-1}x_0, \dfrac{k}{k-1}x_0)$ noktalarını birleştiren doğru parçasıdır.

4) $|x| \leq |y|, |x - x_0| \leq |y - x_0|$ durumunda $|y| = k|y - x_0|$ elde edilir. Bu denklemin sadece $y \geq x_0$ iken çözümü mevcuttur. Bu çözüm $y = \dfrac{k}{k-1}\, x_0$ denklemli doğru parçasıdır.

□

5.3. Maksimum Apollon Küme Örnekleri

Bu bölümde, maksimum düzleminde P ve Q noktalarının çeşitli konumlarına ve $k \in \mathbb{R}^+$ sayısına göre maksimum Apollon kümelerine örnekler verilmektedir.

1) Noktaların aynı koordinat doğrusu yada aynı kılavuz doğrusu üzerinde olmama durumu

Bu kısım, $P = (0,0)$ ve $Q = (3,1)$ noktaları alınarak $k \geq 1$ için ve $0 < k < 1$ değerleri için taksi Apollon küme örnekleri incelenmektedir. Bunun için $k = 1, 2, 3, 4$ ve $k = \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{2}$ değerleri alınmaktadır. Maksimum Apollon kümesi

$$A(p, q; k) = \{x \in \mathbb{R}_{\mathbb{M}}{}^2 | \frac{d_M(X,P)}{d_M(X,Q)} = k\}$$

dir. Bunun için önce $k \geq 1$ için ve daha sonra $0 < k < 1$ değerlerine göre inceleme yapılacaktır.

a) $k = 1$ iken $A(P, Q; k)$ kümesi

$$d_M(X,P) = d_M(X,Q)$$

eşitliğine sahiptir. Bu eşitlikten

$$max\{|x|, |y|\} = max\{|x - 3|, |y - 1|\} \tag{5.1}$$

elde edilir. Burada aşağıdaki durumlara göre çözümleri inceleyelim.

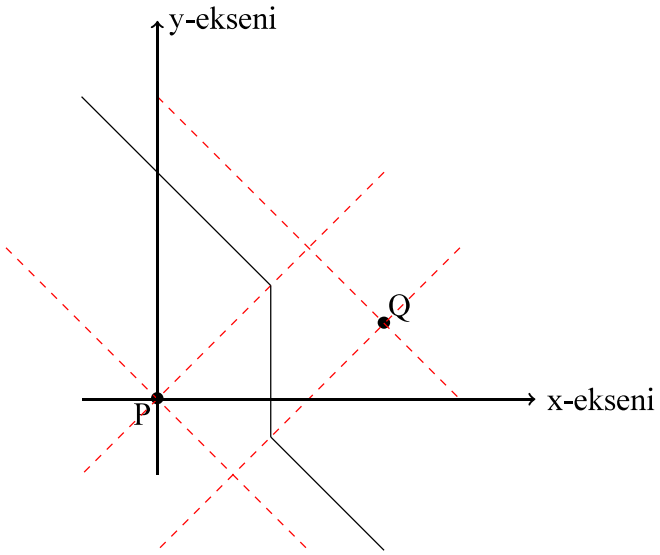
1) $|x| > |y|, |x - 3| > |y - 1|$ durumunda (5.1) eşitliği $|x| = |x - 3|$ dir. Bu eşitliğin sadece $0 < x < 3$ durumunda $x = \dfrac{3}{2}$ çözümü elde edilir.

2) $|x| > |y|$, $|x-3| < |y-1|$ durumunda (5.1) eşitliği $|x| = |y-1|$ dir. Bu eşitliğin sadece $x > 0$, $y < 1$ durumunda $x = -y + 1$ çözümü elde edilir.

3) $|x| < |y|$, $|x-3| > |y-1|$ durumunda (5.1) eşitliği $|y| = |x-3|$ olur. Bu eşitliğin sadece $y > 0$, $x < 3$ durumda $x + y = 3$ çözümü elde edilir. Buradan bir ışın elde edilir.

4) $|x| < |y|$, $|x-3| < |y-1|$ durumunda (5.1) eşitliği $|y| = |y-1|$ olur. Bu eşitlikte çözüm boş kümedir.

Sonuç olarak $k = 1$ durumunda şekil 5.5 elde edilir.



Şekil 5.5 $P = (0,0)$ ve $Q = (3,1)$ için $k = 1$

b) $k = 2$ iken $A(P,Q;k)$ kümesi

$$d_M(X,P) = 2d_M(X,Q)$$

eşitliğine sahiptir. Bu eşitlikten

$$max\{|x|,|y|\} = 2max\{|x-3|,|y-1|\} \tag{5.2}$$

elde edilir.Burada aşağıdaki durumlara göre çözümleri inceleyelim.

1) $|x| > |y|$, $|x-3| > |y-1|$ durumunda (5.2) eşitliği $|x| = 2|x-3|$ dir. $0 < x < 3$ iken $(2,2)$ ve $(2,0)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder. $x > 3$ iken $(6,4)$

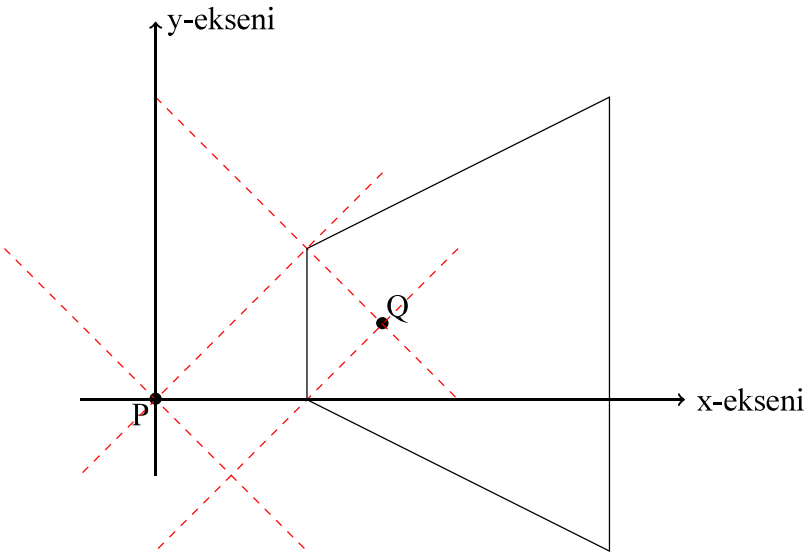
ve $(6,-2)$ noktalarından geçen doğru parçası elde edilir.

2) $|x|>|y|$, $|x-3|<|y-1|$ durumunda (5.2) eşitliği $|x|=2|y-1|$ dir. $x>0$, $y<1$ iken $(2,0)$ ve $(6,-2)$ noktalarından geçen doğru parçası elde edilir. $x>0$, $y>1$ iken $(2,2)$ ve $(6,4)$ noktalarından geçen doğru parçası elde edilir.

3) $|x|<|y|$, $|x-3|>|y-1|$ durumunda (5.2) eşittliği $|y|=2|x-3|$ dir. Burada çözüm boş küme elde edilir.

4) $|x|<|y|$, $|x-3|<|y-1|$ durumunda (5.2) eşittliği $|y|=2|y-1|$ dir. Burada çözüm boş küme elde edilir.

Sonuç olarak $k=2$ durumunda şekil 5.6 elde edilir.



Şekil 5.6 $P=(0,0)$ ve $Q=(3,1)$ için $k=2$

$k=3$ iken

$$d_M(X,P)=3d_M(X,Q)$$

eşitliğine ulaşırız. Buradan

$$max\{|x|,|y|\}=3max\{|x-3|,|y-1|\} \tag{5.3}$$

elde edilir. Bu eşitliğin aşağıdaki durumlara göre çözümlerini inceleyelim.

1) $|x|>|y|$, $|x-3|>|y-1|$ durumunda (5.3) eşitliği $|x|=3|x-3|$ dir. $0<x<3$ iken $(\frac{9}{4},\frac{1}{4})$ ve $(\frac{9}{4},\frac{7}{4})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder. $x>3$ iken

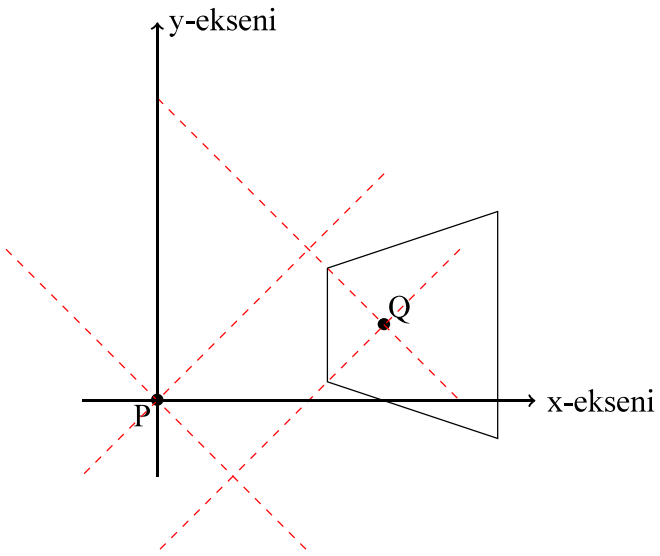
$(\frac{9}{2}, \frac{5}{2})$ ve $(\frac{9}{2}, \frac{-1}{2})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

2) $|x| > |y|$, $|x-3| < |y-1|$ durumunda (5.3) eşitliği $|x| = 3|y-1|$ dir. $x > 0$, $y < 1$ iken $(\frac{9}{4}, \frac{1}{4})$ ve $(\frac{9}{2}, \frac{-1}{2})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder. $x > 0$, $y > 1$ iken $(\frac{9}{4}, \frac{7}{4})$ ve $(\frac{9}{2}, \frac{5}{2})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

3) $|x| < |y|$, $|x-3| > |y-1|$ durumunda (5.3) eşitliği $|y| = 3|x-3|$ dir. Burada çözüm boş küme elde edilir.

4) $|x| < |y|$, $|x-3| < |y-1|$ durumunda (5.3) eşitliği $|y| = 3|y-1|$ dir. Burada çözüm boş küme elde edilir.

Sonuç olarak $k = 3$ durumunda şekil 5.7 elde edilir.



Şekil 5.7 $P = (0,0)$ ve $Q = (3,1)$ için $k = 3$

$k = 4$ iken

$$d_M(X,P) = 4d_M(X,Q)$$

eşitliğine ulaşırız. Buradan

$$max\{|x|,|y|\} = 4max\{|x-3|,|y-1|\} \tag{5.4}$$

elde edilir. Bu eşitliğin aşağıdaki durumlara göre çözümlerini inceleyelim.

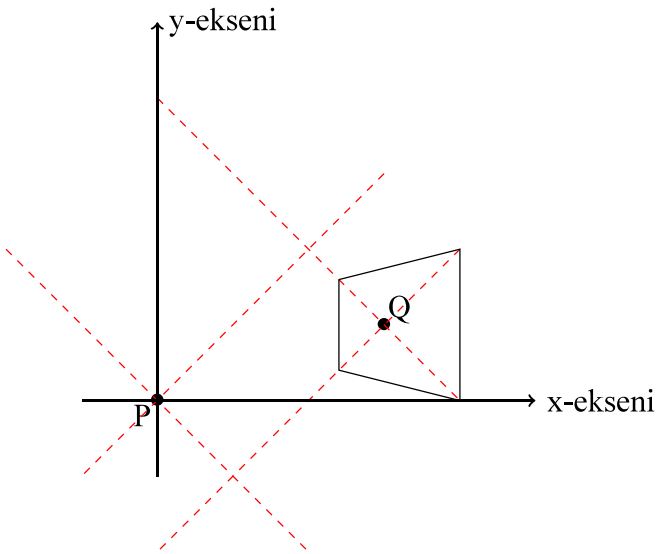
1) $|x| > |y|$, $|x-3| > |y-1|$ durumunda (5.4) eşitliği $|x| = 4|x-3|$ dir. $0 < x < 3$ iken $(\frac{12}{5}, \frac{8}{5})$ ve $(\frac{12}{5}, \frac{2}{5})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder. $x > 3$ iken $(4, 0)$ ve $(4, 2)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

2) $|x| > |y|$, $|x-3| < |y-1|$ durumunda (5.4) eşitliği $|x| = 4|y-1|$ dir. $x > 0$, $y < 1$ iken $(\frac{12}{5}, \frac{2}{5})$ ve $(4, 0)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder. $x > 0$, $y > 1$ iken $(\frac{12}{5}, \frac{8}{5})$ ve $(4, 2)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

3) $|x| < |y|$, $|x-3| > |y-1|$ durumunda (5.4) eşitliği $|y| = 4|x-3|$ dir. Burada çözüm boş küme elde edilir.

4) $|x| < |y|$, $|x-3| < |y-1|$ durumunda (5.4) eşitliği $|y| = 4|y-1|$ dir. Burada çözüm boş küme elde edilir.

Sonuç olarak $k = 4$ durumunda şekil 5.8 elde edilir.



Şekil 5.8 $P = (0, 0)$ ve $Q = (3, 1)$ için $k = 4$

Şekillerden görüldüğü gibi k değeri büyüdükçe Apollon kümesi Q noktasına doğru yaklaşır. Şimdi $0 < k < 1$ aralığında k değerlerini büyükten küçüğe doğru alarak Apollon kümelerini inceleyelim.

$k = \frac{3}{2}$ iken

$$2d_M(X,P) = 3d_M(X,Q)$$

eşitliğine ulaşırız. Buradan

$$2max\{|x|,|y|\} = 3max\{|x-3|,|y-1|\}$$

elde edilir.Bu eşitliğin aşağıdaki durumlara göre çözümlerini inceleyelim.

1) $|x| > |y|$, $|x-3| > |y-1|$ durumunda $2|x| = 3|x-3|$ dir. $0 < x < 3$ iken $(\frac{9}{5}, -\frac{1}{5})$ ve $(\frac{9}{5}, \frac{9}{5})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder. $x > 3$ iken $(9,-5)$ ve $(9,7)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

2) $|x| > |y|$, $|x-3| < |y-1|$ durumunda $2|x| = 3|y-1|$ dir. $x > 0$, $y < 1$ iken $(9,-5)$ ve $(\frac{9}{5}, -\frac{1}{5})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder. $x > 0$ ve $y > 1$ iken $(3,3)$ ve $(9,7)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

3) $|x| < |y|$, $|x-3| > |y-1|$ durumunda $2|y| = |x-3|$ dir. $y > 0$ ve $x < 3$ iken $(1,3)$ ve $(\frac{9}{5}, \frac{9}{5})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

4) $|x| < |y|$, $|x-3| < |y-1|$ durumunda $2|y| = 3|y-1|$ dir. $y > 1$ iken $(1,3)$ ve $(3,3)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

Sonuç olarak $k = \frac{3}{2}$ durumunda şekil 5.9 elde edilir.

$k = \frac{1}{2}$ iken

$$2d_M(X,P) = d_M(X,Q)$$

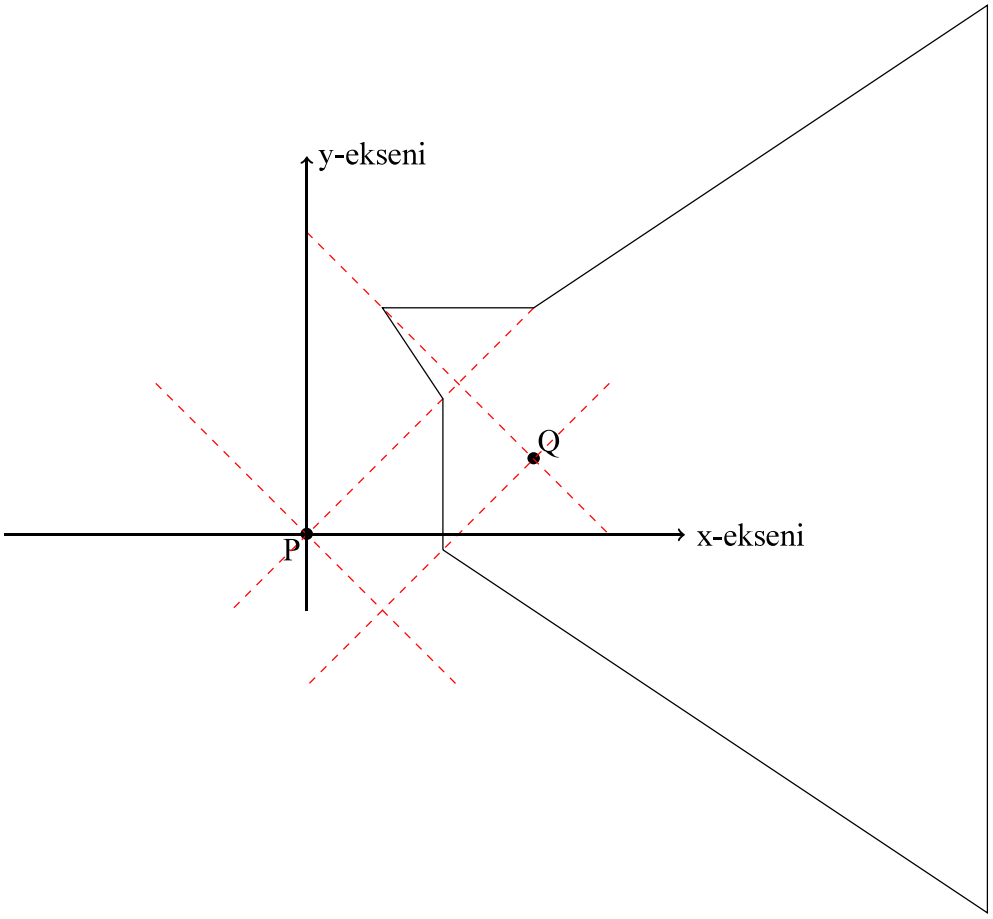
eşitliğine ulaşırız. Buradan

$$2max\{|x|,|y|\} = max\{|x-3|,|y-1|\} \tag{5.5}$$

elde edilir.Bu eşitliğin aşağıdaki durumlara göre çözümlerini inceleyelim.

1) $|x| > |y|$, $|x-3| > |y-1|$ durumunda (5.5) eşitliği $2|x| = |x-3|$ dir. $x < 0$ iken $(-3,-3)$ ve $(-3,3)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder. $0 < x < 3$ iken $(1,-1)$ ve $(1,1)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

2) $|x| > |y|$, $|x-3| < |y-1|$ durumunda (5.5) eşittliği $2|x| = |y-1|$ dir. Burada çözüm boş küme elde edilir.



Şekil 5.9 $P = (0,0)$ ve $Q = (3,1)$ için $k = \dfrac{3}{2}$

3) $|x| < |y|$, $|x-3| > |y-1|$ durumunda (5.5) eşitliği $2|y| = |x-3|$ dir. $y < 0$, $x < 3$ iken $(-3,-3)$ ve $(1,-1)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder. $y > 0$, $x < 3$ iken $(1,1)$ ve $(-3,3)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

4) $|x| < |y|$, $|x-3| < |y-1|$ durumunda (5.5) eşitliği $2|y| = |y-1|$ dir. Burada çözüm boş küme elde edilir.

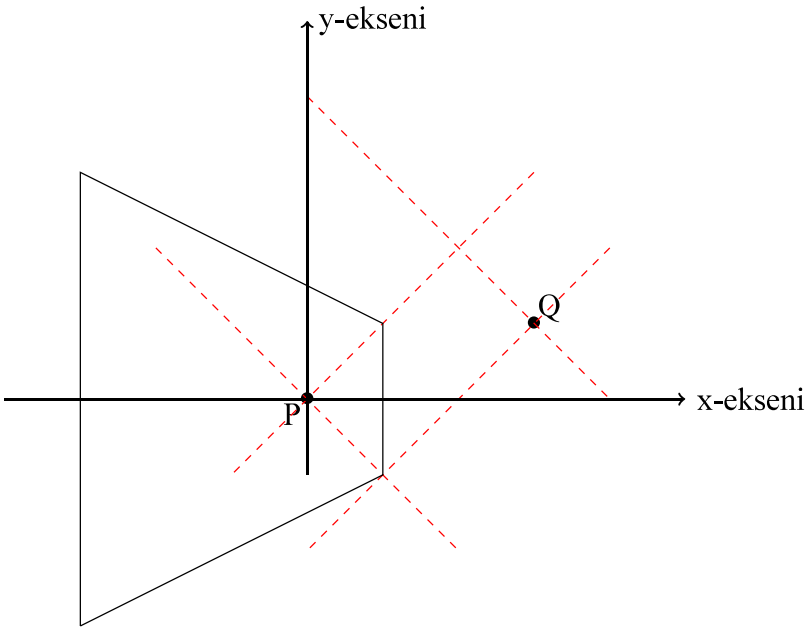
Sonuç olarak $k = \dfrac{1}{2}$ durumunda şekil 5.10 elde edilir.

$k = \dfrac{1}{3}$ iken

$$3d_M(X,P) = d_M(X,Q)$$

eşitliğine ulaşırız. Buradan

$$3max\{|x|,|y|\} = max\{|x-3|,|y-1|\} \tag{5.6}$$



Şekil 5.10 $P = (0, 0)$ ve $Q = (3, 1)$ için $k = \frac{1}{2}$

elde edilir. Bu eşitliğin aşağıdaki durumlara göre çözümlerini inceleyelim.

1) $|x| > |y|$, $|x-3| > |y-1|$ durumunda (5.6) eşitliği $3|x| = |x-3|$ dir.
$x < 0$ iken $(\frac{-3}{2}, \frac{-3}{2})$ ve $(\frac{-3}{2}, \frac{3}{2})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$0 < x < 3$ iken $(\frac{3}{4}, \frac{-3}{4})$ ve $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
2) $|x| > |y|$, $|x-3| < |y-1|$ durumunda (5.6) eşitliği $3|x| = |y-1|$ dir. Burada çözüm boş küme elde edilir.

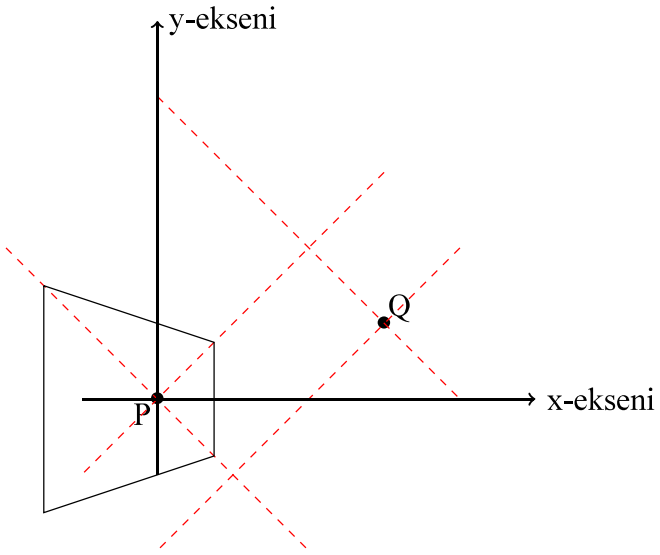
3) $|x| < |y|$, $|x-3| > |y-1|$ durumunda (5.6) eşitliği $3|y| = |x-3|$ dir. $y < 0$, $x < 3$ iken $(\frac{-3}{2}, \frac{-3}{2})$ ve $(\frac{3}{4}, \frac{-3}{4})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
$y > 0$, $x < 3$ iken $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ ve $(\frac{-3}{2}, \frac{3}{2})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

4) $|x| < |y|$, $|x-3| < |y-1|$ durumunda (5.6) eşitliği $3|y| = |y-1|$ dir. Burada çözüm boş küme elde edilir.

Sonuç olarak $k = \frac{1}{3}$ durumunda şekil 5.11 elde edilir.

$k = \frac{1}{4}$ iken

$$4d_M(X, P) = d_M(X, Q)$$



Şekil 5.11 $P = (0, 0)$ ve $Q = (3, 1)$ için $k = \dfrac{1}{3}$

eşitliğine ulaşırız. Buradan

$$4max\{|x|, |y|\} = max\{|x - 3|, |y - 1|\} \tag{5.7}$$

elde edilir. Bu eşitliğin aşağıdaki durumlara göre çözümlerini inceleyelim.

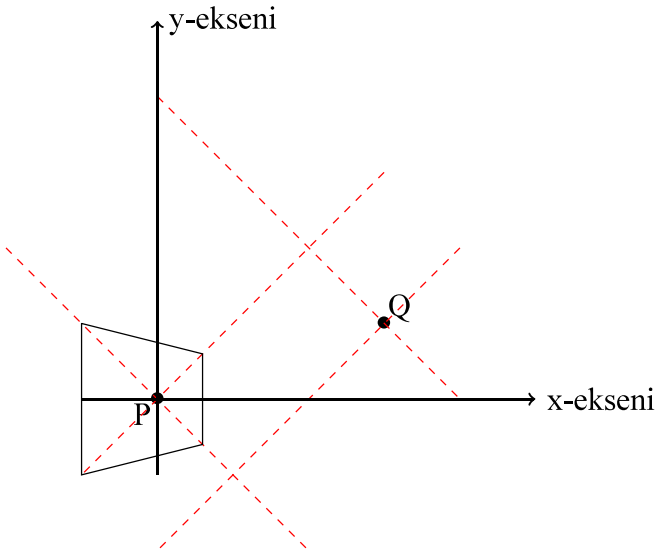
1) $|x| > |y|$, $|x - 3| > |y - 1|$ durumunda (5.7) eşitliği $4|x| = |x - 3|$ dir. $x < 0$ iken $(-1, -1)$ ve $(-1, 1)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder. $0 < x < 3$ iken $(\dfrac{3}{5}, \dfrac{-3}{5})$ ve $(\dfrac{3}{5}, \dfrac{3}{5})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

2) $|x| > |y|$, $|x - 3| < |y - 1|$ durumunda (5.7) eşitliği $4|x| = |y - 1|$ dir. Burada çözüm boş küme elde edilir.

3) $|x| < |y|$, $|x - 3| > |y - 1|$ durumunda (5.7) eşitliği $4|y| = |x - 3|$ dir. $y < 0$ ve $x < 3$ iken $(-1, -1)$ ve $(\dfrac{3}{5}, \dfrac{-3}{5})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder. $y > 0$, $x < 3$ iken $(\dfrac{3}{5}, \dfrac{3}{5})$ ve $(-1, 1)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

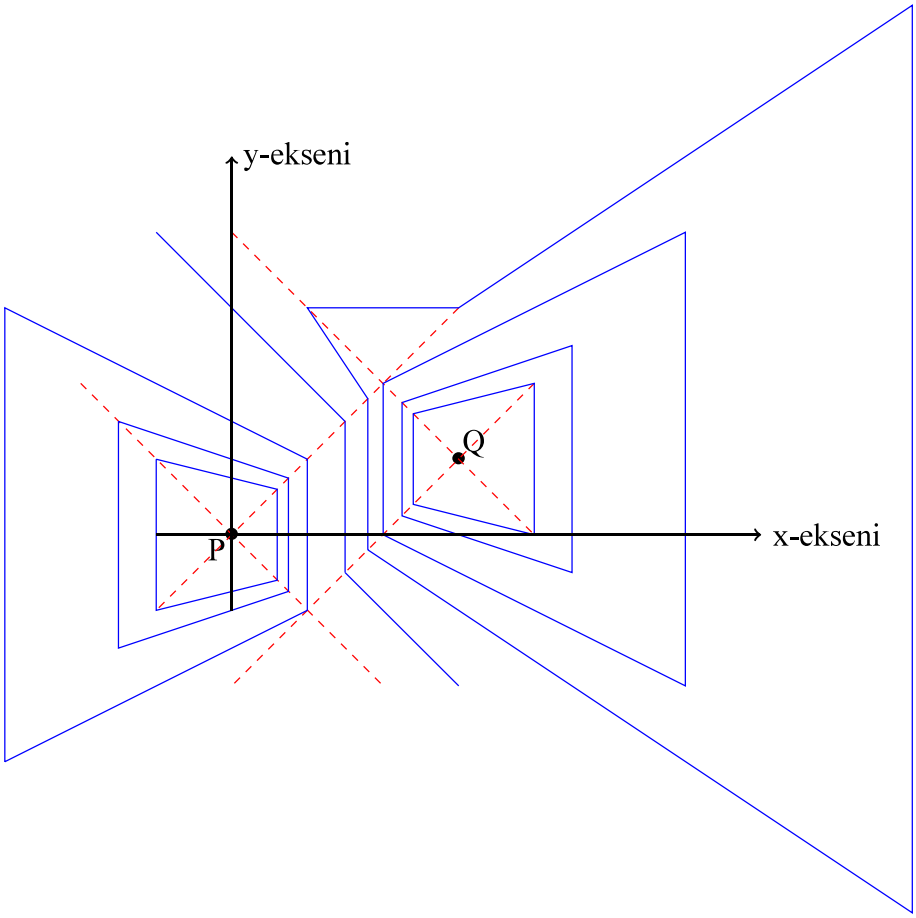
4) $|x| < |y|$, $|x - 3| < |y - 1|$ iken (5.7) eşitliği $4|y| = |y - 1|$ dir. Burada çözüm boş küme elde edilir.

Sonuç olarak $k = \dfrac{1}{4}$ durumunda şekil 5.12 elde edilir.



Şekil 5.12 $P = (0, 0)$ ve $Q = (3, 1)$ için $k = \frac{1}{4}$

Şekillerden görüldüğü gibi k değeri $0 < k < 1$ aralığında küçüldükçe Apollon kümesi P noktasına doğru yaklaşır. Şimdi $0 < k < 1$ aralığındaki ve $k \geq 1$ değerlerinde oluşan Apollon kümelerini birlikte şekil 5.13 da görelim.



Şekil 5.13 $P = (0,0)$ ve $Q = (3,1)$ için $A(P,Q;k)$ kümeleri

2) Noktaların aynı koordinat doğrusu üzerinde olma durumu

Bu bölümde P ve Q noktaları ortak koordinat doğrusu üzerinde alınsın. $P = (0,0)$ ve $Q = (1,0)$ noktaları x- ekseni üzerinde seçilsin. $A(P,Q;k)$ kümesini $k \geq 1$ ve $0 < k < 1$ değerlerine göre inceleyeceğiz. Önce $k \geq 1$ durumu ele alınıyor. Bunun için $k = 1,2,3,4$ değerlerine göre $A(P,Q;k)$ kümesini belirliyoruz.

$k = 1$ iken

$$d_M(X,P) = d_M(X,Q)$$

eşitliğini elde ederiz.

$$max\{|x|,|y|\} = max\{|x-1|,|y|\} \tag{5.8}$$

Burada aşağıdaki durumlara göre çözümleri inceleyelim.

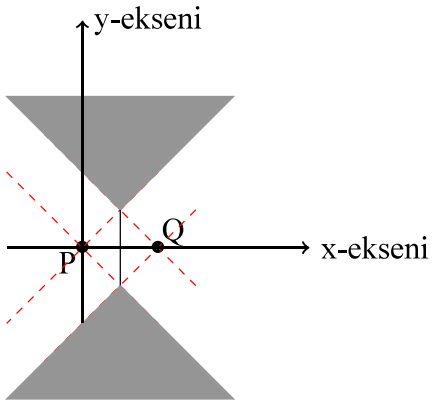
1) $|x| > |y|$, $|x-1| > |y|$ durumunda (5.8) eşitliği $|x| = |x-1|$ dir. $0 < x < 1$ iken $(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2})$ ve $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

2) $|x| > |y|$, $|x-1| < |y|$ durumunda (5.8) eşitliği $|x| = |y|$ dir. $x > 0$, $y < 0$ iken çözüm, $y = -x$ doğrusunun $(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2})$ başlangıç noktasına sahip $(1, -1)$ noktasında geçen ışındır. $x > 0$, $y > 0$ iken çözüm, $y = x$ doğrusunun $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ başlangıç noktasına sahip $(1, 1)$ noktasında geçen ışındır.

3) $|x| < |y|$, $|x-1| > |y|$ durumunda (5.8) eşitliği $|y| = |x-1|$ olur. $y < 0$, $x < 1$ iken çözüm $x - y = 1$ doğrusunun $(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2})$ basşlangıç noktasına sahip $(0, -1)$ noktasından geçen ışındır. $y > 0$, $x < 1$ iken çözüm $x + y = 1$ doğrusunun $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ basşlangıç noktasına sahip $(0, 1)$ noktasından geçen ışındır.

4) $|x| < |y|$, $|x-1| < |y|$ durumunda (5.8) eşitliği $|y| = |y|$ olur. $y < 0$ iken çözüm tüm bölgedir. $y > 0$ iken çözüm tüm bölgedir.

Sonuç olarak $k = 1$ durumunda şekil 5.14 elde edilir.



Şekil 5.14 $P = (0, 0)$ ve $Q = (1, 0)$ için $k = 1$

$k = 2$ iken

$$d_M(X, P) = 2d_M(X, Q)$$

eşitliğine ulaşırız. Buradan

$$max\{|x|, |y|\} = 2max\{|x-1|, |y|\} \tag{5.9}$$

elde edilir.Bu eşitliğin aşağıdaki durumlara göre çözümlerini inceleyelim.

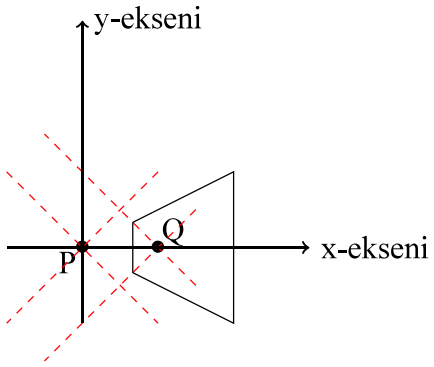
1) $|x| > |y|$, $|x-1| > |y|$ durumunda (5.9) eşitliği $|x| = 2|x-1|$ dir. $0 < x < 1$ iken $(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3})$ ve $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder. $x > 1$ iken $(2, -1)$ ve $(2, 1)$ noktalarından geçen doğru parçası elde edilir.

2) $|x| > |y|$, $|x-1| < |y|$ durumunda (5.9) eşitliği $|x| = 2|y|$ dir. $x < 0$, $y < 0$ iken $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ ve $(2,1)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder. $x < 0$, $y > 0$ iken $(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3})$ ve $(2,-1)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder. $x > 0$, $y < 0$ iken $(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3})$ ve $(2,-1)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder. $x > 0$, $y > 0$ iken $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ ve $(2,1)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

3) $|x| < |y|$, $|x-1| > |y|$ durumunda (5.9) eşittliği $|y| = 2|x-1|$ dir. Burada çözüm boş küme elde edilir.

4) $|x| < |y|$, $|x-1| < |y|$ durumunda (5.9) eşitliği $|y| = 2|y|$ dir. Burada çözüm boş küme elde edilir.

Sonuç olarak $k = 2$ durumunda şekil 5.15 elde edilir.



Şekil 5.15 $P = (0,0)$ ve $Q = (1,0)$ için $k = 2$

$k = 3$ iken

$$d_M(X,P) = 3d_M(X,Q)$$

eşitliğine ulaşırız. Buradan

$$max\{|x|,|y|\} = 3max\{|x-1|,|y|\} \tag{5.10}$$

elde edilir. Bu eşitliğin aşağıdaki durumlara göre çözümlerini inceleyelim.

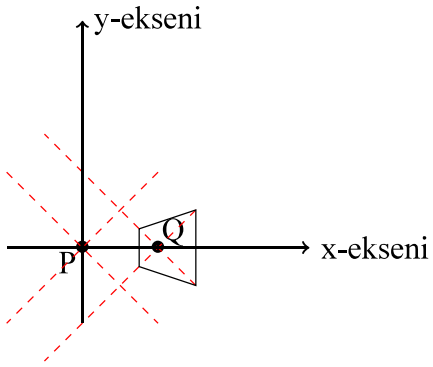
1) $|x| > |y|$, $|x-1| > |y|$ durumunda (5.10) eşitliği $|x| = 3|x-1|$ dir. $0 < x < 1$ iken $(\frac{3}{4}, \frac{-1}{4})$ ve $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder. $x > 1$ iken $(\frac{3}{2}, \frac{-1}{2})$ ve $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

2) $|x| > |y|$, $|x-1| < |y|$ durumunda (5.10) eşitliği $|x| = 3|y|$ dir. $x > 0$, $y < 0$ iken $(\frac{3}{4}, \frac{-1}{4})$ ve $(\frac{3}{2}, \frac{-1}{2})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder. $x > 0$, $y > 0$ iken $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ ve $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

3) $|x| < |y|$, $|x-1| > |y|$ durumunda (5.10) eşitliği $|y| = 3|x-1|$ dir. Burada çözüm boş küme elde edilir.

4) $|x| < |y|$, $|x-1| < |y|$ iken (5.10) eşitliği $|y| = 3|y|$ dir. Burada çözüm boş küme elde edilir.

Sonuç olarak $k = 3$ durumunda şekil 5.16 elde edilir.



Şekil 5.16 $P = (0,0)$ ve $Q = (1,0)$ için $k = 3$

$k = 4$ iken

$$d_M(X,P) = 4d_M(X,Q)$$

eşitliğine ulaşırız. Buradan

$$max\{|x|,|y|\} = 4max\{|x-1|,|y|\} \tag{5.11}$$

elde edilir. Bu eşitliğin aşağıdaki durumlara göre çözümlerini inceleyelim.

1) $|x| > |y|$, $|x-1| > |y|$ durumunda (5.11) eşitliği $|x| = 4|x-1|$ dir. $0 < x < 1$ iken $(\frac{4}{5}, \frac{-1}{5})$ ve $(\frac{4}{5}, \frac{1}{5})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder. $x > 1$ iken $(\frac{4}{3}, \frac{-1}{3})$ ve $(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

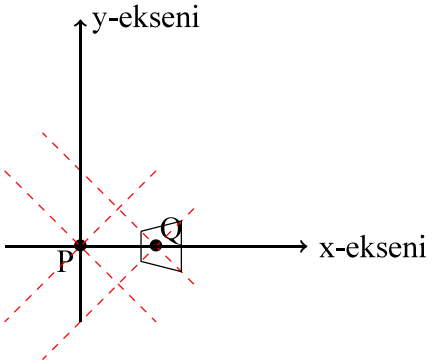
2) $|x| > |y|$, $|x-1| < |y|$ iken (5.11) eşitliği $|x| = 4|y|$ dir. $x > 0$, $y < 0$ iken $(\frac{4}{5}, \frac{-1}{5})$ ve $(\frac{4}{3}, \frac{-1}{3})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder. $x > 0$, $y > 0$

iken $(\frac{4}{5}, \frac{1}{5})$ ve $(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

3) $|x| < |y|$, $|x-1| > |y|$ durumunda (5.11) eşitliği $|y| = 4|x-1|$ dir. Burada çözüm boş küme elde edilir.

4) $|x| < |y|$, $|x-1| < |y|$ iken (5.11) eşitliği $|y| = 4|y|$ dir. Burada çözüm boş küme elde edilir.

Sonuç olarak $k = 4$ durumunda şekil 5.17 elde edilir.



Şekil 5.17 $P = (0,0)$ ve $Q = (1,0)$ için $k = 4$

Şekillerden görüldüğü gibi k değeri büyüdükçe Apollon kümesi Q noktasına doğru yaklaşır. Şimdi $0 < k < 1$ aralığında k değerlerini büyükten küçüğe doğru alarak Apollon kümelerini inceleyelim.

$k = \frac{3}{2}$ iken

$$2d_M(X,P) = 3d_M(X,Q)$$

eşitliğine ulaşırız. Buradan

$$2max\{|x|,|y|\} = 3max\{|x-1|,|y|\}$$

elde edilir.Bu eşitliğin aşağıdaki durumlara göre çözümlerini inceleyelim.

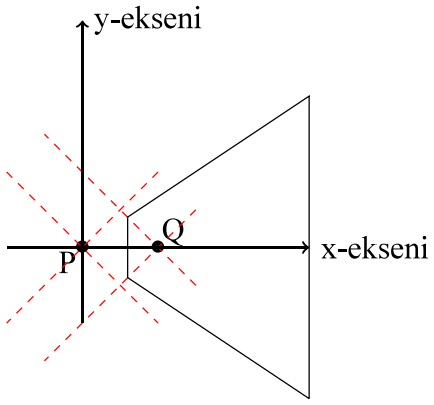
1) $|x| > |y|$, $|x-1| > |y|$ durumunda $2|x| = 3|x-1|$ dir. $0 < x < 1$ iken $(\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$ ve $(\frac{3}{5}, -\frac{2}{5})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder. $x > 1$ iken $(3,-2)$ ve $(3,2)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

2) $|x| > |y|$, $|x-1| < |y|$ durumunda $2|x| = 3|y|$ dir. $x > 0$, $y < 0$ iken $(3,-2)$ ve $(\frac{3}{5}, -\frac{2}{5})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder. $x > 0$ ve $y > 0$ iken $(3,2)$ ve $(\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

3) $|x| < |y|$, $|x-1| > |y|$ durumunda $2|y| = 3|x-1|$ dir. Burada çözüm boş küme elde edilir.

4) $|x| < |y|$, $|x-1| < |y|$ durumunda $2|y| = 3|y|$ dir. Burada çözüm boş küme elde edilir.

Sonuç olarak $k = \frac{3}{2}$ durumunda şekil 5.18 elde edilir.



Şekil 5.18 $P = (0,0)$ ve $Q = (1,0)$ için $k = \frac{3}{2}$

$k = \frac{1}{2}$ iken

$$2d_M(X,P) = d_M(X,Q)$$

eşitliğine ulaşırız. Buradan

$$2max\{|x|,|y|\} = max\{|x-1|,|y|\} \tag{5.12}$$

elde edilir.Bu eşitliğin aşağıdaki durumlara göre çözümlerini inceleyelim.

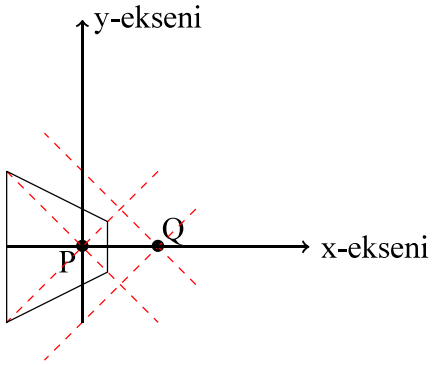
1) $|x| > |y|$, $|x-1| > |y|$ durumunda (5.12) eşitliği $2|x| = |x-1|$ dir. $x < 0$ iken $(-1,-1)$ ve $(-1,1)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder. $0 < x < 1$ iken $(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3})$ ve $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

2) $|x| > |y|$, $|x-1| < |y|$ durumunda (5.12) eşitliği $2|x| = |y|$ dir. Burada çözüm boş küme elde edilir.

3) $|x| < |y|$, $|x-1| > |y|$ durumunda (5.12) eşitliği $2|y| = |x-1|$ dir. $y < 0, x < 1$ iken $(-1,-1)$ ve $(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder. $y > 0$, $x < 1$ iken $(-1,1)$ ve $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

4) $|x| < |y|$, $|x-1| < |y|$ durumunda (5.12) eşitliği $2|y| = |y|$ dir. Burada çözüm boş küme elde edilir.

Sonuç olarak $k = \frac{1}{2}$ durumunda şekil 5.19 elde edilir.



Şekil 5.19 $P = (0,0)$ ve $Q = (1,0)$ için $k = \frac{1}{2}$

$k = \frac{1}{3}$ iken

$$3d_M(X,P) = d_M(X,Q)$$

eşitliğine ulaşırız. Buradan

$$3max\{|x|,|y|\} = max\{|x-1|,|y|\} \tag{5.13}$$

elde edilir. Bu eşitliğin aşağıdaki durumlara göre çözümlerini inceleyelim.

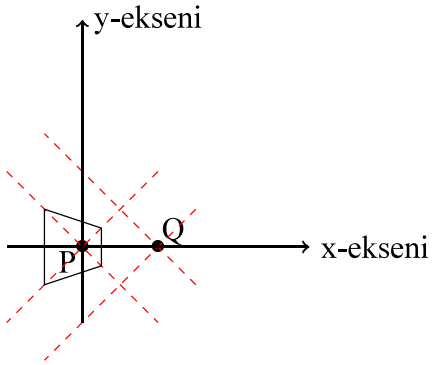
1) $|x| > |y|$, $|x-1| > |y|$ durumunda (5.13) eşitliği $3|x| = |x-1|$ dir. $x < 0$ iken $(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2})$ ve $(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder. $0 < x < 1$ iken $(\frac{1}{4}, \frac{-1}{4})$ ve $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

2) $|x| > |y|$, $|x-1| < |y|$ durumunda (5.13) eşitliği $3|x| = |y|$ dir. Burada çözüm boş küme elde edilir.

3) $|x| < |y|$, $|x-1| > |y|$ durumunda (5.13) eşitliği $3|y| = |x-1|$ dir. $y < 0$, $x < 1$ iken $(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2})$ ve $(\frac{1}{4}, \frac{-1}{4})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder. $y > 0$, $x < 1$ iken $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ ve $(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

4) $|x| < |y|$, $|x-1| < |y|$ durumunda (5.13) eşitliği $3|y| = |y|$ dir. Burada çözüm boş küme elde edilir.

Sonuç olarak $k = \frac{1}{3}$ durumunda şekil 5.20 elde edilir.



Şekil 5.20 $P = (0,0)$ ve $Q = (1,0)$ için $k = \frac{1}{3}$

$k = \frac{1}{4}$ iken

$$4d_M(X,P) = d_M(X,Q)$$

eşitliğine ulaşırız. Buradan

$$4max\{|x|,|y|\} = max\{|x-1|,|y|\} \tag{5.14}$$

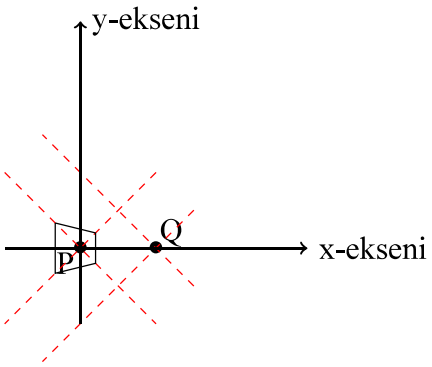
elde edilir. Bu eşitliğin aşağıdaki durumlara göre çözümlerini inceleyelim.

1) $|x| > |y|$, $|x-1| > |y|$ durumunda (5.14) eşitliği $4|x| = |x-1|$ dir. $x < 0$ iken $(\frac{-1}{3}, \frac{-1}{3})$ ve $(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder. $0 < x < 1$ iken $(\frac{1}{5}, \frac{-1}{5})$ ve $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

2) $|x| > |y|$, $|x-1| < |y|$ durumunda (5.14) eşitliği $4|x| = |y|$ dir. Burada çözüm boş küme elde edilir.

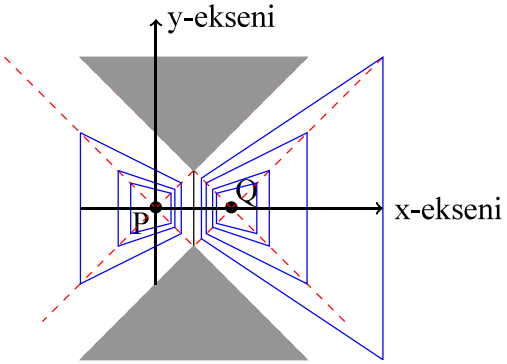
3) $|x| < |y|$, $|x-1| > |y|$ durumunda (5.14) eşitliği $4|y| = |x-1|$ dir. $y < 0$, $x < 1$ iken $(\frac{-1}{3}, \frac{-1}{3})$ ve $(\frac{1}{5}, \frac{-1}{5})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder. $y > 0$, $x < 1$ iken $(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3})$ ve $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.
4) $|x| < |y|$, $|x-1| < |y|$ durumunda (5.14) eşitliği $4|y| = |y|$ dir. Burada çözüm boş küme elde edilir.

Sonuç olarak $k = \frac{1}{4}$ durumunda şekil 5.21 elde edilir.



Şekil 5.21 $P = (0,0)$ ve $Q = (1,0)$ için $k = \frac{1}{4}$

Şekillerden görüldüğü gibi k değeri $0 < k < 1$ aralığında küçüldükçe Apollon kümesi P noktasına doğru yaklaşır. Şimdi $0 < k < 1$ aralığındaki ve $k \geq 1$ değerlerinde oluşan Apollon kümelerini birlikte şekil 5.22 da görelim.



Şekil 5.22 $P = (0,0)$ ve $Q = (1,0)$ için $A(P,Q;k)$ kümeleri

3) Noktaların aynı kılavuz doğrusu üzerinde olma durumu

Bu bölümde P ve Q noktaları ortak kılavuz doğrusu üzerinde alınsın. $P = (0,0)$ ve $Q = (2,2)$ noktaları $y = x$ doğrusu üzerinde seçilsin. $A(P,Q;k)$ kümesini $k \geq 1$ ve $0 < k < 1$ değerlerine göre inceleyeceğiz. Önce $k \geq 1$ durumu ele alınıyor. Bunun için $k = 1,2,3,4$ değerlerine göre $A(P,Q;k)$ kümesini belirliyoruz.

$k = 1$ iken

$$d_M(X,P) = d_M(X,Q)$$

eşitliğini elde ederiz.

$$max\{|x|,|y|\} = max\{|x-2|,|y-2|\} \tag{5.15}$$

Burada aşağıdaki durumlara göre çözümleri inceleyelim.

1) $|x| > |y|$, $|x-2| > |y-2|$ durumunda (5.15) eşitliği $|x| = |x-2|$ dir. Burada çözüm boş küme elde edilir.

2) $|x| > |y|$, $|x-2| < |y-2|$ durumunda (5.15) eşitliği $|x| = |y-2|$ dir. $x > 0$, $y < 2$ iken çözüm, $y = 2 - x$ doğrusunun $(1,1)$ başlangıç noktasına sahip $(2,0)$ noktasından geçen ışındır.

3) $|x| < |y|$, $|x-2| > |y-2|$ durumunda (5.15) eşitliği $|y| = |x-2|$ dir. $y > 0$, $x < 2$ iken çözüm, $y = -x + 2$ doğrusunun $(1,1)$ başlangıç noktasına sahip $(0,2)$ noktasından geçen ışındır.

4) $|x| < |y|$, $|x-2| < |y-2|$ durumunda (5.15) eşitliği $|y| = |y-2|$ dir. Burada çözüm boş küme elde edilir.

Sonuç olarak $k = 1$ durumunda şekil 5.23 elde edilir.

$k = 2$ iken

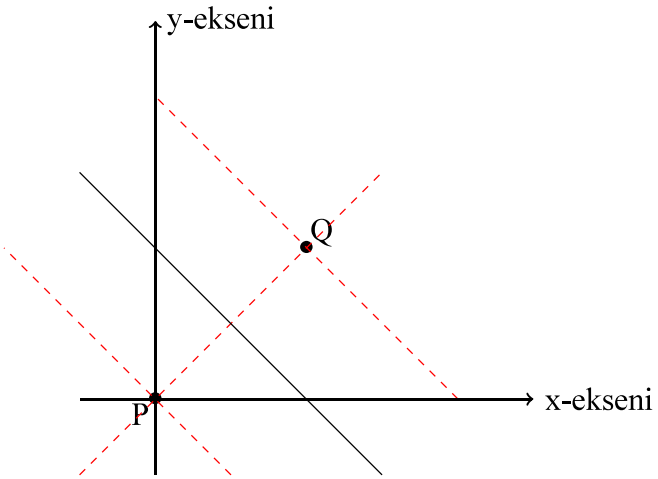
$$d_M(X,P) = 2d_M(X,Q)$$

eşitliğine ulaşırız. Buradan

$$max\{|x|,|y|\} = 2max\{|x-2|,|y-2|\} \tag{5.16}$$

elde edilir.Bu eşitliğin aşağıdaki durumlara göre çözümlerini inceleyelim.

1) $|x| > |y|$, $|x-2| > |y-2|$ durumunda (5.16) eşitliği $|x| = 2|x-2|$ dir. $x > 2$ iken çözüm $(4,0)$ ve $(4,4)$ noktalarından geçen doğru parçası elde edilir.



Şekil 5.23 $P = (0, 0)$ ve $Q = (2, 2)$ $k = 1$ için

2) $|x| > |y|$, $|x-2| < |y-2|$ durumunda (5.16) eşitliği $|x| = 2|y-2|$ dir. $x > 0$, $y < 2$ iken çözüm $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ ve $(4, 0)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

3) $|x| < |y|$, $|x-2| > |y-2|$ durumunda (5.16) eşitliği $|y| = 2|x-2|$ dir. $y > 0$, $x < 2$ iken çözüm $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ ve $(0, 4)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

4) $|x| < |y|$, $|x-2| < |y-2|$ durumunda (5.16) eşitliği $|y| = 2|y-2|$ dir. $y > 2$ iken çözüm $(0, 4)$ ve $(4, 4)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

Sonuç olarak $k = 2$ durumunda şekil 5.24 elde edilir.

$k = 3$ iken

$$d_M(X, P) = 3d_M(X, Q)$$

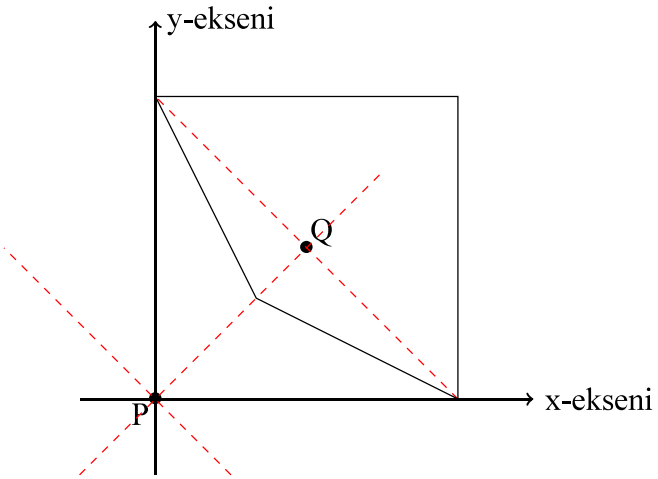
eşitliğine ulaşırız. Buradan

$$max\{|x|, |y|\} = 3max\{|x-2|, |y-2|\} \tag{5.17}$$

elde edilir. Bu eşitliğin aşağıdaki durumlara göre çözümlerini inceleyelim.

1) $|x| > |y|$, $|x-2| > |y-2|$ durumunda (5.17) eşitliği $|x| = 3|x-2|$ dir. $x > 2$ iken çözüm $(3, 1)$ ve $(3, 3)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

2) $|x| > |y|$, $|x-2| < |y-2|$ durumunda (5.17) eşitliği $|x| = 3|y-2|$ dir. $x > 0$, $y < 2$ iken çözüm $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ ve $(3, 1)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

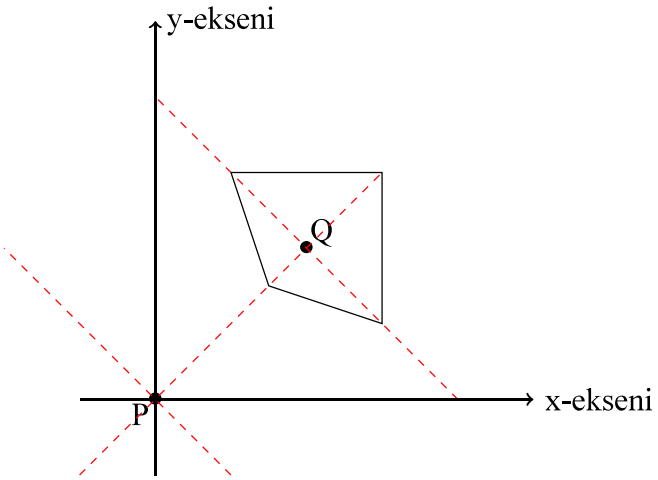


Şekil 5.24 $P = (0, 0)$ ve $Q = (2, 2)$ $k = 2$ için

3) $|x| < |y|$, $|x - 2| > |y - 2|$ durumunda (5.17) eşitliği $|y| = 3|x - 2|$ dir. $y > 0$, $x < 2$ iken çözüm $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ ve $(1, 3)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

4) $|x| < |y|$, $|x - 2| < |y - 2|$ durumunda (5.17) eşitliği $|y| = 3|y - 2|$ dir. $y > 2$ iken çözüm $(1, 3)$ ve $(3, 3)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

Sonuç olarak $k = 3$ durumunda şekil 5.25 elde edilir.



Şekil 5.25 $P = (0, 0)$ ve $Q = (2, 2)$ $k = 3$ için

$k = 4$ iken

$$d_M(X, P) = 4d_M(X, Q)$$

eşitliğine ulaşırız. Buradan

$$max\{|x|, |y|\} = 4max\{|x-2|, |y-2|\} \tag{5.18}$$

elde edilir. Bu eşitliğin aşağıdaki durumlara göre çözümlerini inceleyelim.

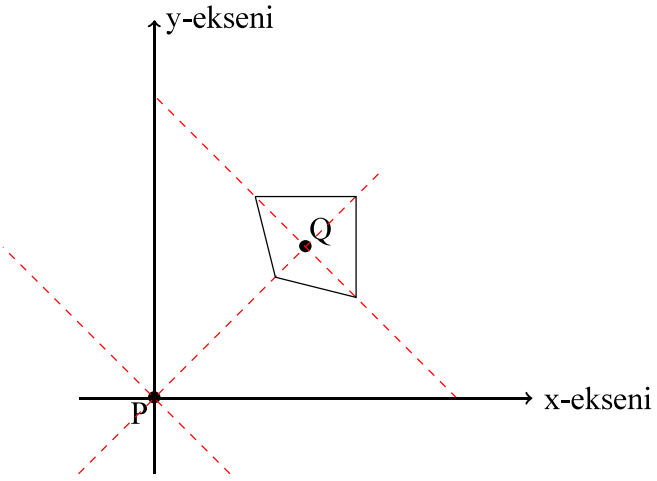
1) $|x| > |y|$, $|x-2| > |y-2|$ durumunda (5.18) eşitliği $|x| = 4|x-2|$ dir. $x > 2$ iken çözüm $(\frac{8}{3}, \frac{4}{3})$ ve $(\frac{8}{3}, \frac{8}{3})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

2) $|x| > |y|$, $|x-2| < |y-2|$ durumunda (5.18) eşitliği $|x| = 4|y-2|$ dir. $x > 0$, $y < 2$ iken çözüm $(\frac{8}{5}, \frac{8}{5})$ ve $(\frac{8}{3}, \frac{4}{3})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

3) $|x| < |y|$, $|x-2| > |y-2|$ durumunda (5.18) eşitliği $|y| = 4|x-2|$ dir. $y > 0$, $x < 2$ iken çözüm $(\frac{8}{5}, \frac{8}{5})$ ve $(\frac{4}{3}, \frac{8}{3})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

4) $|x| < |y|$, $|x-2| < |y-2|$ durumunda (5.18) eşitliği $|y| = 4|y-2|$ dir. $y > 2$ iken çözüm $(\frac{8}{3}, \frac{8}{3})$ ve $(\frac{4}{3}, \frac{8}{3})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

Sonuç olarak $k = 4$ durumunda şekil 5.26 elde edilir.



Şekil 5.26 $P = (0, 0)$ ve $Q = (2, 2)$ $k = 4$ için

Şekillerden görüldüğü gibi k değeri büyüdükçe Apollon kümesi Q noktasına doğru yaklaşır. Şimdi $0 < k < 1$ aralığında k değerlerini büyükten küçüğe doğru alarak Apollon kümelerini inceleyelim.

$k = \frac{3}{2}$ iken

$$2d_M(X,P) = 3d_M(X,Q)$$

eşitliğine ulaşırız. Buradan

$$2max\{|x|,|y|\} = 3max\{|x-2|,|y-2|\}$$

elde edilir.Bu eşitliğin aşağıdaki durumlara göre çözümlerini inceleyelim.

1) $|x| > |y|$, $|x-2| > |y-2|$ durumunda (5.22) eşitliği $2|x| = 3|x-2|$ olur. $x > 2$ iken çözüm $(6,-2)$ ve $(6,6)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

2) $|x| > |y|$, $|x-2| < |y-2|$ durumunda (5.22) eşitliği $2|x| = 3|y-2|$ olur. $x > 0$, $y < 2$ iken çözüm $(\frac{6}{5},\frac{6}{5})$ ve $(6,-2)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

3) $|x| < |y|$, $|x-2| > |y-2|$ durumunda (5.22) eşitliği $2|y| = 3|x-2|$ dir. $y > 0$, $x < 2$ iken çözüm $(\frac{6}{5},\frac{6}{5})$ ve $(-2,6)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

4) $|x| < |y|$, $|x-2| < |y-2|$ durumunda (5.22) eşitliği $2|y| = 3|y-2|$ dir. $y > 2$ iken çözüm $(6,6)$ ve $(-2,6)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

Sonuç olarak $k = \frac{3}{2}$ durumunda şekil 5.27 elde edilir.

$k = \frac{1}{2}$ iken

$$2d_M(X,P) = d_M(X,Q)$$

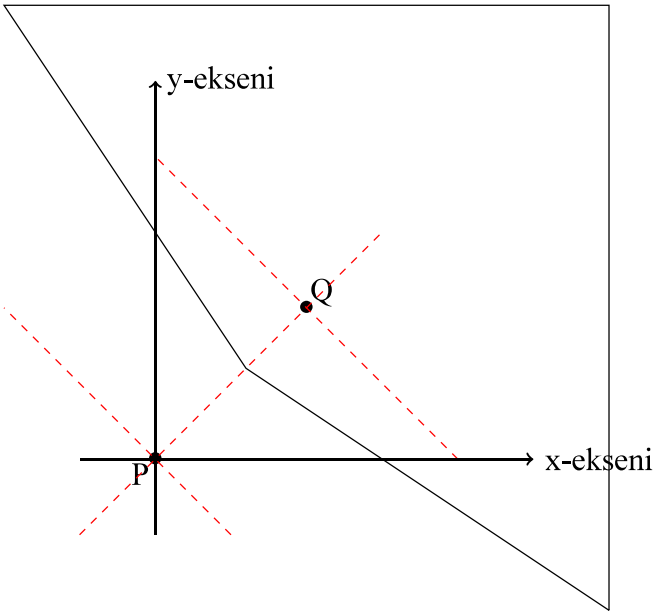
eşitliğine ulaşırız. Buradan

$$2max\{|x|,|y|\} = max\{|x-2|,|y-2|\} \tag{5.19}$$

elde edilir.Bu eşitliğin aşağıdaki durumlara göre çözümlerini inceleyelim.

1) $|x| > |y|$, $|x-2| > |y-2|$ durumunda (5.19) eşitliği $2|x| = |x-2|$ dir. $x < 0$ iken çözüm $(-2,-2)$ ve $(-2,2)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

2) $|x| > |y|$, $|x-2| < |y-2|$ durumunda (5.19) eşitliği $2|x| = |y-2|$ dir. $x > 0$, $y < 2$ iken çözüm $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ ve $(2,-2)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.



Şekil 5.27 $P = (0, 0)$ ve $Q = (2, 2)$, $k = \frac{3}{2}$ için

3) $|x| < |y|$, $|x-2| > |y-2|$ durumunda (5.19) eşitliği $2|y| = |x-2|$ dir. $y > 0$, $x < 2$ iken çözüm $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ ve $(-2, 2)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

4) $|x| < |y|$, $|x-2| < |y-2|$ durumunda (5.19) eşitliği $2|y| = |y-2|$ dir. $y < 0$ iken çözüm $(-2, -2)$ ve $(2, -2)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

Sonuç olarak $k = \frac{1}{2}$ durumunda şekil 5.28 elde edilir.

$k = \frac{1}{3}$ iken

$$3d_M(X, P) = d_M(X, Q)$$

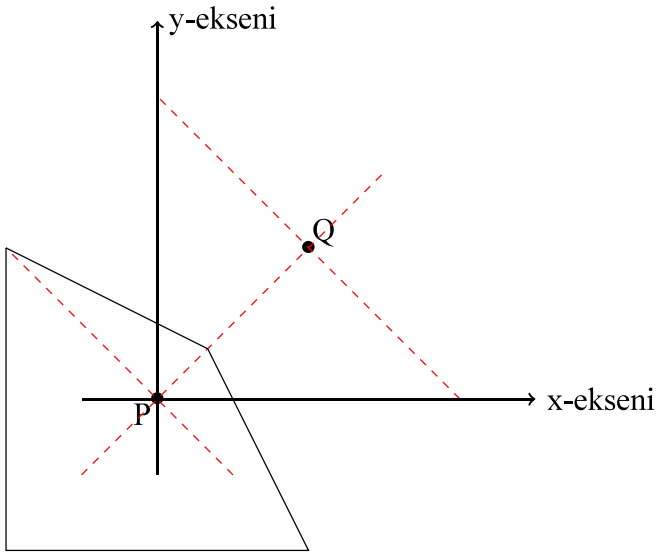
eşitliğine ulaşırız. Buradan

$$3max\{|x|, |y|\} = max\{|x-2|, |y-2|\} \tag{5.20}$$

elde edilir. Bu eşitliğin aşağıdaki durumlara göre çözümlerini inceleyelim.

1) $|x| > |y|$, $|x-2| > |y-2|$ durumunda (5.20) eşitliği $3|x| = |x-2|$ dir. $x < 0$ iken çözüm $(-1, -1)$ ve $(-1, 1)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

2) $|x| > |y|$, $|x-2| < |y-2|$ durumunda (5.20) eşitliği $3|x| = |y-2|$ dir. $x > 0$, $y < 2$ iken çözüm $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ve $(1, -1)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

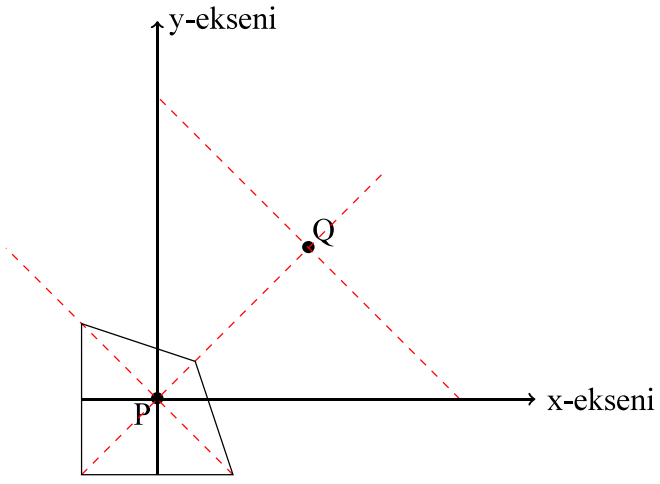


Şekil 5.28 $P = (0, 0)$ ve $Q = (2, 2)$, $k = \frac{1}{2}$ için

3) $|x| < |y|$, $|x - 2| > |y - 2|$ durumunda (5.20) eşitliği $3|y| = |x - 2|$ dir. $y > 0$, $x < 2$ iken çözüm $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ve $(-1, 1)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

4) $|x| < |y|$, $|x - 2| < |y - 2|$ durumunda (5.20) eşitliği $3|y| = |y - 2|$ dir. $y < 0$ iken çözüm $(-1, -1)$ ve $(1, -1)$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

Sonuç olarak $k = \frac{1}{3}$ durumunda şekil 5.29 elde edilir.



Şekil 5.29 $P = (0, 0)$ ve $Q = (2, 2)$ $k = \frac{1}{3}$ için

$k = \frac{1}{4}$ iken

$$4d_M(X,P) = d_M(X,Q)$$

eşitliğine ulaşırız. Buradan

$$4max\{|x|,|y|\} = max\{|x-2|,|y-2|\} \tag{5.21}$$

elde edilir. Bu eşitliğin aşağıdaki durumlara göre çözümlerini inceleyelim.

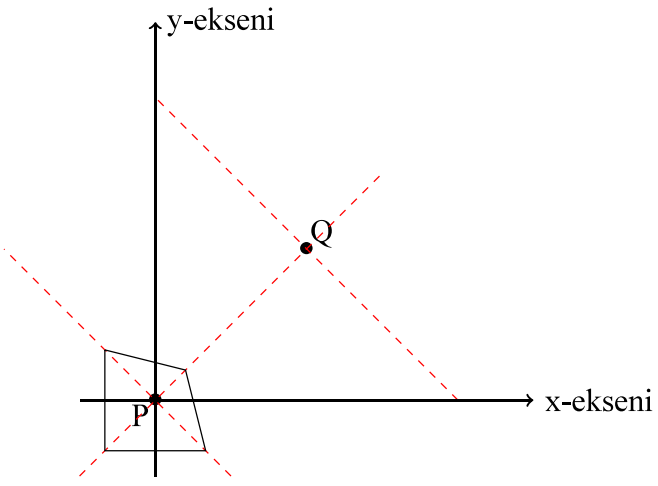
1) $|x| > |y|$, $|x-2| > |y-2|$ durumunda (5.21) eşitliği $4|x| = |x-2|$ dir. $x < 0$ iken çözüm $(\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3})$ ve $(\frac{-2}{3}, \frac{2}{3})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

2) $|x| > |y|$, $|x-2| < |y-2|$ durumunda (5.21) eşitliği $4|x| = |y-2|$ dir. $x > 0$, $y < 2$ iken çözüm $(\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$ ve $(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

3) $|x| < |y|$, $|x-2| > |y-2|$ durumunda (5.21) eşitliği $4|y| = |x-2|$ dir. $y > 0$, $x < 2$ iken çözüm $(\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$ ve $(\frac{-2}{3}, \frac{2}{3})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

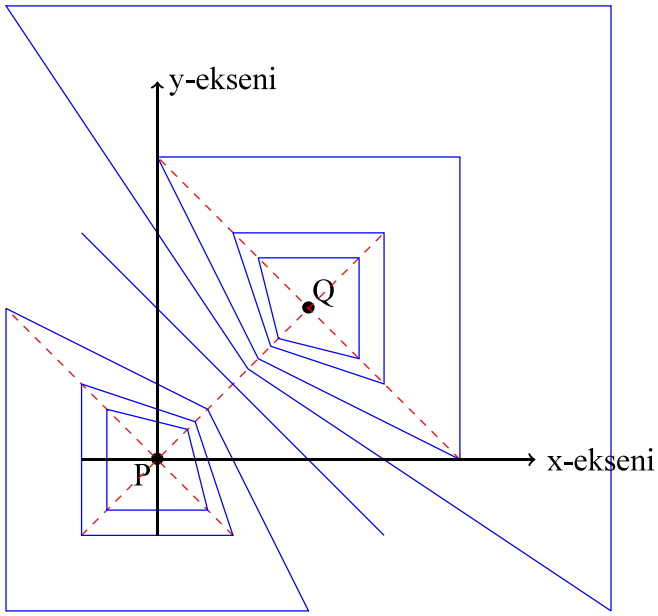
4) $|x| < |y|$, $|x-2| < |y-2|$ durumunda (5.21) eşitliği $4|y| = |y-2|$ dir. $y < 0$ iken çözüm $(\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3})$ ve $(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3})$ noktalarından geçen doğru parçasını ifade eder.

Sonuç olarak $k = \frac{1}{4}$ durumunda şekil 5.30 elde edilir.



Şekil 5.30 $P = (0,0)$ ve $Q = (2,2)$ $k = \frac{1}{4}$ için

Şekillerden görüldüğü gibi k değeri $0 < k < 1$ aralığında küçüldükçe Apollon kümesi P noktasına doğru yaklaşır. Şimdi $0 < k < 1$ aralığındaki ve $k \geq 1$ değerlerinde oluşan Apollon kümelerini birlikte şekil 5.31 de görelim.



Şekil 5.31 $P = (0, 0)$ ve $Q = (2, 2)$ için $A(P, Q; k)$ kümeleri

6. BULGULAR VE TARTIŞMA

Genel olarak yedi bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde, Öklidyen uzaklık, taksi uzaklığı ve maksimum uzaklık tanımlarına değinildi. Öklidyen düzlemde Apollon kümesinden bahsedildi. Tezle ilgili literatür araştırması verildikten sonra, üçüncü bölümde tez konusu ile ilgili gerekli olan taksi düzlemde ve maksimum düzlemdeki temel kavramlar sunuldu. Dördüncü bölümde, taksi apollon kümesi kavramı, özellikleri ve sınıflaması incelendi. k sabit sayısı üzerindeki koşullara göre taksi Apollon kümelerinin sınıflamaları verildi. Beşinci bölümde Apollon kümesi kavramı maksimum düzlemde tanımlandı. Özellikleri incelenerek sınıflaması verildi. Maksimum Apollon kümelerinin sınıflamaları için koşullar belirlendi.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, taksi düzlemde ve maksimum düzlemde Apollon kümeleri çalışılmıştır. Taksi düzlemde Apollon kümelerinin karakterizasyonu [Bahuaud] de verilmiştir. Burada önce taksi düzlemde Apollon kümeleri verilen iki noktanın konumlarına ve $k > 0$ sayısına göre incelenmiştir ve elde edilen sonuçlar teorem olarak verilmiştir. Verilen sabit noktaların belirttiği doğru parçasının eğimi ve k ile ilgili koşullara göre taksi Apollon kümeleri sınıflandırılmıştır. Daha sonra Apollon kümeleri maksimum düzlemde tanımlanmış, verilen iki noktanın konumlarına ve $k > 0$ sayısına göre bu kümeler ayrıntılı olarak incelenmiş. Burada da noktaların belirttiği doğru parçasının eğimi ve k sayısı arasındaki ilişkiye göre maksimum Apollon kümeleri sınıflandırılmıştır. Elde edilen sonuçlar verilmiştir.
Öklidyen düzlemde Apollon kümelerinin geometrik yeri bir çember iken, taksi Apollon kümesi ve maksimum Apollon kümesinin geometrik yerleri taksi çemberi ve maksimum çemberi olmadığı görülmüştür. Taksi Apollon kümelerinin ve maksimum Apollon kümelerinin sınıflamaları ile ilgili örnekler grafikleri Latex programında çizilmiş, grafikleri ile sunulmuştur.

Farklı Öklidyen olmayan düzlemlerde bu konu incelenerek literatüre katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Bahuaud, E., Crawford, S., Fish, A., Helliwell, D., Miller,A., Nungaray, F., Shergill, S., Tiffay, J., Velez, N.(2020), Apollonian Sets in taxicab geometry, Rocky Mountain J. Matlı. 50(1):25-39.

Çolakoğlu, H. B. (2005), Bazı Öklidyen Problemlerin Taksi Geometrideki Benzerleri, Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi.

Doris, J. Schattschneider (1984), The taxicab group, Amer. Matlı. Monthly 91, no. 7, 423-428.

Kaya, R.,Akça,Z.,Özcan,M. and Günaltılı, İ. (2000), General equation for taxicab conics and their classification, Mitt. Ges. Hamburg, Vol.19,no.O,pp.135-148.

KAYA, R. (2005), Area Formula for Taxicab Triangles, Pi Mu Epsilon Journal.

KRAUSE, E. F. (1986), "Taxicab Geometry : An Adventure in Non-Euclidean Geometry." Dover Publications, Inc., New York.

ÖZCAN, M. (2002), On tlıe Ratio of Directed Lengths in the Taxicab Plane and Related Properties, Missouri J. of Matlı. Sci.,14.

Salihova, S.(2006), Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi.