Öklidyen Düzlemdeki Bazı Geometrik Problemlerin Genelleştirilmiş Taksi Metrikli (Manhattan Metrikli) Geometriye Uygulanması

A.Kadir ALTINTAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ekim 2009

The Application of some Geometric Problems on Euclidean Plane Using Generalized Taxi Metric (Manhattan Metric)

A.Kadir ALTINTAŞ

THESIS for MASTER DEGREE

Department of Mathematics

October 2009

Öklidyen Düzlemdeki Bazı Geometrik Problemlerin Genelleştirilmiş Taksi Metrikli (Manhattan Metrikli) Geometriye Uygulanması

A.Kadir ALTINTAŞ

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Süheyla EKMEKÇİ

Ekim 2009

ONAY

Abdilkadir Altıntaş'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "**Öklidyen Düzlemdeki Bazı Geometrik Problemlerin Genelleştirilmiş Taksi Metrikli (Manhattan Metrikli) Geometriye Uygulanması"** başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Süheyla EKMEKÇİ

İkinci Danışman:

Yüksek Lisans Savunma Jürisi:

Üye : Doç. Dr. Münevver ÖZCAN

Üye : Doç Dr. Ziya AKÇA

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ayşe BAYAR

Üye : Yrd. Doç. Dr. Süheyla EKMEKÇİ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Aytaç KURTULUŞ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ……tarih ve …… sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK
Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tezde genelleştirilmiş taksi metriği (Manhattan Metriği) ile donatılmış düzlemde bazı geometrik problemler incelenmiştir.

İlk bölümde, genelleştirilmiş taksi metriği açıklandıktan sonra bu metrik kullanılarak Öklidyen düzlemdeki temel kavramların genelleştirilmiş taksi düzlemdeki karşılıkları verilmiştir.

İkinci bölümde, aynı metrik kullanılarak iki odaklı ve odak-doğrultman konikleri çalışılmıştır. İki odaklı genelleştirilmiş taksi koniklerden genelleştirilmiş taksi elipsleri ve genelleştirilmiş taksi hiperbol tanımlanıp, odakların farklı durumlarına göre elde edilen sonuçlar doğrultusunda tabloları oluşturulmuştur.

Üçüncü bölümde, genelleştirilmiş taksi düzlemde izometriler incelenmiştir.

Son bölümde, genelleştirilmiş taksi düzleminde trigonometrik fonksiyonlar tanımlanarak, bu trigonometrik fonksiyonların özellikleri incelenmiştir. Bölüm sonunda da bu doğru parçasının dönmelerden sonra uzunluğunun değişimi bir teoremle verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Taksi Geometri, Genelleştirilmiş Taksi Metriği, İzometri, Konik, Trigonometri

SUMMARY

In this thesis, some geometric problems in plane doneted by the generalized taxi metric (Manhattan Metric) is studied.

In first section, after the generalized taxi metric is explained , the basic concepts in the generalized taxi plane are given using this metric.

In second section, the generalized taxi conics with two-foci and focus-directrix are studied. After the generalized taxi elipse and hyperbola are defined their tables according to foci in different case are given. Then, in generalized taxi plane the focus directrix conics are defined and only generalized taxi parabola is studied. Finally its table is formed.

In the third section isometries of generalized taxi plane are studied.

In the last section, in generalized taxi plane trigonometry defined and their properties are examined. Finally , the change of a line segment length after rotations are given.

Keywords: Taxi Geometry, Generalized Taxi Metric, Isometry, Conic, Trigonometry

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarım boyunca, bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım Yrd. Doç. Dr. Süheyla EKMEKÇİ hocama, değerli fikirlerine başvurduğum diğer hocalarıma, yardımını ve desteğini esirgemeyen eşim Sibel ALTINTAŞ'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET v
SUMMARY vi
TEŞEKKÜR vii

1. TEMEL KAVRAMLAR 2
1.1 Genelleştirilmiş Taksi Düzlem 3
1.2 Genelleştirilmiş Taksi Çemberi 7
1.3 Genelleştirilmiş Taksi Düzlemde Doğruların Sınıflandırılması 7
1.4 Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı 8
1.5 En Kısa Uzaklık Kümesi 11
1.6 İki Noktanın Orta Kümesi 17

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ TAKSİ DÜZLEMDE KONİKLER 32
2.1 Genelleştirilmiş Taksi Düzlemde İki Odaklı Konikler 33
2.1.1 Genelleştirilmiş Taksi Çember 33
2.1.2 Genelleştirilmiş Taksi Elips 34
2.1.3 Genelleştirilmiş Taksi Hiperbol 46
2.2 Genelleştirilmiş Taksi Düzlemde Odak Doğrultman Konikleri 116
2.2.1 Genelleştirilmiş Taksi Parabol 116

3.GENELLEŞTİRLMİŞ TAKSİ DÜZLEMİN İZOMETRİLERİ 133
3.1 Genelleştirilmiş Taksi Düzlemde Ötelemeler 134
3.2 Genelleştirilmiş Taksi Düzlemde Yansımalar 134
3.2 Genelleştirilmiş Taksi Düzlemde Dönmeler 137

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ TAKSİ DÜZLEMDE TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR 141
4.1 Genelleştirilmiş Taksi Trigonometrik Fonksiyonlar 142
4.2 Genelleştirilmiş Taksi Trigonometrik Fonksiyonların Özellikleri 149
4.2.1 Genelleştirilmiş Taksi Trigonometrik Fonksiyonları İçin İndirgeme

Formülleri 151
4.2.2 Genelleştirilmiş Taksi Trigonometrik Fonksiyonları İçin Toplam Fark Formülleri 151
4.2.3 Genelleştirilmiş Taksi Trigonometrik Fonksiyonları İçin Yarım Açı Formülleri 152
4.3 Referans Açılı Genelleştirilmiş Taksi Genelleştirilmiş Taksi Trigonometrik Fonksiyonlar 153
4.4 Genelleştirilmiş Taksi Uzunluğunun Dönmeler Altındaki Değişimi 154

KAYNAKLAR 156

Bölüm 1

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, (Kaya, 2002), (Krause, 1975), (Çolakoğlu, 2005) esas alınarak, genelleştirilmiş taksi düzlem geometrisi için bazı kavram ve özellikler elde edilmiştir.

TEMEL KAVRAMLAR

1.1 $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ analitik düzlemde herhangi iki nokta olsun. $a > 0$ ve $b > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$d_G(P_1, P_2) = a|x_1 - x_2| + b|y_1 - y_2|$$

şeklinde tanımlanan $d_G : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ fonksiyonuna analitik düzlemde P_1 ve P_2 noktaları arasındaki *Genelleştirilmiş taksi (Manhattan) uzaklık fonksiyonu* adı verilir.

Genelleştirilmiş taksi düzleminin noktaları ve doğruları Öklid düzleminin noktaları ve doğrularının aynısıdır. Açı ölçümü de Öklidyen düzlemdeki aynı yolla yapılır. Analitik düzlemde alınan $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ noktaları arasındaki Öklid uzaklığı

$$d_E(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

dir.

Teorem 1.1.1 Analitik düzlemde tanımlanan genelleştirilmiş taksi uzaklık fonksiyonu bir metriktir.

Metrik tanımı gereğince genelleştirilmiş taksi uzaklık fonksiyonunun pozitif tanımlı, simetrik ve üçgen eşitsizliğini sağladığını göstermeliyiz. $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olsun. $a > 0$ ve $b > 0$ ve $|x_1 - x_2| \geqslant 0$ ve $|y_1 - y_2| \geqslant 0$ olduğundan

$$a|x_1 - x_2| + b|y_1 - y_2| \geqslant 0$$

olup $d_G(P_1, P_2) \geqslant 0$ dır. Ayrıca

$$d_G(P_1, P_2) = 0 \Rightarrow a|x_1 - x_2| + b|y_1 - y_2| = 0$$

olması gerektiğinden

$$a\,|x_1 - x_2| = b\,|y_1 - y_2| = 0$$

elde edilir. Yani $x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ olup $P_1 = P_2$ dir. Açıkca $P_1 = P_2$ ise $d_G(P_1, P_2) = 0$ dır. O halde

$$d_G(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$$

dir. Yani d_G-uzaklık fonksiyonu pozitif tanımlıdır. Üstelik mutlak değer tanımı gereğince

$$a\,|x_1 - x_2| = a\,|x_2 - x_1|$$

ve

$$b\,|y_1 - y_2| = b\,|y_2 - y_1|$$

olduğundan

$$d_G(P_1, P_2) = d_G(P_2, P_1)$$

dir. Bu nedenle d_G-uzaklık fonksiyonu simetriktir.

$P_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ olsun. Mutlak değer özelliği gereğince

$$|x_1 - x_2| \leqslant |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|$$

$$|y_1 - y_2| \leqslant |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$$

olduğundan

$$d_G\,(P_1, P_2) = a\,|x_1 - x_2| + b\,|y_1 - y_2|$$

$$\leqslant a\,|x_1 - x_3| + a\,|x_3 - x_2| + b\,|y_1 - y_3| + b\,|y_3 - y_2|$$

$$= (a\,|x_1 - x_3| + b\,|y_1 - y_3|) + (a\,|x_3 - x_2| + b\,|y_3 - y_2|)$$

$$= d_G\,(P_1, P_3) + d_G\,(P_3, P_2)$$

sonucuna ulaşılır. Böylece genelleştirilmiş taksi uzaklık fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar. O halde analitik düzlemde tanımlanan genelleştirilmiş taksi uzaklık fonksiyonu d_G bir metriktir.

Düzlemde $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P\,(x_2, y_2)$ noktaları arasındaki Öklid uzaklığı yerine d_G uzaklığı kullanılarak genelleştirilmiş taksi düzlem geometrisi oluşturulur.

Teorem 1.1.2 $P_1 = (x_1, y_1)\,,\ P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ farklı iki nokta olsun. P_1 ve P_2 noktalarından geçen doğrunun eğimi m olmak üzere

i. $m \in \mathbb{R}$ iken

$$d_E(P_1, P_2) = \left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{a + b \mid m \mid}\right) d_G(P_1, P_2)$$

ii. $m \to \infty$ iken

$$d_E(P_1, P_2) = \frac{1}{b} d_G(P_1, P_2)$$

iii. $m \to 0$ iken

$$d_E(P_1, P_2) = \frac{1}{a} d_G(P_1, P_2)$$

dir.

İspat: $P_1 = (x_1, y_1)\,,\ P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ farklı iki nokta ve P_1 ile P_2 noktalarından geçen doğrunun eğimide m olsun.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

dir.

i) $m \in \mathbb{R}$ iken $x_1 \neq x_2$ dir. Bu durumda

$$\frac{d_E(P_1, P_2)}{d_G(P_1, P_2)} = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{a\,|x_2 - x_1| + b\,|y_2 - y_1|}$$

$$= \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 \left(1 + \left(\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2\right)}}{\mid x_1 - x_2 \mid \left(a + b\left|\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right|\right)}$$

$$= \frac{\mid x_1 - x_2 \mid \sqrt{1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2}}{\mid x_1 - x_2 \mid \left(a + b\left|\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right|\right)}$$

$$d_E(P_1, P_2) = \left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{a + b\,|m|}\right) d_G(P_1, P_2)$$

dir.

ii) $m \to \infty$ iken $x_1 = x_2$ dir. Bu durumda

$$\frac{d_E(P_1, P_2)}{d_G(P_1, P_2)} = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{a\,|x_2 - x_1| + b\,|y_2 - y_1|}$$

$$\frac{d_E(P_1, P_2)}{d_G(P_1, P_2)} = \frac{\sqrt{(y_2 - y_1)^2}}{b\,|y_2 - y_1|}$$

$$\frac{d_E(P_1, P_2)}{d_G(P_1, P_2)} = \frac{1}{b}$$

$$d_E(P_1, P_2) = \frac{1}{b} d_G(P_1, P_2)$$

dir.

iii) $m \to 0$ iken $y_1 = y_2$ dir. Bu durumda

$$\frac{d_E(P_1, P_2)}{d_G(P_1, P_2)} = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{a\,|x_2 - x_1| + b\,|y_2 - y_1|}$$

$$\frac{d_E(P_1, P_2)}{d_G(P_1, P_2)} = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2}}{a\,|x_2 - x_1|}$$

$$\frac{d_E(P_1, P_2)}{d_G(P_1, P_2)} = \frac{1}{a}$$

$$d_E(P_1, P_2) = \frac{1}{a} d_G(P_1, P_2)$$

dir. Noktaları, doğruları analitik düzlemin nokta ve doğruları olan genelleştirilmiş taksi metriği ile donatılan düzlemi $\mathbb{R}^2_G$ ile gösterebiliriz.

Teorem 1.1.3 $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ analitik düzlemde farklı iki nokta olsun. $Q = (x, y)$, P_1 ve P_2 noktalarından geçen doğru üzerinde ve P_2 noktasından farklı bir nokta ise

$$\frac{d_E(P_1, Q)}{d_E(P_2, Q)} = \frac{d_G(P_1, Q)}{d_G(P_2, Q)}$$

dir.

İspat: $P_1 = Q$ iken eşitliğin sağlandığı açıktır. $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi m olsun. Teorem 1.1.2 gereğince $m \in \mathbb{R}$ iken

$$d_E(P_1, Q) = \left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{a + b\,|m|} \right) d_G(P_1, Q)$$

ve

$$d_E(P_2, Q) = \left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{a + b\,|m|} \right) d_G(P_2, Q)$$

olduğundan

$$\frac{d_E(P_1, Q)}{d_E(P_2, Q)} = \frac{d_G(P_1, Q)}{d_G(P_2, Q)}$$

dir.

$m \to \infty$ iken

$$d_E(P_1, Q) = \frac{1}{b} d_G(P_1, Q)$$

ve

$$d_E(P_2, Q) = \frac{1}{b} d_G(P_2, Q)$$

olduğundan

$$\frac{d_E(P_1, Q)}{d_E(P_2, Q)} = \frac{d_G(P_1, Q)}{d_G(P_2, Q)}$$

bulunur.

$m \to 0$ iken

$$d_E(P_1, Q) = \frac{1}{a} d_G(P_1, Q)$$

ve

$$d_E(P_2, Q) = \frac{1}{a} d_G(P_2, Q)$$

olduğundan

$$\frac{d_E(P_1,Q)}{d_E(P_2,Q)} = \frac{d_G(P_1,Q)}{d_G(P_2,Q)}$$

bulunur.

1.2 Genelleştirilmiş Taksi Çemberi

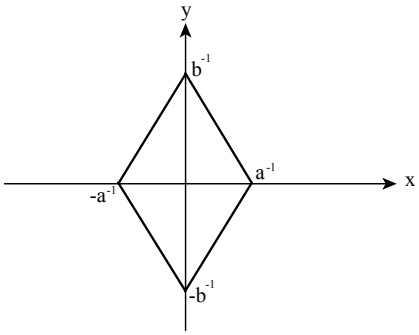
Genelleştirilmiş taksi düzlemde sabit bir noktadan sabit bir genelleştirilmiş taksi uzaklığındaki noktaların geometrik yerine *genelleştirilmiş taksi çemberi* denir. Sabit noktaya genelleştirilmiş taksi çemberinin merkezi, sabit genelleştirilmiş taksi uzaklığa genelleştirilmiş taksi çemberin yarıçapı denir. Analitik düzlemde merkezi $M = (m,n)$ ve yarıçapı r olan genelleştirilmiş taksi çemberin denklemi

$$Ç = \{(x,y) : a\,|x-m| + b\,|y-n| = r, a, b > 0, x, y \in \mathbb{R}\}$$

biçimindedir. Özel olarak genelleştirilmiş taksi birim çember

$$Ç = \{(x,y) : a\,|x| + b\,|y| = 1, a, b > 0, x, y \in \mathbb{R}\}$$

dir. (Bkz. Şekil 1.2.1)

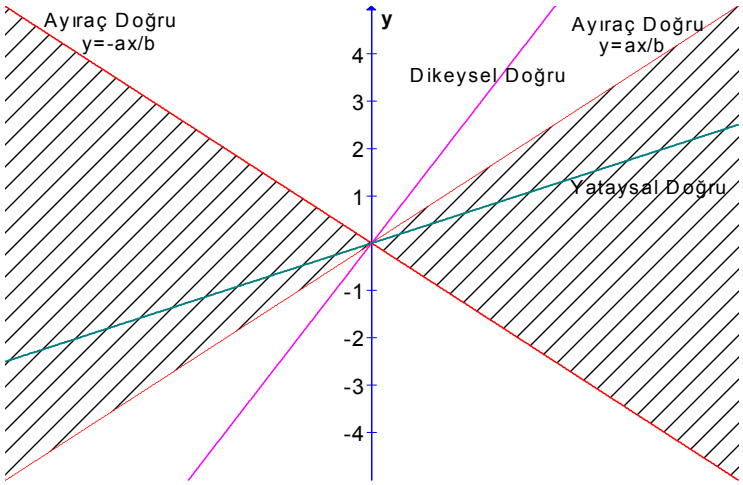


Şekil 1.2.1

1.3 Genelleştirilmiş Taksi Düzlemde Doğruların Sınıflandırılması

Genelleştirilmiş taksi düzlemde $mx + ny + k = 0$ denklemli ℓ doğrusuna, $\left|-\frac{m}{n}\right| > \frac{a}{b}$ ise *dikeysel doğru,* $\left|-\frac{m}{n}\right| < \frac{a}{b}$ ise *yataysal doğru,* $\left|-\frac{m}{n}\right| = \frac{a}{b}$ ise

ayıraç doğru denir. (Bkz. Şekil 1.3.1).



Şekil 1.3.1

1.4 Genelleştirilmiş Taksi Düzlemde Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı

Genelleştirilmiş taksi düzlemde bir P noktasının bir ℓ doğrusuna olan uzaklığı, P nin doğrusu üzerindeki noktalara olan uzaklıklarından en küçüğü olarak tanımlanır. Kısaca

$$d_G(P, \ell\ ) = \min_{x \in \ell} d_G(X, P)$$

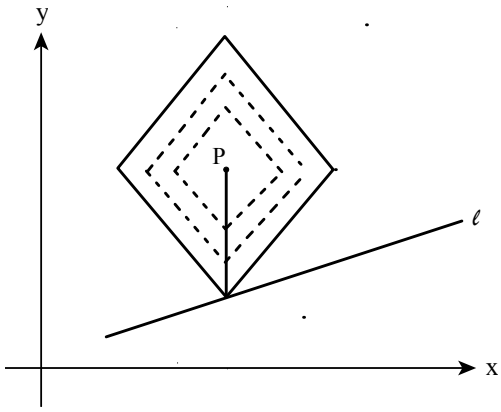
dir.

Genelleştirilmiş taksi düzlemde bir P noktasının ℓ doğrusuna uzaklığını bulmak için merkezi P noktası olan bir genelleştirilmiş taksi çemberinin yarıçapını çember doğruya değene kadar büyütmektir. Çember doğruya değdiği anda çemberin yarıçapı P noktasının doğrusuna olan en kısa uzaklığı olur.

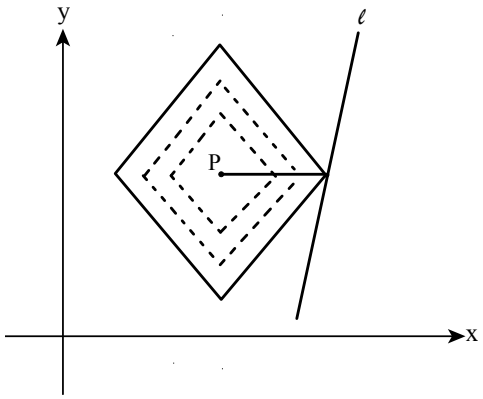
i. Eğer ℓ yataysal bir doğru ise P noktasının ℓ doğrusuna olan uzaklığı P den ℓ ye y-eksenine paralel öklidyen uzaklığın b katıdır. (Bkz. Şekil 1.4.1)

ii. Eğer ℓ dikeysel bir doğru ise P noktasının ℓ doğrusuna olan uzaklığı P den ℓ ye x-eksenine paralel öklidyen uzaklığın a katıdır. (Bkz. Şekil 1.4.2)

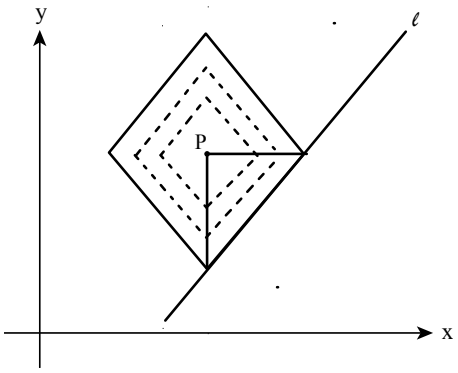
iii. Eğer ℓ ayıraç doğru ise P noktasının ℓ doğrusuna olan uzaklığı P den ℓ ye y-eksenine paralel öklidyen uzaklığın b katı veya P den ℓ ye x-eksenine paralel öklidyen uzaklığın a katıdır. (Bkz. Şekil 1.4.3)



Şekil 1.4.1



Şekil 1.4.2



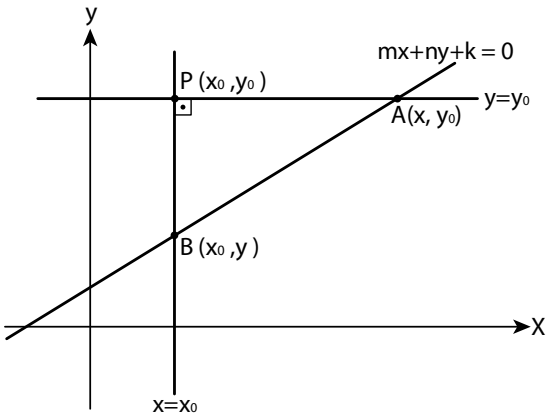
Şekil 1.4.3

Teorem 1.4.1 Genelleştirilmiş taksi düzlemde bir $P = (x_0, y_0)$ noktası verilsin. P noktasının $mx + ny + k = 0$ denklemli ℓ doğrusuna olan en kısa uzaklığı

$$d_G(P, \ell) = \frac{|mx_0 + ny_0 + k|}{\max\left\{\frac{|m|}{a}, \frac{|n|}{b}\right\}}$$

İspat: Genelleştirilmiş taksi düzlemde bir $P = (x_0, y_0)$ noktası alalım. $x = x_0$ ve $y = y_0$ doğrularını çizelim.

$x = x_0$ doğrusunun $mx + ny + k = 0$ doğrusu ile kesişimi $A = (x, y_0)$ ve $y = y_0$ doğrusunun $mx + ny + k = 0$ doğrusu ile kesişimi $B = (x_0, y)$ olsun. (Bkz. Şekil 1.4.4)



Sekil 1.4.4

A noktası doğrunun denklemini sağlayacağından $mx + ny_0 + k = 0$ dır. Buradan $x = \dfrac{-k - ny_0}{m}$ bulunur. P ve A noktaları arasındaki genelleştirilmiş taksi uzaklık yazılırsa

$$d_G(P, A) = a\,|x_0 - x| + b\,|y_0 - y_0|$$
$$d_G(P, A) = a\left|x_0 - \left(\frac{-k - ny_0}{m}\right)\right|$$
$$d_G(P, A) = a\left|\frac{mx_0 + ny_0 + k}{m}\right|$$
$$d_G(P, A) = a\frac{|mx_0 + ny_0 + k|}{|m|}$$
$$d_G(P, A) = \frac{|mx_0 + ny_0 + k|}{\frac{|m|}{a}}$$

dır.

Aynı şekilde B noktası doğrunun denklemini sağlayacağından $mx_0 + ny + k = 0$ dır. Buradan $y = \dfrac{-k - mx_0}{n}$ bulunur. P ve B noktaları arasındaki

genelleştirilmiş taksi uzaklık yazılırsa

$$d_G(P,A) = a\,|x_0 - x_0| + b.\,|y_0 - y|$$
$$d_G(P,A) = b\left|y_0 - \left(\frac{-k - mx_0}{n}\right)\right|$$
$$d_G(P,A) = b\left|\frac{mx_0 + ny_0 + k}{n}\right|$$
$$d_G(P,A) = b\frac{|mx_0 + ny_0 + k|}{|n|}$$
$$d_G(P,A) = \frac{|mx_0 + ny_0 + k|}{\frac{|n|}{b}}$$

dir. $d_G(P,\ell)$ nin minimum olması için $\frac{|m|}{a}$ ve $\frac{|n|}{b}$ nin maksimumu seçilirse

$$d_G(P,\ell) = \frac{|mx_0 + ny_0 + k|}{\max\left\{\frac{|m|}{a}, \frac{|n|}{b}\right\}}$$

bulunur.

1.5 En Kısa Uzaklık Kümesi

A , $B \in \mathbb{R}^2_G$ için

$$\left\{X \in \mathbb{R}^2_G : d_G(A,X) + d_G(X,B) = d_G(A,B)\right\}$$

kümesine A ve B noktalarının d_G uzaklığına göre *en kısa uzaklık kümesi* denir.

Teorem 1.5.1: Genelleştirilmiş taksi düzlemde verilen $A = (x_1, y_1)$ ve $B = (x_2, y_2)$ noktaları arasındaki en kısa uzaklık kümesi;

i. A ve B noktaları aynı apsise sahiplerse $d_G(A,\ B) = b\,|y_1 - y_2|$ dir. (Bkz. Şekil 1.5.1)

ii. A ve B noktaları aynı ordinata sahiplerse $d_G(A,\ B) = a\,|x_1 - x_2|$ dir. (Bkz. Şekil 1.5.1)

iii. A ve B noktaları farklı apsis ve ordinata sahiplerse köşelerinin ikisi A ve B olan ayrıca kenarları eksenlere paralel olan dikdörtgensel bölgedir. (Bkz. Şekil 1.5.2)

İspat:

i. Genelleştirilmiş taksi düzlemde $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ve $P(x, y)$ noktalarını alalım.

1) $x < x_1 = x_2$, $y < y_1 < y_2$ ise

$$\begin{aligned} d_G(A,\ B) &= d_G(A,\ P) + d_G(P,\ B) \\ a\,|x_1 - x_2| + b\,|y_1 - y_2| &= a\,|x_1 - x| + b\,|y_1 - y| + a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| \\ b\,(y_2 - y_1) &= a\,(x_1 - x) + b\,(y_1 - y) + a\,(x_1 - x) + b\,(y_2 - y) \\ 0 &= 2ax_1 - 2ax + 2by_1 - 2by \\ ax_1 - ax &= by - by_1 \end{aligned}$$

bulunur. Çözüm kümesi boş kümedir.

2) $x < x_1 = x_2$, $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$ ise

$$\begin{aligned} d_G(A,\ B) &= d_G(A,\ P) + d_G(P,\ B) \\ a\,|x_1 - x_2| + b\,|y_1 - y_2| &= a\,|x_1 - x| + b\,|y_1 - y| + a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| \\ b\,(y_2 - y_1) &= a\,(x_1 - x) + b\,(y - y_1) + a\,(x_1 - x) + b\,(y_2 - y) \\ 0 &= 2ax_1 - 2ax \\ x &= x_1 \end{aligned}$$

bulunur. Çözüm kümesi boş kümedir.

3) $x < x_1 = x_2$, $y_1 < y_2 < y$ ise

$$\begin{aligned} d_G(A,\ B) &= d_G(A,\ P) + d_G(P,\ B) \\ a\,|x_1 - x_2| + b\,|y_1 - y_2| &= a\,|x_1 - x| + b\,|y_1 - y| + a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| \\ b\,(y_2 - y_1) &= a\,(x_1 - x) + b\,(y - y_1) + a\,(x_1 - x) + b\,(y - y_2) \\ 0 &= 2ax_1 - 2ax - 2by_2 + 2by \\ ax - ax_1 &= by - by_2 \end{aligned}$$

bulunur. Çözüm kümesi boş kümedir.

4. $x \geqslant x_1 = x_2$, $y < y_1 < y_2$ ise

$$\begin{aligned} d_G(A,\ B) &= d_G(A,\ P) + d_G(P,\ B) \\ a\,|x_1 - x_2| + b\,|y_1 - y_2| &= a\,|x_1 - x| + b\,|y_1 - y| + a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| \\ b\,(y_2 - y_1) &= a\,(x - x_1) + b\,(y_1 - y) + a\,(x - x_1) + b\,(y_2 - y) \\ 0 &= 2ax - 2ax_1 + 2by_1 - 2by \\ 2ax_1 - 2ax &= 2by_1 - 2by \end{aligned}$$

bulunur. Çözüm kümesi boş lümedir.

5) $x \geqslant x_1 = x_2$, $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$ ise

$$\begin{aligned} d_G(A,\ B) &= d_G(A,\ P) + d_G(P,\ B) \\ a\,|x_1 - x_2| + b\,|y_1 - y_2| &= a\,|x_1 - x| + b\,|y_1 - y| + a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| \\ b\,(y_2 - y_1) &= a\,(x - x_1) + b\,(y - y_1) + a\,(x - x_1) + b\,(y_2 - y) \\ 0 &= 2ax - 2ax_1 \\ x &= x_1 \end{aligned}$$

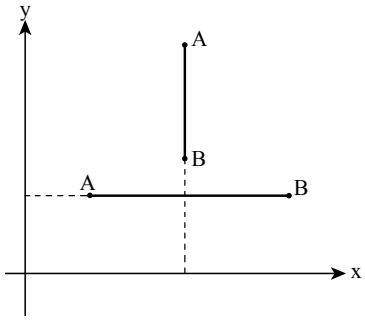
bulunur. Çözüm kümesi $x = x_1$ doğrusudur.

6) $x \geqslant x_1 = x_2$, $y_1 < y_2 < y$ ise

$$\begin{aligned} d_G(A,\ B) &= d_G(A,\ P) + d_G(P,\ B) \\ a\,|x_1 - x_2| + b\,|y_1 - y_2| &= a\,|x_1 - x| + b\,|y_1 - y| + a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| \\ b\,(y_2 - y_1) &= a\,(x - x_1) + b\,(y - y_1) + a\,(x - x_1) + b\,(y - y_2) \\ 0 &= 2ax - 2ax_1 + 2by - 2by_2 \\ by_2 - by &= ax - ax_1 \end{aligned}$$

bulunur. Çözüm kümesi boş kümedir. Bütün durumlar birlikte düşünüldüğünde aynı apsise sahip olan A ve B noktalarının en kısa uzaklık kümesi bu iki noktayı birleştiren doğru parçasıdır.

ii. A ve B noktaları aynı ordinata sahiplerse A ve B noktalarının en kısa uzaklık kümesi bu iki noktayı birleştiren doğru parçasıdır. bulunur. İspatı **i** ye benzer şekilde yapılır.



Şekil 1.5.1

iii. A ve B noktaları farklı apsis ve ordinata sahipseler $d_G(A,\ X) + d_G(X,\ B) = d_G(A,\ B)$ eşitliğini farklı durumlar için inceleyelim.

1) $x < x_1$, $y < y_1$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x_1 - x| + b\,|y_1 - y| + a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| &= a\,|x_1 - x_2| + b\,|y_1 - y_2| \\ a\,(x_1 - x) + b\,(y_1 - y) + a\,(-x + x_2) + b\,(-y + y_2) &= a\,(-x_1 + x_2) + b\,(-y_1 + y_2) \\ ax_1 - ax + by_1 - by - ax + ax_2 - by + by_2 &= -ax_1 + ax_2 - by_1 + by_2 \\ 2ax_1 - 2ax + 2by_1 - 2by &= 0 \\ ax + by &= ax_1 + by_1 \end{aligned}$$

$x < x_1$, $y < y_1$ olduğundan $ax + by < ax_1 + by_1$ dir. O halde çözüm kümesi boş kümedir.

2) $x < x_1$, $y_1 \leqslant y < y_2$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x_1 - x| + b\,|y_1 - y| + a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| &= a\,|x_1 - x_2| + b\,|y_1 - y_2| \\ a\,(x_1 - x) + b\,(-y_1 + y) + a\,(-x + x_2) + b\,(-y + y_2) &= a\,(-x_1 + x_2) + b\,(-y_1 + y_2) \\ ax_1 - ax + by_1 + by - ax + ax_2 - by + by_2 &= -ax_1 + ax_2 - by_1 + by_2 \\ 2ax &= 2ax_1 \\ x &= x_1 \end{aligned}$$

olduğundan çözüm kümesi $x = x_1$ doğrusudur.

3) $x_1 < x$, $y < y_1$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x_1 - x| + b\,|y_1 - y| + a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| &= a\,|x_1 - x_2| + b\,|y_1 - y_2| \\ a\,(-x_1 + x) + b\,(y_1 - y) + a\,(-x + x_2) + b\,(-y + y_2) &= a\,(-x_1 + x_2) + b\,(-y_1 + y_2) \\ -ax_1 + ax + by_1 - by - ax + ax_2 - by + by_2 &= -ax_1 + ax_2 - by_1 + by_2 \\ 2by_1 - 2by &= 0 \\ 2by &= 2by_1 \\ y &= y_1 \end{aligned}$$

olduğundan çözüm kümesi $y = y_1$ doğrusudur.

4) $x < x_1$, $y \geqslant y_2$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x_1 - x| + b\,|y_1 - y| + a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| &= a\,|x_1 - x_2| + b\,|y_1 - y_2| \\ a\,(x_1 - x) + b\,(-y_1 + y) + a\,(-x + x_2) + b\,(y - y_2) &= a\,(-x_1 + x_2) + b\,(-y_1 + y_2) \\ ax_1 - ax - by_1 + by - ax + ax_2 + by - by_2 &= -ax_1 + ax_2 - by_1 + by_2 \\ 2ax_1 - 2ax + 2by - 2by_2 &= 0 \\ -ax + by &= -ax_1 + by_2 \end{aligned}$$

$x < x_1$, $y > y_2$ olduğundan $-ax + by > -ax_1 + by_2$ dir. O halde çözüm kümesi boş kümedir.

5) $x \geqslant x_2$, $y_1 > y$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x_1 - x| + b\,|y_1 - y| + a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| &= a\,|x_1 - x_2| + b\,|y_1 - y_2| \\ a\,(-x_1 + x) + b\,(y_1 - y) + a\,(x - x_2) + b\,(-y + y_2) &= a\,(-x_1 + x_2) + b\,(-y_1 + y_2) \\ -ax_1 + ax + by_1 - by + ax - ax_2 - by + by_2 &= -ax_1 + ax_2 - by_1 + by_2 \\ 2ax_1 + 2by_1 &= 2ax_2 + 2by \\ ax + by_1 &= ax_2 + by \end{aligned}$$

$x \geqslant x_2$, $y_1 > y$ olduğundan $ax + by_1 > ax_2 + by$ dir. O halde çözüm kümesi boş kümedir.

6) $x \geqslant x_2$, $y > y_2$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x_1 - x| + b\,|y_1 - y| + a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| &= a\,|x_1 - x_2| + b\,|y_1 - y_2| \\ a\,(-x_1 + x) + b\,(-y_1 + y) + a\,(x - x_2) + b\,(y - y_2) &= a\,(-x_1 + x_2) + b\,(-y_1 + y_2) \\ 2ax + 2by &= 2ax_2 + 2by_2 \\ ax + by &= ax_2 + by_2 \end{aligned}$$

$x \geqslant x_2$, $y > y_2$ olduğundan $ax + by > ax_2 + by_2$ dir. O halde çözüm kümesi boş kümedir.

7) $y \geqslant y_2, x_1 \leqslant x < x_2$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x_1 - x| + b\,|y_1 - y| + a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| &= a\,|x_1 - x_2| + b\,|y_1 - y_2| \\ a\,(-x_1 + x) + b\,(-y_1 + y) + a\,(-x + x_2) + b\,(y - y_2) &= a\,(-x_1 + x_2) + b\,(-y_1 + y_2) \\ ax_1 - ax - by_1 + by - ax + ax_2 + by - by_2 &= -ax_1 + ax_2 - by_1 + by_2 \\ 2by - 2by_2 &= 0 \\ y &= y_2 \end{aligned}$$

olduğundan çözüm kümesi $y = y_2$ doğrusudur.

8) $x \geqslant x_2$, $y_1 < y\ < y_2$ ise

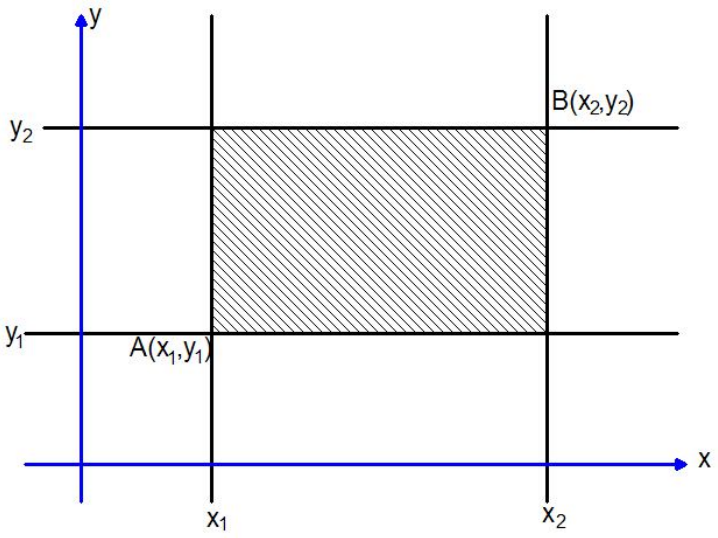
$$\begin{aligned} a\,|x_1 - x| + b\,|y_1 - y| + a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| &= a\,|x_1 - x_2| + b\,|y_1 - y_2| \\ a\,(-x_1 + x) + b\,(-y_1 + y) + a\,(x - x_2) + b\,(-y + y_2) &= a\,(-x_1 + x_2) + b\,(-y_1 + y_2) \\ -ax_1 + ax - by_1 + by + ax - ax_2 - by + by_2 &= -ax_1 + ax_2 - by_1 + by_2 \\ 2ax &= 2ax_2 \\ x &= x_2 \end{aligned}$$

olduğundan çözüm kümesi $x = x_2$ doğrusudur.

9) $x_1 \leqslant x < x_2$, $y_1 \leqslant y < y_2$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x_1 - x| + b\,|y_1 - y| + a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| &= a\,|x_1 - x_2| + b\,|y_1 - y_2| \\ a\,(-x_1 + x) + b\,(-y_1 + y) + a\,(-x + x_2) + b\,(-y + y_2) &= a\,(-x_1 + x_2) + b\,(-y_1 + y_2) \\ -ax_1 + ax - by_1 + by - ax + ax_2 - by + by_2 &= -ax_1 + ax_2 - by_1 + by_2 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan bu aralıktaki tüm noktalar çözüm kümesinin elemanıdır. Tüm durumlar birlikte düşünüldüğünde çözüm kümesi aşağıdaki gibidir. (Bkz. Şekil 1.5.2).



Şekil 1.5.2

1.6 Genelleştirilmiş Taksi Düzlemde İki Noktanın Orta kümesi

Genelleştirilmiş taksi düzlemde A ve B noktalarına eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yerine A ve B noktalarının *orta kümesi* denir. Bu küme

$$\{X \in \mathbb{R}^2_G : d_G(A,\ X) = d_G(X,\ B)\}$$

biçiminde gösterilir.

Teorem 1.6.1: Genelleştirilmiş taksi düzlemde verilen $A = (x_1, y_1)$ ve $B = (x_2, y_2)$ noktaları arasındaki en kısa uzaklık kümesi

i. $x_1 = x_2$ ise

$$\left\{(x,\ y) : y = \frac{y_1 + y_2}{2}, x \in \mathbb{R}\right\}$$

dir.

ii. $y_1 = y_2$ ise

$$\left\{(x,\ y) : x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y \in \mathbb{R}\right\}$$

dir.

iii.. $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$

1) $a\,(x_2 - x_1) < b\,(y_2 - y_1)$ ise

$$\left\{(x,\ y) : y = \frac{-ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2}{2b}, x \leqslant x_1\right\}$$
$$\left\{(x,\ y) : ax + by = \frac{ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2}{2}, x_1 < x < x_2\right\}$$
$$\left\{(x,\ y) : y = \frac{ax_1 - ax_2 + by_1 + by_2}{2b}, x_2 \leqslant x\right\}$$

kümelerinin birleşimidir.

2) $a\,(x_2 - x_1) > b\,(y_2 - y_1)$ ise

$$\left\{(x,\ y) : x = \frac{ax_1 + ax_2 - by_1 + by_2}{2a}, y \leqslant y_1\right\}$$
$$\left\{(x,\ y) : ax + by = \frac{ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2}{2}, y_1 < y < y_2\right\}$$
$$\left\{(x,\ y) : y = \frac{ax_1 + ax_2 + by_1 - by_2}{2a}, y_2 \leqslant y\right\}$$

kümelerinin birleşimidir.

3) $a\,(x_2 - x_1) = b\,(y_2 - y_1)$ ise

$$\{(x,\ y) : x \leqslant x_1, y \leqslant y_2\}$$
$$\left\{(x,\ y) : ax - by = \frac{ax_1 + ax_2 - by_1 - by_2}{2}, x_1 < x < x_2\right\}$$
$$\{(x,\ y) : x_2 \leqslant x, y_2 \leqslant y\}$$

kümelerinin birleşimidir.

iv) $a\,(x_2 - x_1) < b\,(y_1 - y_2)$

a) $x_1 < x_2\ ,\ y_1 > y_2$ ise

$$\left\{(x,\ y) : y = \frac{ax_1 - ax_2 + by_1 + by_2}{2b}, x \leqslant x_1\right\}$$
$$\left\{(x,\ y) : ax - by = \frac{ax_1 + ax_2 - by_1 - by_2}{2}, x_1 < x < x_2\right\}$$
$$\left\{(x,\ y) : y = \frac{-ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2}{2b}, x_2 \leqslant x\right\}$$

kümelerinin birleşimidir.

b) $a\,(x_2 - x_1) > b\,(y_1 - y_2)$ ise

$$\left\{(x,\ y) : x = \frac{ax_1 + ax_2 - by_1 + by_2}{2a}, y \leqslant y_1\right\}$$
$$\left\{(x,\ y) : ax - by = \frac{ax_1 + ax_2 - by_1 - by_2}{2}, y_1 < y < y_2\right\}$$
$$\left\{(x,\ y) : y = \frac{ax_1 + ax_2 + by_1 - by_2}{2a}, y_2 \leqslant y\right\}$$

kümelerinin birleşimidir.

c) $a\,(x_2 - x_1) = b\,(y_1 - y_2)$ ise

$$\{(x,\ y) : x \leqslant x_1, y \leqslant y_2\}$$
$$\left\{(x,\ y) : ax - by = \frac{ax_1 + ax_2 - by_1 - by_2}{2}, x_1 < x < x_2\right\}$$
$$\{(x,\ y) : x_2 \leqslant x, y_1 \leqslant y\}$$

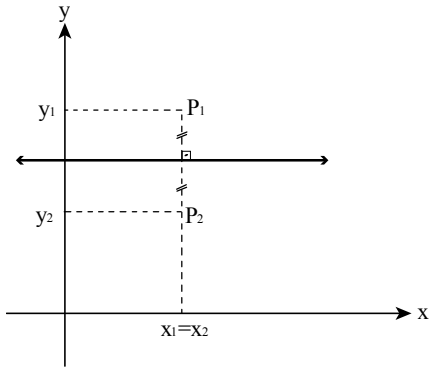
kümelerinin birleşimidir.

İspat:

i. $x_1 = x_2$ ise $a\,|x_1 - x| = a\,|x - x_2|$ dir.

$$\begin{aligned} b\,|y_1 - y| &= b\,|y - y_2| \\ |y_1 - y| &= |y - y_2| \\ y_1 - y &= y - y_2 \\ y &= \frac{y_1 + y_2}{2} \end{aligned}$$

bulunur. (Bkz. Şekil 1.6.1)

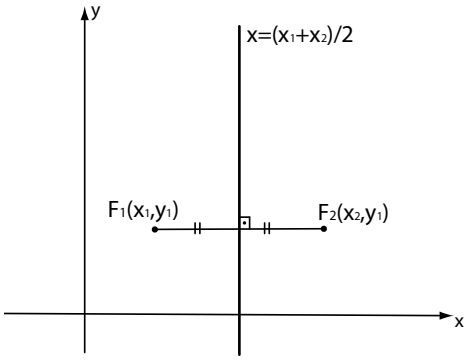


Şekil 1.6.1

ii. $y_1 = y_2$ ise $b\,|y_1 - y| = b\,|y - y_2|$ dir.

$$\begin{aligned} a\,|x_1 - x| &= a\,|x - x_2| \\ |x_1 - x| &= |x - x_2| \\ x_1 - x &= x - x_2 \\ x &= \frac{x_1 + x_2}{2} \end{aligned}$$

bulunur. (Bkz. Şekil 1.6.2)



Şekil 1.6.2

iii. $a\,(x_2 - x_1) < b\,(y_2 - y_1)$

1) $y_1 < y_2$

a) $x < x_1 < x_2$

$$\begin{aligned} a\,|x_1 - x| + b\,|y_1 - y| &= a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| \\ a\,(x_1 - x) + b\,(-y_1 + y) &= a\,(-x + x_2) + b\,(-y + y_2) \\ ax_1 - ax - by_1 + by &= -ax + ax_2 - by + by_2 \\ 2by &= -ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2 \\ y &= \frac{-ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2}{2b} \end{aligned}$$

olup çözüm kümesi

$$U_1 = \left\{ (x, y) : x \leqslant x_1, y = \frac{-ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2}{2b} \right\}$$

dir.

b) $x_1 < x < x_2$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x_1 - x| + b\,|y_1 - y| &= a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| \\ a\,(-x_1 + x) + b\,(-y_1 + y) &= a\,(-x + x_2) + b\,(-y + y_2) \\ -ax_1 + ax - by_1 + by &= -ax + ax_2 - by + by_2 \\ 2ax + 2by &= ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2 \\ ax + by &= \frac{ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2}{2} \end{aligned}$$

olup çözüm kümesi

$$U_2 = \left\{ (x, y) : x_1 < x < x_2, ax + by = \frac{ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2}{2} \right\}$$

dir.

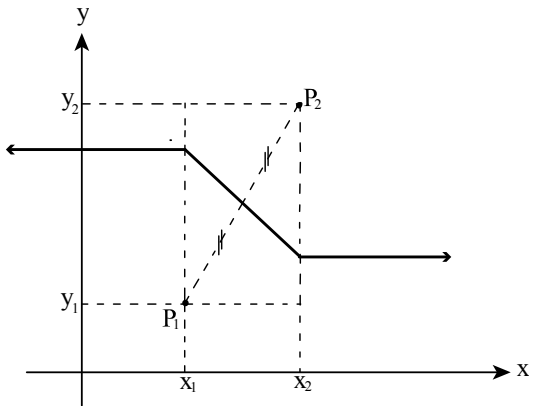
c) $x_2 \leqslant x$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x_1 - x| + b\,|y_1 - y| &= a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| \\ a\,(-x_1 + x) + b\,(-y_1 + y) &= a\,(x - x_2) + b\,(-y + y_2) \\ -ax_1 + ax - by_1 + by &= ax - ax_2 - by + by_2 \\ 2by &= ax_1 - ax_2 + by_1 + by_2 \\ y &= \frac{ax_1 - ax_2 + by_1 + by_2}{2b} \end{aligned}$$

olup çözüm kümesi

$$U_3 = \left\{ (x, y) : x_2 \leqslant x, y = \frac{ax_1 - ax_2 + by_1 + by_2}{2b} \right\}$$

dir. Buna göre $a\,(x_2 - x_1) < b\,(y_2 - y_1)$ iken orta küme $U = \cup U_i, i = 1, 2, 3$ tür. (Bkz. Şekil 1.6.3)



Şekil 1.6.3

2) $a\,(x_2 - x_1) > b\,(y_2 - y_1)$

a) $y \leqslant y_1$ ise

$$\begin{aligned} a\left|x_1 - x\right| + b\left|y_1 - y\right| &= a\left|x - x_2\right| + b\left|y - y_2\right| \\ a\left(-x_1 + x\right) + b\left(y_1 - y\right) &= a\left(-x + x_2\right) + b\left(-y + y_2\right) \\ -ax_1 + ax + by_1 - by &= -ax + ax_2 - by + by_2 \\ 2ax &= ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2 \\ x &= \frac{-ax_1 + ax_2 - by_1 + by_2}{2a} \end{aligned}$$

olup çözüm kümesi

$$U_1 = \left\{(x, y) : y \leqslant y_1, x = \frac{-ax_1 + ax_2 - by_1 + by_2}{2a}\right\}$$

dir.

b) $y_1 < y < y_2$ ise

$$\begin{aligned} a\left|x_1 - x\right| + b\left|y_1 - y\right| &= a\left|x - x_2\right| + b\left|y - y_2\right| \\ a\left(-x_1 + x\right) + b\left(-y_1 + y\right) &= a\left(-x + x_2\right) + b\left(-y + y_2\right) \\ -ax_1 + ax - by_1 + by &= -ax + ax_2 - by + by_2 \\ 2ax + 2by &= ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2 \\ ax + by &= \frac{ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2}{2} \end{aligned}$$

olup çözüm kümesi

$$U_2 = \left\{(x, y) : y_1 < y < y_2, ax + by = \frac{ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2}{2}\right\}$$

dir.

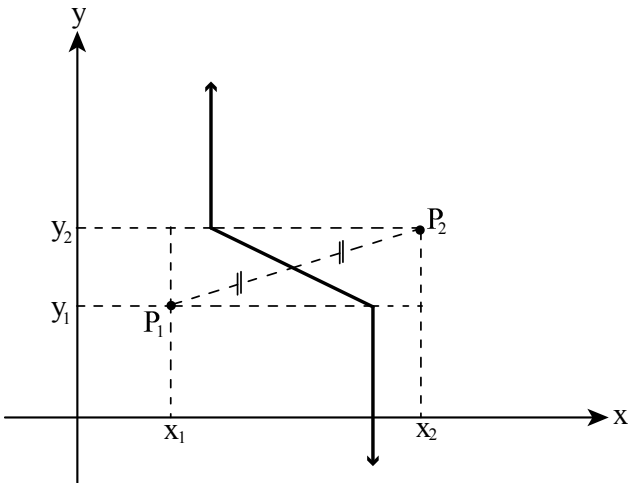
c) $y_2 \leqslant y$ ise

$$\begin{aligned} a\left|x_1 - x\right| + b\left|y_1 - y\right| &= a\left|x - x_2\right| + b\left|y - y_2\right| \\ a\left(-x_1 + x\right) + b\left(-y_1 + y\right) &= a\left(-x + x_2\right) + b\left(y - y_2\right) \\ -ax_1 + ax - by_1 + by &= -ax + ax_2 + by - by_2 \\ 2ax &= ax_1 - ax_2 + by_1 + by_2 \\ x &= \frac{ax_1 + ax_2 + by_1 - by_2}{2a} \end{aligned}$$

olup çözüm kümesi

$$U_3 = \left\{ (x,y) : y_2 \leqslant y, x = \frac{ax_1 + ax_2 + by_1 - by_2}{2a} \right\}$$

dir. Buna göre $a\,(x_2 - x_1) > b\,(y_2 - y_1)$ iken orta küme $U = \cup U_i, i = 1,2,3$ tür. (Bkz. Şekil 1.6.4)



Şekil 1.6.4

3) $a\,(x_2 - x_1) = b\,(y_2 - y_1)$

a) $x \leqslant x_1, y \leqslant y_2$ ise

$$\begin{aligned}
a\,|x_1 - x| + b\,|y_1 - y| &= a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| \\
a\,(x_1 - x) + b\,(-y_1 + y) &= a\,(-x + x_2) + b\,(y - y_2) \\
ax_1 - ax - by_1 + by &= -ax + ax_2 + by - by_2 \\
ax_1 - by_1 &= ax_2 - by_2 \\
a(x_2 - x_1) &= b(y_2 - y_1)
\end{aligned}$$

olup

$$U_1 = \{(x,y) : x \leqslant x_1, y \leqslant y_2\}$$

dir.

b) $x_1 < x < x_2$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x_1 - x| + b\,|y_1 - y| &= a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| \\ a\,(-x_1 + x) + b\,(-y_1 + y) &= a\,(-x + x_2) + b\,(-y + y_2) \\ -ax_1 + ax - by_1 + by &= -ax + ax_2 - by + by_2 \\ 2ax + 2by &= ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2 \\ ax + by &= \frac{ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2}{2} \end{aligned}$$

olup çözüm kümesi

$$U_2 = \left\{ (x, y) : xU_1 = (x, y) : x \leqslant x_1, ax + by = \frac{ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2}{2} y \right\}$$

dir.

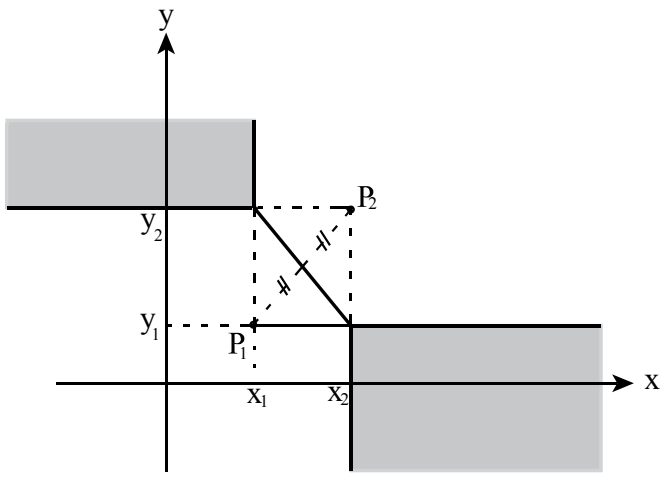
c) $x_2 \leqslant x, y \leqslant y_1$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x_1 - x| + b\,|y_1 - y| &= a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| \\ a\,(-x_1 + x) + b\,(-y_1 + y) &= a\,(-x + x_2) + b\,(-y + y_2) \\ -ax_1 + ax - by_1 + by &= -ax + ax_2 - by + by_2 \\ ax_2 - ax_1 &= by_2 - by_1 \\ a(x_2 - x_1) &= b(y_2 - y_1) \end{aligned}$$

olup çözüm kümesi

$$U_3 = \{(x, y) : x_2 \leqslant x, y \leqslant y_1\}$$

dir. Buna göre $a\,(x_2 - x_1) = b\,(y_2 - y_1)$ iken orta küme $U = \cup U_i, i = 1, 2, 3$ tür. (Bkz. Şekil 1.6.5)



Şekil 1.6.5

iv. $a\,(x_2 - x_1) < b\,(y_1 - y_2)$

1) $x_1 < x_2$, $y_1 > y_2$

a) $x \leqslant x_1$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x_1 - x| + b\,|y_1 - y| &= a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| \\ a\,(x_1 - x) + b\,(y_1 - y) &= a\,(-x + x_2) + b\,(y - y_2) \\ ax_1 - ax + by_1 - by &= -ax + ax_2 + by - by_2 \\ 2by &= ax_1 - ax_2 + by_1 + by_2 \\ y &= \frac{ax_1 - ax_2 + by_1 + by_2}{2b} \end{aligned}$$

olup

$$U_1 = \left\{ (x, y) : x \leqslant x_1, y = \frac{ax_1 - ax_2 + by_1 + by_2}{2b} \right\}$$

dir.

b) $x_1 < x < x_2$ ise

$$\begin{aligned} a\left|x_1 - x\right| + b\left|y_1 - y\right| &= a\left|x - x_2\right| + b\left|y - y_2\right| \\ a\left(-x_1 + x\right) + b\left(y_1 - y\right) &= a\left(-x + x_2\right) + b\left(y - y_2\right) \\ -ax_1 + ax + by_1 - by &= -ax + ax_2 + by - by_2 \\ 2ax - 2by &= ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2 \\ ax - by &= \frac{ax_1 + ax_2 - by_1 - by_2}{2} \end{aligned}$$

olup çözüm kümesi

$$U_2 = \left\{(x, y) : x_1 < x < x_2, ax - by = \frac{ax_1 + ax_2 - by_1 - by_2}{2}\right\}$$

dir.

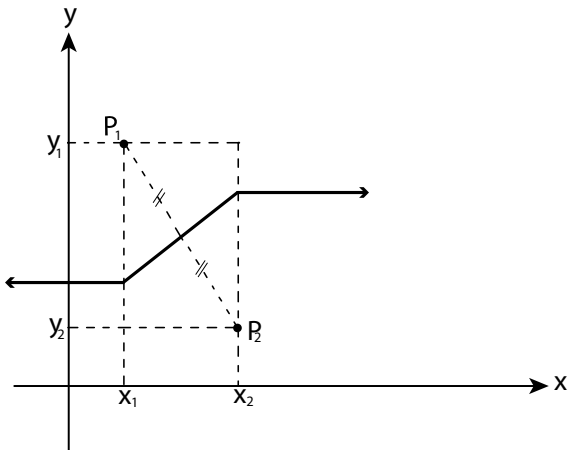
c) $x_2 \leqslant x$ ise

$$\begin{aligned} a\left|x_1 - x\right| + b\left|y_1 - y\right| &= a\left|x - x_2\right| + b\left|y - y_2\right| \\ a\left(-x_1 + x\right) + b\left(y_1 - y\right) &= a\left(x - x_2\right) + b\left(y - y_2\right) \\ -ax_1 + ax + by_1 - by &= ax - ax_2 + by - by_2 \\ 2by &= -ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2 \\ y &= \frac{ax_1 - ax_2 + by_1 + by_2}{2b} \end{aligned}$$

olup çözüm kümesi

$$U_3 = \left\{(x, y) : x_2 \leqslant x, y = \frac{ax_1 - ax_2 + by_1 + by_2}{2b}\right\}$$

dir. Buna göre $a\left(x_2 - x_1\right) < b\left(y_1 - y_2\right)$ iken orta küme $U = \cup U_i, i = 1, 2, 3$ tür. (Bkz. Şekil 1.6.6)



Şekil 1.6.6

2) $a\,(x_2 - x_1) > b\,(y_1 - y_2)$

a) $y \leqslant y_2$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x_1 - x| + b\,|y_1 - y| &= a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| \\ a\,(-x_1 + x) + b\,(y_1 - y) &= a\,(-x + x_2) + b\,(-y + y_2) \\ -ax_1 + ax + by_1 - by &= -ax + ax_2 - by + by_2 \\ 2ax &= ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2 \\ x &= \frac{ax_1 + ax_2 - by_1 - by_2}{2a} \end{aligned}$$

olup

$$U_1 = \left\{ (x, y) : y \leqslant y_2, x = \frac{ax_1 + ax_2 - by_1 - by_2}{2a} \right\}$$

dir.

b) $y_2 < y < y_1$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x_1 - x| + b\,|y_1 - y| &= a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| \\ a\,(-x_1 + x) + b\,(y_1 - y) &= a\,(-x + x_2) + b\,(y - y_2) \\ -ax_1 + ax + by_1 - by &= -ax + ax_2 + by - by_2 \\ 2ax - 2by &= ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2 \\ ax - by &= \frac{ax_1 + ax_2 - by_1 - by_2}{2} \end{aligned}$$

olup

$$U_2 = \left\{ (x,y) : y_2 < y < y_1, ax - by = \frac{ax_1 + ax_2 - by_1 - by_2}{2} \right\}$$

dir.

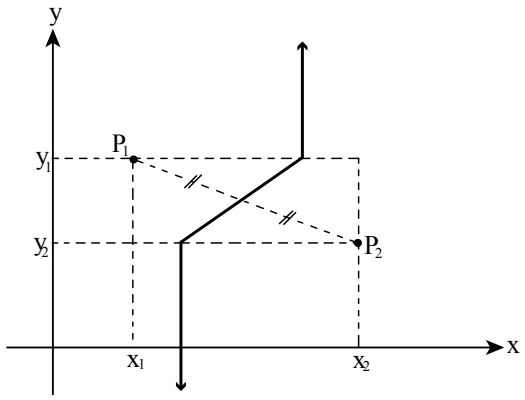
c) $y_1 \leqslant y$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x_1 - x| + b\,|y_1 - y| &= a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| \\ a\,(-x_1 + x) + b\,(-y_1 + y) &= a\,(-x + x_2) + b\,(y - y_2) \\ -ax_1 + ax - by_1 + by &= -ax + ax_2 + by - by_2 \\ 2ax &= ax_1 - ax_2 + by_1 + by_2 \\ x &= \frac{ax_1 + ax_2 + by_1 - by_2}{2a} \end{aligned}$$

olup çözüm kümesi

$$U_3 = \left\{ (x,y) : y_1 \leqslant y, x = \frac{ax_1 + ax_2 + by_1 - by_2}{2a} \right\}$$

dir. Buna göre $a\,(x_2 - x_1) > b\,(y_1 - y_2)$ iken orta küme $U = \cup U_i, i = 1,2,3$ tür. (Bkz. Şekil 1.6.7)



Şekil 1.6.7

3) $a\,(x_2 - x_1) = b\,(y_1 - y_2)$

a) $x \leqslant x_1, y \leqslant y_2$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x_1 - x| + b\,|y_1 - y| &= a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| \\ a\,(x_1 - x) + b\,(y_1 - y) &= a\,(-x + x_2) + b\,(-y + y_2) \\ ax_1 - ax + by_1 - by &= -ax + ax_2 - by + by_2 \\ ax_2 - ax_1 &= by_1 - by_2 \\ a(x_2 - x_1) &= b(y_1 - y_2) \end{aligned}$$

olup

$$U_1 = \{(x, y) : x \leqslant x_1, y \leqslant y_2\}$$

dir.

b) $x_1 < x < x_2$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x_1 - x| + b\,|y_1 - y| &= a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| \\ a\,(-x_1 + x) + b\,(y_1 - y) &= a\,(-x + x_2) + b\,(y - y_2) \\ -ax_1 + ax + by_1 - by &= -ax + ax_2 + by - by_2 \\ 2ax - 2by &= ax_1 + ax_2 - by_1 - by_2 \\ ax - by &= \frac{ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2}{2} \end{aligned}$$

olup çözüm kümesi

$$U_2 = \left\{(x, y) : x_1 < x < x_2, ax - by = \frac{ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2}{2}\right\}$$

dir.

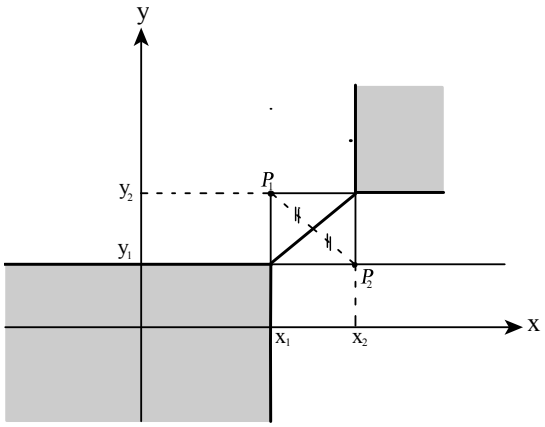
c) $x_2 \leqslant x, y_1 \leqslant y$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x_1 - x| + b\,|y_1 - y| &= a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| \\ a\,(-x_1 + x) + b\,(-y_1 + y) &= a\,(x - x_2) + b\,(y - y_2) \\ -ax_1 + ax - by_1 + by &= ax - ax_2 + by - by_2 \\ ax_2 - ax_1 &= by_1 - by_2 \\ a(x_2 - x_1) &= b(y_2 - y_1) \end{aligned}$$

olup çözüm kümesi

$$U_3 = \{(x, y) : x_2 \leqslant x, y_1 \leqslant y\}$$

dir. Buna göre $a\,(x_2 - x_1) > b\,(y_1 - y_2)$ iken orta küme $U = \cup U_i, i = 1, 2, 3$ tür. (Bkz. Şekil 1.6.8)



Şekil 1.6.8

Bölüm 2

GENELLEŞTİRİLMİŞ TAKSİ DÜZLEMDE KONİKLER

Bu bölümde, (Kaya, Akça, Günaltılı, Özcan, 2000) esas alınarak, genelleştirilmiş taksi düzlemde iki odaklı ve odak-doğrultman konikleri incelenmiştir. Önce iki odaklı konikler için genelleştirilmiş taksi elipsi ve genelleştirilmiş taksi hiperbolü tanımlanmış, odakların farklı durumlarına göre tabloları oluşturulmuştur. Daha sonra odak-doğrultman koniklerinden sadece genelleştirilmiş taksi parabolü incelenmiş, tablosu oluşturulmuştur.

2.1 Genelleştirilmiş Taksi Düzlemde İki Odaklı Konikler

Öklid düzleminde genel olarak, "düzlemde verilen bir F (odak) noktasına uzaklığının verilen bir d (doğrultman) uzaklığına oranı verilen bir e (dış merkezlik) sayısı olan noktaların kümesine bir *konik* denir.", şeklinde tanımlanmaktadır. Ayrıca *çember*, "düzlemde verilen bir noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesi , *elips* ve *hiperbol* ise "düzlemde verilen iki noktaya uzaklıkları toplamı ve uzaklıkları farkının mutlak değeri sabit olan noktalar kümesi "olarak ta tanımlanabilmektedir.

Genelleştirilmiş taksi düzleminde ise benzer tanımlar yapılmasına rağmen iki odaklı konikler ile odak-doğrultman konikleri farklı geometrik şekiller oluşturabilmektedir. Bu bölümde önce genelleştirilmiş taksi çemberi kısaca açıklanacak arkasından genelleştirilmiş taksi elips ve hiperbol iki-odaklı olarak incelenecektir.

2.1.1 Genelleştirilmiş Taksi Çember

Genelleştirilmiş taksi düzleminde genelleştirilmiş taksi çemberi aşağıdaki gibi tanımlanır:

Genelleştirilmiş taksi düzleminde verilen bir noktaya eşit d_G uzaklıktaki noktaların kümesine *genelleştirilmiş taksi çemberi* denir.

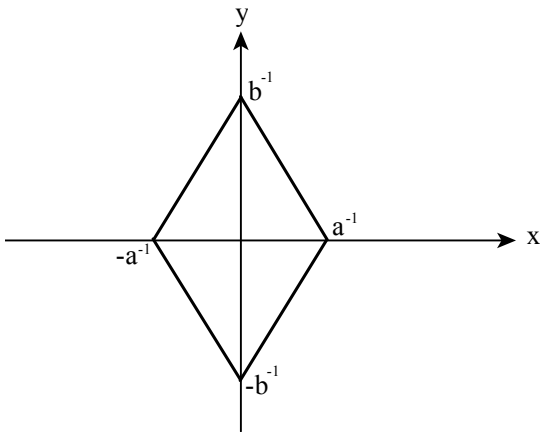
Analitik düzlemde $M = (m, n)$ noktasına genelleştirilmiş taksi r birim $(r \in \mathbb{R}, r > 0)$ uzaklıkta bulunan tüm $P = (x, y)$ noktalarının

$$C = \{P = (x, y) : d_G(P, M) = r, r \in \mathbb{R}, r > 0\}$$

kümesidir. Yani

$$C = \{P = (x, y) : a\,|x - m| + b\,|y - n| = r, r \in \mathbb{R}, r > 0\}$$

kümesini oluşturur. $a\,|x-m|+b\,|y-n|=r$ denklemi çözüldüğünde çözüm kümesi $M=(m,n)$ merkezli r yarıçaplı genelleştirilmiş taksi çemberini oluşturur. (Bkz. Şekil 2.1.1.1)



Şekil 2.1.1.1

2.1.2 Genelleştirilmiş Taksi Elips

Genelleştirilmiş taksi düzlemde iki odaklı genelleştirilmiş taksi elipsi aşağıdaki gibi tanımlanır.

Genelleştirilmiş taksi düzleminde verilen sabit iki noktaya d_G uzaklıklarının toplamı sabit olan noktaların kümesine iki odaklı *genelleştirilmiş taksi elipsi*, sabit noktalara genelleştirilmiş taksi elipsin odakları, odak noktalarından geçen doğruya *odaklar doğrusu* (asal eksen) denir.

Verilen noktalar $F_1=(x_1,y_1)$, $F_2=(x_2,y_2)$ ve $\gamma\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ olmak üzere bunların belirlediği genelleştirilmiş taksi elips

$$E=\{P=(x,y):d_G(P,F_1)+d_G(P,F_2)=\gamma,\gamma\geqslant 0\} \tag{2.1.2.1}$$

kümesidir. Genelleştirilmiş taksi elipsinin analitik ifadesi

$$a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|+a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|=\gamma \tag{2.1.2.2}$$

şeklindedir. Bu denklemin çözümü F_1,F_2 noktalarının konumları ve γ nın alacağı değerlere göre farklılıklar gösterecektir. Şimdi bu farklı durumlar

yardımcı teoremler olarak ifade ve ispat edilecek ve daha sonra bütün durumlar için bir teorem olarak verilecektir. Odaklar arası genelleştirilmiş taksi uzaklığı

$$d_G(F_1, F_2) = \delta, \delta \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

olarak alınmaktadır. $\gamma < \delta$ olması halinde 2.1.2.2 denkleminin çözüm kümesi boş küme olacağından $\gamma > \delta$ olduğu açıktır.

Yardımcı Teorem 2.1.2.1: Genelleştirilmiş taksi düzleminde odak noktaları çakışık olan ve *2.1.2.2* denklemi ile verilen bir genelleştirilmiş taksi elips:

i. $\gamma = 0$ iken odak noktalarından ibarettir.

ii. $\gamma > 0$ iken odak merkezli $\frac{\gamma}{2}$ yarıçaplı genelleştirilmiş taksi çemberdir.

İspat:

i. $F_1 = F_2$ ve $\gamma = 0$ ise $P = (x, y)$ genelleştirilmiş taksi elips üzerinde bulunan bir nokta olmak üzere *2.1.2 .2* denkleminden

$$\begin{aligned} a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| + a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| &= \gamma \\ 2d_G(P, F_1) &= \gamma = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Yani

$$a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| = \gamma = 0$$

olur. Bu eşitlik $|x - x_1| = 0$ ve $|y - y_1| = 0$ iken yani $x = x_1$ ve $y = y_1$ iken doğrudur. Dolayısıyla genelleştirilmiş taksi elipis $F_1 = (x_1, y_1)$ odak noktasından ibarettir.

ii. $F_1 = F_2$ ve $\gamma > 0$ ise $P = (x, y)$ genelleştirilmiş taksi elips üzerinde bulunan bir nokta olmak üzere *2.1.2.2* denkleminden

$$\begin{aligned} a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| + a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| &= \gamma \\ 2d_G(P, F_1) &= \gamma \\ d_G(P, F_1) &= \frac{\gamma}{2} \end{aligned}$$

$$a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| = \frac{\gamma}{2}$$

elde edilir. Bu ifade $F_1 = (x_1, y_1)$ merkezli $\frac{\gamma}{2}$ yarıçaplı genelleştirilmiş taksi çember belirtir.

Yardımcı Teorem 2.1.2.2 : Genelleştirilmiş taksi düzlemde farklı iki odak noktasına sahip olan ($\gamma = 0$) ve 2.1.2.2 denklemi ile verilen bir genelleştirilmiş taksi elips yoktur.

İspat:

i. $F_1 \neq F_2$ ve $\gamma = 0$ ise $P = (x, y)$ genelleştirilmiş taksi elips üzerinde bulunan bir nokta olmak üzere 2.1.2.2 denkleminden

$$d_G(P, F_1) + d_G(P, F_2) = \gamma = 0 \qquad (2.1.2.3)$$

olur. Buradan $d_G(P, F_1) = -d_G(P, F_2)$ yani

$$a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| = -(a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2|)$$

elde edilir. Bu eşitlik ancak

$$a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| + a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| = 0$$

iken mümkündür. Bu ise $F_1 \neq F_2$ olması ile çelişir. Dolayısıyla bu durumda oluşan bir genelleştirilmiş taksi elips yoktur.

Yardımcı Teorem 2.1.2.3: Genelleştirilmiş taksi düzlemde odaklar doğrusu bir yatay veya dikey doğru olan ve 2.1.2.2 denklemi ile verilen bir genelleştirilmiş taksi elips

i. $\gamma = \delta$ iken $[F_1F_2]$ doğru parçasıdır.

ii. $\gamma > \delta$ iken bir altıgendir.

İspat: F_1F_2 odaklar doğrusunun eğimi $m{=}0$ veya $m{=}\infty$ (F_1F_2 yatay veya dikey) olsun. $u,v \in \mathbb{R}$ için $y{=}u$ veya $x = v$ alınabilir. $y{=}u$ olması halinde odak noktaları $F_1 = (x_1, u), F_2(x_2, u)$ dur. 2.1.2.2 denkleminden

$$a\,|x - x_1| + a\,|x - x_2| + 2b\,|y - u| = \gamma \qquad (2.1.2.4)$$

bulunur.

2.1.2.2 denklemi γ ve δ nın iki farklı durumu için incelenmelidir.

i- $\gamma = \delta$ ise 2.1.2.4 denklemi

$$a\,|x - x_1| + a\,|x - x_2| + 2b\,|y - u| = \gamma = \delta = a(x_2 - x_1) \qquad (2.1.2.5)$$

şeklini alır. $(x_1 \leq x_2)$. 2.1.2.5 denklemi çözülürse

$$|y - u| = \frac{-a(|x - x_1| + a\,|x - x_2| + a(x_2 - x_1)}{2b}$$

olur.

1) $x < x_1$ iken

$$|y - u| = \frac{-a(|x - x_1| + a\,|x - x_2| + (x_2 - x_1)}{2b} = \frac{a(x - x_1)}{b}$$

olur.

$y < u$ ise bu denklemin çözümünden

$$y = \frac{-ax + ax_1}{b} + u$$

elde edilir. Fakat çözümü araştırdığımız bölge $x < x_1$ ve $y < u$ olduğundan $y < \dfrac{-ax + ax_1}{b} + u$ dur. O halde çözüm kümesi boş kümedir.

$y \geqslant u$ ise bu denklemin çözümünden

$y = \dfrac{ax - ax_1}{b} + u$ elde edilir. $y \geqslant u$ iken çözüm araştırılan bölge $y > \dfrac{ax - ax_1}{b} + u$ olduğundan doğrunun bu bölgede bulunan hiçbir noktası yoktur. $y = u$ olması halinde $x < x_1$ olduğundan (x_1, u) noktası çözüm olamaz. Dolayısıyla çözüm kümesi yine boş kümedir.,

2) $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ iken

$$|y - u| = \frac{-a(x_2 - x_1) + a(x_2 - x_1)}{2b} = 0$$

olur. Bu ise $y = u$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla $y \neq u$ için çözüm boş küme olup $y = u$ için çözüm bu doğrunun $[F_1F_2]$ doğru parçasıdır.

3) $x > x_2$ iken

$$|y-u| = \frac{-a(2x - x_{1_}x_2) + a(x_2 - x_1)}{2b} = \frac{-ax + ax_2}{b}$$

olur.

$y < u$ ise bu denklemin çözümünden

$$y = \frac{ax - ax_2}{b} + u$$

elde edilir. Fakat çözümü araştırdığız bölge $x > x_2$ ve $y < u$ olduğundan $y < \frac{ax - ax_2}{b} + u$ dur. O halde çözüm kümesi boş kümedir.

$y \geqslant u$ ise bu denklemin çözümünden

$y = \frac{-ax + ax_2}{b} + u$ elde edilir. $y \geqslant u$ iken çözüm araştırılan bölge $y > \frac{-ax + ax_2}{b} + u$ olduğundan doğrunun bu bölgede bulunan hiçbir noktası yoktur. $y = u$ olması halinde $x > x_1$ olduğundan (x_2, u) noktası çözüm olamaz. Dolayısıyla çözüm kümesi yine boş kümedir.

ii- $\gamma > \delta$ olması halinde 2.1.2.4 denklemi çözülürken aşağıdaki üç farklı durumda inceleme yapılmalıdır.

1) $x < x_1$ iken

$$|y-u| = \frac{a}{b}x + \frac{\gamma - a(x_1 + x_2)}{2b}$$

olur.

$y < u$ ise bu denklemin çözümünden

$$d_1 : y = -\frac{a}{b}x + \frac{2bu - \gamma + ax_1 + ax_2}{2b}$$

benzer şekilde $y \geqslant u$ ise bu denklemin çözümünden

$$d_2 : y = \frac{a}{b}x + \frac{2bu + \gamma - ax_1 - ax_2}{2b}$$

doğruları elde edilir. $N_{12} = d_1 \wedge d_2$ noktası

$$-\frac{a}{b}x + \frac{2bu - \gamma + ax_1 + ax_2}{2b} = \frac{a}{b}x + \frac{2bu + \gamma - ax_1 - ax_2}{2b}$$

eşitliğinden $N_{12} = (\frac{ax_1 + ax_2 - \gamma}{2a}, u)$ olarak bulunur. $\gamma > \delta = a(x_2 - x_1)$ $< x_1$ dir.

2) $x_1 < x < x_2$ iken

$$|y - u| = \frac{\gamma + ax_1 - ax_2}{2b}$$

olur.

$y < u$ ise bu denklemin çözümünden

$$d_6 : y = \frac{2bu + \gamma - ax_1 + ax_2}{2b}$$

benzer şekilde $y \geqslant u$ ise bu denklemin çözümünden

$$d_3 : y = \frac{2bu + \gamma + ax_1 - ax_2}{2b}$$

doğruları elde edilir. Burada $d_3 \| d_6$ dır.

3) $x > x_2$ iken

$$|y - u| = -\frac{a}{b}x + \frac{\gamma + ax_1 + ax_2}{2b}$$

olur.

$y < u$ ise bu denklemin çözümünden

$$d_5 : y = \frac{a}{b}x + \frac{2bu - \gamma - ax_1 - ax_2}{2b}$$

elde edilir. Benzer şekilde $y \geqslant u$ ise bu denklemin çözümünden

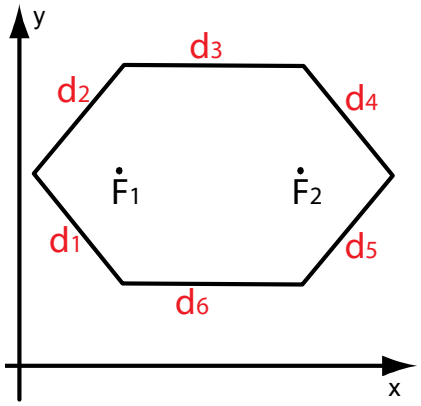
$$d_4 : y = -\frac{a}{b}x + \frac{2bu + \gamma + ax_1 + ax_2}{2b}$$

doğruları elde edilir. $N_{45} = d_4 \wedge d_5$ noktası

$$-\frac{a}{b}x + \frac{\gamma + ax_1 + ax_2}{2b} = -\frac{a}{b}x + \frac{2bu + \gamma + ax_1 + ax_2}{2b}$$

eşitliğinden $N_{45} = (\frac{\gamma + ax_1 + ax_2}{2a}, u)$ olarak bulunur, üstelik $\frac{\gamma + ax_1 + ax_2}{2a} >$ x_2 dir. $N_{23} = d_2 \wedge d_3 = (x_1, \frac{2ub + \gamma + ax_1 - ax_2}{2b})$, $N_{34} = d_3 \wedge d_4 =$

$(x_2, \frac{2ub+\gamma+ax_1-ax_2}{2b})$, $N_{56} = d_5 \wedge d_6 = (x_2, \frac{2ub-\gamma-ax_1+ax_2}{2b})$ ve $N_{61} = d_6 \wedge d_1 = (x_1, \frac{2ub+\gamma+ax_1-ax_2}{2b})$ olduğu görülür. O halde genelleştirilmiş taksi elips $F_1 = (x_1, y_1), F_2(x_2, y_2)$ odaklarına ve $d_i (i = 1, 2, ..., 6)$ doğrularının ilgili bölgelerinde kalan doğru parçalarına sahip bir altıgendir. (Bkz. Şekil 2.1.2.1)



Şekil 2.1.2.1

Bir genelleştirilmiş taksi elips kendisini oluşturan altıgenin odaklar doğrusunun yatay veya dikey olmasına göre sırasıyla iki yatay ve dört ayıraç doğru parçası veya iki dikey ve dört ayıraç doğru parçasından oluşur.

$x = v$ olması durumunda benzer şeklide ispat yapılır.

Yardımcı Teorem 2.1.2.4: Genelleştirilmiş taksi düzlemde odaklar doğrusu bir yataysal veya dikeysel doğru olan ve 2.1.2.2 denklemi ile verilen bir genelleştirilmiş taksi elips

i. $\gamma = \delta$ iken $[F_1F_2]$ köşegenli bir dikdörtgensel bölge

ii. $\gamma > \delta$ iken bir sekizgendir.

İspat: F_1F_2 odaklar doğrusu yataysal veya dikeysel olacağından $m \neq 0, \pm\frac{a}{b}, \infty$ olur. $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$ ve $m > 0$ olmak üzere odaklar doğrusu $y = mx + n$ olur. Buna göre odaklar $F_1 = (x_1, mx_1 + n)$, $F_2(x_2, mx_2 + n)$ olur. Böylece 2.1.2.2 denklemi

$$a\,|x - x_1| + b\,|y - mx_1 - n| + a\,|x - x_2| + b\,|y - mx_2 - n| = \gamma \qquad (2.1.2.6)$$

şeklini alır. Burada $mx_1 + n < mx_2 + n$ dir. 2.1.7 denkleminin çözümü $\gamma = \delta$ veya $\gamma > \delta$ olması hallerinde incelenmelidir.

$$\delta = d_G(F_1, F_2) = a\,|x_1 - x_2| + b\,|mx_1 + n - mx_2 - n| = (a + bm)(x_2 - x_1)$$

i. $\gamma = \delta$ ise 2.1.2.6 denklemi

$$a\,|x - x_1| + b\,|y - mx_1 - n| + a\,|x - x_2| + b\,|y - mx_2 - n| = (a + bm)(x_2 - x_1) \tag{2.1.2.7}$$

şeklini alır. Mutlak değer içindeki ifadelerin farklı durumları incelenerek çözüm yapıldığında

$x_1 \leq x \leq x_2$ ve $mx_1 + n \leq y \leq mx_2 + n$ olması halinde

$$a(x - x_1) + b(y - mx_1 - n) + a(-x + x_2) + b(-y + mx_2 + n) = (a + bm)(x_2 - x_1) \tag{2.1.2.7}$$

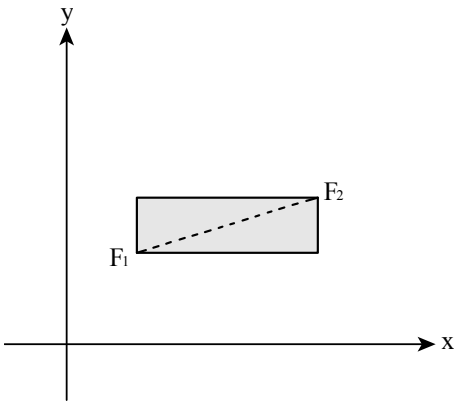
$$a(x - x_1) + b(y - mx_1 - n) + a(-x + x_2) + b(-y + mx_2 + n) = (a + bm)(x_2 - x_1)$$

$$ax_2 - ax_1 + bmx_2 - bmx_1 = (a + bm)(x_2 - x_1)$$

elde edilir. Böylece çözüm kümesi

$$\{(x, y) : x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2\}$$

dir. Diğer durumlarda çözümün boş küme olduğu benzer işlemlerle gösterilebilir. O halde geometrik yer $[F_1F_2]$ köşegenli dikdörtgensel bölgedir. (Bkz. Şekil 2.1.2.2)



Sekil 2.1.2.2

ii. $\gamma > \delta$ ise 2.1.2.7 denklemi dokuz farklı durum için incelenmelidir.

1) $x < x_1, y < mx_1 + n$ ise

$$
\begin{aligned}
a\,|x - x_1| + b\,|y - mx_1 - n| + a\,|x - x_2| + b\,|y - mx_2 - n| &= \gamma \\
a(x_1 - x) + b(mx_1 + n - y) + a(x_2 - x) + b(mx_2 + n - y) &= \gamma \\
-2ax + a(x_1 + x_2) + bm(x_1 + x_2) + 2bn - \gamma &= 2by \\
\frac{-2ax + a(x_1 + x_2) + bm(x_1 + x_2) + 2bn - \gamma}{2b} &= y \\
-\frac{a}{b}x + \frac{(a + bm)(x_1 + x_2) + 2bn - \gamma}{2b} &= y : d_1
\end{aligned}
$$

doğru parçası elde edilir.

2) $x < x_1, mx_1 + n \leqslant y \leqslant mx_2 + n$ ise

$$
\begin{aligned}
a\,|x - x_1| + b\,|y - mx_1 - n| + a\,|x - x_2| + b\,|y - mx_2 - n| &= \gamma \\
a(x_1 - x) + b(y - mx_1 - n) + a(x_2 - x) + b(mx_2 + n - y) &= \gamma \\
-2ax + a(x_1 + x_2) - bm(x_1 - x_2) - \gamma &= 0 \\
\frac{a(x_1 + x_2) - bm(x_1 - x_2) - \gamma}{2a} &= x \\
\frac{(a - bm)x_1 + (a + bm)x_2 - \gamma}{2a} &= x : d_2
\end{aligned}
$$

doğru parçası elde edilir.

3) $x < x_1,\ y > mx_2 + n$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x - x_1| + b\,|y - mx_1 - n| + a\,|x - x_2| + b\,|y - mx_2 - n| &= \gamma \\ a(x_1 - x) + b(y - mx_1 + n) + a(x_2 - x) + b(y - mx_2 - n) &= \gamma \\ 2ax - a(x_1 + x_2) + bm(x_1 + x_2) + 2bn + \gamma &= 2by \\ \frac{2ax - a(x_1 + x_2) + bm(x_1 + x_2) + 2bn + \gamma}{2b} &= y \\ \frac{a}{b}x + \frac{(-a + bm)(x_1 + x_2) + 2bn + \gamma}{2b} &= y : d_3 \end{aligned}$$

doğrusu elde edilir.

4) $x_1 \leqslant x \leqslant x_2,\ y < mx_1 + n$ ise

$$\begin{aligned} .a\,|x - x_1| + b\,|y - mx_1 - n| + a\,|x - x_2| + b\,|y - mx_2 - n| &= \gamma \\ a(x - x_1) + b(mx_1 + n - y) + a(x_2 - x) + b(mx_2 + n - y) &= \gamma \\ -2by - ax_1 + ax_2 + bmx_1 + bmx_2 + 2bn - \gamma &= 0 \\ \frac{(-a + bm)x_1 + (a + bm)x_2 + 2bn - \gamma}{2b} &= y : d_4 \end{aligned}$$

doğru parçası elde edilir.

5) $x_1 \leqslant x \leqslant x_2, mx_1 + n \leqslant y \leqslant mx_2 + n$ ise

$$\begin{aligned} .a\,|x - x_1| + b\,|y - mx_1 - n| + a\,|x - x_2| + b\,|y - mx_2 - n| &= \gamma \\ a(x - x_1) + b(y - mx_1 - n) + a(x_2 - x) + b(mx_2 + n - y) &= \gamma \\ -ax_1 - bmx_1 + ax_2 + bmx_2 &= \gamma \\ -x_1(a + bm) + x_2(a + bm) &= \gamma \\ (a + bm)(x_1 - x_2) &= \gamma \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik $\gamma = \delta$ olması durumunda müküdür. O halde çözüm boş kümedir.

6) $x_1 \leqslant x \leqslant x_2, y > mx_2 + n$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x - x_1| + b\,|y - mx_1 - n| + a\,|x - x_2| + b\,|y - mx_2 - n| &= \gamma \\ a(x - x_1) + b(y - mx_1 - n) + a(x_2 - x) + b(y - mx_2 - n) &= \gamma \\ (a + bm)x_1 + (bm - a)x_2 + 2bn + \gamma &= 2by \\ \frac{(a + bm)x_1 + (bm - a)x_2 + 2bn + \gamma}{2b} &= y : d_5 \end{aligned}$$

doğru parçası elde edilir.

7) $x > x_2, y < mx_1 + n$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x - x_1| + b\,|y - mx_1 - n| + a\,|x - x_2| + b\,|y - mx_2 - n| &= \gamma \\ a(x - x_1) + b(mx_1 + n - y) + a(x - x_2) + b(mx_2 + n - y) &= \gamma \\ 2ax - a(x_1 - x_2) + bm(x_1 + x_2) + 2bn - \gamma &= 2by \\ \frac{2ax - a(x_1 + x_2) + bm(x_1 + x_2) + 2bn + \gamma}{2b} &= y \\ \frac{a}{b}x + \frac{(-a + bm)(x_1 + x_2) + 2bn + \gamma}{2b} &= y : d_6 \end{aligned}$$

doğru parçası elde edilir.

8) $x > x_2, mx_1 + n \leqslant y \leqslant mx_2 + n$ ise

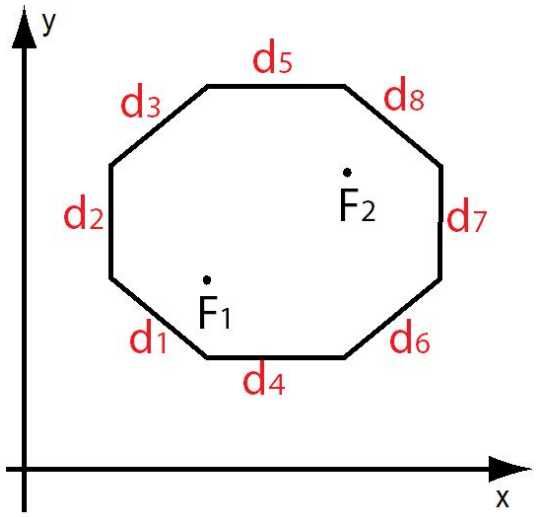
$$\begin{aligned} .a\,|x - x_1| + b\,|y - mx_1 - n| + a\,|x - x_2| + b\,|y - mx_2 - n| &= \gamma \\ a(x - x_1) + b(y - mx_1 - n) + a(x - x_2) + b(mx_2 + n - y) &= \gamma \\ 2ax - a(x_1 + x_2) - bm(x_1 - x_2) &= \gamma \\ \frac{a(x_1 + x_2) + bm(x_1 - x_2) + \gamma}{2a} &= x \\ \frac{(a + bm)x_1 + (a - bm)x_2 + \gamma}{2a} &= x : d_7 \end{aligned}$$

doğru parçası elde edilir.

9) $x > x_2, y > mx_2 + n$ ise

$$
\begin{aligned}
a\,|x-x_1| + b\,|y-mx_1-n| + a\,|x-x_2| + b\,|y-mx_2-n| &= \gamma \\
a(x-x_1) + b(y-mx_1+n) + a(x-x_2) + b(y-mx_2-n) &= \gamma \\
-2ax + a(x_1+x_2) + bm(x_1+x_2) + 2bn + \gamma &= 2by \\
\frac{-2ax + a(x_1+x_2) + bm(x_1+x_2) + 2bn + \gamma}{2b} &= y \\
\frac{-a}{b}x + \frac{(-a+bm)(x_1+x_2) + 2bn + \gamma}{2b} &= y : d_8
\end{aligned}
$$

doğrusu elde edilir. Burada $d_1 \parallel d_8, d_2 \parallel d_7, d_3 \parallel d_6, d_4 \parallel d_5$ tir. Ardışık doğru parçalarının kesişme noktaları olan $N_{12}, N_{23}, N_{35}, N_{58}, N_{87}, N_{76}, N_{64}, N_{41}$ belirlendiğinde çözüm bir sekizgen oluşturduğu görülür. (Bkz. Şekil 2.1.2.3)



Şekil 2.1.2.3

Sonuç: Genelleştirilmiş taksi düzlemde odaklar doğrusu bir ayıraç doğru olan ve 2.1.2.2 denklemi ile verilen bir genelleştirilmiş taksi elips

1. $\gamma = \delta$ iken $[F_1F_2]$ köşegenli bir karesel bölge,

2. $\gamma > \delta$ iken bir sekizgendir.

Teorem 2.1.2.5: Genelleştirilmiş taksi düzlemde $F_1 = (x_1, y_1)$, $F_2 = (x_2, y_2)$ odaklarının konumu ve dolayısıyla F_1F_2 odaklar doğrusunun eğimi m

ve γ sabitinin alacakları değerlere göre (2.1.2.2 denklemine sahip) iki odaklı genelleştirilmiş taksi elipsi aşağıdaki Tablo 2.1.2.1 de verilen geometrik yerlerden biridir.

$(d_G(F_{1,}F_2) = \delta)$

$$a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| + a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| = \gamma, \gamma \geqslant 0$$

F_1, F_2, m	$\boldsymbol{\gamma}$	**Geometrik Yer**
$F_1 \neq F_2$	$\gamma = 0$	Boş küme
$F_1 = F_2$	$\gamma = 0$	$F_1 = (x_1, y_1)$ noktası
$F_1 = F_2$	$\gamma < 0$	F_1 merkezli $\frac{\gamma}{2}$ yarıçaplı genelleştirilmiş taksi çemberi
0,∞	$\gamma = \delta$	$[F_1F_2]$ doğru parçası
0,∞	$\gamma > \delta$	Altıgen
$\pm\frac{a}{b}$	$\gamma = \delta$	$[F_1F_2]$ köşegenli karesel bölge
$\pm\frac{a}{b}$	$\gamma > \delta$	Sekizgen
$\neq \pm\frac{a}{b}, \neq 0, \infty$	$\gamma = \delta$	$[F_1F_2]$ köşegenli dikdörtgensel bölge
$\neq \pm\frac{a}{b}, \neq 0, \infty$	$\gamma > \delta$	Sekizgen
Bütün durumlarda	$\gamma < \delta$	Boş küme

Tablo 2.1.2.1

2.1.3 Genelleştirilmiş Taksi Hiperbol

Genelleştirilmiş taksi düzlemde iki odaklı genelleştirilmiş taksi hiperbol aşağıdaki gibi tanımlanır.

Genelleştirilmiş taksi düzleminde verilen sabit iki noktaya d_G uzaklıkları farkının mutlak değeri sabit olan noktaların kümesine (geometrik yerine)

iki odaklı genelleştirilmiş taksi hiperbol, sabit noktalara *genelleştirilmiş taksi hiperbolün odakları,* odak noktalarından geçen doğruya *odaklar doğrusu* (asal eksen) denir.

Verilen noktalar $F_1 = (x_1, y_1)$, $F_2 = (x_2, y_2)$ ve $\gamma \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ olmak üzere bunların belirlediği genelleştirilmiş taksi hiperbol

$$H = \{P = (x, y) : |d_G(P, F_1) - d_G(P, F_2)| = \gamma, \gamma \geqslant 0\} \tag{2.1.3.1}$$

kümesidir. Genelleştirilmiş taksi hiperbolün analitik ifadesi

$$a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| - (a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2|) = \pm\gamma \tag{2.1.3.2}$$

şeklindedir. F_1, F_2 noktalarının konumları ve γ nın alacağı değerlere göre 2.1.3.2 denkleminin farklı çözümleri olacaktır. Şimdi bu farklı durumlar yardımcı teoremler olarak ifade ve ispat edilecek ve daha sonra bütün durumlar için bir teorem olarak verilecektir. Odaklar arası genelleştirilmiş taksi uzaklığı

$$d_G(F_1, F_2) = \delta, \delta \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

olarak alınmaktadır. $\gamma > \delta$ olması halinde 2.1.3.2 denkleminin çözüm kümesi boş küme olacağından $\gamma < \delta$ olduğu açıktır.

Yardımcı Teorem 2.1.3.1: Genelleştirilmiş taksi düzlemde odaklar doğrusu yatay veya dikey olan ve $\gamma = 0$ olarak verilen genelleştirilmiş taksi hiperbol $[F_1F_2]$ doğru parçasının orta dikmesidir.

İspat: i- Odaklar doğrusu yatay doğru olsun. $m = 0$ ve $\gamma = 0$ için 2.1.3.2 denklemi çözülürse $(x_1 < x_2)$,

1) $x < x_1$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x-x_1| + b\,|y-y_1| - (a\,|x-x_2| + b\,|y-y_2|) &= 0 \\ a(x_1 - x) - a(x_2 - x) &= 0 \\ ax_1 - ax - ax_2 + ax &= 0 \\ ax_1 &= ax_2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Çözüm aradığımız bölge $x_1 < x_2$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

2) $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x-x_1| + b\,|y-y_1| - (a\,|x-x_2| + b\,|y-y_2|) &= 0 \\ a(x - x_1) - a(x_2 - x) &= 0 \\ ax - ax_1 - ax_2 + ax &= 0 \\ 2ax &= ax_1 + ax_2 \\ x &= \frac{x_1 + x_2}{2} \end{aligned}$$

Çözüm kümesi $[F_1F_2]$ doğru parçasının orta dikme doğrusudur.

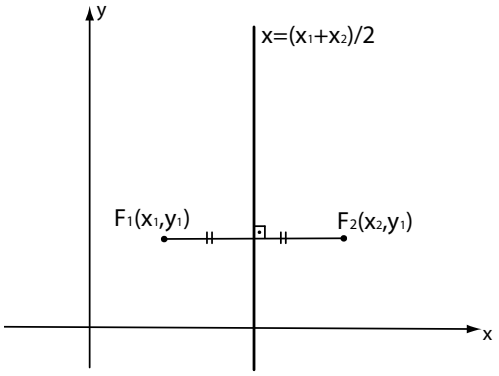
3) $x > x_2$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x-x_1| + b\,|y-y_1| - (a\,|x-x_2| + b\,|y-y_2|) &= 0 \\ a(x - x_1) - a(x - x_2) &= 0 \\ ax - ax_1 - ax + ax_2 &= 0 \\ ax_1 &= ax_2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Çözüm aradığımız bölge $x_1 < x_2$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

O halde genelleştirilmiş taksi düzleminde odaklar doğrusu yatay doğru olan ve $\gamma = 0$ olarak verilen genelleştirilmiş taksi hiperbol $[F_1F_2]$ doğru

parçasının orta dikmesidir. (Bkz. Şekil 2.1.3.1)



$$|d_G(P,F_1) - d_G(P,F_2)| = 0$$

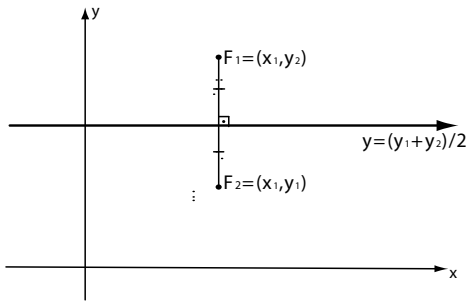
Şekil 2.1.3.1

ii. Odaklar doğrusu dikey doğru olsun. $m = \infty$ ve $\gamma = 0$ için 2.1.3.2 denklemi (i) ye benzer şekilde çözüldüğünde

1) $y < y_1$ için çözüm kümesi boş küme

2) $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$ için çözüm kümesi $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

3) $y > y_2$ için çözüm kümesi boş küme elde edilir. (Bkz. Şekil 2.1.3.2)



$$|d_G(P,F_1) - d_G(P,F_2)| = 0$$

Şekil 2.1.3.2

Yardımcı Teorem 2.1.3.2: Genelleştirilmiş taksi düzleminde odaklar doğrusu ayıraç doğru olan olan ve $\gamma = 0$ olarak verilen genelleştirilmiş taksi hiperbol

i- $m = \dfrac{a}{b}$ ise

$$\{(x,y) : (x \leqslant x_1, y \geqslant y_2\}$$

veya

$$\{(x,y) : (x \geqslant x_2, y \leq y_1\}$$

bölgeleri ile bu bölgelerin köşe noktalarını birleştiren doğru parçası

ii- $m = -\dfrac{a}{b}$ ise

$$\{(x,y) : (x \leqslant x_1, y \leqslant y_2\}$$

veya

$$\{(x,y) : (x \geqslant x_2, y \geqslant y_1\}$$

bölgeleri ile bu bölgelerin köşe noktalarını birleştiren doğru parçasıdır.

İspat:

i- Odaklar doğrusu ayıraç doğru olduğundan $y = \dfrac{a}{b}x + n$ dir.

$y_1 = \dfrac{a}{b}x_1 + n$ ve $y_2 = \dfrac{a}{b}x_2 + n$ yazılabilir. $x_1 < x_2$ ve $y_1 < y_2$ olduğundan $\dfrac{a}{b}x_1 + n < \dfrac{a}{b}x_2 + n$ dir.

$m = \dfrac{a}{b}, \gamma = 0$ için dokuz farklı durum incelenirse

1) $x \leqslant x_1$, $y \leqslant y_1$ ise

$$\begin{aligned}
a\,|x - x_1| + b\left|y - (\frac{a}{b}x_1 + n)\right| - (a\,|x - x_2| + b\left|y - (\frac{a}{b}x_2 + n)\right|) &= 0 \\
a(x_1 - x) + b((\frac{a}{b}x_1 + n) - y)) - (a(x_2 - x) - b((\frac{a}{b}x_2 + n) - y) &= 0 \\
-ax + ax_1 + ax_1 + bn - by + ax - ax_2 - ax_2 - bn + by &= 0 \\
2ax_1 &= 2ax_2 \\
x_1 &= x_2
\end{aligned}$$

Çözüm aradığımız bölge $x_1 < x_2$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

2) $x \leqslant x_1$, $y_1 < y < y_2$ ise

$$\begin{aligned} a\left|x-x_1\right|+b\left|y-(\frac{a}{b}x_1+n)\right|-(a\left|x-x_2\right|+b\left|y-(\frac{a}{b}x_2+n)\right|) &= 0 \\ a(x_1-x)+b(y-\frac{a}{b}x_1-n)-a(x_2-x)-b((\frac{a}{b}x_2+n)-y) &= 0 \\ -ax+ax_1+by-ax_1-bn-ax_2+ax-ax_2-bn+by &= 0 \\ 2by &= 2ax_2+2bn \\ y &= y_2 \end{aligned}$$

Çözüm aradığımız bölge $y < y_2$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

3) $x \leqslant x_1$, $y \geqslant y_2$ ise

$$\begin{aligned} a\left|x-x_1\right|+b\left|y-(\frac{a}{b}x_1+n)\right|-(a\left|x-x_2\right|+b\left|y-(\frac{a}{b}x_2+n)\right|) &= 0 \\ a(x_1-x)+b(y-\frac{a}{b}x_1-n)-a(x_2-x)-b(y-\frac{a}{b}x_2-n) &= 0 \\ -ax+ax_1-ax_1-bn+by+ax-ax_2+ax_2+bn-by &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

olup çözüm kümesi

$$U_1 = \{(x,y) : x \leq x_1, y \geqslant y_2\}$$

dir.

4) $x_1 < x < x_2$, $y \leqslant y_1$ ise

$$\begin{aligned} a\left|x-x_1\right|+b\left|y-(\frac{a}{b}x_1+n)\right|-(a\left|x-x_2\right|+b\left|y-(\frac{a}{b}x_2+n)\right|) &= 0 \\ a(x-x_1)+b(\frac{a}{b}x_1+n-y)-a(x_2-x)-b((\frac{a}{b}x_2+n)-y) &= 0 \\ ax-ax_1+ax_1+bn-by-ax_2+ax-ax_2-bn+by &= 0 \\ 2ax &= 2ax_2 \\ x &= x_2 \end{aligned}$$

Çözüm aradığımız bölge $x < x_2$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

5) $x_1 < x < x_2$, $y_1 < y < y_2$ ise

$$\begin{aligned} a\left|x-x_1\right| + b\left|y-(\frac{a}{b}x_1+n)\right| - (a\left|x-x_2\right| + b\left|y-(\frac{a}{b}x_2+n)\right|) &= 0 \\ a(x-x_1)+b(y-\frac{a}{b}x_1-n)-a(x_2-x)-b((\frac{a}{b}x_2+n)-y) &= 0 \\ ax-ax_1+by-ax_1-bn-ax_2+ax-ax_2-bn+by &= 0 \\ 2ax+2by &= 2ax_1+2ax_2+2bn \\ ax+by &= ax_1+ax_2+bn \end{aligned}$$

olup çözüm kümesi

$$U_2 = \{(x,y) : ax+by = ax_1+ax_2+bn\}$$

doğru parçasıdır.

6) $x_1 < x < x_2$, $y \geqslant y_2$ ise

$$\begin{aligned} a\left|x-x_1\right| + b\left|y-(\frac{a}{b}x_1+n)\right| - (a\left|x-x_2\right| + b\left|y-(\frac{a}{b}x_2+n)\right|) &= 0 \\ a(x-x_1)+b(y-\frac{a}{b}x_1-n)-a(x_2-x)-b(y-\frac{a}{b}x_2-n) &= 0 \\ ax-ax_1+by-ax_1-bn-ax_2+ax-by+ax_2+bn &= 0 \\ 2ax &= 2ax_1 \\ x &= x_1 \end{aligned}$$

Çözüm aradığımız bölge $x_1 < x$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

7) $x \geqslant x_2$, $y \leqslant y_1$ ise

$$\begin{aligned} a\left|x-x_1\right| + b\left|y-(\frac{a}{b}x_1+n)\right| - (a\left|x-x_2\right| + b\left|y-(\frac{a}{b}x_2+n)\right|) &= 0 \\ a(x-x_1)+b(\frac{a}{b}x_1+n-y)-a(x-x_2)-b(\frac{a}{b}x_2+n-y) &= 0 \\ ax-ax_1+ax_1+bn-by-ax+ax_2-ax_2-bn+by &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

olup çözüm kümesi

$$U_3 = \{(x, y) : x \geqslant x_2, y \leqslant y_1\}$$

dir.

8) $x \geqslant x_2$, $y_1 < y < y_2$ ise

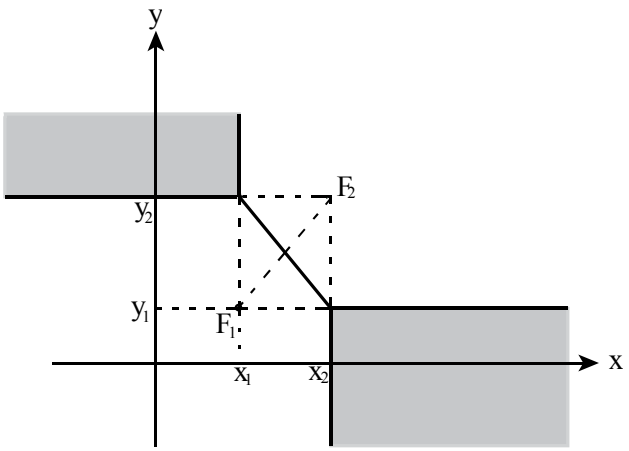
$$\begin{aligned} a\left|x - x_1\right| + b\left|y - (\frac{a}{b}x_1 + n)\right| - (a\left|x - x_2\right| + b\left|y - (\frac{a}{b}x_2 + n)\right|) &= 0 \\ a(x - x_1) + b(y - \frac{a}{b}x_1 - n) - a(x - x_2) - b((\frac{a}{b}x_2 + n) - y) &= 0 \\ ax - ax_1 + by - ax_1 - bn - ax + ax_2 - ax_2 - bn + by &= 0 \\ 2by &= 2ax_1 + 2bn \\ y &= y_1 \end{aligned}$$

Çözüm aradığımız bölge $y_1 < y$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

9) $x \geqslant x_2$, $y \geqslant y_2$ ise

$$\begin{aligned} a\left|x - x_1\right| + b\left|y - (\frac{a}{b}x_1 + n)\right| - (a\left|x - x_2\right| + b\left|y - (\frac{a}{b}x_2 + n)\right|) &= 0 \\ a(x - x_1) + b(y - \frac{a}{b}x_1 - n) - a(x - x_2) - b(y - \frac{a}{b}x_2 - n) &= 0 \\ ax - ax_1 + by - ax_1 - bn - ax + ax_2 - by + ax_2 + bn &= 0 \\ 2ax_2 &= 2ax_1 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

$x_1 < x_2$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir. Buna göre $m = \dfrac{a}{b}$ ve $\gamma = 0$ olarak verilen genelleştirilmiş taksi hiperbol $U = \cup U_i, i = 1, 2, 3$ tür. (Bkz. Şekil 2.1.3.3)



Şekil 2.1.3.3

ii. $m = -\dfrac{a}{b}, \gamma = 0$ iken (i) ye benzer şekilde incelediğimizde

1) $x \leqslant x_1,\ y \leqslant y_2$ iken

$$U_1 = \{(x, y) : x \geqslant x_2, y \leqslant y_1\}$$

dir.

2) $x \leqslant x_1, y_2 < y < y_1$ iken çözüm kümesi boş kümedir.

3) $x \leqslant x_1, y \geqslant y_1$ iken çözüm kümesi boş kümedir.

4) $x_1 < x < x_2, y \leqslant y_2$ iken çözüm kümesi boş kümedir.

5) $x_1 < x < x_2,\ y_2 < y < y_1$ iken çözüm kümesi

$$U_2 = \{(x, y) : ax - by = ax_1 + ax_2 - bn\}$$

doğru parçasıdır

6) $x_1 < x < x_2, y \geqslant y_1$ iken çözüm kümesi boş kümedir.

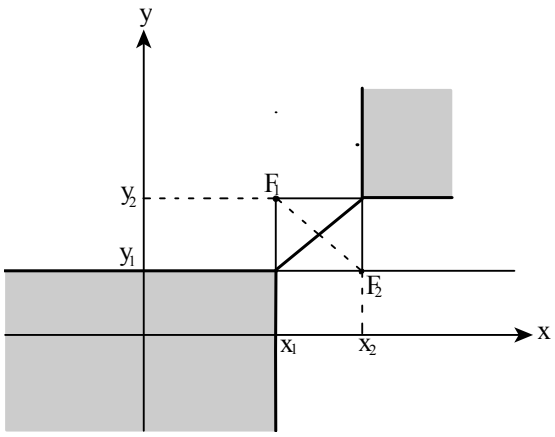
7) $x \geqslant x_2, y \leqslant y_2$ iken çözüm kümesi boş kümedir.

8) $x \geqslant x_2, y_2 < y < y_1$ iken çözüm kümesi boş kümedir.

9) $x \geqslant x_2,\ y \geqslant y_1$iken çözüm kümesi

$$U_3 = \{(x, y) : x \geqslant x_2, y \geqslant y_1\}$$

dir. Buna göre $m = -\frac{a}{b}$, $\gamma = 0$ iken genelleştirilmiş taksi hiperbol $U = \cup U_i, i = 1, 2, 3$ tür. (Bkz. Şekil 2.1.3.4)



Şekil 2.1.3.4

Yardımcı Teorem 2.1.3.3: Genelleştirilmiş taksi düzlemde odaklar doğrusunun eğimi m olmak üzere, $m \neq \pm\frac{a}{b}, 0, \infty$ ve $\gamma = 0$ olarak verilen genelleştirilmiş taksi hiperbol $[F_1F_2]$ nin orta noktasından geçen bir doğru parçası ile bunun uç noktalarına bağlı olan ve $|m| > \frac{a}{b}, |m| < \frac{a}{b}$ olmasına göre sırasıyla iki yatay veya iki dikey ışındır.

İspat:

i. Odaklar doğrusu $y = mx + n$, $|m| > \frac{a}{b}$ olsun.

a) $y_1 < y < y_2$

1) $x < x_1$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x_1 - x| + b\,|y_1 - y| &= a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| \\ a\,(x_1 - x) + b\,(-y_1 + y) &= a\,(-x + x_2) + b\,(-y + y_2) \\ ax_1 - ax - by_1 + by &= -ax + ax_2 - by + by_2 \\ 2by &= -ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2 \\ y &= \frac{-ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2}{2b} \end{aligned}$$

olup çözüm kümesi

$$U_1 = \left\{(x,y) : x < x_1 \text{ ve } \ y_1 < y < y_2, y = \frac{-ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2}{2b}\right\}$$

dir.

2) $x_1 < x < x_2$ ise

$$\begin{aligned} a\left|x_1 - x\right| + b\left|y_1 - y\right| &= a\left|x - x_2\right| + b\left|y - y_2\right| \\ a\left(-x_1 + x\right) + b\left(-y_1 + y\right) &= a\left(-x + x_2\right) + b\left(-y + y_2\right) \\ -ax_1 + ax - by_1 + by &= -ax + ax_2 - by + by_2 \\ 2ax + 2by &= ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2 \\ ax + by &= \frac{ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2}{2} \end{aligned}$$

olup çözüm kümesi

$$U_2 = \left\{(x,y) : x_1 < x < x_2 ve\ y_1 < y < y_2, ax + by = \frac{ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2}{2}\right\}$$

dir.

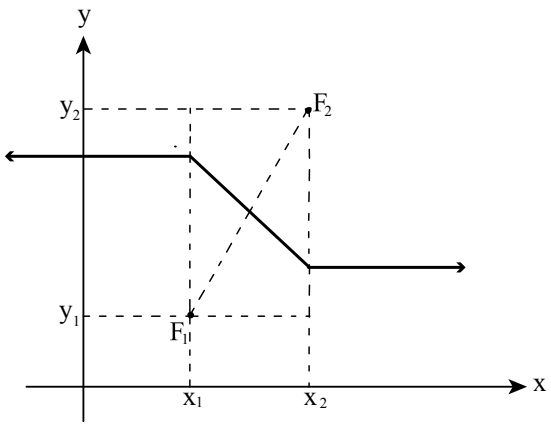
3) $x_2 \leqslant x$ ise

$$\begin{aligned} a\left|x_1 - x\right| + b\left|y_1 - y\right| &= a\left|x - x_2\right| + b\left|y - y_2\right| \\ a\left(-x_1 + x\right) + b\left(-y_1 + y\right) &= a\left(x - x_2\right) + b\left(-y + y_2\right) \\ -ax_1 + ax - by_1 + by &= ax - ax_2 - by + by_2 \\ 2by &= ax_1 - ax_2 + by_1 + by_2 \\ y &= \frac{ax_1 - ax_2 + by_1 + by_2}{2b} \end{aligned}$$

olup çözüm kümesi

$$U_3 = \left\{(x,y) : x_2 \leqslant x \text{ ve } \ y_1 < y < y_2, y = \frac{ax_1 - ax_2 + by_1 + by_2}{2b}\right\}$$

dir. Buna göre $|m| > \frac{a}{b}, \gamma = 0$ iken genelleştirilmiş taksi hiperbol $U = \cup U_i, i = 1,2,3$ tür. (Bkz. Şekil 2.1.3.5)



Şekil 2.1.3.5

b) $y_2 < y < y_1$

1) $x_1 < x$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x_1 - x| + b\,|y_1 - y| &= a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| \\ a\,(x_1 - x) + b\,(y_1 - y) &= a\,(-x + x_2) + b\,(y - y_2) \\ ax_1 - ax + by_1 - by &= -ax + ax_2 + by - by_2 \\ 2by &= ax_1 - ax_2 + by_1 + by_2 \\ y &= \frac{ax_1 - ax_2 + by_1 + by_2}{2b} \end{aligned}$$

olup çözüm kümesi

$$U_1 = \left\{ (x,y) : x_1 < x\ , y_2 < y < y_1\ , y = \frac{ax_1 - ax_2 + by_1 + by_2}{2b} \right\}$$

doğrusudur.

2) $x_1 < x < x_2$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x_1 - x| + b\,|y_1 - y| &= a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| \\ a\,(-x_1 + x) + b\,(y_1 - y) &= a\,(-x + x_2) + b\,(y - y_2) \\ -ax_1 + ax + by_1 - by &= -ax + ax_2 + by - by_2 \\ 2ax - 2by &= ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2 \\ ax - by &= \frac{ax_1 + ax_2 - by_1 - by_2}{2} \end{aligned}$$

olup çözüm kümesi

$$U_2 = \left\{ (x,y) : x_1 < x \ , y_2 < y < y_1 \ , ax - by = \frac{ax_1 + ax_2 - by_1 - by_2}{2} \right\}$$

doğru parçasıdır.

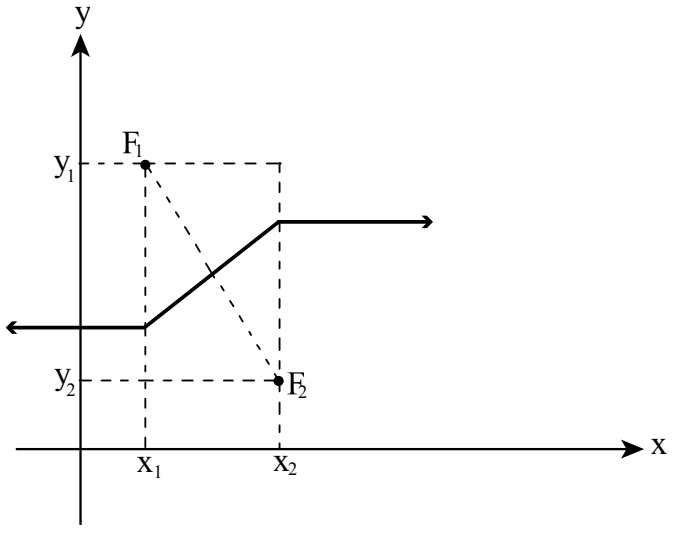
3) $x_2 \leqslant x$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x_1 - x| + b\,|y_1 - y| &= a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| \\ a\,(-x_1 + x) + b\,(y_1 - y) &= a\,(x - x_2) + b\,(y - y_2) \\ -ax_1 + ax + by_1 - by &= ax - ax_2 + by - by_2 \\ 2by &= -ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2 \\ y &= \frac{ax_1 - ax_2 + by_1 + by_2}{2b} \end{aligned}$$

olup çözüm kümesi

$$U_3 = \left\{ (x,y) : x_2 \leqslant x \ \text{ ve } y_2 < y < y_1 \ , y = \frac{ax_1 - ax_2 + by_1 + by_2}{2b} \right\}$$

doğrusudur. Buna göre $|m| > \frac{a}{b}, \gamma = 0$ iken genelleştirilmiş taksi hiperbol $U = \cup U_i, i = 1,2,3$ tür.(Bkz. Şekil 2.1.3.6)



Şekil 2.1.3.6

ii.

a) $x_1 < x < x_2$

1) $y < y_2$ ise

$$\begin{aligned} a\left|x_1 - x\right| + b\left|y_1 - y\right| &= a\left|x - x_2\right| + b\left|y - y_2\right| \\ a\left(-x_1 + x\right) + b\left(y_1 - y\right) &= a\left(-x + x_2\right) + b\left(-y + y_2\right) \\ -ax_1 + ax + by_1 - by &= -ax + ax_2 - by + by_2 \\ 2ax &= ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2 \\ x &= \frac{ax_1 + ax_2 - by_1 - by_2}{2a} \end{aligned}$$

olup çözüm kümesi

$$U_1 = \left\{(x, y) : x_1 < x < x_2 \text{ ve } y < y_2 \, , x = \frac{ax_1 + ax_2 - by_1 - by_2}{2a}\right\}$$

doğrusudur.

2) $y_2 < y < y_1$ ise

$$\begin{aligned} a\left|x_1 - x\right| + b\left|y_1 - y\right| &= a\left|x - x_2\right| + b\left|y - y_2\right| \\ a\left(-x_1 + x\right) + b\left(y_1 - y\right) &= a\left(-x + x_2\right) + b\left(y - y_2\right) \\ -ax_1 + ax + by_1 - by &= -ax + ax_2 + by - by_2 \\ 2ax - 2by &= ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2 \\ ax - by &= \frac{ax_1 + ax_2 - by_1 - by_2}{2} \end{aligned}$$

olup çözüm kümesi

$$U_2 = \left\{(x, y) : x_1 < x < x_2 \text{ ve } y_2 < y < y_1, ax - by = \frac{ax_1 + ax_2 - by_1 - by_2}{2}\right\}$$

doğru parçasıdır.

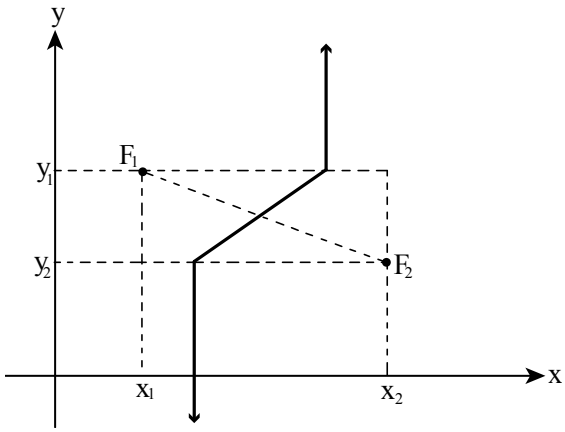
3) $y_1 \leqslant y$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x_1 - x| + b\,|y_1 - y| &= a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2| \\ a\,(-x_1 + x) + b\,(-y_1 + y) &= a\,(-x + x_2) + b\,(y - y_2) \\ -ax_1 + ax - by_1 + by &= -ax + ax_2 + by - by_2 \\ 2ax &= ax_1 - ax_2 + by_1 + by_2 \\ x &= \frac{ax_1 + ax_2 + by_1 - by_2}{2a} \end{aligned}$$

olup çözüm kümesi

$$U_3 = \left\{ (x, y) : x_1 < x < x_2 \text{ ve } y_1 \leqslant y,\ x = \frac{ax_1 + ax_2 + by_1 - by_2}{2a} \right\}$$

doğrusudur. Buna göre $|m| < \dfrac{a}{b}, \gamma = 0$ iken genelleştirilmiş taksi hiperbol $U = \cup U_i, i = 1, 2, 3$ tür. (Bkz. Şekil 2.1.3.7)



Şekil 2.1.3.7

b.

1) $x_1 < x < x_2$ ve $y \leqslant y_1$ ise

$$\begin{aligned} a\left|x_1-x\right|+b\left|y_1-y\right| &= a\left|x-x_2\right|+b\left|y-y_2\right| \\ a\left(-x_1+x\right)+b\left(y_1-y\right) &= a\left(-x+x_2\right)+b\left(-y+y_2\right) \\ -ax_1+ax+by_1-by &= -ax+ax_2-by+by_2 \\ 2ax &= ax_1+ax_2+by_1+by_2 \\ x &= \frac{-ax_1+ax_2-by_1+by_2}{2a} \end{aligned}$$

olup çözüm kümesi

$$U_1=\left\{(x,y): x_1<x<x_2 \text{ ve } y\leqslant y_1, x=\frac{-ax_1+ax_2-by_1+by_2}{2a}\right\}$$

doğrusudur.

2) $x_1<x<x_2$ ve $y_1<y<y_2$ ise

$$\begin{aligned} a\left|x_1-x\right|+b\left|y_1-y\right| &= a\left|x-x_2\right|+b\left|y-y_2\right| \\ a\left(-x_1+x\right)+b\left(-y_1+y\right) &= a\left(-x+x_2\right)+b\left(-y+y_2\right) \\ -ax_1+ax-by_1+by &= -ax+ax_2-by+by_2 \\ 2ax+2by &= ax_1+ax_2+by_1+by_2 \\ ax+by &= \frac{ax_1+ax_2+by_1+by_2}{2} \end{aligned}$$

olup çözüm kümesi

$$U_2=\left\{(x,y): x_1<x<x_2 \text{ ve } y_1<y<y_2, ax+by=\frac{ax_1+ax_2+by_1+by_2}{2}\right\}$$

doğru parçasıdır.

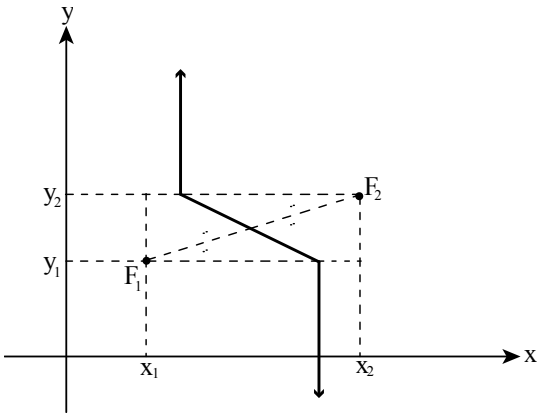
3) $x_1<x<x_2$ ve $y_2\leqslant y$ ise

$$\begin{aligned} a\left|x_1-x\right|+b\left|y_1-y\right| &= a\left|x-x_2\right|+b\left|y-y_2\right| \\ a\left(-x_1+x\right)+b\left(-y_1+y\right) &= a\left(-x+x_2\right)+b\left(y-y_2\right) \\ -ax_1+ax-by_1+by &= -ax+ax_2+by-by_2 \\ 2ax &= ax_1-ax_2+by_1+by_2 \\ x &= \frac{ax_1+ax_2+by_1-by_2}{2a} \end{aligned}$$

olup çözüm kümesi

$$U_3 = \left\{(x,y) : x_1 < x < x_2 \text{ ve } y_2 \leqslant y, x = \frac{ax_1 + ax_2 + by_1 - by_2}{2a}\right\}$$

doğrusudur. Buna göre $|m| < \frac{a}{b}, \gamma = 0$ iken genelleştirilmiş taksi hiperbol $U = \cup U_i, i = 1,2,3$ tür. (Bkz. Şekil 2.1.3.8)



Şekil 2.1.3.8

Yardımcı Teorem 2.1.3.4: Genelleştirilmiş taksi düzlemde odaklar doğrusu yatay veya dikey olan ve $\gamma = \delta$ olarak verilen genelleştirilmiş taksi hiperbol, $x_1 < x_2$ veya $x_1 = x_2$ olması durumuna göre;

$$\mathbb{R}^2 - \{(x,y) : x_1 < x < x_2\}$$

veya

$$\mathbb{R}^2 - \{(x,y) : \min\{y_1, y_2\} < y < \max\{y_1, y_2\}\}$$

olan iki kanatlı düzlemsel bölgedir.

İspat:

i- Odaklar doğrusu yatay olsun. O halde $y_1 = y_2$ dir.

1) $x \leqslant x_1$

a) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=-\gamma$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|) &= \gamma=\delta \\ a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|) &= a\,|x_1-x_2| \\ a(x_1-x)-a(x_2-x) &= a(x_2-x_1) \\ ax_1-ax-ax_2+ax &= ax_2-ax_1 \\ 2ax_1 &= 2ax_2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

$x_1 < x_2$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

b) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=-\gamma$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|) &= -\gamma=\delta \\ a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|) &= -a\,|x_1-x_2| \\ a(x_1-x)-a(x_2-x) &= -a(x_2-x_1) \\ ax_1-ax-ax_2+ax &= -ax_2+ax_1 \\ ax_1-ax_2 &= ax_1-ax_2 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Bu bölgedeki tüm noktalar çözüm kümesinin elemanıdır.

2) $x_1 < x < x_2$

a) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=\gamma$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|) &= \gamma=\delta \\ a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|) &= a\,|x_1-x_2| \\ a(x-x_1)-a(x_2-x) &= a.(x_2-x_1) \\ ax-ax_1-ax_2+ax &= ax_2-ax_1 \\ 2ax &= 2ax_2 \\ x &= x_2 \end{aligned}$$

$x < x_2$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

b) $x_1 < x < x_2$, $a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| - (a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2|) = -\gamma$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| - (a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2|) &= -\gamma = \delta \\ a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| - (a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2|) &= -a\,|x_1 - x_2| \\ a(x - x_1) - a(x_2 - x) &= -a(x_2 - x_1) \\ ax - ax_1 - ax_2 + ax &= -ax_2 + ax_1 \\ 2ax &= 2ax_1 \\ x &= x_1 \end{aligned}$$

$x_1 < x$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

3) $x_2 \leqslant x$

a) $a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| - (a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2|) = \gamma$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| - (a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2|) &= \gamma = \delta \\ a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| - (a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2|) &= a\,|x_1 - x_2| \\ a(x - x_1) - a(x - x_2) &= a(x_2 - x_1) \\ ax - ax_1 - ax + ax_2 &= ax_2 - ax_1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Bu bölgedeki tüm noktalar çözüm kümesinin elemanıdır.

b) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=-\gamma$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|) &= -\gamma=\delta \\ a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|) &= -a\,|x_1-x_2| \\ a(x-x_1)-a(x-x_2) &= -a(x_2-x_1) \\ ax-ax_1-ax+ax_2 &= -ax_2+ax_1 \\ 2ax_2 &= 2ax_1 \\ x_2 &= x_1 \end{aligned}$$

$x_1 < x_2$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

4) $x_1 = x_2 \leqslant x$

a) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=\gamma$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|) &= \gamma=\delta \\ a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|) &= a\,|x_1-x_2| \\ a(x-x_1)-a(x-x_2) &= 0 \\ ax-ax_1-ax+ax_2 &= 0 \\ x_2 &= x_1 \end{aligned}$$

Bu bölgedeki tüm noktalar çözüm kümesinin elemanıdır.

b) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=-\gamma$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|) &= -\gamma=\delta \\ a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|) &= -a\,|x_1-x_2| \\ a(x-x_1)-a(x-x_2) &= 0 \\ ax-ax_1-ax+ax_2 &= 0 \\ x_2 &= x_1 \end{aligned}$$

Bu bölgedeki tüm noktalar çözüm kümesinin elemanıdır.

5) $x \leqslant x_1 = x_2$

a) $a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| - (a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2|) = \gamma$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| - (a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2|) &= \gamma = \delta \\ a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| - (a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2|) &= a\,|x_1 - x_2| \\ a(x_1 - x) - a(x_2 - x) &= 0 \\ ax_1 - ax - ax_2 + ax &= 0 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Bu bölgedeki tüm noktalar çözüm kümesinin elemanıdır.

b) $a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| - (a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2|) = -\gamma$ ise

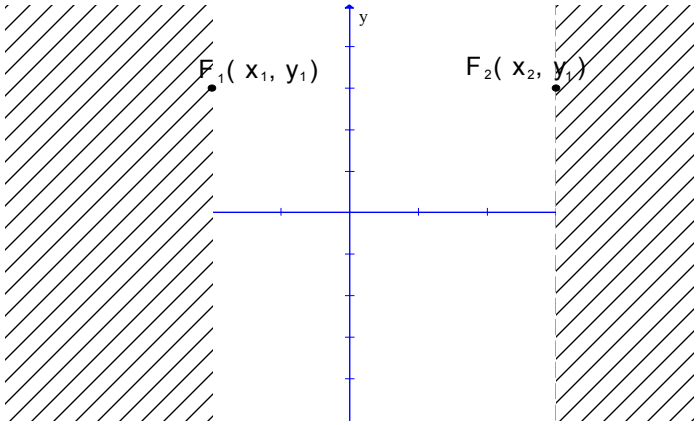
$$\begin{aligned} a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| - (a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2|) &= -\gamma = \delta \\ a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| - (a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2|) &= -a\,|x_1 - x_2| \\ a(x_1 - x) - a(x_2 - x) &= 0 \\ ax_1 - ax - ax_2 + ax &= 0 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Bu bölgedeki tüm noktalar çözüm kümesinin elemanıdır.

Dolayısıyla genelleştirilmiş taksi düzlemde odaklar doğrusu yatay doğru olan ve $\gamma = \delta$ olarak verilen genelleştirilmiş taksi hiperbol, $x_1 < x_2$ veya $x_1 = x_2$ olması durumuna göre

$$\mathbb{R}^2 - \{(x, y) : x_1 < x < x_2\}$$

düzlemsel bölgesidir. (Bkz. Şekil 2.1.3.9)

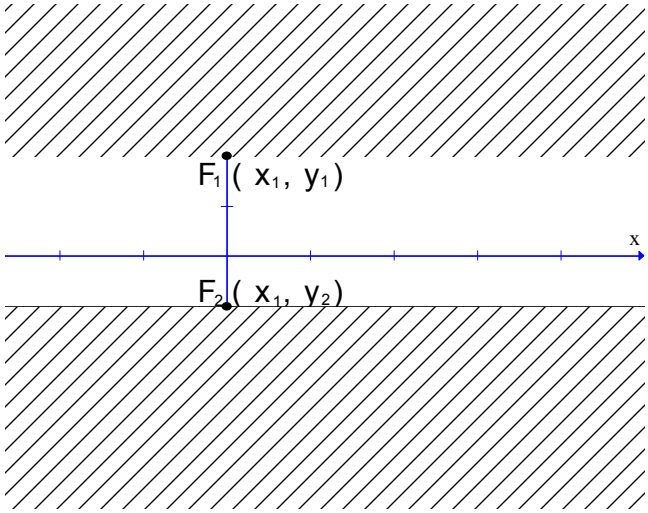


Şekil 2.1.3.9

ii. Odaklar doğrusu dikey olsun. O halde $x_1 = x_2$ dir. İspat (i) ye benzer yapıldığında genelleştirilmiş taksi hiperbol

$$\mathbb{R}^2 - \{(x, y) : \min\{y_1, y_2\} < y < \max\{y_1, y_2\}\}$$

olan iki kanatlı düzlemsel bölgedir. (Bkz. Şekil 2.1.3.10)



Şekil 2.1.3.10

Yardımcı Teorem 2.1.3.5: Genelleştirilmiş taksi düzlemde odaklar doğrusu yatay veya dikey olan ve $\gamma < \delta$ olarak verilen genelleştirilmiş taksi hiperbol, $x_1 < x_2$ veya $x_1 = x_2$ olması durumuna göre yatay ve dikey olan

doğrular $[F_1F_2]$ doğru parçasına dik ve bu doğru parçasının orta noktasına sırasıyla $\frac{\gamma}{2a}$, $\frac{\gamma}{2b}$ uzaklıktadır.

İspat:

i- Odaklar doğrusu *yatay* olsun. O halde $y_1 = y_2$ ve

$$\delta = d_G(F_1F_2) = a\,|x_2 - x_1|$$

dir.

1) $x \leqslant x_1 < x_2$

a) $a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| - (a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2|) = \gamma$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| - (a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2|) &= \gamma \\ a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| - (a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2|) &= \gamma \\ a(x_1 - x) - a(x_2 - x) &= \gamma \\ ax_1 - ax - ax_2 + ax &= \gamma \\ -a(x_1 - x_2) &= \gamma \\ \delta &= -\gamma \end{aligned}$$

$\gamma < \delta$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

b) $a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| - (a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2|) = -\gamma$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| - (a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2|) &= -\gamma \\ a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| - (a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2|) &= -\gamma \\ a(x_1 - x) - a(x_2 - x) &= -\gamma \\ a(x_1 - x_2) &= -\gamma \\ \delta &= \gamma \end{aligned}$$

$\gamma < \delta$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

2) $x_1 < x < x_2$

a) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=\gamma$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|) &= \gamma \\ a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|) &= \gamma \\ a(x-x_1)-a(x_2-x) &= \gamma \\ ax-ax_1-ax_2+ax &= \gamma \\ x &= \frac{ax_1+ax_2+\gamma}{2a} \end{aligned}$$

Çözüm kümesi

$$x=\frac{ax_1+ax_2+\gamma}{2a}$$

doğrusudur.

b) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=-\gamma$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|) &= -\gamma \\ a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|) &= -\gamma \\ a(x-x_1)-a(x_2-x) &= -\gamma \\ 2ax &= ax_1+ax_2-\gamma \\ x &= \frac{ax_1+ax_2-\gamma}{2a} \end{aligned}$$

Çözüm kümesi

$$x=\frac{ax_1+ax_2-\gamma}{2a}$$

doğrusudur.

3) $x_1<x_2\leqslant x$

a) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=\gamma$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|) &= \gamma \\ a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|) &= \gamma \\ a(x-x_1)-a(x-x_2) &= \gamma \\ ax-ax_1-ax+ax_2 &= \gamma \\ a(x_2-x_1) &= \gamma \\ \delta &= \gamma \end{aligned}$$

$\gamma<\delta$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

b) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=-\gamma$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|) &= -\gamma \\ a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|) &= -\gamma \\ a(x-x_1)-a(x-x_2) &= -\gamma \\ ax-ax_1-ax+ax_2 &= -\gamma \\ a(x_2-x_1) &= -\gamma \\ \delta &= -\gamma \end{aligned}$$

$\gamma<\delta$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

Dolayısıyla genelleştirilmiş taksi düzlemde odaklar doğrusu yatay doğru olan ve $\gamma<\delta$ olarak verilen genelleştirilmiş taksi hiperbol , $x_1<x_2$ veya $x_1=x_2$ olması durumuna göre $[F_1F_2]$ doğru parçasına dik olan

$$x=\frac{ax_1+ax_2+\gamma}{2a}$$

ve

$$x=\frac{ax_1+ax_2-\gamma}{2a}$$

doğrularından oluşur.

Bu doğrular

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{\gamma}{2a}$$

ve

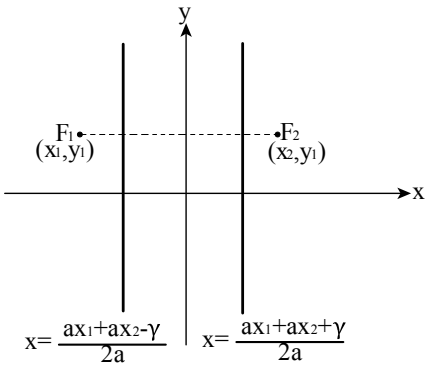
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{\gamma}{2a}$$

biçiminde yazıldığında $[F_1F_2]$ doğru parçasının orta noktasına göre simetrik ve $[F_1F_2]$ doğru parçasının orta noktasından $\frac{\gamma}{2a}$ uzaklıkta oldukları görülür. (Bkz. Şekil 2.1.3.11)

$x_1 = x_2$ olması durumuna genelleştirilmiş taksi hiperbol tek bir doğrudan olşur. Bu doğru

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

doğrusu yani odaklar doğrusunun orta dikme doğrusudur.



Şekil 2.1.3.11

ii. Odaklar doğrusu dikey olsun. O halde $x_1 = x_2$ ve

$$\delta = d_G(F_1F_2) = b\,|y_2 - y_1|$$

dir. Bu durum (i) ye benzer şekilde ispatlandığında genelleştirilmiş taksi hiperbol $[F_1F_2]$ doğru parçasına dik olan

$$y = \frac{by_1 + by_2 + \gamma}{2b}$$

ve

$$y = \frac{by_1 + by_2 - \gamma}{2b}$$

doğrularından oluşur.

Bu doğrular

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{\gamma}{2b}$$

ve

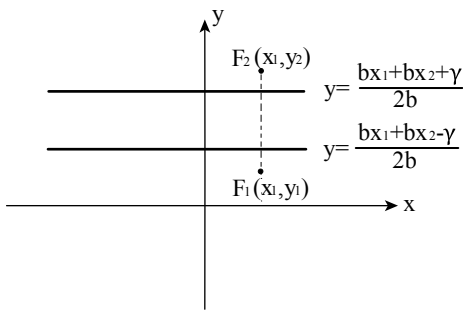
$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} - \frac{\gamma}{2b}$$

biçiminde yazıldığında $[F_1F_2]$ doğru parçasının orta noktasına göre simetrik ve $[F_1F_2]$ doğru parçasının orta noktasından $\frac{\gamma}{2b}$ uzaklıktadırlar. (Bkz. Şekil 2.1.3.12)

$y_1 = y_2$ olması durumuna genelleştirlmiş taksi hiperbol tek bir doğrudan olşur. Bu doğru

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

doğrusu yani odaklar doğrusunun orta dikme doğrusudur.



Şekil 2.1.3.12

Yardımcı Teorem 2.1.3.6: Genelleştirilmiş taksi düzlemde odaklar doğrusu ayıraç olan ve $\gamma = \delta$ olarak verilen genelleştirilmiş taksi hiperbol,

köşeleri odaklar olan ve $m = \frac{a}{b}$ iken

$$\{(x, y) : (x \leqslant x_1, y \leqslant y_1) \text{ veya } (x \geqslant x_2, y \geqslant y_2)\}$$

olan iki kanatlı düzlemsel bölge, $m = \frac{a}{b}$ iken

$$\{(x, y) : (x \leqslant x_1, y \geqslant y_1) \text{ veya } (x \geqslant x_2, y \leqslant y_2)\}$$

olan iki kanatlı düzlemsel bölgedir.

İspat:

i. Odaklar doğrusu ayıraç doğru olduğundan $F_1 = (x_1, \frac{a}{b}x_1 + n), F_2 = (x_2, \frac{a}{b}x_2 + n)$ yazılabilir.

$$\begin{aligned} d_G(F_1, F_2) &= a\,|x_1 - x_2| + b\left|\frac{a}{b}x_1 + n - \frac{a}{b}x_2 - n\right| \\ &= a\,|x_1 - x_2| + a\,|x_1 - x_2| \\ &= 2a\,|x_1 - x_2| \end{aligned} \tag{2.1.3.3}$$

dir.

Odaklar doğrusunun eğimi $m = \frac{a}{b}$ ve $\gamma = \delta$ için dokuz farklı durum incelenerek 2.1.3.3 denklemi çözülürse

1) $x \leqslant x_1, y \leqslant y_1$

a) $a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| - (a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2|) = \gamma$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x - x_1| + b\left|y - \frac{a}{b}x_1 - n\right| - (a\,|x - x_2| + b\left|y - \frac{a}{b}x_2 - n\right|) &= 2a(x_2 - x_1) \\ a(x_1 - x) + b(\frac{a}{b}x_1 + n - y) - a(x_2 - x) - b(\frac{a}{b}x_2 + n - y) &= 2a(x_2 - x_1) \\ ax_1 - ax + ax_1 + bn - by + ax - ax_2 - ax_2 - bn + by &= 2a(x_2 - x_1) \\ 2ax_1 - 2ax_2 &= 2a(x_2 - x_1) \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Çözüm aradığımız bölgede $x_1 < x_2$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

b) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=-\gamma$ ise

$$\begin{aligned}
a\,|x-x_1|+b\left|y-\frac{a}{b}x_1-n\right|-(a\,|x-x_2|+b\left|y-\frac{a}{b}x_2-n\right|) &= -2a(x_2-x_1)\\
a(x_1-x)+b(\frac{a}{b}x_1+n-y)-a(x_2-x)-b(\frac{a}{b}x_2+n-y) &= -2a(x_2-x_1)\\
ax_1-ax+ax_1+bn-by+ax-ax_2-ax_2-bn+by &= -2a(x_2-x_1)\\
2ax_1-2ax_2 &= -2a(x_2-x_1)\\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Bu bölgedeki tüm noktalar çözüm kümesinin elemanıdır.

2) $x \leqslant x_1, y_1 < y < y_2$

a) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=\gamma$ ise

$$\begin{aligned}
a\,|x-x_1|+b\left|y-\frac{a}{b}x_1-n\right|-(a\,|x-x_2|+b\left|y-\frac{a}{b}x_2-n\right|) &= 2a(x_2-x_1)\\
a(x_1-x)+b(y-\frac{a}{b}x_1-n)-a(x_2-x)-b(\frac{a}{b}x_2+n-y) &= 2a(x_2-x_1)\\
ax_1-ax+by-ax_1-bn-ax_2+ax-ax_2-bn+by &= 2a(x_2-x_1)\\
2by-2ax_2-2bn &= 2a(x_2-x_1)\\
(y-y_2) &= \frac{a}{b}(x_2-x_1)
\end{aligned}$$

$\frac{a}{b}(x_2-x_1)$ pozitif olduğundan $(y-y_2)$ pozitif olmalıdır. O halde $y > y_1$ bulunur. Çözüm aradığımız bölgede $y < y_2$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

b) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=-\gamma$ ise

$$\begin{aligned}
a\,|x-x_1|+b\left|y-\frac{a}{b}x_1-n\right|-(a\,|x-x_2|+b\left|y-\frac{a}{b}x_2-n\right|) &= -2a(x_2-x_1)\\
a(x_1-x)+b(y-\frac{a}{b}x_1-n)-a(x_2-x)-b(\frac{a}{b}x_2+n-y) &= -2a(x_2-x_1)\\
ax_1-ax+by-ax_1-bn-ax_2+ax-ax_2-bn+by &= -2a(x_2-x_1)\\
2by-2ax_2-2bn &= -2a(x_2-x_1)\\
y &= y_1
\end{aligned}$$

Çözüm aradığımız bölgede $y > y_1$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

3) $x \leqslant x_1,\ y \geqslant y_2$

a) $a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| - (a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2|) = \gamma$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x - x_1| + b\left|y - \frac{a}{b}x_1 - n\right| - (a\,|x - x_2| + b\left|y - \frac{a}{b}x_2 - n\right|) &= 2a(x_2 - x_1) \\ a(x_1 - x) + b(y - \frac{a}{b}x_1 - n) - a(x_2 - x) - b(y - \frac{a}{b}x_2 - n) &= 2a(x_2 - x_1) \\ ax_1 - ax + by - ax_1 - bn - ax_2 + ax - by + ax_2 + bn &= 2a(x_2 - x_1) \\ 0 &= 2a(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Son eşitlik $x_1 = x_2$ olmasını gerektirir. Çözüm aradığımız bölgede $x_1 < x_2$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

b) $x \leqslant x_1,\ y \geqslant y_2, a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| - (a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2|) = -\gamma$ise

$$\begin{aligned} a\,|x - x_1| + b\left|y - \frac{a}{b}x_1 - n\right| - (a\,|x - x_2| + b\left|y - \frac{a}{b}x_2 - n\right|) &= -2a(x_2 - x_1) \\ a(x_1 - x) + b(y - \frac{a}{b}x_1 - n) - a(x_2 - x) - b(y - \frac{a}{b}x_2 - n) &= -2a(x_2 - x_1) \\ ax_1 - ax + by - ax_1 - bn - ax_2 + ax - by + ax_2 + bn &= -2a(x_2 - x_1) \\ 0 &= -2a(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Son eşitlik $x_1 = x_2$ olmasını gerektirir. Çözüm aradığımız bölgede $x_1 < x_2$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

4) $x_1 < x < x_2,\ y \leqslant y_1$

a) $a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| - (a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2|) = \gamma$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x - x_1| + b\left|y - \frac{a}{b}x_1 - n\right| - (a\,|x - x_2| + b\left|y - \frac{a}{b}x_2 - n\right|) &= 2a(x_2 - x_1) \\ a(x - x_1) + b(\frac{a}{b}x_1 + n - y) - a(x_2 - x) - b(\frac{a}{b}x_2 + n - y) &= 2a(x_2 - x_1) \\ ax - ax_1 + ax_1 + bn - by - ax_2 + ax - ax_2 - bn + by &= 2a(x_2 - x_1) \\ 2ax - 2ax_2 &= 2a(x_2 - x_1) \\ x &= 2x_2 - x_1 \end{aligned}$$

b) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=-\gamma$ ise

$$\begin{aligned}
a\,|x-x_1|+b\left|y-\frac{a}{b}x_1-n\right|-(a\,|x-x_2|+b\left|y-\frac{a}{b}x_2-n\right|) &= -2a(x_2-x_1)\\
a(x-x_1)+b(\frac{a}{b}x_1+n-y)-a(x_2-x)-b(\frac{a}{b}x_2+n-y) &= -2a(x_2-x_1)\\
ax-ax_1+ax_1+bn-by-ax_2+ax-ax_2-bn+by &= -2a(x_2-x_1)\\
2ax-2ax_2 &= -2ax_2+2ax_1\\
x &= x_1
\end{aligned}$$

$x=x_1$ ve $x=2x_2-x_1$ eşitlikleri $x_2=x_1$ olmasını gerektirir. Çözüm aradığımız bölgede $x_1<x_2$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

5) $x_1<x<x_2$, $y_1<y<y_2$

a) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=\gamma$ ise

$$\begin{aligned}
a\,|x-x_1|+b\left|y-\frac{a}{b}x_1-n\right|-(a\,|x-x_2|+b\left|y-\frac{a}{b}x_2-n\right|) &= 2a(x_2-x_1)\\
a(x-x_1)+b(y-\frac{a}{b}x_1-n)-a(x_2-x)-b(\frac{a}{b}x_2+n-y) &= 2a(x_2-x_1)\\
ax-ax_1+by-ax_1-bn-ax_2+ax-ax_2-bn+by &= 2a(x_2-x_1)\\
2ax+2by-2ax_1-2ax_2-2bn &= 2a(x_2-x_1)\\
ax+by &= ax_2+ax_2+bn\\
\frac{a}{b}(x-x_2) &= (y_2-y)
\end{aligned}$$

y_2-y pozitif olduğundan $x-x_2$ pozitif olmalıdır. Ohalde $x>x_2$dir. bulunur. Çözüm aradığımız bölgede $x<x_2$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

b) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=-\gamma$ ise

$$\begin{aligned}
a\,|x-x_1|+b\left|y-\frac{a}{b}x_1-n\right|-(a\,|x-x_2|+b\left|y-\frac{a}{b}x_2-n\right|) &= -2a(x_2-x_1)\\
a(x-x_1)+b(y-\frac{a}{b}x_1-n)-a(x_2-x)-b(\frac{a}{b}x_2+n-y) &= -2a(x_2-x_1)\\
ax-ax_1+by-ax_1-bn-ax_2+ax-ax_2-bn+by &= -2a(x_2-x_1)\\
2ax+2by-2ax_1-2ax_2-2bn &= -2a(x_2-x_1)\\
ax+by &= ax_1+ax_1+bn\\
\frac{a}{b}(x-x_1) &= (y_1-y)
\end{aligned}$$

y_1-y negatif olduğundan $x-x_1$ negatif olmalıdır. Ohalde $x<x_1$dir. bulunur. Çözüm aradığımız bölgede $x>x_1$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

6) $x_1<x<x_2$, $y\geqslant y_2$

a) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=\gamma$ ise

$$\begin{aligned}
a\,|x-x_1|+b\left|y-\frac{a}{b}x_1-n\right|-(a\,|x-x_2|+b\left|y-\frac{a}{b}x_2-n\right|) &= 2a\,|x_1-x_2|\\
a(x-x_1)+b(y-\frac{a}{b}x_1-n)-a(x_2-x)-b(y-\frac{a}{b}x_2-n) &= 2a\,|x_1-x_2|\\
ax-ax_1+by-ax_1-bn-ax_2+ax-by+ax_2+bn &= 2a\,|x_1-x_2|\\
2ax-2ax_1 &= 2a(x_2-x_1)
\end{aligned}$$

Son eşitlik $x=x_2$ olmasını gerektirir. Çözüm aradığımız bölgede $x<x_2$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

b) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=-\gamma$ ise

$$\begin{aligned}
a\,|x-x_1|+b\left|y-\frac{a}{b}x_1-n\right|-(a\,|x-x_2|+b\left|y-\frac{a}{b}x_2-n\right|) &= -2a\,|x_1-x_2|\\
a(x-x_1)+b(y-\frac{a}{b}x_1-n)-a(x_2-x)-b(y-\frac{a}{b}x_2-n) &= -2a\,|x_1-x_2|\\
ax-ax_1+by-ax_1-bn-ax_2+ax-by+ax_2+bn &= -2a\,|x_1-x_2|\\
2ax-2ax_1 &= 2a(x_1-x_2)
\end{aligned}$$

Son eşitlik $x < x_1$ olmasını gerektirir. Çözüm aradığımız bölgede $x_1 < x$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir

7) $x \geqslant x_2, y \leqslant y_1$

a) $a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| - (a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2|) = \gamma$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x - x_1| + b\left|y - \frac{a}{b}x_1 - n\right| - (a\,|x - x_2| + b\left|y - \frac{a}{b}x_2 - n\right|) &= 2a\,|x_1 - x_2| \\ a(x - x_1) + b(\frac{a}{b}x_1 + n - y) - a(x - x_2) - b(\frac{a}{b}x_2 + n - y) &= 2a(x_2 - x_1) \\ ax - ax_1 + ax_1 + bn - by - ax + ax_2 - ax_2 - bn + by &= 2a(x_2 - x_1) \\ 0 &= 2a(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Son eşitlik $x_1 = x_2$ olmasını gerektirir. Çözüm aradığımız bölgede $x_1 < x_2$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

b) $a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| - (a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2|) = -\gamma$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x - x_1| + b\left|y - \frac{a}{b}x_1 - n\right| - (a\,|x - x_2| + b\left|y - \frac{a}{b}x_2 - n\right|) &= -2a(x_2 - x_1) \\ a(x - x_1) + b(\frac{a}{b}x_1 + n - y) - a(x - x_2) - b(\frac{a}{b}x_2 + n - y) &= -2a(x_2 - x_1) \\ ax - ax_1 + ax_1 + bn - by - ax + ax_2 - ax_2 - bn + by &= -2a(x_2 - x_1) \\ 0 &= -2a(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Son eşitlik $x_1 = x_2$ olmasını gerektirir. Çözüm aradığımız bölgede $x_1 < x_2$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

8) $x \geqslant x_2$, $y_1 < y < y_2$

a) $a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| - (a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2|) = \gamma$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x - x_1| + b\left|y - \frac{a}{b}x_1 - n\right| - (a\,|x - x_2| + b\left|y - \frac{a}{b}x_2 - n\right|) &= 2a\,|x_1 - x_2| \\ a(x - x_1) + b(y - \frac{a}{b}x_1 - n) - a(x - x_2) - b(\frac{a}{b}x_2 + n - y) &= 2a(x_2 - x_1) \\ ax - ax_1 + by - ax_1 - bn - ax + ax_2 - ax_2 - bn + by &= 2a(x_2 - x_1) \\ 2by - 2ax_1 - 2bn &= 2a(x_2 - x_1) \\ y &= y_2 \end{aligned}$$

bulunur. Çözüm aradığımız bölgede $y < y_2$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

b) $a\,|x-x_1| + b\,|y-y_1| - (a\,|x-x_2| + b\,|y-y_2|) = -\gamma$ ise

$$\begin{aligned}
a\,|x-x_1| + b\left|y - \frac{a}{b}x_1 - n\right| - (a\,|x-x_2| + b\left|y - \frac{a}{b}x_2 - n\right|) &= -2a\,|x_1 - x_2| \\
a(x-x_1) + b(y - \frac{a}{b}x_1 - n) - a(x-x_2) - b(\frac{a}{b}x_2 + n - y) &= -2a(x_2 - x_1) \\
ax - ax_1 + by - ax_1 - bn - ax + ax_2 - ax_2 - bn + by &= -2a(x_2 - x_1) \\
2by - 2ax_1 - 2bn &= -2a(x_2 - x_1) \\
(y - y_1) &= \frac{a}{b}(x_1 - x_2)
\end{aligned}$$

$\frac{a}{b}(x_1 - x_2)$ negatif olduğundan $(y - y_1)$ negatiftir.O halde $y < y_1$ dir.Çözüm aradığımız bölgede $y > y_1$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

9) $x \geqslant x_2$, $y \geqslant y_2$

a) $a\,|x-x_1| + b\,|y-y_1| - (a\,|x-x_2| + b\,|y-y_2|) = \gamma$ ise

$$\begin{aligned}
a\,|x-x_1| + b\left|y - \frac{a}{b}x_1 - n\right| - (a\,|x-x_2| + b\left|y - -\frac{a}{b}x_2 - n\right|) &= 2a\,|x_1 - x_2| \\
a(x-x_1) + b(y - \frac{a}{b}x_1 - n) - a(x-x_2) - b(y - \frac{a}{b}x_2 - n) &= 2a(x_2 - x_1) \\
ax - ax_1 + by - ax_1 - bn - ax + ax_2 - by + ax_2 + bn &= 2a(x_2 - x_1) \\
2ax_2 - 2ax_1 &= 2a(x_2 - x_1)
\end{aligned}$$

Bu böldedeki tüm noktalar çözümü sağlar.

b) $a\,|x-x_1| + b\,|y-y_1| - (a\,|x-x_2| + b\,|y-y_2|) = -\gamma$ ise

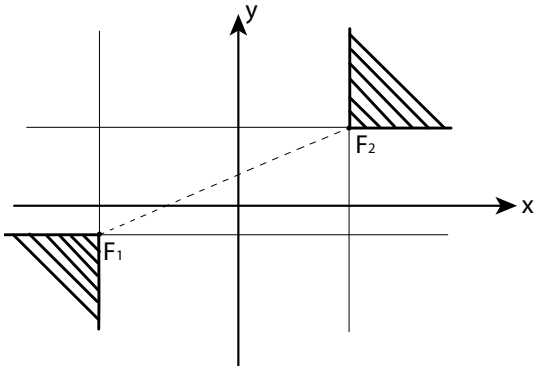
$$\begin{aligned}
a\,|x-x_1| + b\left|y - \frac{a}{b}x_1 - n\right| - (a\,|x-x_2| + b\left|y - -\frac{a}{b}x_2 - n\right|) &= -2a\,|x_1 - x_2| \\
a(x-x_1) + b(y - \frac{a}{b}x_1 - n) - a(x-x_2) - b(y - \frac{a}{b}x_2 - n) &= -2a(x_2 - x_1) \\
ax - ax_1 + by - ax_1 - bn - ax + ax_2 - by + ax_2 + bn &= -2a(x_2 - x_1) \\
2ax_2 - 2ax_1 &= 2ax_1 - 2ax_2 \\
x_1 &= x_2
\end{aligned}$$

Çözüm aradığımız bölgede $x_1 < x_2$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

Dolayısıyla genelleştirilmiş taksi düzlemde odaklar doğrusu ayıraç olan ve $\gamma = \delta$ olarak verilen genelleştirilmiş taksi hiperbol, köşeleri odaklar

$$\{(x, y) : (x \leqslant x_1, y \leqslant y_1) \text{ veya } (x \geqslant x_2, y \geqslant y_2)\}$$

olan iki kanatlı düzlemsel bölgedir. (Bkz. Şekil 2.1.3.13)

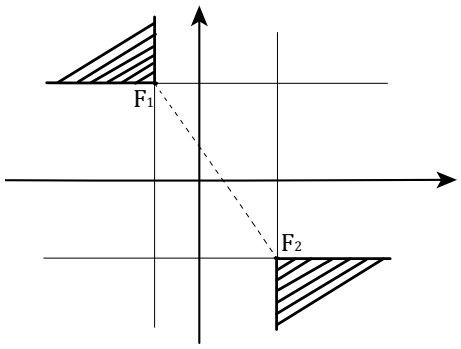


Şekil 2.1.3.13

ii) Genelleştirilmiş taksi düzlemde odaklar doğrusu ayıraç olan $m = -\frac{a}{b}$ ve $\gamma = \delta$ olarak verilen genelleştirilmiş taksi hiperbol, köşeleri odaklar olan

$$\{(x, y) : (x \leqslant x_1, y \geqslant y_1) \text{ veya } (x \geqslant x_2, y \leqslant y_2)\}$$

iki kanatlı düzlemsel bölgedir. İspat " i" deki gibi yapılır. (Bkz. Şekil 2.1.3.14)



Şekil 2.1.3.14

Yardımcı Teorem 2.1.3.7: Genelleştirilmiş taksi düzlemde odaklar doğrusu ayıraç olan ve $\gamma < \delta$ olarak verilen genelleştirilmiş taksi hiperbol,

$[F_1F_2]$ nin orta dikmesine göre simetrik olan iki koldan her biri, bir doğru parçası ile dikey ve yatay iki ışından oluşan gerçek genelleştirilmiş taksi hiperbolüdür.

İspat:

i. Odaklar doğrusu ayıraç doğru olduğundan $F_1 = (x_1, \frac{a}{b}x_1 + n), F_2 = (x_2, \frac{a}{b}x_2 + n)$ yazılabilir.

$$\begin{aligned} d_G(F_1, F_2) &= a\,|x_1 - x_2| + b\left|\frac{a}{b}x_1 + n - \frac{a}{b}x_2 - n\right| \\ &= a\,|x_1 - x_2| + a\,|x_1 - x_2| \\ &= 2a\,|x_1 - x_2| \end{aligned} \tag{2.1.3.4}$$

dir.

Odaklar doğrusunun eğimi $m = \frac{a}{b}$ ve $\gamma < \delta$ için dokuz farklı durum incelenerek 2.1.3.4 denklemi çözülürse

1) $x \leqslant x_1, y \leqslant y_1$

a) $a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| - (a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2|) = \gamma$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x - x_1| + b\left|y - \frac{a}{b}x_1 - n\right| - (a\,|x - x_2| + b\left|y - \frac{a}{b}x_2 - n\right|) &= \gamma \\ a(x_1 - x) + b(\frac{a}{b}x_1 + n - y) - a(x_2 - x) - b(\frac{a}{b}x_2 + n - y) &= \gamma \\ ax_1 - ax + ax_1 + bn - by + ax - ax_2 - ax_2 - bn + by &= \gamma \\ 2ax_1 - 2ax_2 &= \gamma \\ -\delta &= \gamma \end{aligned}$$

dir. $\gamma < \delta$ olduğundan bu aralıkta çözüm kümesi boş kümedir.

b) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=-\gamma$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x-x_1|+b\left|y-\frac{a}{b}x_1-n\right|-(a\,|x-x_2|+b\left|y-\frac{a}{b}x_2-n\right|) &= -\gamma \\ a(x_1-x)+b(\frac{a}{b}x_1+n-y)-a(x_2-x)-b(\frac{a}{b}x_2+n-y) &= -\gamma \\ ax_1-ax+ax_1+bn-by+ax-ax_2-ax_2-bn+by &= -\gamma \\ 2ax_1-2ax_2 &= -\gamma \\ \delta &= \gamma \end{aligned}$$

$\gamma<\delta$ olduğundan bu aralıkta çözüm kümesi boş kümedir.

2) $x\leqslant x_1,\ y_1<y<y_2$

a) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=\gamma$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x-x_1|+b\left|y-\frac{a}{b}x_1-n\right|-(a\,|x-x_2|+b\left|y-\frac{a}{b}x_2-n\right|) &= \gamma \\ a(x_1-x)+b(y-\frac{a}{b}x_1-n)-a(x_2-x)-b(\frac{a}{b}x_2+n-y) &= \gamma \\ ax_1-ax+by-ax_1-bn-ax_2+ax-ax_2-bn+by &= \gamma \\ 2by-2ax_2-2bn &= \gamma \\ 2by &= 2ax_2+2bn+\gamma \\ y &= y_2+\frac{\gamma}{2b} \end{aligned}$$

dir. $y<y_2$ olduğundan bu aralıkta çözüm kümesi boş kümedir.

b) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=-\gamma$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x-x_1|+b\left|y-\frac{a}{b}x_1-n\right|-(a\,|x-x_2|+b\left|y-\frac{a}{b}x_2-n\right|) &= -\gamma \\ a(x_1-x)+b(y-\frac{a}{b}x_1-n)-a(x_2-x)-b(\frac{a}{b}x_2+n-y) &= -\gamma \\ ax_1-ax+by-ax_1-bn-ax_2+ax-ax_2-bn+by &= -\gamma \\ 2by &= 2ax_2+2bn-\gamma \\ y &= y_2-\frac{\gamma}{2b} \end{aligned}$$

dir. Çözüm kümesi

$$y=y_2-\frac{\gamma}{2b}$$

doğrusudur.

3) $x \leqslant x_1,\ y \geqslant y_2$

$a\,|x-x_1| + b\,|y-y_1| - (a\,|x-x_2| + b\,|y-y_2|) = \pm\gamma$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x-x_1| + b\left|y - \frac{a}{b}x_1 - n\right| - (a\,|x-x_2| + b\left|y - \frac{a}{b}x_2 - n\right|) &= \pm\gamma \\ a(x_1 - x) + b(y - \frac{a}{b}x_1 - n) - a(x_2 - x) - b(y - \frac{a}{b}x_2 - n) &= \pm\gamma \\ ax_1 - ax + by - ax_1 - bn - ax_2 + ax - by + ax_2 + bn &= \pm\gamma \\ 0 &= \pm\gamma \end{aligned}$$

dir. Çözüm kümesi boş kümedir.

4) $x_1 < x < x_2, y \leqslant y_1$

a) $a\,|x-x_1| + b\,|y-y_1| - (a\,|x-x_2| + b\,|y-y_2|) = \gamma$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x-x_1| + b\left|y - \frac{a}{b}x_1 - n\right| - (a\,|x-x_2| + b\left|y - \frac{a}{b}x_2 - n\right|) &= +\gamma \\ a(x - x_1) + b(\frac{a}{b}x_1 + n - y) - a(x_2 - x) - b(\frac{a}{b}x_2 + n - y) &= +\gamma \\ ax - ax_1 + ax_1 + bn - by - ax_2 + ax - ax_2 - bn + by &= +\gamma \\ 2ax &= 2ax_2 + \gamma \\ x &= x_2 + \frac{\gamma}{2a} \end{aligned}$$

dir. $x < x_2$ olduğundan bu aralıkta çözüm kümesi boş kümedir.

b) $a\,|x-x_1| + b\,|y-y_1| - (a\,|x-x_2| + b\,|y-y_2|) = -\gamma$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x-x_1| + b\left|y - \frac{a}{b}x_1 - n\right| - (a\,|x-x_2| + b\left|y - \frac{a}{b}x_2 - n\right|) &= -\gamma \\ a(x - x_1) + b(\frac{a}{b}x_1 + n - y) - a(x_2 - x) - b(\frac{a}{b}x_2 + n - y) &= -\gamma \\ ax - ax_1 + ax_1 + bn - by - ax_2 + ax - ax_2 - bn + by &= -\gamma \\ 2ax &= 2ax_2 - \gamma \\ x &= x_2 - \frac{\gamma}{2a} \end{aligned}$$

dir.Çözüm kümesi

$$x = x_2 - \frac{\gamma}{2a}$$

doğrusudur.

5) $x_1 < x < x_2$, $y_1 < y < y_2$

$$\begin{aligned} a\left|x-x_1\right| + b\left|y - \frac{a}{b}x_1 - n\right| - (a\left|x-x_2\right| + b\left|y - -\frac{a}{b}x_2 - n\right|) &= \pm\gamma \\ a(x-x_1) + b(y - \frac{a}{b}x_1 - n) - a(x_2 - x) - b(\frac{a}{b}x_2 + n - y) &= \pm\gamma \\ ax - ax_1 + by - ax_1 - bn - ax_2 + ax - ax_2 - bn + by &= \pm\gamma \\ ax + by &= ax_1 + ax_2 + bn \pm \gamma \end{aligned}$$

dir. Çözüm kümesi

$$ax + by = ax_1 + ax_2 + bn - \gamma$$

ve

$$ax + by = ax_1 + ax_2 + bn + \gamma$$

doğrularıdır.

6) $x_1 < x < x_2$, $y \geqslant y_2$ ise

$$\begin{aligned} a\left|x-x_1\right| + b\left|y - \frac{a}{b}x_1 - n\right| - (a\left|x-x_2\right| + b\left|y - -\frac{a}{b}x_2 - n\right|) &= \pm\gamma \\ a(x-x_1) + b(y - \frac{a}{b}x_1 - n) - a(x_2 - x) - b(y - \frac{a}{b}x_2 - n) &= \pm\gamma \\ ax - ax_1 + by - ax_1 - bn - ax_2 + ax - by + ax_2 + bn &= \pm\gamma \\ 2ax &= 2ax_1 \pm \gamma \\ x &= x_1 + \frac{\gamma}{2a} \end{aligned}$$

dir. Çözüm kümesi

$$x = x_1 + \frac{\gamma}{2a}$$

doğrusudur.

7) $x \geqslant x_2$, $y \leqslant y_1$ ise

$$\begin{aligned} a\left|x-x_1\right|+b\left|y-\frac{a}{b}x_1-n\right|-(a\left|x-x_2\right|+b\left|y-\frac{a}{b}x_2-n\right|) &= \pm\gamma \\ a(x-x_1)+b(\frac{a}{b}x_1+n-y)-a(x-x_2)-b(\frac{a}{b}x_2+n-y) &= \pm\gamma \\ ax-ax_1+ax_1+bn-by-ax+ax_2-ax_2-bn+by &= \pm\gamma \\ 0 &= \pm\gamma \end{aligned}$$

dir. Çözüm kümesi boş kümedir

8) $x \geqslant x_2$, $y_1 < y < y_2$ ise

$$\begin{aligned} a\left|x-x_1\right|+b\left|y-\frac{a}{b}x_1-n\right|-(a\left|x-x_2\right|+b\left|y-\frac{a}{b}x_2-n\right|) &= \pm\gamma \\ a(x-x_1)+b(y-\frac{a}{b}x_1-n)-a(x-x_2)-b(\frac{a}{b}x_2+n-y) &= \pm\gamma \\ ax-ax_1+by-ax_1-bn-ax+ax_2-ax_2-bn+by &= \pm\gamma \\ 2by-2ax_1-2bn &= \pm\gamma \\ y &= y_1+\frac{\gamma}{2b} \end{aligned}$$

dir. Çözüm kümesi

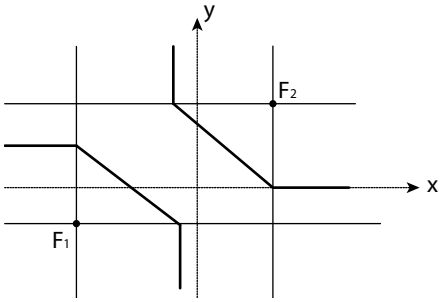
$$y = y_1 + \frac{\gamma}{2b}$$

doğrusudur

9) $x \geqslant x_2, y \geqslant y_2$ ise

Bu aralıkta çözüm kümesi boş kümedir.

Tüm durumlar birlikte düşünüldüğünde genelleştirilmiş taksi hiperbol aşağıdaki gibidir. (Bkz. Şekil 2.1.3.15)



Şekil 2.1.3.15

ii. Odaklar doğrusunun eğimi $m = -\dfrac{a}{b}$ ve $\gamma < \delta$ için benzer dokuz farklı durum incelendiğinde şekil 2.1.3.4teki genelleştirlmiş taksi hiperbol elde edilir.

1) $x \leqslant x_1$, $y \leqslant y_2$ iken çözüm kümesi boş kümedir.

2) $x \leqslant x_1$, $y_2 < y < y_1$ iken çözüm kümesi

$$y = y_2 + \frac{\gamma}{2b}$$

doğrusudur.

3) $x \leqslant x_1$, $y \geqslant y_1$ iken çözüm kümesi boş kümedir.

4) $x_1 < x < x_2$, $y \leqslant y_2$ iken çözüm kümesi

$$x = x_1 + \frac{\gamma}{2a}$$

doğrusudur.

5) $x_1 < x < x_2$, $y_2 < y < y_1$ iken çözüm kümesi

$$ax - by = ax_1 + ax_2 - bn - \gamma$$

ve

$$ax - by = ax_1 + ax_2 - bn + \gamma$$

doğrularıdır.

6) $x_1 < x < x_2$, $y \geqslant y_1$ iken çözüm kümesi

$$x = x_2 - \frac{\gamma}{2a}$$

doğrusudur.

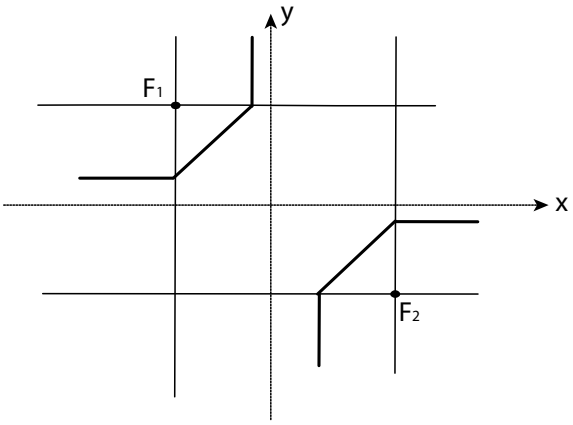
7) $x \geqslant x_2$, $y \leqslant y_2$ iken çözüm kümesi boş kümedir.

8) $x \geqslant x_2$, $y_2 < y < y_1$ iken çözüm kümesi

$$y = y_1 - \frac{\gamma}{2b}$$

doğrusudur.

9) $x \geqslant x_2$, $y \geqslant y_1$ iken çözüm kümesi boş kümedir. (Bkz. Şekil 2.1.3.16)



Şekil 2.1.3.16

Yardımcı Teorem 2.1.3.8: Genelleştirilmiş taksi düzlemde odaklar doğrusu $y = mx+n$ $(m \neq \pm\frac{a}{b}, 0, \infty)$ olan ve $\gamma = \delta$ olarak verilen genelleştirilmiş taksi hiperbol, köşeleri odaklar olan ve $m > 0$ ise

$$\{(x,y) : (x \leqslant x_1, y \leq y_1) \text{ veya } (x \geqslant x_2, y \geqslant y_2)\}$$

olan iki kanatlı düzlemsel bölge, (Bkz. Şekil 2.1.3.17) $m < 0$ ise

$$\{(x,y) : (x \leqslant x_1, y \geqslant y_1) \text{ veya } (x \geqslant x_2, y \leq y_2)\}$$

olan iki kanatlı düzlemsel bölgedir.(Bkz. Şekil 2.1.3.18)

İspat:

i. $m > 0$ ise

Odaklar doğrusu $y = mx+n$ olsun. $F_1 = (x_1, mx_1+n), F_2 = (x_2, mx_2+n)$ yazılabilir.

$$\begin{aligned} d_G(F_2,F_1) &= a\,|x_2 - x_1| + b\,|mx_2 + n - mx_2 - n| \qquad (2.1.3.5) \\ &= a\,|x_2 - x_1| + bm\,|x_2 - x_1| \\ &= (a + bm)(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

$m > 0$ ve $\gamma = \delta$ için dokuz farklı durum incelenerek 2.1.3.5 denklemi çözülürse

1) $x \leqslant x_1, y \leqslant y_1$

a) $a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| - (a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2|) = \gamma$ ise

$$\begin{aligned}
a\,|x - x_2| + b\,|y - mx_2 - n| - (a\,|x - x_1| + b\,|y - mx_1 - n|) &= (a + bm)(x_2 - x_1) \\
a(x_2 - x) + b(mx_2 + n - y) - a(x_1 - x) - b(mx_1 + n - y) &= (a + bm)(x_2 - x_1) \\
ax_2 - ax + bmx_2 + bn - by - ax_1 + ax - bmx_1 - bn + by &= (a + bm)(x_2 - x_1) \\
ax_2 - ax_1 + bmx_2 - bmx_1 &= (a + bm)(x_2 - x_1) \\
(a + bm)(x_2 - x_1) &= (a + bm)(x_2 - x_1)
\end{aligned}$$

Bu böldedeki tüm noktalar çözümü sağlar.

b) $a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| - (a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2|) = -\gamma$ ise

$$\begin{aligned}
a\,|x - x_2| + b\,|y - mx_2 - n| - (a\,|x - x_1| + b\,|y - mx_1 - n|) &= -(a + bm)(x_2 - x_1) \\
a(x_2 - x) + b(mx_2 + n - y) - a(x_1 - x) - b(mx_1 + n - y) &= -(a + bm)(x_2 - x_1) \\
ax_2 - ax + bmx_2 + bn - by - ax_1 + ax - bmx_1 - bn + by &= -(a + bm)(x_2 - x_1) \\
ax_2 - ax_1 + bmx_2 - bmx_1 &= -ax_2 + ax_1 - bmx_2 + bmx_1 \\
2a &= -2bm \\
m &= -\frac{a}{b}
\end{aligned}$$

Çözüm aradığımız bölgede $m > 0$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

2) $x \geqslant x_2,\ y \geqslant y_2$

a) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=\gamma$ ise

$$\begin{aligned}
a\,|x-x_2|+b\,|y-mx_2-n|-(a\,|x-x_1|+b\,|y-mx_1-n|) &= (a+bm)(x_2-x_1)\\
a(x-x_2)+b(y-mx_2-n)-a(x-x_1)-b(y-mx_1-n) &= (a+bm)(x_2-x_1)\\
ax-ax_2+by-bmx_2-bn-ax+ax_1-by+bmx_1+bn &= (a+bm)(x_2-x_1)\\
(a+bm)(x_1-x_2) &= (a+bm)(x_2-x_1)\\
m &= -\frac{a}{b}
\end{aligned}$$

Çözüm aradığımız bölgede $m>0$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

b) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=-\gamma$ ise

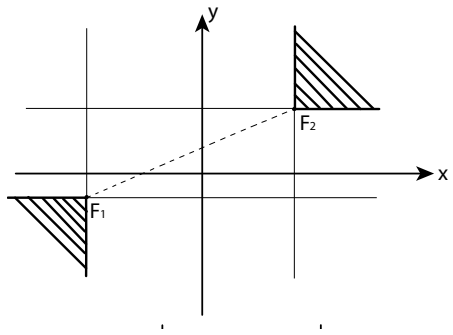
$$\begin{aligned}
a\,|x-x_2|+b\,|y-mx_2-n|-(a\,|x-x_1|+b\,|y-mx_1-n|) &= -(a+bm)(x_2-x_1)\\
a(x-x_2)+b(y-mx_2-n)-a(x-x_1)-b(y-mx_1-n) &= -(a+bm)(x_2-x_1)\\
ax-ax_2+by-bmx_2-bn-ax+ax_1-by+bmx_1+bn &= -(a+bm)(x_2-x_1)\\
ax_1-ax_2+bmx_1-bmx_2 &= -(a+bm)(x_2-x_1)\\
(a+bm)(x_1-x_2) &= -(a+bm)(x_2-x_1)
\end{aligned}$$

Bu böldedeki tüm noktalar çözümü sağlar. Diğer durumlarda çözüm kümesi boş kümedir.

Dolayısıyla genelleştirilmiş taksi düzlemde odaklar doğrusu $y=mx+n$ olan ve $\gamma=\delta$ olarak verilen genelleştirilmiş taksi hiperbol, köşeleri odaklar olan ve $m>0$ iken

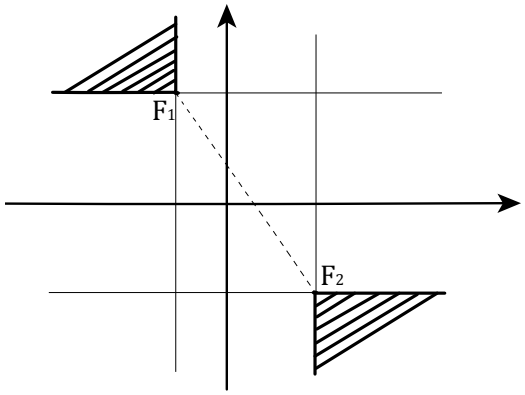
$$\{(x,y):(x\leqslant x_1,y\leqslant y_1)\text{ veya }(x\geqslant x_2,y\geqslant y_2)\}$$

olan iki kanatlı düzlemsel bölgedir.



Şekil 2.1.3.17

ii. $m < 0$ iken benzer şekilde ispatlar yapıldığında şekil 2.1.3.18 elde edilir.



Şekil 2.1.3.18

Yardımcı Teorem 2.1.3.9: Genelleştirilmiş taksi düzlemde odaklar doğrusunun eğimi $m \in (0, \frac{a}{b})$ olan ve $\gamma < \delta$ olmak üzere

i- $\gamma = \frac{(a - b.m)}{(x_2 - x_1)^{-1}}$ ise genelleştirilmiş taksi hiperbol kuyruklu iki düzlemsel bölgeden oluşur. Bölgeler

$$\{(x, y) : (x \leqslant x_1, y \geqslant y_1) \text{ veya } (x \geqslant x_2, y \leqslant y_2)\}$$

dir ve her bir kuyruk bir doğru parçası ile bir dikey ışından oluşur. Geometrik yer $[F_1F_2]$ nin orta noktasına göre simetriktir.

ii. $\gamma < \frac{(a - b.m)}{(x_2 - x_1)^{-1}}$ ise genelleştirilmiş taksi hiperbol paralel dejenere

doğru çiftinden oluşur. Doğru parçalarının eğimi $-\frac{a}{b}$ ve ışınlar dikeydir.

iii. $\gamma > \frac{(a-b.m)}{(x_2-x_1)^{-1}}$ ise genelleştirilmiş taksi hiperbol her bir kolu eğimi $-\frac{a}{b}$ olan bir doğru parçası ile dikey ve yatay iki ışından oluşan gerçek genelleştirilimiş taksi hiperboldür.

İspat:

$0 < m < \frac{a}{b}$ olduğundan $0 < \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} < \frac{a}{b}$, $0 < b(y_2-y_1) < a(x_2-x_1)$ dir.

$$\begin{aligned} 0 &< a(x_2-x_1) - b(y_2-y_1) \\ 0 &< a(x_2-x_1)\left(1 - \frac{b(y_2-y_1)}{a(x_2-x_1)}\right) \\ 0 &< a(x_2-x_1)\left(1 - \frac{b}{a}m\right) \\ 0 &< \frac{(a-bm)}{(x_2-x_1)^{-1}} \end{aligned}$$

Odaklar $F_1 = (x_1, y_1), F_2 = (x_2, y_2)$ ve odaklar doğrusu $y = mx + n$ $(m \in (0, \frac{a}{b}))$ olsun. Bu durumda $y_1 = mx_1 + n$ ve $y_2 = mx_2 + n$ yazılabilir.

$d_G(F_2, F_1) = a\,|x_2 - x_1| + b\,|mx_2 + n - mx_2 - n| = a(x_2 - x_1) + bm(x_2 - x_1) = \mp\gamma$

i. $\gamma = \frac{(a-bm)}{(x_2-x_1)^{-1}}$ için tüm durumlar incelenirse

1) $x \leqslant x_1,\ y \leqslant y_1$

a) $a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| - (a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2|) = \gamma$ ise

$$\begin{aligned} a(x_1 - x) + b(mx_1 + n - y) - a(x_2 - x) - b(mx_2 + n - y) &= (a - bm)(x_2 - x_1) \\ 2ax_1 &= 2ax_2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Çözüm kümesi boş kümedir.

b) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=-\gamma$ ise

$$\begin{aligned} a(x_1-x)+b(mx_1+n-y)-a(x_2-x)-b(mx_2+n-y) &= (a-bm)(x_1-x_2) \\ 2bmx_1 &= 2bmx_2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Çözüm kümesi boş kümedir.

2) $x \leqslant x_1, y_1 < y < y_2$

a) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=\gamma$ ise

$$\begin{aligned} a(x_1-x)+b(y-mx_1-n)-a(x_2-x)-b(mx_2+n-y) &= (a-bm)(x_2-x_1) \\ ax_1-ax+by-bmx_1-bn-ax_2+ax-bmx_2-bn+by &= (a-bm)(x_2-x_1) \\ 2by &= 2ax_2-2ax_1+2bmx_1+2bn \\ \frac{a}{b} &= \frac{y-y_1}{x_2-x_1} \end{aligned}$$

$m<\dfrac{a}{b}$ olduğundan

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}<\frac{y-y_1}{x_2-x_1}\Rightarrow y_2<y$$

dir. Çözüm kümesi boş kümedir.

b) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=-\gamma$ ise

$$\begin{aligned} a(x_1-x)+b(y-mx_1-n)-a(x_2-x)-b(mx_2+n-y) &= (a-bm)(x_1-x_2) \\ by &= by_2 \\ y &= y_2 \end{aligned}$$

Çözüm kümesi boş kümedir.

3) $x \leqslant x_1,\ y \geqslant y_2$

a) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=\gamma$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|) &= \gamma \\ a(x_1-x)+b(y-mx_1-n)-a(x_2-x)-b(y-mx_2-n) &= (a-bm)(x_2-x_1) \\ (a-bm)(x_1-x_2) &= (a-bm)(x_2-x_1) \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Çözüm kümesi boş kümedir.

b) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=-\gamma$ ise

$$\begin{aligned} a(x_1-x)+b(y-mx_1-n)-a(x_2-x)-b(y-mx_2-n) &= (a-bm)(x_1-x_2) \\ (a-bm)(x_1-x_2) &= (a-bm)(x_1-x_2) \end{aligned}$$

Bu bölgedeki tüm noktalar çözüm kümesinin elemanıdır.

4- $x_1<x<x_2,\ y\leqslant y_1$

a) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=\gamma$ ise

$$\begin{aligned} a(x-x_1)+b(mx_1+n-y)-a(x_2-x)-b(mx_2+n-y) &= (a-bm)(x_2-x_1) \\ 2ax &= 2ax_2 \\ x &= x_2 \end{aligned}$$

Çözüm kümesi boş kümedir.

b) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=-\gamma$ ise

$$\begin{aligned} a(x-x_1)+b(mx_1+n-y)-a(x_2-x)-b(mx_2+n-y) &= (a-bm)(x_1-x_2) \\ 2ax &= 2ax_1-2bmx_1+2bmx_2 \\ x &= x_1-\frac{b}{a}m(x_1-x_2) \end{aligned}$$

Çözüm kümesi

$$x=x_1-\frac{b}{a}m(x_1-x_2):(d_3)$$

doğrusudur.

5) $x_1 < x < x_2$, $y_1 < y < y_2$

a) $a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| - (a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2|) = \gamma$ ise

$$\begin{aligned} a(x - x_1) + b(y - mx_1 - n) - a(x_2 - x) - b(mx_2 + n - y) &= (a - bm)(x_2 - x_1) \\ 2ax + 2by &= 2ax_2 + 2bmx_1 + 2bn \\ ax + by &= ax_2 + by_1 \end{aligned}$$

Çözüm kümesi

$$ax + by = ax_2 + by_1 : (d_1)$$

doğrusudur.

b) $a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| - (a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2|) = -\gamma$ ise

$$\begin{aligned} a(x - x_1) + b(y - mx_1 - n) - a(x_2 - x) - b(mx_2 + n - y) &= (a - bm)(x_1 - x_2) \\ 2ax + 2by &= 2ax_1 + 2bmx_2 + 2bn \\ ax + by &= ax_1 + by_2 \end{aligned}$$

Çözüm kümesi

$$ax + by = ax_1 + by_2 : (d_2)$$

doğrusudur.

6) $x_1 < x < x_2$, $y \geqslant y_2$

a) $a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| - (a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2|) = \gamma$ ise

$$\begin{aligned} a(x - x_1) + b(y - mx_1 - n) - a(x_2 - x) - b(y - mx_2 - n) &= (a - bm)(x_2 - x_1) \\ 2ax &= 2ax_2 - 2bmx_2 + 2bmx_1 \\ x &= x_2 - \frac{b}{a}m(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Çözüm kümesi

$$x = x_2 - \frac{b}{a}m(x_2 - x_1) : (d_4)$$

doğrusudur.

b) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=-\gamma$ ise

$$\begin{aligned} a(x-x_1)+b(y-mx_1-n)-a(x_2-x)-b(y-mx_2-n) &= (a-bm)(x_1-x_2) \\ 2ax &= 2ax_1 \\ x &= x_1 \end{aligned}$$

Çözüm kümesi boş kümedir.

7) $x \geqslant x_2$, $y \leqslant y_1$

a) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=\gamma$ ise

$$\begin{aligned} a(x-x_1)+b(mx_1+n-y)-a(x-x_2)-b(mx_2+n-y) &= (a-bm)(x_2-x_1) \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Bu bölgedeki tüm noktalar çözüm kümesinin elemanıdır.

b) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=-\gamma$ ise

$$\begin{aligned} a(x-x_1)+b(mx_1+n-y)-a(x-x_2)-b(mx_2+n-y) &= (a-bm)(x_1-x_2) \\ -2ax_1+2ax_2 &= 2bmx_2-2bmx_1 \\ m &= \frac{a}{b} \end{aligned}$$

$m<\dfrac{a}{b}$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

8) $x \geqslant x_2$, $y_1<y<y_2$

a) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=\gamma$ ise

$$\begin{aligned} a(x-x_1)+b(y-mx_1-n)-a(x-x_2)-b(mx_2+n-y) &= (a-bm)(x_2-x_1) \\ 2by &= 2bmx_1+2bn \\ y &= y_1 \end{aligned}$$

Çözüm kümesi boş kümedir.

b) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=-\gamma$ ise

$$\begin{aligned} a(x-x_1)+b(y-mx_1-n)-a(x-x_2)-b(mx_2+n-y) &= (a-bm)(x_1-x_2) \\ 2b(y-y_2) &= 2a(x_1-x_2) \\ \frac{y-y_2}{x_1-x_2} &= \frac{a}{b} \end{aligned}$$

$m<\dfrac{a}{b}$ olduğundan

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}<\frac{y-y_2}{x_1-x_2}\Rightarrow y_1>y$$

dir. Çözüm kümesi boş kümedir.

9) $x\geqslant x_2,\ y\geqslant y_2$

a) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=\gamma$ ise

$$\begin{aligned} a(x-x_1)+b(y-mx_1-n)-a(x-x_2)-b(y-mx_2-n) &= (a-bm)(x_2-x_1) \\ 2bmx_1 &= 2bmx_2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Çözüm kümesi boş kümedir.

b) $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|)=-\gamma$ iken

$$\begin{aligned} a(x-x_1)+b(y-mx_1-n)-a(x-x_2)-b(y-mx_2-n) &= (a-bm)(x_1-x_2) \\ 2ax_2 &= 2ax_1 \\ x_2 &= x_1 \end{aligned}$$

Çözüm kümesi boş kümedir.

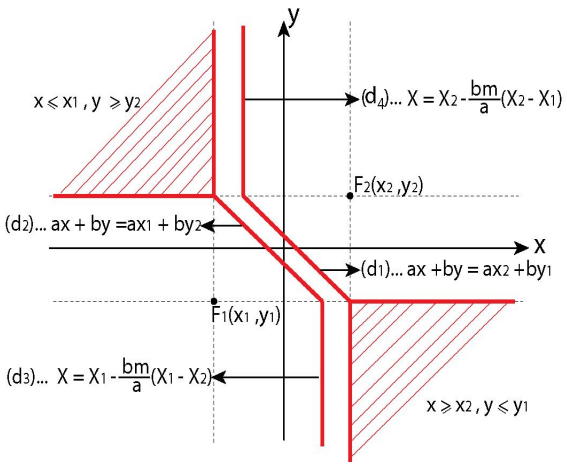
$$\begin{aligned} \{(x,y): x\geqslant x_2, y\leqslant y_1\}\cap d_1 &= \{(x,y): x\geqslant x_2, y\leqslant y_1\}\cap\{(x,y): ax+by=ax_2+by_1\} \\ &= (x_2,y_1) \\ \{(x,y): x\leqslant x_1, y\geqslant y_2\}\cap d_2 &= \{(x,y): x\leqslant x_1, y\geqslant y_2\}\cap\{(x,y): ax+by=ax_1+by_2\} \\ &= (x_1,y_2) \\ d_2\cap d_3 &= \{(x,y): ax+by=ax_1+by_2\}\cap\left\{(x,y): x=x_1-\frac{bm}{a}(x_1-x_2)\right\} \end{aligned}$$

$$= \left(x_1 - \frac{bm}{a}(x_1 - x_2), y_1 \right)$$

$$d_1 \cap d_4 = \{(x,y) : ax + by = ax_2 + by_1\} \cap \left\{ (x,y) : x = x_2 - \frac{b}{a} m(x_2 - x_1) \right\}$$

$$= \left(x_2 - \frac{b}{a} m(x_2 - x_1), y_2 \right)$$

Bütün durumlar birlikte düşünüldüğünde genelleştirilmiş taksi hiperbol aşağıdaki gibidir. (Bkz. Şekil 2.1.3.19)



$$m \in (0, \frac{a}{b}), \gamma = \frac{(a - bm)}{(x_2 - x_1)^{-1}}$$

Şekil 2.1.3.19

ii. $\gamma < \dfrac{(a - bm)}{(x_2 - x_1)^{-1}}$

1) $x \leqslant x_1, y \leqslant y_1$ ve $a|x - x_1| + b|y - y_1| - (a|x - x_2| + b|y - y_2|) = \pm\gamma$ iken çözüm kümesi olarak boş küme elde edilir.

2) $x \leqslant x_1, y_1 < y < y_2$ ve $a|x - x_1| + b|y - y_1| - (a|x - x_2| + b|y - y_2|) = \pm\gamma$ iken çözüm kümesi olarak boş küme elde edilir.

3) $x \leqslant x_1, y \geqslant y_2$ ve $a|x - x_1| + b|y - y_1| - (a|x - x_2| + b|y - y_2|) = \pm\gamma$ iken çözüm kümesi olarak boş küme elde edilir.

4) $x_1 < x < x_2, y \leqslant y_1$ ve $a|x - x_1| + b|y - y_1| - (a|x - x_2| + b|y - y_2|) =$

$\pm\gamma$ iken çözüm kümesi

$$\begin{aligned} 2ax &= a(x_1+x_2)+b(y_2-y_1)+\gamma : (d_1) \\ 2ax &= a(x_1+x_2)+b(y_2-y_1)-\gamma : (d_2) \end{aligned}$$

doğrularıdır.

5) $x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2$ ve $a\,|x-x_1| + b\,|y-y_1| - (a\,|x-x_2| + b\,|y-y_2|) = \pm\gamma$ iken çözüm kümesi

$$\begin{aligned} 2ax+2by &= a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2)+\gamma : (d_3) \\ 2ax+2by &= a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2)-\gamma : (d_4) \end{aligned}$$

doğru parçalarıdır.

6) $x_1 < x < x_2, y \geqslant y_2$ ve $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|) = \pm\gamma$ iken çözüm kümesi

$$\begin{aligned} 2ax &= a(x_1+x_2)+b(y_1-y_2)+\gamma : (d_5) \\ 2ax &= a(x_1+x_2)+b(y_1-y_2)-\gamma : (d_6) \end{aligned}$$

doğrularıdır.

7) $x \geqslant x_2, y \leqslant y_1$ ve $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|) = \pm\gamma$ iken çözüm kümesi boş kümedir.

8) $x \geqslant x_2, y_1 < y < y_2$ ve $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|) = \pm\gamma$ iken çözüm kümesi boş kümedir.

9) $x \geqslant x_2, y \geqslant y_2$ ve $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|) = \pm\gamma$ iken çözüm kümesi boş kümedir.

$$d_2 \cap d_4 = \{(x,y) : 2ax = a(x_1+x_2)+b(y_2-y_1)-\gamma\} \cap \{(x,y) : 2ax+2by = a(x_1+x_2)+b(y_2+y_1)-\gamma\}$$

$$= \left(\frac{a(x_1+x_2)+b(y_2-y_1)-\gamma}{2a}, y_1 \right)$$

$$d_1 \cap d_3 = \{(x,y) : 2ax = a(x_1+x_2)+b(y_2-y_1)+\gamma\} \cap \{(x,y) : 2ax+2by = a(x_1+x_2)+b(y_2+y_1)+\gamma\}$$

$$= \left(\frac{a(x_1 + x_2) + b(y_2 - y_1) + \gamma}{2a}, y_1 \right)$$

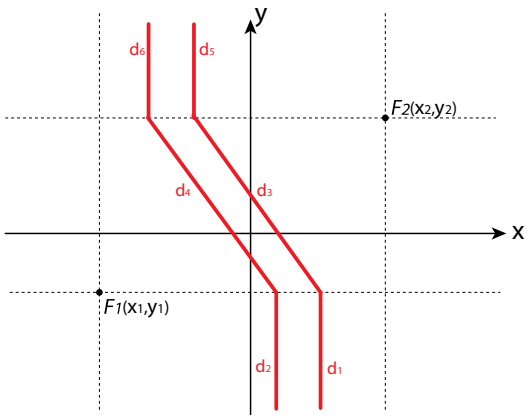
$$d_6 \cap d_4 = \{(x,y) : 2ax = a(x_1+x_2)+b(y_1-y_2)-\gamma\} \cap \{(x,y) : 2ax+2by = a(x_1+x_2)+b(y_2+y_1)-\gamma\}$$

$$= \left(\frac{a(x_1 + x_2) + b(y_1 - y_2) - \gamma}{2a}, y_2 \right)$$

$$d_5 \cap d_3 = \{(x,y) : 2ax = a(x_1+x_2)+b(y_1-y_2)+\gamma\} \cap \{(x,y) : 2ax+2by = a(x_1+x_2)+b(y_2+y_1)+\gamma\}$$

$$= \left(\frac{a(x_1 + x_2) + b(y_1 - y_2) + \gamma}{2a}, y_2 \right)$$

olmak üzere aşağıdaki genelleştirlmiş taksi hiperbolü elde edilir. (Bkz. Şekil 2.1.3.20)



$$m \in (0, \frac{a}{b}), \gamma < \frac{(a - bm)}{(x_2 - x_1)^{-1}}$$

Şekil 2.1.3.20

iii. $\gamma > \dfrac{(a - bm)}{(x_2 - x_1)^{-1}}$

1) $x \leqslant x_1, y \leqslant y_1$ ve $a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| - (a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2|) = \pm\gamma$ iken öncekilere benzer ispat yapılırsa çözüm kümesi olarak boş küme elde edilir.

2) $x \leqslant x_1, y_1 < y < y_2$ ve $a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| - (a\,|x - x_2| + b\,|y - y_2|) = -\gamma$ iken çözüm kümesi

$$2by = a(x_2 - x_1) + b(y_1 + y_2) - \gamma : (d_1)$$

doğrusudur.

3) $x \leqslant x_1, y \geqslant y_2$ ve $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|) = \pm\gamma$ iken çözüm kümesi olarak boş küme elde edilir.

4) $x_1 < x < x_2, y \leqslant y_1$ve $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|) = -\gamma$ iken çözüm kümesi

$$2ax = a(x_1+x_2)+b(y_2-y_1)-\gamma : (d_2)$$

doğrusudur.

5) $x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2$ ve $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|) = \pm\gamma$ iken çözüm kümesi

$$\begin{aligned} 2ax+2by &= a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2)+\gamma : (d_3) \\ 2ax+2by &= a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2)-\gamma : (d_4) \end{aligned}$$

doğrularıdır.

6) $x_1 < x < x_2, y \geqslant y_2$ ve $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|) = \gamma$ iken çözüm kümesi

$$2ax = a(x_1+x_2)+b(y_1-y_2)+\gamma : (d_5)$$

doğrusudur.

7) $x \geqslant x_2, y \leqslant y_1$ ve $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|) = \pm\gamma$ iken çözüm kümesi olarak boş küme elde edilir.

8) $x \geqslant x_2, y_1 < y < y_2$ ve $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|) = \gamma$ iken çözüm kümesi

$$2by = a(x_1-x_2)+b(y_1+y_2)+\gamma : (d_6)$$

doğrusudur.

9) $x \geqslant x_2, y \geqslant y_2$ ve $a\,|x-x_1|+b\,|y-y_1|-(a\,|x-x_2|+b\,|y-y_2|) = \pm\gamma$ iken çözüm kümesi olarak boş küme elde edilir.

$d_1 \cap d_4 = \{(x,y) : 2by = a(x_2-x_1)+b(y_1+y_2)-\gamma\} \cap \{(x,y) : 2ax+2by = a(x_1+x_2)+b(y_2+y_1)-\gamma\}$

$$= \left(x_1, \frac{a(x_2 - x_1) + b(y_1 + y_2) - \gamma}{2b} \right)$$

$$d_2 \cap d_4 = \{(x,y) : 2ax = a(x_1+x_2)+b(y_2-y_1)-\gamma\} \cap \{(x,y) : 2ax+2by = a(x_1+x_2)+b(y_2+y_1)-\gamma\}$$

$$= \left(\frac{a(x_1 + x_2) + b(y_2 - y_1) - \gamma}{2a}, y_1 \right)$$

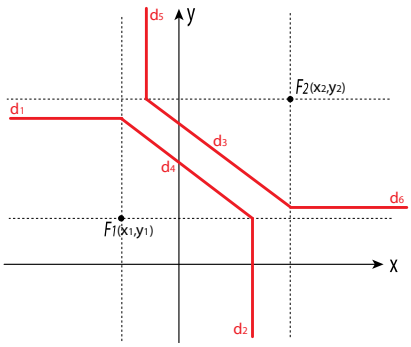
$$d_6 \cap d_3 = \{(x,y) : 2by = a(x_1-x_2)+b(y_1+y_2)+\gamma\} \cap \{(x,y) : 2ax+2by = a(x_1+x_2)+b(y_2+y_1)+\gamma\}$$

$$= \left(x_2, \frac{a(x_1 - x_2) + b(y_1 + y_2) + \gamma}{2b} \right)$$

$$d_5 \cap d_3 = \{(x,y) : 2ax = a(x_1+x_2)+b(y_1-y_2)+\gamma\} \cap \{(x,y) : 2ax+2by = a(x_1+x_2)+b(y_2+y_1)+\gamma\}$$

$$= \left(\frac{a(x_1 + x_2) + b(y_1 - y_2) + \gamma}{2a}, y_2 \right)$$

olmak üzere bu durum için aşağıdaki şekilde genelleştirilmiş taksi hiperbolü elde edilir. (Bkz. Şekil 2.1.3.21)



$$m \in (0, \frac{a}{b}), \gamma > \frac{(a - bm)}{(x_2 - x_1)^{-1}}$$

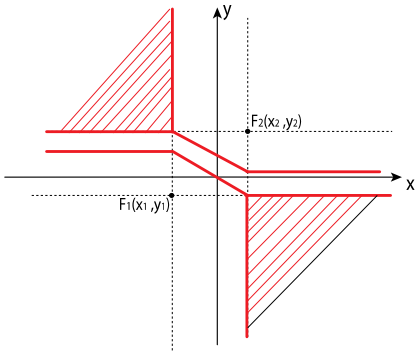
Şekil 2.1.3.21

Yardımcı Teorem 2.1.3.10: Genelleştirilmiş taksi düzlemde odaklar doğrusunun eğimi $m \in (\frac{a}{b}, \infty)$ ve $\gamma < \delta$ olmak üzere

i- $\gamma = \frac{(bm - a)}{(x_2 - x_1)^{-1}}$ ise genelleştirilmiş taksi hiperbol kuyruklu iki düzlemsel bölgeden oluşur. Bölgeler

$$\{(x,y) : (x \leqslant x_1, y \geqslant y_2) \text{ veya } (x \geqslant x_2, y \leqslant y_1)\}$$

dir ve her bir kuyruk bir doğru parçası ile bir yatay ışından oluşur. Geometrik yer $[F_1F_2]$ nin orta noktasına göre simetriktir.(Bkz. Şekil 2.1.3.22)

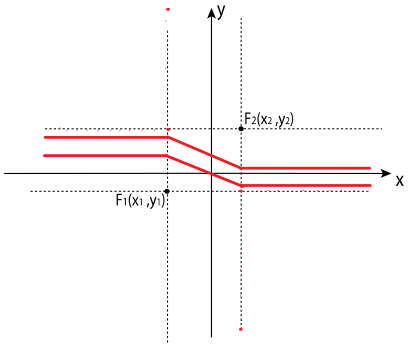


$$\gamma = \frac{(bm-a)}{(x_2-x_1)^{-1}}$$

Şekil 2.1.3.22

ii- $\gamma < \frac{(bm-a)}{(x_2-x_1)^{-1}}$ ise genelleştirilmiş taksi hiperbol paralel dejenere doğru çiftinden oluşur. Doğru parçalarının eğimi $-\frac{a}{b}$ ve ışınlar yataydır.

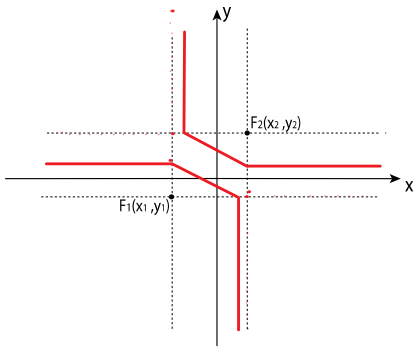
(Bkz. Şekil 2.1.3.23)



$$\gamma < \frac{(bm-a)}{(x_2-x_1)^{-1}}$$

Şekil 2.1.3.23

iii- $\gamma > \frac{(bm-a)}{(x_2-x_1)^{-1}}$ ise genelleştirilmiş taksi hiperbol her bir kolu eğimi $-\frac{a}{b}$ olan bir doğru parçası ile dikey ve yatay iki ışından oluşan gerçek genelleştirilimiş taksi hiperboldür. İspatı Teorem 2.1.3.9'un ispatına benzer şekilde yapılır. (Bkz. Şekil 2.1.3.24)



$$\gamma > \frac{(bm-a)}{(x_2-x_1)^{-1}}$$

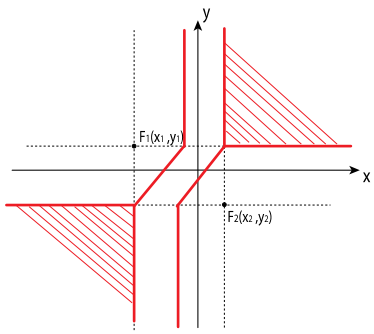
Şekil 2.1.3.24

Yardımcı Teorem 2.1.3.11: Genelleştirilmiş taksi düzlemde odaklar doğrusunun eğimi $m \in (-\frac{a}{b}, 0)$ ve $\gamma < \delta$ olmak üzere

i- $\gamma = \frac{(a+bm)}{(x_2-x_1)^{-1}}$ ise genelleştirilmiş taksi hiperbol kuyruklu iki düzlemsel bölgeden oluşur. Bölgeler

$$\{(x,y) : (x \leqslant x_1, y \leqslant y_2) \text{ veya } (x \geqslant x_2, y \geqslant y_1)\}$$

dir ve her bir kuyruk bir doğru parçası ile bir yatay ışından oluşur. Geometrik yer $[F_1F_2]$ nin orta noktasına göre simetriktir.(Bkz. Şekil 2.1.3.25)

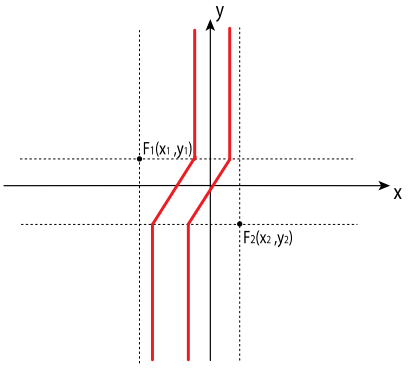


$$\gamma = \frac{(a+bm)}{(x_2-x_1)^{-1}}$$

Şekil 2.1.3.25

ii- $\gamma < \frac{(a+bm)}{(x_2-x_1)^{-1}}$ ise genelleştirilmiş taksi hiperbol paralel dejenere doğru

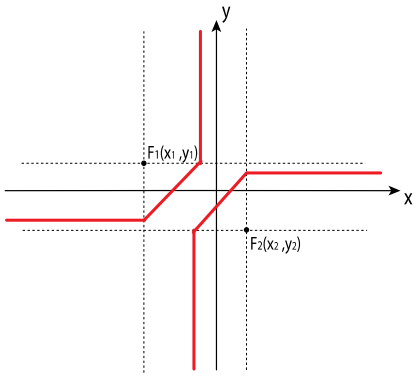
çiftinden oluşur. Doğru parçalarının eğimi $\frac{a}{b}$ ve ışınlar dikeydir.(Bkz. Şekil 2.1.3.26)



$$\gamma < \frac{(a+bm)}{(x_2-x_1)^{-1}}$$

Şekil 2.1.3.26

iii- $\gamma > \frac{(a+bm)}{(x_2-x_1)^{-1}}$ ise genelleştirilmiş taksi hiperbol her bir kolu eğimi $\frac{a}{b}$ olan bir doğru parçası ile dikey ve yatay iki ışından oluşan gerçek genelleştirilmiş taksi hiperboldür. (Bkz. Şekil 2.1.3.27)



$$\gamma > \frac{(a+bm)}{(x_2-x_1)^{-1}}$$

Şekil 2.1.3.27

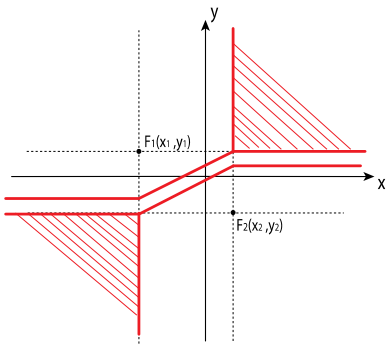
Yardımcı Teorem 2.1.3.12: Genelleştirilmiş taksi düzlemde odaklar doğrusunun eğimi $m \in (-\infty, -\frac{a}{b})$ ve $\gamma < \delta$ olmak üzere

i- $\gamma = \frac{(a+bm)}{(x_1-x_2)^{-1}}$ ise genelleştirilmiş taksi hiperbol kuyruklu iki düzlem-

sel bölgeden oluşur. Bölgeler;

$$\{(x,y) : (x \leqslant x_1, y \leqslant y_2) \text{ veya } (x \geqslant x_2, y \geqslant y_1)\}$$

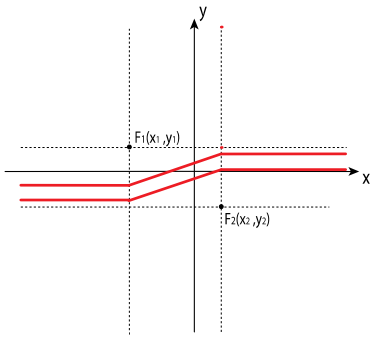
dir ve her bir kuyruk bir doğru parçası ile bir yatay ışından oluşur. Geometrik yer $[F_1F_2]$ nin orta noktasına göre simetriktir.(Bkz. Şekil 2.1.3.28)



$$\gamma = \frac{(a+bm)}{(x_1-x_2)^{-1}}$$

Şekil 2.1.3.28

ii- $\gamma < \dfrac{(a+bm)}{(x_1-x_2)^{-1}}$ ise genelleştirilmiş taksi hiperbol paralel dejenere doğru çiftinden oluşur. Doğru parçalarının eğimi $\dfrac{a}{b}$ ve ışınlar yataydır.(Bkz. Şekil 2.1.3.29)

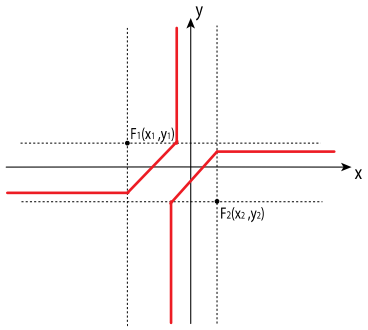


$$\gamma < \frac{(a+bm)}{(x_1-x_2)^{-1}}$$

Şekil 2.2.29

iii- $\gamma > \dfrac{(a+bm)}{(x_1-x_2)^{-1}}$ ise genelleştirilmiş taksi hiperbol her bir kolu eğimi $\dfrac{a}{b}$

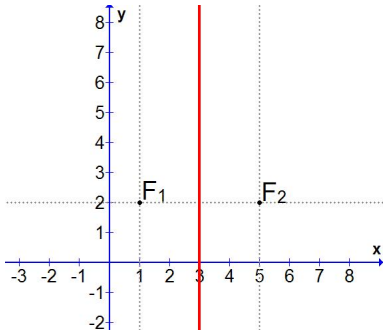
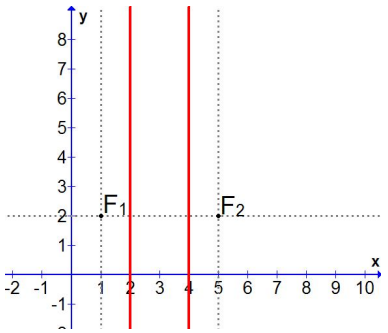
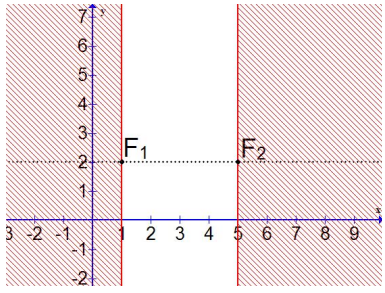
olan bir doğru parçası ile dikey ve yatay iki ışından oluşan gerçek genelleştirilimiş taksi hiperboldür. (Bkz. Şekil 2.1.3.30)

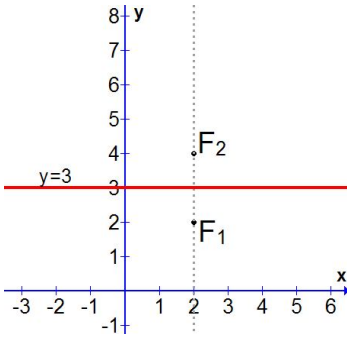


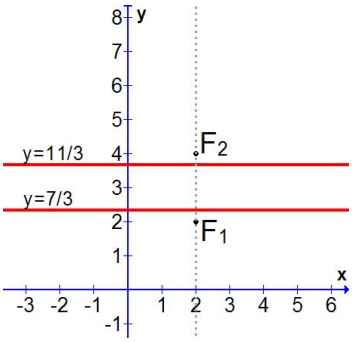
$$\gamma < \frac{(a+bm)}{(x_1-x_2)^{-1}}$$

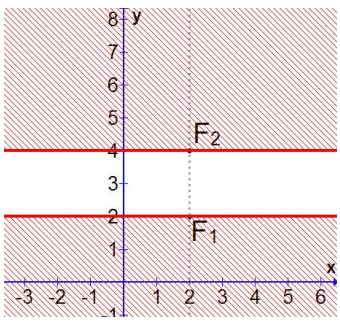
Şe*kil* 2.1.3.30

Teorem 2.1.3.13: Genelleştirilmiş taksi düzlemde $F_1 = (x_1, y_1)$, $F_2 = (x_2, y_2)$ odaklar olmak üzere, F_1F_2 odaklar doğrusunun eğimi m olan ve γ sabitinin alacakları değerlere göre 2.1.3.2 denklemine sahip iki odaklı genelleştirilmiş taksi hiperbolü aşağıdaki tabloda verilen geometrik yerlerden birisidir. $(d_G(F_1F_2) = \delta)$

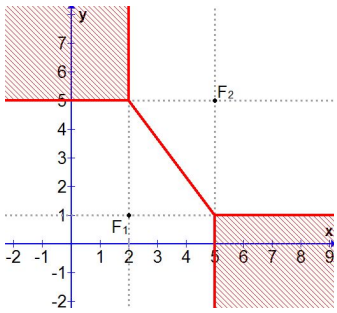
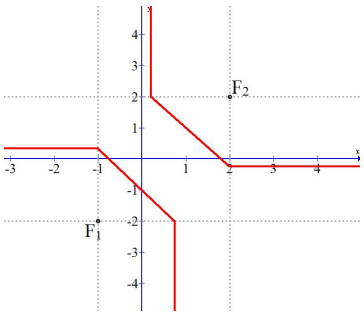
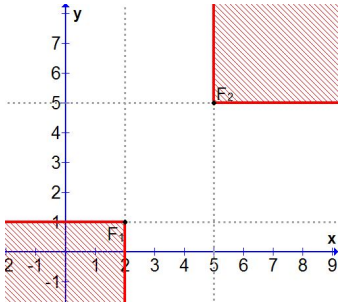
m	γ	Geometrik yer	Örnek $(a=4,\ b=3)$
0	$\gamma = 0$	$[F_1F_2\,]$ nin orta dikmesi (Bkz. Örnek 2.1.3.1)	 $F_1=(1,2),\ F_2=(5,2)$ $\lvert d_G(P,F_1)-d_G(P,F_2)\rvert = 0$ *Örnek* 2.1.3.1
	$\gamma < \delta$	**İki dikey doğru** $x_1 < x_2$ veya $x_1 = x_2$ olması durumuna göre dikey olan doğrular F_1F_2 doğru parçasına dik ve bu doğru parçasının orta noktasına $\dfrac{\gamma}{2a}$ uzaklıktadır. (Bkz. Örnek 2.1.3.2)	 $F_1=(1,2),\ F_2=(5,2)$ $\lvert d_G(P,F_1)-d_G(P,F_2)\rvert = 8$ *Örnek* 2.1.3.2
	$\gamma = \delta$	**İki kanatlı düzlemsel bölge** $x_1 < x_2$ veya $x_1 = x_2$ olması durumuna göre $\mathbb{R}^2 - \{(x,y) : x_1 < x < x_2\}$ (Bkz. Örnek 2.1.3.3)	 $F_1=(1,2),\ F_2=(5,2)$ $\lvert d_G(P,F_1)-d_G(P,F_2)\rvert = 16$ *Örnek* 2.1.3..3

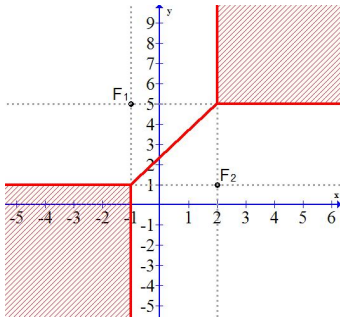
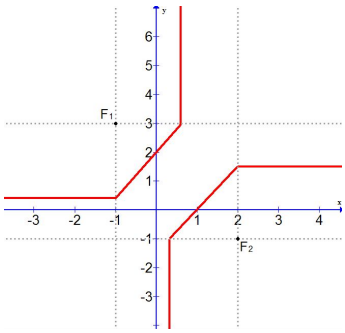
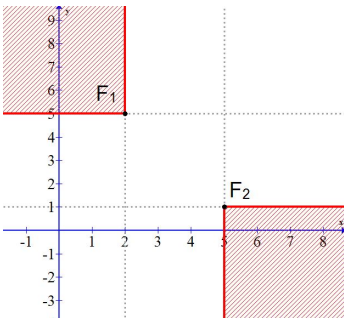
<table>
<tr><th>m</th><th>γ</th><th>Geometrik yer</th><th>Örnek $\quad (a=4,\ b=3)$</th></tr>
<tr><td rowspan="3">∞</td><td>$\gamma = 0$</td><td>$[F_1F_2\,]$ nin orta dikmesi
(Bkz. Örnek 2.1.3.4)</td><td>

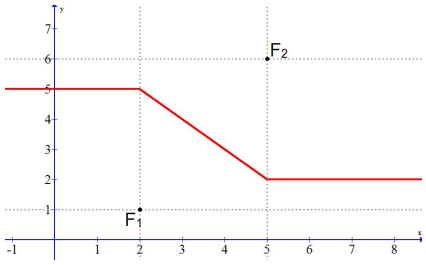
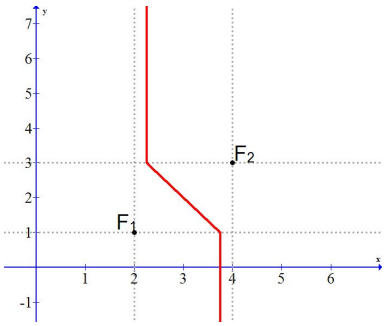
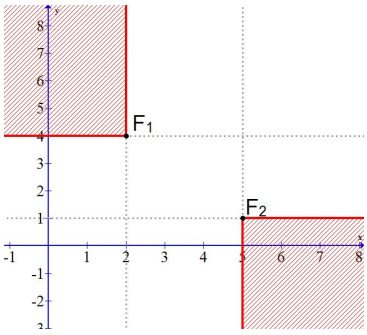
$F_1 = (2,2),\ F_2 = (2,4)$
$|d_G(P,F_1) - d_G(P,F_2)| = 0$
$\ddot{O}rnek$ 2.1.3.4</td></tr>
<tr><td>$\gamma < \delta$</td><td>İki yatay doğru
$x_1 < x_2$ veya $x_1 = x_2$ olması durumuna göre yatay olan doğrular F_1F_2 doğru parçasına dik ve bu doğru parçasının orta noktasına $\dfrac{\gamma}{2b}$ uzaklıktadır.
(Bkz. Örnek 2.1.3.5)</td><td>

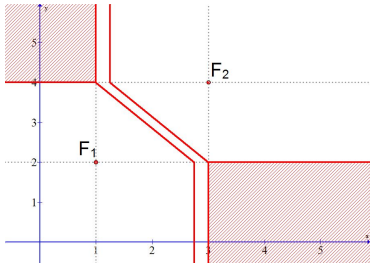
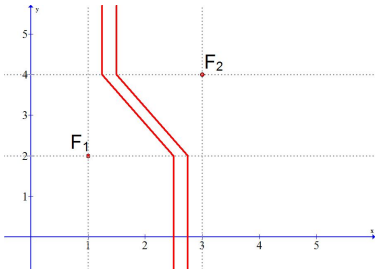
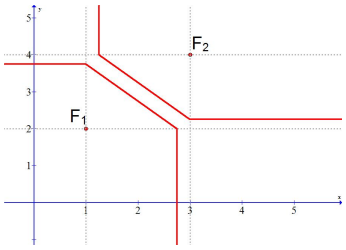
$F_1 = (2,2),\ F_2 = (2,4)$
$|d_G(P,F_1) - d_G(P,F_2)| = 4$
$\ddot{O}rnek$ 2.1.3.5</td></tr>
<tr><td>$\gamma = \delta$</td><td>İki kanatlı düzlemsel bölge
$x_1 < x_2$ veya $x_1 = x_2$ olması durumuna göre
$\mathbb{R}^2 - \{(x,y) : \min\{y_1,y_2\} < y < \max\{y_1,y_2\}\}$
(Bkz. Örnek 2.1.3.6)</td><td>

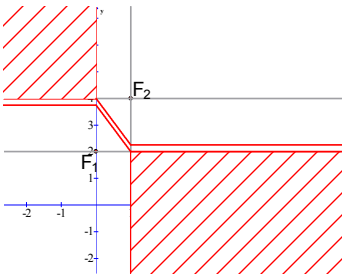
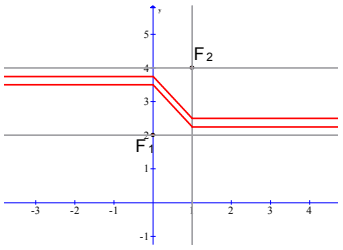
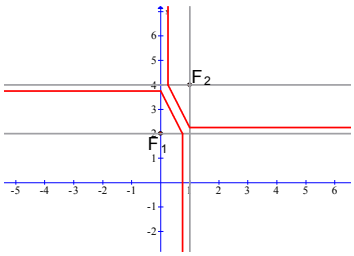
$F_1 = (2,2),\ F_2 = (2,4)$
$|d_G(P,F_1) - d_G(P,F_2)| = 6$
$\ddot{O}rnek$ 2.1.3.6</td></tr>
</table>

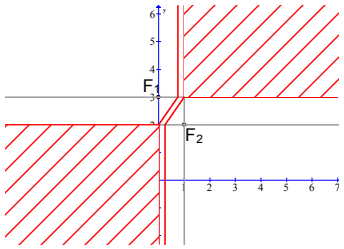
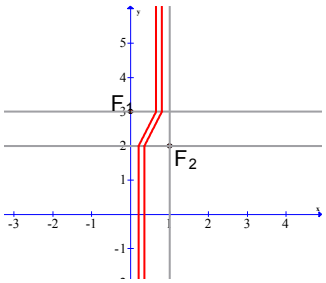
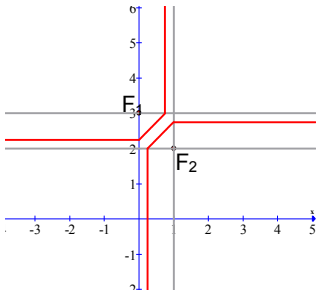
m	γ	Geometrik yer	Örnek $(a=4,\ b=3)$
$\frac{a}{b}$	$\gamma = 0$	**Bir doğru praçası ile bağlı iki düzlemsel bölge** $\{(x,y) : x \leqslant x_1, y \geqslant y_2\}$ veya $\{(x,y) : x \geqslant x_2, y \leqslant y_2\}$ ve bu bölgelerin köşe noktalarını birleştiren doğru parçası (Bkz. Örnek 2.1.3.7)	 $F_1 = (2,1),\ F_2 = (5,5)$ $\lvert d_G(P,F_1) - d_G(P,F_2)\rvert = 0$ *Örnek* 2.1.3.7
	$\gamma < \delta$	**Gerçek genelleştirlimiş taksi hiperbolü** $[F_1F_2]$ nin orta dikmesine göre simetrik olan iki koldan herbiri bir doğru parçası ile dikey ve yatay iki ışından oluşur. (Bkz. Örnek 2.1.3.8)	 $F_1 = (-1,-2),\ F_2 = (2,2)$ $\lvert d_G(P,F_1) - d_G(P,F_2)\rvert = 10$ *Örnek* 2.1.3.8
	$\gamma = \delta$	**İki kanatlı düzlemsel bölge** Köşeleri odaklar olan $\{(x,y) : x \leqslant x_1, y \leqslant y_1\}$ veya $\{(x,y) : x \geqslant x_2, y \geqslant y_2\}$ bölgeleridir. (Bkz. Örnek 2.1.3.9)	 $F_1 = (2,1),\ F_2 = (5,5)$ $\lvert d_G(P,F_1) - d_G(P,F_2)\rvert = 24$ *Örnek* 2.1.3.9

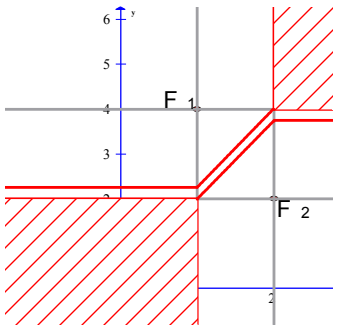
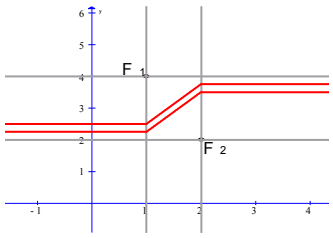
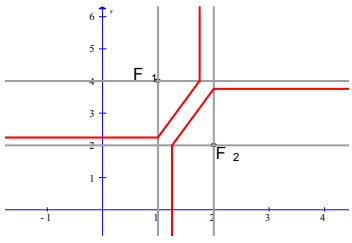
m	γ	Geometrik yer	Örnek $(a=4,\ b=3)$
$-\frac{a}{b}$	$\gamma=0$	**Bir doğru praçası ile bağlı iki düzlemsel bölge** $\{(x,y) : x \leqslant x_1, y \leqslant y_2\}$ veya $\{(x,y) : x \geqslant x_2, y \geqslant y_1\}$ ve bu bölgelerin köşe noktalarını birleştiren doğru parçası (Bkz. Örnek 2.1.3.10)	 $F_1=(-1,5),\ F_2=(2,1)$ $\lvert d_G(P,F_1)-d_G(P,F_2)\rvert=0$ *Örnek* 2.1.3.10
	$\gamma<\delta$	**Gerçek genelleştirlimiş taksi hiperbolü** $[F_1F_2]$ nin orta dikmesine göre simetrik olan iki koldan herbiri bir doğru parçası ile dikey ve yatay iki ışından oluşur. (Bkz. Örnek 2.1.3.11)	 $F_1=(-1,3),\ F_2=(2,-1)$ $\lvert d_G(P,F_1)-d_G(P,F_2)\rvert=10$ *Örnek* 2.1.3.11
	$\gamma=\delta$	**İki kanatlı düzlemsel bölge** Köşeleri odaklar olan $\{(x,y) : x \leqslant x_1, y \geqslant y_1\}$ veya $\{(x,y) : x \geqslant x_2, y \leqslant y_2\}$ bölgeleridir. (Bkz. Örnek 2.1.3.12)	 $F_1=(2,5),\ F_2=(5,1)$ $\lvert d_G(P,F_1)-d_G(P,F_2)\rvert=24$ *Örnek* 2.1.3.12

m	γ	Geometrik yer	Örnek $(a=4,\ b=3)$
	$\gamma=0$	**Bir dejenere doğru** $[F_1F_2]$ nin orta noktasından geçen bir doğru parçası ile bunun uç noktalarına bağlı olan ve $\lvert m\rvert > \frac{a}{b}$ veya $\lvert m\rvert < \frac{a}{b}$ olmasına göre sırasıyla iki yatay veya iki dikey ışındır. (Bkz. Örnek 2.1.3.13) (Bkz. Örnek 2.1.3.14)	 $F_1=(2,1),\ F_2=(5,6)$ $\lvert d_G(P,F_1)-d_G(P,F_2)\rvert=0$ *Örnek* 2.1.3.13  $F_1=(2,1),\ F_2=(4,3)$ $\lvert d_G(P,F_1)-d_G(P,F_2)\rvert=0$ *Örnek* 2.1.3.14
$\neq \pm\frac{a}{b}$ $\neq 0,\infty$	$\gamma=\delta$	**İki kanatlı düzlemsel bölge** Köşeleri odaklar olan ve $m>0$ veya $m<0$ olmasına göre sırasıyla $\{(x,y): x\leqslant x_1, y\leqslant y_1\}$veya $\{(x,y): x\geqslant x_2, y\geqslant y_2\}$ $\{(x,y): x\leqslant x_1, y\geqslant y_1\}$ veya $\{(x,y): x\geqslant x_2, y\leqslant y_2\}$ bölgeleridir.(Bkz.Örnek 2.1.3.15)	 $F_1=(2,4),\ F_2=(5,1)$ $\lvert d_G(P,F_1)-d_G(P,F_2)\rvert=21$ *Örnek* 2.1.3.15

m	γ	Geometrik yer	Örnek $(a=4,\ b=3)$
$(0, \frac{a}{b})$	$\gamma = \frac{a-bm}{(x_2-x_1)^{-1}}$	**Kuyruklu iki düzlemsel bölge** $\{(x,y)$: $x \leqslant x_1,\ y \geqslant y_2\}$ ve $\{(x,y)$: $x \geqslant x_2,\ y \leqslant y_1\}$ dir ve her bir kuyruk bir doğru parçası ile bir dikey ışından oluşur.Geometrik yer $[F_1F_2]$ nin orta noktasına göre simetriktir. (Bkz. Örnek 2.1.3.16)	 $F_1=(1,2),\ F_2=(3,4)$ $\lvert d_G(P,F_1)-d_G(P,F_2)\rvert = 2$ *Örnek* 2.1.3.16
	$\gamma < \frac{a-bm}{(x_2-x_1)^{-1}}$	**Paralel dejenere doğru çifti** Doğru parçalarının eğimi $-\frac{a}{b}$ ve ışınlar dikeydir. (Bkz. Örnek 2.1.3.17)	 $F_1=(1,2),\ F_2=(3,4)$ $\lvert d_G(P,F_1)-d_G(P,F_2)\rvert = 1$ *Örnek* 2.1.3.17
	$\gamma > \frac{a-bm}{(x_2-x_1)^{-1}}$	**Gerçek genelleştirilmiş taksi hiperbolü** Her bir kolu eğimi $-\frac{a}{b}$ olan bir doğru parçası ile dikey ve yatay iki ışından oluşur. (Bkz. Örnek 2.1.3.18)	 $F_1=(1,2),\ F_2=(3,4)$ $\lvert d_G(P,F_1)-d_G(P,F_2)\rvert = 3$ *Örnek* 2.1.3.18

m	γ	Geometrik yer	Örnek $(a=4,\ b=3)$
$(\frac{a}{b},\infty)$	$\gamma = \dfrac{bm-a}{(x_2-x_1)^{-1}}$	**Kuyruklu iki düzlemsel bölge** $\{(x,y) : x \leqslant x_1, y \geqslant y_2\}$ ve $\{(x,y) : x \geqslant x_2, y \leqslant y_1\}$ dir ve her bir kuyruk bir doğru parçası ile bir yatay ışından oluşur.Geometrik yer $[F_1F_2]$ nin orta noktasına göre simetriktir. (Bkz. Örnek 2.1.3.19)	 $F_1=(0,2),\ F_2=(1,4)$ $\lvert d_G(P,F_1)-d_G(P,F_2)\rvert = 2$ *Örnek* 2.1.3.19
	$\gamma < \dfrac{bm-a}{(x_2-x_1)^{-1}}$	**Paralel dejenere doğru çifti** Doğru parçalarının eğimi $-\dfrac{a}{b}$ ve ışınlar yataydır. (Bkz. Örnek 2.1.3.20)	 $F_1=(0,2),\ F_2=(1,4)$ $\lvert d_G(P,F_1)-d_G(P,F_2)\rvert = 1$ *Örnek* 2.1.3.20
	$\gamma > \dfrac{bm-a}{(x_2-x_1)^{-1}}$	**Gerçek genelleştirilmiş taksi hiperbolü** Her bir kolu eğimi $-\dfrac{a}{b}$ olan bir doğru parçası ile dikey ve yatay iki ışından oluşur. (Bkz. Örnek 2.1.3.21)	 $F_1=(0,2),\ F_2=(1,4)$ $\lvert d_G(P,F_1)-d_G(P,F_2)\rvert = 3$ *Örnek* 2.1.3.21

m	γ	Geometrik yer	Örnek
$(-\frac{a}{b}, 0)$	$\gamma = \frac{a+bm}{(x_2-x_1)^{-1}}$	**Kuyruklu iki düzlemsel bölge** $\{(x,y): x \leqslant x_1,\ y \leqslant y_2\}$ ve $\{(x,y): x \geqslant x_2,\ y \leqslant y_1\}$ dir ve her bir kuyruk bir doğru parçası ile bir dikey ışından oluşur.Geometrik yer $[F_1F_2]$ nin orta noktasına göre simetriktir. (Bkz. Örnek 2.1.3.22)	 $F_1 = (0,3),\ F_2 = (1,2)$ $\lvert d_G(P,F_1) - d_G(P,F_2)\rvert = 1$ *Örnek* 2.1.3.22
	$\gamma < \frac{a+bm}{(x_2-x_1)^{-1}}$	**Paralel dejenere doğru çifti** Doğru parçalarının eğimi $\frac{a}{b}$ ve ışınlar dikeydir. (Bkz. Örnek 2.1.3.23)	 $F_1 = (0,3),\ F_2 = (1,2)$ $\lvert d_G(P,F_1) - d_G(P,F_2)\rvert = 0.9$ *Örnek* 2.1.3.23
	$\gamma > \frac{a+bm}{(x_2-x_1)^{-1}}$	**Gerçek genelleştirilmiş taksi hiperbolü** Her bir kolu eğimi $-\frac{a}{b}$ olan bir doğru parçası ile dikey ve yatay iki ışından oluşur. (Bkz. Örnek 2.1.3.24)	 $F_1 = (0,3),\ F_2 = (1,2)$ $\lvert d_G(P,F_1) - d_G(P,F_2)\rvert = 1.5$ *Örnek* 2.1.3.24

m	γ	Geometrik yer	Örnek $(a=4,\ b=3)$
$(-\infty, -\frac{a}{b})$	$\gamma = \dfrac{a+bm}{(x_1-x_2)^{-1}}$	**Kuyruklu iki düzlemsel bölge** $\{(x,y) : x \leqslant x_1,\ y \leqslant y_2\}$ ve $\{(x,y) : x \geqslant x_2,\ y \leqslant y_1\}$ dir ve her bir kuyruk bir doğru parçası ile bir yatay ışından oluşur.Geometrik yer $[F_1F_2]$ nin orta noktasına göre simetriktir. (Bkz. Örnek 2.1.3.25)	 $F_1=(1,4),\ F_2=(2,2)$ $\lvert d_G(P,F_1)-d_G(P,F_2)\rvert = 2$ *Örnek* 2.1.3.25
	$\gamma < \dfrac{a+bm}{(x_1-x_2)^{-1}}$	**Paralel dejenere doğru çifti** Doğru parçalarının eğimi $\frac{a}{b}$ ve ışınlar yataydır. (Bkz. Örnek 2.1.3.26)	 $F_1=(1,4),\ F_2=(2,2)$ $\lvert d_G(P,F_1)-d_G(P,F_2)\rvert = 1$ *Örnek* 2.1.3.26
	$\gamma > \dfrac{a+bm}{(x_1-x_2)^{-1}}$	**Gerçek genelleştirilmiş taksi hiperbolü** Her bir kolu eğimi $\frac{a}{b}$ olan bir doğru parçasıile dikey ve yatay iki ışından oluşur. (Bkz. Örnek 2.1.3.27)	 $F_1=(1,4),\ F_2=(2,2)$ $\lvert d_G(P,F_1)-d_G(P,F_2)\rvert = 3$ *Örnek* 2.1.3.27

2.2.1 Genelleştirilmiş Taksi Parabol

Genelleştirilmiş taksi düzlemde verilen sabit bir noktaya ve verilen sabit bir doğruya eşit genelleştirilmiş taksi uzaklıkta olan noktaların kümesine (geometrik yerine) *genelleştirilmiş taksi parabolü* denir. Verilen sabit noktaya genelleştirilmiş taksi parabolünün *odak noktası* ve verilen sabit doğruya genelleştirilmiş taksi parabolünün *doğrultmanı* denir.

Bu bölümde odak noktası doğrultman üzerinde bulunmayan bir gerçek genelleştirilmiş taksi parabolünün bir doğru parçası ve paralel olmayan iki ışından veya iki doğru parçası ve iki ışından oluştuğu analitik olarak incelenmektedir. Ayrıca odak noktası doğrultman üzerinde olan *dejenere genelleştirilmiş taksi parabol*ünün bir doğru veya iki dikdörtgensel bölgeden oluştuğu gösterilmektedir.

Genelleştirilmiş taksi düzlemde verilen sabit nokta (odak noktası) $F = (x_1, y_1)$ ve sabit doğru (doğrultman)

$$d : mx + ny + k = 0$$

olmak üzere genelleştirilmiş taksi parabolünün denklemi

$$P = \{(x, y) : d_G(P, F) = d_G(P, d)\}$$

dir. Daha açık olarak

$$a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| = \frac{|mx + ny + k|}{\max\left\{\frac{|m|}{a}, \frac{|n|}{b}\right\}} = \left(\max\left\{\frac{|m|}{a}, \frac{|n|}{b}\right\}\right)^{-1} |mx + ny + k| \tag{2.2.1.1}$$

dir.

Yardımcı Teorem 2.2.1.1: Genelleştirilmiş taksi düzlemde doğrultmanı bir ayıraç doğru olmayan gerçek genelleştirilmiş taksi parabolü uçuca ekli iki doğru parçası ile

i. Doğrultmanı dikey veya dikeysel bir doğru ise yatay iki ışından

ii. Doğrultmanı yatay veya yataysal bir doğru ise dikey iki ışından oluşur.

İspat: Odak noktası $F = (x_1, y_1)$ ve doğrultmanı

$$d : mx + ny + k = 0$$

olan genelleştirilmiş taksi parabolü gözönüne alalım.

i. d doğrultmanı dikeysel bir doğru olsun. Bu durumda $\left|\frac{m}{n}\right| > \frac{a}{b}$ dir. 2.2.1.1 denklemi

$$a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| = \left(\frac{|m|}{a}\right)^{-1} |mx + ny + k| = \left|ax + a\frac{n}{m}y + \frac{ak}{m}\right| \tag{2.2.1.2}$$

şeklini alır. Bu denklemin çözülmesiyle

1) a) $x \leqslant x_1, mx + ny + k < 0, y < y_1$ ise

$$\begin{aligned}
a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| &= \left(\frac{|m|}{a}\right)^{-1} |mx + ny + k| = \left|ax + a\frac{n}{m}y + \frac{ak}{m}\right| \\
a(x_1 - x) + b(y_1 - y) &= \left|ax + a\frac{n}{m}y + \frac{ak}{m}\right| \\
ax_1 - ax + by_1 - by &= -ax - a\frac{n}{m}y - \frac{ak}{m} \\
max_1 - max + mby_1 - mby &= -max - any - ak \\
mby - nay &= max_1 + mby_1 + ak \\
(mb - na)y &= m(ax_1 + by_1) + ak
\end{aligned}$$

dir.

b) $x \geqslant x_1, mx + ny + k > 0, y > y_1$ ise

$$\begin{aligned}
a(x - x_1) + b(y - y_1) &= \left|ax + a\frac{n}{m}y + \frac{ak}{m}\right| \\
ax - ax_1 + by - by_1 &= ax + a\frac{n}{m}y + \frac{ak}{m} \\
max - max_1 + mby - mby_1 &= max + any + ak \\
mby - nay &= max_1 + mby_1 + ak \\
(mb - na)y &= m(ax_1 + by_1) + ak
\end{aligned}$$

dir. Buna göre a ve b birlikte düşünüldüğünde çözüm kümesi

$$d_1 : (mb - na)y = m(ax_1 + by_1) + ak$$

doğrusu olarak elde edilir.

2) a) $x \leqslant x_1, mx + ny + k < 0, y > y_1$ ise

$$\begin{aligned}
a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| &= \left(\frac{|m|}{a}\right)^{-1} |mx + ny + k| = \left|ax + a\frac{n}{m}y + \frac{ak}{m}\right| \\
a(x_1 - x) + b(y - y_1) &= \left|ax + a\frac{n}{m}y + \frac{ak}{m}\right| \\
ax_1 - ax + by - by_1 &= -ax - a\frac{n}{m}y - \frac{ak}{m} \\
max_1 - max + mby - mby_1 &= -max - any - ak \\
mby + nay &= -max_1 + mby_1 - ak \\
(mb + na)y &= -m(ax_1 - by_1) - ak
\end{aligned}$$

b) $x \geqslant x_1, mx + ny + k > 0, y < y_1$ ise

$$\begin{aligned}
a(x - x_1) + b(y_1 - y) &= \left|ax + a\frac{n}{m}y + \frac{ak}{m}\right| \\
ax - ax_1 + by_1 - by &= ax + a\frac{n}{m}y + \frac{ak}{m} \\
max - max_1 + mby_1 - mby &= max + any + ak \\
mby + nay &= -max_1 + mby_1 - ak \\
(mb + na)y &= -m(ax_1 - by_1) - ak
\end{aligned}$$

dir. Buna göre a ve b birlikte düşünüldüğünde çözüm kümesi

$$d_2 : (mb + na)y = -m(ax_1 - by_1) - ak$$

doğrusu olarak elde edilir.

3) a) $x > x_1, mx + ny + k < 0, y \leqslant y_1$ ise

$$\begin{aligned}
a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| &= \left(\frac{|m|}{a}\right)^{-1} |mx + ny + k| = \left|ax + a\frac{n}{m}y + \frac{ak}{m}\right| \\
a(x - x_1) + b(y_1 - y) &= \left|ax + a\frac{n}{m}y + \frac{ak}{m}\right| \\
ax - ax_1 + by_1 - by &= -ax - a\frac{n}{m}y - \frac{ak}{m} \\
max - max_1 + mby_1 - mby &= -max - any - ak \\
2max - (mb - an)y &= max_1 - mby_1 - ak \\
2max - (mb - an)y &= m(ax_1 - by_1) - ak
\end{aligned}$$

b) $x < x_1, mx + ny + k > 0, y \geqslant y_1$ ise

$$\begin{aligned}
a(x_1 - x) + b(y - y_1) &= \left|ax + a\frac{n}{m}y + \frac{ak}{m}\right| \\
ax_1 - ax + by - by_1 &= ax + a\frac{n}{m}y + \frac{ak}{m} \\
max_1 - max + mby - mby_1 - ak &= max + any + ak \\
max_1 - mby_1 - ak &= 2max - mby + any \\
(ax_1 - by_1) - ak &= 2max - (mb - an)y
\end{aligned}$$

dir. Buna göre a ve b birlikte düşünüldüğünde çözüm kümesi

$$d_3 : 2max - (mb - an)y = m(ax_1 - by_1) - ak$$

doğrusu olarak elde edilir.

4- a) $x > x_1, mx + ny + k < 0, y \geqslant y_1$ ise

$$\begin{aligned} a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| &= \left(\frac{|m|}{a}\right)^{-1} |mx + ny + k| = \left|ax + a\frac{n}{m}y + \frac{ak}{m}\right| \\ a(x - x_1) + b(y - y) &= \left|ax + a\frac{n}{m}y + \frac{ak}{m}\right| \\ ax - ax_1 + by - by_1 &= -ax - a\frac{n}{m}y - \frac{ak}{m} \\ max - max_1 + mby - mby_1 &= -max - any - ak \\ 2max + (mb + an)y &= max_1 + mby_1 - ak \\ 2max + (mb + an)y &= m(ax_1 + by_1) - ak \end{aligned}$$

b) $x < x_1, mx + ny + k > 0, y \leqslant y_1$ ise

$$\begin{aligned} a(x - x_1) + b(y_1 - y) &= \left|ax + a\frac{n}{m}y + \frac{ak}{m}\right| \\ ax_1 - ax + by_1 - by &= ax + a\frac{n}{m}y + \frac{ak}{m} \\ max_1 - max - mby + mby_1 - ak &= max + any + ak \\ max_1 + mby_1 - ak &= 2max + mby + any \\ m(ax_1 + by_1) - ak &= 2max + (mb + an)y \end{aligned}$$

dir. Buna göre a ve b birlikte düşünüldüğünde çözüm kümesi

$$d_4 : 2max + (mb + an)y = m(ax_1 + by_1) - ak$$

doğrusu olarak elde edilir.

$d_3 \cap d_4 = \{2max - (mb - an)y = m(ax_1 - by_1) - ak\} \cap \{2max + (mb + an)y = m(ax_1 + by_1) - ak\}$

$= ((max_1 - nay_1 - ak)(2ma)^{-1}, y_1)$

noktasında uçuca ekli iki doğru parçasıdır. $d_1$ile d_2 doğruları sırasıyla

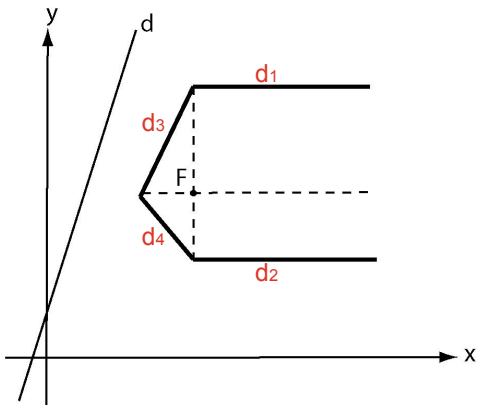
$d_1 \cap d_3 = \{(mb - na)y = m(ax_1 + by_1) + ak\} \cap \{2max - (mb - an)y = m(ax_1 - by_1) - ak\}$

$$= (x_1, (max_1 + mby_1 + ak)(mb - na)^{-1}))$$

$d_2 \cap d_4 = \{(mb + na)y = -m(ax_1 - by_1) - ak\} \cap \{2max + (mb + an)y = m(ax_1 + by_1) - ak\}$

$$= (x_1, (mby_1 - max_1 - ak)(mb + na)^{-1}))$$

sabit başlangıç noktalarına sahip yatay iki ışındır. (Bkz. Şekil 2.2.1.1)



Şekil 2.2.1.1

d doğrultmanı dikey bir doğru ise 2.2.1.2 denklemi

$$a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| = \left(\frac{|m|}{a}\right)^{-1} |mx + k| = \left|ax + \frac{ak}{m}\right|$$

şeklini alır. Bu denklemin çözülmesiyle

1) a) $x \leqslant x_1, mx + k < 0, y < y_1$ ise

$$\begin{aligned} a(x_1 - x) + b(y_1 - y) &= \left|ax + \frac{ak}{m}\right| \\ ax_1 - ax + by_1 - by &= -ax - \frac{ak}{m} \\ max_1 - max + mby_1 - mby &= -max - ak \\ mby &= max_1 + mby_1 + ak \\ mby &= m(ax_1 + by_1) + ak \end{aligned}$$

b) $x \geqslant x_1, mx + k > 0, y > y_1$ ise

$$\begin{aligned} a(x - x_1) + b(y - y_1) &= \left| ax + \frac{ak}{m} \right| \\ ax - ax_1 + by - by_1 &= ax + \frac{ak}{m} \\ max - max_1 + mby - mby_1 &= max + ak \\ mby &= max_1 + mby_1 + ak \\ mby &= m(ax_1 + by_1) + ak \end{aligned}$$

dir. Buna göre a ve b birlikte düşünüldüğünde çözüm kümesi

$$d_1 : mby = m(ax_1 + by_1) + ak$$

doğrusu olarak elde edilir.

2) a) $x \leqslant x_1, mx + k < 0, y > y_1$ ise

$$\begin{aligned} a(x_1 - x) + b(y - y_1) &= \left| ax + \frac{ak}{m} \right| \\ ax_1 - ax + by - by_1 &= -ax - \frac{ak}{m} \\ max_1 - max + mby - mby_1 &= -max - ak \\ mby &= -max_1 + mby_1 - ak \\ mby &= -m(ax_1 - by_1) - ak \end{aligned}$$

b) $x \geqslant x_1, mx + ny + k > 0, y < y_1$ ise

$$\begin{aligned} a(x - x_1) + b(y_1 - y) &= \left| ax + + \frac{ak}{m} \right| \\ ax - ax_1 + by_1 - by &= ax + \frac{ak}{m} \\ max - max_1 + mby_1 - mby &= max + ak \\ mby &= -max_1 + mby_1 - ak \\ mby &= -m(ax_1 - by_1) - ak \end{aligned}$$

dir. Buna göre a ve b birlikte düşünüldüğünde çözüm kümesi

$$d_2 : mby = -m(ax_1 - by_1) - ak$$

doğrusu olarak elde edilir.

3) a) $x > x_1, mx + k < 0, y \leqslant y_1$ ise

$$\begin{aligned} a(x - x_1) + b(y_1 - y) &= \left| ax + \frac{ak}{m} \right| \\ ax - ax_1 + by_1 - by &= -ax - \frac{ak}{m} \\ max - max_1 + mby_1 - mby &= -max - ak \\ 2max - mby &= max_1 - mby_1 - ak \\ 2max - mby &= m(ax_1 - by_1) - ak \end{aligned}$$

dir.

b) $x < x_1, mx + ny + k > 0, y \geqslant y_1$ ise

$$\begin{aligned} a(x_1 - x) + b(y - y_1) &= \left| ax + \frac{ak}{m} \right| \\ ax_1 - ax + by - by_1 &= ax + \frac{ak}{m} \\ max_1 - max + mby - mby_1 - ak &= max + ak \\ max_1 - mby_1 - ak &= 2max - mby \\ (ax_1 - by_1) - ak &= 2max - mby \end{aligned}$$

dir. Buna göre a ve b birlikte düşünüldüğünde çözüm kümesi

$$d_3 : 2max - mby = m(ax_1 - by_1) - ak$$

doğrusu olarak elde edilir.

4) a) $x > x_1, mx + k < 0, y \geqslant y_1$ ise

$$\begin{aligned} a(x - x_1) + b(y - y) &= \left| ax + \frac{ak}{m} \right| \\ ax - ax_1 + by - by_1 &= -ax - \frac{ak}{m} \\ max - max_1 + mby - mby_1 &= -max - ak \\ 2max + mby &= max_1 + mby_1 - ak \\ 2max + mby &= m(ax_1 + by_1) - ak \end{aligned}$$

b) $x < x_1, mx + ny + k > 0, y \leqslant y_1$ ise

$$\begin{aligned} a(x - x_1) + b(y_1 - y) &= \left| ax + \frac{ak}{m} \right| \\ ax_1 - ax + by_1 - by &= ax + \frac{ak}{m} \\ max_1 - max - mby + mby_1 - ak &= max + ak \\ max_1 + mby_1 - ak &= 2max + mby \\ m(ax_1 + by_1) - ak &= 2max + mby \end{aligned}$$

dir. Buna göre a ve b birlikte düşünüldüğünde çözüm kümesi

$$d_4 : 2max + mby = m(ax_1 + by_1) - ak$$

doğrusu olarak elde edilir. $d_3$ve d_4 doğrularının kesişimi

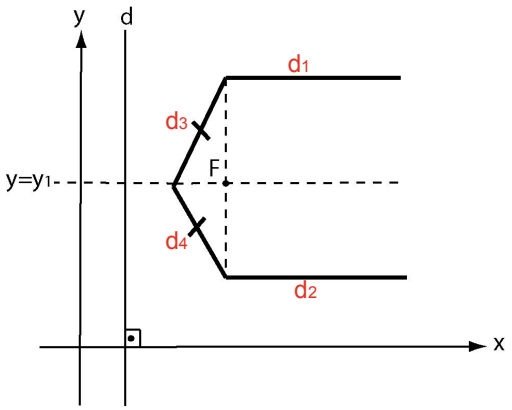
$$\begin{aligned} d_3 \cap d_4 &= \{2max - mby = m(ax_1 - by_1) - ak\} \cap \\ \{2max + mby &= m(ax_1 + by_1) - ak\} \\ &= \left((max_1 - ak)(2ma)^{-1}, y_1\right) \end{aligned}$$

noktasında uçuca ekli iki doğru parçasıdır. $d_1$ile d_2 doğruları sırasıyla

$$\begin{aligned} d_1 \cap d_3 &= \{mby = m(ax_1 + by_1) + ak\} \cap \{2max - mby = m(ax_1 - by_1) - ak\} \\ &= \left(x_1, (max_1 + mby_1 + ak)(mb)^{-1}\right) \\ d_2 \cap d_4 &= \{mby = -m(ax_1 - by_1) - ak\} \cap \ \{2max + mby = m(ax_1 + by_1) - ak\} \\ &= \left(x_1, (mby_1 - max_1 - ak)(mb)^{-1}\right) \end{aligned}$$

sabit başlangıç noktalarına sahip yatay iki ışındır.

Doğrultmanı dikey doğru olan genelleştirlmiş taksi parabol $y = y_1$ doğrusuna göre simetriktir. (Bkz. Şekil 2.2.1.2)



Şekil 1.4.3.2

ii. d doğrultmanı yataysal bir doğru olsun. Bu durumda $\left|\frac{m}{n}\right| < \frac{a}{b}$ ve $\left|\frac{m}{n}\right| \neq 0$ dır. 2.2.1.2 denklemi

$$a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| = \left(\frac{|n|}{b}\right)^{-1} |mx + ny + k| = \left|b\frac{m}{n}x + by + \frac{bk}{n}\right| \tag{2.2.1.3}$$

şeklini alır. Bu denklemin çözülmesiyle

1) $x \leqslant x_1, mx + ny + k < 0, y < y_1$ ve $x \geqslant x_1, mx + ny + k > 0, y > y_1$ iken çözüm kümesi

$$d_1 : (na - mb)x = n(ax_1 + by_1) + bk$$

doğrusudur.

2) $x \leqslant x_1, mx + ny + k < 0, y > y_1$ ve $x \geqslant x_1, mx + ny + k > 0, y < y_1$ iken çözüm kümesi

$$d_2 : (mb - na)x + 2bny = -n(ax_1 - by_1) - bk$$

doğrusu elde edilir.

3) $x > x_1, mx + ny + k < 0, y \leqslant y_1$ ve $x < x_1, mx + ny + k > 0, y \geqslant y_1$ iken çözüm kümesi

$$d_3 : (ma + na)x = n(ax_1 - by_1) - bk$$

doğrusu elde edilir.

4) $x > x_1, mx + ny + k < 0, y \geqslant y_1$ ve $x < x_1, mx + ny + k > 0, y \leqslant y_1$ iken çözüm kümesi

$$d_4 : (mb + na)x + 2bny = n(ax_1 + by_1) - bk$$

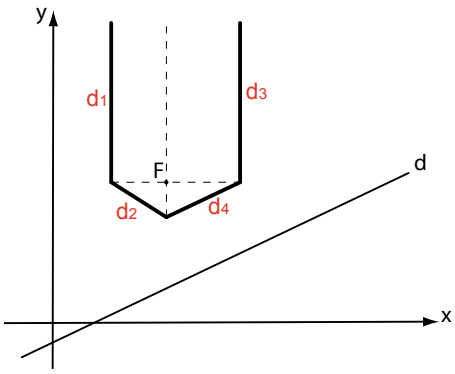
doğrusu elde edilir.

$$\begin{aligned} d_2 \cap d_4 &= \{(mb - na)x + 2bny = -n(ax_1 - by_1) - bk\} \\ \cap (mb + na)x + 2bny &= n(ax_1 + by_1) - bk \\ &= \left(x_1, (-max_1 + nby_1 - bk)\,(2bn)^{-1}\right) \end{aligned}$$

noktasında uçuca ekli iki doğru parçasıdır. $d_1$ile d_3 doğruları sırasıyla

$$\begin{aligned} d_1 \cap d_2 &= \{(na - mb)x = n(ax_1 + by_1) + bk\} \cap \{(mb - na)x + 2bny = -n(ax_1 - by_1) - bk\} \\ &= \left((n.a.x_1 + n.b.y_1 + b.k)(na - mb)^{-1}, y_1\right) \\ d_3 \cap d_4 &= \{(mb + na)x = n(ax_1 - by_1) - bk\} \cap \{(mb + na)x + 2bny = n(ax_1 + by_1) - bk\} \\ &= \left((n.a.x_1 - n.b.y_1 - b.k)(mb + na)^{-1}, y_1\right) \end{aligned}$$

sabit başlangıç noktalarına sahip yatay iki ışındır. (Bkz. Şekil 2.2.1.3)



Şekil 2.2.1.3

d doğrultmanı yatay bir doğru ise $m = 0$ olup 2.2.1.2 denklemi

$$a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| = \left(\frac{|n|}{b}\right)^{-1} . |ny + k| = \left|by + \frac{bk}{n}\right| \qquad (2.2.1.4)$$

şeklini alır. Bu denklemin benzer şekilde çözülmesiyle

1) $x \leqslant x_1, mx + ny + k < 0, y < y_1$ ve $x \geqslant x_1, mx + ny + k > 0, y > y_1$ iken çözüm kümesi

$$d_1 : nax = n(ax_1 + by_1) + bk$$

doğrsudur.

2) $x \leqslant x_1, mx + ny + k < 0, y > y_1$ ve $x \geqslant x_1, mx + ny + k > 0, y < y_1$ iken çözüm kümesi

$$d_2 : -nax + 2bny = -n(ax_1 - by_1) - bk$$

doğrusudur.

3) $x > x_1, mx + ny + k < 0, y \leqslant y_1$ ve $x < x_1, mx + ny + k > 0, y \geqslant y_1$ iken çözüm kümesi

$$d_3 : nax = n(ax_1 - by_1) - bk$$

doğrusudur.

4) $x > x_1, mx + ny + k < 0, y \geqslant y_1$ ve $x < x_1, mx + ny + k > 0, y \leqslant y_1$ iken çözüm kümesi

$$d_4 : nax + 2bny = n(ax_1 + by_1) - bk$$

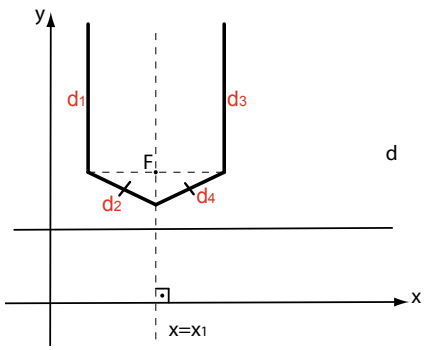
doğrusudur.

$$\begin{aligned} d_2 \cap d_4 &= \{-nax + 2bny = -n(ax_1 - by_1) - bk\} \cap \{nax + 2bny = n(ax_1 + by_1) - bk\} \\ &= \left(x_1, (nby_1 - bk)\,(2bn)^{-1}\right) \end{aligned}$$

noktasında uçuca ekli iki doğru parçasıdır. $d_1$ile d_3 doğruları sırasıyla

$$\begin{aligned} d_1 \cap d_2 &= (nax = n(ax_1 + by_1) + bk\} \cap \{-nax + 2bny = -n(ax_1 - by_1) - bk\} \\ &= \left((nax_1 + nby_1 + bk)(na)^{-1}, y_1\right) \\ d_3 \cap d_4 &= \{nax = n(ax_1 - by_1) - bk\} \cap \ \{nax + 2bny = n(ax_1 + by_1) - bk\} \\ &= \left((nax_1 - nby_1 - bk)(na)^{-1}, y_1\right) \end{aligned}$$

sabit başlangıç noktalarına sahip dikey iki ışındır. (Bkz. Şekil 2.2.1.4)



Şekil 2.2.1.4

Yardımcı Teorem 2.2.1.2: Genelleştirilmiş taksi düzlemde doğrultmanı bir ayıraç doğru olan gerçek Genelleştirilmiş taksi parabolü bir doğru parçası ile yatay ve dikey iki ışından oluşur.

İspat: Odak noktası $F = (x_1, y_1)$ ve doğrultmanı $d : ax - by + k = 0$ olan genelleştirilmiş taksi parabolü gözönüne alalım. 2.2.1.2 denklemi

$$a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| = \left(\frac{|a|}{a}\right)^{-1} |ax - by + k| = |ax - by + k|$$

şeklini alır. Bu denklemin çözülmesiyle,

1) $x \leqslant x_1, ax - by + k < 0, y < y_1$ ve $x \geqslant x_1, ax - by + k > 0, y > y_1$ iken çözüm kümesi

$$d_1 : y = \frac{ax_1 + by_1 + k}{2b}$$

doğrusudur.

2) $x > x_1, ax - by + k < 0, y \leqslant y_1$ ve $x < x_1, ax - by + k > 0, y \geqslant y_1$ iken çözüm kümesi

$$d_2 : ax - by = \frac{ax_1 - by_1 - k}{2}$$

doğrusudur.

3) $x > x_1, ax - by + k < 0, y \geqslant y_1$ ve $x < x_1, ax - by + k > 0, y \leqslant y_1$ iken çözüm kümesi

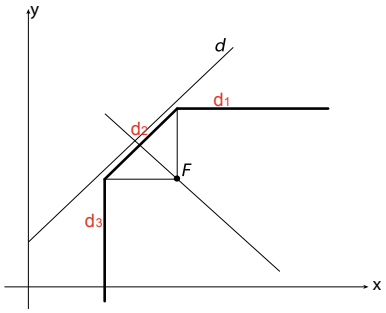
$$d_3 : x = \frac{ax_1 + by_1 - k}{2a}$$

doğrusudur. Bu doğruların kesim noktaları

$$\begin{aligned} d_1 \cap d_2 &= \{(x,y) : y = \frac{ax_1 + by_1 + k}{2b}\} \cap \{(x,y) : ax - by = \frac{ax_1 - by_1 - k}{2}\} \\ &= (x_1, \frac{ax_1 + by_1 + k}{2b}) \\ d_2 \cap d_3 &= \{(x,y) : ax - by = \frac{ax_1 - by_1 - k}{2}\} \cap \{(x,y) : x = \frac{ax_1 + by_1 - k}{2a}\} \\ &= (\frac{ax_1 + by_1 - k}{2a}, y_1) \end{aligned}$$

dır. Tüm durumlar birlikte düşünüldüğünde parabol aşağıdaki gibidir. (Bkz.

Şekil 2.2.1.5)



Şekil 2.2.1.5

Yardımcı Teorem 2.2.1.3: Genelleştirilmiş taksi düzlemde odak noktasının doğrultman üzerinde olması halinde dejenere genelleştirilmiş taksi parabolü aşağıdakilerden birisidir:

i. Doğrultman dikeysel (dikey) veya yataysal (yatay) bir doğru ise odaktan geçen ve sırasıyla yatay veya dikey olan bir doğrudur. (Bkz. Şekil 2.2.1.6)

ii. Doğrultman bir ayıraç doğru ise (odak noktasından) simetrik iki dikdörtgensel bölgedir. (Bkz. Şekil 2.2.1.7)

İspat :

i. a) d doğrultmanı dikeysel bir doğru olsun. Bu durumda $\left|\frac{m}{n}\right| > \frac{a}{b}$ dir. 2.2.1.2 denklemi

$$a\left|x-x_1\right| + b\left|y-y_1\right| = \left(\frac{|m|}{a}\right)^{-1}\left|mx+ny+k\right| = \left|ax + a\frac{n}{m}y + \frac{ak}{m}\right|$$

şeklini alır. Ayrıca $F=(x_1,y_1)$ odak noktası doğrultman üzerinde olduğundan

$$\begin{aligned} mx_1+ny_1+k &= 0 \\ x_1 &= \frac{-ny_1-k}{m} \end{aligned}$$

dir. Bu denklemin çözülmesiyle

1) $x \leqslant x_1, mx+ny+k<0, y \leqslant y_1$ ve $x \geqslant x_1, mx+ny+k>0, y \geqslant y_1$ iken çözüm kümesi $y=y_1$ doğrusu elde edilir.

2) $x \leqslant x_1, mx + ny + k < 0, y \geqslant y_1$ ve $x \geqslant x_1, mx + ny + k > 0, y < y_1$ iken çözüm kümesi $y = y_1$ doğrusu elde edilir. Diğer durumlarda çözüm kümesi boş kümedir.

d doğrultmanı yataysal bir doğru olsun. Bu durumda $\left|\frac{m}{n}\right| < \frac{a}{b}$ ve $\left|\frac{m}{n}\right| \neq 0$ dır. 2.1.4.1 denklemi

$$a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| = \left(\frac{|n|}{b}\right)^{-1} |mx + ny + k| = \left|b\frac{m}{n}x + by + \frac{bk}{n}\right| \tag{2.2.1.5}$$

şeklini alır. Bu denklemin çözülmesiyle

1) $x \leqslant x_1, mx + ny + k < 0, y < y_1$ ve $x \geqslant x_1, mx + ny + k > 0, y > y_1$ iken çözüm kümesi $x = x_1$ doğrusu elde edilir.

2) $x > x_1, mx + ny + k < 0, y \leqslant y_1$ ve $x < x_1, mx + ny + k > 0, y \geqslant y_1$ iken çözüm kümesi $x = x_1$ doğrusu elde edilir. Diğer durumlarda çözüm kümesi boş kümedir.

ii. d doğrultmanı ayıraç bir doğru olsun. Bu durumda $\left|\frac{m}{n}\right| = \frac{a}{b}$ dir.
$\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$ ise 2.2.1.2 denklemi

$$a\,|x - x_1| + b\,|y - y_1| = \left(\frac{|-b|}{b}\right)^{-1} |ax - by + k| = |ax - by + k|$$

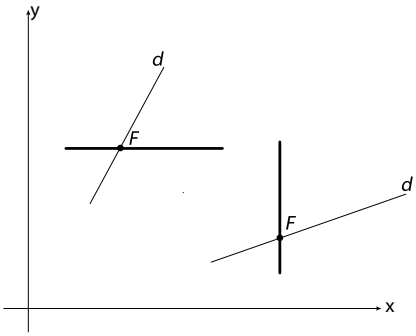
şeklini alır. Ayrıca $F = (x_1, y_1)$ odak noktası doğrultman üzerinde olduğundan

$$\begin{aligned} ax_1 - by_1 + k &= 0 \\ y_1 &= \frac{-ax_1 - k}{-b} \end{aligned}$$

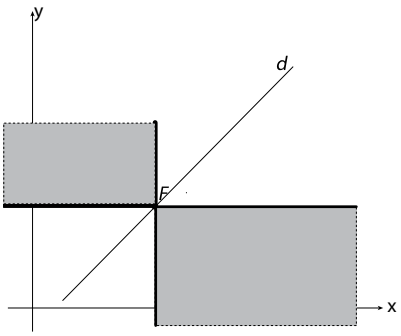
dir. Bu denklemin çözülmesiyle

1) $x \leqslant x_1, ax - by + k < 0, y \geqslant y_1$ ve $x \geqslant x_1, ax - by + k > 0, y \leqslant y_1$ iken tüm noktalar çözüm kümesinin elemanıdır. O halde oğrultmanı bir ayıraç doğru olan genelleştirlmiş dejenere taksi parabol , doğrultmana göre (odak

noktasından) simetrik iki dikdörtgensel bölgedir. Diğer durumlarda çözüm kümesi boş küme olarak bulunur.



Şekil 2.2.1.6



Şekil 2.2.1.7

Teorem 2.2.1.4: Genelleştirilmiş taksi düzlemde odak noktası $F = (x_1, y_1)$ ve doğrultmanı $d : m+ny+k = 0$ olan genelleştirilmiş dejenere taksi parabolü $\frac{-m}{n}$ eğiminin alacağı değerlere göre Tablo 2.2.1.1 de verilen geometrik yerlerden birisidir.

$a\,\lvert x - x_1\rvert + b\,\lvert y - y_1\rvert - (\max\{\frac{\lvert m\rvert}{a}, \frac{\lvert n\rvert}{b}\})^{-1}\,\lvert mx + ny + k\rvert = 0$	
$\frac{-m}{n}$	Geometrik Yer
$\left\lvert\frac{-m}{n}\right\rvert = \frac{a}{b}$	**Bir gerçek genelleştirilmiş taksi parabolü** Bir doğru parçası ve yatay, dikey iki ışından oluşur. Doğru parçasının orta dikmesi simetri eksenidir.
$\left\lvert\frac{-m}{n}\right\rvert \neq \frac{a}{b}$	**Bir gerçek genelleştirilmiş taksi parabolü** İki doğru parçası ve $\left\lvert\frac{-m}{n}\right\rvert > \frac{a}{b}$ veya $\left\lvert\frac{-m}{n}\right\rvert < \frac{a}{b}$ olması durumuna göre iki yatay veya iki dikey ışından oluşur.

Tablo 2.2.1.1

Bölüm 3

GENELLEŞTİRLMİŞ TAKSİ DÜZLEMİN İZOMETRİLERİ

Bu bölümde, (Kaya, Gelişgen, Ekmekçi, Bayar, 2006) ve (Kaya, Gelişgen, Ekmekçi, Bayar, 2009) esas alınarak, genelleştirilmiş taksi düzlemin izometrileri elde edilmiştir.

3.1 Genelleştirilmiş Taksi Düzlemin İzometrileri

Düzlemin izometrisi, düzlemdeki uzaklılkları koruyan bir dönüşüm olarak tanımlandığından, $\mathbb{R}^2_G$ nin izometrileri genelleştirilmiş taksi metriğine göre $\mathbb{R}^2$ nin izometrileridir.

Önerme 3.1.1 Her öklidyen öteleme $\mathbb{R}^2_G$ nin bir izometrisidir.

İspat: $T_A : \mathbb{R}^2_G \to \mathbb{R}^2_G$, $T_A(X) = X + A$, $A = (a_1, a_2)$ ve $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_G$ olmak üzere T_A dönüşümünü göz önüne alalım.

$X = (x_1, y_1)$ ve $Y = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2_G$ noktaları için

$$d_G(T_A(X), T_A(Y)) = a\,|(a_1 + x_1) - (a_1 + x_2)| + b\,|(a_2 + y_1) - (a_2 + y_2)|$$

$$= a\,|x_1 - x_2| + b\,|y_1 - y_2|$$

$$= d_G(X, Y)$$

dir. Böylece T_A bir izometridir.

Aşağıdaki tanım ve lemmayı $\mathbb{R}^2_G$ nin yansımalarını bulmak için kullanacağız.

Tanım: P ve ℓ , $\mathbb{R}^2_G$ de sırasıyla bir nokta ve bir doğru olsun. Q noktası, PQ $l'ye$ dik olacak şekilde, Q , ℓ üzerinde bir nokta olsun.

$$d_G(P, Q) = d_G(P^{'}, Q)$$

olacak şekilde ℓ doğrusunun diğer tarafında bir P' noktası varsa , d_G metriğine göre $P^{'}$noktasına P nin yansıması denir.

Belirtelim ki, önerme 3.1.1 den dolayı yansımaların eksenlerini orijinden geçen doğrular olarak düşünmek yeterli olacaktır.

Önerme 3.1.2: $\mathbb{R}^2_G$ de $y = mx$ doğrusuna göre yansımanın bir izometri olması için gerek ve yeter koşul $a \neq b$ iken $m \in \{0, \infty\}$, $a = b$ iken $m \in \{0, \mp 1, \infty\}$ olmasıdır.

İspat: Teorem 1.1.2 den

$\forall\ A, B \in \mathbb{R}^2_G$ için $d_G(A, B) = \rho(m) d_E(A, B)$, $\rho(m) = \dfrac{\sqrt{1 + m^2}}{a + |b|}$ dir. Bu bağıntı kullanılarak teorem ispatlanacaktır.

i. $a \neq b$ olsun. $\ell ... y = mx$ doğrusuna göre φ öklidyen yansımasını gözönüne alalım.

$$\varphi(P) = \varphi(x, y) = P' = (x', y') = \left(\frac{(1-m^2)x + 2my}{1+m^2}, \frac{2mx + (-1+m^2)y}{1+m^2} \right)$$

$$O = PP' \cap \{(x, y) : y = mx\}$$

ise

$$d_E(O, P) = d_E(O, P')$$

ifadesi Teorem 1.1.3 ten

$$d_G(O, P) = d_G(O, P')$$

yi gerektirir. Yani P' noktası , P nin d_G-yansımasıdır. φ nin $\mathbb{R}^2_G$ nin bir izometri olması için $\Longleftrightarrow$

$$d_G(O, P) = d_G(O, P')$$

olmasıdır.

$d_G(O, P) = d_G(O, P')$ olması için $m \in \{0, \infty\}$ veya $m \to \infty$ olması gerektiğini iddia ediyoruz.

$d_G(O, P) = d_G(O, P') = k$, $(k = \text{sbt.})$ ve m_1 ve m_2 de sırasıyla OP ve OP' doğru parçalarının eğimleri olmak üzere $\rho(m_1) = \rho(m_2) = k$ dır. Ayrıca P noktası $y = mx$ doğrusu üzerinde ise $P = P'$ ve $m_1 = m_2 = m$ ve $\rho(m) = k$ olur. Bu durumda $\rho'(m) = 0$ olacaktır. Böylece

$$\rho'(m) = (1+m^2)^{\frac{-1}{2}}.(a + |b|) \left\{ \begin{array}{c} ma - b, \ m \geqslant 0 \\ ma + b, \ m < 0 \\ 0, \ m = 0 \text{ veya } m \to \infty \end{array} \right\}$$

dır. $m_1$ve m_2 sırasıyla, OP ve OP' doğrularının eğimleri eğimleri ve $P' = \varphi(P)$

olmak üzere

$$\begin{aligned} d_E(O,P) &= d_E(O,P') \\ d_G(O,P) &= \rho(m_1)d_E(O,P) \\ d_G(O,P') &= \rho(m_2)d_E(O,P') \\ &= \rho(m_2)d_E(O,P) \end{aligned}$$

dir. Aşağıdaki tabloda $\rho(m_1) = \rho(m_2)$ nin $d_G(O,P) = d_G(O,P')$ anlamına geldiği tüm durumları görebiliriz.

m	0	∞	$\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$
m_2	$-m_1$	$-m_1$	$\frac{1-\frac{a^2-b^2}{2ab}}{\frac{a^2-b^2}{2ab}-m_1}$	$\frac{1+\frac{a^2-b^2}{2ab}}{\frac{a^2-b^2}{2ab}+m_1}$

Buna göre $m \in \{0, \infty\}$ dir.

Tersine $m \in \{0, \infty\}$ olsun.

a-) $m = 0$ iken (x- eksenine göre yansıma) $P(x,y)$ için $P' = (x,-y)$ olduğuna göre

$$d_G(Q,P') = a\,|x| + b\,|-y| = a\,|x| + b\,|y| = d_G(Q,P)$$

dir.

b-) $m \to \infty$ iken (y- eksenine göre yansıma) $P(x,y)$ için $P' = (-x,y)$ olduğuna göre

$$d_G(Q,P') = a\,|-x| + b\,|y| = a\,|x| + b\,|y| = d_G(Q,P)$$

dir.

c-) $m = \dfrac{b}{a}$ ise $P(x,y)$ olmak üzere

$$P' = \left(\frac{(a^2-b^2)x + 2aby}{a^2+b^2}, \frac{2ab - +(a^2-b^2)y}{a^2+b^2} \right)$$

dir.

$$d_G(Q,P') = a\left|\frac{(a^2-b^2)x+2aby}{a^2+b^2}\right| + b\left|\frac{2ab-+(a^2-b^2)y}{a^2+b^2}\right|$$

$y \geqslant \frac{(b^2-a^2)}{2ab}x, y \geqslant \frac{-2ab}{(b^2-a^2)}x,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$ ve $y \leqslant \frac{(b^2-a^2)}{2ab}x, y \leqslant \frac{-2ab}{(b^2-a^2)}x,\ x \leqslant 0,\ y \leqslant 0$

durumlarında

$$d_G(O,P') = d_G(O,P)$$

dir. Diğer durumlarda farklıdır. Dolayısıyla $m = \frac{b}{a}$ eğimli doğruya göre yansıma uzaklıkları korumaz. Benzer şekilde $m = -\frac{b}{a}$ eğimli doğruya göre yansıma da uzaklıkları korumaz. Böylece $a \neq b$ iken d_G uzaklığını koruyan yansımalar kümesi

$$\{x = 0, y = 0\}$$

dır.

ii) $a = b$ iken d_G metriği d_T-taksi uzaklığının sabit a katı olduğundan taksi düzlem için uzaklıkları koruyan yansımalar burada da geçerli olacaktır. Dolayısıyla bu durumda d_G uzaklığını koruyan yaznsımalar kümesi

$$\{x = 0, y = 0, y = x, y = -x\}$$

dir.

Önerme 3.6: $\mathbb{R}^2_G$ deki izometrik dönmelerin kümesi $a \neq b$ iken $\{0, \pi\}$, $a = b$ iken $\left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$ dir.

İspat : $\mathbb{R}^2_G$ de izometrik dönmeleri bulmak için d_G -birim çemberinin kenar uzunlukjlarını koruyan dönmeleri bulmak yeterlidir. $\mathbb{R}^2_G$ de birim çemberin $A_1 = (\frac{1}{a}, 0)$ ve $A_2 = (0, \frac{1}{b})$ noktalarını gözönüne alalım. A_1 ve A_2 ye θ öklidyen dönmesini uyguladığımızda

$$\begin{aligned} r_\theta(A_1) &= \left(\frac{1}{a}\cos\theta, \frac{1}{a}\sin\theta\right) = \frac{1}{a}(\cos\theta, \sin\theta) \\ r_\theta(A_2) &= \left(-\frac{1}{b}\sin\theta, \frac{1}{b}\cos\theta\right) = \frac{1}{b}(-\sin\theta, \cos\theta) \end{aligned}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} d_G(A_1, A_2) &= a\left|\frac{1}{a}\right| + b\left|\frac{1}{b}\right| = 2 \\ d_G(r_\theta(A_1), r_\theta(A_2)) &= a\left|\frac{\cos\theta}{a} + \frac{\sin\theta}{b}\right| + b\left|\frac{\sin\theta}{a} - \frac{\cos\theta}{b}\right| \end{aligned}$$

dir. $r_\theta(A_1)$ in birim çember üzerinde olması için

$$\begin{aligned} a\left|\frac{\cos\theta}{a}\right| + b\left|\frac{\sin\theta}{a}\right| &= 1 \\ a\left|\cos\theta\right| + b\left|\sin\theta\right| &= a \end{aligned}$$

olmalıdır.

$r_\theta(A_2)$ in birim çember üzerinde olması için

$$\begin{aligned} a\left|-\frac{\sin\theta}{b}\right| + b\left|\frac{\cos\theta}{b}\right| &= 1 \\ a\left|-\sin\theta\right| + b\left|\cos\theta\right| &= b \end{aligned}$$

olmalıdır.

r_θ nın d_G -uzaklığını koruyan dönme olması için

$$d_G(A_1, A_2) = d_G(r_\theta(A_1), r_\theta(A_2))$$

eşitliğini sağlayan θ ları bulmalıyız. Buna göre

$$\begin{aligned} a\left|\frac{\cos\theta}{a} + \frac{\sin\theta}{b}\right| + b\left|\frac{\sin\theta}{a} - \frac{\cos\theta}{b}\right| &= 2 \\ \frac{1}{b}\left|b\cos\theta + a\sin\theta\right| + \frac{1}{a}\left|b\sin\theta - a\cos\theta\right| &= 2 \end{aligned}$$

i) $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ ise

$$\begin{aligned} \frac{1}{b}b + \frac{1}{a}\left|b\sin\theta - a\cos\theta\right| &= 2 \\ \left|b\sin\theta - a\cos\theta\right| &= a \\ \left|b\sin\theta - a\cos\theta\right| &= a \Rightarrow \cos\theta = -1, \theta = \pi \text{ (boş küme)} \end{aligned}$$

yada

$$b\sin\theta - a\cos\theta = -a \Rightarrow \cos\theta = 1, \theta = 0$$

ii) $\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi$ ise

$$\begin{aligned} -a\cos\theta + b\sin\theta &= a \\ a\sin\theta - b\cos\theta &= b \end{aligned}$$

dir. Buna göre

$$\begin{aligned} \frac{1}{b}\left|b\cos\theta + a\sin\theta\right| + \frac{1}{a}a &= 2 \\ \left|b\cos\theta + a\sin\theta\right| &= b \\ b\cos\theta + a\sin\theta &= b, \cos\theta = 1, \sin\theta = 0, \theta = 0 \text{ (boş küme)} \end{aligned}$$

ya da

$$b\cos\theta + a\sin\theta = -b, \cos\theta = -1, \sin\theta = 0, \theta = \pi$$

iii) $\pi \leqslant \theta \leqslant \frac{3\pi}{2}$ ise

$$\begin{aligned} -a\cos\theta - b\sin\theta &= a \\ -a\sin\theta - b\cos\theta &= b \end{aligned}$$

dir. Buna göre

$$\begin{aligned} \frac{1}{b}\left|-b\right| + \frac{1}{a}\left|b\sin\theta - a\cos\theta\right| &= 2 \\ \left|b\sin\theta - a\cos\theta\right| &= a \\ \left|b\sin\theta - a\cos\theta\right| &= a \Rightarrow \cos\theta = -1, \theta = \pi \text{ (boş küme)} \\ \left|b\cos\theta + a\sin\theta\right| &= b \\ b\cos\theta + a\sin\theta &= b, \cos\theta = -1, \sin\theta = 0, \theta = \pi \end{aligned}$$

ya da

$$b\cos\theta + a\sin\theta = -a, \cos\theta = 1, \sin\theta = 0 \text{ (boş küme)}$$

iv) $\dfrac{3\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ ise

$$\begin{aligned} a\cos\theta - b\sin\theta &= a \\ -a\sin\theta + b\cos\theta &= b \end{aligned}$$

dir. Buna göre

$$\begin{aligned} \frac{1}{b}\left|b\cos\theta + a\sin\theta\right| + \frac{1}{a}\left|-a\right| &= 2 \\ \left|b\cos\theta + a\sin\theta\right| &= b \\ b\cos\theta + a\sin\theta &= b, \cos\theta = 1, \sin\theta = 2\pi \end{aligned}$$

ya da

$$b\cos\theta + a\sin\theta = -b, \cos\theta = -1, \sin\theta = 0, \theta = \pi$$

$$\theta = 0 = 2\pi$$

Buna göre $\theta \in \{0, \pi\}$ dir. Özel olarak $a = b$ iken $\theta \in \left\{0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$ dir.

Bölüm 4

GENELLEŞTİRİLMİŞ TAKSİ DÜZLEMDE TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

Bu bölümde, genelleştirilmiş taksi düzleminde öklidyen düzlemdekine benzer olarak trigonometrik fonksiyonlar tanımlanmıştır. Düzlemde birim çember üzerinde(x, y) noktası için trigonometrik fonksiyonlar $x = cos\theta$, $y = sin\theta$ olarak alınır. Birim çember üzerindeki (x, y) noktası ile θ parametresini eşleştirmenin iki yolu vardır. $(cos\theta$, $sin\theta)$ noktası $x-$ekseni ile pozitif yönde θ açısı yapan orijinden geçen doğrunun birim çemberi kestiği noktadır ya da saat yönünün tersi yönde θ birim yay uzunluğuna karşılık gelen noktadır. Burada (Özcan, Ekmekçi, Bayar 2002) esas alınarak, θ parametresini açı alarak genelleştirilmiş taksi trigonometrik fonksiyonlar tanımlanmıştır. Daha sonra da bir doğru parçasının dönmelerden sonra uzunluğunun değişimi incelenmiştir.

4.1 Genelleştirilmiş Taksi Trigonometrik Fonksiyonlar

Genelleştirilmiş taksi birim çemberi; $\mathbb{R}^2$ de orijinden 1genelleştirilmiş taksi birim uzaklıktaki $A(x, y)$ noktalarının geometrik yeridir ve denklemi

$$d_G((0,0),(x,y)) = 1$$

den

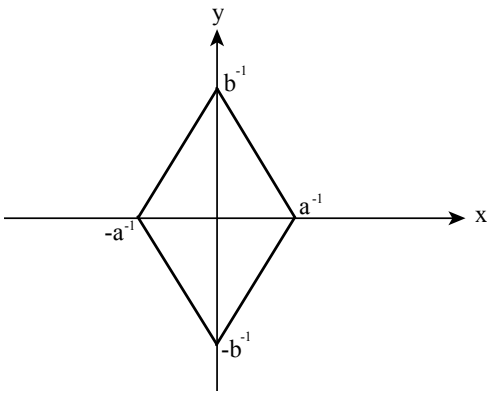
$$a\,|x| + b\,|y| = 1$$

biçimindedir.

Bu denklem mutlak değerlerin durumuna göre incelenirse birim çember bölgelere göre aşağıdaki dallara ayrılır:

Bölgeler	*Denklemi*
I	$y = -\frac{a}{b}x + \frac{1}{b}$
II	$y = \frac{a}{b}x + \frac{1}{b}$
III	$y = -\frac{a}{b}x - \frac{1}{b}$
VI	$y = \frac{a}{b}x - \frac{1}{b}$

Genelleştirilmiş taksi birim çemberinin şekli Şekli 4.1.1 de verilmiştir.



Şekil 4.1.1 Genelleştirilmiş Taksi Birim Çember

Şimdi Öklidyen düzlemde sinüs ve kosinüs fonksiyonlarını birim çember üzerinde ki (x, y) noktasına bağlı tanımladığımız gibi genelleştirilmiş taksi düzlemde *genelleştirilmiş taksi sinüs* ve *genelleştirilmiş taksi kosinüs* fonksiyonlarını genelleştirilmiş taksi birim çemberi üzerinde ki (x, y) noktasına bağlı tanımlayabiliriz. *Genelleştirilmiş taksi kosinüs fonksiyonunu* $\cos_G$ ve *genelleştirilmiş taksi sinüs fonksiyonunu* $\sin_G$ biçiminde gösteriyoruz. Buna göre genelleştirilmiş taksi birim çemberi üzerinde $(\cos_G \theta, \sin_G \theta)$ noktası orijinden geçen $x-$ekseni ile pozitif yönde θ açısı yapan doğrunun birim çemberi kestiği noktadır. Bu doğrunun eğimi alınan metriğe göre değişmediğinden genelleştirilmiş taksi düzleminde genelleştirilmiş taksi *tanjant fonksiyonu* Öklidyen düzlemdekinin aynısıdır. Yani genelleştirilmiş taksi tanjant fonksiyonunu $\tan_G$ ile gösterirsek

$$\tan_G \theta = \tan \theta$$

dir.

Böylece genelleştirilmiş taksi kosinüs ve genelleştirilmiş taksi sinüs fonksiyonları bildiğimiz tanjant fonksiyonu cinsinden elde edilebilir.

$$\begin{cases} a\,|x| + b\,|y| = 1 \\ y = (\tan\theta)x \end{cases}$$

sistemi çözülürse

$$a\,|x| + b\,|\tan\theta|\,|x| = 1$$

$$|x| = \frac{1}{a + b\,|\tan\theta|} = \frac{|\cos\theta|}{a\,|\cos\theta| + b\,|\sin\theta|} = |\cos_G \theta|$$

elde edilir.

θ nın bulunduğu bölgelere göre mutlak değerleri inceleyelim

I. Bölge: $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ iken

$$\begin{cases} y = -\dfrac{a}{b}x + \dfrac{1}{b} \\ y = (\tan\theta)x \end{cases}$$

sistemi çözüldüğünde

$$(\tan\theta)x = -\frac{a}{b}x + \frac{1}{b}$$

$$x(\tan\theta + \frac{a}{b}) = \frac{1}{b}$$

$$x = \frac{\frac{1}{b}}{\tan\theta + \frac{a}{b}}$$

$$\begin{cases} x = \cos_G\theta = \dfrac{\frac{1}{b}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{a}{b}} \\ x = \dfrac{\cos\theta}{b\sin\theta + a\cos\theta} \\ y = \sin_G\theta = \dfrac{\sin\theta}{b\sin\theta + a\cos\theta} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x = \cos_G\theta &= \frac{\cos\theta}{b\sin\theta + a\cos\theta} \\ y = \sin_G\theta &= \frac{\sin\theta}{b\sin\theta + a\cos\theta} \end{aligned}$$

elde edilir.

II.Bölge: $\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi$ iken

$$\begin{cases} y = \dfrac{a}{b}x + \dfrac{1}{b} \\ y = (\tan\theta)x \end{cases}$$

sistemi çözüldüğünde

$$(\tan\theta)x = \frac{a}{b}x + \frac{1}{b}$$
$$x(\tan\theta - \frac{a}{b}) = \frac{1}{b}$$
$$x = \frac{\frac{1}{b}}{\tan\theta - \frac{a}{b}}$$
$$\begin{cases} x = \cos_G\theta = \dfrac{\cos\theta}{b\sin\theta - a\cos\theta} \\ y = \sin_G\theta = \dfrac{\sin\theta}{b\sin\theta - a\cos\theta} \end{cases}$$

elde edilir.

III.Bölge: $\pi \leqslant \theta \leqslant \dfrac{3\pi}{2}$ iken

$$\begin{cases} y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{1}{b} \\ y = (\tan\theta)x \end{cases}$$

sistemi çözüldüğünde

$$(\tan\theta)x = -\frac{a}{b}x - \frac{1}{b}$$
$$x(\tan\theta + \frac{a}{b}) = -\frac{1}{b}$$
$$x = \frac{-\frac{1}{b}}{\tan\theta + \frac{a}{b}}$$

$$\begin{cases} x = \cos_G\theta = \dfrac{-\cos\theta}{b\sin\theta + a\cos\theta} \\ y = \sin_G\theta = \dfrac{-\sin\theta}{b\sin\theta + a\cos\theta} \end{cases}$$

elde edilir.

IV.Bölge: $\dfrac{3\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ iken

$$\begin{cases} y = \dfrac{a}{b}x - \dfrac{1}{b} \\ y = (\tan\theta)x \end{cases}$$

sistemi çözüldüğünde

$$(\tan\theta)x = \frac{a}{b}x - \frac{1}{b}$$
$$x(\tan\theta - \frac{a}{b}) = -\frac{1}{b}$$
$$x = \frac{-\frac{1}{b}}{\tan\theta - \frac{a}{b}}$$
$$\begin{cases} x = \cos_G\theta = \dfrac{\cos\theta}{-b\sin\theta + a\cos\theta} \\ y = \sin_G\theta = \dfrac{\sin\theta}{-b\sin\theta + a\cos\theta} \end{cases}$$

elde edilir.

Sonuç olarak bölgelere göre $\cos_G$ ve $\sin_G$ genelleştirilmiş taksi trigonometrik fonksiyonları

$$\cos_G\theta = \begin{cases} \dfrac{\cos\theta}{b\sin\theta + a\cos\theta}, 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\cos\theta}{b\sin\theta - a\cos\theta}, \dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi \\ \dfrac{\cos\theta}{-b\sin\theta - a\cos\theta}, \pi \leqslant \theta \leqslant \dfrac{3\pi}{2} \\ \dfrac{\cos\theta}{-b\sin\theta + a\cos\theta}, \dfrac{3\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant 2\pi \end{cases} \tag{4.1.1}$$

ve

$$\sin_G \theta = \begin{cases} \dfrac{\sin\theta}{b.\sin\theta + a.\cos\theta}, 0 \leqslant \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\sin\theta}{b.\sin\theta - a.\cos\theta}, \dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi \\ \dfrac{\sin\theta}{-b.\sin\theta + a.\cos\theta}, \pi \leqslant \theta \leqslant \dfrac{3\pi}{2} \\ \dfrac{\sin\theta}{-b\sin\theta + a\cos\theta}, \dfrac{3\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant 2\pi \end{cases} \tag{4.1.2}$$

biçiminde olur.

Daha kısa yazmak istersek,

$$\cos_G \theta = \frac{\cos\theta}{b\,|\sin\theta| + a\,|\cos\theta|}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

ve

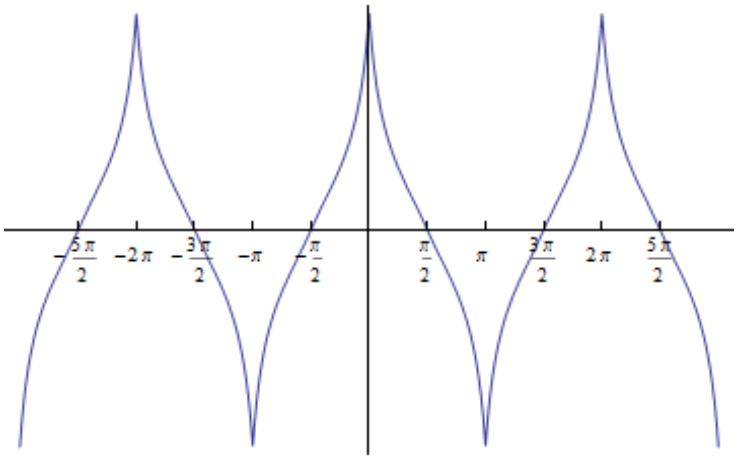
$$\sin_G \theta = \frac{\sin\theta}{b\,|\sin\theta| + a\,|\cos\theta|}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

şeklinde verebiliriz.

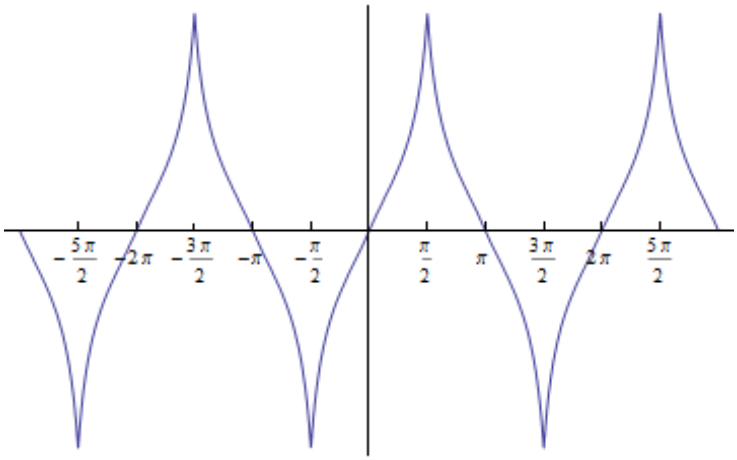
Genelleştirilmiş taksi sekant ve *kosekant* fonksiyonları Öklidyen düzlemdekine benzer olarak

$$\sec_G \theta = \frac{1}{\cos_G \theta} \text{ ve } \operatorname{cosec}_G \theta = \frac{1}{\sin_G \theta}$$

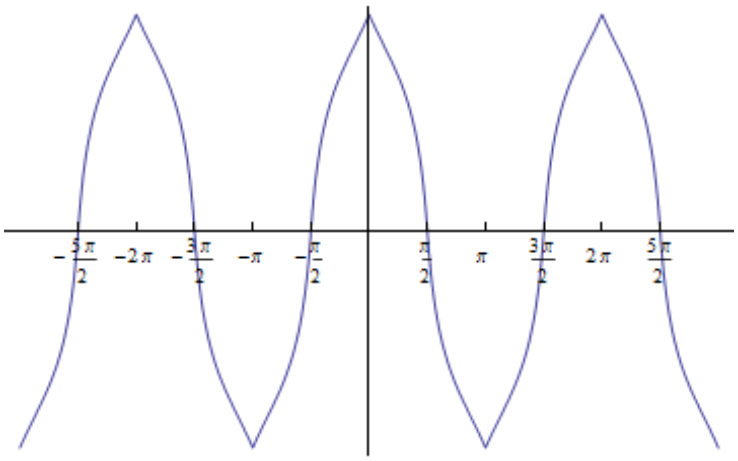
biçiminde tanımlayabiliriz. Aşağıdaki şekillerde genelleştirilmiş taksi sinüs ve genelleştirilmiş taksi kosinüs fonksiyonlarının grafikleri a ve b sayılarının farklı durumları için verilmiştir.



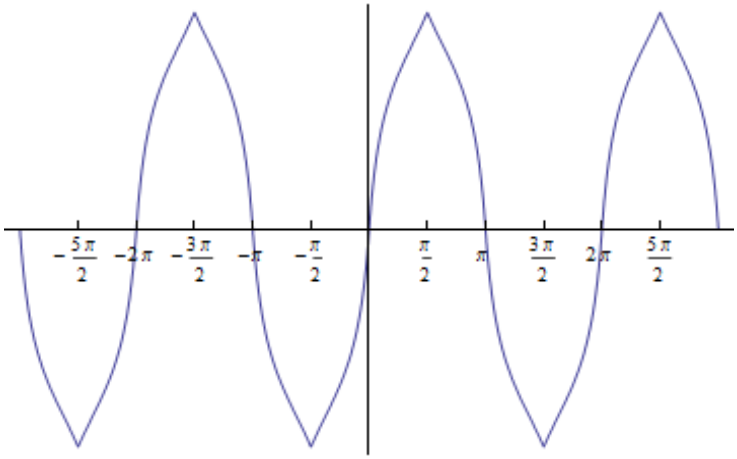
Şekil 4.1.2 : $a = 2$, $b = 5$ için Genelleştirilmiş Taksi Kosinüs Fonksiyonu



Şekil 4.1.3 : $a = 2$, $b = 5$ için Genelleştirilmiş Taksi Sinüs Fonksiyonu



Şekil 4.1.4 : $a = 5$, $b = 2$ için Genelleştirilmiş Taksi Kosinüs Fonksiyonu



Şekil 4.1.5 : $a = 5$, $b = 2$ için Genelleştirilmiş Taksi Sinüs Fonksiyonu

4.2 Genelleştirilmiş Trigonometrik Fonksiyonların Özellikleri

Trigonometrik fonksiyonlar açı ölçüsüne bağlı olarak tanımlamanın bir sonucu olarak tümler açıdaki özellikler taksi düzlem trigonometride de geçerlidir. Yani

$$\cos_G(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin_G \theta \text{ ve } \sin_G(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos_G \theta$$

dir. Ayrıca

$$\tan(-x) = -\tan x$$

özelliğinden ve 4.1.1 ve 4.1.2 den yararlanılarak

$$\cos_G(-x) = \cos_G x \ ve \ \sin_G(-x) = -\sin_G x$$

kolaylıkla elde edilebilir.

I.Durum:

$-\theta$ yı $III.$ bölge açısı olarak alırsak bu taktirde θ $II.$ bölge açısıdır.

$$\begin{aligned}
\cos_G(-\theta) &= \frac{-\cos(-\theta)}{b\sin(-\theta)+a\cos(-\theta)} = \frac{\cos\theta}{b\sin\theta+a\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{b\sin\theta+a\cos\theta} = \cos_G\theta \\
\sin_G(-\theta) &= \frac{-\sin(-\theta)}{b\sin(-\theta)+a\cos(-\theta)} = \frac{\sin\theta}{-b\sin\theta+a\cos\theta} = \frac{-\sin\theta}{b\sin\theta-a\cos\theta} = -\sin_G\theta
\end{aligned}$$

Benzer şekilde,

II.Durum:

$-\theta$ yı $VI.$ bölge açısı olarak alırsak bu taktirde θ $I.$ bölge açısıdır.

$$\begin{aligned}
\cos_G(-\theta) &= \frac{-\cos(-\theta)}{b\sin(-\theta)-a\cos(-\theta)} = \frac{-\cos\theta}{-b\sin\theta-a\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{b\sin\theta+a\cos\theta} = \cos_G\theta \\
\sin_G(-\theta) &= \frac{-\sin(-\theta)}{b\sin(-\theta)-a\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{-b\sin\theta-a\cos\theta} = -\frac{\sin\theta}{b\sin\theta+a\cos\theta} = -\sin_G\theta
\end{aligned}$$

Böylece her bölge için $\cos_G(-x) = \cos_G x$ ve $\sin_G(-x) = -\sin_G x$ dir.

Öklidyen geometride iyi bilinen Pisagor özdeşliği, genelleştirilmiş taksi düzlemde $(\cos_G x, \sin_G x)$ birim çember üzerinde bir nokta olduğundan

$$a\,|\cos_G x| + b\,|\sin_G x| = 1 \tag{4.1.3}$$

biçimine dönüşür. Bu da genelleştirilmiş taksi düzlemde *pisagor özdeşliğidir.*

Pisagor özdeşliğinin her iki tarafını $|\cos_G x|$ e bölersek

$$a + b\,|\tan_G x| = |\sec_G x| \tag{4.1.4}$$

genelleştirilmiş taksi *tanjant özdeşliğini* elde ederiz.

Pisagor özdeşliğinin her iki tarafını $|\sin_G x|$ e bölersek

$$a + b\,|\cos_G \mathrm{x}| = |\mathrm{cosect}_G \mathrm{x}| \tag{4.1.5}$$

genelleştirilmiş taksi *kosekant özdeşliğini* elde ederiz.

4.2.1 Genelleştirilmiş Taksi Trigonometrik Fonksiyonlar İçin İndirgeme Formülleri

Öklidyen düzlem trigonometride her θ açısının trigonometrik fonksiyonları I. Bölgede karşılık gelen açının trigonometrik fonksiyonları ile ifade edilebiliyordu. Genelleştirilmiş taksi düzleminde de birim çemberde i.bölgedeki θ_i açısına karşılık $I.$ ve $II.$ bölgede ilişkili olan açı θ_i' ile gösterilirse θ_i ve θ_i' arasındaki ilişki

Bölge	θ_i	θ_i'
I	θ_1	$\theta_1' = \theta_1$
II	θ_2	$\theta_2' = \pi - \theta_2$
III	θ_3	$\theta_3' = \theta_3 + \pi$
IV	θ_4	$\theta_4' = 2\pi - \theta_4$

biçiminde verilir.

$$
\begin{aligned}
\cos_G\theta_2 &= \frac{\cos(\pi-\theta_2')}{b\sin(\pi-\theta_2')-a\cos(\pi-\theta_2')} = \frac{-\cos\theta_2'}{b\sin\theta_2'+a\cos\theta_2'} = -\cos_G\theta_2'\\
\sin_G\theta_2 &= \frac{\sin(\pi-\theta_2')}{b\sin(\pi-\theta_2')-a\cos(\pi-\theta_2')} = \frac{\sin\theta_2'}{b\sin\theta_2'+a\cos\theta_2'} = \sin_G\theta_2'\\
\cos_G\theta_3 &= \frac{-\cos(\theta_3'+\pi)}{b\sin(\theta_3'+\pi)+a\cos(\theta_3'+\pi)} = \frac{-\cos\theta_3'}{b\sin\theta_3'+a\cos\theta_3'} = -\cos_G\theta_3'\\
\sin_G\theta_3 &= \frac{-\sin(\theta_3'+\pi)}{b\sin(\theta_3'+\pi)+a\cos(\theta_3'+\pi)} = \frac{-\sin\theta_3'}{b\sin\theta_3'+a\cos\theta_3'} = \sin_G\theta_3'\\
\cos_G\theta_4 &= \frac{-\cos(2\pi-\theta_4)}{b\sin(2\pi-\theta_4)-a\cos(2\pi-\theta_4)} = \frac{\cos\theta_4'}{b\sin\theta_4'+a\cos\theta_4'} = \cos_G\theta_4'\\
\sin_G\theta_4 &= \frac{-\sin(2\pi-\theta_4)}{b\sin(2\pi-\theta_4)-a\cos(2\pi-\theta_4)} = \frac{-\sin\theta_4'}{b\sin\theta_4'+a\cos\theta_4'} = -\sin_G\theta_4'
\end{aligned}
$$

Artık $\sin_G\theta_i$ ve $\cos_G\theta_i$ nin değerlerini hesaplamak için I. ve II. bölgedeki $\sin_G\theta_i'$ ve $\cos_G\theta_i'$ değerlerini bilmemiz yeterli olacaktır.

4.2.2 Genelleştirilmiş taksi Trigonometrik Fonksiyonlar İçin Toplam-Fark Formülleri

Genelleştirilmiş taksi trigonometrik fonksiyonları için toplam fark formülleri yine tanjant fonksiyonundan yararlanarak elde edilebilir. Tanjant fonksiy-

onunun toplam fark formülü

$$\begin{aligned}\tan(u \pm v) &= \frac{\tan u \pm \tan v}{1 \mp \tan u \tan v} \\ &= \tan_G(u \pm v)\end{aligned}$$

den

$$\tan_G(u \pm v) = \frac{\sin_G(u \pm v)}{\cos_G(u \pm v)} = \frac{\dfrac{\sin_G u}{\cos_G u} \pm \dfrac{\sin_G v}{\cos_G v}}{1 \mp \dfrac{\sin_G u}{\cos_G u}\dfrac{\sin_G v}{\cos_G v}}$$

ve

$$\frac{\sin_G(u \pm v)}{\cos_G(u \pm v)} = \frac{\sin_G u \cos_G v \pm \sin_G v \cos_G u}{\cos_G u \cos_G v \mp \sin_G u \sin_G v}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafında pay ve paydalar eşitlenirse

$$\sin_G(u \pm v) = \sin_G u \cos_G v \pm \sin_G v \cos_G u \tag{4.2.2.1}$$

ve

$$\cos_G(u \pm v) = \cos_G u \cos_G v \mp \sin_G u \sin_G v \tag{4.2.2.2}$$

elde edilir. Bu da Öklidyen sinüs ve Öklidyen kosinüs fonksiyonlarındaki toplam fark formüllerinin sağladığı özelliğin aynısıdır.

4.2.3 Genelleştirilmiş taksi Trigonometrik Fonksiyonlar İçin Yarım Açı Formülleri

Genelleştirilmiş taksi trigonometrik fonksiyonlar için yarım açı formülleri, genelleştirilmiş taksi kosinüs ve genelleştirilmiş taksi sinüs fonksiyonlarının toplam-fark formüllerinde $u = v$ alınarak elde edilir.

Buna göre

$$\sin_G(u + u) = \sin_G u \cos_G u + \sin_G u \cos_G u$$

den

$$\sin_G 2u = 2 \sin_G u \cos_G u \tag{4.2.3.1}$$

ve

$$\cos_G(u + u) = \cos_G u \cos_G u - \sin_G u \sin_G u$$

den

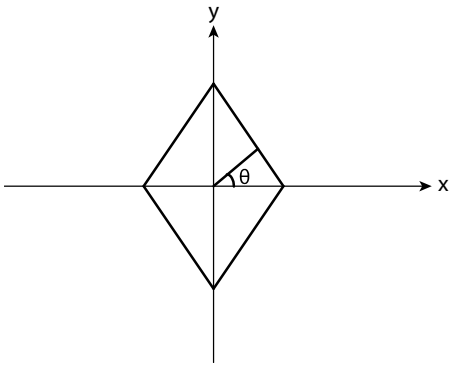
$$\cos_G 2u = \cos_G^2 u - \sin_G^2 u \qquad (4.2.3.2)$$

yarım açı formülleri elde edilir.

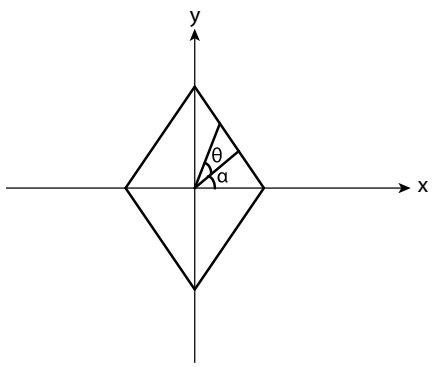
4.3 Referans Açılı Genelleştirilmiş Taksi Trigonometrik Fonksiyonlar

Öklidyen düzlemde açı ölçüsü ve yay uzunluğu eşittir ve düzlemin bütün dönmeler altında açılar korunurlar. Ancak genelleştirilmiş taksi düzlemde açıya sabit bir artım verdiğimizde yay uzunluğunda aynı oranda değişim olmaz. Şimdiye kadar tanımladığımız trigonometrik fonksiyonlarda θ yı x-ekseni ile pozitif yönde yapılan açı olarak aldık. Yani açının bir kolu x-ekseninin pozitif yönü idi. Bu durumdaki açıları *standart pozisyondaki* açı olarak düşünebiliriz. Böylece standart pozisyonda olmayan açılar içinde trigonometrik fonksiyonları tanımlamamız gerekir. O yüzden taksi düzlemde açı kavramını referans açılı açı tanımı ile genişletebiliriz.

$\alpha = 0$ ise θ standart pozisyondaki açıdır. Bu durum Şekil 4.3.1 ve Şekil 4.3.2de verilmiştir.



Şekil 4.3.1:Standart pozisyonda θ



Şekil 4.3.2:Referans açılı θ

Standart pozisyondaki açılar için verdiğimiz taksi kosinüs ve taksi sinüs fonksiyonlarının fark formüllerini kullanarak standart pozisyonda olmayan θ

açısı için referans açılı genelleştirilmiş taksi sinüs ve genelleştirilmiş taksi kosinüs fonksiyonlarını oluşturabiliriz. *Referans açılı genelleştirilmiş taksi sinüs fonksiyonu Gsin ve referans açılı genelleştirilmiş taksi kosinüs fonksiyonunu,* $G\cos$ ile gösterelim. Buna göre α referans açılı θ açısı için

$$Gcos\theta = \cos_G(\alpha+\theta-\alpha) = \cos_G(\alpha+\theta)\cos_G\alpha + \sin_G(\alpha+\theta)\sin_G\alpha \qquad (4.3.1)$$

ve

$$Gsin\theta = \sin_G(\alpha+\theta-\alpha) = \sin_G(\alpha+\theta)\cos_G\alpha - \sin_G\alpha\cos_G(\alpha+\theta) \qquad (4.3.2)$$

olur. Burada $\alpha+\theta$ ve α standart pozisyondaki açılardır. Dikkat edilirse $Gcos\theta$ ve $Gsin\theta$ eşitliklerinde $\alpha = 0$ alınırsa

$$Gcos\theta = \cos_G\theta$$
$$Gsin\theta = \sin_G\theta$$

dir.

4.4 Genelleştirilmiş Taksi Uzunluğunun Dönmeler Altındaki Değişimi

Öklidyen dönmelerden sonra bir doğru parçasının taksi uzunluğunun değişimini aşağıdaki teoremle verilebilir (Özcan, Ekmekçi, 2002).

Teorem: O noktası orijin olmak üzere OA $x-$ekseni üzerinde olmayan ve $x-$ekseninin pozitif yönü ile α açısı yapan doğru parçası ve $d_T(O,A) = k$ olsun. Eğer OA', OA nın orijin etrafında θ açılı dönme altında görüntüsü ise

$$d_G(O,A') = k\sqrt{\frac{\cos_G^2\alpha + \sin_G^2\alpha}{(\cos_G^2(\alpha+\theta) + \sin_G^2(\alpha+\theta)}} \qquad (4.4.1)$$

dir.

İspat: Bütün dönmeler altında Öklidyen uzunluk korunduğundan OA' ile OA nın Öklidyen uzunlukları eşittir.

$$d_E(O,A') = d_E(O,A)$$

A nın koordinatları $\cos_G, \sin_G$ ve k ya bağlı olarak $A = (k\cos_G \alpha, k\sin_G \alpha)$ dır. $d_G(O, A') = k'$ dersek, A' nin koordinatları

$$A' = (k'\cos_G(\alpha+\theta), k'\sin_G(\alpha+\theta))$$

olur. Bunları 4.4.1 de kullanırsak

$$\sqrt{(k'\cos_G(\alpha+\theta))^2 + k'\sin_G(\alpha+\theta)^2} = \sqrt{(k\cos_G\alpha)^2 + (k\sin_G\alpha)^2}$$

$$k'\sqrt{(\cos_G^2(\alpha+\theta) + \sin_G^2(\alpha+\theta)} = k\sqrt{\left(\cos_G^2\alpha + \sin_G^2\alpha\right)}$$

$$k' = k\sqrt{\frac{\cos_G^2\alpha + \sin_G^2\alpha}{(\cos_G^2(\alpha+\theta) + \sin_G^2(\alpha+\theta)}}$$

elde edilir.

Sonuç 1: OA doğru parçasının eğimi 0 yani x eksenine paralel ise

$$d_G(O, A') = \frac{k}{\sqrt{\cos_G^2\theta + \sin_G^2\theta}}$$

dir.

İspat: OA nın eğimi 0 olduğundan $\alpha = 0$ dır ve θ referans açısı konumunda olur. Teoremde $\alpha = 0$ alırsak

$$\begin{aligned} d_G(O, A') = \quad & k\sqrt{\frac{\cos_G^2 0 + \sin_G^2 0}{(\cos_G^2(0+\theta) + \sin_G^2(0+\theta)}} \\ & = k\sqrt{\frac{1+0}{\cos_G^2\theta + \sin_G^2\theta}} \\ & = \frac{k}{\sqrt{\cos_G^2\theta + \sin_G^2\theta}} \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 2: Düzlemin ötelemeleri altında genelleştirilmiş taksi uzunluklar korunduğundan teorem herhangi bir doğru parçası içinde geçerlidir.

.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Akça, Z. , Kaya, R., 1997, On the Taxicab Trigonometry, Journal of Inst. of Math. &Comp. Sci., 10, 3, 151-159.

Akça, Z., Bayar A. ve Ekmekçi, S, 2007, The Norm in CC-plane geometry, Pi Mu Epsilon Journal, 6, 321-324.

Bayar, A., Ekmekçi, S. ve Özcan, M., 2008, On Trigonometric Functions and Cosine-Sine Rules in Taxicab Plane, International Electronic Journal of Geometry

Bayar, A. ve Ekmekçi, S., 2006, On the Chinese Checker Sine and Cosine Functions, Internationnal Journal of Mathematics and Analysis, 1, 3, 249-259.

Bayar, A., 2008, On The Trigonometric Functions in Maximum Metric, Scientific and Professional Journal of croatian society for geometry and graphics, No: 12, 45-48.

Bayar, A., Ekmekçi, S. ve Akça, Z., 2006, On The Plane Geometry with Generalized Absolute Value Metric, ESOGÜ, manuscript.

Kaya, R., Akça, Z., Günaltılı, İ. ve Özcan, M., 2000, General Equation for Taxicab Conics and their Classification, Mitt. Math. Ges. Hamburg, 19, 135-148.

Kaya, R., Gelişgen, Ö., Ekmekçi, S. ve Bayar, A., 2006, Group of Isometries of CC-Plane, Missouri J. of Math. Sci., 18, 3, 221-233.

Kaya, R., Gelişgen, Ö., Ekmekçi, S. ve Bayar, A., 2006, Isometries of the Plane with Generalized Absolute Value Metric, ESOGÜ, Manuscript.

Kaya, R., 2002, Analitik Geometri, Bilim ve Teknik Yayınevi, 439p.

Krause, E.F., 1975, Taxicab Geometry, Addison - Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 88p.

Özcan, M., Ekmekçi, S. ve Bayar, A., 2002, The Taxicab Lengths Under Rotations, The Pi Mu Epsilon Journal, 11, 7, 381-384.

Çolakoğlu, H.B., 2005 , Bazı Trigonometrik Problemlerin Taksi Geometrideki Benzerleri, Yüksek Lisans Tezi , Eskişehir Osmangazi Üniversitesi.

Öztürk, İ., 2008 , Bazı Bazı Öklidyen olmayan Düzlemlerde Trigonometrik Fonksiyonların İncelenmesi, Yüksek Lisans Tezi , Eskişehir Osmangazi Üniversitesi.

Wallen, L., 1995 , Kepler, the Taxicab Metric and Beyond: An isoperimetric Primer, The College Mathemtics Journal, Vol.26, No:3.