Zamana Göre İkinci Mertebeden Bazı Kısmi Diferansiyel Denklemler İçin Yüksek Doğruluklu Sayısal Yöntemler

Emre Kırlı

DOKTORA TEZİ

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Eylül 2022

High Order Accurate Numerical Methods for Some Second Order in Time Partial Differential Equations

Emre Kırlı

DOCTORAL DISSERTATION

Department of Mathematics-Computer

September 2022

Zamana Göre İkinci Mertebeden Bazı Kısmi Diferansiyel Denklemler İçin Yüksek Doğruluklu Sayısal Yöntemler

Emre Kırlı

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Bilim Dalında

DOKTORA TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Dursun Irk

Bu tez Eskişehir Osmangazi Üniversitesi tarafında “2018-19041” no’lu BAP projesi çerçevesinde desteklenmiştir.

Eylül 2022

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Dursun Irk danışmanlığında hazırlamış olduğum "Zamana Göre İkinci Mertebeden Bazı Kısmi Diferansiyel Denklemler İçin Yüksek Doğruluklu Sayısal Yöntemler" başlıklı DOKTORA tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 28/09/2022

Emre Kırlı

İmza

ÖZET

Bu Doktora tezi on bölümden oluşmaktadır. Bu tez kapsamında Telegraph, Klein-Gordon (KG) ve Good Boussinesq (GB) denklemlerinin yüksek doğruluklu sayısal çözümlerini elde etmek amaçlanmaktadır. Bu amaç ile, denklemlerin zaman parçalanması için iki farklı yöntem önerilmiştir. Bunlardan birincisi Crank-Nicolson yöntemi ve ikincisi de dördüncü mertebeden tek adımlı yöntemdir. Denklemlerin konum parçalanması için ise farklı dereceden B-spline fonksiyonlarına dayanan Galerkin ve kolokasyon yöntemleri kullanılmıştır.

Birinci bölümde tezle ilgili genel bilgiler verilmiş, tezin amacı ve kapsamı açıklanmıştır. İkinci bölümde, Telegraph, KG ve GB denklemleri ile ilgili literatürde daha önceden var olan bazı çalışmalar incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, ilk olarak önerilen zaman parçalanması türetilmiştir. Daha sonra, B-spline fonksiyonları, Galerkin ve kolokasyon sonlu elemanlar metotları hakkında kısa bilgiler ve temel tanımlar verilmiştir. Son olarak Telegraph, KG ve GB denklemleri test problemleri ile birlikte tanıtılmış ve denklemlerin zaman parçalanmaları elde edilmiştir.

Dördüncü ve beşinci bölümde sırasıyla Telegraph ve KG denklemleri zaman parçalanması için iki farklı yöntem ve konum parçalanması için kübik, kuartik ve kuintik B-spline kolokasyon yöntemleri kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür.

Altıncı, yedinci ve sekizinci bölümde sırasıyla Telegraph, KG ve GB denklemleri zaman parçalanması için iki farklı yöntem ve konum parçalanması için kübik, kuartik ve kuintik B-spline Galerkin yöntemleri kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür.

Son iki bölümde ise elde edilen bulgular tartışılmış ve öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler : Telegraph denklemi, Klein-Gordon denklemi, Good Boussinesq denklemi, B-Spline fonksiyonlar, Galerkin metodu, Kolokasyon metodu

SUMMARY

This PhD thesis is composed of ten chapters. This thesis is concerned with obtaining high-order numerical solutions of the Telegraph, Klein-Gordon (KG) and Good Boussinesq (GB) equations. For this purpose, two different methods are proposed for temporal domain discretization of the equations. The first one of those is Crank-Nicolson scheme and the second one is fourth-order one step method. The Galerkin and Collocation methods based on different degree B-Spline functions are employed for the spatial domain discretization of the equations.

In the first chapter, general information about the thesis is given, the purpose and scope of the thesis are also explained. In the second section, some previous studies existing in literature about Telegraph, KG and GB equations are examined.

In the third chapter, firstly, the suggested time discretization is derived. Then, brief information and basic definitions about B-spline functions, Galerkin and Collocation finite element methods are given. Lastly, Telegraph, KG and GB equations are introduced together with their test problems.

In the fourth and fifth chapters, the Telegraph and KG equations are solved numerically by employing two different methods for time discretization and the cubic, quartic, quintic B-spline collocation methods for space integration, respectively.

In the sixth, seventh and eighth chapters, the Telegraph, KG and GB equations are solved numerically by using two different methods for time integration and the cubic, quartic, quintic B-spline Galerkin methods for space discretization, respectively.

In the last two chapters, the obtained results are discussed by comparing among the proposed methods and some suggestions are given for future studies.

Keywords : Telegraph equation, Klein-Gordon equation, Good Boussinesq equation, B-Spline functions, Galerkin method, Collocation method

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET vi
SUMMARY vii
TEŞEKKÜR viii
İÇİNDEKİLER ix
ŞEKİLLER DİZİNİ xii
ÇİZELGELER DİZİNİ xiii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ xiv
1. GİRİŞ VE AMAÇ 1
2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI 3
3. TEMEL KAVRAMLAR 8
3.1. Konum-Zaman Aralıkları 8
3.2. Zaman Parçalanması 9
3.3. B-spline Fonksiyonlar 10
3.3.1. Kübik B-spline 11
3.3.2. Kuartik B-spline 12
3.3.3. Kuintik B-spline 14
3.4. Sonlu Elemanlar Yöntemi 15
3.4.1. Ağırlıklı rezidüler yöntemi 16
3.4.1.1. Galerkin yöntemi 17
3.4.1.2. Kolokasyon yöntemi 18
3.5. Telegraph Denklemi 18
3.5.1. Telegraph denkleminin zaman parçalanması 19
3.5.2. Test problemleri 21
3.5.2.1. Birinci test problemi 21
3.5.2.2. İkinci test problemi 22
3.6. Klein-Gordon Denklemi 23
3.6.1. Klein-Gordon denkleminin zaman parçalanması 23
3.6.2. Test problemleri 25
3.6.2.1. Birinci test problemi 25
3.6.2.2. İkinci test problemi 26

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

3.7. Good Boussinesq Denklemi 27
3.7.1. Good Boussinesq denkleminin zaman parçalanması 28
3.7.2. Test problemleri 29
3.7.2.1. Soliton dalgasının hareketi 30
3.7.2.2. İki soliton dalgasının çarpışması 31
4. TELEGRAPH DENKLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ İÇİN B-SPLİNE KOLOKASYON YÖNTEMİ 32
4.1. Kübik B-Spline Kolokasyon Yöntemi. 32
4.2. Kuartik B-Spline Kolokasyon Yöntemi 35
4.3. Kuintik B-spline Kolokasyon Yöntemi 38
4.4. Test Problemleri 41
4.4.1 Birinci test problemi 41
4.4.2 İkinci Test Problemi 44
5. KLEİN-GORDON DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ İÇİN B-SPLİNE KOLOKASYON YÖNTEMİ 47
5.1. Kübik B-Spline Kolokasyon Yöntemi 47
5.2. Kuartik B-Spline Kolokasyon Yöntemi 49
5.3. Kuintik B-spline Kolokasyon Yöntemi 52
5.4. Test Problemleri 54
5.4.1 Birinci test problemi 55
5.4.2 İkinci test problemi 57
6. TELEGRAPH DENKLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ İÇİN B-SPLİNE GALERKİN YÖNTEMİ 60
6.1. Kübik B-Spline Galerkin Yöntemi 61
6.2. Kuartik B-Spline Galerkin Yöntemi 65
6.3. Kuintik B-Spline Galerkin Yöntemi 69
6.4. Test Problemleri 73
6.4.1. Birinci test problemi 73
6.4.2. İkinci test problemi 75

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

7. KLEİN-GORDON DENKLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ İÇİN B-SPLİNE GALERKİN YÖNTEMİ 78
7.1. Kübik B-Spline Galerkin Yöntemi 79
7.2. Kuartik B-Spline Galerkin Yöntemi 83
7.3. Kuintik B-Spline Galerkin Yöntemi 87
7.4. Test Problemleri 90
7.4.1. Birinci test problemi 90
7.4.2. İkinci test problemi 93
8. GOOD BOUSSİNESQ DENKLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ İÇİN B-SPLİNE GALERKİN YÖNTEMİ 96
8.1. Kübik B-Spline Galerkin Yöntemi 97
8.2. Kuartik B-Spline Galerkin Yöntemi 104
8.3. Kuintik B-Spline Galerkin Yöntemi 110
8.4. Test Problemleri 115
8.4.1. Soliton dalgasının hareketi 115
8.4.2. İki soliton dalgasının çarpışması 117
11. BULGULAR VE TARTIŞMA 120
12. SONUÇ VE ÖNERİLER 125
KAYNAKLAR DİZİNİ 127

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil **Sayfa**

3.1. *t=0* ve *t=1* zamanlarında analitik çözüm 22
3.2. *t*=0 ve *t=1* zamanlarında analitik çözüm.....22
3.3. *t=0* ve *t=1* zamanlarında analitik çözüm 26
3.4. *t=0* ve *t=1* zamanlarında analitik çözüm 27
3.5. *t=0*, *t=10*, *t=20* ve *t=30* zamanlarındaki soliton dalgaları 30
4.1. *t=1* anındaki mutlak hata.....43
4.2. *t=1* anındaki mutlak hata..... 45
5.1. *t=1* anındaki mutlak hata.....56
5.2. *t=1* anındaki mutlak hata.....59
6.1. *t=1* anındaki mutlak hata.....75
6.2. *t=1* anındaki mutlak hata.....77
7.1. *t=1* anındaki mutlak hata.....92
7.2. *t=1* anındaki mutlak hata.....95
8.1. *t=10* anındaki mutlak hata.....117
8.2. Kuartik2 için soliton dalgalarının çarpışması.....118

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge **Sayfa**

4.1. *h=0.01* ve farklı zaman adımları için hata normları ve yakınsaklık oranları 42
4.2. *h=0.005* ve farklı zaman adımları için hata normları ve yakınsaklık oranları 44
5.1. *h=0.01* ve farklı zaman adımları için hata normları ve yakınsaklık oranları 55
5.2. *h=0.0005* ve farklı zaman adımları için hata normları ve yakınsaklık oranları 58
6.1. *h=0.01* ve farklı zaman adımları için hata normları ve yakınsaklık oranları 74
6.2. *h=0.005* ve farklı zaman adımları için hata normları ve yakınsaklık oranları 76
7.1. *h=0.01* ve farklı zaman adımları için hata normları ve yakınsaklık oranları 91
7.2. *h=0.0005* ve farklı zaman adımları için hata normları ve yakınsaklık oranları 94
8.1. *h=0.1* ve farklı zaman artımları için hata normları ve yakınsaklık oranları..... 116
8.2. *h=0.1* ve $\Delta t=0.01$ için korunum sabitleri 119
9.1. *h=0.01* ve *k=1/32* için *t=1* anındaki hata normları..... 121
9.2. *h=0.005* ve *k=1/32* için *t=1* anındaki hata normları 121
9.3. *h=0.01* ve *k=1/32* için *t=1* anındaki hata normları 122
9.4. *h=0.0005 ve k=1/16* için *t=1* anındaki hata normları 123

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
h	Konum adım uzunluğu
Δt	Zaman adım uzunluğu
u_m^n	$x = x_m$ ve $t = t_n$ noktasındaki tam çözüm
U_m^n	$x = x_m$ ve $t = t_n$ noktasındaki yaklaşık çözüm
I	Korunum sabiti
L_∞	Maksimum hata normu
Kısaltmalar	**Açıklama**
B-spline	Basis Spline
KG	Klein-Gordon
GB	Good Boussinesq
Y.O	Yakınsama Oranı

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Doğada karşılaşılan olay ve olguların hemen hemen tamamına yakını fizik kanunları yardımıyla matematiksel olarak modellenebilmektedir. Matematiksel olarak modellenen çoğu problem ise adi ve kısmi diferansiyel denklemler ve bunların denklem sistemleri şeklinde ifade edilirler. Bu tip denklemlerin veya denklem sistemlerinin karmaşıklığı arttıkça tam çözüm bulmak zorlaşmakta, hatta bazı durumlarda mümkün bile olmamaktadır. Bu tarz durumlarda tam çözümü veren analitik yöntemlerin yerine yaklaşık çözümü veren sayısal yöntemler ön plana çıkmaktadır. Son yıllarda hızla gelişen teknoloji ile yüksek hızla ve kapasitede işlem yapan bilgisayarların yaygınlaşmasıyla birçok nümerik yöntem geliştirilmiştir. Bu geliştirilen sayısal yöntemler arasında sıklıkla kullanılan yöntemlerden biri de sonlu elemanlar yöntemidir. Sonlu elemanlar metotlarından biri olan ağırlıklı rezidüler yönteminde integral formları elde edilmektedir. Bu formlardan bazıları Galerkin, Petrov Galerkin, kolokasyon ve en küçük kareler yöntemleridir. Bu çalışma kapsamında, sonlu elemanlar yöntemlerinden Galerkin ve kolokasyon yöntemleri kullanılacaktır. Galerkin yöntemi işlem maliyeti açısından yüksek ve uygulaması zor olmasına karşın genelde daha iyi sonuçlar vermektedir.

Bu çalışmada zamana göre ikinci mertebeden kısmi türev içeren Telegraph, Klein-Gordon (KG) ve Good Boussinesq (GB) gibi lineer ve lineer olmayan bazı kısmi türevli diferansiyel denklemlerin yüksek doğruluğa sahip sayısal çözümlerinin bulunması amaçlanmaktadır. Zaman ve konum parçalanması yapılmadan önce ele alınan denklemler yardımcı fonksiyon yardımıyla zamana göre birinci mertebeden lineer ve lineer olamayan denklem sistemine indirgenecektir. Burada indirgeme tekniğinin kullanılmasının sağladığı avantajlar vardır. Bunlar indirgeme tekniğinin uygulanmasının basit oluşu, indirgenmiş denklemin ele alınan problemin tam çözümünün yapısal özelliklerini koruması ve önerilen zaman parçalanmasının uygulanmasındaki sağladığı kolaylık olarak sayılabilir.

Sayısal çözüm araştırılırken iki farklı zaman parçalanması önerilecektir. Bu önerilen yöntemlerden birincisi literatürde Telegraph, KG ve GB denklemlerinin

zaman parçalanmalarında sıklıkla kullanılan ikinci mertebeden doğruluğa sahip tek adımlı Crank-Nicolson yöntemidir. İkinci önerilen yöntem ise literatürde bu zamana kadar ele alınan denklemlerin zaman parçalanmalarında kullanılmayan dördüncü mertebeden doğruluğa sahip tek adımlı yöntemdir. Bu çalışmanın en temel hedeflerinden biri Telegraph, KG ve GB denklemlerinin sayısal çözümlerini elde ederken zaman parçalanmalarında dördüncü mertebeden tek adımlı yöntem kullanıldığında elde edilen sonuçların Crank-Nicolson yöntemi kullanılmasıyla elde edilen sonuçlardan daha iyi olduğunu göstermektir.

Yaklaşık çözümleri araştırılan denklemlerin zaman parçalanmaları elde edildikten sonra Telegraph ve KG denklemlerinin konum parçalanmalarında kübik, kuartik ve kuintik B-spline Galerkin ve kolokasyon yöntemleri, GB denklemi için konum parçalanması yapılırken kübik, kuartik ve kuintik B-spline Galerkin yöntemleri kullanılacaktır. Çalışmamızın bir diğer hedefi ise konum parçalanması için farklı dereceden B-spline Galerkin ve kolokasyon yöntemleri kullanıldığında elde edilen sonuçların nasıl değiştiğini incelemektir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Bu bölümde, konum parçalanması için B-spline kolokasyon ve Galerkin metotları, zaman parçalanması için ise doğruluğu 2 ve 4 olan tek adımlı yöntemler kullanılarak sayısal çözümleri araştırılacak olan lineer Telegraph, lineer olmayan Klein-Gordon (KG) ve Good Boussinesq (GB) denklemleri ile ilgili bu zamana kadar literatürde var olan bazı çalışmalar hakkında bilgilendirme yapılacaktır.

Telegraph denklemi elektrik sinyallerinin yayılımı, iletimi ve yapıların titreşimi gibi birçok fiziksel olayın modellenmesi çalışmalarında karşımıza çıkmaktadır.

Yoğun bir kullanım alanı olan Telegraph denkleminin sayısal çözümünü elde etmek için birçok farklı nümerik metot önerilmiştir. El-Azab ve El-Gamel (2007), Telegraph denkleminin sayısal çözümü için Rothe-wavelet yöntemini kullanmışlardır. Dehghand ve Shokri (2008), ince plaka spline üzerine yapılandırılmış metot yardımıyla Telegraph denkleminin yaklaşık çözümlerini elde etmişlerdir. Dehghan ve Lakestani (2009) çalışmalarında, temeli Chebyshev kardinal fonksiyonlarına dayanan bir yaklaşım ile Telegraph denklemini yaklaşık olarak çözmüşlerdir. Yousefi (2010), Telegraph denkleminin yaklaşık çözümünü elde etmek için Legendre multiwavelet Galerkin metodunu önermiştir. (Dosti ve Nazemi, 2011 a), Telegraph denkleminin sayısal çözümü için septik B-spline kolokasyon yöntemini önermişlerdir. (Dosti ve Nazemi, 2011 b) çalışmalarında, kübik B-spline yarı-interpolasyon yöntemi ile Telegraph denkleminin sayısal çözümlerini araştırmışlardır. Jiwari vd. (2012), Telegraph denklemine diferansiyel quadrature yöntemini uygulamışlardır. Dosti ve Nazemi (2012) çalışmalarında, Telegraph denkleminin yaklaşık çözümlerini kuartik B-spline kolokasyon yöntemi ile elde etmişlerdir. Mittal ve Bhatia (2013), Telegraph denklemini kübik B-spline kolokasyon yöntemini kullanarak nümerik olarak çözmüştür. Heydari vd. (2014), Chebyshev wavelets yöntemi ile Telegraph denkleminin sayısal çözümünü araştırmışlardır. Abbasbandy vd. (2014), radyal taban fonksiyonlarının kullanıldığı kolokasyon tabanlı meshfree yöntemi ile Telegraph denkleminin sayısal çözümlerini elde etmişlerdir. Rashidinia vd. (2014), Telegraph denkleminin sayısal çözümü için kübik B-spline kolokasyon

yöntemini kullanmışlardır. Yüzbaşı (2016), Bessel kolokasyon yöntemini kullanarak Telegraph denkleminin sayısal çözümlerini elde etmiştir. Rashidinia ve Jokar (2016), Telegraph denkleminin sayısal çözümü için temeli polinom ölçekleme fonksiyonlarına dayanan bir yaklaşım oluşturmuşlardır. Sharifi ve Rashidina (2016), Telegraph denkleminin konum parçalanması için genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlarına dayanan kolokasyon metodunu önermişlerdir. Denklemin zaman parçalanması için ise merkezi fark yaklaşımını kullanarak iki adımlı açık bir şema geliştirmişlerdir. Zhang vd. (2017) yaptıkları çalışmada, Euler yöntemi ile Telegraph denkleminin yaklaşık çözümlerini araştırmışlardır. Nazir vd. (2017), kübik trigonometrik B-spline yaklaşımı ile Telegraph denkleminin sayısal çözümlerini elde etmişlerdir. Singh vd. (2017), konum parçalanması için üstel B-spline kolokasyon yöntemini ve zaman parçalanması için ikinci dereceden Runge Kutta yöntemini önermişlerdir. Irk ve Kırlı (2020), konum parçalanmasında kuadratik B-spline Galerkin yöntemi, zaman parçalanmasında ise Crank-Nicolson ve dördüncü mertebeden doğruluğa sahip tek adımlı yöntemleri kullanarak Telegraph denkleminin sayısal çözümlerini elde etmişlerdir. Singh vd. (2022), dördüncü mertebeden doğruluğa sahip kübik B-spline yaklaşımı ile Telegraph denkleminin sayısal çözümlerini elde etmişlerdir. Kırlı vd. (2022) yaptıkları çalışmada, konum parçalanması için kübik B-spline kolokasyon yöntemi ve zaman parçalanması için dördüncü mertebeden doğruluğa sahip tek adımlı yöntemi uygulayarak Telegraph denkleminin yüksek doğruluğa sahip sayısal çözümlerini elde etmişlerdir. Bu çalışma tezin 4. bölümünden üretilmiştir.

KG denklemi katı hal fiziği, doğrusal olmayan optik, kuantum mekaniği ve kuantum teori gibi alanların matematiksel modellenmesinde kullanılan en önemli denklemlerden biridir.

Telegraph denkleminde olduğu gibi KG denkleminin yaklaşık çözümünü elde etmek için birçok farklı sayısal yöntem geliştirilmiştir. Li ve Guo (1997), KG denkleminin yaklaşık çözümü için legendre pseudospectal yöntemini önermişlerdir. Duncan (1997) çalışmasında, sonlu farklar yöntemi ile KG denkleminin sayısal çözümlerini elde etmiştir. Kaya ve El-sayed (2004), ayrıştırma tekniği ile KG denkleminin yaklaşık çözümlerini araştırmışlardır. Khalifa ve El-gamel (2005), Kuadratik interpolasyon fonksiyonlarını kullanarak sonlu elemanlar yöntemine

dayalı bir yaklaşım geliştirmişlerdir. Dehghan ve Shokri (2009), radyal taban fonksiyon yaklaşım yöntemini kullanarak KG denkleminin sayısal çözümlerini elde etmişlerdir. Rashidinia vd. (2010), konum parçalanması için kübik B-spline kolokasyon yöntemi ve zaman parçalanması için üçüncü dereceden yakınsak olan üç zaman seviyeli açık şema ile KG denkleminin sayısal çözümlerini araştırmışlardır. Behzadi (2011), Adomian'ın ayrıştırma tekniği ile değişken yinemeli yöntemi uygulayarak KG denklemini yaklaşık olarak çözmüşlerdir. Li vd. (2011) çalışmalarında, KG denkleminin sayısal çözümü için lattice Boltzmann metodunu önermişlerdir. Hesameddini ve Shekarpaz (2012), legendre wavelet yöntemi ile KG denkleminin yaklaşık çözümlerini elde etmişlerdir. Hussain vd. (2013), Radyal taban fonksiyonlarını kullanarak KG denkleminin yaklaşık çözümü için ağsız çizgiler yöntemini önermişlerdir. Bülbül ve Sezer (2013) çalışmalarında, taylor matris yöntemini kullanarak KG denkleminin sayısal çözümlerini elde etmişlerdir. Verma vd. (2014), diferansiyel quadrature yöntemi ile ileri fark yaklaşımını kullanarak KG denklemini sayısal olarak çözmüşlerdir. Sarboland ve Aminataei (2015), multiquadric yarı interpolasyon şeması ile KG denkleminin sayısal çözümleri üzerine araştırma yapmışlardır. Khalid vd. (2016) yaptıkları çalışmada, KG denkleminin sayısal çözümlerini perturbasyon dönüşüm yöntemi ile elde etmişlerdir. Shiralashetti vd. (2016), KG denkleminin sayısal çözümü için Haar wavelet metodunu kullanmışlardır. Yang (2018), KG denklemini yaklaşık olarak çözmek için yüksek dereceden süreksiz Galerkin yöntemini önermiştir. Ersoy vd. (2019) çalışmalarında, ilk olarak KG denklemini zaman göre birinci mertebeden denklem sistemine indirgediler. Ayrıştırılmış denklem sisteminin konum parçalanmalarında üstel B-spline kolokasyon yöntemini ve zaman parçalanmalarında ise Crank-Nicolson yöntemini kullanmışlardır. Selvitopi ve Yazıcı (2019), KG denkleminin konum parçalanmasında Galerkin sonlu elemanlar yöntemi ile zaman parçalanmasında merkezi fark yaklaşımını uygulayarak KG denkleminin sayısal çözümleri üzerine çalışmışlardır. Irk vd. (2022) yaptıları çalışmada, KG denkleminin sayısal çözümü için yüksek dereceden doğruluğa sahip bir sayısal metot geliştirdiler. Yöntemde, konum parçalanmasında kübik B-spline Galerkin yöntemi kullanılmıştır. Zaman parçalanması ise dördüncü mertebeden doğruluğa sahip tek adımlı yöntem

kullanılmıştır. Bu çalışma tezin 7. bölümünden üretilmiştir.

GB denklemi ise yer çekimi etkisi altında uzun su dalgalarının sığ sularda yayılımın tanımlamaktadır.

GB denkleminin sayısal çözümü için literatürde pek çok çalışma mevcuttur. Bunlardan bazıları; Manoranjan (1984), GB denkleminin sayısal çözümü için Pertrov-Galerkin yöntemini kullandı. Yöntemde, ağırlık fonksiyonu olarak kübik B-spline fonksiyonları ve eleman şekil fonksiyonu olarak lineer B-spline bazları kullanıldı. Çalışmada ikinci mertebeden terimler için Predictor-corrector şemasını geliştirdi. Ortega ve Sanz-Serna (1990), GB denkleminin sayısal çözümünü elde etmek için sonlu farklar yöntemini kullandılar. Pani ve Saranga (1997), GB denklemine Faedo-Galerkin metodunu uyguladılar. Bratsos (1998), çalışmasında iki farklı yöntem geliştirdi. Birinci yöntemde yedi noktalı ve üç zaman seviyeli açık şema, ikinci yöntemde ise on beş noktalı üç zaman seviyeli kapalı şema tasarladı. Wazwaz (2001), GB denkleminin sayısal çözümü için Adomian ayrıştırma tekniğini kullandı. Böylece, modifiye edilmiş bir şema ile periyodik ve soliton çözümlerini elde etti. Zoheiry (2003), GB denklemi için lineerleştirme yöntemine dayanan kapalı sonlu fark şeması geliştirdi. İsmail ve Bratsos (2003), GB denkleminde zamana ve konuma göre kısmi türevler için merkezi fark yaklaşımları tasarlayarak üç zaman seviyeli sonlu fark şeması geliştirdiler. Bu şema ile oluşan lineer olmayan sistemi çözmek için Predictor-corrector yöntemi kullanıldı. Bratsos vd. (2005), GB denklemi için sonlu fark şeması ile üç zaman seviyeli sonlu fark şeması oluşturdular. Daha sonra Bratsos (2007) çalışmasında, GB denklemi için predictor-corrector ve modifiye edilmiş predictor-corrector şemalarını oluşturdu. Ayrıca, Bratsos (2008) yaptığı çalışmada, GB denklemine üçüncü zaman seviyeli ve üçüncü mertebeden rasyonel yaklaşımları kullanarak sonlu fark yöntemi uyguladı. Alkhaled ve Nusier (2008), temeli sinüs fonksiyonlarına dayanan Galerkin interpolasyon yöntemi ve Adomian ayrıştırma yaklaşımını uygulayarak GB denkleminin sayısal çözümleri üzerine araştırma yapmışlardır. Dehghan ve Salehi (2012) çalışmalarında, ağsız analog denklem yöntemi ile sınır düğüm yöntemini birleştirerek GB denkleminin nümerik çözümlerini elde ettiler. Siddiqi ve Arshed (2014), GB denkleminin sayısal çözümlerini araştırırken, konum parçalanmasında kuintik B-spline kolokasyon

yöntemi ve zaman parçalanmasında ise Crank-Nicolson yöntemini kullanmışlardır. İsmail ve Mosally (2014), GB denkleminin nümerik çözümleri için dördüncü mertebeden sonlu fark yaklaşımı geliştirdiler. Uçar vd. (2021), GB denkleminin konum parçalanmasında Galerkin yöntemini önerdiler. Yöntemde, ağırlık fonksiyonu ve şekil fonksiyonu olarak kübik B-spline bazları kullanıldı. Zaman parçalanmasında ise dördüncü dereceden Runge-Kutta yöntemi kullanıldı. Kırlı ve Irk (2021) yaptıkları çalışmada, GB denkleminin sayısal çözümlerini kuartik B-spline Galerkin yöntemi ve dördüncü mertebeden doğruluğa sahip tek adımlı şemayı kullanarak elde etmişlerdir. Bu çalışma tezin 8. bölümünden üretilmiştir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, Telegraph, KG ve GB denklemlerinin sayısal çözümleri araştırılırken kullanılacak bazı temel kavramlara değinilecektir. İlk olarak denklemlerin zaman parçalanmalarında önerilen yüksek doğruluğa sahip tek adımlı yöntem türetilecektir. Daha sonra denklemlerin konum parçalanmalarında kullanılacak olan kübik, kuartik ve kuintik B-spline fonksiyonlarının tanımları ve genel özelliklerine değinilecektir. Sonrasında denklemlerin yaklaşık çözümleri araştırılırken kullanılacak olan Galerkin ve kolokasyon sonlu elemanlar yöntemleri açıklanacaktır. Son olarak sayısal çözümleri araştırılacak olan Telegraph, KG, GB denklemleri, başlangıç şartları, sınır şartları ve test problemleri ile birlikte tanıtılacaktır.

3.1. Konum-Zaman Aralıkları

Bu çalışmada sayısal çözümleri araştırılacak denklemlerin konum aralığı $[a,b]$, zaman aralığı ise $[0,T]$ olarak alınacaktır.

$[a,b]$ konum aralığı, $[0,T]$ zaman aralığı, h ve Δt ise sırasıyla konum parçalanmasındaki ve zaman parçalanmasındaki adım uzunlukları olmak üzere

$$\begin{aligned} t_n &= n\Delta t, (n=0,\ldots,M) \\ x_m &= a+mh, (m=0,1,\ldots,N) \end{aligned}$$

bölünme noktalarını bulunacaktır. Bu durumda zaman ve konum aralığının düzgün parçalanmaları

$$\begin{aligned} 0 &= t_0 < t_1 < \ldots < t_M = T \\ a &= x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b \end{aligned}$$

olacaktır. Konum ve zaman aralığında bulunan (x_m,t_n) noktasındaki tam çözüm $u(x_m,t_n)=u_m^n$ ile yaklaşık çözüm ise U_m^n ile gösterilecektir.

3.2. Zaman Parçalanması

Zamana göre birinci mertebeden genel oluşum denklemleri

$$u_t = f(x, t, u, u_x, u_{xx}, \ldots) \tag{3.1}$$

formunda yazılabilir. Bu bölümde öncelikle (3.1) ile ifade edilen genel oluşum denkleminin zaman parçalanmasının

$$u^{n+1} = u^n + \theta_1 u_t^{n+1} + \theta_2 u_t^n + \theta_3 u_{tt}^{n+1} + \theta_4 u_{tt}^n \tag{3.2}$$

olduğu kabul edilerek, zaman parçalanması için doğruluğu en yüksek yapacak şekilde θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 katsayıları belirlenecektir.

(3.2) ile verilen eşitlikte $(n+1)$. zaman adımındaki terimlerin n. zamana göre Taylor seri açılımları

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t u_t^n + \frac{\Delta t^2 u_{2t}^n}{2!} + \frac{\Delta t^3 u_{3t}^n}{3!} + \frac{\Delta t^4 u_{4t}^n}{4!} + \frac{\Delta t^5 u_{5t}^n}{5!} + \ldots \tag{3.3}$$

$$u_t^{n+1} = u_t^n + \Delta t u_{2t}^n + \frac{\Delta t^2 u_{3t}^n}{2!} + \frac{\Delta t^3 u_{4t}^n}{3!} + \frac{\Delta t^4 u_{5t}^n}{4!} + \frac{\Delta t^5 u_{6t}^n}{5!} + \ldots \tag{3.4}$$

$$u_{2t}^{n+1} = u_{2t}^n + \Delta t u_{3t}^n + \frac{\Delta t^2 u_{4t}^n}{2!} + \frac{\Delta t^3 u_{5t}^n}{3!} + \frac{\Delta t^4 u_{6t}^n}{4!} + \frac{\Delta t^5 u_{7t}^n}{5!} + \ldots \tag{3.5}$$

olarak bulunur. Taylor seri açılımlarında kolaylık açısından

$$u_{tt} = u_{2t}, u_{ttt} = u_{3t}, \ldots$$

kısaltmaları yapılmıştır. (3.3-3.5) seri açılımları, (3.2) ile önerilen zaman parçalanmasında yerine yazılır ve düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
&(\Delta t - \theta_1 - \theta_2)\, u_t^n + \left(\frac{\Delta t^2}{2!} - \theta_1 \Delta t - \theta_3 - \theta_4\right) u_{2t}^n + \\
&\left(\frac{\Delta t^3}{6} - \theta_3 \Delta t - \theta_1 \frac{\Delta t^2}{2}\right) u_{3t}^n + \left(\frac{\Delta t^4}{24} - \theta_3 \frac{\Delta t^2}{2} - \theta_1 \frac{\Delta t^3}{6}\right) u_{4t}^n + \\
&\left(\frac{\Delta t^5}{120} - \theta_3 \frac{\Delta t^3}{6} - \theta_1 \frac{\Delta t^4}{24}\right) u_{5t}^n + \left(\frac{\Delta t^6}{720} - \theta_3 \frac{\Delta t^4}{24} - \theta_1 \frac{\Delta t^5}{120}\right) u_{6t}^n + \\
&\left(\frac{\Delta t^7}{540} - \theta_3 \frac{\Delta t^5}{120} - \theta_1 \frac{\Delta t^6}{720}\right) u_{7t}^n + \ldots = 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

bulunur. (3.6) ile elde edilen sistemde

$$\theta_1 = \frac{\Delta t}{2}, \theta_2 = \frac{\Delta t}{2},\ \theta_3 = \theta_4 = 0$$

alındığında literatürde bir çok araştırmacı tarafından kullanılan Crank-Nicolson yöntemi elde edilecektir (Crank ve Nicolson, 1947). Katsayılar (3.6) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{\Delta t^3 u_{3t}^n}{12} + \frac{\Delta t^4 u_{4t}^n}{24} + \dots \tag{3.7}$$

elde edileceğinden Crank-Nicolson yönteminin zamana göre doğruluğu 2 olacaktır.

Crank-Nicolson yöntemine göre daha yüksek doğruluğa sahip bir yöntem elde etmek istenirse, (3.6) sisteminde θ_1, θ_2, θ_3 ve θ_4 bilinmeyenlerini bulmak için gerekli olan 4 denklem, ilk 4 katsayının sıfıra eşitlenmesi ile

$$\begin{aligned} -\theta_2 - \theta_1 + \Delta t &= 0, && (3.8)\\ \frac{\Delta t^2}{2!} - \theta_1 \Delta t - \theta_3 - \theta_4 &= 0, && (3.9)\\ \frac{\Delta t^3}{6} - \theta_3 \Delta t - \theta_1 \frac{\Delta t^2}{2} &= 0, && (3.10)\\ \frac{\Delta t^4}{24} - \theta_3 \frac{\Delta t^2}{2} - \theta_1 \frac{\Delta t^3}{6} &= 0 && (3.11) \end{aligned}$$

olarak bulunur. (3.8-3.11) ile elde edilen denklem sistemi çözülürse

$$\theta_1 = \frac{\Delta t}{2}, \theta_2 = \frac{\Delta t}{2}, \theta_3 = -\frac{\Delta t^2}{12}, \theta_4 = \frac{\Delta t^2}{12} \tag{3.12}$$

bilinmeyenleri bulunur ve bulunan değerler (3.6) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{\Delta t^5 u_{5t}^n}{120} + \frac{\Delta t^6 u_{6t}^n}{1440} + \dots \tag{3.13}$$

elde edileceğinden zaman parçalanması için doğruluk 4 olacaktır. Bu nedenle genel oluşum denklemi için önerilen zaman parçalanmasında

$$\theta_1 = \frac{\Delta t}{2}, \theta_2 = \frac{\Delta t}{2}, \theta_3 = -\frac{\Delta t^2}{12}, \theta_4 = \frac{\Delta t^2}{12}$$

seçimi yapılırsa Crank-Nicolson zaman parçalanmasının doğruluğuna göre daha yüksek bir doğruluk elde edilmiş olur.

3.3. B-spline Fonksiyonlar

B-spline fonksiyonlar parçalı sürekli fonksiyonlar olup belirli bir derece ve düzgünlükteki her spline fonksiyon, aynı derece ve düzgünlükteki B-spline fonksiyonlarının lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilir (De Boor, 1978).

Dolayısıyla B-spline fonksiyonlar aynı dereceye sahip spline fonksiyonlar için bir tabandır. Bu nedenle bu fonksiyonlara B-spline (basis spline) denir. Φ_i^0 ile gösterilen sıfırıncı dereceden B-spline fonksiyonları

$$\Phi_i^0(x) = \begin{cases} 1 & , \ x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0 & , \text{ diğer durumlar} \end{cases} \tag{3.14}$$

şeklinde tanımlanır. $k \geq 1$ ve $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ olmak üzere sıfırıncı dereceden Φ_i^0 B-spline fonksiyonlar kullanılarak daha yüksek dereceden B-spline fonksiyonlar

$$\Phi_i^k(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i}\Phi_i^{k-1}(x) + \frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}}\Phi_{i+1}^{k-1}(x) \tag{3.15}$$

indirgeme bağıntısı ile türetilebilir.

3.3.1. Kübik B-spline

$[a, b]$ konum aralığı N eşit sonlu elemana

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$$

olacak şekilde bölünsün. Bu düzgün parçalanma üzerinde $m = -1, 0, \ldots, N+1$ için kübik B-spline fonksiyonları

$$g_j^n = (x - x_j)^n, \ j = m-2, \ldots, m+2, \ n = 1, 2, 3$$

olmak üzere

$$\Phi_m(x) = \frac{1}{h^3}\begin{cases} g_{m-2}^3 & , x_{m-2} \leq x < x_{m-1} \\ h^3 + 3h^2 g_{m-1} + 3h g_{m-1}^2 & \\ -3g_{m-1}^3 & , x_{m-1} \leq x < x_m \\ h^3 - 3h^2 g_{m+1} + 3h g_{m+1}^2 & \\ +3g_{m+1}^3 & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ -g_{m+2}^3 & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ 0 & , \text{ diğer durumlar} \end{cases} \tag{3.16}$$

şeklinde tanımlanır. Kübik B-spline fonksiyonları ve onların birinci ve ikinci mertebeden türevleri $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığının dışında sıfırdır. $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığında,

her bir $\Phi_m(x)$ kübik B-spline fonksiyonu ardışık dört elemanı örtmektedir. Bu nedenle her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı,

$$\Phi_{m-1}(x), \Phi_m(x), \Phi_{m+1}(x), \Phi_{m+2}(x)$$

olarak verilen dört kübik B-spline şekil fonksiyonları tarafından örtülecektir. $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı

$$\xi = x - x_m$$

koordinat dönüşümü yapılarak $[0, h]$ aralığına dönüştürülürse $\xi-$ye bağlı kübik B-spline şekil fonksiyonları

$$\Phi_{m-1}(\xi) = \left(1 - \frac{\xi}{h}\right)^3, \tag{3.17}$$

$$\Phi_m(\xi) = 4 - 6\frac{\xi^2}{h^2} + 3\frac{\xi^3}{h^3}, \tag{3.18}$$

$$\Phi_{m+1}(\xi) = 1 + 3\frac{\xi}{h} + 3\frac{\xi^2}{h^2} - 3\frac{\xi^3}{h^3}, \tag{3.19}$$

$$\Phi_{m+2}(\xi) = \frac{\xi^3}{h^3} \tag{3.20}$$

olarak elde edilebilir. Yukarıda elde edilen Φ_j şekil fonksiyonların lineer birleşimiyle δ_j zaman parametresine göre $[0, h]$ aralığı için bilinmeyen fonksiyona yaklaşım

$$U(\xi, t) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \delta_j(t)\phi_j(\xi) \tag{3.21}$$

olarak elde edilir.

3.3.2. Kuartik B-spline

$[a, b]$ konum aralığı N eşit sonlu elemana

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$$

olacak şekilde bölünsün. Bu düzgün parçalanma üzerinde $m = -2, -1, \ldots, N + 1$ için kuartik B-spline fonksiyonları

$$g_j^4 = (x - x_j)^4, \ j = m - 2, \ldots, m + 3$$

olmak üzere

$$\Phi_m(x) = \frac{1}{h^4}\begin{cases} g_{m-2}^4 & , x_{m-2} \le x < x_{m-1} \\ g_{m-2}^4 - 5g_{m-1}^4 & , x_{m-1} \le x < x_m \\ g_{m-2}^4 - 5g_{m-1}^4 + 10g_m^4 & , x_m \le x < x_{m+1} \\ g_{m+3}^4 - 5g_{m+2}^4 & , x_{m+1} \le x < x_{m+2} \\ g_{m+3}^4 & , x_{m+2} \le x < x_{m+3} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{3.22}$$

şeklinde tanımlanır. Kuartik B-spline fonksiyonları ile birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden türevleri $[x_{m-2}, x_{m+3}]$ aralığı dışında sıfırdır. $[x_{m-2}, x_{m+3}]$ aralığında, her bir $\Phi_m(x)$ kuartik B-spline fonksiyonu ardışık beş elemanı örtmektedir. Bu nedenle her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı,

$$\Phi_{m-2}(x), \Phi_{m-1}(x), \Phi_m(x), \Phi_{m+1}(x), \Phi_{m+2}(x)$$

olarak tanımlanan beş kuartik B-spline şekil fonksiyonları tarafından örtülecektir. $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı

$$\xi = x - x_m$$

koordinat dönüşümü yapılarak $[0, h]$ aralığına dönüştürülürse $\xi-$ye bağlı kuartik B-spline şekil fonksiyonları

$$\Phi_{m-2}(\xi) = \left(1 - \frac{\xi}{h}\right)^4, \tag{3.23}$$

$$\Phi_{m-1}(\xi) = \frac{(2h-\xi)^4 - 5(h-\xi)^4}{h^4}, \tag{3.24}$$

$$\Phi_m(\xi) = \frac{(\xi+2h)^4 - 5(h+\xi)^4 + 10\xi^4}{h^4}, \tag{3.25}$$

$$\Phi_{m+1}(\xi) = \frac{(h+\xi)^4 - 5\xi^4}{h^4}, \tag{3.26}$$

$$\Phi_{m+2}(\xi) = \frac{\xi^4}{h^4} \tag{3.27}$$

olacak şekilde bulunabilir. Yukarıda elde edilen Φ_j şekil fonksiyonların lineer birleşimiyle δ_j zaman parametresine göre $[0, h]$ aralığı için bilinmeyen fonksiyona yaklaşım

$$U(\xi, t) = \sum_{j=m-2}^{m+2} \delta_j(t)\phi_j(\xi) \tag{3.28}$$

olarak elde edilir.

3.3.3. Kuintik B-spline

$[a,b]$ konum aralığı N eşit sonlu elemana

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$$

olacak şekilde bölünsün. Bu düzgün parçalanma üzerinde $m = -2,-1,\ldots,N+1,N+2$ için kuintik B-spline fonksiyonları

$$g_j^5 = (x - x_j)^5\,,\ j = m-3,\ldots,m+2$$

olmak üzere

$$\Phi_m(x) = \frac{1}{h^5}\begin{cases} g_{m-3}^5 & ,x_{m-3} \le x < x_{m-2} \\ g_{m-3}^5 - 6g_{m-2}^5 & ,x_{m-2} \le x < x_{m-1} \\ g_{m-3}^5 - 6g_{m-2}^5 + 15g_{m-1}^5 & ,x_{m-1} \le x < x_m \\ g_{m-3}^5 - 6g_{m-2}^5 + 15g_{m-1}^5 - 20g_m^5 & ,x_m \le x < x_{m+1} \\ g_{m-3}^5 - 6g_{m-2}^5 + 15g_{m-1}^5 & \\ \quad -20g_m^5 + 15g_{m+1}^5 & ,x_{m+1} \le x < x_{m+2} \\ g_{m-3}^5 - 6g_{m-2}^5 + 15g_{m-1}^5 & \\ \quad -20g_m^5 + 15g_{m+1}^5 - 6g_{m+2}^5 & ,x_{m+2} \le x < x_{m+3} \\ 0 & ,\text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{3.29}$$

şeklinde tanımlanır. Kuintik B-spline fonksiyonları ile birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü mertebeden türevleri $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığı dışında sıfırdır. $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığında, her bir $\Phi_m(x)$ kuintik B-spline fonksiyonu ardışık altı elemanı örtmektedir. Bu nedenle her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı,

$$\Phi_{m-2}(x), \Phi_{m-1}(x), \Phi_m(x), \Phi_{m+1}(x), \Phi_{m+2}(x), \Phi_{m+3}(x)$$

olarak tanımlanan altı kuartik B-spline şekil fonksiyonları tarafından örtülmektedir. $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı

$$\xi = x - x_m$$

koordinat dönüşümü yapılarak $[0,h]$ aralığına dönüştürülürse $\xi-$ye bağlı kuintik B-spline şekil fonksiyonları

$$\Phi_{m-2}(\xi) = \left(1-\frac{\xi}{h}\right)^5, \tag{3.30}$$

$$\Phi_{m-1}(\xi) = 26-50\frac{\xi}{h}+20\left(\frac{\xi}{h}\right)^2+20\left(\frac{\xi}{h}\right)^3-20\left(\frac{\xi}{h}\right)^4+5\left(\frac{\xi}{h}\right)^5, \tag{3.31}$$

$$\Phi_{m}(\xi) = 66-60\left(\frac{\xi}{h}\right)^2+30\left(\frac{\xi}{h}\right)^4-10\left(\frac{\xi}{h}\right)^5, \tag{3.32}$$

$$\Phi_{m+1}(\xi) = 26+50\frac{\xi}{h}+20\left(\frac{\xi}{h}\right)^2-20\left(\frac{\xi}{h}\right)^3-20\left(\frac{\xi}{h}\right)^4+10\left(\frac{\xi}{h}\right)^5, \tag{3.33}$$

$$\Phi_{m+2}(\xi) = 1+5\frac{\xi}{h}+10\left(\frac{\xi}{h}\right)^2+10\left(\frac{\xi}{h}\right)^3+5\left(\frac{\xi}{h}\right)^4-5\left(\frac{\xi}{h}\right)^5, \tag{3.34}$$

$$\Phi_{m+3}(\xi) = \left(\frac{\xi}{h}\right)^5 \tag{3.35}$$

olacak şekilde bulunabilir. Yukarıda elde edilen Φ_j şekil fonksiyonların lineer birleşimiyle δ_j zaman parametresine göre $[0,h]$ aralığı için bilinmeyen fonksiyona yaklaşım

$$U(\xi,t)=\sum_{j=m-2}^{m+3}\delta_j(t)\phi_j(\xi) \tag{3.36}$$

olarak elde edilir.

3.4. Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sonlu elemanlar yöntemi, mühendislik ve matematiksel modelleme problemlerinde sıklıkla kullanılan bir sayısal metottur. Bu yöntem ilk kez 1940'lı yıllarda öne sürülmüş ve 1950'li yıllarda uçak tasarım modelleme problemlerinin çözümlerinde kullanılmaya başlanmıştır. Günümüzde ise özellikle, ısı aktarımı, akışkanlar mekaniği, kütle aktarımı ve elektrik potansiyeli gibi problemlerin modellenmesiyle elde edilen iki veya üç boyutlu kısmi diferansiyel denklemlerin sınır ve başlangıç değer problemlerinin çözümünde yoğun olarak kullanılmaktadır.

Sonlu elemanlar yönteminde ana fikir, elde edilen karmaşık bir problemi basite indirgeyerek bir çözüm bulmaktır. Bu yöntemde, problemin çalışıldığı bölge her birine bir eleman adı verilen birçok alt aralığa ayrıklaştırılır. "Düğüm" adı verilen her bir alt aralıktaki noktaların birleştirilmesiyle denklem takımları oluşturulur. Denklem takımları oluşturulurken dikkat edilmesi gereken önemli hususlar vardır.

İlk olarak, elemanlar uygun bir şekilde seçilmeli ve problemin yapısına uygun olacak şekilde yerleştirilmelidir. Çözümün ani değiştiği yerlerde elemanlar daha küçük seçilerek daha hassas bir yaklaşım elde edilebilir. Sonlu elemanlara ayırma işleminden sonra interpolasyon fonksiyonu belirlenir. Sonlu elemanlar yönteminde bulunmak istenen çözüm fonksiyonu, her bir sonlu eleman üzerinde kendisi ve belirli bir mertebeye kadar türevleri sürekli olan interpolasyon polinomları ve bilinmeyenlerin birleşiminden oluşur.

3.4.1. Ağırlıklı rezidüler yöntemi

Ağırlıklı rezidüler yöntemi, sonlu elemanlar metodunun en temel yöntemlerinden biridir. $[a, b]$ konum aralığı üzerinde L bir diferansiyel operatör ve $g(x)$ ise bilinen bir fonksiyona karşılık gelmek üzere

$$Ly(x) = g(x) \tag{3.37}$$

adi diferansiyel denklemi verilsin. Burada $y\,(x)$ aranan çözüm fonksiyonudur. (3.37) diferansiyel denkleminin sayısal çözümü için ağırlıklı rezidüler yöntemi kullanıldığında, aranan $y(x)$ çözüm fonksiyonu yerine

$$y(x) \approx Y(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j f_j(x) \tag{3.38}$$

formunda bir $Y(x)$ yaklaşım serisi kullanılır. Burada $f_j(x)$, $[a, b]$ konum aralığı üzerinde tanımlı bir fonksiyon ve c_j ler ise bilinmeyen katsayılardır. $f_j(x)$ fonksiyonları problem için verilen tüm sınır şartlarını sağlayacak şekilde seçilirler fakat çoğunlukla diferansiyel denklemi sağlamazlar. (3.38) ile verilen yaklaşım (3.37) diferansiyel denkleminde yerine yazılırsa

$$L\sum_{j=1}^{N} c_j f_j(x) - g(x) = R(x) \tag{3.39}$$

olarak tanımlanan ve $R(x)$ ile ifade edilen bir **rezidü fonksiyonu** elde edilir. Bu yöntemde, W_i ağırlık fonksiyonu ile $R(x)$ rezidü ifadesinin çarpımlarının, $[a, b]$ tanım aralığı üzerinde integralinin sıfır olması istenir. Dolayısıyla,

$$\int_{[a,b]} W_i(x)R(x)dx = 0,\ \ i = 1, \ldots, N \tag{3.40}$$

elde edilir. (3.40) eşitliğinde N denklem ve

$$c_1, c_2, \ldots, c_N$$

olmak üzere N bilinmeyenden oluşan bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminde, $c_j,\ j = 1, 2, \ldots, N$ bilinmeyenleri bulunarak (3.38) yaklaşım serisinde yerine yazılırsa $Y(x)$ yaklaşık çözümüne ulaşılmış olur. Ağırlıklı rezidüler yönteminde, ağırlık fonksiyonu seçimine göre farklı yöntemler elde edilmektedir. Bunlardan bazıları Galerkin, Petrov Galerkin, kolokasyon ve en küçük kareler yöntemleridir. Bu çalışma kapsamında ise Galerkin ve kolokasyon yöntemleri kullanılacaktır.

3.4.1.1. Galerkin yöntemi

Galerkin yöntemi, ağırlıklı rezidüler yönteminin bir uygulaması olup diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için kullanılan bir metottur. Galerkin yöntemi işlem maliyeti açısından maliyetli bir yöntem olmasına rağmen, diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde diğer sonlu elemanlar yöntemlerine göre genelde daha iyi sonuç vermektedir. Galerkin yönteminde W_i ağırlık fonksiyonu olarak f_i taban fonksiyonları seçilir. Bu durumda (3.40) denklemi

$$\int_a^b f_i \left(\sum_{j=1}^{N} L\left(c_j f_j\left(x\right)\right) - g\left(x\right) \right) dx = 0, \quad i = 1, \ldots, N \tag{3.41}$$

olarak bulunur.

$$\begin{aligned} R_j &= L\left(c_j f_j\left(x\right)\right) - g\left(x\right) \\ a_{ij} &= \int_a^b f_i L f_j\left(x\right) dx, i = 1, 2, \ldots, N,\ j = 1, 2, \ldots, N \\ b_i &= \int_a^b f_i g(x) dx,\ i = 1, 2, \ldots, N \end{aligned}$$

ve

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2N} \\ & & \ddots & \\ a_{N1} & a_{N2} & \ldots & a_{NN} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \\ c_N \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{N-1} \\ b_N \end{pmatrix}$$

olmak üzere (3.41) eşitliği

$$AC = B$$

şeklinde matris formunda yazılabilir. Elde edilen sistem N denklem ve $c_1, \ldots, c_N$ olmak üzere N bilinmeyenden oluşur. Bu sistem çözülerek $c_1, \ldots, c_N$ bilinmeyen katsayıları bulunur. Böylece sayısal çözüm,

$$y(x) \approx Y(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j f_j(x)$$

eşitliği kullanılarak elde edilir.

3.4.1.2. Kolokasyon yöntemi

Kolokasyon yöntemi, ağırlıklı rezidüler yönteminin bir uygulaması olup diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerini elde etmek için kullanılan bir metottur. Bu yöntemde W_i ağırlık fonksiyonu olarak

$$W_i = \delta\left(x - x_i\right)$$

olacak şekilde Dirac Delta fonksiyonları seçilir. Dirac Delta fonksiyonları $i = 1, 2, \ldots, N$ için

$$\int_a^b \delta\left(x - x_i\right)\left(LY(x) - g\left(x\right)\right) dx = \left(LY(x_i) - g\left(x_i\right)\right) = 0 \tag{3.42}$$

olacak şekilde önemli bir özelliğe sahiptir. Buradan elde edilen sistem N tane denklem ve $c_1, \ldots, c_N$ olmak üzere N tane bilinmeyenden oluşur. Bu denklem sistemi çözüldükten sonra sayısal çözüm

$$y(x) \approx Y(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j f_j(x)$$

eşitliği kullanılarak elde edilir.

3.5. Telegraph Denklemi

α ve β pozitif sabitler, $f\left(x,t\right)$ bilinen fonksiyon, x ve t alt indisleri sırasıyla konum ve zaman göre kısmi türevler olmak üzere

$$u_{tt} + 2\alpha u_t + \beta^2 u = u_{xx} + f(x,t) \tag{3.43}$$

formundaki Telegraph denklemi ile birlikte

$$u(x,0) = f_0(x), \quad x \in [a,b] \tag{3.44}$$

$$u_t(x,0) = f_1(x), \quad x \in [a,b] \tag{3.45}$$

başlangıç ve $t \geq 0$ için

$$\begin{aligned} u(a,t) &= g_0(t), \qquad u(b,t) = g_1(t), \\ u_x(a,t) &= g_2(t), \qquad u_x(b,t) = g_3(t), \end{aligned} \tag{3.46}$$

sınır koşulları verilsin. Burada $f_0(x)$, $f_1(x)$, $g_0(t)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$ ve $g_3(t)$ fonksiyonları sırasıyla x ve t ye göre kendisi ve türevleri sürekli olan fonksiyonlardır.

(3.43) ile verilen Telegraph denklemi $u_t = v$ dönüşümü altında

$$u_t = v \tag{3.47}$$

$$v_t = u_{xx} - 2\alpha v - \beta^2 u + f(x,t) \tag{3.48}$$

zamana göre birinci mertebeden lineer denklem sistemine indirgenir ve ilgili sınır şartları $t \geq 0$ için

$$\begin{aligned} u(a,t) &= g_0(t), \qquad u(b,t) = g_1(t), \\ u_x(a,t) &= g_2(t), \qquad u_x(b,t) = g_3(t), \\ v(a,t) &= g_0'(t), \qquad v(b,t) = g_1'(t), \\ v_x(a,t) &= g_2'(t), \qquad v_x(b,t) = g_3'(t), \end{aligned} \tag{3.49}$$

olacak şekilde yeniden düzenlenir. Bu nedenle (3.43) ile verilen Telegraph denkleminin sayısal çözümlerinin elde edilmesi yerine (3.47-3.48) ile verilen lineer denklem sisteminin sayısal çözümlerinin elde edilmesi aynı anlamdadır.

3.5.1. Telegraph denkleminin zaman parçalanması

Bu kısımda (3.43) ile verilen Telegraph denkleminin zaman parçalanması için önerilen dördüncü mertebeden doğruluğa sahip tek adımlı yöntem kullanılacaktır. (3.47-3.48) ile verilen ifadeler için zaman parçalanmaları

$$u^{n+1} = u^n + \theta_1 u_t^{n+1} + \theta_2 u_t^n + \theta_3 u_{tt}^{n+1} + \theta_4 u_{tt}^n \tag{3.50}$$

ve

$$v^{n+1} = v^n + \theta_1 v_t^{n+1} + \theta_2 v_t^n + \theta_3 v_{tt}^{n+1} + \theta_4 v_{tt}^n \tag{3.51}$$

formunda verilsin. İlk olarak (3.50-3.51) eşitlikleri düzenlenirse

$$\begin{aligned} u^{n+1} - \theta_1 u_t^{n+1} - \theta_3 u_{tt}^{n+1} &= u^n + \theta_2 u_t^n + \theta_4 u_{tt}^n \qquad (3.52) \\ v^{n+1} - \theta_1 v_t^{n+1} - \theta_3 v_{tt}^{n+1} &= v^n + \theta_2 v_t^n + \theta_4 v_{tt}^n \qquad (3.53) \end{aligned}$$

bulunur. (3.47-3.48) ile verilen denklemler (3.52) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &u^{n+1} - \theta_3 \left(u_{xx}^{n+1} + f(x,t^{n+1}) - 2\alpha v^{n+1} - \beta^2 u^{n+1}\right) - \theta_1 v^{n+1} = \\ &u^n + \theta_2 v^n + \theta_4 \left(u_{xx}^n + f(x,t^n) - 2\alpha v^n - \beta^2 u^n\right) \end{aligned} \tag{3.54}$$

elde edilir. Sadeleştirmelerden sonra

$$\begin{aligned} &\left(1 + \theta_3\beta^2\right) u^{n+1} - \theta_3 u_{xx}^{n+1} + \left(2\alpha\theta_3 - \theta_1\right) v^{n+1} = \\ &(1 - \theta_4\beta^2)u^n + \theta_4 u_{xx}^n + (-2\alpha\theta_4 + \theta_2)v^n + \\ &\theta_4 f(x,t^n) + \theta_3 f(x,t^{n+1}) \end{aligned} \tag{3.55}$$

bulunur.

(3.48) denklemi (3.53) zaman parçalanmasında kullanılırsa

$$\begin{aligned} &v^{n+1} - \theta_1(u_{xx}^{n+1} + f(x,t^{n+1}) - 2\alpha v^{n+1} - \beta^2 u^{n+1}) - \theta_3 v_{tt}^{n+1} = \\ &v^n + \theta_2(u_{xx}^n + f(x,t^n) - 2\alpha v^n - \beta^2 u^n) + \theta_4 v_{tt}^n \end{aligned} \tag{3.56}$$

elde edilir. Denklemde elde edilen v_{tt} terimi için (3.48) denkleminin t'ye göre kısmi türevi alınırsa

$$\begin{aligned} v_{tt} &= \left(u_{xx}\right)_t - 2\alpha v_t - \beta^2 u_t + f_t(x,t) \\ v_{tt} &= \left(u_t\right)_{xx} - 2\alpha v_t - \beta^2 u_t + f_t(x,t) \\ v_{tt} &= v_{xx} - 2\alpha\left(u_{xx} - 2\alpha v - \beta^2 u + f(x,t)\right) - \beta^2 v + f_t(x,t) \end{aligned}$$

bulunacağından düzenlemelerden sonra (3.56) denklemi

$$\begin{aligned} &\left(\beta^2\theta_1 - 2\alpha\beta^2\theta_3\right) u^{n+1} + (-\theta_1 + 2\alpha\theta_3)u_{xx}^{n+1} + \\ &\left(1 + 2\alpha\theta_1 + \beta^2\theta_3 - 4\alpha^2\theta_3\right) v^{n+1} - \theta_3 v_{xx}^{n+1} = \\ &(-\beta^2\theta_2 + 2\alpha\beta^2\theta_4)u^n + (\theta_2 - 2\alpha\theta_4)u_{xx}^n + \\ &(1 - 2\alpha\theta_2 - \beta^2\theta_4 + 4\alpha^2\theta_4)v^n + \theta_4 v_{xx}^n + \\ &(-2\alpha\theta_4 + \theta_2)f(x,t^n) + \theta_4 f_t(x,t^n) + \\ &(\theta_1 - 2\alpha\theta_3)f(x,t^{n+1}) + \theta_3 f_t(x,t^{n+1}) \end{aligned} \tag{3.57}$$

olarak yazılabilir. Böylece (3.47-3.48) ile verilen denklemlerin zaman parçalanmaları sırasıyla

$$\begin{aligned}&\left(1+\theta_3\beta^2\right)u^{n+1}-\theta_3u_{xx}^{n+1}+\left(2\alpha\theta_3-\theta_1\right)v^{n+1}=\\&(1-\theta_4\beta^2)u^n+\theta_4u_{xx}^n+(-2\alpha\theta_4+\theta_2)v^n+\\&\theta_4f(x,t^n)+\theta_3f(x,t^{n+1})\end{aligned}\tag{3.58}$$

ve

$$\begin{aligned}&\left(\beta^2\theta_1-2\alpha\beta^2\theta_3\right)u^{n+1}+(-\theta_1+2\alpha\theta_3)u_{xx}^{n+1}+\\&\left(1+2\alpha\theta_1+\beta^2\theta_3-4\alpha^2\theta_3\right)v^{n+1}-\theta_3v_{xx}^{n+1}=\\&(-\beta^2\theta_2+2\alpha\beta^2\theta_4)u^n+(\theta_2-2\alpha\theta_4)u_{xx}^n+\\&(1-2\alpha\theta_2-\beta^2\theta_4+4\alpha^2\theta_4)v^n+\theta_4v_{xx}^n+\\&(-2\alpha\theta_4+\theta_2)f(x,t^n)+\theta_4f_t(x,t^n)+\\&(\theta_1-2\alpha\theta_3)f(x,t^{n+1})+\theta_3f_t(x,t^{n+1})\end{aligned}\tag{3.59}$$

formunda elde edilmiş olur.

3.5.2. Test problemleri

Test problemlerinde analitik çözüm mevcut olduğundan önerilen nümerik yöntemin doğruluğu

$$L_\infty=\|u-U\|_\infty=\max_{0\le j\le N}|u_j-U_j|\tag{3.60}$$

hata normu ile

$$\text{YO}=\frac{\log\left|\left(L_\infty\right)_{\Delta t_i}/\left(L_\infty\right)_{\Delta t_{i+1}}\right|}{\log\left|\Delta t_i/\Delta t_{i+1}\right|}\tag{3.61}$$

yakınsaklık oranı hesaplanarak incelenecektir. Yakınsama oranı hesaplanırken h konum uzunluğu mümkün olduğu kadar küçük alınacaktır.

3.5.2.1 Birinci test problemi

(3.43) ile verilen Telegraph denklemi, $0\le x\le 1$ çözüm aralığında $\alpha=1/2$, $\beta=1$ ve

$$f\left(x,t\right)=(2-2t+t^2)(x-x^2)\exp(-t)+2t^2\exp(-t)$$

seçimleri yapıldığında

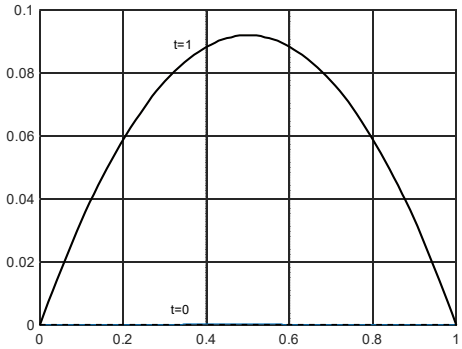
$$u(x,0) = 0,\quad u_t(x,0)=0\tag{3.62}$$

$$u(0,t) = 0,\quad u(1,t)=0\tag{3.63}$$

başlangıç ve sınır koşullarına sahip olacaktır. Probleminin tam çözümü ise

$$u(x,t) = (x - x^2)t^2 \exp(-t) \tag{3.64}$$

formunda elde edilecektir. Şekil 3.1 de $t = 0$ ve $t = 1$ zamanlarında analitik çözümün grafiği çizilmiştir.



Şekil 3.1: $t = 0$ ve $t = 1$ zamanlarında analitik çözüm

3.5.2.2 İkinci test problemi

(3.43) formundaki Telegraph denkleminde $0 \leq x \leq 1$ çözüm aralığı üzerinde $\alpha = 1, \beta = 1$ ve $f(x,t) = 0$ alındığında denklemin analitik çözümü

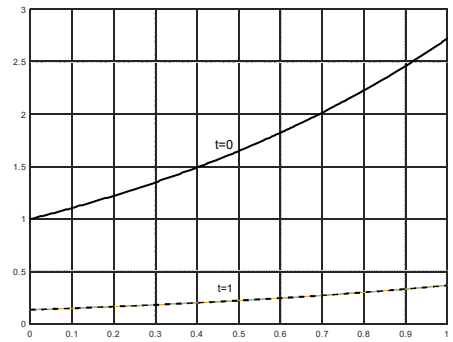
$$u(x,t) = \exp(x - 2t) \tag{3.65}$$

olarak verilir. Bu test problemin başlangıç ve sınır koşulları sırasıyla;

$$u(x,0) = \exp(x), \qquad u_t(x,0) = -2\exp(x) \tag{3.66}$$

$$u(0,t) = \exp(-2t), \quad u(1,t) = \exp(1 - 2t) \tag{3.67}$$

olarak kullanılmaktadır. Şekil 3.2 de $t = 0$ ve $t = 1$ zamanlarında analitik çözümün grafiği çizilmiştir.



Şekil 3.2: $t = 0$ ve $t = 1$ zamanlarında analitik çözüm

3.6. Klein-Gordon Denklemi

$$u_{tt} + \alpha u_{xx} + \beta u + \gamma u^k = f(x,t) \tag{3.68}$$

ile verilen Klein-Gordon (KG) denklemi ile birlikte

$$u(x,0) = f_0(x), \quad x \in [a,b] \tag{3.69}$$

$$u_t(x,0) = f_1(x), \quad x \in [a,b] \tag{3.70}$$

başlangıç koşulları ve $t \geq 0$ için

$$\begin{aligned} u(a,t) &= g_0(t), \qquad u(b,t) = g_1(t), \\ u_x(a,t) &= g_2(t), \qquad u_x(b,t) = g_3(t), \end{aligned} \tag{3.71}$$

sınır koşulları verilsin. Burada α, β, k ve γ sabitler olup; $f\,(x,t)$ bilinen fonksiyon ve $f_0(x)$, $f_1(x)$, $g_0(t)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$ ve $g_3(t)$ fonksiyonları sırasıyla x ve t ye göre kendisi ve türevleri sürekli olan fonksiyonlardır. Alt indis olarak belirtilen x ve t değişkenleri sırasıyla konum ve zamana göre kısmi türevlere karşılık gelmektedir. (3.68) ile verilen KG denkleminde $k = 2$ veya $k = 3$ seçilmesi durumunda sırasıyla, Kuadratik lineer olmayan KG veya Kübik lineer olmayan KG denklemleri elde edilir.

(3.68) ile verilen KG denklemi $u_t = v$ seçimi ile

$$u_t = v \tag{3.72}$$

$$v_t = -\alpha u_{xx} - \beta u - \gamma u^k + f(x,t) \tag{3.73}$$

lineer olmayan denklem sistemine ve $t \geq 0$ için

$$\begin{aligned} u(a,t) &= g_0(t), \qquad u(b,t) = g_1(t), \\ u_x(a,t) &= g_2(t), \qquad u_x(b,t) = g_3(t), \\ v(a,t) &= g_0'(t), \qquad v(b,t) = g_1'(t), \\ v_x(a,t) &= g_2'(t), \qquad v_x(b,t) = g_3'(t), \end{aligned} \tag{3.74}$$

sınır şartlarına dönüşür.

3.6.1. Klein-Gordon denkleminin zaman parçalanması

Bu kısımda Telegraph denkleminde yapıldığı gibi (3.72-3.73) ile ifade edilen lineer olamayan denklem sisteminin zaman parçalanması için önerilen dördüncü

mertebeden doğruluğa sahip tek adımlı yöntem kullanılacaktır. (3.72-3.73) denklemlerinin zaman parçalanmaları sırasıyla,

$$u^{n+1} = u^n + \theta_1 u_t^{n+1} + \theta_2 u_t^n + \theta_3 u_{tt}^{n+1} + \theta_4 u_{tt}^n \tag{3.75}$$

ve

$$v^{n+1} = v^n + \theta_1 v_t^{n+1} + \theta_2 v_t^n + \theta_3 v_{tt}^{n+1} + \theta_4 v_{tt}^n \tag{3.76}$$

formunda verilsin. (3.72-3.73) ile verilen denklemler (3.75) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= u^n + \theta_1 v^{n+1} + \theta_2 v^n \\ &\quad +\theta_3(-\alpha u_{xx}^{n+1} - \beta u^{n+1} - \gamma (u^k)^{n+1} + f(x, t^{n+1})) \\ &\quad +\theta_4(-\alpha u_{xx}^{n} - \beta u^{n} - \gamma (u^k)^{n} + f(x, t^{n})) \end{aligned}$$

elde edilir. Düzenlemelerden sonra

$$\begin{aligned} &(1 + \theta_3\beta + \theta_3\gamma(u^{k-1})^{n+1})u^{n+1} + \theta_3\alpha u_{xx}^{n+1} - \theta_1 v^{n+1} = \\ &(1 - \theta_4\beta - \theta_4\gamma(u^{k-1})^{n})u^{n} - \theta_4\alpha u_{xx}^{n} + \theta_2 v^n + \\ &\theta_4 f(x, t^n) + \theta_3 f(x, t^{n+1}) \end{aligned} \tag{3.77}$$

bulunur. Benzer şekilde (3.73) denklemi, (3.76) ile verilen zaman parçalanmasında kullanılırsa

$$\begin{aligned} &v^{n+1} = v^n + \theta_1(-\alpha u_{xx}^{n+1} - \beta u^{n+1} - \gamma (u^k)^{n+1} + f(x, t^{n+1})) \\ &+\theta_2(-\alpha u_{xx}^{n} - \beta u^{n} - \gamma (u^k)^{n} + f(x, t^{n})) + \theta_3 v_{tt}^{n+1} + \theta_4 v_{tt}^n \end{aligned} \tag{3.78}$$

elde edilir. Denklemde elde edilen v_{tt} terimi için (3.73) denkleminin t'ye göre kısmi türevi alınırsa

$$\begin{aligned} v_{tt} &= -\alpha(u_{xx})_t - \beta u_t - \gamma (u^k)_t + f_t(x,t), \\ v_{tt} &= -\alpha(u_t)_{xx} - \beta v - \gamma k(u^{k-1}) u_t + f_t(x,t), \\ v_{tt} &= -\alpha v_{xx} - \beta v - \gamma k(u^{k-1}) v + f_t(x,t) \end{aligned}$$

bulunacaktır. Bulunan v_{tt} terimi (3.78) ile verilen ifade de yerine yazılıp, sadeleştirmeler yapıldığında

$$\begin{aligned} &(\theta_1\beta + \theta_1\gamma(u^{k-1})^{n+1})u^{n+1} + \theta_1\alpha u_{xx}^{n+1} + (1 + \theta_3\beta + \theta_3\gamma k(u^{k-1})^{n+1})v^{n+1} \\ &+\theta_3\alpha v_{xx}^{n+1} = (-\theta_2\beta - \theta_2\gamma(u^{k-1})^{n})u^n - \theta_2\alpha u_{xx}^n \\ &+(1 - \theta_4\beta - \theta_4\gamma k(u^{k-1})^{n})v^n - \theta_4\alpha v_{xx}^n \\ &+\theta_1 f(x, t^{n+1}) + \theta_2 f(x, t^n) + \theta_3 f_t(x, t^{n+1}) + \theta_4 f_t(x, t^n) \end{aligned} \tag{3.79}$$

elde edilir. Böylece (3.72-3.73) ile verilen denklemlerin zaman parçalanmaları sırasıyla

$$\begin{aligned}&(1+\theta_3\beta+\theta_3\gamma(u^{k-1})^{n+1})u^{n+1}+\theta_3\alpha u_{xx}^{n+1}-\theta_1 v^{n+1}=\\&(1-\theta_4\beta-\theta_4\gamma(u^{k-1})^{n})u^{n}-\theta_4\alpha u_{xx}^{n}+\theta_2 v^{n}+\\&\theta_4 f(x,t^n)+\theta_3 f(x,t^{n+1})\end{aligned} \tag{3.80}$$

ve

$$\begin{aligned}&(\theta_1\beta+\theta_1\gamma(u^{k-1})^{n+1})u^{n+1}+\theta_1\alpha u_{xx}^{n+1}+(1+\theta_3\beta+\theta_3\gamma k(u^{k-1})^{n+1})v^{n+1}\\&+\theta_3\alpha v_{xx}^{n+1}=(-\theta_2\beta-\theta_2\gamma(u^{k-1})^{n})u^{n}-\theta_2\alpha u_{xx}^{n}\\&+(1-\theta_4\beta-\theta_4\gamma k(u^{k-1})^{n})v^{n}-\theta_4\alpha v_{xx}^{n}\\&+\theta_1 f(x,t^{n+1})+\theta_2 f(x,t^n)+\theta_3 f_t(x,t^{n+1})+\theta_4 f_t(x,t^n)\end{aligned} \tag{3.81}$$

formunda elde edilmiş olur.

3.6.2. Test problemleri

Test problemlerinde KG denkleminin analitik çözümü mevcut olduğundan önerilen nümerik yöntemin doğruluğu Telegraph denkleminde olduğu gibi

$$L_\infty=\|u-U\|_\infty=\max_{0\le j\le N}|u_j-U_j| \tag{3.82}$$

hata normu ile

$$\text{YO}=\frac{\log\left|(L_\infty)_{\Delta t_i}/(L_\infty)_{\Delta t_{i+1}}\right|}{\log|\Delta t_i/\Delta t_{i+1}|} \tag{3.83}$$

yakınsaklık oranı hesaplanarak incelenecektir. Yakınsama oranı hesaplanırken h konum uzunluğu mümkün olduğu kadar küçük alınacaktır.

3.6.2.1 Birinci test problemi

(3.68) ile verilen KG denkleminde $-1\le x\le 1$ konum aralığı üzerinde $\alpha=-1$, $\beta=0$, $\gamma=1$, $k=2$ ve

$$f(x,t)=-x\cos(t)+x^2\cos^2(t)$$

seçimleri yapılarak başlangıç ve sınır koşulları sırasıyla

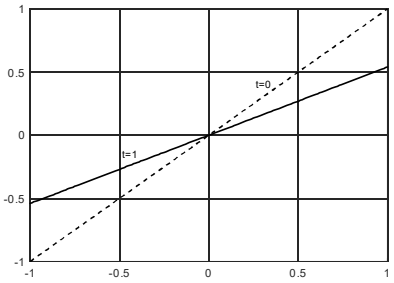
$$u(x,0)=x, \qquad u_t(x,0)=0 \tag{3.84}$$

$$u(-1,t)=-\cos(t), \qquad u(1,t)=\cos(t) \tag{3.85}$$

olarak alınacaktır. Test pobleminin analitik çözümü ise

$$u(x,t) = x\cos(t) \tag{3.86}$$

olacaktır. $t = 0$ ve $t = 1$ zamanlarındaki analitik çözümün grafiği Şekil 3.3 de verilmiştir.



Şekil 3.3: $t = 0$ ve $t = 1$ zamanlarında analitik çözüm

3.6.2.2 İkinci test problemi

İkinci test probleminde (3.68) formundaki KG denkleminde $\alpha = -2.5$, $\beta = 1$, $\gamma = 1.5$, $k = 3$ ve $f(x,t) = 0$ alındığında denklemin analitik çözümü

$$u(x,t) = u(x,t) = B\tan(K(x+ct)) \tag{3.87}$$

olacaktır. Bu durumda test probleminin başlangıç ve sınır koşulları

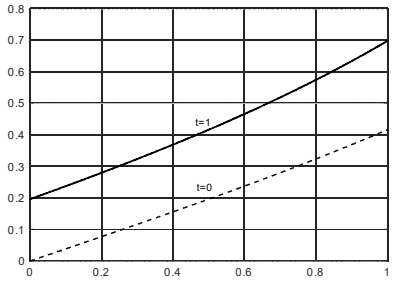
$$u(x,0) = B\tan(Kx), \quad u_t(x,0) = BcK\sec^2(Kx) \tag{3.88}$$

$$u(0,t) = B\tan(Kct), \quad u(1,t) = B\tan(K + Kct), \tag{3.89}$$

olarak verilmektedir. Yöntemin doğruluğu kontrol edilirken

$$c = 0.5, B = \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}, K = \sqrt{\frac{-\beta}{2(\alpha + c^2)}}$$

parametreleri kullanılarak $0 \leq x \leq 1$ konum aralığı üzerinde önerilen algoritmalar çalıştırılacaktır. Verilen parametreler kullanılarak $t = 0$ ve $t = 1$ zamanlarında çizilen analitik çözümün grafiği Şekil 3.4 de verilmiştir.



Şekil 3.4: $t = 0$ ve $t = 1$ zamanlarında analitik çözüm

3.7. Good Boussinesq Denklemi

$$u_{tt} = u_{xx} + \left(u^2\right)_{xx} - u_{xxxx} \tag{3.90}$$

ile ifade edilen Good Boussinesq (GB) denklemi

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in [a,b] \tag{3.91}$$

$$u_t(x,0) = g(x), \quad x \in [a,b] \tag{3.92}$$

başlangıç koşulları ve

$$u(a,t) = 0, \quad u(b,t) = 0, \quad t \geq 0 \tag{3.93}$$

$$u_x(a,t) = 0, \quad u_x(b,t) = 0, \quad t \geq 0 \tag{3.94}$$

sınır koşulları ile verilsin. Burada $f(x)$ ve $g(x)$ bilinen fonksiyonlar olup x ve t alt indisleri sırasıyla konum ve zamana göre kısmi türevleri temsil eder. Daha önce Telegraph ve KG denklemlerinde yardımcı fonksiyon yardımıyla yapılan ayrıştırma işlemi (3.90) ile verilen GB denklemine uygulanırsa, v yardımcı fonksiyon olmak üzere

$$u_t = v \tag{3.95}$$

$$v_t = u_{xx} + \left(u^2\right)_{xx} - u_{xxxx} \tag{3.96}$$

formunda lineer olmayan denklem sistemi elde edilir. Sınır koşulları $t \geq 0$ için

$$\begin{aligned} u(a,t) &= 0, & u(b,t) &= 0, \\ u_x(a,t) &= 0, & u_x(b,t) &= 0, \\ v(a,t) &= 0, & v(b,t) &= 0, \\ v_x(a,t) &= 0, & v_x(b,t) &= 0, \end{aligned} \tag{3.97}$$

olacak şekilde yeniden düzenlenebilir.

3.7.1. Good Boussinesq denkleminin zaman parçalanması

Bu kısımda, Telegraph ve KG denklemlerinin zaman parçalanmalarında önerilen dördüncü mertebeden doğruluğa sahip zaman parçalanması (3.95-3.96) ile ifade edilen lineer olamayan denklem sistemi için kullanılacaktır. (3.95-3.96) denklemlerinin zaman parçalanmaları sırasıyla,

$$u^{n+1} = u^n + \theta_1 u_t^{n+1} + \theta_2 u_t^n + \theta_3 u_{tt}^{n+1} + \theta_4 u_{tt}^n \tag{3.98}$$

ve

$$v^{n+1} = v^n + \theta_1 v_t^{n+1} + \theta_2 v_t^n + \theta_3 v_{tt}^{n+1} + \theta_4 v_{tt}^n \tag{3.99}$$

şeklinde verilsin. (3.95-3.96) ile verilen denklemler (3.98) ile verilen eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} u^{n+1} = u^n + \theta_1 v^{n+1} + \theta_2 v^n + \\ \theta_3(u_{xx}^{n+1} + 2((u_x)^2)^{n+1} + 2u_{xx}^{n+1}u^{n+1} - u_{xxxx}^{n+1}) + \\ \theta_4(u_{xx}^n + 2((u_x)^2)^n + 2u_{xx}^n u^n - u_{xxxx}^n) \end{aligned} \tag{3.100}$$

bulunur. Sadeleştirmelerden sonra

$$\begin{aligned} &u^{n+1} + u_{xx}^{n+1}(-\theta_3 - 2\theta_3 u^{n+1}) - 2\theta_3 u_x^{n+1}u_x^{n+1} + \theta_3 u_{xxxx}^{n+1} - \theta_1 v^{n+1} = \\ &u^n + u_{xx}^n(\theta_4 + 2\theta_4 u^n) + 2\theta_4 u_x^n u_x^n - \theta_4 u_{xxxx}^n + \theta_2 v^n \end{aligned} \tag{3.101}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde (3.96) denklemi (3.99) ile ifade edilen zaman parçalanmasında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} v^{n+1} = v^n + \theta_1(u_{xx}^{n+1} + 2((u_x)^2)^{n+1} + 2u_{xx}^{n+1}u^{n+1} - u_{xxxx}^{n+1}) + \\ \theta_2(u_{xx}^n + 2((u_x)^2)^n + 2u_{xx}^n u^n - u_{xxxx}^n) + \theta_3 v_{tt}^{n+1} + \theta_4 v_{tt}^n \end{aligned} \tag{3.102}$$

olur. Denklemde bulunan v_{tt} terimi için (3.96) denkleminin t'ye göre kısmi türevi alınırsa

$$\begin{aligned} v_{tt} &= (u_{xx})_t + 2((u_x)^2)_t + 2(u_{xx}u)_t - (u_{xxxx})_t \\ v_{tt} &= v_{xx} + 4u_x v_x + 2vu_{xx} + 2uv_{xx} - v_{xxxx} \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Elde edilen v_{tt} eşitliği (3.102) ile verilen ifade de yerine yazılıp, sadeleştirilmeler yapılırsa

$$\begin{aligned} &u_{xx}^{n+1}(-\theta_1 - 2\theta_1 u^{n+1} - 2\theta_3 v^{n+1}) + u_x^{n+1}(-2\theta_1 u_x^{n+1} - 4\theta_3 v_x^{n+1}) + \theta_1 u_{xxxx}^{n+1} + \\ &v^{n+1} + v_{xx}^{n+1}(-\theta_3 - 2\theta_3 u^{n+1}) + \theta_3 v_{xxxx}^{n+1} = u_{xx}^n(\theta_2 + 2\theta_2 u^n + 2\theta_4 v^n) + \\ &u_x^n(2\theta_2 u_x^n + 4\theta_4 v_x^n) - \theta_2 u_{xxxx}^n + v^n + v_{xx}^n(\theta_4 + 2\theta_4 u^n) - \theta_4 v_{xxxx}^n \end{aligned} \tag{3.103}$$

bulunur. Böylece (3.95-3.96) ile verilen denklemlerin zaman parçalanmaları sırasıyla

$$\begin{aligned}&(1+\theta_3\beta+\theta_3\gamma(u^{k-1})^{n+1})u^{n+1}+\theta_3\alpha u_{xx}^{n+1}-\theta_1 v^{n+1}=\\&(1-\theta_4\beta-\theta_4\gamma(u^{k-1})^{n})u^{n}-\theta_4\alpha u_{xx}^{n}+\theta_2 v^{n}+\\&\theta_4 f(x,t^n)+\theta_3 f(x,t^{n+1})\end{aligned} \tag{3.104}$$

ve

$$\begin{aligned}&(\theta_1\beta+\theta_1\gamma(u^{k-1})^{n+1})u^{n+1}+\theta_1\alpha u_{xx}^{n+1}+(1+\theta_3\beta+\theta_3\gamma k(u^{k-1})^{n+1})v^{n+1}\\&+\theta_3\alpha v_{xx}^{n+1}=(-\theta_2\beta-\theta_2\gamma(u^{k-1})^{n})u^{n}-\theta_2\alpha u_{xx}^{n}\\&+(1-\theta_4\beta-\theta_4\gamma k(u^{k-1})^{n})v^{n}-\theta_4\alpha v_{xx}^{n}\\&+\theta_1 f(x,t^{n+1})+\theta_2 f(x,t^n)+\theta_3 f_t(x,t^{n+1})+\theta_4 f_t(x,t^n)\end{aligned} \tag{3.105}$$

formunda elde edilmiş olur.

3.7.2. Test problemleri

Soliton dalgasının hareketi test probleminde GB denkleminin analitik çözümü mevcut olduğundan önerilen nümerik yöntemin doğruluğu Telegraph ve KG denklemlerinde olduğu gibi

$$L_\infty=\|u-U\|_\infty=\max_{0\le j\le N}|u_j-U_j| \tag{3.106}$$

hata normu ile

$$\text{YO}=\frac{\log\left|(L_\infty)_{\Delta t_i}/(L_\infty)_{\Delta t_{i+1}}\right|}{\log|\Delta t_i/\Delta t_{i+1}|} \tag{3.107}$$

yakınsaklık oranı hesaplanarak incelenecektir. Yakınsama oranı hesaplanırken h konum uzunluğu mümkün olduğu kadar küçük alınacaktır. GB denklemi için ayrıca korunum sabiti vardır ve

$$I=\int_a^b u\,(x,t)\,dx \tag{3.108}$$

formundadır. Korunum sabitinin programın çalışma süresince sabit kalması beklenmektedir. Bu çalışmada iki soliton dalgasının çarpışması test probleminde analitik çözüm mevcut olmadığından yöntemlerin doğruluğunu kontrol etmek için korunum sabiti yaklaşık olarak bulunacaktır. Yaklaşık integral almak içinde korunum sabiti istenilen zamanlarda yamuklar kuralı ile hesaplanacaktır.

3.7.2.1. Soliton dalgasının hareketi

GB denkleminin sayısal çözümünün kontrolünde kullanılacak olan soliton dalgasının hareketi test problemi için analitik çözüm

$$u\left(x,t\right)=-Asech^{2}\left(\sqrt{\frac{A}{6}}(x-ct-x_{0})\right)-(b+\frac{1}{2}) \tag{3.109}$$

formundadır. Burada b reel bir sabit olmak üzere, A GB denkleminin ürettiği dalganın genliği, c hızı ve x_0 ise dalganın başlangıçtaki konumunu temsil eder. Analitik çözüm ve analitik çözümün t bağımsız değişkenine göre kısmi türevinde $t=0$ alınmasıyla

$$f(x) = u(x,0)=-Asech^{2}\left(\sqrt{\frac{A}{6}}(x-x_{0})\right)-(b+\frac{1}{2}) \tag{3.110}$$

$$g(x) = u_{t}(x,0)=-2Ac\sqrt{\frac{A}{6}}sech^{2}\left(\sqrt{\frac{A}{6}}(x-x_{0})\right)\tanh\left(\sqrt{\frac{A}{6}}(x-x_{0})\right) \tag{3.111}$$

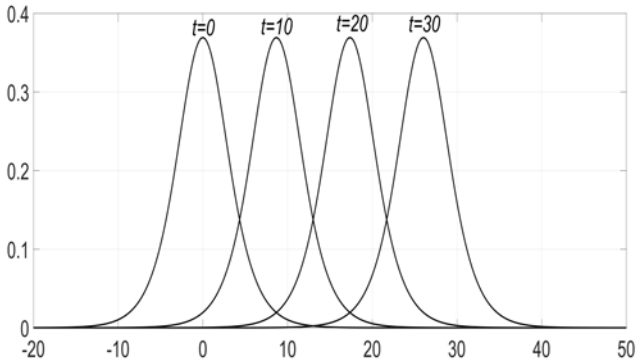
başlangıç koşulları elde edilir. Probleme ait sınır koşulları ise

$$u(-40,t)=0,\ u(60,t)=0$$

olarak alınacaktır. Önerilen yöntemin doğruluğu kontrol edilirken

$$A=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2},\ c=\mp\left(-2(b+\frac{A}{3})\right)^{\frac{1}{2}}$$

parametreleri seçilerek $-40\leq x\leq 60$ konum aralığı üzerinde önerilen programlar çalıştırılacaktır. $A=0.369$, $b=-1/2$, $x_0=0$ ve $c=\sqrt{1-2A/3}$ seçimleri yapılarak $t=0$, $t=10$, $t=20$ ve $t=30$ zamanlarındaki soliton dalgasının mutlak değerlerinin grafiği Şekil 3.5 de verilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi zaman ilerledikçe soliton dalgası değişmeyen bir formda sağa doğru hareket etmektedir.



Şekil 3.5 : $t=0, t=10, t=20$ ve $t=30$ zamanındaki soliton dalgaları

3.7.2.2. İki soliton dalgasının çarpışması

GB denklemi tarafından üretilen iki soliton dalgasının çarpışması probleminde $i = 1, 2$ için

$$\begin{aligned} f_i(x) &= u_i(x,0) = -A_i \sec h^2\left(\sqrt{\frac{A_i}{6}}(x - x_i^0)\right) \\ g_i(x) &= v_i(x,0) = -2A_i c_i \sqrt{\frac{A_i}{6}} \sec h^2\left(\sqrt{\frac{A_i}{6}}(x - x_i^0)\right) \tanh\left(\sqrt{\frac{A_i}{6}}(x - x_i^0)\right) \\ c_i &= \mp\left(1 - \frac{2A_i}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} f(x) &= u_1(x,0) + u_2(x,0) \\ g(x) &= v_1(x,0) + v_2(x,0) \end{aligned}$$

başlangıç koşulları kullanılır. Burada A_1 ve A_2 soliton dalgalarının genliklerini, x_1^0 ve x_2^0 dalgaların başlangıçtaki konumlarını, c_1 ve c_2 dalgaların hızlarını temsil etmektedir. Bu test probleminde

$$x_1^0 = -x_2^0 = -50, A_1 = A_2 = 0.369, c_1 = -c_2 = \sqrt{1 - \frac{2A}{3}}$$

parametreleri seçilerek $-100 \leq x \leq 100$ konum aralığında $t = 120$ zamanına kadar programlar çalıştırılacaktır. Bu durumda başlangıçta $x_1^0 = -50$ ve $x_2^0 = 50$ noktalarında konumlanan, eşit genliğe sahip, $c_1 = -c_2$ hızları ile birbirlerine doğru hareket eden iki soliton dalgasının çarpışması problemi incelenecektir.

4. TELEGRAPH DENKLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ İÇİN B-SPLİNE KOLOKASYON YÖNTEMİ

3. bölümde (3.43) ile tanıtılan Telegraph denklemi yardımcı fonksiyon yardımıyla (3.47-3.48) lineer denklem sistemine indirgenmiş ve denklem sisteminin zaman parçalanmaları (3.58-3.59) eşitliklerinde elde edilmişti. Bu bölümde kübik, kuartik ve kuintik B-spline kolokasyon yöntemleri ile Telegraph denkleminin yaklaşık çözümlerinin bulunması hedeflenmektedir. Telegraph denkleminin sayısal çözümü için zaman parçalanması olarak Crank-Nicolson yöntemi ve Crank-Nicolson yöntemine göre daha yüksek doğruluğa sahip dördüncü mertebeden tek adımlı yöntem kullanılacaktır. Konum parçalanması için ise kübik, kuartik ve kuintik B-spline kolokasyon yöntemleri önerilmiştir. Yaklaşık çözümlerin doğrulunu test etmek için iki test problemi incelenecektir.

4.1. Kübik B-spline Kolokasyon Yöntemi

Bu kısımda Telegraph denkleminin sayısal çözümünü elde etmek için konum parçalanmasında kübik B-spline kolokasyon yöntemi kullanılacaktır. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson (Kübik1) ve dördüncü mertebeden tek adımlı (Kübik2) yöntemleri önerilecektir. 3. bölümde (3.16) ile verilen kübik B-spline taban fonksiyonları seçilerek problemin $u\left(x,t\right)$ ve $v\left(x,t\right)$ tam çözümlerine karşılık gelen sırasıyla $U\left(x,t\right)$ ve $V\left(x,t\right)$ yaklaşık çözümleri kübik B-spline fonksiyonları cinsinden çalışılan bölge üzerinde

$$U(x,t) = \sum_{m=-1}^{N+1} \delta_m(t)\Phi_m(x), \tag{4.1}$$

$$V(x,t) = \sum_{m=-1}^{N+1} \sigma_m(t)\Phi_m(x) \tag{4.2}$$

formunda ifade edilir. Burada $m = -1, \ldots, N+1$ için $\delta_m(t)$ ve $\sigma_m(t)$ katsayıları zamana bağlı bilinmeyen parametrelerdir. (4.1-4.2) yaklaşımları ve (3.16) ile verilen

kübik B-spline fonksiyonları kullanılarak x_m bölünme noktasındaki U ve V nin δ ve σ parametreleri cinsinden noktasal değerleri

$$
\begin{aligned}
U(x_m,t) &= \delta_{m-1}+4\delta_m+\delta_{m+1}, && (4.3)\\
V(x_m,t) &= \sigma_{m-1}+4\sigma_m+\sigma_{m+1}, && (4.4)\\
U^{'}(x_m,t) &= \frac{3}{h}(-\delta_{m-1}+\delta_{m+1}), && (4.5)\\
V^{'}(x_m,t) &= \frac{3}{h}(-\sigma_{m-1}+\sigma_{m+1}), && (4.6)\\
U^{''}(x_m,t) &= \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1}-2\delta_m+\delta_{m+1}), && (4.7)\\
V^{''}(x_m,t) &= \frac{6}{h^2}(\sigma_{m-1}-2\sigma_m+\sigma_{m+1}) && (4.8)
\end{aligned}
$$

olarak hesaplanır. (4.1-4.2) yaklaşımları (3.58-3.59) eşitlerinde yerine yazılır ve (4.3-4.8) ile verilen kübik B-spline eşitlikleri kullanırsa sırasıyla,

$$
\begin{aligned}
d(x_m,t_n) &= (1-\theta_4\beta^2)U_m^n+\theta_4\left(U_{xx}\right)_m^n+(-2\alpha\theta_4+\theta_2)V_m^n\\
&\quad +\theta_4 f(x_m,t^n)+\theta_3 f(x_m,t^{n+1})\\
e(x_m,t_n) &= (-\beta^2\theta_2+2\alpha\beta^2\theta_4)U_m^n+(\theta_2-2\alpha\theta_4)\left(U_{xx}\right)_m^n\\
&\quad +(1-2\alpha\theta_2-\beta^2\theta_4+4\alpha^2\theta_4)V_m^n+\left(V_{xx}\right)_m^n+(-2\alpha\theta_4+\theta_2)f(x_m,t^n)\\
&\quad +\theta_4 f_t(x_m,t^n)+(\theta_1-2\alpha\theta_3)f(x_m,t^{n+1})+\theta_3 f_t(x_m,t^{n+1})
\end{aligned}
$$

olmak üzere $0\le m\le N$ için

$$
\begin{aligned}
&\delta_{m-1}^{n+1}\left[1+\theta_3\beta^2-\tfrac{6}{h^2}\theta_3\right]+\delta_m^{n+1}\left[4(1+\theta_3\beta^2)+\tfrac{12}{h^2}\theta_3\right]\\
&\delta_{m+1}^{n+1}\left[1+\theta_3\beta^2-\tfrac{6}{h^2}\theta_3\right]+\sigma_{m-1}^{n+1}\left[2\left(\alpha\theta_3-\theta_1\right)\right]+\\
&\sigma_m^{n+1}\left[4(2\alpha\theta_3-\theta_1)\right]+\sigma_{m+1}^{n+1}\left[2\left(\alpha\theta_3-\theta_1\right)\right]=d(x_m,t_n)
\end{aligned}
\qquad (4.9)
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&\delta_{m-1}^{n+1}\left[(\beta^2\theta_1-2\alpha\beta^2\theta_3)+\tfrac{6}{h^2}(-\theta_1+2\alpha\theta_3)\right]+\\
&\delta_m^{n+1}\left[4(\beta^2\theta_1-2\alpha\beta^2\theta_3)-\tfrac{12}{h^2}(-\theta_1+2\alpha\theta_3)\right]+\\
&\delta_{m+1}^{n+1}\left[(\beta^2\theta_1-2\alpha\beta^2\theta_3)+\tfrac{6}{h^2}(-\theta_1+2\alpha\theta_3)\right]+\\
&\sigma_{m-1}^{n+1}\left[(1+2\alpha\theta_1+\beta^2\theta_3-4\alpha^2\theta_3)-\theta_3\tfrac{6}{h^2}\right]+\\
&\sigma_m^{n+1}\left[4(1+2\alpha\theta_1+\beta^2\theta_3-4\alpha^2\theta_3)+\theta_3\tfrac{12}{h^2}\right]+\\
&\sigma_{m+1}^{n+1}\left[(1+2\alpha\theta_1+\beta^2\theta_3-4\alpha^2\theta_3)-\theta_3\tfrac{6}{h^2}\right]=e(x_m,t_n)
\end{aligned}
\qquad (4.10)
$$

denklem sistemleri elde edilir. (4.9-4.10) denklem sistemleri birlikte $2N+2$ denklem ve

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta} &= (\delta_{-1}, \delta_0, \ldots \delta_N, \delta_{N+1})^T, \\ \boldsymbol{\sigma} &= (\sigma_{-1}, \sigma_0, \ldots, \sigma_N, \sigma_{N+1})^T \end{aligned}$$

olmak üzere $2N+6$ bilinmeyenden oluşur. Elde edilen denklem sistemindeki denklem ve bilinmeyen sayısını eşitlemek için

$$\begin{aligned} u(a,t) &= g_0(t), \qquad u(b,t) &= g_1(t), \quad t \geq 0, \\ v(a,t) &= g_0'(t), \qquad v(b,t) &= g_1'(t), \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

sınır koşullarını kullanarak ilave 4 denklem sisteme eklenirse $2N+6$ denklem ve $2N+6$ bilinmeyenden oluşan denklem sistemi elde edilir. Denklem sisteminin çözülebilmesi için öncelikle $t=0$ zamanındaki

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}^0 &= (\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \ldots, \delta_{N+1}^0)^T \\ \boldsymbol{\sigma}^0 &= (\sigma_{-1}^0, \sigma_0^0, \ldots, \sigma_{N+1}^0)^T \end{aligned}$$

başlangıç vektörlerinin hesaplanması gerekmektedir. Bunun için problemin başlangıç koşulları olan

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f_0(x) \\ v(x,0) &= f_1(x) \end{aligned}$$

eşitlikleri yerine $x = x_m$,$m = 0, 1, \ldots, N$ için

$$\begin{aligned} U(x_m,0) &= \delta_{m-1}^0 + 4\delta_m^0 + \delta_{m+1}^0 = f_0(x_m) \\ V(x_m,0) &= \sigma_{m-1}^0 + 4\sigma_m^0 + \sigma_{m+1}^0 = f_1(x_m) \end{aligned}$$

olarak bilinen kübik B-spline eşitlikleri kullanılırsa $(2N+6)$ bilinmeyen ve $(2N+2)$ denklemden oluşan bir sistem elde edilir. Başlangıç şartlarının $x = x_0$ ve $x = x_N$ için konuma göre birinci türevleri kullanılırsa $m = 0, N$ için

$$U'(x_m,0) = \frac{3}{h}\left(\delta_{m+1}^0 - \delta_{m-1}^0\right) = f_0'(x_m) \tag{4.11}$$

$$V'(x_m,0) = \frac{3}{h}(\sigma_{m+1}^0 - \sigma_{m-1}^0) = f_1'(x_m) \tag{4.12}$$

olarak ilave 4 denklem elde edilir. 4 denklemin sisteme eklenmesi ile $(2N+6)$ bilinmeyen ve $(2N+6)$ denklemden oluşan bir sistem bulunur. Bu sistem çözülerek $t=0$ zamanındaki

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}^0 &= (\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \ldots, \delta_{N+1}^0)^T \\ \boldsymbol{\sigma}^0 &= (\sigma_{-1}^0, \sigma_0^0, \ldots, \sigma_{N+1}^0)^T\end{aligned}$$

başlangıç vektörleri hesaplanabilir ve böylece istenilen t zamanındaki yaklaşık çözümler $\boldsymbol{\delta}^0$ ve $\boldsymbol{\sigma}^0$ başlangıç vektörleri yardımıyla iteratif olarak bulunabilir.

4.2. Kuartik B-spline Kolokasyon Yöntemi

Bu kısımda Telegraph denkleminin sayısal çözümünü elde etmek için konum parçalanmasında kuartik B-spline kolokasyon yöntemi kullanılacaktır. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson (Kuartik1) ve dördüncü mertebeden tek adımlı (Kuartik2) yöntemleri önerilecektir. 3. bölümde (3.22) ile ifade edilen kuartik B-spline taban fonksiyonları seçilerek problemin $u(x,t)$ ve $v(x,t)$ analitik çözümlerine karşılık gelen sırasıyla $U(x,t)$ ve $V(x,t)$ sayısal çözümleri kuartik B-spline fonksiyonları cinsinden verilen bölge üzerinde

$$U(x,t) = \sum_{m=-2}^{N+1} \delta_m(t)\Phi_m(x), \tag{4.13}$$

$$V(x,t) = \sum_{m=-2}^{N+1} \sigma_m(t)\Phi_m(x) \tag{4.14}$$

olarak ifade edilir. Burada $m=-2,\ldots,N+1$ için $\delta_m(t)$ ve $\sigma_m(t)$ katsayıları zamana bağlı bilinmeyen parametrelerdir.. (4.13-4.14) yaklaşımları ve (3.22) ile ifade edilen kuartik B-spline fonksiyonları kullanılarak x_m bölünme noktasındaki U ve V nin δ ve σ parametreleri cinsinden noktasal değerleri

$$U(x_m,t) = \delta_{m-1} + 11\delta_m + 11\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \tag{4.15}$$

$$V(x_m,t) = \sigma_{m-1} + 11\sigma_m + 11\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2}, \tag{4.16}$$

$$U'(x_m,t) = \frac{4}{h}(-\delta_{m-1} - 3\delta_m + 3\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \tag{4.17}$$

$$V'(x_m,t) = \frac{4}{h}(-\sigma_{m-1} - 3\sigma_m + 3\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2}), \tag{4.18}$$

$$U''(x_m,t) = \frac{12}{h^2}(\delta_{m-1}-\delta_m-\delta_{m+1}+\delta_{m+2}), \tag{4.19}$$

$$V''(x_m,t) = \frac{12}{h^2}(\sigma_{m-1}-\sigma_m-\sigma_{m+1}+\sigma_{m+2}) \tag{4.20}$$

olarak bulunur. (4.13-4.14) yaklaşımları (3.58-3.59) eşitlerinde yerine yazılır ve (4.15-4.20) ile verilen kuartik B-spline eşitlikleri kullanırsa sırasıyla,

$$\begin{aligned} d(x_m,t_n) &= (1-\theta_4\beta^2)U_m^n+\theta_4\left(U_{xx}\right)_m^n+(-2\alpha\theta_4+\theta_2)V_m^n \\ &\quad +\theta_4 f(x_m,t^n)+\theta_3 f(x_m,t^{n+1}) \\ e(x_m,t_n) &= (-\beta^2\theta_2+2\alpha\beta^2\theta_4)U_m^n+(\theta_2-2\alpha\theta_4)\left(U_{xx}\right)_m^n \\ &\quad +(1-2\alpha\theta_2-\beta^2\theta_4+4\alpha^2\theta_4)V_m^n+\left(V_{xx}\right)_m^n+(-2\alpha\theta_4+\theta_2)f(x_m,t^n) \\ &\quad +\theta_4 f_t(x_m,t^n)+(\theta_1-2\alpha\theta_3)f(x_m,t^{n+1})+\theta_3 f_t(x_m,t^{n+1}) \end{aligned}$$

ile

$$\begin{aligned} a_1 &= 1+\theta_3\beta^2, \quad a_3=\beta^2\theta_1-2\alpha\beta^2\theta_3, \\ a_2 &= 2\alpha\theta_3-\theta_1, \quad a_4=1+2\alpha\theta_1+\beta^2\theta_3-4\alpha^2\theta_3 \end{aligned}$$

olmak üzere $0\le m\le N$ için

$$\begin{aligned} &\delta_{m-1}^{n+1}\left[a_1-\tfrac{12}{h^2}\theta_3\right]+\delta_m^{n+1}\left[11a_1+\tfrac{12}{h^2}\theta_3\right]+ \\ &\delta_{m+1}^{n+1}\left[11a_1+\tfrac{12}{h^2}\theta_3\right]+\delta_{m+2}^{n+1}\left[a_1-\tfrac{12}{h^2}\theta_3\right]+ \\ &\sigma_{m-1}^{n+1}\left[a_2\right]+\sigma_m^{n+1}\left[11a_2\right]+\sigma_{m+1}^{n+1}\left[11a_2\right]+ \\ &\sigma_{m+2}^{n+1}\left[a_2\right]=d(x_m,t_n) \end{aligned} \tag{4.21}$$

ve

$$\begin{aligned} &\delta_{m-1}^{n+1}\left[a_3+a_2\tfrac{12}{h^2}\right]+\delta_m^{n+1}\left[11a_3-a_2\tfrac{12}{h^2}\right]+ \\ &\delta_{m+1}^{n+1}\left[11a_3-a_2\tfrac{12}{h^2}\right]+\delta_{m+2}^{n+1}\left[a_3+a_2\tfrac{12}{h^2}\right]+ \\ &\sigma_{m-1}^{n+1}\left[a_4-\theta_3\tfrac{12}{h^2}\right]+\sigma_m^{n+1}\left[11a_4+\theta_3\tfrac{12}{h^2}\right]+ \\ &\sigma_{m+1}^{n+1}\left[11a_4+\theta_3\tfrac{12}{h^2}\right]+\sigma_{m+2}^{n+1}\left[a_4-\theta_3\tfrac{12}{h^2}\right]=e(x_m,t_n) \end{aligned} \tag{4.22}$$

denklem sistemleri elde edilir. (4.21-4.22) denklem sistemleri birlikte $2N+2$ denklem ve

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta} &= \left(\delta_{-1},\delta_0,\ldots\delta_N,\delta_{N+1},\delta_{N+2}\right)^T, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \left(\sigma_{-1},\sigma_0,\ldots,\sigma_N,\sigma_{N+1,}\sigma_{N+2}\right)^T \end{aligned}$$

olmak üzere $2N+8$ bilinmeyenden oluşur. Elde edilen denklem sisteminde denklem ve bilinmeyen sayısını eşitlemek için

$$\begin{aligned} u(a,t) &= g_0(t), \qquad u(b,t) = g_1(t), \quad t \geq 0, \\ v(a,t) &= g_0'(t), \qquad v(b,t) = g_1'(t), \quad t \geq 0, \\ u_x(a,t) &= g_2(t), \qquad v_x(a,t) = g_2'(t), \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

sınır koşulları kullanılarak elde edilen ilave 6 denklem sisteme eklenirse $2N+8$ denklem ve $2N+8$ bilinmeyenden oluşan denklem sistemi elde edilir. Denklem sisteminin çözülebilmesi için öncelikle $t=0$ zamanındaki

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}^0 &= (\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \ldots, \delta_{N+1}^0, \delta_{N+2}^0)^T \\ \boldsymbol{\sigma}^0 &= (\sigma_{-1}^0, \sigma_0^0, \ldots, \sigma_{N+1}^0, \sigma_{N+2}^0)^T \end{aligned}$$

başlangıç vektörlerinin hesaplanması gerekmektedir. Bunun için problemin başlangıç koşulları olan

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f_0(x) \\ v(x,0) &= f_1(x) \end{aligned}$$

eşitlikleri yerine $x = x_m$,$m = 0, 1, \ldots, N$ için

$$\begin{aligned} U(x_m,0) &= \delta_{m-1}^0 + 11\delta_m^0 + 11\delta_{m+1}^0 + \delta_{m+2}^0 = f_0(x_m) \\ V(x_m,0) &= \sigma_{m-1}^0 + 11\sigma_m^0 + 11\sigma_{m+1}^0 + \sigma_{m+2}^0 = f_1(x_m) \end{aligned}$$

olarak bilinen kuartik B-spline eşitlikleri kullanılırsa $(2N+8)$ bilinmeyen ve $(2N+2)$ denklemden oluşan bir sistem elde edilir. Başlangıç şartlarının $x = x_0$ ve $x = x_N$ için konuma göre birinci ve ikinci türevleri kullanılırsa $m = 0, N$ için

$$U'(x_0,0) = \frac{4}{h}\left(\delta_{-1}^0 - 3\delta_0^0 + 3\delta_1^0 + \delta_2^0\right), \tag{4.23}$$

$$U''(x_0,0) = \frac{12}{h}(\delta_{-1}^0 - \delta_0^0 - \delta_1^0 + \delta_2^0), \tag{4.24}$$

$$U'(x_N,0) = \frac{4}{h}\left(\delta_{N-1}^0 - 3\delta_N^0 + 3\delta_{N+1}^0 + \delta_{N+2}^0\right), \tag{4.25}$$

$$V'(x_0,0) = \frac{4}{h}\left(\sigma_{-1}^0 - 3\sigma_0^0 + 3\sigma_1^0 + \sigma_2^0\right), \tag{4.26}$$

$$V''(x_0,0) = \frac{12}{h}\left(\sigma_{-1}^0 - \sigma_0^0 - \sigma_1^0 + \sigma_2^0\right), \tag{4.27}$$

$$V'(x_N,0) = \frac{4}{h}\left(\sigma_{N-1}^0 - 3\sigma_N^0 + 3\sigma_{N+1}^0 + \sigma_{N+2}^0\right) \tag{4.28}$$

olarak ilave 6 denklem elde edilir. 6 denklemin sisteme eklenmesi ile $(2N+8)$ bilinmeyen ve $(2N+8)$ denklemden oluşan bir sistem bulunur. Bu sistem çözülerek

$t = 0$ zamanındaki

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}^0 &= (\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \ldots, \delta_{N+1}^0, \delta_{N+2}^0)^T \\ \boldsymbol{\sigma}^0 &= (\sigma_{-1}^0, \sigma_0^0, \ldots, \sigma_{N+1}^0, \sigma_{N+2}^0)^T \end{aligned}$$

başlangıç vektörleri hesaplanabilir ve böylece istenilen t zamanındaki yaklaşık çözümler $\boldsymbol{\delta}^0$ ve $\boldsymbol{\sigma}^0$ başlangıç vektörleri yardımıyla iteratif olarak bulunabilir.

4.3. Kuintik B-spline Kolokasyon Yöntemi

Bu kısımda Telegraph denkleminin yaklaşık çözümünü elde etmek için konum parçalanmasında kuintik B-spline kolokasyon yöntemi kullanılacaktır. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson (Kuintik1) ve dördüncü mertebeden tek adımlı (Kuintik2) yöntemleri önerilecektir. 3. bölümde (3.29) ile ifade edilen kuintik B-spline taban fonksiyonları seçilerek problemin $u(x,t)$ ve $v(x,t)$ analitik çözümlerine karşılık gelen sırasıyla $U(x,t)$ ve $V(x,t)$ sayısal çözümleri kuintik B-spline fonksiyonları cinsinden verilen bölge üzerinde

$$U(x,t) = \sum_{m=-2}^{N+2} \delta_m(t)\Phi_m(x), \tag{4.29}$$

$$V(x,t) = \sum_{m=-2}^{N+2} \sigma_m(t)\Phi_m(x) \tag{4.30}$$

olarak ifade edilir. Burada $m = -2, \ldots, N+2$ için $\delta_m(t)$ ve $\sigma_m(t)$ katsayıları zamana bağlı bilinmeyen parametrelerdir. (4.29-4.30) yaklaşımları ve (3.29) ile ifade edilen kuintik B-spline fonksiyonları kullanılarak x_m bölünme noktasındaki U ve V nin δ ve σ parametreleri cinsinden noktasal değerleri

$$U(x_m,t) = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \tag{4.31}$$

$$V(x_m,t) = \sigma_{m-2} + 26\sigma_{m-1} + 66\sigma_m + 26\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2}, \tag{4.32}$$

$$U'(x_m,t) = \frac{5}{h}(-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \tag{4.33}$$

$$V'(x_m,t) = \frac{5}{h}(-\sigma_{m-2} - 10\sigma_{m-1} + 10\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2}), \tag{4.34}$$

$$U''(x_m,t) = \frac{20}{h^2}(\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 6\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \tag{4.35}$$

$$V''(x_m,t) = \frac{20}{h^2}(\sigma_{m-2} + 2\sigma_{m-1} - 6\sigma_m + 2\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2}) \tag{4.36}$$

olarak elde edilir. (4.29-4.30) yaklaşımları (3.58-3.59) eşitlerinde yerine yazılır ve (4.31-4.36) ile verilen kuintik B-spline eşitlikleri kullanırsa sırasıyla,

$$\begin{aligned} d(x_m,t_n) &= (1-\theta_4\beta^2)U_m^n+\theta_4\left(U_{xx}\right)_m^n+(-2\alpha\theta_4+\theta_2)V_m^n \\ &\quad +\theta_4 f(x_m,t^n)+\theta_3 f(x_m,t^{n+1}) \\ e(x_m,t_n) &= (-\beta^2\theta_2+2\alpha\beta^2\theta_4)U_m^n+(\theta_2-2\alpha\theta_4)\left(U_{xx}\right)_m^n \\ &\quad +(1-2\alpha\theta_2-\beta^2\theta_4+4\alpha^2\theta_4)V_m^n+\left(V_{xx}\right)_m^n+(-2\alpha\theta_4+\theta_2)f(x_m,t^n) \\ &\quad +\theta_4 f_t(x_m,t^n)+(\theta_1-2\alpha\theta_3)f(x_m,t^{n+1})+\theta_3 f_t(x_m,t^{n+1}) \end{aligned}$$

ile

$$\begin{aligned} a_1 &= 1+\theta_3\beta^2, \quad a_3=\beta^2\theta_1-2\alpha\beta^2\theta_3, \\ a_2 &= 2\alpha\theta_3-\theta_1, \quad a_4=1+2\alpha\theta_1+\beta^2\theta_3-4\alpha^2\theta_3 \end{aligned}$$

olmak üzere $0\le m\le N$ için

$$\begin{aligned} &\delta_{m-2}^{n+1}\left[a_1-\tfrac{20}{h^2}\theta_3\right]+\delta_{m-1}^{n+1}\left[26a_1-\tfrac{40}{h^2}\theta_3\right]+ \\ &\delta_{m}^{n+1}\left[66a_1+\tfrac{120}{h^2}\theta_3\right]+\delta_{m+1}^{n+1}\left[26a_1-\tfrac{40}{h^2}\theta_3\right]+ \\ &\delta_{m+2}^{n+1}\left[a_1-\tfrac{20}{h^2}\theta_3\right]+\sigma_{m-2}^{n+1}\left[a_2\right]+\sigma_{m-1}^{n+1}\left[26a_2\right]+ \\ &\sigma_{m}^{n+1}\left[66a_2\right]+\sigma_{m+1}^{n+1}\left[26a_2\right]+\sigma_{m+2}^{n+1}\left[a_2\right]=d(x_m,t_n) \end{aligned} \tag{4.37}$$

ve

$$\begin{aligned} &\delta_{m-2}^{n+1}\left[a_3+a_2\tfrac{20}{h^2}\right]+\delta_{m-1}^{n+1}\left[26a_3+a_2\tfrac{40}{h^2}\right]+ \\ &\delta_{m}^{n+1}\left[66a_3-a_2\tfrac{120}{h^2}\right]+\delta_{m+1}^{n+1}\left[26a_3+a_2\tfrac{40}{h^2}\right]+ \\ &\delta_{m+2}^{n+1}\left[a_3+a_2\tfrac{20}{h^2}\right]+\sigma_{m-2}^{n+1}\left[a_4-\theta_3\tfrac{20}{h^2}\right]+ \\ &\sigma_{m-1}^{n+1}\left[26\alpha_4-\theta_3\tfrac{40}{h^2}\right]+\sigma_{m}^{n+1}\left[66\alpha_4+\theta_3\tfrac{120}{h^2}\right]+ \\ &\sigma_{m+1}^{n+1}\left[26\alpha_4-\theta_3\tfrac{40}{h^2}\right]+\sigma_{m+2}^{n+1}\left[\alpha_4-\theta_3\tfrac{20}{h^2}\right]=e(x_m,t_n) \end{aligned} \tag{4.38}$$

denklem sistemleri elde edilir. (4.37-4.38) denklem sistemleri birlikte $2N+2$ denklem ve

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta} &= \left(\delta_{-2},\delta_{-1},\delta_0,\ldots\delta_N,\delta_{N+1},\delta_{N+2}\right)^T, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \left(\sigma_{-2},\sigma_{-1},\sigma_0,\ldots,\sigma_N,\sigma_{N+1},\sigma_{N+2}\right)^T \end{aligned}$$

olmak üzere $2N+10$ bilinmeyenden oluşur. Elde edilen denklem sisteminde denklem ve bilinmeyen sayısını eşitlemek için

$$\begin{aligned} u(a,t) &= g_0(t), \qquad u(b,t) = g_1(t), \quad t \geq 0, \\ u_x(a,t) &= g_2(t), \qquad u_x(b,t) = g_3(t), \quad t \geq 0, \\ v(a,t) &= g_0'(t), \qquad v(b,t) = g_1'(t), \quad t \geq 0, \\ v_x(a,t) &= g_2'(t), \qquad v_x(b,t) = g_3'(t), \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

sınır koşulları kullanılarak elde edilen ilave 8 denklem sisteme eklenirse $2N + 10$ denklem ve $2N + 10$ bilinmeyenden oluşan denklem sistemi elde edilir. Denklem sisteminin çözülebilmesi için öncelikle $t = 0$ zamanındaki

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}^0 &= (\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \ldots, \delta_{N+1}^0, \delta_{N+2}^0)^T \\ \boldsymbol{\sigma}^0 &= (\sigma_{-1}^0, \sigma_0^0, \ldots, \sigma_{N+1}^0, \sigma_{N+2}^0)^T \end{aligned}$$

başlangıç vektörlerinin hesaplanması gerekmektedir. Bunun için problemin başlangıç koşulları olan

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f_0(x) \\ v(x,0) &= f_1(x) \end{aligned}$$

eşitlikleri yerine $x = x_m$,$m = 0, 1, \ldots, N$ için

$$\begin{aligned} U(x_m,0) &= \delta_{m-2}^0 + 26\delta_{m-1}^0 + 66\delta_m^0 + 26\delta_{m+1}^0 + \delta_{m+2}^0 = f_0(x_m) \\ V(x_m,0) &= \sigma_{m-2}^0 + 26\sigma_{m-1}^0 + 66\sigma_m^0 + 26\sigma_{m+1}^0 + \sigma_{m+2}^0 = f_1(x_m) \end{aligned}$$

olarak bilinen kuintik B-spline eşitlikleri kullanılırsa $(2N+10)$ bilinmeyen ve $(2N+2)$ denklemden oluşan bir sistem elde edilir. Başlangıç şartlarının $x = x_0$ ve $x = x_N$ için konuma göre birinci ve ikinci türevleri kullanılırsa $m = 0, N$ için

$$U'(x_0,0) = \frac{5}{h}(-\delta_{-2} - 10\delta_{-1} + 10\delta_1 + \delta_2), \tag{4.39}$$

$$U''(x_0,0) = \frac{20}{h^2}(\delta_{-2} + 2\delta_{-1} - 6\delta_0 + 2\delta_1 + \delta_2), \tag{4.40}$$

$$U'(x_N,0) = \frac{5}{h}(-\delta_{N-2} - 10\delta_{N-1} + 10\delta_{N+1} + \delta_{N+2}), \tag{4.41}$$

$$U''(x_N,0) = \frac{20}{h^2}(\delta_{N-2} + 2\delta_{N-1} - 6\delta_N + 2\delta_{N+1} + \delta_{N+2}), \tag{4.42}$$

$$V'(x_0,0) = \frac{5}{h}(-\sigma_{-2} - 10\sigma_{-1} + 10\sigma_1 + \sigma_2), \tag{4.43}$$

$$V''(x_0,0) = \frac{20}{h^2}(\delta_{-2}+2\delta_{-1}-6\delta_0+2\delta_1+\delta_2), \quad (4.44)$$

$$V'(x_N,0) = \frac{5}{h}(-\delta_{N-2}-10\delta_{N-1}+10\delta_{N+1}+\delta_{N+2}), \quad (4.45)$$

$$V''(x_N,0) = \frac{20}{h^2}(\delta_{N-2}+2\delta_{N-1}-6\delta_N+2\delta_{N+1}+\delta_{N+2}) \quad (4.46)$$

olarak ilave 8 denklem elde edilir. 8 denklemin sisteme eklenmesi ile $(2N+10)$ bilinmeyen ve $(2N+10)$ denklemden oluşan bir sistem bulunur. Bu sistem çözülerek $t=0$ zamanındaki

$$\boldsymbol{\delta}^0 = (\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \ldots, \delta_{N+1}^0, \delta_{N+2}^0)^T$$
$$\boldsymbol{\sigma}^0 = (\sigma_{-1}^0, \sigma_0^0, \ldots, \sigma_{N+1}^0, \sigma_{N+2}^0)^T$$

başlangıç vektörleri hesaplanabilir ve böylece istenilen t zamanındaki yaklaşık çözümler $\boldsymbol{\delta}^0$ ve $\boldsymbol{\sigma}^0$ başlangıç vektörleri yardımıyla iteratif olarak bulunabilir.

4.4. Test Problemleri

Bu bölümde Telegraph denkleminin sayısal çözümü için önerilen Kübik1, Kübik2, Kuartik1, Kuartik2, Kuintik1 ve Kuintik2 yöntemlerinin doğruluğunu test etmek için iki test problemi ele alınacaktır.

4.4.1. Birinci test problemi

3. bölümde tanıtılan birinci test problemi için analitik çözüm ve başlangıç şartları sırasıyla,

$$u(x,t) = (x-x^2)t^2\exp(-t)$$

ve

$$u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0$$

olarak verilmişti. $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=1$ ve

$$f(x,t) = (2-2t+t^2)(x-x^2)\exp(-t)+2t^2\exp(-t)$$

seçimleri yapılarak $0\le x\le 1$ konum aralığı üzerinde programlar $t=1$ zamanına kadar çalıştırılacaktır.

Kübik1, Kübik2, Kuartik1, Kuartik2, Kuintik1 ile Kuintik2 programları $h=0.01$ sabit konum adım uzunluğu ve zaman adım uzunluğu için ise $\Delta t = 1/2^i$,

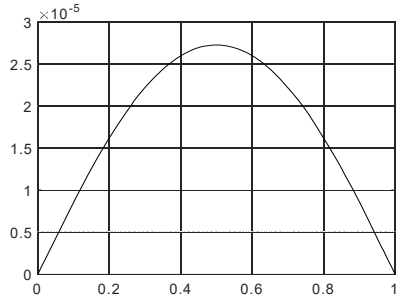
$i = 1, 2, 3, 4, 5$ farklı seçimleriyle çalıştırılmış ve elde edilen L_∞ hata normları ile yakınsama oranları Çizelge 4.1 de verilmiştir.

Çizelge 4.1: $h = 0.01$ ve farklı zaman adımları için hata normları ve yakınsaklık oranları

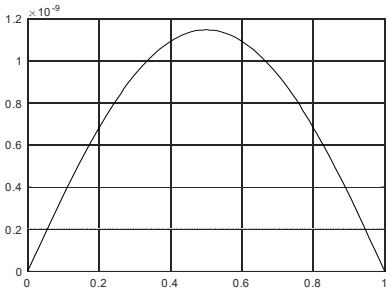
Δt	Kübik1	Y.O	Kübik2	Y.O	Kuartik1	Y.O	Kuartik2	Y.O
1/2	4.63×10^{-3}	–	6.62×10^{-5}	–	4.63×10^{-3}	–	6.62×10^{-5}	–
1/4	1.67×10^{-3}	1.47	4.57×10^{-6}	3.86	1.67×10^{-3}	1.47	4.57×10^{-6}	3.86
1/8	4.63×10^{-4}	1.93	2.92×10^{-7}	3.97	4.63×10^{-4}	1.93	2.92×10^{-7}	3.97
1/16	1.09×10^{-4}	2.00	1.83×10^{-8}	4.00	1.09×10^{-4}	2.00	1.83×10^{-8}	3.99
1/32	2.73×10^{-5}	2.00	1.15×10^{-9}	4.00	2.73×10^{-5}	2.00	1.15×10^{-9}	4.00

Δt	Kuintik1	Y.O	Kuintik2	Y.O
1/2	4.64×10^{-3}	–	6.67×10^{-5}	–
1/4	1.67×10^{-3}	1.47	4.59×10^{-6}	3.86
1/8	4.37×10^{-4}	1.94	2.93×10^{-7}	3.97
1/16	1.09×10^{-4}	2.00	1.85×10^{-8}	3.99
1/32	2.73×10^{-5}	2.00	1.15×10^{-9}	4.00

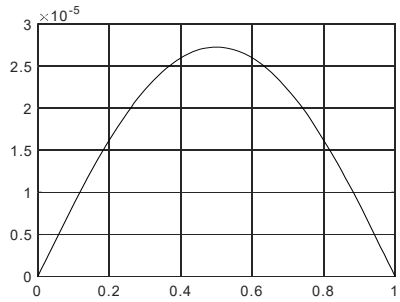
Çizelge 4.1 deki sonuçlara göre zaman parçalanmasında Crank-Nicolson, konum parçalanmasında farklı dereceden B-spline kolokasyon yöntemlerinin kullanıldığı ilk durumda elde edilen sonuçların hemen hemen aynı kaldığı görülmüştür. Benzer şekilde zaman parçalanmasında dördüncü mertebeden tek adımlı yöntem, konum parçalanmasında farklı dereceden B-spline kolokasyon yöntemlerinin kullanıldığı ikinci durumda da hemen hemen aynı sonuçların elde edildiğini ancak Crank-Nicolson zaman parçalanmasının önerildiği ilk duruma göre oldukça iyi sonuçların bulunduğu gözlemlenmektedir. Ayrıca h konum artım uzunluğu için Δt zaman artım uzunluğu küçüldükçe Kübik1, Kuartik1 ve Kuintik1 metotları kullanıldığında elde edilen yakınsama oranlarının Crank-Nicolson zaman parçalanmasının teorik doğruluk değeri olan 2'ye ve Kübik2, Kuartik2 ve Kuintik2 metotları kullanıldığında elde edilen yakınsama oranlarının ise önerilen zaman parçalanmasının teorik doğruluk değeri olan 4'e gittiği, önerilen tüm yöntemler sonucunda elde edilen L_∞ hata normlarının ise giderek azaldığı görülmektedir.



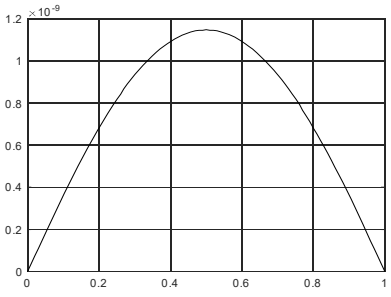
a) Kübik1



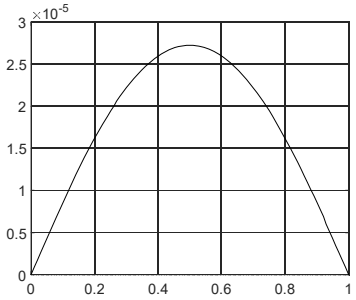
b) Kübik2



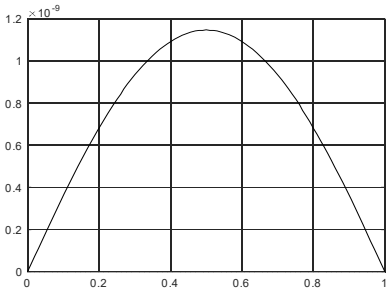
c) Kuartik1



d) Kübik2



e) Kuintik1



f) Kuintik2

Şekil 4.1: $t = 1$ anındaki mutlak hata

Önerilen altı yöntem için zaman ve konum artım uzunluğu $h = 0.01$ ve $\Delta t = 1/32$ alınarak $t = 1$ zamanına kadar çalıştırılan programlar için mutlak hata grafikleri Şekil 4.1 de verilmiştir. Şekil 4.1 incelendiğinde önerilen tüm yöntemler için çizilen grafiklerdeki mutlak hatanın Çizelge 4.1 de verilen L_∞ hatasıyla uyumlu olduğu ve konum aralığının orta noktalarında geldiği görülmektedir. Maksimum hatanın konum aralığının uç noktalarında gelmediği için sınır şartlarının uygulanmasında bir problem olmadığı da söylenebilir.

4.4.2. İkinci test problemi

İkinci test problemi için analitik çözüm ve başlangıç şartları sırasıyla,

$$u(x,t) = \exp(x - 2t)$$

ve

$$u(x,0) = \exp(x), \quad u_t(x,0) = -2\exp(x)$$

olarak 3. bölümde verilmişti. Bu test probleminde $\alpha = 1$, $\beta = 1$ ve $f(x,t) = 0$ seçimleri yapılarak $0 \leq x \leq 1$ konum aralığı üzerinde programlar $t = 1$ zamanına kadar çalıştırılacaktır.

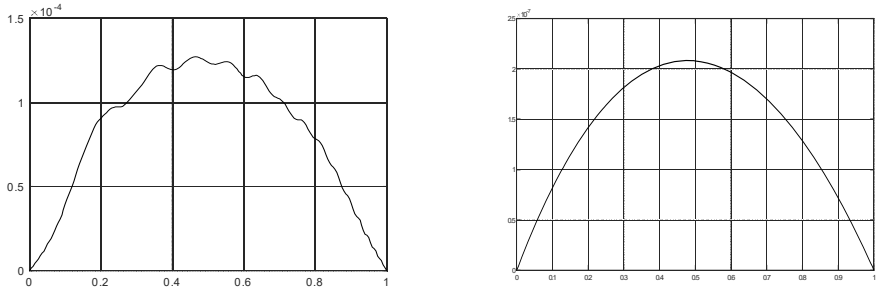
Çizelge 4.2: $h = 0.005$ ve farklı zaman adımları için hata normları ve yakınsaklık oranları

Δt	Kübik1	Y.O	Kübik2	Y.O	Kuartik1	Y.O	Kuartik2	Y.O
1/2	3.02×10^{-2}	–	5.83×10^{-4}	–	3.02×10^{-2}	–	5.82×10^{-4}	–
1/4	9.53×10^{-3}	1.66	3.47×10^{-5}	4.07	9.53×10^{-3}	1.66	3.45×10^{-5}	4.08
1/8	2.41×10^{-3}	1.98	2.32×10^{-6}	3.90	2.41×10^{-3}	1.98	2.12×10^{-6}	4.03
1/16	5.23×10^{-4}	2.20	3.31×10^{-7}	2.81	5.23×10^{-4}	2.20	1.32×10^{-7}	4.01
1/32	1.27×10^{-4}	2.04	2.08×10^{-7}	0.67	1.27×10^{-4}	2.04	8.17×10^{-9}	4.01

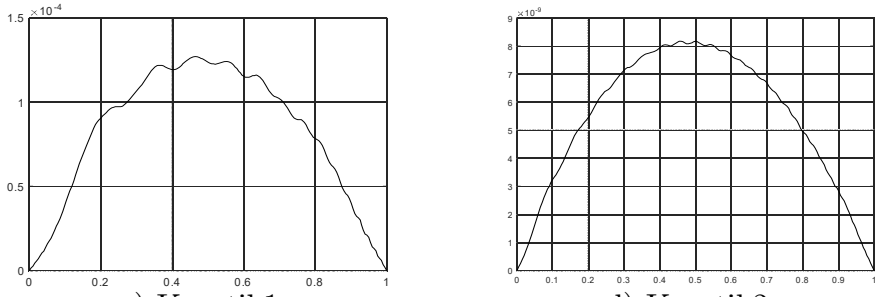
Δt	Kuintik1	Y.O	Kuintik2	Y.O
1/2	3.02×10^{-2}	–	5.84×10^{-4}	–
1/4	9.55×10^{-3}	1.66	3.66×10^{-5}	4.08
1/8	2.41×10^{-3}	1.99	2.12×10^{-6}	4.03
1/16	5.24×10^{-4}	2.20	1.32×10^{-7}	4.01
1/32	1.27×10^{-4}	2.04	8.19×10^{-9}	4.01

Kübik1, Kübik2, Kuartik1, Kuartik2, Kuintik1 ile Kuintik2 programları $h = 0.005$ sabit konum adım uzunluğu ve zaman adım uzunluğu için ise $\Delta t = 1/2^i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ farklı seçimleriyle çalıştırılmış ve elde edilen hata normları ile yakınsama oranları Çizelge 4.2 de verilmiştir. Çizelge 4.2 deki sonuçlar incelendiğinde zaman parçalanmasında Crank-Nicolson yöntemi, konum parçalanmasında farklı dereceden B-spline kolokasyon yöntemlerinin kullanıldığı durumda elde edilen sonuçların hemen hemen aynı kaldığı görülmüştür. Benzer şekilde zaman parçalanmasında

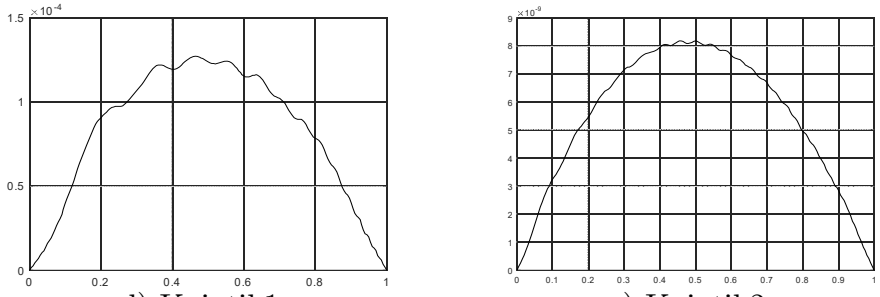
dördüncü mertebeden tek adımlı yöntem, konum parçalanmasında farklı dereceden B-spline kolokasyon yöntemlerinin kullanıldığı ikinci durumda Kuartik2 ve Kuintik2 yöntemleri önerildiğinde bulunan sonuçların Kübik2 yöntemi kullanıldığında bulunan sonuçlara göre daha düşük olduğu ancak Crank-Nicolson zaman parçalanmasının önerildiği ilk duruma göre ise oldukça iyi sonuçların bulunduğu gözlemlenmektedir. Ayrıca, Kübik1, Kuartik1 ve Kuintik1 metotları kullanıldığında elde edilen yakınsama oranlarının Crank-Nicolson zaman parçalanmasının teorik doğruluk değeri olan 2 civarında olduğu, Kuartik2 ile Kuintik2 metotları kullanıldığında elde edilen yakınsama oranlarının ise önerilen zaman parçalanmasının teorik doğruluk değeri olan hemen hemen 4 değerinde olduğu görülmüştür. Önerilen tüm yöntemler sonucunda elde edilen L_∞ hata normlarının ise sabit konum artım uzunluğu için zaman artım uzunluğu küçüldükçe giderek azaldığı görülmektedir.



a) Kübik1 b) Kübik2



c) Kuartik1 d) Kuartik2



d) Kuintik1 e) Kuintik2

Şekil 4.2 : $t = 1$ anındaki mutlak hata

Önerilen metotlar için zaman ve konum artım uzunluğu $h = 0.005$ ve $\Delta t = 1/32$ alınarak $t = 1$ zamanına kadar çalıştırılan programlar için mutlak hata grafikleri Şekil 4.2 de gösterilmiştir. Şekil 4.2 incelendiğinde mutlak hatanın Çizelge 4.2 de verilen L_∞ hatasıyla uyumlu olduğu ve konum aralığının orta noktalarında geldiği görülmektedir. Maksimum hatanın konum aralığının orta kısmında görüldüğü için sınır şartlarının uygulanmasında bir problem olmadığı da söylenebilir.

5. KLEIN-GORDON DENKLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ İÇİN B-SPLİNE KOLOKASYON YÖNTEMİ

3. bölümde (3.68) ile ifade edilen KG denklemi yardımcı fonksiyon yardımıyla (3.72-3.73) lineer olmayan denklem sistemine indirgenmiş ve denklem sisteminin zaman parçalanmaları ise (3.80-3.81) eşitliklerinde elde edilmişti. Bu bölümde kübik, kuartik ve kuintik B-spline kolokasyon yöntemleri ile KG denkleminin yaklaşık çözümlerinin bulunması hedeflenmektedir. KG denkleminin sayısal çözümü için zaman parçalanması olarak Crank-Nicolson yöntemi ve Crank-Nicolson yöntemine göre daha yüksek doğruluğa sahip dördüncü mertebeden tek adımlı yöntem kullanılacaktır. Konum parçalanması için ise kübik, kuartik ve kuintik B-spline kolokasyon yöntemleri önerilmiştir. Yaklaşık çözümlerin doğrulunu test etmek için iki test problemi ele alınacaktır.

5.1. Kübik B-spline Kolokasyon Yöntemi

Bu kısımda KG denkleminin yaklaşık çözümünü elde etmek için konum parçalanmasında kübik B-spline kolokasyon yöntemi önerilecektir. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson (Kübik1) ve dördüncü mertebeden tek adımlı (Kübik2) yöntemleri kullanılacaktır. 3. bölümde (3.16) ile verilen kübik B-spline taban fonksiyonları seçilerek problemin $u\left(x,t\right)$ ve $v\left(x,t\right)$ tam çözümlerine karşılık gelen sırasıyla $U\left(x,t\right)$ ve $V\left(x,t\right)$ yaklaşık çözümleri kübik B-spline fonksiyonları cinsinden çalışılan bölge üzerinde

$$U(x,t) = \sum_{m=-1}^{N+1} \delta_m(t)\Phi_m(x), \tag{5.1}$$

$$V(x,t) = \sum_{m=-1}^{N+1} \sigma_m(t)\Phi_m(x) \tag{5.2}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $m = -1, \ldots, N+1$ için $\delta_m(t)$ ve $\sigma_m(t)$ katsayıları zamana bağlı bilinmeyen parametrelerdir. (5.1-5.2) yaklaşımları (3.80-3.81)

eşitlerinde yerine yazılır ve 4. bölümde hesaplanan (4.3-4.8) ile verilen kübik B-spline eşitlikleri kullanırsa sırasıyla,

$$\begin{aligned} d(x_m,t_n) &= (1-\theta_4\beta-\theta_4\gamma(U^{k-1})_m^n)U_m^n-\theta_4\alpha\,(U_{xx})_m^n+\theta_2V_m^n \\ &\quad +\theta_4 f(x,t^n)+\theta_3 f(x,t^{n+1}) \\ e(x_m,t_n) &= (-\theta_2\beta-\theta_2\gamma(U^{k-1})_m^n)U_m^n-\theta_2\alpha\,(U_{xx})_m^n \\ &\quad +(1-\theta_4\beta-\theta_4\gamma k(U^{k-1})_m^n)V_m^n-\theta_4\alpha\,(v_{xx})_m^n \\ &\quad +\theta_1 f(x_m,t^{n+1})+\theta_2 f(x_m,t^n)+\theta_3 f_t(x_m,t^{n+1})+\theta_4 f_t(x_m,t^n) \end{aligned}$$

ile

$$\begin{aligned} &a_1=1+\theta_3\beta+\theta_3\gamma(U_m^{k-1})^{n+1}, \quad a_3=\theta_1\beta+\theta_1\gamma(U_m^{k-1})^{n+1}, \\ &a_2=\theta_3\alpha, \qquad\qquad\qquad\qquad\quad a_4=\theta_1\alpha \end{aligned}$$

olmak üzere $0\le m\le N$ için

$$\begin{aligned} &\delta_{m-1}^{n+1}\left[a_1+\tfrac{6}{h^2}a_2\right]+\delta_m^{n+1}\left[4a_1-\tfrac{12}{h^2}a_2\right]+\delta_{m+1}^{n+1}\left[a_1+\tfrac{6}{h^2}a_2\right] \\ &+\sigma_{m-1}^{n+1}\left[-\theta_1\right]+\sigma_m^{n+1}\left[-4\theta_1\right]+\sigma_{m+1}^{n+1}\left[-\theta_1\right]=d(x_m,t_n) \end{aligned} \tag{5.3}$$

ve

$$\begin{aligned} &\delta_{m-1}^{n+1}\left[a_3+\tfrac{6}{h^2}a_4\right]+\delta_m^{n+1}\left[4a_3-\tfrac{12}{h^2}a_4\right]+\delta_{m+1}^{n+1}\left[a_3+\tfrac{6}{h^2}a_4\right] \\ &\sigma_{m-1}^{n+1}\left[a_1+\tfrac{6}{h^2}a_2\right]+\sigma_m^{n+1}\left[4a_1-\tfrac{12}{h^2}a_2\right]+\sigma_{m+1}^{n+1}\left[a_1+\tfrac{6}{h^2}a_2\right] \\ &=e(x_m,t_n) \end{aligned} \tag{5.4}$$

lineer olmayan denklem sistemleri elde edilir. (5.3-5.4) denklem sistemleri birlikte $2N+2$ denklem ve

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta} &= (\delta_{-1},\delta_0,\ldots\delta_N,\delta_{N+1})^T, \\ \boldsymbol{\sigma} &= (\sigma_{-1},\sigma_0,\ldots,\sigma_N,\sigma_{N+1})^T \end{aligned}$$

olmak üzere $2N+6$ bilinmeyenden oluşur. Elde edilen denklem sistemindeki denklem ve bilinmeyen sayısını eşitlemek için

$$\begin{aligned} u(a,t) &= g_0(t), \qquad u(b,t) = g_1(t), \quad t\ge 0, \\ v(a,t) &= g_0'(t), \qquad v(b,t) = g_1'(t), \quad t\ge 0, \end{aligned}$$

sınır koşullarını kullanarak ilave 4 denklem sisteme eklenirse $2N+6$ denklem ve $2N+6$ bilinmeyenden oluşan denklem sistemi elde edilir. Denklem sisteminin çözülebilmesi için öncelikle $t=0$ zamanındaki

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}^0 &= (\delta_{-1}^0,\delta_0^0,\ldots,\delta_{N+1}^0)^T \\ \boldsymbol{\sigma}^0 &= (\sigma_{-1}^0,\sigma_0^0,\ldots,\sigma_{N+1}^0)^T \end{aligned}$$

başlangıç vektörlerinin hesaplanması gerekmektedir. Bunun için problemin başlangıç koşulları olan

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f_0(x) \\ v(x,0) &= f_1(x) \end{aligned}$$

eşitlikleri yerine $x = x_m$,$m = 0, 1, \ldots, N$ için

$$\begin{aligned} U(x_m,0) &= \delta_{m-1}^0 + 4\delta_m^0 + \delta_{m+1}^0 = f_0(x_m) \\ V(x_m,0) &= \sigma_{m-1}^0 + 4\sigma_m^0 + \sigma_{m+1}^0 = f_1(x_m) \end{aligned}$$

olarak bilinen kübik B-spline eşitlikleri kullanılırsa $(2N + 6)$ bilinmeyen ve $(2N + 2)$ denklemden oluşan bir sistem elde edilir. Bu sistemin çözülebilir olması için 4. bölümde (4.11-4.12) ile verilen ilave 4 denklemin sisteme eklenmesi ile $(2N + 6)$ bilinmeyen ve $(2N + 6)$ denklemden oluşan bir denklem sisteme ulaşılır. Bu sistem çözülerek $t = 0$ zamanındaki

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}^0 &= (\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \ldots, \delta_{N+1}^0)^T \\ \boldsymbol{\sigma}^0 &= (\sigma_{-1}^0, \sigma_0^0, \ldots, \sigma_{N+1}^0)^T \end{aligned}$$

başlangıç vektörleri hesaplanabilir. Başlangıç vektörleri $\boldsymbol{\delta}^0$ ve $\boldsymbol{\sigma}^0$ hesaplandıktan sonra, bilinmeyen vektörleri

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}^n &= (\delta_{-1}^n, \delta_0^n, \ldots, \delta_{N+1}^n)^T, \\ \boldsymbol{\sigma}^n &= (\sigma_{-1}^n, \sigma_0^n, \ldots, \sigma_{N+1}^n)^T \end{aligned}$$

olmak üzere $n = 1, 2, \ldots$ için iç iterasyon yöntemi kullanılarak istenilen t zamanındaki yaklaşık çözümler iteratif olarak hesaplanır.

5.2. Kuartik B-spline Kolokasyon Yöntemi

Bu kısımda KG denkleminin yaklaşık çözümünü elde etmek için konum parçalanmasında kuartik B-spline kolokasyon yöntemi önerilecektir. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson (Kuartik1) ve dördüncü mertebeden tek adımlı (Kuartik2) yöntemleri kullanılacaktır. 3. bölümde (3.22) ile ifade edilen kuartik B-spline taban fonksiyonları seçilerek problemin $u\,(x,t)$ ve $v\,(x,t)$ analitik

çözümlerine karşılık gelen sırasıyla $U(x,t)$ ve $V(x,t)$ sayısal çözümleri kuartik B-spline fonksiyonları cinsinden verilen bölge üzerinde

$$U(x,t) = \sum_{m=-2}^{N+1} \delta_m(t)\Phi_m(x), \tag{5.5}$$

$$V(x,t) = \sum_{m=-2}^{N+1} \sigma_m(t)\Phi_m(x) \tag{5.6}$$

olarak ifade edilir. Burada $m=-2,\ldots,N+1$ için $\delta_m(t)$ ve $\sigma_m(t)$ katsayıları zamana bağlı bilinmeyen parametrelerdir. (5.5-5.6) yaklaşımları (3.80-3.81) ile verilen zaman parçalanmalarında yerine yazılır ve 4. bölümde hesaplanan (4.15-4.20) ile verilen kuartik B-spline eşitlikleri kullanırsa sırasıyla,

$$\begin{aligned} d(x_m,t_n) &= (1-\theta_4\beta-\theta_4\gamma(U^{k-1})_m^n)U_m^n - \theta_4\alpha\,(U_{xx})_m^n + \theta_2 V_m^n \\ &\quad +\theta_4 f(x,t^n) + \theta_3 f(x,t^{n+1}) \\ e(x_m,t_n) &= (-\theta_2\beta-\theta_2\gamma(U^{k-1})_m^n)U_m^n - \theta_2\alpha\,(U_{xx})_m^n \\ &\quad +(1-\theta_4\beta-\theta_4\gamma k(U^{k-1})_m^n)V_m^n - \theta_4\alpha\,(v_{xx})_m^n \\ &\quad +\theta_1 f(x_m,t^{n+1}) + \theta_2 f(x_m,t^n) + \theta_3 f_t(x_m,t^{n+1}) + \theta_4 f_t(x_m,t^n) \end{aligned}$$

ile

$$\begin{aligned} &a_1 = 1+\theta_3\beta+\theta_3\gamma(U_m^{k-1})^{n+1}, \quad a_3 = \theta_1\beta+\theta_1\gamma(U_m^{k-1})^{n+1}, \\ &a_2 = \theta_3\alpha, \qquad\qquad\qquad\qquad a_4 = \theta_1\alpha \end{aligned}$$

olmak üzere $0 \le m \le N$ için

$$\begin{aligned} &\delta_{m-1}^{n+1}\left[a_1+\tfrac{12}{h^2}a_2\right] + \delta_m^{n+1}\left[11a_1-\tfrac{12}{h^2}a_2\right] + \\ &\delta_{m+1}^{n+1}\left[11a_1-\tfrac{12}{h^2}a_2\right] + \delta_{m+2}^{n+1}\left[a_1+\tfrac{12}{h^2}a_2\right] \\ &+\sigma_{m-1}^{n+1}\left[-\theta_1\right] + \sigma_m^{n+1}\left[-11\theta_1\right] + \sigma_{m+1}^{n+1}\left[-11\theta_1\right] \\ &+\sigma_{m+2}^{n+1}\left[-\theta_1\right] = d(x_m,t_n) \end{aligned} \tag{5.7}$$

ve

$$\begin{aligned} &\delta_{m-1}^{n+1}\left[a_3+\tfrac{12}{h^2}a_4\right] + \delta_m^{n+1}\left[11a_3-\tfrac{12}{h^2}a_4\right] + \\ &\delta_{m+1}^{n+1}\left[11a_3-\tfrac{12}{h^2}a_4\right] + \delta_{m+2}^{n+1}\left[a_3+\tfrac{12}{h^2}a_4\right] \\ &+\sigma_{m-1}^{n+1}\left[a_1+\tfrac{12}{h^2}a_2\right] + \sigma_m^{n+1}\left[11a_1-\tfrac{12}{h^2}a_2\right] + \\ &\sigma_{m+1}^{n+1}\left[11a_1-\tfrac{12}{h^2}a_2\right] + \sigma_{m+2}^{n+1}\left[a_1+\tfrac{12}{h^2}a_2\right] = e(x_m,t_n) \end{aligned} \tag{5.8}$$

lineer olmayan denklem sistemleri elde edilir. (5.7-5.8) denklem sistemleri birlikte $2N+2$ denklem ve

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta} &= (\delta_{-1}, \delta_0, \ldots \delta_N, \delta_{N+1}, \delta_{N+2})^T, \\ \boldsymbol{\sigma} &= (\sigma_{-1}, \sigma_0, \ldots, \sigma_N, \sigma_{N+1,}\sigma_{N+2})^T\end{aligned}$$

olmak üzere $2N+8$ bilinmeyenden oluşur. Elde edilen denklem sistemindeki denklem ve bilinmeyen sayısını eşitlemek için

$$\begin{aligned} u(a,t) &= g_0(t), & u(b,t) &= g_1(t), & t \geq 0, \\ v(a,t) &= g_0'(t), & v(b,t) &= g_1'(t), & t \geq 0, \\ u_x(a,t) &= g_2(t), & v_x(a,t) &= g_2'(t), & t \geq 0, \end{aligned}$$

sınır koşullarını kullanarak ilave 6 denklem sisteme eklenirse $2N+8$ denklem ve $2N+8$ bilinmeyenden oluşan lineer olmayan denklem sistemi elde edilir. Denklem sisteminde iteratif olarak çözüme başlamak için öncelikle $t=0$ zamanındaki

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}^0 &= (\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \ldots, \delta_{N+1}^0, \delta_{N+2}^0)^T \\ \boldsymbol{\sigma}^0 &= (\sigma_{-1}^0, \sigma_0^0, \ldots, \sigma_{N+1}^0, \sigma_{N+2}^0)^T\end{aligned}$$

başlangıç vektörlerinin hesaplanması gerekmektedir. Bunun için problemin başlangıç koşulları olan

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f_0(x) \\ v(x,0) &= f_1(x) \end{aligned}$$

eşitlikleri yerine $x = x_m$,$m = 0, 1, \ldots, N$ için

$$\begin{aligned} U(x_m,0) &= \delta_{m-1}^0 + 11\delta_m^0 + 11\delta_{m+1}^0 + \delta_{m+2}^0 = f_0(x_m) \\ V(x_m,0) &= \sigma_{m-1}^0 + 11\sigma_m^0 + 11\sigma_{m+1}^0 + \sigma_{m+2}^0 = f_1(x_m) \end{aligned}$$

olarak bilinen kuartik B-spline eşitlikleri kullanılırsa $(2N+8)$ bilinmeyen ve $(2N+2)$ denklemden oluşan bir sistem elde edilir. Bu sistemin çözülebilir olması için 4. bölümde (4.23-4.28) ile verilen ilave 6 denklemin sisteme eklenmesi ile $(2N+8)$ bilinmeyen ve $(2N+8)$ denklemden oluşan bir denklem sisteme ulaşılır. Bu sistem çözülerek $t=0$ zamanındaki

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}^0 &= (\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \ldots, \delta_{N+1}^0, \delta_{N+2}^0)^T \\ \boldsymbol{\sigma}^0 &= (\sigma_{-1}^0, \sigma_0^0, \ldots, \sigma_{N+1}^0, \sigma_{N+2}^0)^T\end{aligned}$$

başlangıç vektörleri hesaplanabilir. Başlangıç vektörleri $\boldsymbol{\delta}^0$ ve $\boldsymbol{\sigma}^0$ hesaplandıktan sonra, bilinmeyen vektörleri

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}^n &= (\delta_{-1}^n, \delta_0^n, \ldots, \delta_{N+1}^n, \delta_{N+2}^n)^T, \\ \boldsymbol{\sigma}^n &= (\sigma_{-1}^n, \sigma_0^n, \ldots, \sigma_{N+1}^n, \sigma_{N+2}^n)^T\end{aligned}$$

olmak üzere $n = 1, 2, \ldots$ için iç iterasyon yöntemi kullanılarak istenilen t zamanındaki yaklaşık çözümler iteratif olarak hesaplanır.

5.3. Kuintik B-spline Kolokasyon Yöntemi

Bu kısımda KG denkleminin yaklaşık çözümünü elde etmek için konum parçalanmasında kuintik B-spline kolokasyon yöntemi kullanılacaktır. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson (Kuintik1) ve dördüncü mertebeden tek adımlı (Kuintik2) yöntemleri önerilecektir. 3. bölümde (3.29) ile ifade edilen kuintik B-spline taban fonksiyonları seçilerek problemin $u(x,t)$ ve $v(x,t)$ analitik çözümlerine karşılık gelen sırasıyla $U(x,t)$ ve $V(x,t)$ sayısal çözümleri kuintik B-spline fonksiyonları cinsinden verilen bölge üzerinde

$$U(x,t) = \sum_{m=-2}^{N+2} \delta_m(t)\Phi_m(x), \tag{5.9}$$

$$V(x,t) = \sum_{m=-2}^{N+2} \sigma_m(t)\Phi_m(x) \tag{5.10}$$

olarak ifade edilir. Burada $m = -2, \ldots, N+2$ için $\delta_m(t)$ ve $\sigma_m(t)$ katsayıları zamana bağlı bilinmeyen parametrelerdir. (5.9-5.10) yaklaşımları (3.80-3.81) ile verilen zaman parçalanmalarında yerine yazılır ve 4. bölümde hesaplanan (4.31-4.36) ile verilen kuintik B-spline eşitlikleri kullanırsa sırasıyla,

$$\begin{aligned}d(x_m,t_n) &= (1-\theta_4\beta-\theta_4\gamma(U_m^{k-1})^n)U_m^n - \theta_4\alpha\,(U_{xx})_m^n + \theta_2 V_m^n \\ &\quad +\theta_4 f(x,t^n) + \theta_3 f(x,t^{n+1}) \\ e(x_m,t_n) &= (-\theta_2\beta-\theta_2\gamma(U_m^{k-1})^n)U_m^n - \theta_2\alpha\,(U_{xx})_m^n \\ &\quad +(1-\theta_4\beta-\theta_4\gamma k(U_m^{k-1})^n)V_m^n - \theta_4\alpha\,(V_{xx})_m^n \\ &\quad +\theta_1 f(x_m,t^{n+1}) + \theta_2 f(x_m,t^n) + \theta_3 f_t(x_m,t^{n+1}) + \theta_4 f_t(x_m,t^n),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1+\theta_3\beta+\theta_3\gamma(U_m^{k-1})^{n+1},\\
a_2 &= \theta_3\alpha,\\
a_3 &= \theta_1\beta+\theta_1\gamma(U_m^{k-1})^{n+1},\\
a_4 &= \theta_1\alpha
\end{aligned}
$$

olmak üzere $0 \le m \le N$ için olmak üzere $0 \le m \le N$ için

$$
\begin{aligned}
&\delta_{m-2}^{n+1}\left[a_1+\tfrac{20}{h^2}a_2\right]+\delta_{m-1}^{n+1}\left[26a_1+\tfrac{40}{h^2}a_2\right]+\\
&\delta_{m}^{n+1}\left[66a_1-\tfrac{120}{h^2}a_2\right]+\delta_{m+1}^{n+1}\left[26a_1+\tfrac{40}{h^2}a_2\right]+\\
&\delta_{m+2}^{n+1}\left[a_1+\tfrac{20}{h^2}a_2\right]+\sigma_{m-2}^{n+1}\left[-\theta_1\right]+\sigma_{m-1}^{n+1}\left[-26\theta_1\right]+\\
&\sigma_{m}^{n+1}\left[-66\theta_1\right]+\sigma_{m+1}^{n+1}\left[-26\theta_1\right]+\\
&\sigma_{m+2}^{n+1}\left[-\theta_1\right]=d(x_m,t_n)
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&\delta_{m-2}^{n+1}\left[a_3+\tfrac{20}{h^2}a_4\right]+\delta_{m-1}^{n+1}\left[26a_3+\tfrac{40}{h^2}a_4\right]+\\
&\delta_{m}^{n+1}\left[66a_3-\tfrac{120}{h^2}a_4\right]+\delta_{m+1}^{n+1}\left[26a_3+\tfrac{40}{h^2}a_4\right]+\\
&\delta_{m+2}^{n+1}\left[a_3+\tfrac{20}{h^2}a_4\right]+\sigma_{m-2}^{n+1}\left[a_1+\tfrac{20}{h^2}a_2\right]+\\
&\sigma_{m-1}^{n+1}\left[26a_1+\tfrac{40}{h^2}a_2\right]+\sigma_{m}^{n+1}\left[66a_1-\tfrac{120}{h^2}a_2\right]+\\
&\sigma_{m+1}^{n+1}\left[26a_1+\tfrac{40}{h^2}a_2\right]+\sigma_{m+2}^{n+1}\left[a_1+\tfrac{20}{h^2}a_2\right]=e(x_m,t_n)
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

lineer olmayan denklem sistemleri elde edilir. (5.11) ve (5.12) denklem sistemleri birlikte $2N+2$ denklem ve

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta} &= \left(\delta_{-2},\delta_{-1},\delta_0,\ldots\delta_N,\delta_{N+1},\delta_{N+2}\right)^T,\\
\boldsymbol{\sigma} &= \left(\sigma_{-2},\sigma_{-1},\sigma_0,\ldots,\sigma_N,\sigma_{N+1,}\sigma_{N+2}\right)^T
\end{aligned}
$$

olmak üzere $2N+10$ bilinmeyenden oluşur. Elde edilen denklem sistemindeki denklem ve bilinmeyen sayısını eşitlemek için

$$
\begin{aligned}
u(a,t) &= g_0(t), & u(b,t) &= g_1(t), & t\ge 0,\\
u_x(a,t) &= g_2(t), & u_x(b,t) &= g_3(t), & t\ge 0,\\
v(a,t) &= g_0'(t), & v(b,t) &= g_1'(t), & t\ge 0,\\
v_x(a,t) &= g_2'(t), & v_x(b,t) &= g_3'(t), & t\ge 0,
\end{aligned}
$$

sınır koşullarını kullanarak ilave 8 denklem sisteme eklenirse $2N+10$ denklem ve $2N+10$ bilinmeyenden oluşan lineer olmayan denklem sistemi elde edilir. Denklem

sisteminde iteratif olarak çözüme başlamak için öncelikle $t = 0$ zamanındaki

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}^0 &= (\delta^0_{-2}, \delta^0_{-1}, \ldots, \delta^0_{N+1}, \delta^0_{N+2})^T \\ \boldsymbol{\sigma}^0 &= (\sigma^0_{-2}, \sigma^0_{-1}, \ldots, \sigma^0_{N+1}, \sigma^0_{N+2})^T \end{aligned}$$

başlangıç vektörlerinin hesaplanması gerekmektedir. Bunun için problemin başlangıç koşulları olan

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f_0(x) \\ v(x,0) &= f_1(x) \end{aligned}$$

eşitlikleri yerine $x = x_m$,$m = 0, 1, \ldots, N$ için

$$\begin{aligned} U(x_m,0) &= \delta^0_{m-2} + 26\delta^0_{m-1} + 66\delta^0_m + 26\delta^0_{m+1} + \delta^0_{m+2} = f_0(x_m) \\ V(x_m,0) &= \sigma^0_{m-2} + 26\sigma^0_{m-1} + 66\sigma^0_m + 26\sigma^0_{m+1} + \sigma^0_{m+2} = f_1(x_m) \end{aligned}$$

olarak bilinen kuintik B-spline eşitlikleri kullanılırsa $(2N + 10)$ bilinmeyen ve $(2N + 2)$ denklemden oluşan bir sistem elde edilir. Bu sistemin çözülebilir olması için 4. bölümde (4.39-4.46) ile verilen ilave 8 denklemin sisteme eklenmesi ile $(2N + 10)$ bilinmeyen ve $(2N + 10)$ denklemden oluşan bir denklem sisteme ulaşılır. Bu sistem çözülerek $t = 0$ zamanındaki

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}^0 &= (\delta^0_{-2}, \delta^0_{-1}, \ldots, \delta^0_{N+1}, \delta^0_{N+2})^T \\ \boldsymbol{\sigma}^0 &= (\sigma^0_{-2}, \sigma^0_{-1}, \ldots, \sigma^0_{N+1}, \sigma^0_{N+2})^T \end{aligned}$$

başlangıç vektörleri hesaplanabilir. Başlangıç vektörleri $\boldsymbol{\delta}^0$ ve $\boldsymbol{\sigma}^0$ hesaplandıktan sonra,

$$\boldsymbol{\delta}^n = (\delta^n_{-2}\delta^n_{-1}, \delta^n_0, \ldots, \delta^n_{N+1}, \delta^n_{N+2})^T \quad \boldsymbol{\sigma}^n = (\sigma^n_{-2}, \sigma^n_{-1}, \sigma^n_0, \ldots, \sigma^n_{N+1}, \sigma^n_{N+2})^T$$

bilinmeyen vektörleri olmak üzere $n = 1, 2, \ldots$ için iç iterasyon yöntemi kullanılarak istenilen t zamanındaki yaklaşık çözümler iteratif olarak hesaplanır.

5.4. Test Problemleri

Bu bölümde KG denkleminin sayısal çözümü için önerilen Kübik1, Kübik2, Kuartik1, Kuartik2, Kuintik1 ve Kuintik2 yöntemlerinin doğruluğunu kontrol etmek için iki test problemi incelenecektir.

5.4.1. Birinci test problemi

3. bölümde tanıtılan bu test problemi için analitik çözüm ve başlangıç şartları sırasıyla,

$$u(x,t) = x\cos(t) \text{ ve } u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = 0$$

olarak verilmişti. Bu bölümde $\alpha = -1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $k = 2$ ve

$$f(x,t) = -x\cos(t) + x^2\cos^2(t)$$

seçilerek $-1 \leq x \leq 1$ konum aralığı üzerinde programlar $t = 1$ zamanına kadar çalıştırılacaktır. Kübik1, Kübik2, Kuartik1, Kuartik2, Kuintik1 ile Kuintik2 programları $h = 0.01$ sabit konum adım uzunluğu ve zaman adım uzunluğu için ise $\Delta t = 1/2^i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ farklı seçimleriyle çalıştırılmış ve elde edilen L_∞ hata normları ile yakınsama oranları Çizelge 5.1 de sunulmuştur.

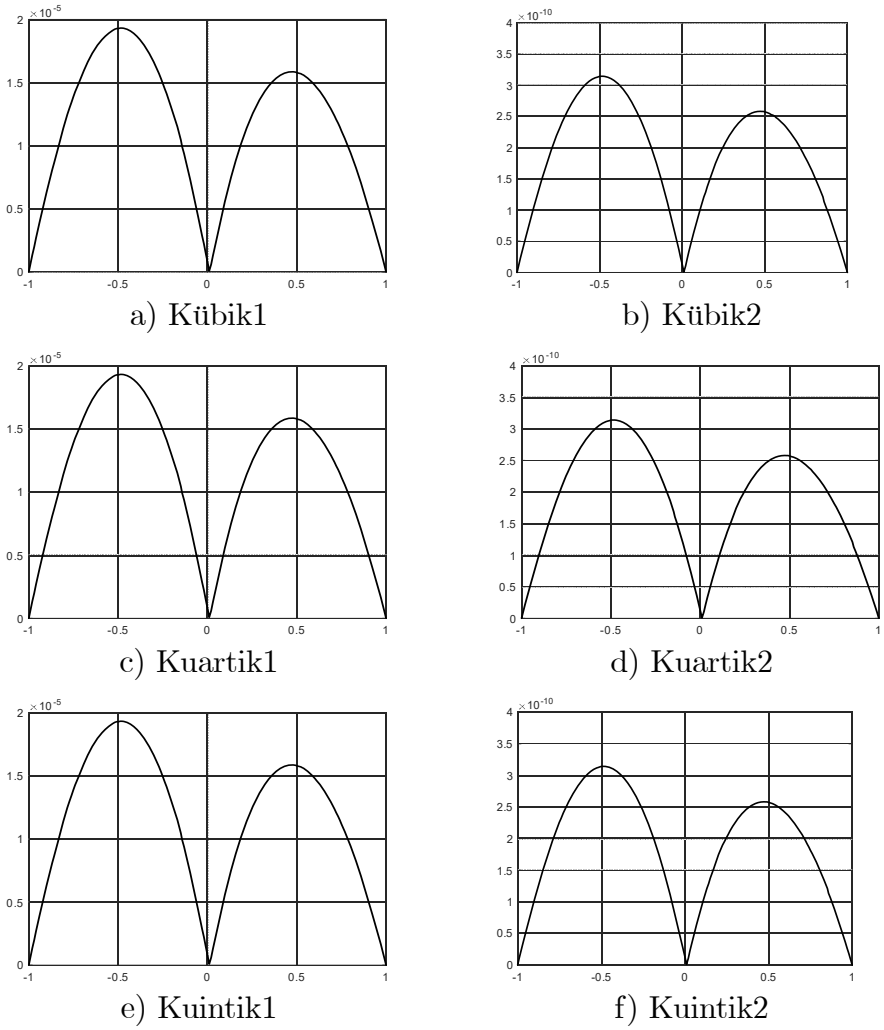
Çizelge 5.1: $h = 0.01$ ve farklı zaman adımları için hata normları ve yakınsaklık oranları

Δt	Kübik1	Y.O	Kübik2	Y.O	Kuartik1	Y.O	Kuartik2	Y.O
1/2	4.81×10^{-3}	–	1.89×10^{-5}	–	4.60×10^{-3}	–	2.00×10^{-5}	–
1/4	1.27×10^{-3}	1.92	1.26×10^{-6}	3.90	1.27×10^{-3}	1.86	1.37×10^{-6}	3.86
1/8	3.10×10^{-4}	2.03	8.01×10^{-8}	3.98	3.09×10^{-4}	2.03	8.04×10^{-7}	4.03
1/16	7.73×10^{-5}	2.00	5.02×10^{-9}	3.99	7.73×10^{-5}	2.00	5.15×10^{-9}	4.03
1/32	1.93×10^{-5}	2.00	3.14×10^{-10}	4.00	1.93×10^{-5}	2.00	3.18×10^{-10}	4.02

Δt	Kuintik1	Y.O	Kuintik2	Y.O
1/2	4.78×10^{-3}	–	2.10×10^{-5}	–
1/4	1.26×10^{-3}	1.92	1.36×10^{-6}	3.95
1/8	3.08×10^{-4}	2.03	8.34×10^{-7}	4.03
1/16	7.68×10^{-5}	2.00	5.11×10^{-9}	4.03
1/32	1.92×10^{-5}	2.00	3.16×10^{-10}	4.02

Çizelge 5.1 deki sonuçlara göre zaman parçalanmasında Crank-Nicolson, konum parçalanmasında farklı dereceden B-spline kolokasyon yöntemlerinin kullanıldığı ilk durumda elde edilen sonuçların hemen hemen aynı kaldığı görülmüştür. Benzer şekilde zaman parçalanmasında dördüncü mertebeden tek adımlı yöntem, konum

parçalanmasında farklı dereceden B-spline kolokasyon yöntemlerinin kullanıldığı ikinci durumda da hemen hemen aynı sonuçların elde edildiğini fakat Crank-Nicolson zaman parçalanmasının kullanıldığı ilk duruma göre daha düşük hataların bulunduğu gözlemlenmektedir. Ayrıca Çizelge 5.1 deki sonuçlar, h konum artım uzunluğu için Δt zaman artım uzunluğu küçüldükçe Kübik1, Kuartik1 ve Kuintik1 metotları kullanıldığında elde edilen yakınsama oranlarının Crank-Nicolson zaman parçalanmasının teorik doğruluk değeri olan 2'ye ve Kübik2, Kuartik2 ve Kuintik2 metotları kullanıldığında elde edilen yakınsama oranlarının ise önerilen zaman parçalanmasının teorik doğruluk değeri olan 4'e gittiğini göstermektedir.



a) Kübik1 b) Kübik2

c) Kuartik1 d) Kuartik2

e) Kuintik1 f) Kuintik2

Şekil 5.1: $t = 1$ anındaki mutlak hata

Önerilen altı yöntem için zaman ve konum artım uzunluğu $h = 0.01$ ve $\Delta t = 1/32$ alınarak $t = 1$ zamanına kadar çalıştırılan programlar için mutlak hata grafikleri Şekil 5.1 de gösterilmiştir. Şekil 5.1 incelendiğinde mutlak hatanın Çizelge 5.1 de

verilen L_∞ hatasıyla uyumlu olduğu ve konum aralığının orta noktalarında geldiği görülmektedir. Maksimum hata konum aralığının uç noktalarında olmadığı için sınır şartlarının uygulanmasında bir problem olmadığı da görülebilir.

5.4.2. İkinci test problemi

İkinci test problemi için analitik çözüm ve başlangıç şartları sırasıyla,

$$u(x,t) = u(x,t) = B\tan(K(x+ct))$$

ve

$$u(x,0) = B\tan(Kx), \quad u_t(x,0) = BcK\sec^2(Kx)$$

olarak 3. bölümde verilmişti. Bu test probleminde $\alpha = -2.5$, $\beta = 1$, $\gamma = 1.5$, $k = 3$ ve $f(x,t) = 0$ seçimleri yapılarak ve

$$c = 0.5, B = \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}, K = \sqrt{\frac{-\beta}{2(\alpha + c^2)}}$$

parametreleri kullanılarak $0 \leq x \leq 1$ konum aralığı üzerinde programlar $t = 1$ zamanına kadar çalıştırılacaktır.

Kübik1, Kübik2, Kuartik1, Kuartik2, Kuintik1 ile Kuintik2 programları $h = 0.0005$ sabit konum adım uzunluğu ve zaman adım uzunluğu için ise $\Delta t = 1/2^i, i = 1, 2, 3, 4$ farklı seçimleriyle çalıştırılmış ve elde edilen L_∞ hata normları ile yakınsama oranları Çizelge 5.2 de sunulmuştur. Çizelge 5.2 deki sonuçlar incelendiğinde zaman parçalanmasında Crank-Nicolson yöntemi, konum parçalanmasında farklı dereceden B-spline kolokasyon yöntemlerinin kullanıldığı ilk durumda elde edilen sonuçların hemen hemen aynı kaldığı gözlemlenmiştir. Benzer şekilde zaman parçalanmasında dördüncü mertebeden tek adımlı yöntem, konum parçalanmasında farklı dereceden B-spline kolokasyon yöntemlerinin kullanıldığı ikinci durumda Kuartik2 ve Kuintik2 yöntemleri tarafından elde edilen hata normlarının Kübik2 yönteminde elde edilen hataya göre daha düşük olduğu görülmektedir. Zaman parçalanması için yüksek doğruluklu yöntem kullanıldığında elde edilen hataların ise Crank-Nicolson zaman parçalanmasının önerildiği ilk durumda elde edilen hatalara göre oldukça düşük kaldığıda görülmektedir. Ayrıca, Kübik1, Kuartik1 ve Kuintik1

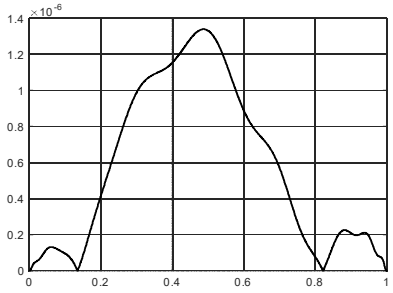
metotları kullanıldığında elde edilen yakınsama oranlarının Crank-Nicolson zaman parçalanmasının teorik doğruluk değeri olan 2 civarında olduğu, Kuartik2 ile Kuintik2 metotları kullanıldığında elde edilen yakınsama oranlarının ise zaman artım uzunluğu küçüldükçe zaman parçalanmasının teorik doğruluk değeri olan 4'e gittiği, bu durumun Kübik2 için gözlemlenmediği görülmektedir.

Çizelge 5.2: $h = 0.0005$ ve farklı zaman adımları için hata normları ve yakınsaklık oranları

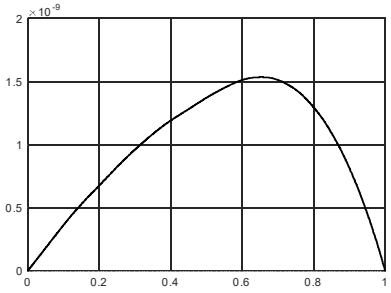
Δt	Kübik1	Y.O	Kübik2	Y.O	Kuartik1	Y.O	Kuartik2	Y.O
1/2	4.26×10^{-5}	–	3.80×10^{-7}	–	4.22×10^{-5}	–	1.55×10^{-7}	–
1/4	1.94×10^{-5}	1.13	2.14×10^{-8}	4.15	1.94×10^{-5}	1.12	1.42×10^{-8}	3.45
1/8	4.47×10^{-6}	2.12	1.16×10^{-9}	4.21	4.47×10^{-6}	2.12	9.79×10^{-10}	3.86
1/16	1.34×10^{-6}	1.74	1.53×10^{-9}	0.04	1.34×10^{-6}	1.74	6.34×10^{-11}	3.95

Δt	Kuintik1	Y.O	Kuintik2	Y.O
1/2	4.21×10^{-5}	–	1.53×10^{-7}	–
1/4	1.94×10^{-5}	1.11	1.41×10^{-8}	3.43
1/8	4.47×10^{-6}	2.12	9.92×10^{-10}	3.83
1/16	1.34×10^{-6}	1.74	6.46×10^{-11}	3.94

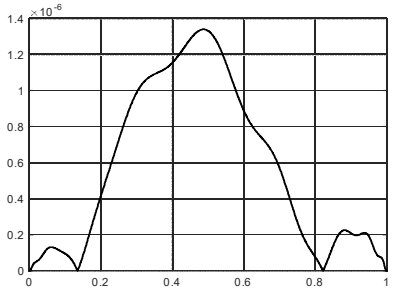
KG denkleminin yaklaşık çözümü için önerilen 6 metot için zaman ve konum artım uzunluğu $h = 0.0005$ ve $\Delta t = 1/16$ alınarak $t = 1$ zamanına kadar çalıştırılan programlar için mutlak hata grafikleri Şekil 5.2 de gösterilmiştir. Şekil 5.2 incelendiğinde mutlak hatanın Çizelge 5.2 de verilen L_∞ hatasıyla uyumlu olduğu ve konum aralığının orta noktalarında geldiği görülmektedir. Maksimum hata konum aralığının orta noktalarında geldiği için sınır şartlarının uygulanmasında bir problem olmadığı da söylenebilir.



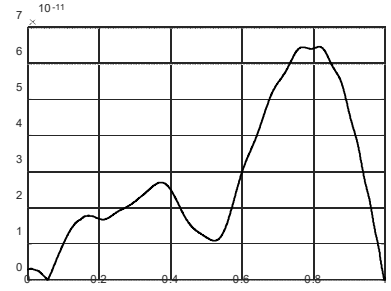
a) Kübik1



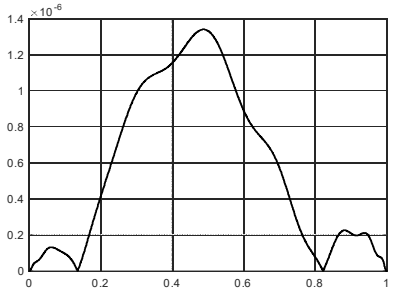
b) Kübik2



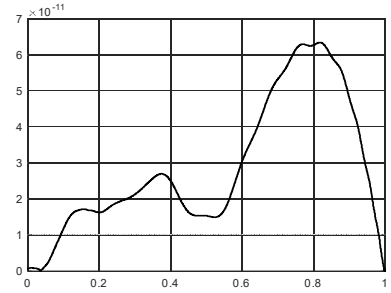
c) Kuartik1



d) Kuartik2



e) Kuintik1



f) Kuintik2

Şekil 5.2 : $t = 1$ anındaki mutlak hata

6. TELEGRAPH DENKLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ İÇİN B-SPLİNE GALERKİN YÖNTEMİ

3. bölümde (3.43) ile tanıtılan Telegraph denklemi yardımcı fonksiyon yardımıyla (3.47-3.48) lineer denklem sistemine indirgenmiş ve denklem sisteminin zaman parçalanmaları (3.58-3.59) eşitliklerinde elde edilmişti. Bu bölümde kübik, kuartik ve kuintik B-spline Galerkin yöntemleri ile Telegraph denkleminin sayısal çözümlerinin bulunması hedeflenmektedir. Telegraph denkleminin sayısal çözümü için zaman parçalanması olarak Crank-Nicolson yöntemi ve Crank-Nicolson yöntemine göre daha yüksek doğruluğa sahip dördüncü mertebeden tek adımlı yöntem kullanılacaktır. Konum parçalanması için ise kübik, kuartik ve kuintik B-spline Galerkin yöntemleri önerilmiştir. Yaklaşık çözümlerin doğrulunu test etmek için iki test problemi incelenecektir. $W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere (3.58-3.59) ile verilen zaman parçalanmalarına Galerkin yöntemi uygulanırsa sırasıyla,

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \int_a^b W(x)\left[\left(1+\theta_3\beta^2\right)u^{n+1}-\theta_3 u_{xx}^{n+1}\right]dx,\\
a_2 &= (2\alpha\theta_3-\theta_1)\int_a^b W(x)v^{n+1}dx,\\
a_3 &= \int_a^b W(x)\left[(1-\theta_4\beta^2)u^n+\theta_4 u_{xx}^n\right]dx,\\
a_4 &= (-2\alpha\theta_4+\theta_2)\int_a^b W(x)v^n dx,\\
a_5 &= \int_a^b W(x)\left[\theta_3 f(x,t^{n+1})+\theta_4 f(x,t^n)\right]dx,\\
b_1 &= \int_a^b W(x)\left[\left(\beta^2\theta_1-2\alpha\beta^2\theta_3\right)u^{n+1}+(-\theta_1+2\alpha\theta_3)u_{xx}^{n+1}\right]dx,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_2 &= \int_a^b W(x)\left[\left(1+2\alpha\theta_1+\beta^2\theta_3-4\alpha^2\theta_3\right)v^{n+1}-\theta_3 v_{xx}^{n+1}\right]dx,\\
b_3 &= \int_a^b W(x)\left[(-\beta^2\theta_2+2\alpha\beta^2\theta_4)u^n+(\theta_2-2\alpha\theta_4)u_{xx}^n\right]dx,\\
b_4 &= \int_a^b W(x)\left[(1-2\alpha\theta_2-\beta^2\theta_4+4\alpha^2\theta_4)v^n+\theta_4 v_{xx}^n\right]dx,\\
b_5 &= \int_a^b W(x)\left[(-2\alpha\theta_4+\theta_2)f(x,t^n)+\theta_4 f_t(x,t^n)\right]dx,\\
&\quad+\int_a^b W(x)\left[((\theta_1-2\alpha\theta_3)f(x,t^{n+1})+\theta_3 f_t(x,t^{n+1})\right]dx
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$a_1+a_2=a_3+a_4+a_5 \tag{6.1}$$

ve

$$b_1+b_2=b_3+b_4+b_5 \tag{6.2}$$

eşitlikleri elde edilir.

6.1. Kübik B-spline Galerkin Yöntemi

Bu kısımda Telegraph denkleminin sayısal çözümünü elde etmek için konum parçalanmasında kübik B-spline Galerkin yöntemi kullanılacaktır. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson (Kübik1) ve dördüncü mertebeden tek adımlı (Kübik2) yöntemleri önerilecektir. Galerkin yönteminde $[a,b]$ konum aralığı N eşit uzunluktaki alt aralığa parçalanırsa $[x_m,x_{m+1}]$ alt aralığı üzerinde (6.1-6.2) ile verilen eşitlikler

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\left[\left(1+\theta_3\beta^2\right)u^{n+1}-\theta_3 u_{xx}^{n+1}\right]dx,\\
c_2 &= (2\alpha\theta_3-\theta_1)\int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)v^{n+1}dx,\\
c_3 &= \int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\left[(1-\theta_4\beta^2)u^n+\theta_4 u_{xx}^n\right]dx,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_4 &= (-2\alpha\theta_4+\theta_2)\int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)v^n dx,\\
c_5 &= \int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\left[\theta_3 f(x,t^{n+1})+\theta_4 f(x,t^n)\right]dx,\\
d_1 &= \int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\left[\left(\beta^2\theta_1-2\alpha\beta^2\theta_3\right)u^{n+1}+(-\theta_1+2\alpha\theta_3)u_{xx}^{n+1}\right]dx,\\
d_2 &= \int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\left[\left(1+2\alpha\theta_1+\beta^2\theta_3-4\alpha^2\theta_3\right)v^{n+1}-\theta_3 v_{xx}^{n+1}\right]dx,\\
d_3 &= \int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\left[(-\beta^2\theta_2+2\alpha\beta^2\theta_4)u^n+(\theta_2-2\alpha\theta_4)u_{xx}^n\right]dx,\\
d_4 &= \int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\left[(1-2\alpha\theta_2-\beta^2\theta_4+4\alpha^2\theta_4)v^n+\theta_4 v_{xx}^n\right]dx,\\
d_5 &= \int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\left[(-2\alpha\theta_4+\theta_2)f(x,t^n)+\theta_4 f_t(x,t^n)\right]dx,\\
&\quad+\int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\left[((\theta_1-2\alpha\theta_3)f(x,t^{n+1})+\theta_3 f_t(x,t^{n+1})\right]dx
\end{aligned}
$$

olmak üzere $m=0,1,\ldots,N-1$ için sırasıyla,

$$c_1+c_2-(c_3+c_4+c_5) \tag{6.3}$$

ve

$$d_1+d_2-(d_3+d_4+d_5) \tag{6.4}$$

olur. (6.3)-(6.4) yaklaşımlarında $\xi = x - x_m$ dönüşümü yapılırsa $[x_m, x_{m+1}]$ alt aralığı $[0,h]$ aralığına dönüşecektir. $[0,h]$ aralığı üzerinde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu için (3.17-3.20) ile verilen kübik B-spline şekil fonksiyonları, bilinmeyen u ve v fonksiyonları ve türevleri için (3.21) yaklaşımı kullanıldığında $i = m-1$, m, $m+1$, $m+2$ olmak üzere (6.3-6.4) yaklaşımları sırasıyla

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \sum_{j=m-1}^{m+2}\left\{\int_0^h \Phi_i\left[\left(1+\theta_3\beta^2\right)\Phi_j-\theta_3\Phi_j''\right]d\xi\right\},\\
e_2 &= (2\alpha\theta_3-\theta_1)\sum_{j=m-1}^{m+2}\left\{\int_0^h \Phi_i\Phi_j d\xi\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e_3 &= \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[(1-\theta_4\beta^2)\Phi_j + \theta_4 \Phi_j'' \right] d\xi \right\}, \\
e_4 &= (-2\alpha\theta_4 + \theta_2) \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \Phi_j d\xi \right\}, \\
e_5 &= \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[\theta_3 f(\xi, t^{n+1}) + \theta_4 f(\xi, t^n) \right] d\xi \right\}, \\
f_1 &= \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[\left(\beta^2\theta_1 - 2\alpha\beta^2\theta_3 \right) \Phi_j + (-\theta_1 + 2\alpha\theta_3)\Phi_j'' \right] d\xi \right\}, \\
f_2 &= \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[\left(1 + 2\alpha\theta_1 + \beta^2\theta_3 - 4\alpha^2\theta_3 \right) \Phi_j - \theta_3 \Phi_j'' \right] d\xi \right\}, \\
f_3 &= \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[(-\beta^2\theta_2 + 2\alpha\beta^2\theta_4)\Phi_j + (\theta_2 - 2\alpha\theta_4)\Phi_j'' \right] d\xi \right\}, \\
f_4 &= \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[(1 - 2\alpha\theta_2 - \beta^2\theta_4 + 4\alpha^2\theta_4)\Phi_j + \theta_4 \Phi_j'' \right] d\xi \right\}, \\
f_5 &= \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[(-2\alpha\theta_4 + \theta_2) f(\xi, t^n) + \theta_4 f_t(\xi, t^n) \right] d\xi \right\}, \\
&\quad + \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[(\theta_1 - 2\alpha\theta_3) f(\xi, t^{n+1}) + \theta_3 f_t(\xi, t^{n+1}) \right] d\xi \right\}
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$
e_1\delta_j^{n+1} + e_2\sigma_j^{n+1} - \left(e_3\delta_j^n + e_4\sigma_j^n + e_5 \right) \tag{6.5}
$$

ve

$$
f_1\delta_j^{n+1} + f_2\sigma_j^{n+1} - \left(f_3\delta_j^n + f_4\sigma_j^n + f_5 \right) \tag{6.6}
$$

olarak elde edilir. (6.5-6.6) ifadelerinde gerekli düzenlenmeler yapıldıktan sonra

$$
\begin{aligned}
A_{ij}^e &= \int_0^h \Phi_i \Phi_j d\xi, \\
B_{ij}^e &= \int_0^h \Phi_i \Phi_j'' d\xi,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_i^e &= \int_0^h \Phi_i \left[\theta_3 f(\xi, t^{n+1}) + \theta_4 f(\xi, t^n)\right] d\xi, \\
F_i^e &= \int_0^h \Phi_i \left[(-2\alpha\theta_4 + \theta_2) f(\xi, t^n) + \theta_4 f_t(\xi, t^n)\right] d\xi \\
&\quad + \int_0^h \Phi_i \left[(\theta_1 - 2\alpha\theta_3) f(\xi, t^{n+1}) + \theta_3 f_t(\xi, t^{n+1})\right] d\xi \\
\delta^e &= (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2})^T, \\
\sigma^e &= (\sigma_{m-1,}\sigma_m, \sigma_{m+1}, \sigma_{m+2})^T
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(1 + \theta_3\beta^2\right) A^e - \theta_3 B^e\right] (\delta^e)^{n+1} + \left[(2\alpha\theta_3 - \theta_1) A^e\right] (\sigma^e)^{n+1} \\
&- \left[(1 - \theta_4\beta^2) A^e + \theta_4 B^e\right] (\delta^e)^n - \left[(-2\alpha\theta_4 + \theta_2) A^e\right] (\sigma^e)^n - D^e
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(\beta^2\theta_1 - 2\alpha\beta^2\theta_3\right) A^e + (-\theta_1 + 2\alpha\theta_3) B^e\right] (\delta^e)^{n+1} + \\
&\left[\left(1 + 2\alpha\theta_1 + \beta^2\theta_3 - 4\alpha^2\theta_3\right) A^e - \theta_3 B^e\right] (\sigma^e)^{n+1} - \\
&\left[(-\beta^2\theta_2 + 2\alpha\beta^2\theta_4) A^e + (\theta_2 - 2\alpha\theta_4) B^e\right] (\delta^e)^n - \\
&\left[(1 - 2\alpha\theta_2 - \beta^2\theta_4 + 4\alpha^2\theta_4) A^e + \theta_4 B^e\right] (\sigma^e)^n - F^e
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

eleman matrisleri elde edilir. Burada elde edilen eleman matrislerinin $m = 0, 1, \ldots, N-1$ için uygun şekilde birbirine eklenmesi sonucunda

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta} &= (\delta_{-1}, \delta_0, \ldots, \delta_N, \delta_{N+1})^T, \\
\boldsymbol{\sigma} &= (\sigma_{-1}, \sigma_0, \ldots, \sigma_N, \sigma_{N+1})^T
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(1 + \theta_3\beta^2\right) \mathbf{A} - \theta_3 \mathbf{B}\right] \boldsymbol{\delta}^{n+1} + \left[(2\alpha\theta_3 - \theta_1)\right] \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \\
&\left[(1 - \theta_4\beta^2)\mathbf{A} + \theta_4 \mathbf{B}\right] \boldsymbol{\delta}^n + \left[(-2\alpha\theta_4 + \theta_2)\mathbf{A}\right] \boldsymbol{\delta}^n + \mathbf{D}
\end{aligned}
\tag{6.9}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(\beta^2\theta_1 - 2\alpha\beta^2\theta_3\right) \mathbf{A} + (-\theta_1 + 2\alpha\theta_3)\mathbf{B}\right] \boldsymbol{\delta}^{n+1} + \\
&\left[\left(1 + 2\alpha\theta_1 + \beta^2\theta_3 - 4\alpha^2\theta_3\right) \mathbf{A} - \theta_3 \mathbf{B}\right] \boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \\
&\left[(-\beta^2\theta_2 + 2\alpha\beta^2\theta_4)\mathbf{A} + (\theta_2 - 2\alpha\theta_4)\mathbf{B}\right] \boldsymbol{\delta}^n + \\
&\left[(1 - 2\alpha\theta_2 - \beta^2\theta_4 + 4\alpha^2\theta_4)\mathbf{A} + \theta_4 \mathbf{B}\right] \boldsymbol{\sigma}^n + \mathbf{F}
\end{aligned}
\tag{6.10}
$$

lineer denklem sistemleri elde edilir. (6.9) ve (6.10) denklem sistemleri birlikte $2N+6$ denklem ve $2N+6$ bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. Sınır şartlarını elde edilen

sisteme uygulayabilmek için denklem sistemindeki ilk 2 ve son 2 denklem silinerek bölgenin uç noktalarındaki

$$\begin{aligned} u(a,t) &= g_0(t), \qquad u(b,t) = g_1(t), \quad t \geq 0, \\ v(a,t) &= g_0'(t), \qquad v(b,t) = g_1'(t), \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

sınır şartları kullanılarak δ_{-1}^{n+1}, δ_{N+1}^{n+1}, σ_{-1}^{n+1}, σ_{N+1}^{n+1} parametreleri sistemden yok edilirse $(2N+2)$ denklem ve $(2N+2)$ bilinmeyenden oluşan matris sistemine indirgenmiş olur. Denklem sisteminde iteratif olarak çözüme başlamak için öncelikle $t = 0$ zamanındaki

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}^0 &= (\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \ldots, \delta_{N+1}^0)^T \\ \boldsymbol{\sigma}^0 &= (\sigma_{-1}^0, \sigma_0^0, \ldots, \sigma_{N+1}^0)^T \end{aligned}$$

başlangıç vektörlerinin hesaplanması gerekmektedir. Bunun için problemin başlangıç koşulları

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f_0(x), \qquad a \leq x \leq b, \\ v(x,0) &= f_1(x), \qquad a \leq x \leq b, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} u_x(a,0) = (f_0)_x(a,0) \quad u_x(b,0) = (f_0)_x(b,0) \\ v_x(a,0) = (f_1)_x(a,0) \quad v_x(b,0) = (f_1)_x(b,0) \end{aligned}$$

ilave şartlar kullanılarak başlangıç vektörleri hesaplanır. Başlangıç vektörleri $\boldsymbol{\delta}^0$ ve $\boldsymbol{\sigma}^0$ hesaplandıktan sonra, bilinmeyen vektörleri

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}^n &= (\delta_{-1}^n, \delta_0^n, \ldots, \delta_{N+1}^n)^T, \\ \boldsymbol{\sigma}^n &= (\sigma_{-1}^n, \sigma_0^n, \ldots, \sigma_{N+1}^n)^T \end{aligned}$$

olmak üzere $n = 1, 2, \ldots$ için istenilen t zamanındaki yaklaşık çözümler iteratif olarak hesaplanır.

6.2. Kuartik B-spline Galerkin Yöntemi

Bu kısımda Telegraph denkleminin sayısal çözümünü elde etmek için konum parçalanmasında kuartik B-spline Galerkin yöntemi kullanılacaktır. Zaman

parçalanması için Crank-Nicolson (Kuartik1) ve dördüncü mertebeden tek adımlı (Kuartik2) yöntemleri önerilecektir. Bu bölümde (6.3)-(6.4) ile ifade edilen yaklaşımlarda $\xi = x - x_m$ dönüşümü yapılırsa $[x_m, x_{m+1}]$ alt aralığı $[0, h]$ aralığına dönüşecektir. $[0, h]$ aralığı üzerinde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu için (3.23-3.27) ile verilen kuartik B-spline şekil fonksiyonları, bilinmeyen u ve v fonksiyonları ve türevleri için (3.28) yaklaşımı kullanıldığında $i = m-2, m-1,\ m,\ m+1,\ m+2$ olmak üzere (6.3-6.4) yaklaşımları sırasıyla

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[\left(1 + \theta_3\beta^2\right) \Phi_j - \theta_3 \Phi_j'' \right] d\xi \right\}, \\
e_2 &= (2\alpha\theta_3 - \theta_1) \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \Phi_j d\xi \right\}, \\
e_3 &= \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[(1 - \theta_4\beta^2)\Phi_j + \theta_4 \Phi_j'' \right] d\xi \right\}, \\
e_4 &= (-2\alpha\theta_4 + \theta_2) \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \Phi_j d\xi \right\}, \\
e_5 &= \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[\theta_3 f(\xi, t^{n+1}) + \theta_4 f(\xi, t^n) \right] d\xi \right\}, \\
f_1 &= \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[\left(\beta^2\theta_1 - 2\alpha\beta^2\theta_3\right) \Phi_j + (-\theta_1 + 2\alpha\theta_3)\Phi_j'' \right] d\xi \right\}, \\
f_2 &= \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[\left(1 + 2\alpha\theta_1 + \beta^2\theta_3 - 4\alpha^2\theta_3\right) \Phi_j - \theta_3 \Phi_j'' \right] d\xi \right\}, \\
f_3 &= \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[(-\beta^2\theta_2 + 2\alpha\beta^2\theta_4)\Phi_j + (\theta_2 - 2\alpha\theta_4)\Phi_j'' \right] d\xi \right\}, \\
f_4 &= \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[(1 - 2\alpha\theta_2 - \beta^2\theta_4 + 4\alpha^2\theta_4)\Phi_j + \theta_4 \Phi_j'' \right] d\xi \right\}, \\
f_5 &= \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[(-2\alpha\theta_4 + \theta_2) f(\xi, t^n) + \theta_4 f_t(\xi, t^n) \right] d\xi \right\}, \\
&\quad + \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[(\theta_1 - 2\alpha\theta_3) f(\xi, t^{n+1}) + \theta_3 f_t(\xi, t^{n+1}) \right] d\xi \right\}
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$e_1\delta_j^{n+1} + e_2\sigma_j^{n+1} - \left(e_3\delta_j^n + e_4\sigma_j^n + e_5\right) \tag{6.11}$$

ve

$$f_1\delta_j^{n+1} + f_2\sigma_j^{n+1} - \left(f_3\delta_j^n + f_4\sigma_j^n + f_5\right) \tag{6.12}$$

olarak elde edilir. (6.11-6.12) ifadelerinde gerekli düzenlenmeler yapıldıktan sonra

$$\begin{aligned} i &= m-2, m-1, m, m+1, m+2, \\ j &= m-2, m-1, m, m+1, m+2 \end{aligned}$$

için

$$\begin{aligned} A_{ij}^e &= \int_0^h \Phi_i \Phi_j d\xi, \\ B_{ij}^e &= \int_0^h \Phi_i \Phi_j^{''} d\xi, \\ D_i^e &= \int_0^h \Phi_i \left[\theta_3 f(\xi, t^{n+1}) + \theta_4 f(\xi, t^n)\right] d\xi, \\ F_i^e &= \int_0^h \Phi_i \left[(-2\alpha\theta_4 + \theta_2) f(\xi, t^n) + \theta_4 f_t(\xi, t^n)\right] d\xi \\ &\quad + \int_0^h \Phi_i \left[(\theta_1 - 2\alpha\theta_3) f(\xi, t^{n+1}) + \theta_3 f_t(\xi, t^{n+1})\right] d\xi \\ \delta^e &= (\delta_{m-2}, \delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2})^T, \\ \sigma^e &= (\sigma_{m-2,}\sigma_{m-1,}\sigma_m, \sigma_{m+1}, \sigma_{m+2})^T \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} &\left[\left(1 + \theta_3\beta^2\right) A^e - \theta_3 B^e\right] (\delta^e)^{n+1} + \left[(2\alpha\theta_3 - \theta_1) A^e\right] (\sigma^e)^{n+1} \\ &- \left[(1 - \theta_4\beta^2) A^e + \theta_4 B_{ij}^e\right] (\delta^e)^n - \left[(-2\alpha\theta_4 + \theta_2) A^e\right] (\sigma^e)^n - D^e \end{aligned} \tag{6.13}$$

ile

$$\begin{aligned} &\left[\left(\beta^2\theta_1 - 2\alpha\beta^2\theta_3\right) A^e + (-\theta_1 + 2\alpha\theta_3) B^e\right] (\delta^e)^{n+1} + \\ &\left[\left(1 + 2\alpha\theta_1 + \beta^2\theta_3 - 4\alpha^2\theta_3\right) A^e - \theta_3 B^e\right] (\sigma^e)^{n+1} - \\ &\left[(-\beta^2\theta_2 + 2\alpha\beta^2\theta_4) A^e + (\theta_2 - 2\alpha\theta_4) B^e\right] (\delta^e)^n - \\ &\left[(1 - 2\alpha\theta_2 - \beta^2\theta_4 + 4\alpha^2\theta_4) A^e + \theta_4 B^e\right] (\sigma^e)^n - F^e \end{aligned} \tag{6.14}$$

eleman matrisleri elde edilir. Burada elde edilen eleman matrislerinin $m = 0, 1, \ldots, N-1$ için uygun şekilde birbirine eklenmesi sonucunda

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta} &= (\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \ldots, \delta_N, \delta_{n+1})^T, \\ \boldsymbol{\sigma} &= (\sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0, \ldots, \sigma_N, \sigma_{N+1})^T \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} &\left[\left(1+\theta_3\beta^2\right)\mathbf{A} - \theta_3\mathbf{B}\right]\boldsymbol{\delta}^{n+1} + \left[(2\alpha\theta_3 - \theta_1)\right]\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \\ &\left[(1-\theta_4\beta^2)\mathbf{A} + \theta_4\mathbf{B}\right]\boldsymbol{\delta}^{n} + \left[(-2\alpha\theta_4 + \theta_2)\mathbf{A}\right]\boldsymbol{\delta}^{n} + \mathbf{D} \end{aligned} \tag{6.15}$$

ile

$$\begin{aligned} &\left[\left(\beta^2\theta_1 - 2\alpha\beta^2\theta_3\right)\mathbf{A} + (-\theta_1 + 2\alpha\theta_3)\mathbf{B}\right]\boldsymbol{\delta}^{n+1} + \\ &\left[\left(1 + 2\alpha\theta_1 + \beta^2\theta_3 - 4\alpha^2\theta_3\right)\mathbf{A} - \theta_3\mathbf{B}\right]\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \\ &\left[(-\beta^2\theta_2 + 2\alpha\beta^2\theta_4)\mathbf{A} + (\theta_2 - 2\alpha\theta_4)\mathbf{B}\right]\boldsymbol{\delta}^{n} + \\ &\left[(1 - 2\alpha\theta_2 - \beta^2\theta_4 + 4\alpha^2\theta_4)\mathbf{A} + \theta_4\mathbf{B}\right]\boldsymbol{\sigma}^{n} + \mathbf{F} \end{aligned} \tag{6.16}$$

lineer denklem sistemleri elde edilir. (6.15) ve (6.16) denklem sistemleri birlikte $2N+8$ denklem ve $2N+8$ bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. Sınır şartlarını elde edilen sisteme uygulayabilmek için denklem sistemindeki ilk 2 ve son 2 denklem silinerek bölgenin uç noktalarındaki

$$\begin{aligned} u(a,t) &= g_0(t), \qquad u(b,t) = g_1(t), \quad t \geq 0, \\ v(a,t) &= g_0'(t), \qquad v(b,t) = g_1'(t), \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

sınır şartları kullanılarak $\delta_{-2}^{n+1}, \delta_{N+1}^{n+1}, \sigma_{-2}^{n+1}, \sigma_{N+1}^{n+1}$ parametreleri sistemden yok edilirse $(2N+4)\times(2N+4)$ çözülebilir matris sistemine indirgenmiş olur. Denklem sisteminde iteratif olarak çözüme başlamak için öncelikle $t=0$ zamanındaki

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}^0 &= (\delta_{-2}^0, \delta_{-1}^0, \delta_0^0, \ldots, \delta_{N+1}^0)^T \\ \boldsymbol{\sigma}^0 &= (\sigma_{-2}^0, \sigma_{-1}^0, \sigma_0^0, \ldots, \sigma_{N+1}^0)^T \end{aligned}$$

başlangıç vektörlerinin hesaplanması gerekmektedir. Bunun için problemin başlangıç koşulları

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f_0(x), \qquad a \leq x \leq b, \\ v(x,0) &= f_1(x), \qquad a \leq x \leq b, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} u_x(a,0) &= (f_0)_x(a,0), \qquad v_x(a,0) = (f_1)_x(a,0), \\ u_{xx}(a,0) &= (f_0)_{xx}(a,0), \quad v_{xx}(a,0) = (f_1)_{xx}(a,0), \\ u_x(b,0) &= (f_0)_x(b,0), \qquad v_x(b,0) = (f_1)_x(b,0) \end{aligned}$$

ilave şartlar kullanılarak başlangıç vektörleri hesaplanır. Başlangıç vektörleri $\boldsymbol{\delta}^0$ ve $\boldsymbol{\sigma}^0$ hesaplandıktan sonra, bilinmeyen vektörleri

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}^n &= (\delta_{-2}^n, \delta_{-1}^n, \delta_0^n, \ldots, \delta_{N+1}^n)^T \\ \boldsymbol{\sigma}^n &= (\sigma_{-2}^n, \sigma_{-1}^n, \sigma_0^n, \ldots, \sigma_{N+1}^n)^T \end{aligned}$$

olmak üzere $n = 1, 2, \ldots$ için istenilen t zamanındaki yaklaşık çözümler iteratif olarak hesaplanır.

6.3. Kuintik B-spline Galerkin Yöntemi

Bu kısımda Telegraph denkleminin sayısal çözümünü elde etmek için konum parçalanmasında kuintik B-spline Galerkin yöntemi kullanılacaktır. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson (Kuintik1) ve dördüncü mertebeden tek adımlı (Kuintik2) yöntemleri önerilecektir. Bu ölümde (6.3)-(6.4) ile ifade edilen yaklaşımlarda $\xi = x - x_m$ dönüşümü yapılırsa $[x_m, x_{m+1}]$ alt aralığı $[0, h]$ aralığına dönüşecektir. $[0, h]$ aralığı üzerinde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu için (3.30-3.35) ile verilen kuintik B-spline şekil fonksiyonları, bilinmeyen u ve v fonksiyonları ve türevleri için (3.36) yaklaşımı kullanıldığında

$$i = m-2, m-1, m, m+1, m+2, m+3$$

olmak üzere (6.3-6.4) yaklaşımları sırasıyla

$$\begin{aligned} e_1 &= \sum_{j=m-2}^{m+3} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[\left(1 + \theta_3 \beta^2\right) \Phi_j - \theta_3 \Phi_j'' \right] d\xi \right\}, \\ e_2 &= (2\alpha\theta_3 - \theta_1) \sum_{j=m-2}^{m+3} \left\{ \int_0^h \Phi_i \Phi_j d\xi \right\}, \\ e_3 &= \sum_{j=m-2}^{m+3} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[(1 - \theta_4 \beta^2) \Phi_j + \theta_4 \Phi_j'' \right] d\xi \right\}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
e_4 &= (-2\alpha\theta_4+\theta_2)\sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\int_0^h \Phi_i\Phi_j d\xi\right\},\\
e_5 &= \sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\int_0^h \Phi_i\left[\theta_3 f(\xi,t^{n+1})+\theta_4 f(\xi,t^n)\right]d\xi\right\},\\
f_1 &= \sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\int_0^h \Phi_i\left[\left(\beta^2\theta_1-2\alpha\beta^2\theta_3\right)\Phi_j+(-\theta_1+2\alpha\theta_3)\Phi_j''\right]d\xi\right\},\\
f_2 &= \sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\int_0^h \Phi_i\left[\left(1+2\alpha\theta_1+\beta^2\theta_3-4\alpha^2\theta_3\right)\Phi_j-\theta_3\Phi_j''\right]d\xi\right\},\\
f_3 &= \sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\int_0^h \Phi_i\left[(-\beta^2\theta_2+2\alpha\beta^2\theta_4)\Phi_j+(\theta_2-2\alpha\theta_4)\Phi_j''\right]d\xi\right\},\\
f_4 &= \sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\int_0^h \Phi_i\left[(1-2\alpha\theta_2-\beta^2\theta_4+4\alpha^2\theta_4)\Phi_j+\theta_4\Phi_j''\right]d\xi\right\},\\
f_5 &= \sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\int_0^h \Phi_i\left[(-2\alpha\theta_4+\theta_2)f(\xi,t^n)+\theta_4 f_t(\xi,t^n)\right]d\xi\right\},\\
&\quad+\sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\int_0^h \Phi_i\left[(\theta_1-2\alpha\theta_3)f(\xi,t^{n+1})+\theta_3 f_t(\xi,t^{n+1})\right]d\xi\right\}
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$e_1\delta_j^{n+1}+e_2\sigma_j^{n+1}-\left(e_3\delta_j^n+e_4\sigma_j^n+e_5\right) \tag{6.17}$$

ve

$$f_1\delta_j^{n+1}+f_2\sigma_j^{n+1}-\left(f_3\delta_j^n+f_4\sigma_j^n+f_5\right) \tag{6.18}$$

olarak elde edilir. (6.17-6.18) ifadelerinde gerekli düzenlenmeler yapıldıktan sonra

$$
\begin{aligned}
i &= m-2,m-1,m,m+1,m+2,m+3\\
j &= m-2,m-1,m,m+1,m+2,m+3
\end{aligned}
$$

için

$$
\begin{aligned}
A_{ij}^e &= \int_0^h \Phi_i\Phi_j d\xi,\\
B_{ij}^e &= \int_0^h \Phi_i\Phi_j'' d\xi,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_i^e &= \int_0^h \Phi_i \left[\theta_3 f(\xi, t^{n+1}) + \theta_4 f(\xi, t^n)\right] d\xi, \\
F_i^e &= \int_0^h \Phi_i \left[(-2\alpha\theta_4 + \theta_2) f(\xi, t^n) + \theta_4 f_t(\xi, t^n)\right] d\xi \\
&\quad + \int_0^h \Phi_i \left[(\theta_1 - 2\alpha\theta_3) f(\xi, t^{n+1}) + \theta_3 f_t(\xi, t^{n+1})\right] d\xi \\
\delta^e &= (\delta_{m-2}, \delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2}, \delta_{m+3})^T, \\
\sigma^e &= (\sigma_{m-2,}\sigma_{m-1,}\sigma_m, \sigma_{m+1}, \sigma_{m+2}, \sigma_{m+3})^T
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(1 + \theta_3\beta^2\right) A^e - \theta_3 B^e\right] (\delta^e)^{n+1} + \left[(2\alpha\theta_3 - \theta_1) A^e\right] (\sigma^e)^{n+1} \\
&- \left[(1 - \theta_4\beta^2) A^e + \theta_4 B^e\right] (\delta^e)^n - \left[(-2\alpha\theta_4 + \theta_2) A^e\right] (\sigma^e)^n - D^e
\end{aligned}
\tag{6.19}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(\beta^2\theta_1 - 2\alpha\beta^2\theta_3\right) A^e + (-\theta_1 + 2\alpha\theta_3) B^e\right] (\delta^e)^{n+1} + \\
&\left[\left(1 + 2\alpha\theta_1 + \beta^2\theta_3 - 4\alpha^2\theta_3\right) A^e - \theta_3 B^e\right] (\sigma^e)^{n+1} - \\
&\left[(-\beta^2\theta_2 + 2\alpha\beta^2\theta_4) A^e + (\theta_2 - 2\alpha\theta_4) B^e\right] (\delta^e)^n - \\
&\left[(1 - 2\alpha\theta_2 - \beta^2\theta_4 + 4\alpha^2\theta_4) A^e + \theta_4 B^e\right] (\sigma^e)^n - F^e
\end{aligned}
\tag{6.20}
$$

eleman matrisleri elde edilir. Burada elde edilen eleman matrislerinin $m = 0, 1, \ldots, N-1$ için uygun şekilde birbirine eklenmesi sonucunda

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta} &= (\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \ldots, \delta_N, \delta_{N+1}, \delta_{N+2})^T, \\
\boldsymbol{\sigma} &= (\sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0, \ldots, \sigma_N, \sigma_{N+1}, \sigma_{N+2})^T
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(1 + \theta_3\beta^2\right) \mathbf{A} - \theta_3 \mathbf{B}\right] \boldsymbol{\delta}^{n+1} + \left[(2\alpha\theta_3 - \theta_1)\right] \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \\
&\left[(1 - \theta_4\beta^2)\mathbf{A} + \theta_4 \mathbf{B}\right] \boldsymbol{\delta}^n + \left[(-2\alpha\theta_4 + \theta_2)\mathbf{A}\right] \boldsymbol{\delta}^n + \mathbf{D}
\end{aligned}
\tag{6.21}
$$

ile

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(\beta^2\theta_1 - 2\alpha\beta^2\theta_3\right) \mathbf{A} + (-\theta_1 + 2\alpha\theta_3)\mathbf{B}\right] \boldsymbol{\delta}^{n+1} + \\
&\left[\left(1 + 2\alpha\theta_1 + \beta^2\theta_3 - 4\alpha^2\theta_3\right) \mathbf{A} - \theta_3 \mathbf{B}\right] \boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \\
&\left[(-\beta^2\theta_2 + 2\alpha\beta^2\theta_4)\mathbf{A} + (\theta_2 - 2\alpha\theta_4)\mathbf{B}\right] \boldsymbol{\delta}^n + \\
&\left[(1 - 2\alpha\theta_2 - \beta^2\theta_4 + 4\alpha^2\theta_4)\mathbf{A} + \theta_4 \mathbf{B}\right] \boldsymbol{\sigma}^n + \mathbf{F}
\end{aligned}
\tag{6.22}
$$

lineer denklem sistemleri elde edilir. (6.21) ve (6.22) denklem sistemleri birlikte $2N+10$ denklem ve $2N+10$ bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. Sınır şartlarını elde edilen sisteme uygulayabilmek için denklem sistemindeki ilk 2 ve son 2 denklem silinerek bölgenin uç noktalarındaki

$$\begin{aligned} u(a,t) &= g_0(t), \qquad u(b,t) = g_1(t), \quad t \geq 0, \\ v(a,t) &= g_0'(t), \qquad v(b,t) = g_1'(t), \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

sınır şartları kullanılarak

$$\delta_{-2}^{n+1}, \delta_{N+2}^{n+1}, \sigma_{-2}^{n+1}, \sigma_{N+2}^{n+1}$$

parametreleri yok edilirse $(2N+6)\times(2N+6)$ boyutlu çözülebilir denklem sistemine indirgenmiş olur. Denklem sisteminde iteratif olarak çözüme başlamak için öncelikle $t=0$ zamanındaki

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}^0 &= (\delta_{-2}^0, \delta_{-1}^0, \delta_0^0, \ldots, \delta_{N+1}^0, \delta_{N+2}^0)^T \\ \boldsymbol{\sigma}^0 &= (\sigma_{-2}^0, \sigma_{-1}^0, \sigma_0^0, \ldots, \sigma_{N+1}^0, \sigma_{N+2}^0)^T \end{aligned}$$

başlangıç vektörlerinin hesaplanması gerekmektedir. Bunun için problemin başlangıç koşulları

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f_0(x), \qquad a \leq x \leq b, \\ v(x,0) &= f_1(x), \qquad a \leq x \leq b, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} u_x(a,0) &= (f_0)_x(a,0) \qquad v_x(a,0) = (f_1)_x(a,0) \\ u_{xx}(a,0) &= (f_0)_{xx}(a,0) \quad v_{xx}(a,0) = (f_1)_{xx}(a,0) \\ u_x(b,0) &= (f_0)_x(b,0) \qquad v_x(b,0) = (f_1)_x(b,0) \\ u_{xx}(b,0) &= (f_0)_{xx}(b,0) \quad v_{xx}(b,0) = (f_1)_{xx}(b,0) \end{aligned}$$

ilave şartlar kullanılarak başlangıç vektörleri hesaplanır. Başlangıç vektörleri $\boldsymbol{\delta}^0$ ve $\boldsymbol{\sigma}^0$ hesaplandıktan sonra, bilinmeyen vektörleri

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}^n &= (\delta_{-2}^n, \delta_{-1}^n, \delta_0^n, \ldots, \delta_{N+1}^n, \delta_{N+2}^n)^T, \\ \boldsymbol{\sigma}^n &= (\sigma_{-2}^n, \sigma_{-1}^n, \sigma_0^n, \ldots, \sigma_{N+1}^n, \sigma_{N+2}^n)^T \end{aligned}$$

olmak üzere $n = 1, 2, \ldots$ için istenilen t zamanındaki yaklaşık çözümler iteratif olarak hesaplanır.

6.4. Test Problemleri

Bu bölümde Telegraph denkleminin sayısal çözümü için önerilen 6 farklı yöntemin doğruluğunu test etmek için iki test problemi ele alınacaktır.

6.4.1. Birinci test problemi

3. bölümde tanıtılan birinci test problemi için analitik çözüm ve başlangıç şartları sırasıyla,

$$u(x,t) = (x - x^2)t^2 \exp(-t)$$

ve

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0, \\ u_t(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

olarak verilmişti. $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$ ve

$$f\,(x,t) = (2 - 2t + t^2)(x - x^2)\exp(-t) + 2t^2\exp(-t)$$

seçimleri yapılarak $0 \leq x \leq 1$ konum aralığı üzerinde programlar $t = 1$ zamanına kadar çalıştırılacaktır.

Kübik1, Kübik2, Kuartik1, Kuartik2, Kuintik1 ile Kuintik2 programları $h = 0.01$ sabit konum adım uzunluğu ve zaman adım uzunluğu için ise $\Delta t = 1/2^i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ farklı seçimleriyle çalıştırılmış ve elde edilen L_∞ hata normları ile yakınsama oranları Çizelge 6.1 de verilmiştir. Çizelge 6.1 deki sonuçlara göre zaman parçalanmasında Crank-Nicolson yöntemi, konum parçalanmasında farklı dereceden B-spline Galerkin yöntemlerinin kullanıldığı ilk durumda elde edilen sonuçların hemen hemen aynı kaldığı gözlemlenmiştir. Benzer şekilde zaman parçalanmasında dördüncü mertebeden tek adımlı yöntem, konum parçalanmasında farklı dereceden B-spline Galerkin yöntemlerinin kullanıldığı ikinci durumda da sonuçların hemen hemen aynı geldiği ancak Crank-Nicolson zaman parçalanmasının önerildiği ilk duruma göre daha iyi sonuçların bulunduğu görülmektedir. Ayrıca Çizelge 6.1 deki sonuçlar, h konum artım uzunluğu için Δt zaman artım uzunluğu küçüldükçe Kübik1, Kuartik1 ve Kuintik1 metotları kullanıldığında elde edilen yakınsama

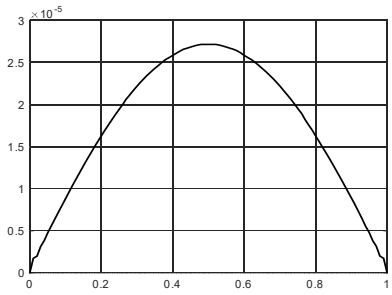
oranlarının Crank-Nicolson zaman parçalanmasının teorik doğruluk değeri olan 2'ye ve Kübik2, Kuartik2 ve Kuintik2 metotları kullanıldığında elde edilen yakınsama oranlarının ise önerilen zaman parçalanmasının teorik doğruluk değeri olan 4'e gittiğini göstermektedir.

Çizelge 6.1: $h = 0.01$ ve farklı zaman adımları için hata normları ve yakınsaklık oranları

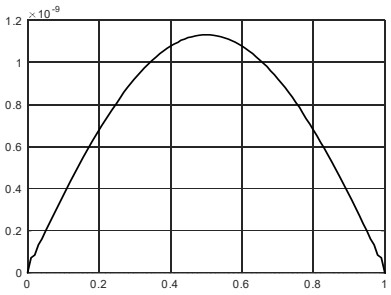
Δt	Kübik1	Y.O	Kübik2	Y.O	Kuartik1	Y.O	Kuartik2	Y.O
1/2	4.63×10^{-3}	–	6.62×10^{-5}	–	4.60×10^{-3}	–	6.46×10^{-5}	–
1/4	1.67×10^{-3}	1.47	4.57×10^{-6}	3.86	1.65×10^{-3}	1.48	4.50×10^{-6}	3.87
1/8	4.63×10^{-4}	1.93	2.92×10^{-7}	3.97	4.32×10^{-4}	1.93	2.87×10^{-7}	3.98
1/16	1.09×10^{-4}	2.00	1.83×10^{-8}	3.99	1.08×10^{-4}	1.99	1.81×10^{-8}	3.99
1/32	2.73×10^{-5}	2.00	1.15×10^{-9}	4.00	2.72×10^{-5}	2.00	1.13×10^{-9}	4.00

Δt	Kuintik1	Y.O	Kuintik2	Y.O
1/2	4.57×10^{-3}	–	6.33×10^{-5}	–
1/4	1.63×10^{-3}	1.48	4.44×10^{-6}	3.83
1/8	4.29×10^{-4}	1.93	2.83×10^{-7}	3.97
1/16	1.08×10^{-4}	1.99	1.78×10^{-8}	3.99
1/32	2.70×10^{-5}	2.00	1.11×10^{-9}	4.00

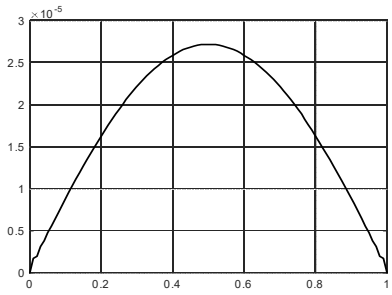
Önerilen yöntemler için zaman ve konum artım uzunluğu $h = 0.01$ ve $\Delta t = 1/32$ alınarak $t = 1$ zamanına kadar çalıştırılan programlar için mutlak hata grafikleri Şekil 6.1 de verilmiştir. Şekil 6.1 incelendiğinde mutlak hatanın Çizelge 6.1 de verilen L_∞ hatasıyla uyumlu olduğu, konum aralığının orta noktalarında geldiği ve dolayısıyla da maksimum hatanın konum aralığının uç noktalarında meydana gelmediği için sınır şartlarının uygulanmasında bir problem olmadığı söylenebilir.



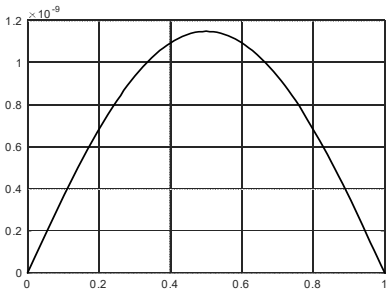
a) Kübik1



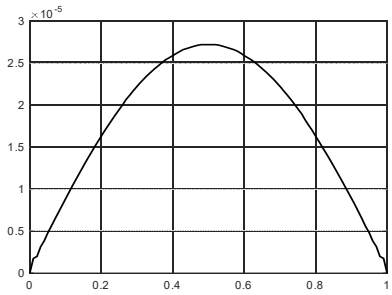
b) Kübik2



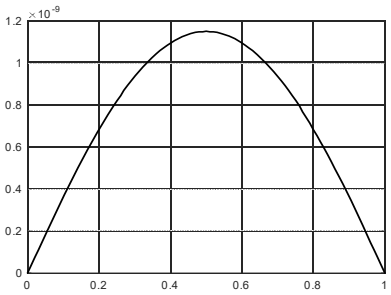
c) Kuartik1



d) Kuartik2



e) Kuintik1



f) Kuintik2

Şekil 6.1: $t = 1$ anındaki mutlak hata

6.4.2. İkinci test problemi

İkinci test problemi için analitik çözüm ve başlangıç şartları sırasıyla,

$$u(x,t) = \exp(x - 2t)$$

ve

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \exp(x), \\ u_t(x,0) &= -2\exp(x) \end{aligned}$$

olarak 3. bölümde verilmişti. Bu test probleminde $\alpha = 1$, $\beta = 1$ ve $f(x,t) = 0$ seçimleri yapılarak $0 \leq x \leq 1$ konum aralığı üzerinde programlar $t = 1$ zamanına kadar çalıştırılacaktır.

Kübik1, Kübik2, Kuartik1, Kuartik2, Kuintik1 ile Kuintik2 programları $h = 0.01$ sabit konum adım uzunluğu ve zaman adım uzunluğu için ise $\Delta t = 1/2^i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ farklı seçimleriyle çalıştırılmış ve elde edilen L_∞ hata normları yakınsama oranları ile birlikte Çizelge 6.2 de verilmiştir.

Çizelge 6.2: $h = 0.005$ ve farklı zaman adımları için hata normları ve yakınsaklık oranları

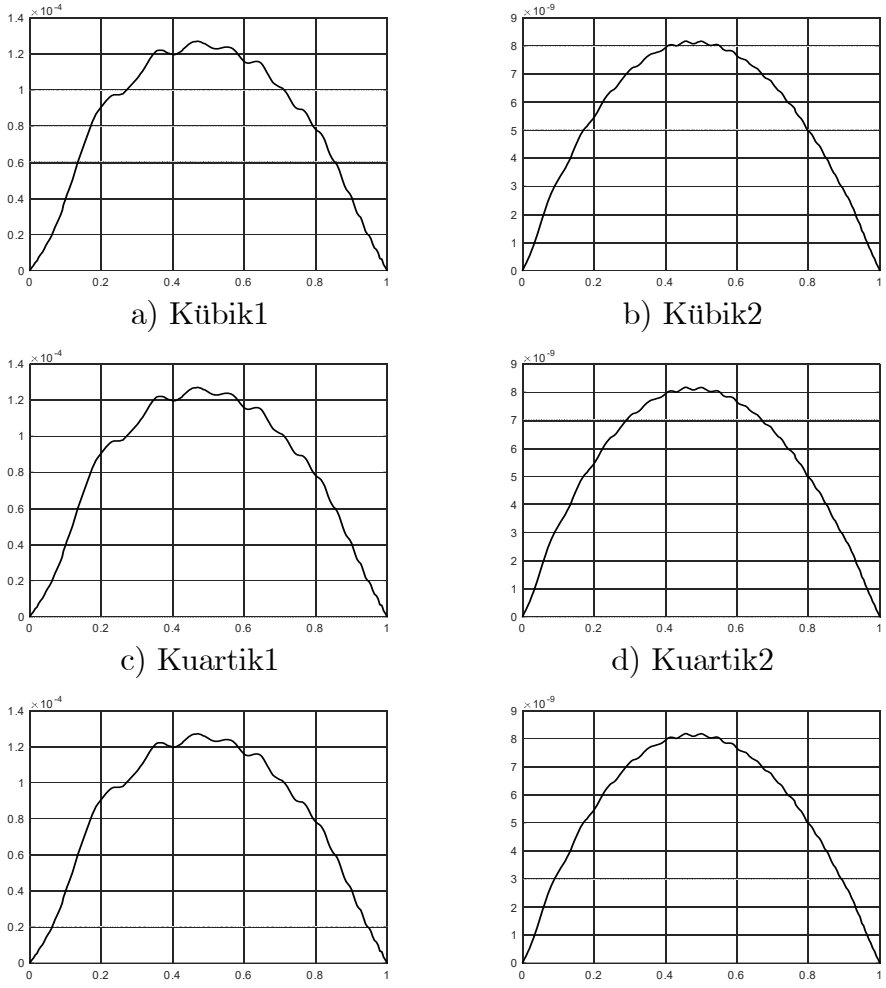
Δt	Kübik1	Y.O	Kübik2	Y.O	Kuartik1	Y.O	Kuartik2	Y.O
1/2	3.02×10^{-2}	–	5.82×10^{-4}	–	3.02×10^{-2}	–	5.82×10^{-4}	–
1/4	9.53×10^{-3}	1.66	3.45×10^{-5}	4.08	9.53×10^{-3}	1.66	3.45×10^{-5}	4.08
1/8	2.41×10^{-3}	1.98	2.12×10^{-6}	4.03	2.41×10^{-3}	1.98	2.12×10^{-6}	4.03
1/16	5.23×10^{-4}	2.21	1.32×10^{-7}	4.01	5.23×10^{-4}	2.21	1.32×10^{-7}	4.01
1/32	1.27×10^{-4}	2.04	8.17×10^{-9}	4.01	1.27×10^{-4}	2.04	8.17×10^{-9}	4.01

Δt	Kuintik1	Y.O	Kuintik2	Y.O
1/2	3.02×10^{-2}	–	5.82×10^{-4}	–
1/4	9.53×10^{-3}	1.66	3.45×10^{-5}	4.08
1/8	2.41×10^{-3}	1.98	2.12×10^{-6}	4.03
1/16	5.23×10^{-4}	2.21	1.32×10^{-7}	4.01
1/32	1.27×10^{-4}	2.04	8.17×10^{-9}	4.01

Çizelge 6.2 deki sonuçlar incelendiğinde, zaman parçalanmasında Crank-Nicolson yöntemi, konum parçalanmasında farklı dereceden B-spline Galerkin yöntemlerinin kullanıldığı ilk durumda elde edilen sonuçların aynı kaldığı görülmüştür. Benzer şekilde zaman parçalanmasında dördüncü mertebeden tek adımlı yöntem, konum parçalanmasında farklı dereceden B-spline Galerkin yöntemlerinin kullanıldığı ikinci durumda da sonuçların aynı kaldığı ancak Crank-Nicolson zaman parçalanmasının önerildiği ilk duruma göre oldukça iyi sonuçların bulunduğu gözlemlenmektedir. Ayrıca, Kübik1, Kuartik1 ve Kuintik1 metotları kullanıldığında elde edilen yakınsama oranlarının Crank-Nicolson zaman parçalanmasının teorik doğruluk

değeri olan 2 civarında ve Kübik2, Kuartik2 ve Kuintik2 metotları kullanıldığında elde edilen yakınsama oranlarının ise önerilen zaman parçalanmasının teorik doğruluk değeri olan 4 civarında olduğu görülmektedir.

Önerilen Kübik1, Kübik2, Kuartik1, Kuartik2, Kuintik1 ve Kuintik2 metotları için zaman ve konum artım uzunluğu $h = 0.005$ ve $\Delta t = 1/32$ alınarak $t = 1$ zamanına kadar çalıştırılan programlar için mutlak hata grafikleri Şekil 6.2 de gösterilmiştir. Şekil 6.2 incelendiğinde mutlak hatanın Çizelge 6.2 de verilen L_∞ hatasıyla uyumlu olduğu ve konum aralığının orta noktalarında geldiği görülmektedir. İlk test probleminde olduğu gibi maksimum hata konum aralığının uç noktalarında meydana gelmediği için sınır şartlarının uygulanmasında bir problem olmadığı da görülür.



a) Kübik1 b) Kübik2

c) Kuartik1 d) Kuartik2

e) Kuintik1 f) Kuintik2

Şekil 6.2: $t = 1$ anındaki mutlak hata

7. KLEIN-GORDON DENKLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ İÇİN B-SPLİNE GALERKİN YÖNTEMİ

3. bölümde (3.68) ile ifade edilen KG denklemi yardımcı fonksiyon yardımıyla (3.72-3.73) lineer olmayan denklem sistemine indirgenmiş ve denklem sisteminin zaman parçalanmaları ise (3.80-3.81) eşitliklerinde elde edilmişti. Bu bölümde kübik, kuartik ve kuintik B-spline Galerkin yöntemleri ile KG denkleminin sayısal çözümlerinin bulunması hedeflenmektedir. KG denkleminin sayısal çözümü için zaman parçalanması olarak Crank-Nicolson yöntemi ve Crank-Nicolson yöntemine göre daha yüksek doğruluğa sahip dördüncü mertebeden tek adımlı yöntem kullanılacaktır. Konum parçalanması için ise kübik, kuartik ve kuintik B-spline Galerkin yöntemleri önerilmiştir. Yaklaşık çözümlerin doğrulunu test etmek için iki test problemi incelenecektir. $W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere (3.80-3.81) ile verilen zaman parçalanmalarına Galerkin yöntemi uygulanırsa sırasıyla,

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \int_a^b W(x)\left[(1+\theta_3\beta+\theta_3\gamma(u^{k-1})^{n+1})u^{n+1}+\theta_3\alpha u_{xx}^{n+1}\right]dx,\\
a_2 &= -\theta_1\int_a^b W(x)v^{n+1}dx,\\
a_3 &= \int_a^b W(x)\left[(1-\theta_4\beta-\theta_4\gamma(u^{k-1})^{n})u^{n}-\theta_4\alpha u_{xx}^{n}\right]dx,\\
a_4 &= \theta_2\int_a^b W(x)v^{n}dx,\\
a_5 &= \int_a^b W(x)\left[\theta_4 f\left(x,t^n\right)+\theta_3 f\left(x,t^{n+1}\right)\right]dx,\\
b_1 &= \int_a^b W(x)\left[(\theta_1\beta+\theta_1\gamma(u^{k-1})^{n+1})u^{n+1}+\theta_1\alpha u_{xx}^{n+1}\right]dx,
\end{aligned}
$$

$$b_2 = \int_a^b W(x)\left[(1+\theta_3\beta+\theta_3\gamma k(u^{k-1})^{n+1})v^{n+1}+\theta_3\alpha v_{xx}^{n+1}\right]dx,$$

$$b_3 = \int_a^b W(x)\left[(-\theta_2\beta-\theta_2\gamma(u^{k-1})^n)u^n-\theta_2\alpha u_{xx}^n\right]dx,$$

$$b_4 = \int_a^b W(x)\left[(1-\theta_4\beta-\theta_4\gamma k(u^{k-1})^n)v^n-\theta_4\alpha v_{xx}^n\right]dx,$$

$$b_5 = \int_a^b W(x)\left[\theta_1 f(x,t^{n+1})+\theta_2 f(x,t^n)+\theta_3 f_t(x,t^{n+1})+\theta_4 f_t(x,t^n)\right]dx$$

olmak üzere

$$a_1+a_2=a_3+a_4+a_5 \tag{7.1}$$

ve

$$b_1+b_2=b_3+b_4+b_5 \tag{7.2}$$

eşitlikleri elde edilir.

7.1. Kübik B-spline Galerkin Yöntemi

Bu kısımda KG denkleminin sayısal çözümünü elde etmek için konum parçalanmasında kübik B-spline Galerkin yöntemi önerilecektir. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson (Kübik1) ve dördüncü mertebeden tek adımlı (Kübik2) yöntemleri kullanılacaktır. Galerkin yönteminde $[a,b]$ konum aralığı N eşit uzunluktaki alt aralığa parçalanırsa $[x_m, x_{m+1}]$ alt aralığı üzerinde (7.1)-(7.2) ile verilen eşitlikler $m=0,1,\ldots,N-1$ için sırasıyla,

$$c_1 = \int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\left[(1+\theta_3\beta+\theta_3\gamma(u^{k-1})^{n+1})u^{n+1}+\theta_3\alpha u_{xx}^{n+1}\right]dx,$$

$$c_2 = -\theta_1\int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)v^{n+1}dx,$$

$$c_3 = \int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\left[(1-\theta_4\beta-\theta_4\gamma(u^{k-1})^n)u^n-\theta_4\alpha u_{xx}^n\right]dx,$$

$$c_4 = \theta_2\int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)v^n dx,$$

$$
\begin{aligned}
c_5 &= \int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\left[\theta_4 f\left(x,t^n\right)+\theta_3 f\left(x,t^{n+1}\right)\right]dx,\\
d_1 &= \int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\left[(\theta_1\beta+\theta_1\gamma(u^{k-1})^{n+1})u^{n+1}+\theta_1\alpha u_{xx}^{n+1}\right]dx,\\
d_2 &= \int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\left[(1+\theta_3\beta+\theta_3\gamma k(u^{k-1})^{n+1})v^{n+1}+\theta_3\alpha v_{xx}^{n+1}\right]dx,\\
d_3 &= \int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\left[(-\theta_2\beta-\theta_2\gamma(u^{k-1})^{n})u^{n}-\theta_2\alpha u_{xx}^{n}\right]dx,\\
d_4 &= \int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\left[(1-\theta_4\beta-\theta_4\gamma k(u^{k-1})^{n})v^{n}-\theta_4\alpha v_{xx}^{n}\right]dx,\\
d_5 &= \int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\left[\theta_1 f(x,t^{n+1})+\theta_2 f(x,t^n)+\theta_3 f_t(x,t^{n+1})+\theta_4 f_t(x,t^n)\right]dx
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$c_1+c_2-(c_3+c_4+c_5) \tag{7.3}$$

ve

$$d_1+d_2-(d_3+d_4+d_5) \tag{7.4}$$

olur. (7.3)-(7.4) yaklaşımlarında $\xi = x-x_m$ dönüşümü yapılırsa $[x_m, x_{m+1}]$ alt aralığı $[0,h]$ aralığına dönüşür. $[0,h]$ aralığı üzerinde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu için (3.17-3.20) ile verilen kübik B-spline şekil fonksiyonları, bilinmeyen u ve v fonksiyonları ve türevleri için (3.21) yaklaşımı kullanıldığında $i = m-1,\ m,\ m+1,\ m+2$ olmak üzere (7.3-7.4) yaklaşımları sırasıyla,

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \sum_{j=m-1}^{m+2}\left\{\int_0^h \Phi_i\left[\left(1+\theta_3\beta+\theta_3\gamma\left(\sum_{r=m-1}^{m+2}\Phi_r\delta_r^{n+1}\right)^{k-1}\right)\Phi_j+\theta_3\alpha\Phi_j''\right]d\zeta\right\},\\
e_2 &= -\theta_1\sum_{j=m-1}^{m+2}\left\{\int_0^h \Phi_i\Phi_j d\zeta\right\},\\
e_3 &= \sum_{j=m-1}^{m+2}\left\{\int_0^h \Phi_i\left[\left(1-\theta_4\beta-\theta_4\gamma\left(\sum_{r=m-1}^{m+2}\Phi_r\delta_r^{n}\right)^{k-1}\right)\Phi_j-\theta_4\alpha\Phi_j''\right]d\zeta\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e_4 &= \theta_2 \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \Phi_j d\zeta \right\}, \\
e_5 &= \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[\theta_4 f\left(x, t^n\right) + \theta_3 f\left(x, t^{n+1}\right) \right] d\zeta \right\}, \\
f_1 &= \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[\left(\theta_1\beta + \theta_1\gamma \left(\sum_{r=m-1}^{m+2} \Phi_r \delta_r^{n+1} \right)^{k-1} \right) \Phi_j + \theta_1 \alpha \Phi_j'' \right] d\zeta \right\}, \\
f_2 &= \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[\left(1 + \theta_3\beta + \theta_3\gamma k \left(\sum_{r=m-1}^{m+2} \Phi_r \delta_r^{n+1} \right)^{k-1} \right) \Phi_j + \theta_3 \alpha \Phi_j'' \right] d\zeta \right\}, \\
f_3 &= \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[\left(-\theta_2\beta - \theta_2\gamma \left(\sum_{r=m-1}^{m+2} \Phi_r \delta_r^{n} \right)^{k-1} \right) \Phi_j - \theta_2 \alpha \Phi_j'' \right] d\zeta \right\}, \\
f_4 &= \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[\left(1 - \theta_4\beta - \theta_4\gamma k \left(\sum_{r=m-1}^{m+2} \Phi_r \delta_r^{n} \right)^{k-1} \right) \Phi_j - \theta_4 \alpha \Phi_j'' \right] d\zeta \right\}, \\
f_5 &= \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[\theta_1 f(x, t^{n+1}) + \theta_2 f(x, t^n) + \theta_3 f_t(x, t^{n+1}) + \theta_4 f_t(x, t^n) \right] d\zeta \right\}
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$e_1\delta_j^{n+1} + e_2\sigma_j^{n+1} - \left(e_3\delta_j^n + e_4\sigma_j^n + e_5\right) \tag{7.5}$$

ve

$$f_1\delta_j^{n+1} + f_2\sigma_j^{n+1} - \left(f_3\delta_j^n + f_4\sigma_j^n + f_5\right) \tag{7.6}$$

olarak elde edilir. (7.5-7.6) ifadelerinde gerekli düzenlenmeler yapıldıktan sonra

$$
\begin{aligned}
i &= m-1, m, m+1, m+2 \\
j &= m-1, m, m+1, m+2
\end{aligned}
$$

için

$$
\begin{aligned}
A_{ij}^e &= \int_0^h \Phi_i \Phi_j d\zeta, \\
B_{ij}^e(\delta^{n+1}) &= \int_0^h \Phi_i \left(\sum_{r=m-1}^{m+2} \Phi_r \delta_r^{n+1} \right)^{k-1} \Phi_j d\zeta, \\
C_{ij}^e &= \int_0^h \Phi_i \Phi_j'' d\zeta,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_i^e &= \int_0^h \Phi_i(\theta_4 f(\zeta, t^n) + \theta_3 f(\zeta, t^{n+1}))d\zeta, \\
E_i^e &= \int_0^h \Phi_i[\theta_1 f(\zeta, t^{n+1}) + \theta_2 f(\zeta, t^n) + \theta_3 f_t(\zeta, t^{n+1}) + \theta_4 f_t(\zeta, t^n)]d\zeta, \\
\delta^e &= (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2})^T, \\
\sigma^e &= (\sigma_{m-1}, \sigma_m, \sigma_{m+1}, \sigma_{m+2})^T
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&\left[(1+\theta_3\beta)\,A^e + \theta_3\gamma B^e((\delta^e)^{n+1}) + \theta_3\alpha C^e\right](\delta^e)^{n+1} - \\
&\theta_1 A^e(\sigma^e)^{n+1} - \left[(1-\theta_4\beta)A^e - \theta_4\gamma B^e((\delta^e)^n) - \theta_4\alpha C^e\right](\delta^e)^n - \\
&\theta_2 A^e(\sigma^e)^n - D^e
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&\left[\theta_1\beta A^e + \theta_1\gamma B^e((\delta^e)^{n+1}) + \theta_1\alpha C^e\right](\delta^e)^{n+1} \\
&+\left[(1+\theta_3\beta)A^e + \theta_3\gamma k B^e((\delta^e)^{n+1}) + \theta_3\alpha C^e\right](\sigma^e)^{n+1} - \\
&\left[-\theta_2\beta A^e - \theta_2\gamma B^e((\delta^e)^n) - \theta_2\alpha C^e\right](\delta^e)^n - \\
&\left[(1-\theta_4\beta)A^e - \theta_4\gamma k B^e((\delta^e)^n) - \theta_4\alpha C^e\right](\sigma^e)^n - E^e
\end{aligned}
\tag{7.8}
$$

eleman matrisleri elde edilir. Burada elde edilen eleman matrislerinin $m = 0, 1, \ldots, N-1$ için uygun bir şekilde birbirlerine eklenmesi sonucunda

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta} &= (\delta_{-1}, \delta_0, \ldots, \delta_{N+1})^T, \\
\boldsymbol{\sigma} &= (\sigma_{-1}, \sigma_0, \ldots, \sigma_{N+1})^T
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&\left[(1+\theta_3\beta)\,\mathbf{A} + \theta_3\gamma\mathbf{B}(\boldsymbol{\delta}^{n+1}) + \theta_3\alpha\mathbf{C}\right]\boldsymbol{\delta}^{n+1} - \\
&\theta_1\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \left[(1-\theta_4\beta)\mathbf{A} - \theta_4\gamma\mathbf{B}(\boldsymbol{\delta}^n) - \theta_4\alpha\mathbf{C}\right]\boldsymbol{\delta}^n \\
&+\theta_2\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}^n + \mathbf{D}
\end{aligned}
\tag{7.9}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&\left[\theta_1\beta\mathbf{A} + \theta_1\gamma\mathbf{B}(\boldsymbol{\delta}^{n+1}) + \theta_1\alpha\mathbf{C}\right]\boldsymbol{\delta}^{n+1} + \\
&\left[(1+\theta_3\beta)\mathbf{A} + \theta_3\gamma k\mathbf{B}(\boldsymbol{\delta}^{n+1}) + \theta_3\alpha\mathbf{C}\right]\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \\
&\left[-\theta_2\beta\mathbf{A} - \theta_2\gamma\mathbf{B}(\boldsymbol{\delta}^n) - \theta_2\alpha\mathbf{C}\right]\boldsymbol{\delta}^n + \\
&\left[(1-\theta_4\beta)\mathbf{A} - \theta_4\gamma k\mathbf{B}(\boldsymbol{\delta}^n) - \theta_4\alpha\mathbf{C}\right]\boldsymbol{\sigma}^n + \mathbf{E}
\end{aligned}
\tag{7.10}
$$

lineer olmayan denklem sistemleri elde edilir. (7.9-7.10) denklem sistemleri birlikte $2N+6$ denklem ve $2N+6$ bilinmeyenden oluşan lineer olmayan denklem sistemidir.

Sınır şartlarını elde edilen sisteme uygulayabilmek için denklem sistemindeki ilk 2 ve son 2 denklem silinerek bölgenin uç noktalarındaki

$$\begin{aligned} u(a,t) &= g_0(t), \qquad u(b,t) = g_1(t), \quad t \geq 0, \\ v(a,t) &= g_0'(t), \qquad v(b,t) = g_1'(t), \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

sınır şartları kullanılarak δ_{-1}^{n+1}, δ_{N+1}^{n+1}, σ_{-1}^{n+1}, σ_{N+1}^{n+1} parametreleri sistemden yok edilirse $(2N+2)$ denklem ve $(2N+2)$ bilinmeyenden oluşan matris sistemine indirgenmiş olur. Denklem sisteminde iteratif olarak çözüme başlamak için öncelikle $t = 0$ zamanındaki

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}^0 &= (\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \ldots, \delta_{N+1}^0)^T \\ \boldsymbol{\sigma}^0 &= (\sigma_{-1}^0, \sigma_0^0, \ldots, \sigma_{N+1}^0)^T \end{aligned}$$

başlangıç vektörlerinin hesaplanması gerekmektedir. Bunun için problemin başlangıç koşulları

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f_0(x), \qquad a \leq x \leq b, \\ v(x,0) &= f_1(x), \qquad a \leq x \leq b, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} u_x(a,0) = (f_0)_x(a,0) \quad v_x(a,0) = (f_1)_x(a,0) \\ u_x(b,0) = (f_0)_x(b,0) \quad v_x(b,0) = (f_1)_x(b,0) \end{aligned}$$

ilave şartlar kullanılarak başlangıç vektörleri hesaplanır. Başlangıç vektörleri $\boldsymbol{\delta}^0$ ve $\boldsymbol{\sigma}^0$ hesaplandıktan sonra, bilinmeyen vektörleri

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}^n &= (\delta_{-1}^n, \delta_0^n, \ldots, \delta_{N+1}^n)^T \\ \boldsymbol{\sigma}^n &= (\sigma_{-1}^n, \sigma_0^n, \ldots, \sigma_{N+1}^n)^T \end{aligned}$$

olmak üzere $n = 1, 2, \ldots$ için iç iterasyon yöntemi kullanılarak istenilen t zamanındaki yaklaşık çözümler iteratif olarak hesaplanır.

7.2. Kuartik B-spline Galerkin Yöntemi

Bu kısımda KG denkleminin sayısal çözümünü elde etmek için konum parçalanmasında kuartik B-spline Galerkin yöntemi kullanılacaktır. Zaman

parçalanması için Crank-Nicolson (Kuartik1) ve dördüncü mertebeden tek adımlı (Kuartik2) yöntemleri önerilecektir. Bu bölümde (7.3)-(7.4) ile ifade edilen yaklaşımlarda $\xi = x - x_m$ dönüşümü yapılırsa $[x_m, x_{m+1}]$ alt aralığı $[0, h]$ aralığına dönüşecektir. $[0, h]$ aralığı üzerinde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu için (3.23-3.27) ile verilen kuartik B-spline şekil fonksiyonları, bilinmeyen u ve v fonksiyonları ve türevleri için (3.28) yaklaşımı kullanıldığında

$$i = m-2, m-1, m, m+1, m+2$$

olmak üzere (7.3)-(7.4) yaklaşımları

$$\begin{aligned}
e_1 &= \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[\left(1 + \theta_3\beta + \theta_3\gamma \left(\sum_{r=m-2}^{m+2} \Phi_r \delta_r^{n+1} \right)^{k-1} \right) \Phi_j + \theta_3 \alpha \Phi_j'' \right] d\zeta \right\}, \\
e_2 &= -\theta_1 \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \Phi_j d\zeta \right\}, \\
e_3 &= \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[\left(1 - \theta_4\beta - \theta_4\gamma \left(\sum_{r=m-2}^{m+2} \Phi_r \delta_r^{n} \right)^{k-1} \right) \Phi_j - \theta_4 \alpha \Phi_j'' \right] d\zeta \right\}, \\
e_4 &= \theta_2 \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \Phi_j d\zeta \right\}, \\
e_5 &= \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[\theta_4 f\left(x, t^n\right) + \theta_3 f\left(x, t^{n+1}\right) \right] d\zeta \right\}, \\
f_1 &= \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[\left(\theta_1\beta + \theta_1\gamma \left(\sum_{r=m-2}^{m+2} \Phi_r \delta_r^{n+1} \right)^{k-1} \right) \Phi_j + \theta_1 \alpha \Phi_j'' \right] d\zeta \right\}, \\
f_2 &= \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[\left(1 + \theta_3\beta + \theta_3\gamma k \left(\sum_{r=m-2}^{m+2} \Phi_r \delta_r^{n+1} \right)^{k-1} \right) \Phi_j + \theta_3 \alpha \Phi_j'' \right] d\zeta \right\}, \\
f_3 &= \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[\left(-\theta_2\beta - \theta_2\gamma \left(\sum_{r=m-2}^{m+2} \Phi_r \delta_r^{n} \right)^{k-1} \right) \Phi_j - \theta_2 \alpha \Phi_j'' \right] d\zeta \right\}, \\
f_4 &= \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[\left(1 - \theta_4\beta - \theta_4\gamma k \left(\sum_{r=m-2}^{m+2} \Phi_r \delta_r^{n} \right)^{k-1} \right) \Phi_j - \theta_4 \alpha \Phi_j'' \right] d\zeta \right\}, \\
f_5 &= \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[\theta_1 f(x, t^{n+1}) + \theta_2 f(x, t^n) + \theta_3 f_t(x, t^{n+1}) + \theta_4 f_t(x, t^n) \right] d\zeta \right\}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$e_1\delta_j^{n+1} + e_2\sigma_j^{n+1} - \left(e_3\delta_j^n + e_4\sigma_j^n + e_5\right) \tag{7.11}$$

ve

$$f_1\delta_j^{n+1} + f_2\sigma_j^{n+1} - \left(f_3\delta_j^n + f_4\sigma_j^n + f_5\right) \tag{7.12}$$

olarak elde edilir. (7.11)-(7.12) ifadelerinde gerekli düzenlenmeler yapıldıktan sonra $i = j = m-2, m-1, m, m+1, m+2$ için

$$\begin{aligned}
A_{ij}^e &= \int_0^h \Phi_i \Phi_j d\zeta, \\
C_{ij}^e &= \int_0^h \Phi_i \Phi_j'' d\zeta \\
B_{ij}^e(\delta^{n+1}) &= \int_0^h \Phi_i \left(\sum_{r=m-2}^{m+2} \Phi_r \delta_r^{n+1} \right)^{k-1} \Phi_j d\zeta \\
D_i^e &= \int_0^h \Phi_i(\theta_4 f(\zeta, t^n) + \theta_3 f(\zeta, t^{n+1}))d\zeta \\
E_i^e &= \int_0^h \Phi_i[\theta_1 f(\zeta, t^{n+1}) + \theta_2 f(\zeta, t^n) + \theta_3 f_t(\zeta, t^{n+1}) + \theta_4 f_t(\zeta, t^n)]d\zeta \\
\delta^e &= (\delta_{m-2}, \delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2})^T, \\
\sigma^e &= (\sigma_{m-2}, \sigma_{m-1}, \sigma_m, \sigma_{m+1}, \sigma_{m+2})^T
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\left[(1+\theta_3\beta)\, A^e + \theta_3\gamma B^e((\delta^e)^{n+1}) + \theta_3\alpha C^e\right](\delta^e)^{n+1} - \\
&\theta_1 A^e(\sigma^e)^{n+1} - \left[(1-\theta_4\beta)A^e - \theta_4\gamma B^e((\delta^e)^n) - \theta_4\alpha C^e\right](\delta^e)^n - \\
&\theta_2 A^e(\sigma^e)^n - D^e
\end{aligned} \tag{7.13}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\left[\theta_1\beta A^e + \theta_1\gamma B^e((\delta^e)^{n+1}) + \theta_1\alpha C^e\right](\delta^e)^{n+1} \\
&+ \left[(1+\theta_3\beta)A^e + \theta_3\gamma k B^e((\delta^e)^{n+1}) + \theta_3\alpha C^e\right](\sigma^e)^{n+1} - \\
&\left[-\theta_2\beta A^e - \theta_2\gamma B^e((\delta^e)^n) - \theta_2\alpha C^e\right](\delta^e)^n - \\
&\left[(1-\theta_4\beta)A^e - \theta_4\gamma k B^e((\delta^e)^n) - \theta_4\alpha C^e\right](\sigma^e)^n - E^e
\end{aligned} \tag{7.14}$$

eleman matrisleri elde edilir. Burada elde edilen eleman matrislerinin $m = 0, 1, \ldots, N-1$ için uygun bir şekilde birbirlerine eklenmesi sonucunda

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta} &= (\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \ldots, \delta_{N+1})^T \\
\boldsymbol{\sigma} &= (\sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0, \ldots, \sigma_{N+1})^T
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}&\left[(1+\theta_3\beta)\,\mathbf{A}+\theta_3\gamma\mathbf{B}(\boldsymbol{\delta}^{n+1})+\theta_3\alpha\mathbf{C}\right]\boldsymbol{\delta}^{n+1}-\\&\theta_1\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}^{n+1}=\left[(1-\theta_4\beta)\mathbf{A}-\theta_4\gamma\mathbf{B}(\boldsymbol{\delta}^{n})-\theta_4\alpha\mathbf{C}\right]\boldsymbol{\delta}^{n}\\&+\theta_2\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}^{n}+\mathbf{D}\end{aligned}\tag{7.15}$$

ve

$$\begin{aligned}&\left[\theta_1\beta\mathbf{A}+\theta_1\gamma\mathbf{B}(\boldsymbol{\delta}^{n+1})+\theta_1\alpha\mathbf{C}\right]\boldsymbol{\delta}^{n+1}+\\&\left[(1+\theta_3\beta)\mathbf{A}+\theta_3\gamma k\mathbf{B}(\boldsymbol{\delta}^{n+1})+\theta_3\alpha\mathbf{C}\right]\boldsymbol{\sigma}^{n+1}=\\&\left[-\theta_2\beta\mathbf{A}-\theta_2\gamma\mathbf{B}(\boldsymbol{\delta}^{n})-\theta_2\alpha\mathbf{C}\right]\boldsymbol{\delta}^{n}+\\&\left[(1-\theta_4\beta)\mathbf{A}-\theta_4\gamma k\mathbf{B}(\boldsymbol{\delta}^{n})-\theta_4\alpha\mathbf{C}\right]\boldsymbol{\sigma}^{n}+\mathbf{E}\end{aligned}\tag{7.16}$$

lineer olmayan denklem sistemleri elde edilir. (7.15) ve (7.16) denklem sistemleri birlikte $2N+8$ denklem ve $2N+8$ bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. Sınır şartlarını elde edilen sisteme uygulayabilmek için denklem sistemindeki ilk 2 ve son 2 denklem silinerek bölgenin uç noktalarındaki

$$\begin{aligned}u(a,t)&=g_0(t), \qquad u(b,t)=g_1(t), \quad t\geq 0,\\v(a,t)&=g_0'(t), \qquad v(b,t)=g_1'(t), \quad t\geq 0,\end{aligned}$$

sınır şartları kullanılarak $\delta_{-2}^{n+1},\delta_{N+1}^{n+1},\sigma_{-2}^{n+1},\sigma_{N+1}^{n+1}$ parametreleri sistemden yok edilirse $(2N+4)\times(2N+4)$ çözülebilir matris sistemine indirgenmiş olur. Denklem sisteminde iteratif olarak çözüme başlamak için öncelikle $t=0$ zamanındaki

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}^0&=(\delta_{-2}^0,\delta_{-1}^0,\delta_0^0,\ldots,\delta_{N+1}^0)^T\\\boldsymbol{\sigma}^0&=(\sigma_{-2}^0,\sigma_{-1}^0,\sigma_0^0,\ldots,\sigma_{N+1}^0)^T\end{aligned}$$

başlangıç vektörlerinin hesaplanması gerekmektedir. Bunun için problemin başlangıç koşulları

$$\begin{aligned}u(x,0)&=f_0(x), \qquad a\leq x\leq b,\\v(x,0)&=f_1(x), \qquad a\leq x\leq b,\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}&u_x(a,0)=(f_0)_x(a,0) \qquad v_x(a,0)=(f_1)_x(a,0)\\&u_{xx}(a,0)=(f_0)_{xx}(a,0) \quad v_{xx}(a,0)=(f_1)_{xx}(a,0)\\&u_x(b,0)=(f_0)_x(b,0) \qquad v_x(b,0)=(f_1)_x(b,0)\end{aligned}$$

ilave şartlar kullanılarak başlangıç vektörleri hesaplanır. Başlangıç vektörleri $\boldsymbol{\delta}^0$ ve $\boldsymbol{\sigma}^0$ hesaplandıktan sonra, bilinmeyen vektörleri

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}^n &= (\delta_{-2}^n, \delta_{-1}^n, \delta_0^n, \ldots, \delta_{N+1}^n)^T \\ \boldsymbol{\sigma}^n &= (\sigma_{-2}^n, \sigma_{-1}^n, \sigma_0^n, \ldots, \sigma_{N+1}^n)^T\end{aligned}$$

olmak üzere $n = 1, 2, \ldots$ için iç iterasyon yöntemi kullanılarak istenilen t zamanındaki yaklaşık çözümler iteratif olarak hesaplanır.

7.3. Kuintik B-spline Galerkin Yöntemi

Bu kısımda KG denkleminin sayısal çözümünü elde etmek için konum parçalanmasında kuintik B-spline Galerkin yöntemi kullanılacaktır. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson (Kuintik1) ve dördüncü mertebeden tek adımlı (Kuintik2) yöntemleri önerilecektir. Bu bölümde (7.3)-(7.4) ile ifade edilen yaklaşımlarda $\xi = x - x_m$ dönüşümü yapılırsa $[x_m, x_{m+1}]$ alt aralığı $[0, h]$ aralığına dönüşecektir. $[0, h]$ aralığı üzerinde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu için (3.30-3.35) ile verilen kuintik B-spline şekil fonksiyonları, bilinmeyen u ve v fonksiyonları ve türevleri için (3.36) yaklaşımı kullanıldığında

$$i = m-2, m-1, m, m+1, m+2, m+3$$

olmak üzere (7.3)-(7.4) yaklaşımları

$$\begin{aligned}
e_1 &= \sum_{j=m-2}^{m+3} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[\left(1 + \theta_3\beta + \theta_3\gamma \left(\sum_{r=m-2}^{m+3} \Phi_r \delta_r^{n+1} \right)^{k-1} \right) \Phi_j + \theta_3 \alpha \Phi_j'' \right] d\zeta \right\}, \\
e_2 &= -\theta_1 \sum_{j=m-2}^{m+3} \left\{ \int_0^h \Phi_i \Phi_j d\zeta \right\}, \\
e_3 &= \sum_{j=m-2}^{m+3} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[\left(1 - \theta_4\beta - \theta_4\gamma \left(\sum_{r=m-2}^{m+3} \Phi_r \delta_r^{n} \right)^{k-1} \right) \Phi_j - \theta_4 \alpha \Phi_j'' \right] d\zeta \right\}, \\
e_4 &= \theta_2 \sum_{j=m-2}^{m+3} \left\{ \int_0^h \Phi_i \Phi_j d\zeta \right\}, \\
e_5 &= \sum_{j=m-2}^{m+3} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[\theta_4 f\left(x, t^n\right) + \theta_3 f\left(x, t^{n+1}\right) \right] d\zeta \right\},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_1 &= \sum_{j=m-2}^{m+3} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[\left(\theta_1\beta + \theta_1\gamma \left(\sum_{r=m-2}^{m+3} \Phi_r \delta_r^{n+1} \right)^{k-1} \right) \Phi_j + \theta_1 \alpha \Phi_j'' \right] d\zeta \right\}, \\
f_2 &= \sum_{j=m-2}^{m+3} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[\left(1 + \theta_3\beta + \theta_3\gamma k \left(\sum_{r=m-2}^{m+3} \Phi_r \delta_r^{n+1} \right)^{k-1} \right) \Phi_j + \theta_3 \alpha \Phi_j'' \right] d\zeta \right\}, \\
f_3 &= \sum_{j=m-2}^{m+3} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[\left(-\theta_2\beta - \theta_2\gamma \left(\sum_{r=m-2}^{m+3} \Phi_r \delta_r^{n} \right)^{k-1} \right) \Phi_j - \theta_2 \alpha \Phi_j'' \right] d\zeta \right\}, \\
f_4 &= \sum_{j=m-2}^{m+3} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[\left(1 - \theta_4\beta - \theta_4\gamma k \left(\sum_{r=m-2}^{m+3} \Phi_r \delta_r^{n} \right)^{k-1} \right) \Phi_j - \theta_4 \alpha \Phi_j'' \right] d\zeta \right\}, \\
f_5 &= \sum_{j=m-2}^{m+3} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[\theta_1 f(x,t^{n+1}) + \theta_2 f(x,t^n) + \theta_3 f_t(x,t^{n+1}) + \theta_4 f_t(x,t^n) \right] d\zeta \right\}
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$e_1\delta_j^{n+1} + e_2\sigma_j^{n+1} - \left(e_3\delta_j^n + e_4\sigma_j^n + e_5 \right) \tag{7.17}$$

ve

$$f_1\delta_j^{n+1} + f_2\sigma_j^{n+1} - \left(f_3\delta_j^n + f_4\sigma_j^n + f_5 \right) \tag{7.18}$$

olarak elde edilir. (7.17-7.18) ifadelerinde gerekli düzenlenmeler yapıldıktan sonra $i = j = m-2, m-1, m, m+1, m+2, m+3$ için

$$
\begin{aligned}
A_{ij}^e &= \int_0^h \Phi_i \Phi_j d\zeta, \\
C_{ij}^e &= \int_0^h \Phi_i \Phi_j'' d\zeta, \\
B_{ij}^e(\delta^{n+1}) &= \int_0^h \Phi_i \left(\sum_{r=m-2}^{m+3} \Phi_r \delta_r^{n+1} \right)^{k-1} \Phi_j d\zeta, \\
D_i^e &= \int_0^h \Phi_i (\theta_4 f(\zeta,t^n) + \theta_3 f(\zeta,t^{n+1})) d\zeta, \\
E_i^e &= \int_0^h \Phi_i [\theta_1 f(\zeta,t^{n+1}) + \theta_2 f(\zeta,t^n) + \theta_3 f_t(\zeta,t^{n+1}) + \theta_4 f_t(\zeta,t^n)] d\zeta, \\
\delta^e &= (\delta_{m-2}, \delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2}, \delta_{m+3})^T, \\
\sigma^e &= (\sigma_{m-2}, \sigma_{m-1}, \sigma_m, \sigma_{m+1}, \sigma_{m+2}, \sigma_{m+3})^T
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}&\left[(1+\theta_3\beta)\,A^e+\theta_3\gamma B^e((\delta^e)^{n+1})+\theta_3\alpha C^e\right](\delta^e)^{n+1}-\\&\theta_1A^e(\sigma^e)^{n+1}-\left[(1-\theta_4\beta)A^e-\theta_4\gamma B^e((\delta^e)^n)-\theta_4\alpha C^e\right](\delta^e)^n-\\&\theta_2A^e(\sigma^e)^n-D^e\end{aligned}\tag{7.19}$$

ve

$$\begin{aligned}&\left[\theta_1\beta A^e+\theta_1\gamma B^e((\delta^e)^{n+1})+\theta_1\alpha C^e\right](\delta^e)^{n+1}\\&+\left[(1+\theta_3\beta)A^e+\theta_3\gamma kB^e((\delta^e)^{n+1})+\theta_3\alpha C^e\right](\sigma^e)^{n+1}-\\&\left[-\theta_2\beta A^e-\theta_2\gamma B^e((\delta^e)^n)-\theta_2\alpha C^e\right](\delta^e)^n-\\&\left[(1-\theta_4\beta)A^e-\theta_4\gamma kB^e((\delta^e)^n)-\theta_4\alpha C^e\right](\sigma^e)^n-E^e\end{aligned}\tag{7.20}$$

eleman matrisleri elde edilir. Burada elde edilen eleman matrislerinin $m = 0, 1, \ldots, N-1$ için uygun bir şekilde birbirlerine eklenmesi sonucunda

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta} &= (\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \ldots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2})^T\\ \boldsymbol{\sigma} &= (\sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0, \ldots, \sigma_{N+1}, \sigma_{N+2})^T\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}&\left[(1+\theta_3\beta)\,\mathbf{A}+\theta_3\gamma\mathbf{B}(\boldsymbol{\delta}^{n+1})+\theta_3\alpha\mathbf{C}\right]\boldsymbol{\delta}^{n+1}-\\&\theta_1\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}^{n+1}=\left[(1-\theta_4\beta)\mathbf{A}-\theta_4\gamma\mathbf{B}(\boldsymbol{\delta}^n)-\theta_4\alpha\mathbf{C}\right]\boldsymbol{\delta}^n\\&+\theta_2\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}^n+\mathbf{D}\end{aligned}\tag{7.21}$$

ve

$$\begin{aligned}&\left[\theta_1\beta\mathbf{A}+\theta_1\gamma\mathbf{B}(\boldsymbol{\delta}^{n+1})+\theta_1\alpha\mathbf{C}\right]\boldsymbol{\delta}^{n+1}+\\&\left[(1+\theta_3\beta)\mathbf{A}+\theta_3\gamma k\mathbf{B}(\boldsymbol{\delta}^{n+1})+\theta_3\alpha\mathbf{C}\right]\boldsymbol{\sigma}^{n+1}=\\&\left[-\theta_2\beta\mathbf{A}-\theta_2\gamma\mathbf{B}(\boldsymbol{\delta}^n)-\theta_2\alpha\mathbf{C}\right]\boldsymbol{\delta}^n+\\&\left[(1-\theta_4\beta)\mathbf{A}-\theta_4\gamma k\mathbf{B}(\boldsymbol{\delta}^n)-\theta_4\alpha\mathbf{C}\right]\boldsymbol{\sigma}^n+\mathbf{E}\end{aligned}\tag{7.22}$$

lineer olmayan denklem sistemleri elde edilir. (7.21) ve (7.22) denklem sistemleri birlikte $2N+10$ denklem ve $2N+10$ bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. Sınır şartlarını elde edilen sisteme uygulayabilmek için denklem sistemindeki ilk 2 ve son 2 denklem silinerek bölgenin uç noktalarındaki

$$\begin{aligned}u(a,t) &= g_0(t), \qquad u(b,t) = g_1(t), \quad t \geq 0,\\ v(a,t) &= g_0'(t), \qquad v(b,t) = g_1'(t), \quad t \geq 0,\end{aligned}$$

sınır şartları kullanılarak $\delta_{-2}^{n+1}, \delta_{N+2}^{n+1}, \sigma_{-2}^{n+1}, \sigma_{N+2}^{n+1}$ parametreleri sistemden yok edilirse $(2N+8)\times(2N+8)$ çözülebilir matris sistemine indirgenmiş olur. Denklem sisteminde

iteratif olarak çözüme başlamak için öncelikle $t = 0$ zamanındaki

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}^0 &= (\delta_{-2}^0, \delta_{-1}^0, \delta_0^0, \ldots, \delta_{N+1}^0, \delta_{N+2}^0)^T \\ \boldsymbol{\sigma}^0 &= (\sigma_{-2}^0, \sigma_{-1}^0, \sigma_0^0, \ldots, \sigma_{N+1}^0, \sigma_{N+2}^0)^T \end{aligned}$$

başlangıç vektörlerinin hesaplanması gerekmektedir. Bunun için problemin başlangıç koşulları

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f_0(x), \quad a \le x \le b, \\ v(x,0) &= f_1(x), \quad a \le x \le b, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} &u_x(a,0) = (f_0)_x(a,0) \qquad v_x(a,0) = (f_1)_x(a,0) \\ &u_{xx}(a,0) = (f_0)_{xx}(a,0) \quad v_{xx}(a,0) = (f_1)_{xx}(a,0) \\ &u_x(b,0) = (f_0)_x(b,0) \qquad v_x(b,0) = (f_1)_x(b,0) \\ &u_{xx}(b,0) = (f_0)_{xx}(b,0) \quad v_{xx}(b,0) = (f_1)_{xx}(b,0) \end{aligned}$$

ilave şartlar kullanılarak başlangıç vektörleri hesaplanır. Başlangıç vektörleri $\boldsymbol{\delta}^0$ ve $\boldsymbol{\sigma}^0$ hesaplandıktan sonra, bilinmeyen vektörleri

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}^n &= (\delta_{-2}^n, \delta_{-1}^n, \delta_0^n, \ldots, \delta_{N+1}^n, \delta_{N+2}^n)^T \\ \boldsymbol{\sigma}^n &= (\sigma_{-2}^n, \sigma_{-1}^n, \sigma_0^n, \ldots, \sigma_{N+1}^n, \sigma_{N+2}^n)^T \end{aligned}$$

olmak üzere $n = 1, 2, \ldots$ için iç iterasyon yöntemi kullanılarak istenilen t zamanındaki yaklaşık çözümler iteratif olarak hesaplanır.

7.4. Test Problemleri

Bu bölümde KG denkleminin sayısal çözümü için önerilen Kübik1, Kübik2, Kuartik1, Kuartik2, Kuintik1 ve Kuintik2 yöntemlerinin doğruluğunu kontrol etmek için iki test problemi incelenecektir.

7.4.1. Birinci test problemi

3. bölümde tanıtılan bu test problemi için analitik çözüm ve başlangıç şartları sırasıyla,

$$u(x,t) = x\cos(t)$$

ve

$$u(x,0) = x, \qquad u_t(x,0) = 0$$

olarak verilmişti. Bu bölümde $\alpha = -1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $k = 2$ ve

$$f(x,t) = -x\cos(t) + x^2\cos^2(t)$$

seçilerek $-1 \leq x \leq 1$ konum aralığı üzerinde programlar $t = 1$ zamanına kadar çalıştırılacaktır.

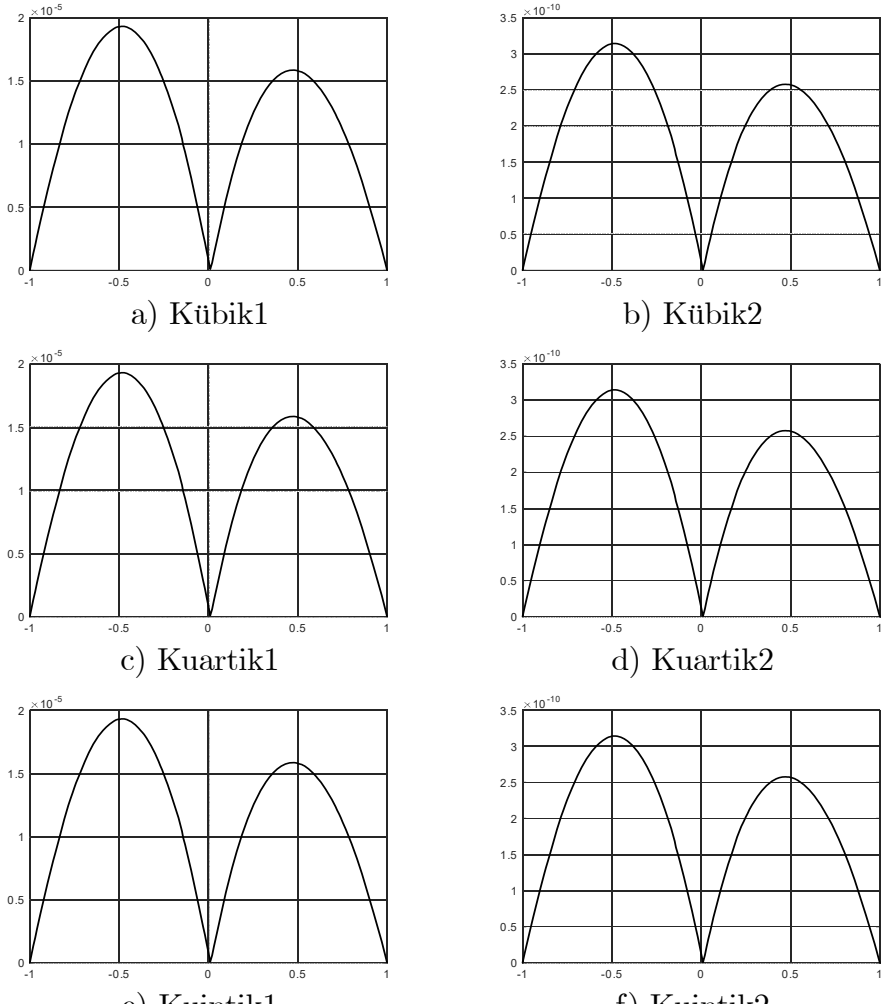
Çizelge 7.1: $h = 0.01$ ve farklı zaman adımları için hata normları ve yakınsaklık oranları

Δt	Kübik1	Y.O	Kübik2	Y.O	Kuartik1	Y.O	Kuartik2	Y.O
1/2	4.81×10^{-3}	–	1.89×10^{-5}	–	4.81×10^{-3}	–	1.89×10^{-5}	–
1/4	1.27×10^{-3}	1.92	1.26×10^{-6}	3.91	1.27×10^{-3}	1.92	1.26×10^{-6}	3.91
1/8	3.10×10^{-4}	2.04	8.01×10^{-8}	3.98	3.10×10^{-4}	2.04	8.01×10^{-8}	3.98
1/16	7.74×10^{-5}	2.00	5.02×10^{-9}	3.99	7.74×10^{-5}	2.00	5.02×10^{-9}	3.99
1/32	1.93×10^{-5}	2.02	3.14×10^{-10}	4.00	1.93×10^{-5}	2.02	3.14×10^{-10}	4.00

Δt	Kuintik1	Y.O	Kuintik2	Y.O
1/2	4.81×10^{-3}	–	1.89×10^{-5}	–
1/4	1.27×10^{-3}	1.92	1.26×10^{-6}	3.91
1/8	3.10×10^{-4}	2.04	8.01×10^{-8}	3.98
1/16	7.74×10^{-5}	2.00	5.02×10^{-9}	3.99
1/32	1.93×10^{-5}	2.02	3.14×10^{-10}	4.00

Kübik1, Kübik2, Kuartik1, Kuartik2, Kuintik1 ile Kuintik2 programları $h = 0.01$ sabit konum adım uzunluğu ve zaman adım uzunluğu için ise $\Delta t = 1/2^i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ farklı seçimleriyle çalıştırılmış ve elde edilen L_∞ hata normları yakınsama oranları ile birlikte Çizelge 7.1 de verilmiştir. Çizelge 7.1 deki sonuçlara göre zaman parçalanmasında Crank-Nicolson yöntemi, konum parçalanmasında farklı dereceden B-spline Galerkin yöntemlerinin kullanıldığı ilk durumda elde edilen sonuçların tüm önerilen yöntemler için aynı sonuçların bulunduğu görülmektedir. Benzer şekilde zaman parçalanmasında dördüncü mertebeden tek adımlı yöntem, konum parçalanmasında farklı dereceden B-spline Galerkin yöntemlerinin kullanıldığı ikinci

durumda da ilk duruma benzer olarak tüm önerilen yöntemler için aynı sonuçların bulunduğu görülmektedir. Bununla birlikte Crank-Nicolson zaman parçalanmasının önerildiği ilk duruma göre daha düşük hataların elde edildiği de söylenilebilir. Ayrıca Çizelge 7.1 deki sonuçlar, sabit h konum artım uzunluğu için Δt zaman artım uzunluğu küçüldükçe Kübik1, Kuartik1 ve Kuintik1 metotları kullanıldığında elde edilen yakınsama oranlarının Crank-Nicolson zaman parçalanmasının teorik doğruluk değeri olan 2 civarında olduğunu ve Kübik2, Kuartik2 ve Kuintik2 metotları kullanıldığında elde edilen yakınsama oranlarının ise önerilen zaman parçalanmasının teorik doğruluk değeri olan 4 değerine gittiğini de göstermektedir.



a) Kübik1 b) Kübik2

c) Kuartik1 d) Kuartik2

e) Kuintik1 f) Kuintik2

Şekil 7.1: $t = 1$ anındaki mutlak hata

Önerilen tüm metotlar için zaman ve konum artım uzunluğu $h = 0.01$ ve $\Delta t = 1/32$ alınarak $t = 1$ zamanına kadar çalıştırılan programlar sonucunda elde edilen mutlak hata grafikleri Şekil 7.1 de verilmiştir. Şekil 7.1 incelendiğinde mutlak

hatanın Çizelge 7.1 de verilen L_∞ hatasıyla uyumlu olduğu ve konum aralığının orta noktalarında geldiği görülmektedir. Maksimum hata konum aralığının uç noktalarında meydana gelmediği için sınır şartlarının uygulanmasında bir problem olmadığı da görülmektedir.

7.4.2. İkinci test problemi

İkinci test problemi için analitik çözüm ve başlangıç şartları sırasıyla,

$$u(x,t) = u(x,t) = B\tan(K(x+ct))$$

ve

$$\begin{aligned} u(x,0) &= B\tan(Kx), \\ u_t(x,0) &= BcK\sec^2(Kx) \end{aligned}$$

olarak 3. bölümde verilmişti. Bu test probleminde $\alpha = -2.5$, $\beta = 1$, $\gamma = 1.5$, $k = 3$ ve $f(x,t) = 0$ seçimleri yapılarak ve

$$c = 0.5,\ B = \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}},\ K = \sqrt{\frac{-\beta}{2(\alpha + c^2)}}$$

parametreleri kullanılarak $0 \leq x \leq 1$ konum aralığı üzerinde programlar $t = 1$ zamanına kadar çalıştırılacaktır.

Kübik1, Kübik2, Kuartik1, Kuartik2, Kuintik1 ile Kuintik2 programları $h = 0.0005$ sabit konum adım uzunluğu ve zaman adım uzunluğu için ise $\Delta t = 1/2^i$, $i = 1, 2, 3, 4$ farklı seçimleriyle çalıştırılmış ve elde edilen L_∞ hata normları yakınsama oranları ile birlikte Çizelge 7.2 de verilmiştir. Çizelge 7.2 deki sonuçlar incelendiğinde, zaman parçalanmasında Crank-Nicolson yöntemi, konum parçalanmasında farklı dereceden B-spline Galerkin yöntemlerinin kullanıldığı ilk durumda elde edilen sonuçların hemen hemen aynı kaldığı gözlemlenmiştir. Benzer şekilde zaman parçalanmasında dördüncü mertebeden tek adımlı yöntem, konum parçalanmasında farklı dereceden B-spline Galerkin yöntemlerinin kullanıldığı ikinci durumda da sonuçların hemen hemen aynı kaldığı ancak Crank-Nicolson zaman parçalanmasının önerildiği ilk durumda bulunan hatalara göre oldukça düşük

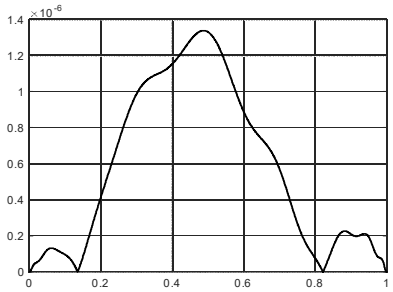
kaldığı görülmüştür Ayrıca, Kübik1, Kuartik1 ve Kuintik1 metotları kullanıldığında elde edilen yakınsama oranlarının Crank-Nicolson zaman parçalanmasının teorik doğruluk değeri olan 2 civarında bulunduğu ve Kübik2, Kuartik2, Kuintik2 metotları kullanıldığında elde edilen yakınsama oranlarının ise önerilen zaman parçalanmasının teorik doğruluk değeri olan 4 civarında bulunduğu Çizelge 7.2 den görülmektedir.

Çizelge 7.2: $h = 0.0005$ ve farklı zaman adımları için hata normları ve yakınsaklık oranları

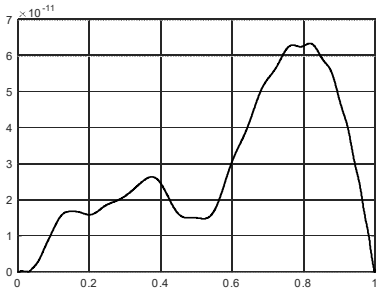
Δt	Kübik1	Y.O	Kübik2	Y.O	Kuartik1	Y.O	Kuartik2	Y.O
1/2	4.22×10^{-5}	–	1.55×10^{-7}	–	4.23×10^{-5}	–	1.55×10^{-7}	–
1/4	1.94×10^{-5}	1.12	1.42×10^{-8}	3.45	1.94×10^{-5}	1.12	1.42×10^{-8}	3.45
1/8	4.47×10^{-6}	2.12	9.79×10^{-10}	3.86	4.48×10^{-6}	2.12	9.79×10^{-10}	3.86
1/16	1.34×10^{-6}	1.74	6.34×10^{-11}	3.95	1.34×10^{-6}	1.74	6.34×10^{-11}	3.95

Δt	Kuintik1	Y.O	Kuintik2	Y.O
1/2	4.23×10^{-5}	–	1.55×10^{-7}	–
1/4	1.94×10^{-5}	1.12	1.45×10^{-8}	3.41
1/8	4.48×10^{-6}	2.12	9.72×10^{-10}	3.87
1/16	1.34×10^{-6}	1.74	5.42×10^{-11}	4.16

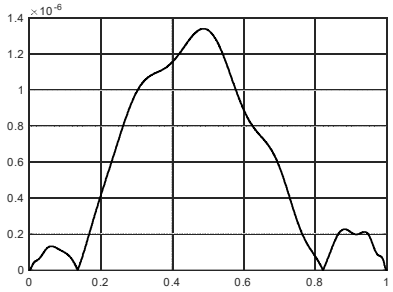
Önerilen Kübik1, Kübik2, Kuartik1, Kuartik2, Kuintik1 ve Kuintik2 metotları için zaman ve konum artım uzunluğu $h = 0.0005$ ve $\Delta t = 1/16$ alınarak $t = 1$ zamanına kadar çalıştırılan programlar için mutlak hata grafikleri Şekil 7.2 de gösterilmiştir. Şekil 7.2 deki hata grafikleri incelendiğinde mutlak hatanın Çizelge 7.2 de verilen L_∞ hatasıyla uyumlu olduğu ve konum aralığının orta noktalarında geldiği görülmektedir. Maksimum hata konum aralığının orta noktalarında geldiği için sınır şartlarının uygulanmasında bir problem olmadığı da görülmektedir. Bu durum ilk test probleminde de görülmüştür.



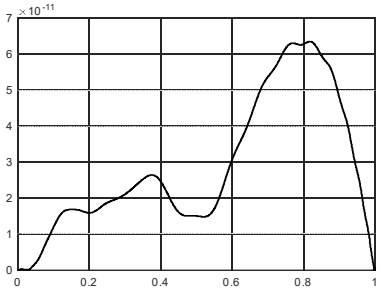
a) Kübik1



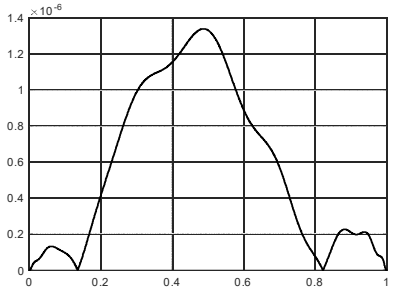
b) Kübik2



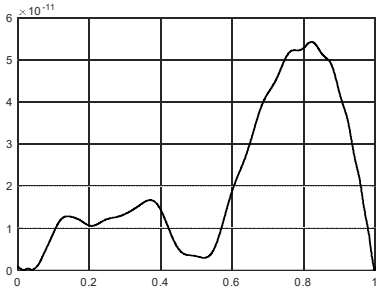
c) Kuartik1



d) Kuartik2



e) Kübik1



f) Kübik2

Şekil 7.2 : $t = 1$ anındaki mutlak hata

8. GOOD BOUSSINESQ DENKLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ İÇİN B-SPLİNE GALERKİN YÖNTEMİ

3. bölümde (3.90) ile tanıtılan GB denklemi yardımcı fonksiyon yardımıyla (3.95-3.96) lineer olmayan denklem sistemine indirgenmiş ve bu denklem sisteminin zaman parçalanmaları (3.104-3.105) eşitliklerinde elde edilmişti. Bu bölümde kübik, kuartik ve kuintik B-spline Galerkin yöntemleri ile GB denkleminin sayısal çözümlerinin bulunması hedeflenmektedir. GB denkleminin sayısal çözümü araştırılırken zaman parçalanması için Crank-Nicolson yöntemi ve Crank-Nicolson yöntemine göre daha yüksek doğruluğa sahip dördüncü mertebeden tek adımlı yöntem kullanılacaktır. Konum parçalanması için ise kübik, kuartik ve kuintik B-spline Galerkin yöntemleri önerilmiştir. Yaklaşık çözümlerin doğrulunu test etmek için iki test problemi ele alınacaktır. $W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere (3.104-3.105) ile verilen zaman parçalanmalarına Galerkin yöntemi uygulanırsa sırasıyla,

$$\alpha_1 = \int_a^b W(x)\left[u^{n+1} - 2\theta_3 u_x^{n+1}u_x^{n+1} - (\theta_3 + 2\theta_3 u^{n+1})u_{xx}^{n+1} - \theta_1 v^{n+1} + \theta_3 u_{xxxx}^{n+1}\right] dx$$

$$\alpha_2 = \int_a^b W(x)\left[u^{n} + 2\theta_4 u_x^{n}u_x^{n} + (\theta_4 + 2\theta_4 u^{n})u_{xx}^{n} + \theta_2 v^{n} - \theta_4 u_{xxxx}^{n}\right] dx$$

$$\begin{aligned}\alpha_3 = & -\int_a^b W(x)\left[(2\theta_1 u_x^{n+1} + 4\theta_3 v_x^{n+1})u_x^{n+1} + (\theta_1 + 2\theta_1 u^{n+1} + 2\theta_3 v^{n+1})u_{xx}^{n+1}\right] dx \\ & +\theta_1 \int_a^b W(x) u_{xxxx}^{n+1} dx + \int_a^b W(x)\left[v^{n+1} - (\theta_3 + 2\theta_3 u^{n+1})v_{xx}^{n+1}\right] dx \\ & +\theta_3 \int_a^b W(x) v_{xxxx}^{n+1} dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_4 &= \int_a^b W(x)\left[(2\theta_2 u_x^n + 4\theta_4 v_x^n)u_x^n + u_{xx}^n(\theta_2 + 2\theta_2 u^n + 2\theta_4 v^n)\right]dx \\ &\quad -\theta_2\int_a^b W(x)u_{xxxx}^n dx + \int_a^b W(x)\left[v^n + (\theta_4 + 2\theta_4 u^n)v_{xx}^n\right]dx \\ &\quad -\theta_4\int_a^b W(x)v_{xxxx}^n dx\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\alpha_1 = \alpha_2 \tag{8.1}$$

ve

$$\alpha_3 = \alpha_4 \tag{8.2}$$

eşitlikleri elde edilir.

8.1. Kübik B-spline Galerkin Yöntemi

Bu kısımda GB denkleminin sayısal çözümünü elde etmek için konum parçalanmasında kübik B-spline Galerkin yöntemi önerilecektir. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson (Kübik1) ve dördüncü mertebeden tek adımlı (Kübik2) yöntemleri kullanılacaktır. Öncelikle, (8.1) ve (8.2) ile verilen edilen eşitliklerdeki

$$\int_a^b W(x)u_{xxxx}dx$$

ve

$$\int_a^b W(x)v_{xxxx}dx$$

integralleri için kısmi integrasyon uygulanırsa sırasıyla;

$$\int_a^b W(x)u_{xxxx}dx = W(x)u_{xxx}|_a^b - \int_a^b W_x(x)u_{xxx}dx$$

ve

$$\int_a^b W(x)v_{xxxx}dx = W(x)v_{xxx}|_a^b - \int_a^b W_x(x)v_{xxx}dx$$

elde edilir. Yukarıda elde edilen integrallere tekrardan kısmi integrasyon uygulanırsa sırasıyla;

$$\int_a^b W(x)u_{xxxx}dx = W(x)u_{xxx}|_a^b - \left(W_x(x)u_{xx}|_a^b - \int_a^b W_{xx}(x)u_{xx}dx \right) \tag{8.3}$$

ve

$$\int_a^b W(x)v_{xxxx}dx = W(x)v_{xxx}|_a^b - \left(W_x(x)v_{xx}|_a^b - \int_a^b W_{xx}(x)v_{xx}dx \right) \tag{8.4}$$

sonucuna ulaşılır. Soliton dalga çözümünde, u ile v bilinmeyen fonksiyonu ile konuma göre türevleri konum aralığının uç noktalarında sıfıra gideceğinden (8.3)-(8.4) eşitlikleri

$$\int_a^b W(x)u_{xxxx}dx = \int_a^b W_{xx}(x)u_{xx}dx \tag{8.5}$$

ve

$$\int_a^b W(x)v_{xxxx}dx = \int_a^b W_{xx}(x)v_{xx}dx \tag{8.6}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla (8.1)-(8.2) denklemlerinde kısmi integrasyon kullanıldıktan sonra sırasıyla,

$$\begin{aligned}
a_1 &= \int_a^b W(x)\left[u^{n+1} - 2\theta_3 u_x^{n+1}u_x^{n+1} - (\theta_3 + 2\theta_3 u^{n+1})u_{xx}^{n+1} - \theta_1 v^{n+1}\right]dx \\
&\quad + \theta_3 \int_a^b W_{xx}(x)\, u_{xx}^{n+1}dx, \\
a_2 &= \int_a^b W(x)\left[u^n + 2\theta_4 u_x^n u_x^n + (\theta_4 + 2\theta_4 u^n)u_{xx}^n + \theta_2 v^n\right]dx, \\
&\quad - \theta_4 \int_a^b W_{xx}(x)\, u_{xx}^n dx, \\
b_1 &= \int_a^b W(x)\left[(2\theta_1 u_x^{n+1} + 4\theta_3 v_x^{n+1})u_x^{n+1} - (\theta_1 + 2\theta_1 u^{n+1} + 2\theta_3 v^{n+1})u_{xx}^{n+1}\right]dx \\
&\quad + \theta_1 \int_a^b W_{xx}(x)\, u_{xx}^{n+1}dx + \int_a^b W(x)\left[v^{n+1} - (\theta_3 + 2\theta_3 u^{n+1})v_{xx}^{n+1}\right]dx \\
&\quad + \theta_3 \int_a^b W_{xx}(x)\, v_{xx}^{n+1}dx,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_2 &= \int_a^b W(x)\left[-\left(2\theta_2 u_x^n + 4\theta_4 v_x^n\right) u_x^n + \left(\theta_2 + 2\theta_2 u^n + 2\theta_4 v^n\right) u_{xx}^n\right] dx \\
&\quad -\theta_2 \int_a^b W_{xx}(x)\, u_{xx}^n dx + \int_a^b W(x)\left[v^n + \left(\theta_4 + 2\theta_4 u^n\right) v_{xx}^n\right] dx \\
&\quad -\theta_4 \int_a^b W_{xx}(x)\, v_{xx}^n dx
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$a_1 = a_2 \tag{8.7}$$

ve

$$b_1 = b_2 \tag{8.8}$$

olur. $[a,b]$ konum aralığı N eşit uzunluktaki alt aralığa parçalanırsa $[x_m, x_{m+1}]$ alt aralığı üzerinde (8.7)-(8.8) ile verilen eşitlikler $m = 0, 1, \ldots, N-1$ için sırasıyla;

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\left[u^{n+1} - 2\theta_3 u_x^{n+1} u_x^{n+1} - \left(\theta_3 + 2\theta_3 u^{n+1}\right) u_{xx}^{n+1} - \theta_1 v^{n+1}\right] dx \\
&\quad +\theta_3 \int_{x_m}^{x_{m+1}} W_{xx}(x)\, u_{xx}^{n+1} dx, \\
c_2 &= \int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\left[u^n + 2\theta_4 u_x^n u_x^n + \left(\theta_4 + 2\theta_4 u^n\right) u_{xx}^n + \theta_2 v^n\right] dx \\
&\quad -\theta_4 \int_{x_m}^{x_{m+1}} W_{xx}(x)\, u_{xx}^n dx, \\
d_1 &= \int_{x_m}^{x_{m+1}} -W(x)\left[\left(2\theta_1 u_x^{n+1} + 4\theta_3 v_x^{n+1}\right) u_x^{n+1} + \left(\theta_1 + 2\theta_1 u^{n+1} + 2\theta_3 v^{n+1}\right) u_{xx}^{n+1}\right] dx \\
&\quad +\theta_1 \int_{x_m}^{x_{m+1}} W_{xx}(x)\, u_{xx}^{n+1} dx + \int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\left[v^{n+1} - \left(\theta_3 + 2\theta_3 u^{n+1}\right) v_{xx}^{n+1}\right] dx \\
&\quad +\theta_3 \int_{x_m}^{x_{m+1}} W_{xx}(x)\, v_{xx}^{n+1} dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_2 &= \int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\left[(2\theta_2 u_x^n + 4\theta_4 v_x^n)\, u_x^n + (\theta_2 + 2\theta_2 u^n + 2\theta_4 v^n) u_{xx}^n\right] dx \\
&\quad -\theta_2 \int_{x_m}^{x_{m+1}} W_{xx}(x)\, u_{xx}^n dx + \int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\left[v^n + (\theta_4 + 2\theta_4 u^n) v_{xx}^n\right] dx \\
&\quad -\theta_4 \int_{x_m}^{x_{m+1}} W_{xx}(x)\, v_{xx}^n dx
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$c_1 - c_2 \tag{8.9}$$

ve

$$d_1 - d_2 \tag{8.10}$$

olarak yazılabilir. (8.9)-(8.10) yaklaşımlarında $\xi = x - x_m$ dönüşümü yapılırsa $[x_m, x_{m+1}]$ alt aralığı $[0, h]$ aralığına dönüşür. $[0, h]$ aralığı üzerinde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu için (3.17-3.20) ile verilen kübik B-spline şekil fonksiyonları, bilinmeyen u ve v fonksiyonları ve türevleri için (3.21) yaklaşımı kullanıldığında

$$i = m-1, m, m+1, m+2$$

için (8.9-8.10) yaklaşımları sırasıyla,

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[\Phi_j - 2\theta_3 \left(\sum_{r=m-1}^{m+2} \Phi_r' \delta_r^{n+1} \right) \Phi_j' - \left(\theta_3 + 2\theta_3 \left(\sum_{r=m-1}^{m+2} \Phi_r \delta_r^{n+1} \right) \right) \Phi_j'' \right] d\zeta \right\} \\
&\quad +\theta_3 \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i'' \Phi_j'' d\zeta \right\}, \\
e_2 &= -\theta_1 \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \Phi_j d\zeta \right\}, \\
e_3 &= \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[\Phi_j + 2\theta_4 \left(\sum_{r=m-1}^{m+2} \Phi_r' \delta_r^{n} \right) \Phi_j' + \left(\theta_4 + 2\theta_4 \left(\sum_{r=m-1}^{m+2} \Phi_r \delta_r^{n} \right) \right) \Phi_j'' \right] d\zeta \right\} \\
&\quad -\theta_4 \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i'' \Phi_j'' d\zeta \right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e_4 &= \theta_2 \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \Phi_j d\zeta \right\}, \\
f_1 &= \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^h - \Phi_i \left(2\theta_1 \left(\sum_{r=m-1}^{m+2} \Phi'_r \delta_r^{n+1} \right) + 4\theta_3 \left(\sum_{r=m-1}^{m+2} \Phi'_r \sigma_r^{n+1} \right) \right) \Phi'_j \right\} d\zeta \\
&\quad + \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^h - \Phi_i \left(\theta_1 + 2\theta_1 \left(\sum_{r=m-1}^{m+2} \Phi_r \delta_r^{n+1} \right) + 2\theta_3 \left(\sum_{r=m-1}^{m+2} \Phi_r \sigma_r^{n+1} \right) \right) \Phi''_j \right\} d\zeta \\
&\quad + \theta_1 \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi''_i \Phi''_j d\zeta \right\}, \\
f_2 &= \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[\Phi_j - \left(\theta_3 + 2\theta_3 \left(\sum_{r=m-1}^{m+2} \Phi_r \delta_r^{n+1} \right) \right) \Phi''_j \right] d\zeta + \theta_3 \int_0^h \Phi''_i \Phi''_j d\zeta \right\}, \\
f_3 &= \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left(2\theta_2 \left(\sum_{r=m-1}^{m+2} \Phi'_r \delta_r^{n} \right) + 4\theta_4 \left(\sum_{r=m-1}^{m+2} \Phi'_r \sigma_r^{n} \right) \right) \Phi'_j \right\} d\zeta \\
&\quad + \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left(\theta_2 + 2\theta_2 \left(\sum_{r=m-1}^{m+2} \Phi_r \delta_r^{n} \right) + 2\theta_4 \left(\sum_{r=m-1}^{m+2} \Phi_r \sigma_r^{n} \right) \right) \Phi''_j \right\} d\zeta \\
&\quad - \theta_2 \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi''_i \Phi''_j d\zeta \right\}, \\
f_4 &= \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^h \Phi_i \left[\Phi_j + \left(\theta_4 + 2\theta_4 \left(\sum_{r=m-1}^{m+2} \Phi_r \delta_r^{n} \right) \right) \Phi''_j \right] d\zeta - \theta_4 \int_0^h \Phi''_i \Phi''_j d\zeta \right\}
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$e_1 \delta_j^{n+1} + e_2 \sigma_j^{n+1} - \left(e_3 \delta_j^n + e_4 \sigma_j^n \right) \tag{8.11}$$

ve

$$f_1 \delta_j^{n+1} + f_2 \sigma_j^{n+1} - \left(f_3 \delta_j^n + f_4 \sigma_j^n \right) \tag{8.12}$$

olarak elde edilir. (8.11-8.12) ifadelerinde gerekli düzenlenmeler yapıldıktan sonra

$$
\begin{aligned}
i &= m-1, m, m+1, m+2 \\
j &= m-1, m, m+1, m+2
\end{aligned}
$$

için

$$A_{ij}^e = \int_0^h \Phi_i \Phi_j d\zeta,$$

$$
\begin{aligned}
B_{ij}^{e} &= \int_0^h \Phi_i \Phi_j^{''} d\zeta, \\
C_{ij}^{e}(\delta^{n+1}) &= \int_0^h \Phi_i \left(\sum_{r=m-1}^{m+2} \Phi_r \delta_r^{n+1} \right) \Phi_j^{''} d\zeta, \\
D_{ij}^{e}(\delta^{n+1}) &= \int_0^h \Phi_i \left(\sum_{r=m-1}^{m+2} \Phi_r^{'} \delta_r^{n+1} \right) \Phi_j^{'} d\zeta, \\
E_{ij}^{e} &= \int_0^h \Phi_i^{''} \Phi_J^{''} d\zeta, \\
\delta^{e} &= (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2})^T, \\
\sigma^{e} &= (\sigma_{m-1}, \sigma_m, \sigma_{m+1}, \sigma_{m+2})^T
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&\left[A^e - \theta_3 B^e - 2\theta_3 C^e - 2\theta_3 D^e + \theta_3 E^e\right](\delta^e)^{n+1} - \theta_1 A^e (\sigma^e)^{n+1} - \\
&\left[A^e + \theta_4 B^e + 2\theta_4 C^e + 2\theta_4 D^e - \theta_4 E^e\right](\delta^e)^{n} - \theta_2 A^e (\sigma^e)^{n}
\end{aligned} \tag{8.13}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&\left[-\theta_1 B^e - 2\theta_1 C^e - 2\theta_3 C^e - 4\theta_3 D^e - 2\theta_1 D^e + \theta_1 E^e\right](\delta^e)^{n+1} + \\
&\left[A^e - \theta_3 B^e - 2\theta_3 C^e + \theta_3 E^e\right](\sigma^e)^{n+1} - \\
&\left[\theta_2 B^e + 2\theta_4 C^e + 2\theta_2 C^e + 2\theta_2 D^e + 4\theta_4 D^e - \theta_2 E^e\right](\delta^e)^{n} - \\
&\left[A^e + \theta_4 B^e + 2\theta_4 C^e - \theta_4 E^e\right](\sigma^e)^{n}
\end{aligned} \tag{8.14}
$$

eleman matrisleri elde edilir. Burada elde edilen eleman matrislerinin $m = 0, 1, \ldots, N-1$ için uygun bir şekilde birbirlerine eklenmesi sonucunda

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta} &= (\delta_{-1}, \delta_0, \ldots, \delta_{N+1})^T, \\
\boldsymbol{\sigma} &= (\sigma_{-1}, \sigma_0, \ldots, \sigma_{N+1})^T
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&\left[\mathbf{A} - \theta_3 \mathbf{B} - 2\theta_3 \mathbf{C} - 2\theta_3 \mathbf{D} + \theta_3 \mathbf{E}\right](\boldsymbol{\delta})^{n+1} - \theta_1 \mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma})^{n+1} = \\
&\left[\mathbf{A} + \theta_4 \mathbf{B} + 2\theta_4 \mathbf{C} + 2\theta_4 \mathbf{D} - \theta_4 \mathbf{E}\right](\boldsymbol{\delta})^{n} + \theta_2 \mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma})^{n}
\end{aligned} \tag{8.15}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&\left[-\theta_1 \mathbf{B} - (2\theta_1 + 2\theta_3)\mathbf{C} - (4\theta_3 + 2\theta_1)\mathbf{D} + \theta_1 \mathbf{E}\right](\boldsymbol{\delta})^{n+1} + \\
&\left[\mathbf{A} - \theta_3 \mathbf{B} - 2\theta_3 \mathbf{C} + \theta_3 \mathbf{E}\right](\boldsymbol{\sigma})^{n+1} = \\
&\left[\theta_2 \mathbf{B} + (2\theta_4 + 2\theta_2)\mathbf{C} + (2\theta_2 + 4\theta_4)\mathbf{D} - \theta_2 \mathbf{E}\right](\boldsymbol{\delta})^{n} + \\
&\left[\mathbf{A} + \theta_4 \mathbf{B} + 2\theta_4 \mathbf{C} - \theta_4 \mathbf{E}\right](\sigma)^{n}
\end{aligned} \tag{8.16}
$$

lineer olmayan denklem sistemleri elde edilir. (8.15) ve (8.16) denklem sistemleri birlikte $2N+6$ denklem ve $2N+6$ bilinmeyenden oluşan lineer olmayan denklem sistemidir. Sınır şartlarını elde edilen sisteme uygulayabilmek için denklem sistemindeki ilk 2 ve son 2 denklem silinerek bölgenin uç noktalarındaki

$$\begin{aligned} u(a,t) &= 0, \qquad u(b,t) = 0, \quad t \geq 0, \\ v(a,t) &= 0, \qquad v(b,t) = 0, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

sınır şartları kullanılarak δ_{-1}^{n+1}, δ_{N+1}^{n+1}, σ_{-1}^{n+1}, σ_{N+1}^{n+1} parametreleri sistemden yok edilirse $(2N+2)$ ve denklem $(2N+2)$ bilinmeyenden oluşan matris sistemine indirgenmiş olur.

Denklem sisteminde iteratif olarak çözüme başlamak için öncelikle $t = 0$ zamanındaki

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}^0 &= (\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \ldots, \delta_{N+1}^0)^T \\ \boldsymbol{\sigma}^0 &= (\sigma_{-1}^0, \sigma_0^0, \ldots, \sigma_{N+1}^0)^T \end{aligned}$$

başlangıç vektörlerinin hesaplanması gerekmektedir. Bunun için problemin başlangıç koşulları

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x), \qquad a \leq x \leq b, \\ v(x,0) &= g(x), \qquad a \leq x \leq b, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} u_x(a,0) = f_x(a,0) \quad v_x(a,0) = g_x(a,0) \\ u_x(b,0) = f_x(b,0) \quad v_x(b,0) = g_x(b,0) \end{aligned}$$

ilave şartlar kullanılarak başlangıç vektörleri hesaplanır. Başlangıç vektörleri $\boldsymbol{\delta}^0$ ve $\boldsymbol{\sigma}^0$ hesaplandıktan sonra, bilinmeyen vektörleri

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}^n &= (\delta_{-1}^n, \delta_0^n, \ldots, \delta_{N+1}^n)^T, \\ \boldsymbol{\sigma}^n &= (\sigma_{-1}^n, \sigma_0^n, \ldots, \sigma_{N+1}^n)^T \end{aligned}$$

olmak üzere $n = 1, 2, \ldots$ için iç iterasyon yöntemi yardmıyla istenilen t zamanındaki yaklaşık çözümler iteratif olarak hesaplanır.

8.2. Kuartik B-spline Galerkin Yöntemi

Bu kısımda GB denkleminin sayısal çözümünü elde etmek için konum parçalanmasında kuartik B-spline Galerkin yöntemi kullanılacaktır. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson (Kuartik1) ve dördüncü mertebeden tek adımlı (Kuartik2) yöntemleri önerilecektir. Öncelikle, (8.1) ve (8.2) ile verilen eşitliklerdeki

$$\int_a^b W(x)u_{xxxx}dx$$

ve

$$\int_a^b W(x)v_{xxxx}dx$$

integralleri için kısmi integrasyon uygulanırsa sırasıyla;

$$\int_a^b W(x)u_{xxxx}dx = W(x)u_{xxx}|_a^b - \int_a^b W_x(x)u_{xxx}dx$$

ve

$$\int_a^b W(x)v_{xxxx}dx = W(x)v_{xxx}|_a^b - \int_a^b W_x(x)v_{xxx}dx$$

elde edilir. Soliton dalga çözümünde, u ile v bilinmeyen fonksiyonu ile konuma göre türevleri konum aralığının uç noktalarında sıfıra gideceğinden (8.3)-(8.4) eşitlikleri

$$\int_a^b W(x)u_{xxxx}dx = -\int_a^b W_x(x)u_{xxx}dx \tag{8.17}$$

ve

$$\int_a^b W(x)v_{xxxx}dx = -\int_a^b W_x(x)v_{xxx}dx \tag{8.18}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla (8.1)-(8.2) denklemlerinde kısmi integrasyon kullanıldıktan sonra sırasıyla,

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_a^b W(x)\left[u^{n+1} - 2\theta_3 u_x^{n+1}u_x^{n+1} - (\theta_3 + 2\theta_3 u^{n+1})u_{xx}^{n+1} - \theta_1 v^{n+1}\right]dx \\ &\quad -\theta_3 \int_a^b W_x(x)\, u_{xxx}^{n+1}dx, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_2 &= \int_a^b W(x)\left[u^n + 2\theta_4 u_x^n u_x^n + (\theta_4 + 2\theta_4 u^n)u_{xx}^n + \theta_2 v^n\right] dx, \\
&\quad + \theta_4 \int_a^b W_x(x)\, u_{xxx}^n dx, \\
b_1 &= \int_a^b W(x)\left[(2\theta_1 u_x^{n+1} + 4\theta_3 v_x^{n+1})u_x^{n+1} - (\theta_1 + 2\theta_1 u^{n+1} + 2\theta_3 v^{n+1})u_{xx}^{n+1}\right] dx \\
&\quad - \theta_1 \int_a^b W_x(x)\, u_{xxx}^{n+1} dx + \int_a^b W(x)\left[v^{n+1} - (\theta_3 + 2\theta_3 u^{n+1})v_{xx}^{n+1}\right] dx \\
&\quad - \theta_3 \int_a^b W_x(x)\, v_{xxx}^{n+1} dx dx \\
b_2 &= \int_a^b W(x)\left[-(2\theta_2 u_x^n + 4\theta_4 v_x^n)\, u_x^n + (\theta_2 + 2\theta_2 u^n + 2\theta_4 v^n)u_{xx}^n\right] dx \\
&\quad + \theta_2 \int_a^b W_x(x)\, u_{xxx}^n dx + \int_a^b W(x)\left[v^n + (\theta_4 + 2\theta_4 u^n)v_{xx}^n\right] dx \\
&\quad + \theta_4 \int_a^b W_x(x)\, v_{xxx}^n dx
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$a_1 = a_2 \tag{8.19}$$

ve

$$b_1 = b_2 \tag{8.20}$$

olur. $[a, b]$ konum aralığı N eşit uzunluktaki alt aralığa parçalanırsa $[x_m, x_{m+1}]$ alt aralığı üzerinde (8.19)-(8.20) ile verilen eşitlikler $m = 0, 1, \ldots, N-1$ için sırasıyla;

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\left[u^{n+1} - 2\theta_3 u_x^{n+1} u_x^{n+1} - (\theta_3 + 2\theta_3 u^{n+1})u_{xx}^{n+1} - \theta_1 v^{n+1}\right] dx \\
&\quad - \theta_3 \int_{x_m}^{x_{m+1}} W_x(x)\, u_{xxx}^{n+1} dx,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_2 &= \int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\left[u^n + 2\theta_4 u_x^n u_x^n + (\theta_4 + 2\theta_4 u^n)u_{xx}^n + \theta_2 v^n\right] dx \\
&\quad +\theta_4 \int_{x_m}^{x_{m+1}} W_x(x)\, u_{xxx}^n dx, \\
d_1 &= \int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\left[(2\theta_1 u_x^{n+1} + 4\theta_3 v_x^{n+1})u_x^{n+1} - (\theta_1 + 2\theta_1 u^{n+1} + 2\theta_3 v^{n+1})u_{xx}^{n+1}\right] dx \\
&\quad -\theta_1 \int_{x_m}^{x_{m+1}} W_x(x)\, u_{xxx}^{n+1} dx + \int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\left[v^{n+1} - (\theta_3 + 2\theta_3 u^{n+1})v_{xx}^{n+1}\right] dx \\
&\quad -\theta_3 \int_{x_m}^{x_{m+1}} W_x(x)\, v_{xxx}^{n+1} dx, \\
d_2 &= \int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\left[-(2\theta_2 u_x^n + 4\theta_4 v_x^n)\, u_x^n + (\theta_2 + 2\theta_2 u^n + 2\theta_4 v^n)u_{xx}^n\right] dx \\
&\quad +\theta_2 \int_{x_m}^{x_{m+1}} W_x(x)\, u_{xxx}^n dx + \int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\left[v^n + (\theta_4 + 2\theta_4 u^n)v_{xx}^n\right] dx \\
&\quad +\theta_4 \int_{x_m}^{x_{m+1}} W_x(x)\, v_{xxx}^n dx
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$c_1 - c_2 \tag{8.21}$$

ve

$$d_1 - d_2 \tag{8.22}$$

olarak yazılabilir. (8.21)-(8.22) ile ifade edilen yaklaşımlarda $\xi = x - x_m$ dönüşümü yapılırsa $[x_m, x_{m+1}]$ alt aralığı $[0, h]$ aralığına dönüşecektir. $[0, h]$ aralığı üzerinde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu için (3.23-3.27) ile verilen kuartik B-spline şekil fonksiyonları, bilinmeyen u ve v fonksiyonları ve türevleri için (3.28) yaklaşımı kullanıldığında

$$i = m-2, m-1, m, m+1, m+2$$

ile

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\int_0^h \Phi_i\left[\Phi_j - 2\theta_3\left(\sum_{r=m-2}^{m+2}\Phi_r'\delta_r^{n+1}\right)\Phi_j' - \left(\theta_3 + 2\theta_3\left(\sum_{r=m-2}^{m+2}\Phi_r\delta_r^{n+1}\right)\right)\Phi_j''\right]d\zeta\right\} \\
&\quad -\theta_3\sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\int_0^h \Phi_i'\Phi_j'''d\zeta\right\}, \\
e_2 &= -\theta_1\sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\int_0^h \Phi_i\Phi_j d\zeta\right\}, \\
e_3 &= \sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\int_0^h \Phi_i\left[\Phi_j + 2\theta_4\left(\sum_{r=m-2}^{m+2}\Phi_r'\delta_r^{n}\right)\Phi_j' + \left(\theta_4 + 2\theta_4\left(\sum_{r=m-2}^{m+2}\Phi_r\delta_r^{n}\right)\right)\Phi_j''\right]d\zeta\right\} \\
&\quad +\theta_4\sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\int_0^h \Phi_i'\Phi_j'''d\zeta\right\}, \\
e_4 &= \theta_2\sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\int_0^h \Phi_i\Phi_j d\zeta\right\}, \\
f_1 &= \sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\int_0^h -\Phi_i\left(2\theta_1\left(\sum_{r=m-2}^{m+2}\Phi_r'\delta_r^{n+1}\right) + 4\theta_3\left(\sum_{r=m-2}^{m+2}\Phi_r'\sigma_r^{n+1}\right)\right)\Phi_j'\right\}d\zeta \\
&\quad + \sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\int_0^h -\Phi_i\left(\theta_1 + 2\theta_1\left(\sum_{r=m-2}^{m+2}\Phi_r\delta_r^{n+1}\right) + 2\theta_3\left(\sum_{r=m-2}^{m+2}\Phi_r\sigma_r^{n+1}\right)\right)\Phi_j''\right\}d\zeta \\
&\quad -\theta_1\sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\int_0^h \Phi_i'\Phi_j'''d\zeta\right\}, \\
f_2 &= \sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\int_0^h \Phi_i\left[\Phi_j - \left(\theta_3 + 2\theta_3\left(\sum_{r=m-2}^{m+2}\Phi_r\delta_r^{n+1}\right)\right)\Phi_j''\right]d\zeta - \theta_3\int_0^h \Phi_i'\Phi_j'''d\zeta\right\}, \\
f_3 &= \sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\int_0^h \Phi_i\left(2\theta_2\left(\sum_{r=m-2}^{m+2}\Phi_r'\delta_r^{n}\right) + 4\theta_4\left(\sum_{r=m-2}^{m+2}\Phi_r'\sigma_r^{n}\right)\right)\Phi_j'\right\}d\zeta \\
&\quad + \sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\int_0^h \Phi_i\left(\theta_2 + 2\theta_2\left(\sum_{r=m-2}^{m+2}\Phi_r\delta_r^{n}\right) + 2\theta_4\left(\sum_{r=m-2}^{m+2}\Phi_r\sigma_r^{n}\right)\right)\Phi_j''\right\}d\zeta \\
&\quad +\theta_2\sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\int_0^h \Phi_i'\Phi_j'''d\zeta\right\}, \\
f_4 &= \sum_{j=m-2}^{m+2}\left\{\int_0^h \Phi_i\left[\Phi_j + \left(\theta_4 + 2\theta_4\left(\sum_{r=m-2}^{m+2}\Phi_r\delta_r^{n}\right)\right)\Phi_j''\right]d\zeta + \theta_4\int_0^h \Phi_i'\Phi_j'''d\zeta\right\}
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$e_1\delta_j^{n+1} + e_2\sigma_j^{n+1} - \left(e_3\delta_j^n + e_4\sigma_j^n\right) \tag{8.23}$$

ve

$$f_1\delta_j^{n+1} + f_2\sigma_j^{n+1} - \left(f_3\delta_j^n + f_4\sigma_j^n\right) \tag{8.24}$$

olarak elde edilir. (8.23-8.24) ifadelerinde gerekli düzenlenmeler yapıldıktan sonra

$$\begin{aligned} i &= m-2, m-1, m, m+1, m+2 \\ j &= m-2, m-1, m, m+1, m+2 \end{aligned}$$

için

$$\begin{aligned} A_{ij}^e &= \int_0^h \Phi_i \Phi_j d\zeta, \\ B_{ij}^e &= \int_0^h \Phi_i \Phi_j'' d\zeta, \\ C_{ij}^e(\delta^{n+1}) &= \int_0^h \Phi_i \left(\sum_{r=m-2}^{m+2} \Phi_r \delta_r^{n+1} \right) \Phi_j'' d\zeta, \\ D_{ij}^e(\delta^{n+1}) &= \int_0^h \Phi_i \left(\sum_{r=m-2}^{m+2} \Phi_r' \delta_r^{n+1} \right) \Phi_j' d\zeta, \\ E_{ij}^e &= \int_0^h \Phi_i' \Phi_j''' d\zeta, \\ \delta^e &= (\delta_{m-2}, \delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2})^T, \\ \sigma^e &= (\sigma_{m-2}, \sigma_{m-1}, \sigma_m, \sigma_{m+1}, \sigma_{m+2})^T \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} &\left[A^e - \theta_3 B^e - 2\theta_3 C^e - 2\theta_3 D^e - \theta_3 E^e\right](\delta^e)^{n+1} - \theta_1 A^e(\sigma^e)^{n+1} - \\ &\left[A^e + \theta_4 B^e + 2\theta_4 C^e + 2\theta_4 D^e + \theta_4 E^e\right](\delta^e)^n - \theta_2 A^e(\sigma^e)^n \end{aligned} \tag{8.25}$$

ve

$$\begin{aligned} &\left[-\theta_1 B^e - 2\theta_1 C^e - 2\theta_3 C^e - 4\theta_3 D^e - 2\theta_1 D^e + \theta_1 E^e\right](\delta^e)^{n+1} + \\ &\left[A^e - \theta_3 B^e - 2\theta_3 C^e + \theta_3 E^e\right](\sigma^e)^{n+1} - \\ &\left[\theta_2 B^e + 2\theta_4 C^e + 2\theta_2 C^e + 2\theta_2 D^e + 4\theta_4 D^e - \theta_2 E^e\right](\delta^e)^n - \\ &\left[A^e + \theta_4 B^e + 2\theta_4 C^e - \theta_4 E^e)\right](\sigma^e)^n \end{aligned} \tag{8.26}$$

eleman matrisleri elde edilir. Burada elde edilen eleman matrislerinin $m = 0, 1, \ldots, N-1$ için uygun bir şekilde birbirlerine eklenmesi sonucunda

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta} &= (\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \ldots, \delta_{N+1})^T, \\ \boldsymbol{\sigma} &= (\sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0, \ldots, \sigma_{N+1})^T \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} &[\mathbf{A} - \theta_3\mathbf{B} - 2\theta_3\mathbf{C} - 2\theta_3\mathbf{D} - \theta_3\mathbf{E}]\,(\boldsymbol{\delta})^{n+1} - \theta_1\mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma})^{n+1} = \\ &[\mathbf{A} + \theta_4\mathbf{B} + 2\theta_4\mathbf{C} + 2\theta_4\mathbf{D} + \theta_4\mathbf{E}]\,(\boldsymbol{\delta})^{n} + \theta_2\mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma})^{n} \end{aligned} \tag{8.27}$$

ve

$$\begin{aligned} &[-\theta_1\mathbf{B} - (2\theta_1{+}2\theta_3)\mathbf{C} - (4\theta_3 + 2\theta_1)\mathbf{D} + \theta_1\mathbf{E}]\,(\boldsymbol{\delta})^{n+1} + \\ &[\mathbf{A} - \theta_3\mathbf{B} - 2\theta_3\mathbf{C} + \theta_3\mathbf{E}]\,(\boldsymbol{\sigma})^{n+1} = \\ &[\theta_2\mathbf{B} + (2\theta_4 + 2\theta_2)\mathbf{C} + (2\theta_2 + 4\theta_4)\mathbf{D} - \theta_2\mathbf{E}]\,(\boldsymbol{\delta})^{n} + \\ &[\mathbf{A} + \theta_4\mathbf{B} + 2\theta_4\mathbf{C} - \theta_4\mathbf{E}]\,(\sigma)^{n} \end{aligned} \tag{8.28}$$

lineer olmayan denklem sistemleri elde edilir. (8.27) ve (8.28) denklem sistemleri birlikte $2N+8$ denklem ve $2N+8$ bilinmeyenden oluşan lineer olmayan bir sistemdir. Sınır şartlarını elde edilen sisteme uygulayabilmek için denklem sistemindeki ilk 2 ve son 2 denklem silinerek bölgenin uç noktalarındaki

$$\begin{aligned} u(a,t) &= 0, \qquad u(b,t) = 0, \quad t \geq 0, \\ v(a,t) &= 0, \qquad v(b,t) = 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

sınır şartları kullanılarak $\delta_{-2}^{n+1}, \delta_{N+1}^{n+1}, \sigma_{-2}^{n+1}, \sigma_{N+1}^{n+1}$ parametreleri sistemden yok edilirse $(2N+4) \times (2N+4)$ çözülebilir matris sistemine indirgenmiş olur.

Denklem sisteminde iteratif olarak çözüme başlamak için öncelikle $t = 0$ zamanındaki

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}^0 &= (\delta_{-2}^0, \delta_{-1}^0, \delta_0^0, \ldots, \delta_{N+1}^0)^T \\ \boldsymbol{\sigma}^0 &= (\sigma_{-2}^0, \sigma_{-1}^0, \sigma_0^0, \ldots, \sigma_{N+1}^0)^T \end{aligned}$$

başlangıç vektörlerinin hesaplanması gerekmektedir. Bunun için problemin başlangıç koşulları

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x), \qquad a \leq x \leq b \\ v(x,0) &= g(x), \qquad a \leq x \leq b \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} u_x(a,0) &= f_x(a,0) \qquad v_x(a,0) = g_x(a,0) \\ u_{xx}(a,0) &= f_{xx}(a,0) \quad v_{xx}(a,0) = g_{xx}(a,0) \\ u_x(b,0) &= f_x(b,0) \qquad v_x(b,0) = g_x(b,0) \end{aligned}$$

ilave şartlar kullanılarak başlangıç vektörleri hesaplanır. Başlangıç vektörleri $\boldsymbol{\delta}^0$ ve $\boldsymbol{\sigma}^0$ hesaplandıktan sonra, bilinmeyen vektörleri

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}^n &= (\delta_{-2}^n, \delta_{-1}^n, \delta_0^n, \ldots, \delta_{N+1}^n)^T, \\ \boldsymbol{\sigma}^n &= (\sigma_{-2}^n, \sigma_{-1}^n, \sigma_0^n, \ldots, \sigma_{N+1}^n)^T \end{aligned}$$

olmak üzere $n = 1, 2, \ldots$ için iç iterasyon yöntemi kullanılarak istenilen t zamanındaki yaklaşık çözümler iteratif olarak hesaplanır.

8.3. Kuintik B-spline Galerkin Yöntemi

Bu kısımda KG denkleminin sayısal çözümünü elde etmek için konum parçalanmasında kuintik B-spline Galerkin yöntemi kullanılacaktır. Zaman parçalanması için Crank-Nicolson (Kuintik1) ve dördüncü mertebeden tek adımlı (Kuintik2) yöntemleri önerilecektir. Önceki alt bölümlerden farklı olarak kuintik B-spline fonksiyonları bölünme noktalarında dördüncü mertebeden sürekli kısmi türeve sahip olduğundan bu alt bölümde kısmi integrasyon yapılmasına gerek yoktur. Galerkin yönteminde $[a, b]$ konum aralığı N eşit uzunluktaki alt aralığa parçalanırsa $[x_m, x_{m+1}]$ alt aralığı üzerinde (8.1)-(8.2) ile verilen eşitlikler $m = 0, 1, \ldots, N-1$ için sırasıyla;

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x) \left[u^{n+1} - 2\theta_3 u_x^{n+1} u_x^{n+1} - (\theta_3 + 2\theta_3 u^{n+1}) u_{xx}^{n+1} - \theta_1 v^{n+1} \right] dx \\ &\quad + \theta_3 \int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\, u_{xxxx}^{n+1} dx, \\ c_2 &= \int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x) \left[u^n + 2\theta_4 u_x^n u_x^n + (\theta_4 + 2\theta_4 u^n) u_{xx}^n + \theta_2 v^n \right] dx \\ &\quad - \theta_4 \int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\, u_{xxxx}^n dx, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\left[(2\theta_1 u_x^{n+1}+4\theta_3 v_x^{n+1})u_x^{n+1}-(\theta_1+2\theta_1 u^{n+1}+2\theta_3 v^{n+1})u_{xx}^{n+1}\right]dx \\
&\quad +\theta_1\int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\,u_{xxxx}^{n+1}dx+\int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\left[v^{n+1}-(\theta_3+2\theta_3 u^{n+1})v_{xx}^{n+1}\right]dx \\
&\quad +\theta_3\int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\,v_{xxxx}^{n+1}dx, \\
d_2 &= \int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\left[-(2\theta_2 u_x^{n}+4\theta_4 v_x^{n})\,u_x^{n}+(\theta_2+2\theta_2 u^{n}+2\theta_4 v^{n})u_{xx}^{n}\right]dx \\
&\quad +\theta_2\int_{x_m}^{x_{m+1}} W_x(x)\,u_{xxx}^{n}dx+\int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\left[v^{n}+(\theta_4+2\theta_4 u^{n})v_{xx}^{n}\right]dx \\
&\quad -\theta_4\int_{x_m}^{x_{m+1}} W(x)\,v_{xxxx}^{n}dx
\end{aligned}
$$

$$c_1 - c_2 \tag{8.29}$$

ve

$$d_1 - d_2 \tag{8.30}$$

olarak yazılabilir. (8.29)-(8.30) ile ifade edilen yaklaşımlarda $\xi = x - x_m$ dönüşümü yapılırsa $[x_m, x_{m+1}]$ alt aralığı $[0,h]$ aralığına dönüşecektir. $[0,h]$ aralığı üzerinde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu için (3.30-3.35) ile verilen kuintik B-spline şekil fonksiyonları, bilinmeyen u ve v fonksiyonları ve türevleri için (3.36) yaklaşımı kullanıldığında

$$i = m-2, m-1, m, m+1, m+2, m+3$$

ile

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\int_0^h \Phi_i\left[\Phi_j-2\theta_3\left(\sum_{r=m-2}^{m+3}\Phi_r'\delta_r^{n+1}\right)\Phi_j'-\left(\theta_3+2\theta_3\left(\sum_{r=m-2}^{m+3}\Phi_r\delta_r^{n+1}\right)\right)\Phi_j''\right]d\zeta\right\} \\
&\quad +\theta_3\sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\int_0^h \Phi_i\Phi_j^{(4)}d\zeta\right\}, \\
e_2 &= -\theta_1\sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\int_0^h \Phi_i\Phi_j d\zeta\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e_3 &= \sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\int_0^h \Phi_i\left[\Phi_j+2\theta_4\left(\sum_{r=m-2}^{m+3}\Phi'_r\delta_r^n\right)\Phi'_j+\left(\theta_4+2\theta_4\left(\sum_{r=m-2}^{m+3}\Phi_r\delta_r^n\right)\right)\Phi''_j\right]d\zeta\right\}\\
&\quad -\theta_4\sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\int_0^h \Phi_i\Phi_j^{(4)}d\zeta\right\},\\
e_4 &= \theta_2\sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\int_0^h \Phi_i\Phi_j d\zeta\right\},\\
f_1 &= \sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\int_0^h -\Phi_i\left(2\theta_1\left(\sum_{r=m-2}^{m+3}\Phi'_r\delta_r^{n+1}\right)+4\theta_3\left(\sum_{r=m-2}^{m+3}\Phi'_r\sigma_r^{n+1}\right)\right)\Phi'_j\right\}d\zeta\\
&\quad +\sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\int_0^h -\Phi_i\left(\theta_1+2\theta_1\left(\sum_{r=m-2}^{m+3}\Phi_r\delta_r^{n+1}\right)+2\theta_3\left(\sum_{r=m-2}^{m+3}\Phi_r\sigma_r^{n+1}\right)\right)\Phi''_j\right\}d\zeta\\
&\quad +\theta_1\sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\int_0^h \Phi_i\Phi_j^{(4)}d\zeta\right\},\\
f_2 &= \sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\int_0^h \Phi_i\left[\Phi_j-\left(\theta_3+2\theta_3\left(\sum_{r=m-2}^{m+3}\Phi_r\delta_r^{n+1}\right)\right)\Phi''_j\right]d\zeta+\theta_3\int_0^h \Phi_i\Phi_j^{(4)}d\zeta\right\},\\
f_3 &= \sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\int_0^h \Phi_i\left(2\theta_2\left(\sum_{r=m-2}^{m+3}\Phi'_r\delta_r^{n}\right)+4\theta_4\left(\sum_{r=m-2}^{m+3}\Phi'_r\sigma_r^{n}\right)\right)\Phi'_j\right\}d\zeta\\
&\quad +\sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\int_0^h \Phi_i\left(\theta_2+2\theta_2\left(\sum_{r=m-2}^{m+3}\Phi_r\delta_r^{n}\right)+2\theta_4\left(\sum_{r=m-2}^{m+3}\Phi_r\sigma_r^{n}\right)\right)\Phi''_j\right\}d\zeta\\
&\quad -\theta_2\sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\int_0^h \Phi_i\Phi_j^{(4)}d\zeta\right\},\\
f_4 &= \sum_{j=m-2}^{m+3}\left\{\int_0^h \Phi_i\left[\Phi_j+\left(\theta_4+2\theta_4\left(\sum_{r=m-2}^{m+3}\Phi_r\delta_r^{n}\right)\right)\Phi''_j\right]d\zeta-\theta_4\int_0^h \Phi_i\Phi_j^{(4)}d\zeta\right\}
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$e_1\delta_j^{n+1}+e_2\sigma_j^{n+1}-\left(e_3\delta_j^n+e_4\sigma_j^n\right) \tag{8.31}$$

ve

$$f_1\delta_j^{n+1}+f_2\sigma_j^{n+1}-\left(f_3\delta_j^n+f_4\sigma_j^n\right) \tag{8.32}$$

olarak elde edilir. (8.31-8.32) ifadelerinde gerekli düzenlenmeler yapıldıktan sonra

$$\begin{aligned} i &= m-2, m-1, m, m+1, m+2, m+3 \\ j &= m-2, m-1, m, m+1, m+2, m+3 \end{aligned}$$

için

$$\begin{aligned} A_{ij}^e &= \int_0^h \Phi_i \Phi_j d\zeta, \\ B_{ij}^e &= \int_0^h \Phi_i \Phi_j'' d\zeta, \\ C_{ij}^e(\delta^{n+1}) &= \int_0^h \Phi_i \left(\sum_{r=m-2}^{m+3} \Phi_r \delta_r^{n+1} \right) \Phi_j'' d\zeta, \\ D_{ij}^e(\delta^{n+1}) &= \int_0^h \Phi_i \left(\sum_{r=m-2}^{m+23} \Phi_r' \delta_r^{n+1} \right) \Phi_j' d\zeta, \\ E_{ij}^e &= \int_0^h \Phi_i \Phi_j^{(4)} d\zeta, \\ \delta^e &= (\delta_{m-2}, \delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2}, \delta_{m+3})^T, \\ \sigma^e &= (\sigma_{m-2}, \sigma_{m-1}, \sigma_m, \sigma_{m+1}, \sigma_{m+2}, \sigma_{m+3})^T \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} &\left[A^e - \theta_3 B^e - 2\theta_3 C^e - 2\theta_3 D^e + \theta_3 E^e\right] (\delta^e)^{n+1} - \theta_1 A^e (\sigma^e)^{n+1} - \\ &\left[A^e + \theta_4 B^e + 2\theta_4 C^e + 2\theta_4 D^e - \theta_4 E^e\right] (\delta^e)^n - \theta_2 A^e (\sigma^e)^n \end{aligned} \tag{8.33}$$

ve

$$\begin{aligned} &\left[-\theta_1 B^e - 2\theta_1 C^e - 2\theta_3 C^e - 4\theta_3 D^e - 2\theta_1 D^e + \theta_1 E^e\right] (\delta^e)^{n+1} + \\ &\left[A^e - \theta_3 B^e - 2\theta_3 C^e + \theta_3 E^e\right] (\sigma^e)^{n+1} - \\ &\left[\theta_2 B^e + 2\theta_4 C^e + 2\theta_2 C^e + 2\theta_2 D^e + 4\theta_4 D^e - \theta_2 E^e\right] (\delta^e)^n - \\ &\left[A^e + \theta_4 B^e + 2\theta_4 C^e - \theta_4 E^e\right] (\sigma^e)^n \end{aligned} \tag{8.34}$$

eleman matrisleri elde edilir. Burada elde edilen eleman matrislerinin $m = 0, 1, \ldots, N-1$ için uygun bir şekilde birbirlerine eklenmesi sonucunda

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta} &= (\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \ldots, \delta_{N+2})^T \\ \boldsymbol{\sigma} &= (\sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0, \ldots, \sigma_{N+2})^T \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}&[\mathbf{A}-\theta_3\mathbf{B}-2\theta_3\mathbf{C}-2\theta_3\mathbf{D}+\theta_3\mathbf{E}]\,(\boldsymbol{\delta})^{n+1}-\theta_1\mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma})^{n+1}=\\&[\mathbf{A}+\theta_4\mathbf{B}+2\theta_4\mathbf{C}+2\theta_4\mathbf{D}-\theta_4\mathbf{E}]\,(\boldsymbol{\delta})^{n}+\theta_2\mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma})^{n}\end{aligned}\tag{8.35}$$

$$\begin{aligned}&[-\theta_1\mathbf{B}-(2\theta_1{+}2\theta_3)\mathbf{C}-(4\theta_3+2\theta_1)\mathbf{D}+\theta_1\mathbf{E}]\,(\boldsymbol{\delta})^{n+1}+\\&[\mathbf{A}-\theta_3\mathbf{B}-2\theta_3\mathbf{C}+\theta_3\mathbf{E}]\,(\boldsymbol{\sigma})^{n+1}=\\&[\theta_2\mathbf{B}+(2\theta_4+2\theta_2)\mathbf{C}+(2\theta_2+4\theta_4)\mathbf{D}-\theta_2\mathbf{E}]\,(\boldsymbol{\delta})^{n}+\\&[\mathbf{A}+\theta_4\mathbf{B}+2\theta_4\mathbf{C}-\theta_4\mathbf{E}]\,(\sigma)^{n}\end{aligned}\tag{8.36}$$

lineer olmayan denklem sistemleri elde edilir. (8.35) ve (8.36) denklem sistemleri birlikte $2N+10$ denklem ve $2N+10$ bilinmeyenden oluşan lineer olmayan bir sistemdir. Sınır şartlarını elde edilen sisteme uygulayabilmek için denklem sistemindeki ilk 2 ve son 2 denklem silinerek bölgenin uç noktalarındaki

$$\begin{aligned}u(a,t)&=0,\qquad u(b,t)=0,\quad t\geq 0,\\v(a,t)&=0,\qquad v(b,t)=0,\quad t\geq 0,\end{aligned}$$

sınır şartları kullanılarak $\delta_{-2}^{n+1},\delta_{N+2}^{n+1},\sigma_{-2}^{n+1},\sigma_{N+2}^{n+1}$ parametreleri sistemden yok edilirse $(2N{+}8)\times(2N{+}8)$ çözülebilir matris sistemine indirgenmiş olur. Denklem sisteminde iteratif olarak çözüme başlamak için öncelikle $t=0$ zamanındaki

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}^0&=(\delta_{-2}^0,\delta_{-1}^0,\delta_0^0,\ldots,\delta_{N+1}^0,\delta_{N+2}^0)^T\\\boldsymbol{\sigma}^0&=(\sigma_{-2}^0,\sigma_{-1}^0,\sigma_0^0,\ldots,\sigma_{N+1}^0,\sigma_{N+2}^0)^T\end{aligned}$$

başlangıç vektörlerinin hesaplanması gerekmektedir. Bunun için problemin başlangıç koşulları

$$\begin{aligned}u(x,0)&=f(x),\qquad a\leq x\leq b,\\v(x,0)&=g(x),\qquad a\leq x\leq b,\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}&u_x(a,0)=f_x(a,0)\qquad v_x(a,0)=g_x(a,0)\\&u_{xx}(a,0)=f_{xx}(a,0)\quad v_{xx}(a,0)=g_{xx}(a,0)\\&u_x(b,0)=f_x(b,0)\qquad v_x(b,0)=g_x(b,0)\\&u_{xx}(b,0)=f_{xx}(b,0)\quad v_{xx}(b,0)=g_{xx}(b,0)\end{aligned}$$

ilave şartlar kullanılarak başlangıç vektörleri hesaplanır. Başlangıç vektörleri $\boldsymbol{\delta}^0$ ve $\boldsymbol{\sigma}^0$ hesaplandıktan sonra, bilinmeyen vektörleri

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}^n &= (\delta_{-2}^n, \delta_{-1}^n, \delta_0^n, \ldots, \delta_{N+1}^n, \delta_{N+2}^n)^T \\ \boldsymbol{\sigma}^n &= (\sigma_{-2}^n, \sigma_{-1}^n, \sigma_0^n, \ldots, \sigma_{N+1}^n, \sigma_{N+2}^n)^T \end{aligned}$$

olmak üzere $n = 1, 2, \ldots$ için iç iterasyon yöntemi yardımıyla istenilen t zamanındaki yaklaşık çözümler iteratif olarak hesaplanır.

8.4. Test Problemleri

Bu bölümde GB denkleminin sayısal çözümü için önerilen Kübik1, Kübik2, Kuartik1, Kuartik2, Kuintik1 ve Kuintik2 yöntemlerinin doğruluğunu kontrol etmek için soliton dalgasının hareketi ve iki soliton dalgasının çarpışması problemleri incelenecektir.

8.4.1. Soliton dalgasının hareketi

3. bölümde tanıtılan bu test problemi için analitik çözüm ve başlangıç şartları sırasıyla,

$$u(x,t) = -A \sec h^2 \left(\sqrt{\frac{A}{6}}(x - ct - x_0) \right) - (b + \frac{1}{2})$$

ve

$$\begin{aligned} f(x) &= u(x,0) = -A \sec h^2 \left(\sqrt{\frac{A}{6}}(x - x_0) \right) - (b + \frac{1}{2}) \\ g(x) &= u_t(x,0) = -2Ac\sqrt{\frac{A}{6}} \sec h^2 \left(\sqrt{\frac{A}{6}}(x - x_0) \right) \tanh \left(\sqrt{\frac{A}{6}}(x - x_0) \right) \end{aligned}$$

olarak verilmişti. Bu bölümde

$$A = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}, c = \mp \left(-2(b + \frac{A}{3}) \right)^{\frac{1}{2}}$$

parametreleri seçilerek $-40 \leq x \leq 60$ konum aralığı üzerinde programlar $t = 10$ zamanına kadar çalıştırılacaktır.

Kübik1, Kübik2, Kuartik1, Kuartik2, Kuintik1 ve Kuintik2 programları $h = 0.1$ sabit konum adım uzunluğu ve Δt zaman adım uzunluğu için ise $\Delta t = 5$ değerinden

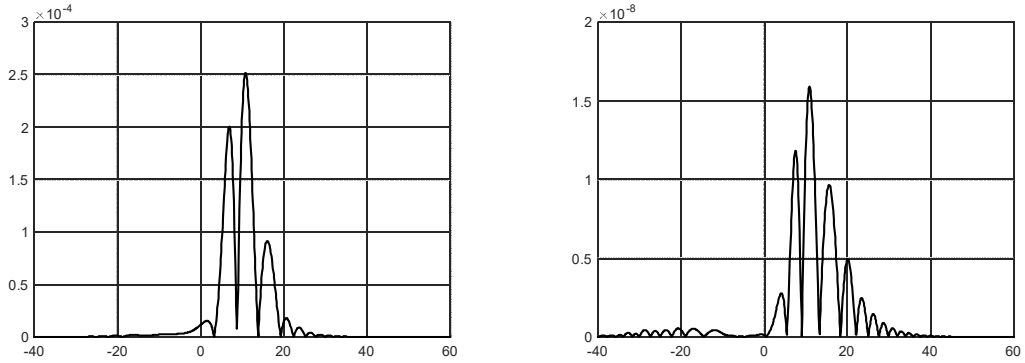
başlayarak $\Delta t = 0.125$ değerine kadar küçültülerek çalıştırılmış ve elde edilen L_∞ hata normları ile yakınsama oranları birlikte Çizelge 8.1 de verilmiştir. Çizelge 8.1 deki sonuçlar zaman artım uzunlukları küçüldükçe her iki önerilen yöntem için de L_∞ hatalarının azalmakta olduğunu, önerilen zaman parçalanmasının hatayı oldukça düşürdüğünü göstermektedir. Ayrıca hesaplanan yakınsama oranlarının teorik yakınsama oranları ile hemen hemen uyumlu olduğu da Çizelge 8.1 den görülmektedir.

Çizelge 8.1: $h = 0.1$ ve farklı zaman artımları için hata normları ve yakınsaklık oranları

Δt	Kübik1	Y.O	Kübik2	Y.O	Kuartik1	Y.O	Kuartik2	Y.O
5	1.77×10^{-1}	–	5.27×10^{-2}	–	1.78×10^{-1}	–	5.27×10^{-2}	–
2	5.86×10^{-2}	1.21	1.43×10^{-3}	3.94	5.87×10^{-2}	1.21	1.43×10^{-3}	3.46
1	1.71×10^{-2}	1.78	9.40×10^{-5}	3.93	1.70×10^{-2}	1.78	9.39×10^{-5}	3.89
0.5	4.07×10^{-3}	2.07	6.02×10^{-6}	3.96	4.07×10^{-3}	2.07	6.02×10^{-6}	3.95
0.25	1.01×10^{-3}	2.01	3.72×10^{-7}	4.01	1.01×10^{-3}	2.01	3.80×10^{-7}	3.98
0.125	2.52×10^{-4}	2.00	1.59×10^{-8}	4.55	2.52×10^{-4}	2.00	2.38×10^{-8}	3.99

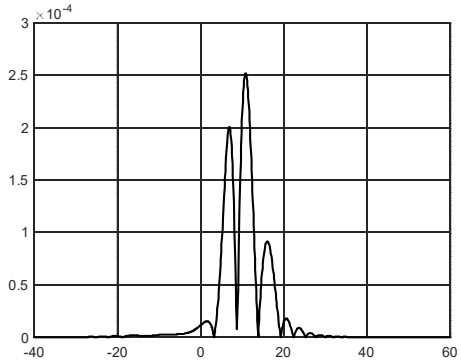
Δt	Kuintik1	Y.O	Kuintik2	Y.O
5	1.78×10^{-1}	–	3.33×10^{-2}	–
2	5.87×10^{-2}	1.21	1.39×10^{-3}	3.46
1	1.70×10^{-2}	1.78	9.40×10^{-5}	3.89
0.5	4.07×10^{-3}	2.07	6.05×10^{-6}	3.96
0.25	1.01×10^{-3}	2.01	3.82×10^{-7}	3.99
0.125	2.52×10^{-4}	2.00	2.38×10^{-8}	4.00

Sayısal çözüm için önerilen 6 farklı Galerkin yöntemi için zaman ve konum artım uzunluğu $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.125$ alınarak $t = 10$ zamanına kadar çalıştırılan programlar için mutlak hata grafikleri Şekil 8.1 de verilmiştir. Şekil 8.1 deki hata grafikleri incelendiğinde mutlak hatanın Çizelge 8.1 de verilen L_∞ hatasıyla uyumlu olduğu ve konum aralığının orta noktalarında geldiği görülmektedir.

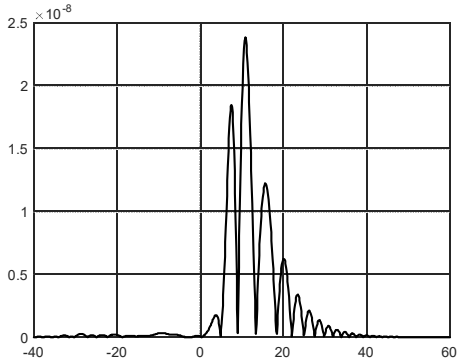


a) Kübik1

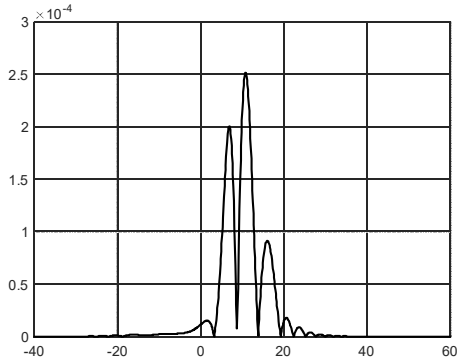
b) Kübik2



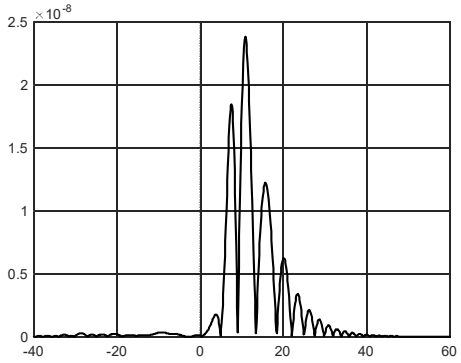
c) Kuartik1



d) Kuartik2



e) Kuintik1



f) Kuintik2

Şekil 8.1 : $t = 10$ anındaki mutlak hata

8.4.2. İki soliton dalgasının çarpışması

İki soliton dalgasının çarpışması probleminde başlangıç şartları $i = 1, 2$ için

$$f_i(x) = u_i(x,0) = -A_i \sec h^2\left(\sqrt{\frac{A_i}{6}}(x - x_i^0)\right),$$

$$g_i(x) = v_i(x,0) = -2A_i c_i \sqrt{\frac{A_i}{6}} \sec h^2\left(\sqrt{\frac{A_i}{6}}(x - x_i^0)\right) \tanh\left(\sqrt{\frac{A_i}{6}}(x - x_i^0)\right)$$

$$c_i = \mp \left(1 - \frac{2A_i}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

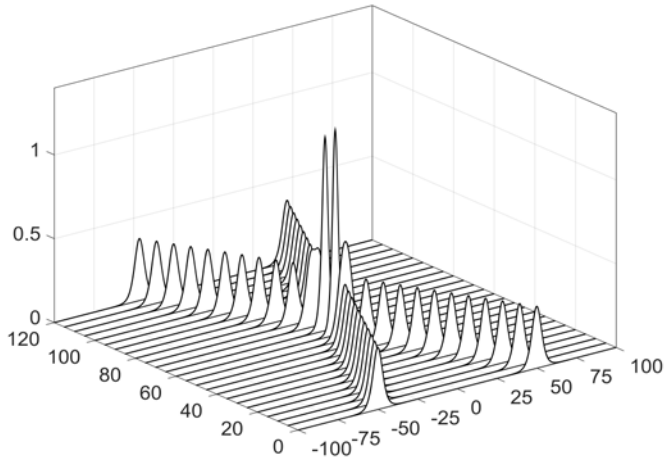
olmak üzere

$$\begin{aligned} f(x) &= u_1(x,0) + u_2(x,0) \\ g(x) &= v_1(x,0) + v_2(x,0) \end{aligned}$$

formunda 3. bölümde verilmiştir. Bu test problemi için

$$x_1^0 = -x_2^0 = -50, A_1 = A_2 = 0.369, c_1 = -c_2 = \sqrt{1 - \frac{2A}{3}}, h = 0.1, \Delta t = 0.01$$

parametreleri seçilerek $-100 \leq x \leq 100$ konum aralığında Kuartik2 için bilinmeyen u fonksiyonunun farklı zamanlardaki mutlak değerinin grafiği şekil 8.2'de çizilmiştir. Şekil 8.2 incelendiğinde, $t = 0$ anında tepe noktaları $x = -50$ ve $x = 50$ noktalarına karşılık gelen 0.369 genlikli iki soliton dalgasının hareketi gözlemlenmektedir. Soliton dalgaları zamanla birbirlerine doğru hareket etmekte ve yaklaşık $t = 60$ anında bir çarpışma gerçekleşmektedir. Çarpışma sonrasında ise dalgalar başlangıçtaki şekil ve büyüklüklerini koruyarak zıt yönde hareketlerine devam etmektedir. Diğer önerilen metotlar için şekil çizildiğinde görsel olarak herhangi bir fark oluşmadığı için şekil tekrar çizilmemiştir.



Şekil 8.2 Kuartik2 için soliton dalgalarının çarpışması

Kübik1, Kübik2, Kuartik1, Kuartik2, Kuintik1 ve Kuintik2 programları $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ sabit konum ve zaman artım değerleri için $t = 120$ zamanına kadar

çalıştırılmıştır. $T = 0$, 20, 40, 60, 80, 100, 120 zamanlarındaki korunum sabitlerinin sayısal değerleri Çizelge 8.2 de sunulmuştur. Çizelge 8.2 de verilen sonuçlar incelendiğinde zaman parçalanması için dördüncü mertebeden tek adımlı yöntem kullanıldığında hesaplanan korunum sabiti değerlerinin Crank-Nicolson yöntemi kullanıldığında hesaplanan korunum sabiti değerlerine göre gerçek değere daha yakın olduğu görülmektedir.

Çizelge 8.2: $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için korunum sabitleri

	Kübik1	Kübik2	Kuartik1	Kuartik2
$t = 0$	-5.951806448	-5.951806448	-5.951806448	-5.951806448
$t = 20$	-5.951806452	-5.951806449	-5.951806452	-5.951806448
$t = 40$	-5.951806453	-5.951806453	-5.951806449	-5.951806449
$t = 60$	-5.951806841	-5.951806453	-5.951806837	-5.951806449
$t = 80$	-5.951806688	-5.951806460	-5.951806682	-5.951806449
$t = 100$	-5.951806085	-5.951806468	-5.951806058	-5.951806450
$t = 120$	-5.951806406	-5.951806466	-5.951806344	-5.951806450
Tam Değer	-5.951806447	-5.951806447	-5.951806447	-5.951806447

	Kuintik1	Kuintik2
$t = 0$	-5.951806448	-5.951806448
$t = 20$	-5.951806452	-5.951806449
$t = 40$	-5.951806452	-5.951806452
$t = 60$	-5.951806845	-5.951806457
$t = 80$	-5.951806695	-5.951806462
$t = 100$	-5.951806078	-5.951806470
$t = 120$	-5.951806370	-5.951806476
Tam Değer	-5.951806447	-5.951806447

9. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada zamana göre ikinci mertebeden lineer Telegraph ve lineer olmayan KG ve GB kısmi türevli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri araştırılmıştır. Sayısal çözümleri elde etmek için iki farklı zaman parçalanması önerilmiştir. Önerilen ilk zaman parçalanması literatürde yaygın bir şekilde kullanılan ikinci mertebeden doğruluğa sahip Crank-Nicolson yöntemidir. Zaman parçalanması için önerilen ikinci yöntem ise literatürde bu zamana kadar çalışılan denklemlerin sayısal çözümleri araştırılırken kullanılmayan dördüncü mertebeden doğruluğa sahip tek adımlı olan yöntemdir. Sayısal çözümleri aranılan denklemlerin zaman parçalanmaları elde edildikten sonra konum parçalanmaları yapılırken ise farklı dereceden B-spline Galerkin ve kolokasyon yöntemleri kullanılmıştır.

Bu bölümde ise lineer Telegraph ve lineer olmayan KG ve GB kısmi türevli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri araştırılırken farklı zaman ve konum parçalanmaları sonucunda bulunan çözümler tartışılmıştır.

Telegraph denkleminin sayısal çözümü için önerilen yöntemleri doğruluğunu test etmek adına iki farklı test problemi üzerinde çalışılmıştır.

Birinci test probleminde homojen olmayan Telegraph denklemi ele alınmıştır. Konum artım uzunluğu $h = 0.01$ ve zaman artım uzunluğu $\Delta t = 1/32$ seçimleri yapıldığında önceki bölümlerde elde edilen sonuçlar Çizelge 9.1 de tekrar verilmiştir. Çizelge 9.1 deki sonuçlara göre zaman parçalanmasında Crank-Nicolson yöntemi, konum parçalanmasında farklı dereceden B-spline kolokasyon ve Galerkin yöntemlerinin kullanıldığı durumda elde edilen sonuçların hemen hemen aynı olduğu görülmüştür. Benzer şekilde zaman parçalanmasında dördüncü mertebeden tek adımlı yöntem, konum parçalanmasında farklı dereceden B-spline Galerkin ve kolokasyon yöntemlerinin kullanıldığı ikinci durumda da hemen hemen aynı sonuçların elde edildiğini ancak Crank-Nicolson zaman parçalanmasının önerildiği ilk duruma göre sonuçların daha düşük olduğu görülmektedir.

Çizelge 9.1: $h = 0.01$ ve $\Delta t = 1/32$ için $t = 1$ anındaki hata normları

Kolokasyon		Galerkin	
Kübik1	Kübik2	Kübik1	Kübik2
2.73×10^{-5}	1.15×10^{-9}	2.73×10^{-5}	1.15×10^{-9}
Kuartik1	Kuartik2	Kuartik1	Kuartik2
2.73×10^{-5}	1.15×10^{-9}	2.72×10^{-5}	1.13×10^{-9}
Kuintik1	Kuintik2	Kuintik1	Kuintik2
2.73×10^{-5}	1.15×10^{-9}	2.70×10^{-5}	1.11×10^{-9}

İkinci test probleminde ise homojen Telegraph denklemi ele alınmış ve konum artım uzunluğu $h = 0.005$ ve zaman artım uzunluğu $\Delta t = 1/32$ değerleri için elde edilen sonuçlar, önerilen yöntemleri kıyaslayabilmek için Çizelge 9.2 de tekrar verilmiştir. Çizelge 9.2 deki sonuçlar incelendiğinde zaman parçalanması yapılırken Crank-Nicolson yöntemi, konum parçalanması yapılırken farklı dereceden B-spline kolokasyon ve Galerkin yöntemlerinin kullanıldığı durumda elde edilen sonuçların aynı bulunduğu görülmüştür. Benzer şekilde zaman parçalanmasında dördüncü mertebeden tek adımlı yöntem, konum parçalanmasında ise farklı dereceden B-spline Galerkin ve kolokasyon yöntemlerinin kullanıldığı ikinci durumda elde edilen sonuçlara göre Galerkin Kübik2, Kuartik2, Kuintik2 ve kolokasyon Kuartik2, Kuintik2 yöntemlerinin aynı sonuçlar verdiği ve sonuçların kolokasyon Kübik2 yöntemine göre daha düşük olduğu görülmüştür.

Çizelge 9.2: $h = 0.005$ ve $\Delta t = 1/32$ için $t = 1$ anındaki hata normları

Kolokasyon		Galerkin	
Kübik1	Kübik2	Kübik1	Kübik2
1.27×10^{-4}	2.08×10^{-7}	1.27×10^{-4}	8.17×10^{-9}
Kuartik1	Kuartik2	Kuartik1	Kuartik2
1.27×10^{-4}	8.17×10^{-9}	1.27×10^{-4}	8.17×10^{-9}
Kuintik1	Kuintik2	Kuintik1	Kuintik2
1.27×10^{-4}	8.19×10^{-9}	1.27×10^{-4}	8.17×10^{-9}

Sonuç olarak Telegraph denkleminin yaklaşık çözümü için farklı dereceden B-spline fonksiyonların kullanıldığı kolokasyon ve Galerkin yöntemlerinin hepsinde zaman parçalanmasının doğruluğunun 2 den 4 e yükseltilmesi durumunda bulunan hataların oldukça düştüğü sonucuna varılabilir.

KG denkleminin sayısal çözümünü bulmak için önerilen yöntemlerin doğruluğunu test etmek için de iki farklı test problemi incelenmiştir.

Birinci test probleminde homojen olmayan ve $k = 2$ için bulunan lineer olmayan KG denklemi ele alınmıştır. $h = 0.01$ ve $\Delta t = 1/32$ değerleri için elde edilen sonuçlar, kolokasyon ve Galerkin yöntemlerini kıyaslayabilmek adına Çizelge 9.3 de tekrar verilmiştir. Çizelge 9.3 deki sonuçlara göre zaman parçalanmasında Crank-Nicolson yöntemi, konum parçalanmasında farklı dereceden B-spline kolokasyon ve Galerkin yöntemlerinin kullanıldığı ilk durumda elde edilen sonuçların aynı olduğu görülmüştür. Benzer şekilde zaman parçalanmasında dördüncü mertebeden tek adımlı yöntem, konum parçalanmasında farklı dereceden B-spline Galerkin ve kolokasyon yöntemlerinin kullanıldığı ikinci durumda da aynı sonuçların elde edildiği görülmüştür.

Çizelge 9.3: $h = 0.01$ ve $\Delta t = 1/32$ için $t = 1$ anındaki hata normları

Kolokasyon		Galerkin	
Kübik1	Kübik2	Kübik1	Kübik2
1.93×10^{-5}	3.14×10^{-10}	1.93×10^{-5}	3.14×10^{-10}
Kuartik1	Kuartik2	Kuartik1	Kuartik2
1.93×10^{-5}	3.18×10^{-10}	1.93×10^{-5}	3.14×10^{-10}
Kuintik1	Kuintik2	Kuintik1	Kuintik2
1.93×10^{-5}	3.16×10^{-10}	1.93×10^{-5}	3.14×10^{-10}

İkinci test problemi olarak $k = 3$ için homojen KG denklemi ele alınmıştır. $h = 0.0005$ ve $t = 1/16$ değerleri için elde edilen sonuçlar, kolokasyon ve Galerkin yöntemlerini kıyaslayabilmek adına Çizelge 9.4 de tekrar verilmiştir. Çizelge 9.4 deki sonuçlar incelendiğinde zaman parçalanmasında Crank-Nicolson yöntemi, konum parçalanmasında farklı dereceden B-spline kolokasyon ve Galerkin yöntemlerinin

kullanıldığı ilk durumda elde edilen sonuçların aynı olduğu görülmüştür. Zaman parçalanmasında dördüncü mertebeden tek adımlı yöntem, konum parçalanmasında farklı dereceden B-spline Galerkin ve kolokasyon yöntemlerinin kullanıldığı ikinci durumda da kolokasyon Kübik2 yöntemi haricinde diğer yöntemlerin oldukça iyi sonuçlar verdiği görülmektedir.

Çizelge 9.4: $h = 0.0005$ ve $\Delta t = 1/16$ için $t = 1$ anındaki hata normları

Kolokasyon		Galerkin	
Kübik1	Kübik2	Kübik1	Kübik2
1.34×10^{-6}	1.10×10^{-9}	1.34×10^{-6}	6.34×10^{-11}
Kuartik1	Kuartik2	Kuartik1	Kuartik2
1.34×10^{-6}	6.34×10^{-11}	1.34×10^{-6}	6.34×10^{-11}
Kuintik1	Kuintik2	Kuintik1	Kuintik2
1.34×10^{-6}	6.46×10^{-11}	1.34×10^{-6}	5.42×10^{-11}

Sonuç olarak KG denkleminin yaklaşık çözümü için farklı dereceden B-spline fonksiyonların kullanıldığı kolokasyon ve Galerkin yöntemlerinin hepsinde zaman parçalanmasının doğruluğunun 2 den 4 e yükseltilmesi durumunda bulunan hataların oldukça düştüğü sonucuna varılabilir.

GB denkleminin sayısal çözümü için önerilen yöntemlerin doğruluğunu test etmek için de iki farklı test problemi ile çalışılmıştır. Birinci test probleminde soliton dalgasının hareketi ele alınmıştır. $h = 0.1$ sabit konum adım uzunluğu ve Δt zaman adım uzunluğu için ise $\Delta t = 5$ değerinden başlayarak $\Delta t = 1/8$ değerine kadar küçültülerek çalıştırılmış ve elde edilen L_∞ hata normları yakınsama oranları ile birlikte Çizelge 8.1 de verilmişti. Elde edilen sonuçlar doğrultusunda GB denkleminin yaklaşık çözümü için farklı dereceden B-spline fonksiyonların kullanıldığı Galerkin yöntemlerinin hepsinde zaman parçalanmasının doğruluğunun 2 den 4 e yükseltilmesi durumunda bulunan hataların oldukça düştüğü sonucuna varılabilir. İkinci test probleminde ise iki soliton dalgasının çarpışması hareketi incelenmiştir. Bu test probleminde analitik çözüm bulunmadığından, önerilen yöntemlerin doğruluğunun kontrol edilmesi için korunum sabiti hesaplanmıştır. $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ise Çizelge 8.2 de verilmişti. Çizelge 8.2 deki

sonuçlara göre zaman parçalanmasında dördüncü mertebeden tek adımlı yöntem kullanıldığında hesaplanan yaklaşık korunum sabiti değerlerinin Crank-Nicolson yöntemi kullanıldığında hesaplanan yaklaşık korunum sabiti değerlerine göre gerçek değere daha yakın olduğu görülmektedir.

10. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışması kapsamında Telegraph, KG ve GB denklemlerinin sayısal çözümleri araştırılmıştır. Sayısal çözümler araştırılırken çalışılan denklemlerin zaman parçalanmaları için literatürde sıklıkla kullanılan tek adımlı ikinci mertebeden doğruluğa sahip Crank-Nicolson yöntemi ve çalışılan denklemlerin zaman parçalanması için bu zamana kadar önerilmemiş dördüncü mertebeden doğruluğa sahip tek adımlı yöntem kullanılmıştır. Konum parçalanmalarında ise Telegraph ve KG denklemi için kübik, kuartik ve kuintik B-spline Galerkin ve kolokasyon yöntemleri, GB denklemi için ise kübik, kuartik ve kuintik B-spline Galerkin yöntemleri kullanılmıştır. Sayısal çözümlerin doğruluğu kontrol edilirken her bir denklem için 2 test problemi kullanılmıştır. Telegraph ve KG denklemleri için homojen ve homojen olmayan olmak üzere iki farklı test problemi, GB denklemi için ise soliton dalgasının hareketi ve iki soliton dalgasının çarpışması test problemleri kullanılmıştır.

Telegraph ve KG denklemlerinin sayısal çözümleri araştırılırken kullanılan iki test probleminde de konum artım uzunluğu sabit tutularak zaman artım uzunluğu azaltılmış ve bunun sonucunda da elde mutlak hataların da azaldığı görülmüştür. Bununla birlikte zaman parçalanmasının önerilen yöntemler üzerindeki etkisi incelendiğinde dördüncü mertebeden doğruluğa sahip zaman parçalanması kullanıldığında elde edilen mutlak hataların Crank-Nicolson zaman parçalanması kullanıldığında elde edilen mutlak hatalara göre oldukça düşük olduğu gözlenmiştir. GB denkleminin sayısal çözümü için önerilen yöntemlerin doğruluğunu test etmek için soliton dalgasının hareketi ve iki soliton dalgasının çarpışması olmak üzere iki farklı test problemi kullanılmıştı. Soliton dalgası hareketi probleminde konum artım uzunluğu sabit tutularak zaman artım uzunluğu azaltılmış buna bağlı olarak da hata normları özellikle dördüncü mertebeden doğruluğa sahip zaman parçalanması kullanıldığında oldukça azalmıştır. Bu durum Telegraph ve KG denklemlerinin sayısal çözümleri araştırılırken de gözlenmiştir. Ayrıca Telegraph ve KG denklemlerinde olduğu gibi hesaplanan yakınsama oranlarının önerilen zaman parçalanmalarının teorik yakınsama oranları ile hemen hemen aynı olduğu ve

hatta bazı durumlarda aynı kaldığı görülmüştür. İki soliton dalgasının çarpışması test probleminde soliton dalgalarının zamanla birbirlerine doğru hareket ettiği, bir müddet sonra çarpışmanın gerçekleştiği, çarpışma bittikten sonra ise soliton dalgalarının hareketlerine zıt yönde ve şekillerinde herhangi bir bozulma olmadan devam ettikleri görülmüştür. Bu test probleminde analitik çözüm olmadığı için önerilen yöntemlerin doğruluğunu kontrol ederken korunum sabiti yaklaşık olarak hesaplanmıştır. Teorik olarak korunum sabitinin $t = 0$ anındaki değerinin sabit kalması ve çarpışma sonrasında da değişmemesi beklenmektedir. Zaman parçalanmasında dördüncü mertebeden tek adımlı metot kullanıldığında hesaplanan korunum sabit değerlerinin Crank-Nicolson yöntemi kullanıldığında hesaplanan korunum sabiti değerlerinden gerçek değere daha yakın kaldığı hesaplamalar sonucunda görülmüştür.

Sonuç olarak, Telegraph, KG ve GB denklemlerinin sayısal çözümleri için zaman parçalanmasında Crank-Nicolson yöntemi yerine dördüncü mertebeden tek adımlı yöntem, konum parçalanmasında ise özellikle kuartik ve kuintik B-spline B-spline Galerkin ve kolokasyon yöntemleri kullanıldığında oldukça iyi sonuçlar elde edilmiştir. Zaman parçalanmasında Crank-Nicolson yöntemi yerine yüksek doğruluklu yöntem ve konum parçalanmasında ise kübik B-spline Galerkin ve kolokasyon yöntemlerinin kullanıldığı bazı test problemlerinde ise nispeten iyi sonuçlar elde edilmiştir. Dolayısıyla çalışılan denklemlere benzer formda olan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri araştırılırken önerilen yüksek doğruluklu zaman parçalanması ve farklı dereceden B-spline özellikle kuartik ve kuintik B-spline Galerkin ve kolokasyon yöntemleri kullanılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Abbasbandy, S., Ghehsareh, H.R., Hashim, I., Alsaedi A., 2014, A comparison study of meshfree techniques for solving the two-dimensional linear hyperbolic telegraph equation, Engineering Analysis with Boundary Elements, 47(1), p.10-20.

Al-Khaled, K., Nusier, A.S., 2008, Numerical investigation for solitary solutions of the Boussinesq equation, Applied Mathematics E - Notes, 8, p.159-170.

Behzadi, S.h., S., 2011, Numerical solution of Klein-Gordon equation by using the Adomian's decomposition and variational iterative methods, International Journal of Industrial Mathematics, 3(2), p.79-89.

Bratsos, A.G., 1998, The solution of the Boussinesq equation using the method of lines, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 157(1), p.33-44.

Bratsos, A.G, Tsitouras, C.h., Natsis, D.G., 2005, Linearized numerical schemes for the Boussinesq equation, Applied Numerical Analysis and Computational Mathematics, 2(1), p.34-53.

Bratsos, A.G., 2007, A second order numerical scheme for the solution of the one-dimensional Boussinesq equation, Numerical Algorithms, 46, p.45-58.

Bratsos, A.G., 2008, Solitary-wave propagation and interactions for the good Boussinesq equation, International Journal of Computer Mathematics, 85, p.1431-1440.

Bülbül, B., Sezer, M., 2013, A new approach to numerical solution of nonlinear Klein-Gordon equation, Mathematical Problems in Engineerings, Article ID 869749.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Crank, J., Nicolson, P., 1947, A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 43, p.50-64.

De Boor, C., 1978, A practical guide to splines, Springer-Verlag, p.392.

Dehghan, M., Shokri, A., 2008, A numerical method for solving the hyperbolic telegraph equation, Numerical Method for Partial Differential Equations, 24(4), p.1080-1093.

Dehghan, M., Shokri, A., 2009, Numerical solution of the nonlinear Klein-Gordon equation using radial basis functions, Journal of Computational and Applied Mathematics, 230(2), p.400-410.

Dehghan, M., Lakestani, M., 2009, The use of Chebyshev cardinal functions for solution of the second-order one-dimensional telegraph equation, Numerical Method for Partial Differential Equations, 25(4), p.931-938.

Dehghan, M., Salehi, R.A., 2012, Meshless based numerical technique for traveling solitary wave solution of Boussinesq equation, Applied Mathematical Modelling, 36(5), p.1939-1956.

Dosti, M., Nazemi, A., 2012, Quartic B-spline collocation method for solving one-dimensional hyperbolic telegraph equation, Journal of Information and Computing Science, 7(2), p.83-90.

Dosti, M., Nazemi, A., 2011, Septic B-spline collocation method for solving one-dimensional hyperbolic telegraph equation, World Academy of Science Engineering and Technology, 5(8), p.8-24.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Dosti, M., Nazemi, A., 2011, Solving one-dimensional hyperbolic telegraph equation using cubic B-spline quasi-interpolation, World Academy of Science Engineering and Technology, 5(4), p.935.

Duncan, D.B., 1997, Symplectic finite difference approximations of the nonlinear Klein-Gordon equation, SIAM Journal on Numerical Analysis, 34(5), p.1742-1760.

El-Azab, M.S., El-Gamel, M., 2007, A numerical algorithm for the solution of telegraph equations, Applied Mathematics and Computation, 190(1), p.757-764.

Ersoy, H.O., Korkmaz, A., Dag, I., 2019, On the numerical solution of the Klein-Gordon equation by exponential cubic B-spline collocation method, Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, 68(1), p.412-421.

Heydari, M.H., Hooshmandasl, M.R., Ghaini, F.M., 2014, A new approach of the Chebyshev wavelets method for partial differential equations with boundary conditions of the telegraph type, Applied Mathematical Modelling, 38(5), p.1597-1606.

Hesameddini, E., Shekarpaz, S., 2012, Wavelet solutions of the Klein-Gordon equation, Journal of Mahani Mathematical Research Center, 1(2), p.29-45.

Hussain, A., Haq, S., Uddin, M., 2013, Numerical solution of Klein-Gordon and sine-Gordon equations by meshless method of lines, Engineering Analysis with Boundary Elements, 37(11), p.1351-1366.

Irk, D., Kırlı, E., 2020, Numerical solution of the homogeneous telegraph equation by using Galerkin finite element method, Advances in Intelligent Systems and Computing, p.209-217.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Irk, D., Kırlı, E., Görgülü, M.Z., 2022, A high order accurate numerical solution of the Klein-Gordon equation, Applied Mathematics and Information Sciences, 16(2), p.331-339.

Ismail, M.S., Bratsos, A.G., 2003, A predictor- corrector scheme for the numerical solutions of the Boussinesq equation, Journal of Applied Mathematics and Computing, 13, p.11-27.

Ismail, M.S., Mosally, F.A., 2014, fourth order finite difference method for the good Boussinesq equation, Abstract and Applied Analysis, Article ID 323260.

Jiwari, R., Pandit, S., Mittal, R.C., 2012, A differential quadrature algorithm to solve the two dimensional linear hyperbolic telegraph equation with Dirichlet and Neumann boundary conditions, Applied Mathematics and Computation, 218(13), p.7279-7294.

Kaya, D., El-Sayed, S.M.E., 2004, A numerical solution of the Klein-Gordon equation and convergence of the decomposition method, Applied Mathematics and Computation, 156(2), p.341-353.

Khalid, M., Sultana, M., Zaidi, F., Arshad, U., 2016, Solving linear and nonlinear Klein-Gordon equations by new perturbation iteration transform method, TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics, 6(1), p.115-125.

Khalifa, M.E., Elgamal, M., 2005, A numerical solution to Klein-Gordon equation with Dirichlet boundary condition, Applied Mathematics and Computation, 160(2), p.451-475.

Kırlı, E., Irk, D., 2021, A fourth order one step method for numerical solution of good Boussinesq equation, Turkish Journal of Mathematics, 45(5), p.2154-2170.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Kırlı, E., Irk, D., Görgülü, M.Z., 2022, Numerical solution of second order linear hyperbolic telegraph equation, TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics, 12(3), p. 919-930.

Li, X., Guo, B.Y., 1997, A Legendre pseudospectral method for solving nonlinear Klein-Gordon equation, Journal of Computational Mathematics, 15(2), p.105-126.

Li, Q., Ji, Z., Zheng, Z., Liu, H., 2011, Numerical solution of nonlinear Klein-Gordon equation using lattice Boltzmann method, Applied Mathematics, 2(12), p.1479-1485.

Manoranjan, V.S, Mitchell, A.R., Morris, J.L., 1984, Numerical solutions of the good Boussinesq equation, SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 5(4), p.946-957.

Mittal, R.C., Bhatia, R., 2013, Numerical solution of second order one dimensional hyperbolic telegraph equation by cubic B-spline collocation method, Applied Mathematics and Computation, 220, p.496-506.

Nazir, T., Abbas, M., Yaseen, M., 2017, Numerical solution of second-order hyperbolic telegraph equation via new cubic trigonometric B-splines approach, Cogent Mathematics & Statistics, 4(1), p.1382061.

Ortega, T., Sanz-Serna, J.M., 1990, Nonlinear stability and convergence of finite difference methods for the good Boussinesq equation, Numerische Mathematik, 58, p.215-229.

Pani, A.K, Saranga, H., 1997, Finite element Galerkin method for the good Boussinesq equation, Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications, 29, p.937-956.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Rashidinia, J., Ghasemi, M., Jalilian, R., 2010, Numerical solution of the nonlinear Klein-Gordon equation, Journal of Computational and Applied Mathematics, 233(8), p.1866-1878.

Rashidinia, J., Jokar, M., 2016, Application of polynomial scaling functions for numerical solution of telegraph equation, Applicable Analysis, 95(1), p.105-123.

Sarboland, M., Aminataei, A., 2015, Numerical solution of the nonlinear Klein-Gordon equation using multiquadric quasi-interpolation scheme, Universal Journal of Applied Mathematics, 3(3), p.40-49.

Selvitopi, H., Yazıcı, M., 2019, Numerical results for the Klein-Gordon equation in de Sitter spacetime, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 42(16), p.5446-5454.

Sharifi, S., Rashidinia, J., 2016, Numerical solution of hyperbolic telegraph equation by cubic B-spline collocation method, Applied Mathematics and Computation, 281, p.28-38.

Shiralashetti, S.C., Angadi, L.M., Deshi A.B., Kantli, M.H., 2016, Haar wavelet method for the numerical solution of Klein-Gordon equations, Asian-European Journal of Mathematics, 9(1), p.14.

Siddiqi S.S., Arshed, S., 2014, Quintic B-spline for the numerical solution of the good Boussinesq equation, Journal of the Egyptian Mathematical Society, 22(2), p.209-213.

Singh, S., Singh, S., Arora, R., 2017, Numerical solution of second order one-dimensional hyperbolic equation by exponential B-spline collocation method, Numerical Analysis and Applications, 7, p.164-176.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Singh, S., Singh, S., Aggarwal, A., 2022, Fourth-order cubic B-spline collocation method for hyperbolic telegraph equation, Mathematical Science, 16, p.389-400.

Ucar, Y., Esen, A., Karaagac, B., 2021, Numerical solutions of Boussinesq equation using Galerkin finite element method, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 37(2), p.1612-1630.

Verma, A., Jiwari, R., Kumar, S., 2014, A numerical scheme based on differential quadrature method for numerical simulation of nonlinear KleinGordon equation, International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow, 24(7), p.1390-1404.

Wazwaz, A.M., 2001, Construction of soliton solutions and periodic solutions of the Boussinesq equation by the modified decomposition method, Chaos Solitons and Fractals, 12(8), p.1549-1556.

Yang, H., 2018, High-order energy and linear momentum conserving methods for the Klein-Gordon Equation, Mathematics, 6(10), p.17.

Yousefi, S.A., 2010, Legendre multiwavelet Galerkin method for solving the hyperbolic telegraph equation, Numerical Method for Partial Differential Equations, 26(3), p.535-543.

Yuzbasi, S., 2016, Numerical solutions of hyperbolic telegraph equation by using the Bessel functions of first kind and residual correction, Applied Mathematics and Computation, 287, p.83-93.

Zhang, D., Miao, X., 2017, New unconditionally stable scheme for telegraph equation based on weighted Laguerre polynomials, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 33(5), p.1603-1615.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Zoheiry, H., 2003, Numerical investigation for the solitary waves interaction of the good Boussinesq equation, Applied Numerical Mathematics, 45, p.161-173.