2-CEBİRLERİN REPRESENTASYONU

Nurcan Aslan

DOKTORA TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Haziran 2013

REPRESENTATIONS OF 2-ALGEBRAS

Nurcan Aslan

DOCTORAL DISSERTATION
Department of Mathematics
June 2013

2-CEBİRLERİN REPRESENTASYONU

Nurcan Aslan

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisans üstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik Anabilim Dalı

Topoloji Bilim Dalında

DOKTORA TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Yrd. Doç. Dr. İ. İlker AKÇA

Haziran 2013

ONAY

Matematik Anabilim Dalı doktora öğrencisi Nurcan Aslan' ın DOKTORA TEZİ olarak hazırladığı "**2-CEBİRLERİN REPRESENTASYONU**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. İ. İlker AKÇA

İkinci Danışman : –

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ

Üye : Doç. Dr. Erdal ULUALAN

Üye : Doç. Dr. Enver Önder USLU

Üye : Yrd. Doç. Dr. İ. İlker AKÇA

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ummahan Ege ARSLAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım klavuzuna göre, Yrd. Doç. Dr. İ. İlker AKÇA danışmanlığında hazırlamış olduğum "2-CEBİRLERİN REPRESANTASYONU" başlıklı DOKTORA tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 13.06.2013

Nurcan ASLAN

ÖZET

Değişmeli cebirlerin çaprazlanmış modüllerinin representasyonu üzerine hazırlanan bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, kategori ve 2-kategori tanıtıldıktan sonra 2-cebir kavramı ayrıntılı olarak incelenmiştir. İkinci bölümde değişmeli cebirler üzerinde tanımlanan çaprazlanmış modüller örnekleri ile birlikte ele alınmıştır. Ayrıca çaprazlanmış modüllerin kategorisi ile 2-cebirlerin kategorisinin denkliği gösterilmiştir. Üçüncü bölümde ise çarpım cebirinin 2 boyutlu hali olarak da ele alınabilcek ve 2-çarpım cebiri olarak isimlendirilecek olan bir 2-cebir yapısı tanımlanmıştır ve bunun özel bir örneği ayrıntılı şekilde incelenmiştir. $\mathcal{M}(\delta)$ ile gösterilecek bu örneğin 2-cebir olması için gerekli tüm şartları sağladığı gösterilmiştir. Dördüncü ve son bölümde ise bu $\mathcal{M}(\delta)$ 2-cebiri kullanılarak, herhangi bir $\mathcal{G}$ 2-cebirinin representasyonu tamamlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Çaprazlanmış modül, 2-kategori, 2-cebir, Representasyon.

SUMMARY

This thesis is about the representation of crossed modules of commutative algebras and consist of four chapters. In the first chapter, we will recall notions of categories, 2-categories and research the notion of 2-algebra, in details. In the second chapter, we give the notion of crossed modules of commutative algebras with their examples. In the next chapter, we introduce the generalization of multiplier algebra which would be tought as the 2-dimensional version of multiplier algebra$(*)$.This notion will be called as 2-multiplier algebra which is also a multiplier algebra. Finally in the last chapter, we introduce the represantation of a $\mathcal{G}$ 2-algebra by using $M(\delta)$.

Keywords: Crossed module, 2-category, 2-algebra, Representation.

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmamı yöneten ve bu tezin hazırlanması sırasında, çalışma boyunca vakit ayırarak ilgi ve yardımlarını esirgemeyen hocam Sayın

İ. İLKER AKÇA 'ya

saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR viii

BÖLÜM 0. GİRİŞ 1

BÖLÜM 1. KATEGORİ VE 2-KATEGORİ 4

1.1 Giriş 4

1.2 Kategoriler 4

1.3 İnternal Kategori 5

1.4 2-kategori 7

1.4.1 2−cebir 9

1.4.2 2-Modüller 9

1.4.3 2-Cebirler 14

BÖLÜM 2. ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER 17

2.1 Giriş 17

2.2 Çaprazlanmış modüller 17

BÖLÜM 3. ÇARPIM 2-CEBİRİ 23

3.1 Giriş 23

3.2 Çarpım Cebiri 23

3.3 Çarpım 2-Cebiri 24

3.4 $\mathcal{M}(\delta)$ Çarpım 2-Cebiri 27

3.4.1 M(δ) Cebiri 30

3.4.2 $\mathcal{M}(\delta)$ Çarpım 2-Cebiri 37

BÖLÜM 4. 2-CEBİR REPRESENTASYONU **47**

BÖLÜM 5. SONUÇ VE ÖNERİLER **55**

KAYNAKLAR DİZİNİ **56**

BÖLÜM 0

GİRİŞ

Γ, S_n (permütasyon grubu) ya da $GL_n(\mathbb{C})$ olmak üzere, bir G grubunun representasyonu bir

$$f \ : \ G \ \rightarrow \ \Gamma$$

grup homomorfizmi olarak tanımlanır. Eğer $\Gamma = S_n$ alınırsa elde edilen representasyona **permütasyon representasyonu**, $\Gamma = GL_n(\mathbb{C})$ alınırsa elde edilen representasyona l**ineer representasyon** adı verilir.

Grupların permütasyon representasyonları grup etkileri ile yakından ilişkilidir [9]. Eğer $\phi : G \rightarrow S_X$ bir representasyon ise G, X üzerine ${}^g x = \phi(g)(x)$ şeklinde etki eder, tersine eğer G nin bir X kümesi üzerine etkisi mevcutsa, bu etki bir representasyon belirler.

K bir cisim olmak üzere, elemanları K dan alınan $n \times n$ tipindeki terslenebilir matrislerin grubu $GL_n(K)$ ile gösterilsin. Buna göre bir G grubunun her bir elemanını terslenebilir bir kare matrise dönüştüren dönüşüm G den $GL_n(K)$ ya bir homomorfizmdir. Bu homomorfizm ise G nin lineer representasyonunu oluşturur. V bir K vektör uzayı olmak üzere, V den V ye giden lineer izomorfizmlerin grubu $GL(V)$ ile gösterilsin. G grubunun representasyonu G grubundan $GL(V)$ grubuna homomorfizm olarak da tanımlanabilir [17]. Aslında bu iki ifade denktir çünkü lineer izomorfizmler ile terslenebilir matrisler arasında direkt geçiş vardır.

Representasyon teorisi, grup teori içinde önemli bir yere sahiptir. Representasyon sayesinde, soyut objeler üzerinde soyut işlemler yapmak yerine, permütasyon ve matris gibi objeler üzerinde daha kolay ve daha anlaşılır işlemler yapılabilir. Aynı zamanda representasyon teori, grup teori ile cebirin diğer alanları arasında önemli bağlantılar kurduğu gibi, soyut gruplar yapısının anlaşılmasına da yardımcı olur.

R.Brown, Van Kampen teoreminin yüksek boyutlara uyarlamaları üzerine bir takım çalışmalar yapmıştır [6], [7]. Bu çalışma ise yüksek boyutlu grup teori üzerine bir çok çalışmanın yapılmasına yol açmıştır. Ve böylece Van Kampen teoremi gibi bir çok klasik sonuç, yüksek boyutlu gruplara uyarlanabilmiştir. M.F. Barker ise [4] 2003 yılında hazırlamış olduğu doktora tezinde, grup teoride çok ilgi çekici ve kullanışlı olan representasyon teorisini $2-$boyutlu gruplara yani $2-$gruplara uyarlamıştır.

"2− boyutlu grup" [2] başlığı altında birbirine denk olan birkaç yapıdan söz etmek mümkün olup grupların çaprazlanmış modülü ve cat^1−gruplar bu yapılardandır. Grupların çaprazlanmış modülleri ilk olarak 1940 lı yıllarda homotopi teori alanında ve cat^1−gruplar ise 1982 yılında yapılan çalışmalarda ortaya çıkmıştır ve bunların **Cat** kategorisi içersindeki internal kategorilere denk olduğu iyi bilinmektedir. Ayrıca 2−boyutlu grup, 1 ve 2−morfizmleri terslenebilir olan tek objeli bir 2−kategori olarak da ifade edilebilir.

Bu tezdeki amaç Barker'ın [4] de yaptığı grup representasyonunun 2−gruplara uyarlamasına paralel olarak cebir representasyonunu 2−cebirlere uyarlamaktır. 2−cebirler İ.Akça ve U. E.Aslan [1] tarafından tanımlanmış ve cebirlerin çaprazlanmış modülleri ile 2−cebir yapısı nın denkliği gösterilmiştir. Dolayısıyla bu tezde incelenecek olan 2−cebir representasyonu aslında cebirlerin çaprazlanmış modüllerinin representasyonu olacaktır.

Bir A değişmeli k-cebirini, morfizmlerinin kümesi bir değişmeli k-cebir olan tek objeli bir kategori olarak ele alınabilir. Buna göre $ComA\lg$, değişmeli cebirlerin kategorisi olmak üzere $A \to ComA\lg$ funktoru A nın bir representasyonunu verir. (Burada A nın her bir elemanı, C bir değişmeli cebir olmak üzere $M(C)$ çarpım cebirinin bir elemanına resmedilir). Benzer şekilde k bir cisim olmak üzere $A \to Vect_k$ funktoru lineer representasyon olarak isimlendirilir. (Burada A nın elemanları matrislere ya da lineer endomorfizmlere resmedilir).

2−cebirlerin representasyonu ise, uygun bir 2−kategoriye tanımlanan 2−funktor olmalıdır. Herhangi bir A 2−cebirinin representasyonu, bir A 2−cebirinden $\mathcal{M}(\delta)$ 2−kategorisine tanımlanan bir 2−funktoru olur. Yani

$$A \to \mathcal{M}(\delta)$$

2−funktorudur. Burada $\mathcal{M}(\delta)$ 2-kategorisi, C_1, C_0 birer değişmeli R−cebir ve $\delta : C_1 \to C_0$ bir R−cebir morfizmi olmak üzere, δ dan δ ya tanımlanan R−lineer dönüşümler ve bunlar arasında tanımlanan uygun dönüşümlerin oluşturduğu bir 2−cebirdir.

k değişmeli halka, C bir değişmeli k−cebir ve $M(C) = \{f \mid f : C \to C,\ f(cc') = f(c)c'\}$ çarpım cebiri olsun. Bir A k−cebiri için

$$f \ : \ A \ \to \ M(C)$$

cebir homomorfizmine cebir representasyonu denir. (Çarpım representasyonu).

k bir cisim ve A k üzerinde bir asosyatif cebir olsun. E k cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere, E nin tüm lineer endomorfizmlerinin ailesi bir $k-$cebirdir ve bunu $\mathrm{End}_k(E)$ ile gösterilsin.

Buna göre

$$T \;:\; A \;\rightarrow\; End_k(E)$$

cebir homomorfizmine A nın cebir representasyonu denir.(Lineer representasyon).

Cebirlerin çarpım representasyonları da cebir etkileri ile ilişkilidir. Eğer $\phi : A \rightarrow M(C)$ bir representasyon ise A C üzerine $a.x = \phi(a)x$ şeklinde etki eder, tersine eğer A nın bir C cebiri üzerine etkisi mevcutsa, bu etki bir representasyon belirler.

k bir cisim olmak üzere, elemanları k dan alınan $n \times n$ tipindeki kare matrislerin cebiri $M_n(k)$ ile gösterilsin. Buna göre bir A $k-$cebirinin her bir elemanını $n \times n$ tipindeki bir matrise dönüştüren T dönüşümü, $a,b \in A$ ve $\lambda,\mu \in k$ için

$$\begin{aligned} T(\lambda a+\mu b) &= \lambda T(a)+\mu T(b) \\ T(ab) &= T(a)T(b) \end{aligned}$$

şartları sağlanıyorsa

$$T \;:\; A \;\rightarrow\; M_n(k)$$

dönüşümü bir $k-$cebir homomorfizmidir. Bu homomorfizm ise A nın lineer representasyonunu oluşturur.

BÖLÜM 1

KATEGORİ VE 2-KATEGORİ

1.1 Giriş

Kategori teorisi; matematiksel yapılar ve bunlar arasındaki ilişkilerle soyut olarak ilgilenen bir matematik dalıdır. Bir kategori, birbiriyle ilişkili olan objeler sınıfı (örneğin, gruplar, halkalar, topolojik uzaylar...) ve bu objeler arasındaki morfizmlerden oluşur. Gruplar örneğinde bu morfizmler grup homomorfizmleridir. Funktor ise bu şekildeki farklı kategorilerin her objesini diğer kategorinin bir objesi ile, ve bir kategorideki morfizmi diğerindeki bir morfizme karşılık getiren fonksiyonların bir genelleştirilmesidir. Kategoriler, funktorlar ve doğal dönüşümler Samuel Eilenberg ve Saunders Mac Lane tarafından 1945 yılında ortaya atılmıştır. Bu konuda daha detaylı bilgi [12], [8], [5] de bulunabilir.

1.2 Kategoriler

Bir $\mathcal{G}$ kategorisi, bir G_0 objelerin sınıfı ve tüm A,B obje ikilileri için bir $G_1(A,B)$ morfizmlerin kümesinden oluşur. Herhangi A,B,C objeleri için

$$\begin{array}{rccc} \circ: & G_1(B,C)\times G_1(A,B) & \to & G_1(A,C) \\ & (f,g) & \mapsto & f\circ g \end{array}$$

şeklinde bir bileşke döşümü ve her bir A objesi için $id_A \in G_1(A,A)$ birim morfizmleri mevcut olmalıdır. Bileşkenin birleşmeli (asosyatif) olması için birim morfizmlerin, her $f \in G_1(A,B)$ için

$$id_B \circ f = f = f \circ id_A$$

eşitliğini sağlaması gerekir. G_1, $\mathcal{G}$ içindeki tüm morfizmlerin sınıfını gösterir. G_1 den G_0 a

$$s: G_1 \to G_0 \qquad t: G_1 \to G_0$$

kaynak (source), hedef (target) ve G_0 dan G_1' e

$$i: G_0 \to G_1$$

birim dönüşümleri tanımlanır.

$$\circ: G_1 {}_s\times_t G_1 \to G_1$$

bileşke dönüşümünü tanımlayabilmek için $G_1 \,{}_s\!\times_t G_1$ geri çekmesi (pullback) kullanılır.

$\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}'$ iki kategori olsun.

$$F_0 : \ G_0 \ \rightarrow \ G_0' \ \text{ ve } \ F_1 : \ G_1 \ \rightarrow \ G_1'$$

dönüşümlerinden oluşan

$$F : \ \mathcal{G} \ \rightarrow \ \mathcal{G}'$$

ele alındığında, $f, g \in G_1$ için $F_1(f \circ g) = F_1(f) \circ F_1(g)$ ve $\mathcal{G}$ nin her id_A birim morfizmi için $F_1(id_A) = id_{F_0(A)}$ sağlanıyorsa, F ye $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}'$ kategorileri arasında bir funktor denir.

1.3 İnternal Kategori

Tanım 1.1 $\mathcal{G}$ herhangi bir kategori olsun. $\mathcal{G}$ içindeki bir **X** internal kategorisi,

· objelerin bir $X_0 \in \mathcal{G}$ objesinden,

· morfizmlerin bir $X_1 \in \mathcal{G}$ objesinden

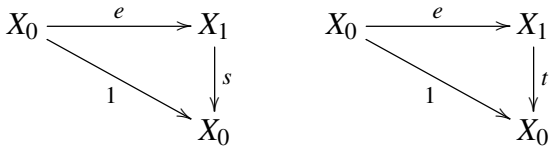
ve bunlarla birlikte, bilinen kategori şartlarına karşılık gelen aşağıdaki diyagramların değişmeli olmasını sağlayan

· $s, t : X_1 \longrightarrow X_0$ kaynak ve hedef morfimlerinden,

· $e : X_0 \longrightarrow X_1$ birimi veren morfizmden,

· $m : X_1 \times_{X_0} X_1 \longrightarrow X_1$ bileşke morfizminden oluşur.

· Birim morfizmin kaynak ve hedefinin belirlenmesi kuralı,



· Bileşke morfizminin kaynak ve hedefinin belirlenmesi kuralı,

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times_{X_0} X_1 & \xrightarrow{m} & X_1 \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_1} & & \downarrow{\scriptstyle s} \\ X_1 & \xrightarrow[s]{} & X_0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times_{X_0} X_1 & \xrightarrow{m} & X_1 \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_2} & & \downarrow{\scriptstyle t} \\ X_1 & \xrightarrow[t]{} & X_0 \end{array}$$

· Morfizmlerin bileşkesi için asosyatiflik kuralı,

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times_{X_0} X_1 \times_{X_0} X_1 & \xrightarrow{m} & X_1 \times_{X_0} X_1 \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_2} & & \downarrow{\scriptstyle t} \\ X_1 \times_{X_0} X_1 & \xrightarrow[t]{} & X_0 \end{array}$$

· Morfizmlerin bileşkesi için sağ ve sol birim kuralı,

$$\begin{array}{ccccc} X_0 \times_{X_0} X_1 & \xrightarrow{e\times_{X_0}1} & X_1 \times_{X_0} X_1 & \xleftarrow{1\times_{X_0}e} & X_1 \times_{X_0} X_0 \\ & {\scriptstyle \rho_2}\searrow & \downarrow{\scriptstyle m} & \swarrow{\scriptstyle \rho_1} & \\ & & X_1 & & \end{array}$$

diyagramlarının değişmeli oluşu ile belirlenir.

Burada $X_1 \times_{X_0} X_1$ pullback i aşağıdaki diyagramla belirlenir

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times_{X_0} X_1 & \xrightarrow{\rho_2} & X_1 \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_1} & & \downarrow{\scriptstyle s} \\ X_1 & \xrightarrow[t]{} & X_0 \end{array}$$

Tanım 1.2 $\mathcal{G}$ bir kategori olsun. $\mathcal{G}$ içindeki $\mathbf{X}$ ve $\mathbf{X}'$ internal kategorileri için, bunlar arasındaki bir $\mathbf{F} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}'$ internal funktoru, aşağıdaki diyagramlar değişmeli olacak şekildeki

· $F_0 : X_0 \longrightarrow X_0'$ ve

· $F_1 : X_1 \longrightarrow X_1^{'}$

morfizmlerinden oluşur,

· kaynak ve hedefin korunması kuralı,

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{s} & X_0 \\ {\scriptstyle F_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_0} \\ X_1' & \xrightarrow[s']{} & X_0' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{t} & X_0 \\ {\scriptstyle F_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_0} \\ X_1' & \xrightarrow[t']{} & X_0' \end{array}$$

· birim morfizmlerin korunması kuralı,

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{i} & X_1 \\ {\scriptstyle F_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_1} \\ X_0' & \xrightarrow[i']{} & X_1' \end{array}$$

· bileşke morfizmin korunması kuralı,

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times_{X_0} X_1 & \xrightarrow{F_1 \times_{X_0} F_1} & X_1' \times_{X_0'} X_1' \\ {\scriptstyle \circ}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \circ'} \\ X_1 & \xrightarrow[F_1]{} & X_1' \end{array}$$

diyagramlarının değişmeli oluşu ile belirlenir.

Bir $\mathcal{G}$ kategorisi içinde $\mathbf{F} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}^{'}$ ve $\mathbf{G} : \mathbf{X}' \longrightarrow \mathbf{X}^{''}$ funktorları için $\mathbf{FG} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}^{''}$ bileşkesi, $(FG)_0 = F_0 G_0$ ve $(FG)_1 = F_1 G_1$ alınarak bulunur. Benzer şekilde bir $\mathcal{G}$ kategorisi içindeki $\mathbf{1} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$ birim internal funktoru ise, $(1_X)_0 = 1_{X_0}$ ve $(1_X)_1 = 1_{X_1}$ alınarak belirlenir.

1.4 2-kategori

Bir $\mathcal{G}$ 2-kategorisi, G_0 objelerin sınıfı ile herhangi A, B obje ikilisi için $\mathcal{G}(A,B)$ morfizmlerin bir küçük (small) kategorisinden oluşur, burada $G_1(A,B)$ ile $\mathcal{G}(A,B)$ küçük kategorisinin objelerinin ailesi ve $G_2(A,B)$ ile $\mathcal{G}(A,B)$ küçük kategorisinin morfizmlerinin ailesi gösterilecektir. Her bir A, B, C obje üçlüsü için

$$\circ : \quad \mathcal{G}(B,C) \times \mathcal{G}(A,B) \quad \rightarrow \quad \mathcal{G}(A,C)$$

bileşke funktorları ve her A objesi için, 1 terminal kategori olmak üzere,

$$iA: \quad 1 \quad \rightarrow \quad \mathcal{G}(A,A)$$

birim funktorları tanımlıdır, burada $\circ$ asosyatif olmalı ve her bir $f \in G_1(A,B)$ ve $\vartheta \in G_2(A,B)$ için

$$iB \circ f \quad = \quad f \quad = \quad f \circ iA \qquad ve \qquad iB \circ \vartheta \quad = \quad \vartheta \quad = \quad \vartheta \circ iA$$

sağlanmalıdır.

Her bir A,B obje ikilisi için, $G_1(A,B)$ nin elemanlarına $\mathcal{G}$ nın 1-morfizmleri ve $G_2(A,B)$ nın elemanlarına da $\mathcal{G}$ nın 2-morfizmleri denir. Tüm 1-morfizmlerin sınıfı G_1 ile ve tüm 2-morfizmlerin sınıfı ise G_2 ile gösterilecektir.

2-morfizmlerin iki türlü bileşkesi mevcuttur. Birincisi $\mathcal{G}(A,B)$ kategorileri içindeki mevcut bileşkesidir. $\vartheta, \vartheta' \in G_2(A,B)$ için $t(\vartheta) = s(\vartheta')$ ise

$$\begin{array}{ccc} G_2(A,B) \times G_2(A,B) & \longrightarrow & G_2(A,B) \\ (\vartheta, \vartheta') & \mapsto & \vartheta \bullet \vartheta' \end{array}$$

bileşkesi tanımlanabilir. Buna dikey bileşke denir, ikincisi ise $\circ$ bileşke funktoru vasıtasıyla elde edilir, bu bileşke

$$\begin{array}{ccc} G_2(B,C) \times G_2(A,B) & \longrightarrow & G_2(A,C) \\ (\omega, \vartheta) & \mapsto & \vartheta \circ \omega \end{array}$$

şeklindedir, buna da yatay bileşke denir. $t(\vartheta) = s(\vartheta')$, $\vartheta, \vartheta' \in G_2(A,B)$ ve $t(\omega) = s(\omega')$, $\omega, \omega' \in G_2(B,C)$ olmak üzere

$$(\vartheta \bullet \vartheta') \circ (\omega \bullet \omega') = (\vartheta \circ \omega) \bullet (\vartheta' \circ \omega')$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitliğe bileşkelerin değişim kuralı (interchange law) denir.

Verilen iki $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ 2-kategorileri için, bunlar arasındaki bir

$$F: \quad \mathcal{G} \quad \rightarrow \quad \mathcal{G}'$$

2-funktoru, objeler arasındaki

$$F_0: \quad G_0 \quad \rightarrow \quad G_0'$$

dönüşümü ile, $\mathcal{G}$ içindeki herhangi A,B objeleri için bileşke ve birimleri koruyan

$$F_{A,B}: \quad \mathcal{G}(A,B) \quad \rightarrow \quad \mathcal{G}'(F_0A, F_0B)$$

funktorlarından oluşur, buna göre $\mathcal{G}$ deki her bir A,B,C obje üçlüsü için ve bir D objesi için,

$$F_{B,C}(-) \circ F_{A,B}(-) \quad = \quad F_{A,C}(-) \quad \text{ve} \quad iFD(-) \quad = \quad F_{D,D}i(-)$$

sağlanmalıdır.

1.4.1 2−cebir

2−gruplar yada yüksek boyutlu grup teori 1940 lı yıllarda ele alınmaya başlanmış ve J.C. Baez, Lauda [2] 2−grup yapısını ayrıntılı olarak tanıtmıştır. Ayrıca Lie 2−cebir yapısı da [3] de J.C. Baez ve A.S. Crans tarafından 2−vektör uzay yapısına göre incelenmiştir. Herhangi bir G grubu tek objesi olan ve tüm morfizmleri terslenebilir olan bir kategori olarak ele alınabilir. Dolayısıyla tek objesi olan tüm 1-morfizmleri ve 2-morfizmleri terslenebilir olan 2-kategoriler ise 2-grup olarak tanımlanmıştır. 2-gup, iki boyutlu grup olarak düşünülebilir. T. Porter [14] çalışmasında değişmeli cebirlerin çaprazlanmış modüllerinin bazı kategoriksel özelliklerini incelemiş ve ayrıca değişmeli cebirlerin çaprazlanmış modüllerinin kategorisi ile k-cebirlerin kategorisi içindeki internal kategori arasında bir denkliğin olduğunu göstermiştir. [1] de ise İ.Akça ve U.Ege Arslan, bu denklikten yola çıkarak 2-cebir yapısını aşağıdaki şekilde tanımlamışlardır.

1.4.2 2-Modüller

Burada amaç, k bir değişmeli halka olmak üzere k−cebir yapısını kategorileştirilmiş olarak ele almak olduğu için ilk olarak k−modül yapısı kategorileştirilmiş olarak incelenecektir. Bir kategorileştirilmiş modül ya da "2−modül", k−modül yapısına benzer bir yapıya sahip olan bir kategori olmalıdır, burada funktorlar ise k−modül işlemlerinin yerini almalıdır. 2−modül, k−modüllerin **Mod** kategorisi içindeki internal kategori olarak tanımlanır. Bir k−cebirin iskelet yapısı aslında bir k−modül olduğundan bir 2−cebirin de iskeleti aslında bir 2−modül olmalıdır. Bu nedenle burada ilk olarak 2−modüllerin 2−kategorisi incelenecektir.

Tanım 1.3 k-modüllerin **Mod** kategorisi içindeki internal kategoriye bir 2−modül denir.

Böylece bir M 2−modülü, objelerin modülü M_0, morfizmlerin modülü M_1 olan $s,t : M_1 \longrightarrow M_0$ kaynak, hedef dönüşümleri, $i : M_0 \longrightarrow M_1$ birimin yerini tutan dönüşüm ve $\circ : M_1 \times_{M_0} M_1 \longrightarrow M_1$ bileşke dönüşümü birer modül morfizmi olan bir kategoridir. Bir $f : x \longrightarrow y$ morfizmi için $s(f) = x$, $t(f) = y$ yazılır ve $i(x)$ ise 1_x ile gösterilir. Aşağıdaki yardımcı teorem vektör uzaylar kategorisi için [3] de verilmiştir. Bunu modül kategorisi için aşağıdaki biçimde verilebilir.

Yardımcı Teorem 1.4 **Mod** içinde bir internal kategori tanımlamak için M_0 ve M_1 modülleri

belirlenmeli, kaynak, hedef ve obje modül morfizmleri ile birlikte

$$\begin{array}{rccc} \circ: & M_1 \times M_1 & \longrightarrow & M_1 \\ & (f,g) & \mapsto & \circ(f,g) = fg = f+g-(is)(g) \end{array}$$

şeklinde tanımlanabilen bileşke dönüşümü oluşturulmalıdır.

İspat. M_0, M_1 modülleri ve $s,t : M_1 \longrightarrow M_0$ ile $i : M_1 \longrightarrow M_0$ modül morfizmleri için, bir 2-modül yapısı oluşturan internal kategori tanımındaki kuralları sağlayan bir bileşke tanımlanmalıdır. Bir $f \in M_1$ için

$$\overline{f} = f - i(s(f))$$

olarak tanımlansın.

$$\begin{array}{rcl} s(\overline{f}) & = & s(f - i(s(f))) \\ & = & s(f) - si(s(f)) \\ & = & s(f) - s(f) \\ & = & 0 \end{array}$$

olduğundan dolayı $\overline{f} \in$ Ç$ek(s)$ dir. $\overline{f}$ nin kaynağı sıfır iken hedefi

$$\begin{array}{rcl} t(\overline{f}) & = & t(f - i(s(f))) \\ & = & t(f) - s(f) \end{array}$$

şeklinde hesaplanır. $t(f) = s(g)$ olacak şekildeki

$$f : x \longrightarrow y, \qquad g : y \longrightarrow z$$

$f,g \in M_1$ için bunların bileşkesini

$$\begin{array}{rccc} \circ: & M_1 \times M_1 & \longrightarrow & M_1 \\ & (f,g) & \mapsto & \circ(f,g) = fg = f+g-(is)(g) \end{array}$$

olarak tanımlansın ve bu bileşkenin internal kategori tanımındaki diyagramların değişmeliliğini sağladığı gösterilsin,

$$\begin{array}{rcl} s(fg) & = & s(f+g-(is)(g)) \\ & = & s(f)+s(g)-s((is)(g))) \\ & = & s(f)+s(g)-s(g) \\ & = & s(f) \\ & = & x \end{array}$$

ve $t(f) = s(g)$ olduğundan dolayı

$$\begin{array}{rcl} t(fg) & = & t(f+g-(is)(g)) \\ & = & t(f)+t(g)-t((is)(g))) \\ & = & t(f)+t(g)-s(g) \\ & = & t(g) \\ & = & z \end{array}$$

elde edilir. Modül toplama işlemi birleşmeli olduğundan dolayı $\circ$ bileşkesi birleşmeli olur. Son olarak sol ve sağ birim kuralı gösterilsin.

$$f : x \longrightarrow y$$

için

$$\begin{aligned} i(x)f &= i(x)+f-(is)(f) \\ &= i(x)+f-i(x) \\ &= f \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} fi(y) &= f+i(y)-(is)(i(y)) \\ &= f+i(y)-i(y) \\ &= f \end{aligned}$$

olur. Böylece bir 2-modül elde edilmiş olur.

Tersine bir M 2-modülü verilsin, bileşkenin yukarıda verilen formül ile tanımlanması gerektiği gösterilmelidir. (f,g) ve (f',g'), M_1 içinde bileşkesi alınabilir morfizm ikilileri olsun, yani

$$f : x \longrightarrow y, \qquad g : y \longrightarrow z$$

ve

$$f' : x' \longrightarrow y', \qquad g' : y' \longrightarrow z'$$

olsun. Kaynak ve hedef dönüşümleri birer modül morfizmi olacağından $(f+f',g+g')$ de bileşkesi alınabilir bir morfizm ikilisidir ve bu ikili için bileşke

$$(f+f')(g+g') = fg+f'g'$$

biçimindedir ve bir modül morfizmidir. Bu durumda (f,g) bileşkesi alınabilir bir morfizm ikilisi ise yani $t(f) = s(g)$ ise

$$\begin{aligned} fg &= (f+1_{M_1})(1_{M_1+g}) \\ &= (f+i(s(g)-s(g)))(i(s(g)-s(g))+g) \\ &= (f-is(g)+i(s(g)))(i(s(g))-is(g)+g) \\ &= f(is(g))+(-is(g)+i(s(g)))(-is(g)+g) \\ &= fi(s(g))+(-is(g))(-is(g))+i(s(g))g \\ &= f-i(s(g))+g \\ &= f+g-i(s(g)) \end{aligned}$$

olur. Böylece $\circ$ bileşkesinin

$$\begin{array}{rccc} \circ : & M_1 \times M_1 & \longrightarrow & M_1 \\ & (f,g) & \mapsto & \circ(f,g) = fg = f+g-(is)(g) \end{array}$$

biçiminde tanımlanabileceği gösterildi. □

Sonuç 1.5 $g \in$ Çek(s) için

$$\begin{aligned} fg &= f+g-(is)(g) \\ &= f+g \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 1.6 Verilen M ve N 2-modülleri için **Mod** içindeki M den N ye giden bir internal funktora bir $F : M \longrightarrow N$ 2-modül funktoru denir. 2-modüller ve bunlar arasındaki 2-modül funktorları **2Mod** ile gösterilecek olan 2-modüllerin kategorisini oluşturur.

Şimdi de 2-modüllerin direkt toplamını ve tensör çarpımı ele alınacaktır.

$M = (M_0, M_1, s, t, i, \circ)$ ve $M' = (M'_0, M'_1, s', t', i', \circ')$ 2-modülleri verilsin. Buna göre

$\cdot$ $M_0 \oplus M'_0$; objelerin modülü,

$\cdot$ $M_1 \oplus M'_1$; morfizmlerin modülü,

$\cdot$ $s \oplus s'$; kaynak morfizmi,

$\cdot$ $t \oplus t'$; hedef morfizmi,

$\cdot$ $i \oplus i'$; birime karşılık gelen morfizm,

$\cdot$ $\circ \oplus \circ'$; bileşke morfizmi

olmak üzere bir $M \oplus M'$ 2-modülü oluşturulabilir. Bu 2-modüle M ve M' 2-modüllerinin direkt toplamı denir. Benzer şekilde

$\cdot$ $M_0 \otimes M'_0$; objelerin modülü,

$\cdot$ $M_1 \otimes M'_1$; morfizmlerin modülü,

$\cdot$ $s \otimes s'$; kaynak morfizmi,

$\cdot$ $t \otimes t'$; hedef morfizmi,

$\cdot$ $i \otimes i'$; birime karşılık gelen morfizm,

$\cdot$ $\circ \otimes \circ'$; bileşke morfizmi

olmak üzere bir $M \otimes M'$ 2-modülü oluşturulabilir. Bu 2-modüle M ve M' 2-modüllerinin tensör çarpımı denir.

Yukarıdaki tanımlamaların doğruluğunu göstermek için direkt toplam ve tensör çarpımın evrensellik özelliğinin gösterilmesi gereklidir. Evrensellik özelliği için ise **2Mod** in kategori yapısı gereklidir.

Tanım 1.7 M, M' ve N birer 2-modül olsun. Objeler üzerinde

$$F_0 : M_0 \times M'_0 \longrightarrow N_0$$

ve morfizmler üzerinde

$$F_1 : M_1 \times M'_1 \longrightarrow N_1$$

dönüşümleri ile birlikte bir

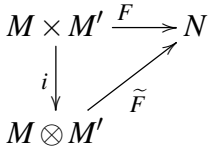
$$F : M \times M' \longrightarrow N$$

bilineer funktoru tanımlanır.

Önerme 1.8 [3]M, M' ve N birer 2-modül olsun. Verilen bir $F : M \times M' \longrightarrow N$ bilineer funktoru için biricik bir

$$\widetilde{F} : M \otimes M' \longrightarrow N$$

lineer funktoru,



diyagramı değişmeli olacak şekilde mevcuttur, burada $i : M \times M' \longrightarrow M \otimes M'$ dönüşümü $(m, m')_0 \in (M \times M')_0$ ve $(f, g) \in (M \times M')_1$ için $i(m, m') = m \otimes m'$ ve $i(f, g) = f \otimes g$ olarak tanımlıdır.

İspat. $\widetilde{F}_0 : (M \otimes M')_0 \longrightarrow N_0$ ve $\widetilde{F}_1 : (M \otimes M')_1 \longrightarrow N_1$ in varlığı ve tekliği modüllerin tensör çarpımının evrensellik özelliğinden elde edilir. $\widetilde{F}$ nın bir lineer funktor olduğu ise açıktır. □

Lineer funktorların tensör çarpımları da oluşturulabilir. $F : M \longrightarrow M'$ ve $G : N \longrightarrow N'$ lineer funktorları için

$$F \otimes G : M \otimes M' \longrightarrow N \otimes N'$$

tensör çarpımı $(F \otimes G)_0 = F_0 \otimes G_0$ ve $(F \otimes G)_1 = F_1 \otimes G_1$ olarak tanımlanır.

Ayrıca 2-modüllerin tensör çarpımı için birim obje de mevcuttur. **Mod** modül kategorisindeki k değişmeli halkası tensör çarpımın birimi olarak ele alınır (burada $k \otimes M \cong M$ ve $M \otimes k \cong M$ kanonik izdüşümleri mevcuttur). 2-modüller için de k değişmeli halkası benzer role sahiptir. $K_0 = K_1 = k$ ve $s,t,i = 1_k$ olarak alınan biricik bir K 2-modülü vardır, ve bu 2-modül kategorileştirilmiş değişmeli halka olarak da düşünülebilir.

Herhangi bir M 2-modülü için, objeler üzerinde $a \otimes m \mapsto am$ ve morfizmler üzerinde $a \otimes f \mapsto af$ olarak tanımlanan bir

$$l_M : K \otimes M \longrightarrow M$$

izomorfizmi mevcuttur. Benzer şekilde $r_M : M \otimes K \longrightarrow M$ izomorfizmi de tanımlanır. Bu l_M ve r_M funktorları halka elemanlarının sağ ve sol çarpımlarının kategorileştirilmiş biçimleridir. 2-modül içinde toplamın kategorileştirilmiş biçimi de mevcuttur, bu ise objelerin ya da morfizmlerin (x,y) ikilisi için $x+y$ olarak tanımlanan

$$+ : M \oplus M \longrightarrow M$$

bir lineer funktordur.

Şu ana kadar 2-modül ve kategorileştirilmiş modül teori için temel kavramlar ele alındı. Şimdi bunlar kullanılarak kategorileştirilmiş 2-cebir yapısı oluşturulacaktır.

1.4.3 2-Cebirler

A bir 2-modül ve bir k-bilineer $m : A \times A \longrightarrow A$ funktoru, objeler üzerinde

$$(x_1 \otimes y_1)(x_2 \otimes y_2) = (x_1 x_2 \otimes y_1 y_2)$$

eşitliğini sağlayacak biçimde $(x,y) \mapsto x \otimes y$ şeklinde tanımlansın ve morfizmler üzerinde

$$(f_1 \otimes g_1)(f_2 \otimes g_2) = (f_1 f_2 \otimes g_1 g_2)$$

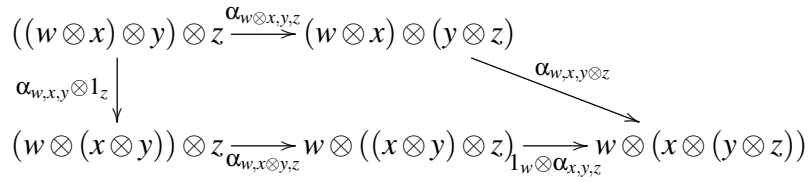
olacak şekilde $(f,g) \mapsto f \otimes g$ biçiminde tanımlansın.

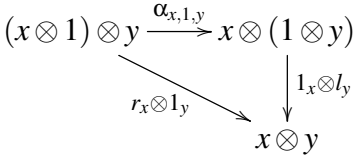
$$\alpha_{x,y,z} : (x \otimes y) \otimes z \longrightarrow x \otimes (y \otimes z)$$

$$l_x : 1 \otimes x \longrightarrow x$$

$$r_x : x \otimes 1 \longrightarrow x$$

k-lineer doğal dönüşümleri için $w,x,y,z \in A_0$ objeler olmak üzere





diyagramları değişmeli olsun.

Buna göre bir A 2-modülüne, yukarıdaki gibi tanımlanan bir m k-bilineer funktoru ve $\alpha_{x,y,z}$, l_x, r_x k-lineer doğal izomorfizmleri ile birlikte **zayıf 2-cebir** denir.

Eğer $\alpha_{x,y,z}$, l_x, r_x k-lineer doğal izomorfizmleri birim morfizmler ise yani

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$$

$$1 \otimes x = x, \qquad x \otimes 1 = x$$

oluyorsa A ya **2-cebir** denir.

A ve A' iki 2-cebir olsun.

$$F : A \longrightarrow A'$$

morfizmi

· A ile A' birer 2-modül olarak düşünüldüğünde F bir k-lineer funktor,

.

$$F_2(x,y) : F_0(x) \otimes F_0(y) \longrightarrow F_0(x \otimes y)$$

bir k-bilineer doğal dönüşüm,

· 1, A nın birim objesi ve $1'$, A' nin birim objesi olmak üzere bir

$$F : 1' \longrightarrow F_0(1)$$

izomorfizmi, $x,y,z \in A_0$ için

$$\begin{array}{ccccc}
(F(x)\otimes F(y))\otimes F(z) & \xrightarrow{F_2\otimes 1} & F(x\otimes y)\otimes F(z) & \xrightarrow{F_2} & F((x\otimes y)\otimes z) \\
\downarrow{\scriptstyle \alpha_{F(x),F(y),F(z)}} & & & & \downarrow{\scriptstyle F(\alpha_{x,y,z})} \\
F(x)\otimes (F(y)\otimes F(z)) & \xrightarrow[1\otimes F_2]{} & F(x)\otimes F(y\otimes z) & \xrightarrow[F_2]{} & F(x\otimes (y\otimes z))
\end{array}$$

diyagramları değişmeli olacak şekilde mevcutsa F ye **2-cebir morfizmi** denir. 2-cebir morfizmleri arasında 2-morfizm olarak ifade edilen morfizmler de tanımlanır.

F ve $G : A \longrightarrow A'$ birer 2-cebir morfizmi olsun. Her $x,y \in A_0$ için aşağıdaki diyagramları değişmeli yapacak şekildeki

$$\theta : F \Rightarrow G$$

k-lineer dönüşümüne bir **2-morfizm** denir.

$$\begin{array}{ccc}
1'\otimes F(x) & \xrightarrow{l'_{F(x)}} & F(x) \\
\downarrow{\scriptstyle F_0\otimes 1} & & \uparrow{\scriptstyle F(l_x)} \\
F(1)\otimes F(x) & \xrightarrow[F_2]{} & F(1\otimes x)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
F(x)\otimes 1' & \xrightarrow{r'_{F(x)}} & F(x) \\
\downarrow{\scriptstyle 1\otimes F_0} & & \uparrow{\scriptstyle F(r_x)} \\
F(x)\otimes F(1) & \xrightarrow[F_2]{} & F(x\otimes 1)
\end{array}$$

Tanım 1.9 k değişmeli bir halka olsun. Tüm $1-$morfizmlerinin ve $2-$morfizmlerinin koleksiyonları $k-$cebirler olan tek objeli bir $2-$kategoriye 2-cebir denir. **2Alg** ise $2-$cebirler ve bunlar arasındaki homomorfizmler ve bu homomorfizmler arasındaki $2-$homomorfizmlerden oluşan bir $2-$kategoridir.

BÖLÜM 2

ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

2.1 Giriş

Çaprazlanmış modüller ilk olarak J.H.C. Whitehead [18] tarafından grup yapısı üzerinde tanımlanmıştır. Çaprazlanmış modüller, başta homotopi teori, grupların homolojisi ve kohomolojisi, cebirsel K-teori, devirli homoloji, kombinatöryel grup teori olmak üzere matematiğin bir çok alanında önemli role sahiptir. Değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modül kavramını ise T. Porter [14], [15] tanımlamış ve bir çok özelliğini incelemiştir. Bu kısımda değişmeli cebirlerin çaprazlanmış modüller kategorisi ile $2A\lg 2-$cebirler kategorisi arasında [1] de elde edilen denklik verilecektir.

2.2 Çaprazlanmış modüller

k değişmeli ve birimli bir halka ve R ve C değişmeli $k-$cebirler olsun. Bir

$$\partial \ : \ C \longrightarrow R$$

dönüşümü,

$$\begin{array}{ccc} R\times C & \longrightarrow & C \\ (r,c) & \longmapsto & r\cdot c \end{array}$$

R nin C üzerine etkisi ile birlikte her $c,c'\in C$ ve $r\in R$ için

$$\text{CM1)} \quad \partial(r\cdot c) = r\partial(c)$$

$$\text{CM2)} \quad \partial c\cdot c' = cc'$$

şartlarını sağlıyorsa R üzerinde C cebirine bir çaprazlanmış (crossed) modül denir ve bu çaprazlanmış modül (C,R,∂) ile gösterilir.

(C,R,∂) ve (C',R',∂') iki çaprazlanmış modül olsun.

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\partial} & R \\ {\scriptstyle\theta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ C' & \xrightarrow[\partial']{} & R' \end{array}$$

diyagramı değişmeli yani $\psi\partial = \partial'\theta$ olacak şekilde ve $c \in C, r \in R$ için $\theta(r \cdot c) = \psi(r) \cdot \theta(c)$ olacak şekildeki $\theta : C \longrightarrow C'$ ve $\psi : R \longrightarrow R'$ $k-$cebir homomorfizmlerinden oluşan

$$(\theta, \psi) : (C, R, \partial) \longrightarrow (C', R', \partial')$$

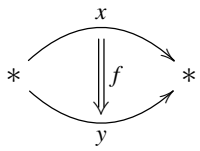
ikilisine bir çaprazlanmış modül morfizmi denir. Böylece $\mathbf{XMod}_k$ ile gösterilecek olan değişmeli $k-$cebirler için çaprazlanmış modüller kategorisi oluşur.

Örnek 2.1 R bir $\mathbf{k}-$cebir ve I, R nin herhangi bir ideali olsun. $i : I \longrightarrow R$ içine dönüşümü bir çaprazlanmış modüldür. Tersine (C, R, ∂) çaprazlanmış modülü verildiğinde $\partial C = I$, R cebirinin bir idealidir.

Örnek 2.2 M bir R-modül olmak üzere sıfır çarpımıyla birlikte $\mathbf{0} : M \longrightarrow R$ sıfır dönüşümü bir çaprazlanmış modüldür. Ayrıca bir (C, R, ∂) çaprazlanmış modülü verildiğinde Çek∂ bir $R/\partial C$-modül olur.

Teorem 2.1 $\mathbf{XMod}_k$ çaprazlanmış modüller kategorisi ile $\mathbf{2A}$lg $2-$cebirler kategorisi denktir.

İspat. A tek objesi $*$, $1-$morfizmleri A_1 $k-$cebiri, $2-$morfizmleri A_2 $k-$cebiri olan bir $2-$cebir olsun. $x, y \in A_1$ ve $f : x \longrightarrow y \in A_2$ için



diyagramı çizilebilir.

s,t morfizmleri $s : A_2 \longrightarrow A_0$, $s(f) = x$, $t : A_2 \longrightarrow A_1$, $t(f) = y$ ve e morfizmi $e : A_1 \longrightarrow A_2$, $fe = f$, $ef = f$ olacak şekilde tanımlansın.

s,t ve e morfizmleri $k-$cebir morfizmleri olup

$$\begin{array}{rcccccl} se(x) & = & s(e(x)) & = & x & = & Id_{C_1}(x) \\ te(x) & = & t(e(x)) & = & x & = & Id_{C_1}(x) \end{array}$$

eşitlikleri elde edilir.

$$\text{Çek}s = H = \{f \in A_2 \mid s(f) = Id_{A_0}\} \subseteq A_2$$

tanımlansın ve $\partial = t\mid_H$ cebir homomorfizmi $\partial : H \longrightarrow A_1, \partial(h) = t(h)$ şeklinde tanımlansın. Çek$s \rtimes A_1 = \{(h,x) \mid h \in$ Ç$eks, x \in A_1\}$ yarıdirekt çarpımı, A_1 ın Çek$s$ üzerine

$$\begin{array}{ccc} A_1 \times \text{Ç}eks & \longrightarrow & \text{Ç}eks \\ (x,h) & \mapsto & x \cdot h = e(x)h \end{array}$$

şeklindeki etkisi ele alındığında $(h,x)(h',x') = (x \cdot h' + x' \cdot h + h'h, xx')$ şeklindeki çarpım ile birlikte elde edilir. Burada Çek$s \rtimes A_1 \cong A_2$ dir. Herbir $a \in A_2$ için $x = s(a)$ olmak üzere $h = a - es(a) \in$Çek$s$ dir. Buna göre $a = h + e(x)$ yazılabilir. $a^{'} = h^{'} + e(x^{'})$ olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{rcl} aa^{'} & = & (h+e(x))(a^{'} = h^{'} + e(x^{'})) \\ & = & hh^{'} + e(x^{'})h + e(x)h^{'} + e(x)e(x^{'}) \\ & = & hh^{'} + x^{'} \cdot h + x \cdot h^{'} + e(xx^{'}) \end{array}$$

olur.

$$\begin{array}{rccc} \phi : & A_2 & \longrightarrow & \text{Ç}eks \rtimes A_1 \\ & h + e(x) & \longmapsto & \phi(h+e(x)) = (h,x) \end{array}$$

dönüşümü tanımlansın. Burada $a = h + e(x)$ ve $a^{'} = h^{'} + e(x^{'}) \in A_2$ için

$$\begin{array}{rcl} \phi(aa^{'}) & = & \phi(hh^{'} + x^{'} \cdot h + x \cdot h^{'} + e(xx^{'})) \\ & = & (hh^{'} + x^{'} \cdot h + x \cdot h^{'}, xx^{'}) \\ & = & (h,x)(h^{'}, x^{'}) \\ & = & \phi(h+e(x))\phi(h^{'} + e(x^{'})) \\ & = & \phi(a)\phi(a^{'}) \end{array}$$

elde edilir ki bu ϕ dönüşümünün bir homomorfizm olduğu anlamına gelir. Benzer şekilde

$$\begin{array}{rccc} \phi^{-1} : & \text{Ç}eks \rtimes A_1 & \longrightarrow & A_2 \\ & (h,x) & \mapsto & \phi^{-1}(h,x) = h + e(x) \end{array}$$

ters dönüşümü de bir homomorfizmdir. O halde ϕ bir izomorfizmdir yani Çek$s \rtimes A_1 \cong A_2$ elde edilir.

A bir $2-$cebir ve Çek$s \rtimes A_1 \cong A_2$ olduğundan

$$\begin{array}{rccc} s \ : & \text{Ç}eks \rtimes A_1 & \longrightarrow & A_1 \\ & (h,x) & \longmapsto & s(h,x) = x \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} t \ : & \text{Ç}eks \rtimes A_1 & \longrightarrow & A_1 \\ & (h,x) & \longmapsto & t(h,x) = \partial(h) + x \end{array}$$

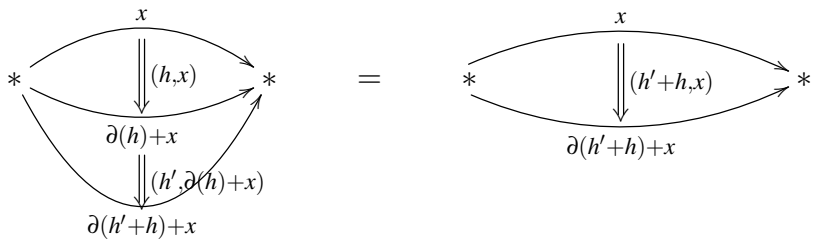
ve

$$\begin{array}{rccc} e \ : & A_1 & \longrightarrow & \text{Çek}s \rtimes A_1 \\ & x & \longmapsto & e(x) = (0,x) \end{array}$$

$k-$cebir morfizmleri ve $t(h,x) = s(h', \partial(h) + x) = \partial(h) + x$ için

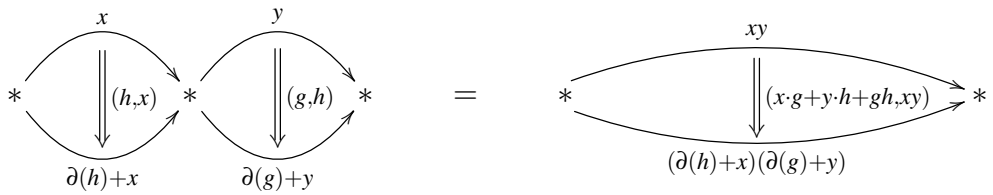
$$\begin{array}{rccc} m \ : & \text{Çek}s \rtimes A_1 \times \text{Çek}s \rtimes A_1 & \longrightarrow & \text{Çek}s \rtimes A_1 \\ & ((h,x),(h',\partial(h)+x)) & \longmapsto & (h,x) \bullet (h',\partial(h)+x) = (h'+h,x) \end{array}$$

tanımlanabilir. Burada dikey bileşke



şeklindedir.

$(h,x),(g,y) \in$Çeks $\rtimes A_1$ için yatay bileşke ise



$$\begin{array}{rcl}(h,x)\circ(g,y) & = & (x\cdot g+y\cdot h+gh,xy)\\ & = & (e(x)g+e(y)h+gh,xy)\end{array}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece

CM1)

$$\begin{array}{rcl}\partial(x\cdot h) & = & \partial(e(x)h)\\ & = & \partial(e(x))\partial(h)\\ & = & (te)(x)\partial(h)\\ & = & x\partial(h)\end{array}$$

elde edilir.

Ayrıca bileşkelerin değişim kuralından

$$[(h,x)\circ(g,y)]\bullet[(h',\partial(h)+x)\circ(g',\partial(g)+y)]=[(h,x)\bullet(h',\partial(h)+x)]\circ[(g,y)\bullet(g',\partial(g)+y)]$$

elde edilir. O halde eşitliğin her iki tarafı da açılırsa,

$$\begin{array}{rcl}\text{Sol} & = & (x\cdot g+y\cdot h+gh,xy)\bullet((\partial(h)+x)\cdot g'+(\partial(g)+y)\cdot h'+g'h',(\partial(h)+x)(\partial(g)+y))\\ & = & ((\partial(h)+x)\cdot g'+(\partial(g)+y)\cdot h'+g'h'+x\cdot g+y\cdot h+gh,xy))\\ & = & (\partial(h)\cdot g'+e(x)g'+\partial(g)\cdot h'+e(y)h'+g'h'+e(x)g+e(y)h+gh,xy)\\ \text{Sağ} & = & (h'+h,x)\circ(g'+g,y)\\ & = & (x\cdot(g'+g)+y\cdot(h'+h)+(g'+g)(h'+h),xy)\\ & = & (e(x)g'+e(x)g+e(y)h'+e(y)h+g'h'+g'h+gh'+gh,xy)\end{array}$$

elde edilir. Buna göre eşitliğin sağlanması için ilk bileşenlerin de eşit olması gerekir, o halde

$$\partial(h)\cdot g' + \partial(g)\cdot h' = hg' + gh'$$

ve

$$\begin{aligned} hg' + gh' &= \partial(h)\cdot g' + \partial(g)\cdot h' \\ &= \partial(h+g)\cdot(g'+h') - \partial(h)\cdot h' - \partial(g)\cdot g' \\ &= \partial(h+g)\cdot(g'+h') - (hh' + gg') \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \partial(h+g)\cdot(g'+h') &= hg' + gh' + (hh' + gg') \\ &= (h+g)(h'+g') \end{aligned}$$

ve $(h+g) = k, (h'+g') = l \in$Çek$s$ yazılırsa

$$\partial(k)\cdot l = kl$$

elde edilir ki bu istenilen Peiffer şartıdır. Böylece (Çeks, A_1, ∂) bir çaprazlanmış modüldür. Dolayısıyla

$$\Gamma : \mathbf{2A\,lg} \longrightarrow \mathbf{XMod}_k$$

funktoru elde edilir.

Tersine (G, C, ∂) $k-$cebirlerin bir çaprazlanmış modülü olsun. O halde $\partial : G \longrightarrow C$ bir $k-$cebir morfizmi ve C nin G üzerine etkisi $x \in C$ ve $g, g' \in G$ için

$$\begin{aligned} CM1)\partial(x\cdot g) &= x\partial(g) \\ CM2)\partial(g)\cdot g' &= gg' \end{aligned}$$

şartlarını sağlayacak şekilde vardır.

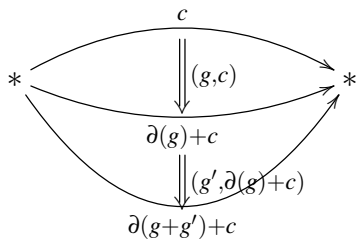
C, G üzerine etki ettiğinden

$$G \rtimes C = \{(g,c) \mid g \in G, c \in C\}$$

yarı direkt çarpımı

$$(g,c)(g',c') = (c\cdot g' + c'\cdot g + g'g, cc')$$

çarpımı ile birlikte oluşturulabilir. Ayrıca $s,t : G \rtimes C \longrightarrow C$ ve $e : C \longrightarrow G \rtimes C$, $s(g,c) = c$, $t(g,c) = \partial(g) + c$ ve $e(c) = (0,c)$ şeklindeki dönüşümler tanımlansın. Bu dönüşümler birer $k-$cebir morfizmleridir.



$t(g,c) = s(g',\partial(g)+c) = \partial(g)+c$ için

$$\begin{array}{rccc} m & : & (G \rtimes C)_t \times_s (G \rtimes C) & \longrightarrow & (G \rtimes C) \\ & & ((g,c),(g',\partial(g)+c)) & \longmapsto & (g+g',c) \end{array}$$

kompozisyonu tanımlanır ve $(g,c),(h,d) \in G \rtimes C$ ve $(g,c),(g',\partial(g)+c) \in G \rtimes C$ için aşağıdaki eşitlikler sırasıyla yatay ve dikey bileşkeleri verir.

$$\begin{array}{lcl} (g,c) \circ (h,d) & = & (c \cdot h + d \cdot g + gh, cd) \\ (g,c) \bullet (g',\partial(g)+c) & = & (g+g',c) \end{array}$$

Son olarak, m nin bir $k-$cebir morfizmi olması gerektiğinden ve çaprazlanmış modül şartlarından bileşkelerin değişim kuralı sağlanır. O halde tek objesi $*$ olan, $1-$morfizmleri C $k-$cebiri, $2-$morfizmleri $G \rtimes C$ $k-$cebiri olan bir $2-$cebiri elde edilir. Dolayısıyla

$$\Psi : \mathbf{XMod}_k \longrightarrow \mathbf{2A}\,\mathrm{lg}$$

funktoru elde edilir.

Bu iki funktor adjoint funktor olduklarından $\mathbf{XMod}_k$ ve $\mathbf{2A}\,\mathrm{lg}$ kategorilerinin denk oldukları elde edilir. □

BÖLÜM 3

ÇARPIM 2-CEBİRİ

3.1 Giriş

[13] de K.J.Norrie, Lue' nun çalışmasını [10] genişletti ve bir grubun otomorfizm grubuna benzer olarak, grupların çaprazlanmış modüllerinin bir aktörü kavramını ortaya çıkardı. Norrie nin çalışmasının başlangıç kısmı grup ve cebirler arasındaki benzerliklerden ortaya çıkmıştır. Değişmeli cebirler kategorisinde, otomorfizm gruplarına karşılık, S. MacLane [11] tarafından tanımlanan bir C cebirinin $M(C)$ çarpım cebiri kullanılır.

3.2 Çarpım Cebiri

k bir değişmeli halka, R bir birimli $k-$cebir ve C birleşimli bir $R-$cebir (değişmeli yada birimli olması gerekli değil) olsun. MacLane in [11] de oluşturduğu C nin ikili çarpanlarının $\mathrm{Bim}(C)$ $R-$cebiri yapısı hatırlansın.

$\mathrm{Bim}(C)$, C den C ye $R-$lineer dönüşümlerin

$$\begin{aligned} \gamma(cc^{'}) &= \gamma(c)c^{'} \\ \delta(cc^{'}) &= c\delta(c^{'}) \end{aligned}$$

ve

$$c\gamma(c^{'}) = \delta(c)c^{'}$$

şartlarını sağlayan (γ,δ) ikililerinden oluşur.

$\mathrm{Bim}(C)$ nin bir $R-$modül yapısına sahip olduğu açıktır ve $\mathrm{Bim}(C)$ de

$$(\gamma,\delta).(\gamma^{'},\delta^{'}) = (\gamma\circ\gamma^{'},\delta\circ\delta^{'})$$

biçiminde bir çarpım tanımlanabilir.

$\mathrm{Ann}(C) = 0$ yada $C^2 = C$ olduğu varsayılsın. $\mathrm{Bim}(C)$ nin C üzerine

$$\begin{aligned} \mathrm{Bim}(C)\times C &\longrightarrow C; \quad ((\gamma,\delta),c) \longmapsto \gamma(c) \\ C\times \mathrm{Bim}(C) &\longrightarrow C; \quad (c,(\gamma,\delta)) \longmapsto \delta(c) \end{aligned}$$

şeklinde bir etkisi ve $\gamma_c(x) = cx$ ve $\delta_c(x) = xc$ olmak üzere

$$\begin{array}{rccc} \mu & : & C & \longrightarrow & \mathrm{Bim}(C) \\ & & c & \longmapsto & (\gamma_c, \delta_c) \end{array}$$

dönüşümü tanımlanabilir.

C nin bir değişmeli R-cebir olması durumunda aşağıdaki durum elde edilir.

Yine $\mathrm{Ann}(C) = 0$ ya da $C^2 = C$ olsun. C değişmeli bir $R-$cebir ve $(\gamma, \delta) \in \mathrm{Bim}(C)$ ise her $x \in C$ için

$$\begin{array}{rcccccccc} x\delta(c) & = & \delta(c)x & = & c\gamma(x) & = & \gamma(x)c & & \\ & = & \gamma(xc) & = & \gamma(cx) & = & \gamma(c)x & = & x\gamma(c) \end{array}$$

olduğundan $\gamma = \delta$ elde edilir.

Böylece $\mathrm{Bim}(C)$ yerine $M(C)$ gösterimi kullanılır, $M(C)$ nin elemanlarına C nin çarpanları denir ve $M(C)$ bir $R-$cebir olur. C nin bir çarpanı, tüm $c, c^{'} \in C$ için

$$\lambda(cc^{'}) = \lambda(c)c^{'}$$

şartını sağlayan bir $\lambda : C \longrightarrow C$ lineer dönüşümüdür.

Ayrıca herhangi $x \in C$ için

$$\lambda^{'}\lambda(xc) = \lambda^{'}(\lambda(x)c) = \lambda(x)\lambda^{'}(c) = \lambda^{'}(c)\lambda(x) = \lambda\lambda^{'}(cx) = \lambda\lambda^{'}(xc)$$

olduğundan $M(C)$ değişmelidir. $M(C)$ ye C nin çarpım cebiri denir ve $M(C)$ çarpım cebiri, her γ çarpanı için $\lambda\gamma = \gamma\lambda$ şartını sağlayacak şekildeki tüm λ çarpanlarının kümesidir.

3.3 Çarpım 2-Cebiri

T. Porter, [16] de bir G grubunun otomorfizmleri yardımıyla bir $2-$grup oluşturulabileceğini ifade etmiştir. Benzer şekilde değişmeli cebirler için de şunu söylemek mümkündür, bir değişmeli C $R-$cebirinin çarpanları yardımıyla, çarpım $2-$cebiri olarak adlandırılan bir $2-$cebir tanımlanabilir.

k değişmeli bir halka, R birimli bir $k-$ cebir ve $\mathrm{Ann}(C) = 0$ yada $C^2 = C$ şartları ile birlikte C, değişmeli bir $R-$cebir olsun. $A_1 = M(C)$ alalım ve A_1 ın elemanlarına $1-$morfizmler denilsin. $M(C)$ nin C üzerine etkisini

$$\begin{array}{ccc} M(C) \times C & \longrightarrow & C \\ (f, x) & \longmapsto & f \cdot x = f(x) \end{array}$$

biçiminde tanımlansın. $M(C)$ nin C üzerine etkisini kullanarak

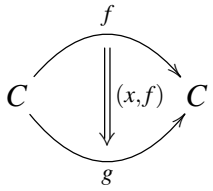
$$C \rtimes M(C) \quad = \quad \{(x,f) \mid x \in C,\ f \in M(C)\}$$

şeklindeki yarıdirekt çarpımı oluşturulabilir. Buradaki çarpım ise

$$(x,f)(x^{'},f^{'}) \quad = \quad (f \cdot x^{'} + f^{'} \cdot x + x^{'}x, f^{'}f)$$

şeklindedir.

$A_2 = C \rtimes M(C)$ alalım ve A_2 in elemanlarını $2-$morfizmler olarak adlandırılsın. Böylece $(x,f) \in C \rtimes M(C)$ için



biçiminde bir diyagram oluşturulabilir. Bir $(x,f) \in C \rtimes M(C)$ için

$$\begin{array}{rccc} s & : & C \rtimes M(C) & \longrightarrow & M(C) \\ & & (x,f) & \longmapsto & s(x,f) = f \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} t & : & C \rtimes M(C) & \longrightarrow & M(C) \\ & & (x,f) & \longmapsto & t(x,f) = M_x \diamond f \end{array}$$

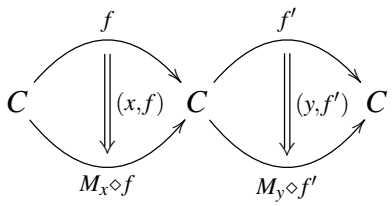
kaynak ve hedef dönüşümleri ile $f \in M(C)$ için

$$\begin{array}{rccc} e & : & M(C) & \longrightarrow & C \rtimes M(C) \\ & & f & \longmapsto & e(f) = (0,f) \end{array}$$

birim dönüşümü tanımlansın. Burada $M_x \diamond f,\ \ u \in C$ için $(M_x \diamond f)(u) = xu + f(u)$ şeklinde tanımlanır.

$2-$morfizmlerin yatay ve dikey olmak üzere iki türlü bileşkesi tanımlanır. Şimdi bu bileşkeler tanımlansın.

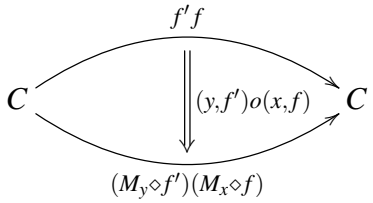
$(x,f),\ (y,f^{'}) \in C \rtimes M(C)$ için



yatay bileşke

$$(y,f^{'})\circ(x,f) \quad = \quad (f^{'}\cdot x+f\cdot y+xy,f^{'}f)=(f^{'}(x)+f(y)+xy,f^{'}f)$$

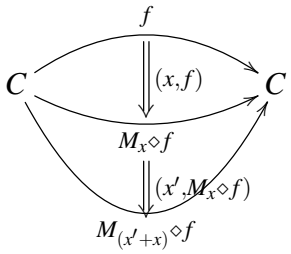
şeklinde tanımlanır. Böylece



olup

$$\begin{aligned} t(f^{'}(x)+f(y)+xy,f^{'}f) &= M_{f^{'}(x)+f(y)+xy}\diamond f^{'}f \\ &= (M_y\diamond f^{'})(M_x\diamond f) \end{aligned}$$

elde edilir. Dikey bileşke ise

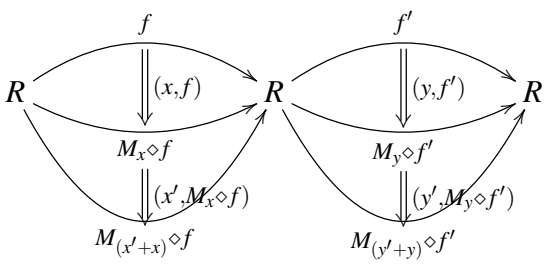


$t(x,f) \quad = \quad s(x^{'},M_x\diamond f) \quad = \quad M_x\diamond f$ ile birlikte $(x,f),(x^{'},M_x\diamond f)\in C\rtimes M(C)$ için

$$(x,f)\bullet(x^{'},M_x\circ f) \quad = \quad (x^{'}+x,f)$$

şeklindedir.

Geriye bileşkelerin değişim kuralının (interchange law) sağlandığını, yani



$$[(y,f^{'})\bullet(y^{'},M_y\circ f^{'})]\circ[(x,f)\bullet(x^{'},M_x\circ f)] \;=\; [(y,f^{'})\circ(x,f)]\bullet [(y^{'},M_y\circ f^{'})\circ(x^{'},M_x\circ f)]$$

eşitliğinin sağlandığını göstermek kalır. Eşitliğin iki tarafı ayrı ayrı işleme konulursa

$$\begin{aligned} Sol &= (y'+y,f')\circ(x'+x,f)\\ &= (f'(x'+x)+f(y'+y)+(x'+x)(y'+y),f'f)\\ &= (f^{'}(x^{'})+f^{'}(x)+f(y^{'})+f(y)+x^{'}y^{'}+x^{'}y+xy^{'}+xy,f^{'}f)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} Sağ &= (f^{'}(x)+f(y)+xy,f^{'}f)\bullet((M_y\circ f^{'})(x^{'})+(M_x\circ f)(y^{'})+x^{'}y^{'},(M_y\circ f^{'})(M_x\circ f))\\ &= (f^{'}(x)+f(y)+xy+(M_y\circ f^{'})(x^{'})+(M_x\circ f)(y^{'})+x^{'}y^{'},f^{'}f)\\ &= (f^{'}(x)+f(y)+xy+yx^{'}+f^{'}(x^{'})+xy^{'}+f(y^{'})+x^{'}y^{'},f^{'}f)\end{aligned}$$

elde edilir. Sol ve Sağ eşit olup, bileşkelerin değişim kuralı sağlanır. Böylece tek objesi C R-cebiri olan ve $1-$morfizmlerinin oluşturduğu A_1 $R-$cebiri ile $2-$morfizmlerinin oluşturduğu A_2 $R-$cebirinden oluşan bir $2-$cebir elde edilir. Bu 2-cebire özel olarak **çarpım 2-cebiri** denir.

3.4 $\mathcal{M}(\delta)$ Çarpım 2-Cebiri

Yardımcı Teorem 3.1 k değişmeli bir halka, R birimli bir $k-$ cebir ve $\mathrm{Ann}(C_1)=0$, $\mathrm{Ann}(C_0)=0$ yada $C_1^2=C_1$, $C_0^2=C_0$ şartları ile birlikte C_1 ve C_0 değişmeli $R-$cebirler olsun.

$$\begin{array}{rccc}\delta & : & C_1 & \longrightarrow & C_0\\ & & x & \longmapsto & \delta(x)\end{array}$$

şeklindeki bir $R-$cebir morfizmi $\underline{\delta}=\{(x,\delta(x))\mid x\in C_1\}$ kümesi ile temsil edilsin. Bu küme üzerinde

$$\begin{array}{lcccl}(x,\delta(x))+(x',\delta(x')) & = & (x+x',\delta(x)+\delta(x')) & = & (x+x',\delta(x+x'))\\ (x,\delta(x))(y,\delta(y)) & = & (xy,\delta(x)\delta(y)) & = & (xy,\delta(xy))\end{array}$$

işlemleri ve $r\in R$ için

$$\begin{aligned} r.(x,\delta(x)) &= (r.x,r.\delta(x))\\ &= (r.x,\delta(r.x))\end{aligned}$$

etkisi tanımlansın. Bu işlemler ve etki ile birlikte $\underline{\delta}$ bir $R-$cebirdir.

İspat. $\underline{\delta}$ nın bir $R-$cebir olduğu gösterilecektir.

(i) $(\underline{\delta},+,.)$ nın bir halka olduğu gösterilecektir.

$H1)$ $(\underline{\delta},+)$ nın bir Abel grup olduğu gösterilecektir.

Her $(x,\delta(x)),(y,\delta(y)) \in \underline{\delta}$ için

$$(x,\delta(x))+(y,\delta(y)) = (x+y,\delta(x+y)) \in \underline{\delta}$$

olup işlem kapalıdır.

$G1)$ $(x,\delta(x)),(x',\delta(x')),(x'',\delta(x'')) \in \underline{\delta}$ için

$$\begin{aligned}(x,\delta(x))+((x',\delta(x'))+(x'',\delta(x''))) &= (x,\delta(x))+(x'+x'',\delta(x'+x'')) \\ &= (x+(x'+x''),\delta(x+(x'+x''))) \\ &= ((x+x')+x'',\delta((x+x')+x'')) \\ &= ((x+x'),\delta(x+x')))+(x'',\delta(x'')) \\ &= ((x,\delta(x))+(x',\delta(x')))+(x'',\delta(x''))\end{aligned}$$

olup işlem birleşmelidir.

$G2)$ $(x,\delta(x)) \in \underline{\delta}$ için

$$(x,\delta(x))+(x_1,\delta(x_1)) = (x+x_1,\delta(x+x_1)) = (x,\delta(x))$$

olacak şekilde bir $(x_1,\delta(x_1)) = (0,0) \in \underline{\delta}$ vardır. Bu $(0,0) \in \underline{\delta}$ elemanı toplama işleminin etkisiz elemanı olarak alınır.

$G3)$ $(x,\delta(x)) \in \underline{\delta}$ için

$$(x,\delta(x))+(y,\delta(y)) = (x+y,\delta(x+y)) = (0,0)$$

olacak şekilde bir $(y,\delta(y)) = (-x,\delta(-x)) \in \underline{\delta}$ vardır. Bu $(-x,\delta(-x)) \in \underline{\delta}$ elemanı $(x,\delta(x))$ elemanının toplama işlemine göre tersidir.

$G4)$ Her $(x,\delta(x))$, $(y,\delta(y)) \in \underline{\delta}$ için

$$\begin{aligned}(x,\delta(x))+(y,\delta(y)) &= (x+y,\delta(x+y)) \\ &= (y+x,\delta(y+x)) \\ &= (y,\delta(y))+(x,\delta(x))\end{aligned}$$

olup $(\underline{\delta},+)$ Abel gruptur.

$H2)$ $(x,\delta(x)),(y,\delta(y)),(z,\delta(z)) \in \underline{\delta}$ için

$$\begin{aligned}(x,\delta(x))(((y,\delta(y))(z,\delta(z))) &= (x,\delta(x))(yz,\delta(yz)) \\ &= (x(yz),\delta(x(yz))) \\ &= ((xy)z,\delta((xy)z)) \\ &= (((xy),\delta(xy))(z,\delta(z))) \\ &= ((x,\delta(x))(y,\delta(y)))(z,\delta(z))\end{aligned}$$

olup

$$(x,\delta(x))(((y,\delta(y))(z,\delta(z))) = ((x,\delta(x))(y,\delta(y)))(z,\delta(z))$$

sağlanır.

$H3)(x,\delta(x)),(y,\delta(y)),(z,\delta(z)) \in \underline{\delta}$ için

$$\begin{aligned}(x,\delta(x))((y,\delta(y))+(z,\delta(z))) &= (x,\delta(x))((y+z,\delta(y+z)) \\ &= (x(y+z),\delta(x(y+z)) \\ &= (xy+xz,\delta(xy+xz)) \\ &= ((xy,\delta(xy))+(xz,\delta(xz)) \\ &= (x,\delta(x))(y,\delta(y))+(x,\delta(x))(z,\delta(z))\end{aligned}$$

olur, yani

$$(x,\delta(x))((y,\delta(y))+(z,\delta(z))) = (x,\delta(x))(y,\delta(y))+(x,\delta(x))(z,\delta(z))$$

sağlanır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}((x,\delta(x))+(y,\delta(y)))(z,\delta(z)) &= (x+y,\delta(x+y))(z,(\delta(z)) \\ &= ((x+y)z,\delta((x+y)z)) \\ &= (xz+yz,\delta(xz+yz)) \\ &= (xz,\delta(xz))+(yz,\delta(yz)) \\ &= (x,\delta(x))(z,\delta(z))+(y,\delta(y))(z,\delta(z))\end{aligned}$$

olur, yani

$$((x,\delta(x))+(y,\delta(y)))(z,\delta(z)) = (x,\delta(x))(z,\delta(z))+(y,\delta(y))(z,\delta(z))$$

sağlanır.

Böylece $(\underline{\delta},+,.)$ nın bir halka olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi ise $\underline{\delta}$ nın bir $R-$modül olduğu gösterilecektir.

(i) $(x,\delta(x)),(y,\delta(y)) \in \underline{\delta}$ ve $r,r_1,r_2 \in R$ için

$$\begin{aligned}r.((x,\delta(x))+(y,\delta(y))) &= r.(x+y,\delta(x+y)) \\ &= (r.(x+y),r.\delta(x+y)) \\ &= (r.(x+y),\delta(r.(x+y)) \\ &= (r.x+r.y,\delta(r.x)+\delta(r.y)) \\ &= (r.x,\delta(r.x))+(r.y,\delta(r.y)) \\ &= (r.x,r.\delta(x))+(r.y,r.\delta(y)) \\ &= r.(x,\delta(x))+r.(y,\delta(y)),\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}(r_1+r_2).(x,\delta(x)) &= ((r_1+r_2).x,(r_1+r_2).\delta(x)) \\ &= (r_1.x+r_2.x,r_1.\delta(x)+r_2.\delta(x)) \\ &= (r_1.x,r_1.\delta(x))+(r_2.x,r_2.\delta(x)) \\ &= r_1.(x,\delta(x))+r_2.(x,\delta(x)),\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}(r_1r_2).(x,\delta(x)) &= ((r_1r_2).x,(r_1r_2).\delta(x))\\ &= (r_1.(r_2.x),r_1.(r_2.\delta(x))\\ &= r_1.(r_2.x,r_2.\delta(x))\\ &= r_1.(r_2.(x,\delta(x)))\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $(i),(ii),(iii)$ şartları sağlandığından $\underline{\delta}$ bir $R-$modüldür.

Ayrıca $(x,\delta(x)),(y,\delta(y)) \in \underline{\delta}$ ve $r \in R$ için

$$\begin{aligned}r.((x,\delta(x))(y,\delta(y))) &= r.(xy,\delta(xy))\\ &= (r.(xy),r.\delta(xy))\\ &= (r.(xy),\delta(r.(xy)))\\ &= ((r.x)y,\delta((r.x)y))\\ &= ((r.x)y,\delta(r.x)\delta(y))\\ &= ((r.x),\delta(r.x))(y,\delta(y))\\ &= (r.(x,\delta(x)))(y,\delta(y))\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}r.((x,\delta(x))(y,\delta(y))) &= r.(xy,\delta(xy))\\ &= (r.(xy),r.\delta(xy))\\ &= (r.(xy),\delta(r.(xy)))\\ &= (x(r.y),\delta(x(r.y)))\\ &= (x(r.y),\delta(x)\delta(r.y))\\ &= (x,\delta(x))(r.y,\delta(r.y))\\ &= (x,\delta(x))r.(y,\delta(y))\end{aligned}$$

sağlanır. Buna göre $\underline{\delta}$ bir $R-$cebir olur. $\square$

3.4.1 M(δ) Cebiri

k değişmeli bir halka, R birimli bir $k-$ cebir ve $\mathrm{Ann}(C_1)=0,\mathrm{Ann}(C_0)=0$ yada $C_1^2=C_1, C_0^2=0$ şartları ile birlikte C_1 ve C_0 değişmeli $R-$cebirler olmak üzere

$$\begin{array}{rccc}\delta & : & C_1 & \longrightarrow & C_0\\ & & x & \longmapsto & \delta(x)\end{array}$$

şeklindeki bir $R-$cebir morfizmi alınsın. $f_1 \in M(C_1)$ ve $f_0 \in M(C_0)$ için

$$\begin{array}{ccc}C_1 & \xrightarrow{f_1} & C_1\\ \delta\downarrow & & \downarrow\delta\\ C_0 & \xrightarrow[f_0]{} & C_0\end{array}$$

diyagramı değişmeli oluyorsa yani $\delta f_1 = f_0\delta$ eşitliği sağlanıyorsa $f = (f_1, f_0)$ ikilisine δ dan δ ya bir morfizm denir ve bu şekildeki morfizmlerin kümesi $M(\delta)$ ile gösterilir. O halde

$$M(\delta) = \{f = (f_1, f_0) : (C_1 \xrightarrow{\delta} C_0) \longrightarrow (C_1 \xrightarrow{\delta} C_0),\ \delta f_1 = f_0\delta\}$$

olur. $f_1 \in M(C_1)$ ve $f_0 \in M(C_0)$ olduğundan, $c_1, c_1' \in C_1$ ve $c_0, c_0' \in C_0$ için

$$f_1(c_1c_1') = f_1(c_1)c_1'$$

$$f_0(c_0c_0') = f_0(c_0)c_0'$$

dır, böylece

$$\begin{aligned} f_0(\delta(c_1c_1')) &= f_0(\delta(c_1)\delta(c_1')) \\ &= f_0(\delta(c_1))\delta(c_1') \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \delta(f_1(c_1c_1')) &= \delta(f_1(c_1)c_1') \\ &= \delta(f_1(c_1))\delta(c_1') \end{aligned}$$

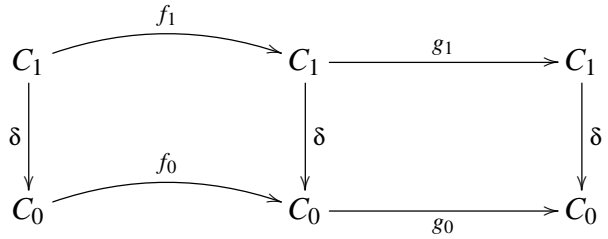
elde edilir. $\delta f_1 = f_0\delta$ olduğundan

$$f_0(\delta(c_1))\delta(c_1') = \delta(f_1(c_1))\delta(c_1')$$

bulunur. O halde

$$f_0(\delta(c_1c_1')) = \delta(f_1(c_1c_1'))$$

elde edilir. Burada $f = (f_1, f_0)$, $g = (g_1, g_0) \in M(\delta)$ için



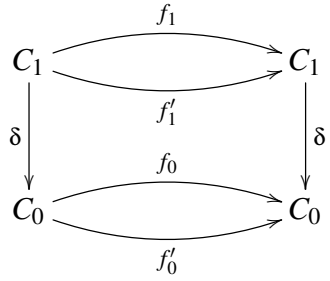
diyagramı gözönüne alınırsa, içerdeki diyagramların değişmeli oluşundan $\delta f_1 = f_0\delta,\ \delta g_1 = g_0\delta$ yazılır ve bu eşitliklerden

$$\delta g_1 f_1 = g_0\delta f_1 = g_0 f_0\delta$$

elde edilir ki bu en dıştaki diyagramın değişmeli olduğu anlamına gelir. Buna göre

$$g \circ f = (g_1f_1, g_0f_0) \in M(\delta)$$

bulunur. Ayrıca $f = (f_1, f_0)$, $f' = (f_1', f_0') \in M(\delta)$ için



$$f + f' = (f_1, f_0) + (f_1', f_0') = (f_1 + f_1', f_0 + f_0')$$

olarak tanımlanan $f + f'$ toplamı için

$$\begin{aligned} \delta(f_1 + f_1') &= \delta(f_1) + \delta(f_1') \\ &= f_0\delta + f_0'\delta \\ &= (f_0 + f_0')\delta \end{aligned}$$

sağlandığından $f + f' \in M(\delta)$ olur.

$M(\delta)$ nın $\underline{\delta}$ üzerine etkisi de

$$\begin{array}{lll} M(\delta) \times \underline{\delta} & \longrightarrow & \underline{\delta} \\ (f, (x, \delta(x))) & \longmapsto & (f_1, f_0) \cdot (x, \delta(x)) = (f_1(x), f_0\delta(x)) \end{array}$$

şeklinde tanımlansın. Burada tanımlanan etkinin bir cebir etkisi olduğunun gösterilmesi gerekmektedir. Bundan önce $M(\delta)$ nın cebir olduğu gösterilecektir.

i) İlk olarak $(M(\delta), +, \circ)$ nın halka olduğu gösterilsin.

Her $f = (f_1 f_0), g = (g_1, g_0) \in M(\delta)$ için ve her $c_1 \in C$ için

$$\begin{aligned} \delta f_1 &= f_0\delta \\ \delta g_1 &= g_0\delta \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \delta(f_1 + g_1)(c_1) &= \delta(f_1(c_1) + g_1(c_1)) \\ &= \delta f_1(c_1) + \delta g_1(c_1) \\ &= f_0\delta(c_1) + g_0\delta(c_1) \\ &= (f_0 + g_0)\delta(c_1) \end{aligned}$$

elde edilir, buna göre

$$f + g = (f_1, f_0) + (g_{1,} g_0) = (f_1 + g_1, f_0 + g_0) \in M(\delta)$$

bulunur.

$f=(f_1,f_0)$, $g=(g_1,g_0)$, $h=(h_1,h_0)\in M(\delta)$ için

$$\begin{aligned}(f_1,f_0)+((g_1,g_0)+(h_1,h_0)) &= (f_1,f_0)+(g_1+h_1,g_0+h_0)\\ &= (f_1+(g_1+h_1),f_0+(g_0+h_0))\\ &= ((f_1+g_1)+h_1,(f_0+g_0)+h_0)\\ &= ((f_1,f_0)+(g_1,g_0))+(h_1,h_0)\end{aligned}$$

olduğundan $f+(g+h)=(f+g)+h$ elde edilir.

Her $f\in M(\delta)$ için $f+0_{M(\delta)}=0_{M(\delta)}+f=f$ olacak şekilde $0_{M(\delta)}\in M(\delta)$ olduğu gösterilsin.

$f=(f_1,f_0)$, $k=(k_1,k_0)\in M(\delta)$ olmak üzere

$$(f_1,f_0)+(k_1,k_0)=(f_1+k_1,f_0+k_0)=(f_1,f_0)$$

olabilmesi için $(k_1,k_0)=(0_{C_1},0_{C_0})=0_{M(\delta)}$ bulunur. Burada her $c_1\in C_1$ için

$$\begin{aligned}\delta 0(c_1) &= \delta(0(c_1)) = \delta(0) = 0_{C_0}\\ 0\delta(c_1) &= 0(\delta(c_1)) = 0_{C_0}\end{aligned}$$

olup $\delta 0=0\delta$ elde edilir. O halde $0_{M(\delta)}=(0_{C_1},0_{C_0})\in M(\delta)$ dır.

Her $f\in M(\delta)$ için $f+f^{-1}=f^{-1}+f=0_{M(\delta)}$ olacak şekilde $f^{-1}\in M(\delta)$ var mıdır gösterilsin.

$f=(f_1,f_0)$, $f^{-1}=(g_1,g_0)$ olsun.

$$\begin{aligned}f+f^{-1} &= (f_1,f_0)+(g_1,g_0)=(0,0)\\ &= (f_1+g_1,f_0+g_0)=(0,0)\end{aligned}$$

olup $g_1=-f_1, g_0=-f_0$ olacağından $g=-f=(-f_1,-f_0)$ elde edilir.

Her $f,g\in M(\delta)$ için

$$\begin{aligned}f+g &= (f_1,f_0)+(g_1,g_0)\\ &= (f_1+g_1,f_0+g_0)\\ &= (g_1+f_1,g_0+f_0)\\ &= (g_1,g_0)+(f_1,f_0)\\ &= g+f\end{aligned}$$

olup $(M(\delta),+)$ Abel gruptur.

$f,g\in M(\delta)$ için $(g\circ f)=(g_1,g_0)\circ(f_1,f_0)=(g_1f_1,g_0f_0)\in M(\delta)$ olduğu gösterilsin. Her $c_1\in C_1$ için

$$\begin{aligned}\delta(g_1f_1)(c_1) &= \delta(g_1(f_1(c_1)))\\ &= (\delta g_1)(f_1(c_1))\\ &= (g_0\delta)(f_1(c_1))\\ &= g_0(\delta f_1)(c_1)\\ &= g_0(f_0\delta(c_1))\\ &= (g_0f_0)(\delta(c_1))\end{aligned}$$

olup $g \circ f \in M(\delta)$ bulunur.

$f,g,h \in M(\delta)$

$$\begin{aligned} h \circ (g \circ f) &= (h_1,h_0) \circ ((g_1,g_0) \circ (f_1,f_0)) \\ &= (h_1,h_0) \circ (g_1 f_1, g_0 f_0) \\ &= (h_1(g_1 f_1), h_0(g_0 f_0)) \\ &= ((h_1 g_1) f_1, (h_0 g_0) f_0) \\ &= ((h_1 g_1), (h_0 g_0)) \circ (f_1, f_0) \\ &= (h \circ g) \circ f \end{aligned}$$

bulunur.

Her $f,g,h \in M(\delta)$ için

$$\begin{aligned} f \circ (g+h) &= (f_1,f_0) \circ ((g_1,g_0) + (h_1,h_0)) \\ &= (f_1,f_0) \circ ((g_1+h_1, g_0+h_0)) \\ &= (f_1 \circ (g_1+h_1), f_0 \circ (g_0+h_0)) \\ &= (f_1 \circ g_1 + f_1 \circ h_1, f_0 \circ g_0 + f_0 \circ h_0) \\ &= (f_1 \circ g_1, f_0 \circ g_0) + (f_1 \circ h_1, f_0 \circ h_0) \\ &= (f_1,f_0) \circ (g_1,g_0) + (f_1,f_0) \circ (h_1,h_0) \\ &= f \circ g + f \circ h \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (f+g) \circ h &= ((f_1,f_0) + (g_1,g_0)) \circ (h_1,h_0) \\ &= (f_1+g_1, f_0+g_0) \circ (h_1, h_0) \\ &= ((f_1+g_1) \circ h_1, ((f_0+g_0) \circ h_0 \\ &= (f_1 \circ h_1 + g_1 \circ h_1, f_0 \circ h_0 + g_0 \circ h_0) \\ &= (f_1 \circ h_1, f_0 \circ h_0) + (g_1 \circ h_1, g_0 \circ h_0) \\ &= (f_1,f_0) \circ (h_1,h_0) + (g_1,g_0) \circ (h_1,h_0) \\ &= f \circ h + g \circ h \end{aligned}$$

olup $(M(\delta), +, \circ)$ bir halkadır.

$M(\delta)$ nin bir $R-$modül olduğu gösterilsin.

$$\begin{aligned} R \times M(\delta) &\longrightarrow M(\delta) \\ (r,(f_1,f_0)) &\longmapsto r.(f_1,f_0) = (r.f_1, r.f_0) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} r.f_1 : C_1 &\longrightarrow C_1 \\ c &\longmapsto (r.f_1)(c) = r.(f_1(c)) \end{aligned}$$

olmak üzere $f,g \in M(\delta)$ ve $r,r_1,r_2 \in R$ için

(i)

$$\begin{aligned} r.((f_1,f_0)+(g_1,g_0)) &= r.(f_1+g_1, f_0+g_0) \\ &= (r.(f_1+g_1), r.(f_0+g_0)) \\ &= (r.f_1 + r.g_1, r.f_0 + r.g_0) \\ &= (r.f_1, r.f_0) + (r.g_1, r.g_0) \\ &= r.(f_1,f_0) + r.(g_1,g_0) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}(r_1+r_2).(f_1,f_0) &= ((r_1+r_2).f_1,(r_1+r_2).f_0)\\ &= (r_1.f_1+r_2.f_1,r_1.f_0+r_2.f_0)\\ &= (r_1.f_1,r_1.f_0)+,(r_2.f_1,r_2.f_0)\\ &= r_1.(f_1,f_0)+r_2.(f_1,f_0)\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}(r_1r_2).(f_1,f_0) &= ((r_1r_2).f_1,(r_1r_2).f_0)\\ &= (r_1.(r_2.f_1),r_1.(r_2.f_0))\\ &= r_1.(r_2.f_1,r_2.f_0)\\ &= r_1.(r_2.(f_1,f_0))\end{aligned}$$

olduğundan $M(\delta)$ bir $R-$modül olur.

Ayrıca $f,g \in M(\delta)$ ve $r \in R$ için

$$\begin{aligned}r.((f_1,f_0)\circ(g_1,g_0)) &= r.(f_1\circ g_1,f_0\circ g_0)\\ &= (r.(f_1\circ g_1),r.(f_0\circ g_0))\\ &= ((r.f_1)\circ g_1,(r.f_0)\circ g_0)\\ &= (r.f_1,r.f_0)\circ(g_1,g_0)\\ &= (r.(f_1,f_0))\circ(g_1,g_0)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}r.((f_1,f_0)\circ(g_1,g_0)) &= r.(f_1\circ g_1,f_0\circ g_0)\\ &= (r.(f_1\circ g_1),r.(f_0\circ g_0))\\ &= ((r.f_1(g_1),(r.f_0(g_0))\\ &= (f_1(r.g_1),f_0(r.g_0))\\ &= (f_1,f_0)\circ(r.g_1,r.g_0)\\ &= (f_1,f_0)\circ(r.(g_1,g_0))\end{aligned}$$

bulunur. O halde $M(\delta)$ bir $R-$cebirdir.

Şimdi de $M(\delta)$ ve $\underline{\delta}$ değişmeli $R-$cebirler olmak üzere

$$\begin{aligned}M(\delta)\times\underline{\delta} &\longrightarrow \underline{\delta}\\ (f,(x,\delta(x))) &\longmapsto (f_1,f_0)\cdot(x,\delta(x)) = (f_1(x),f_0\delta(x))\end{aligned}$$

dönüşümünün bir cebir etkisi olduğu gösterilecektir.

$r \in R$, $(x,\delta(x)),(x',\delta(x')) \in \underline{\delta}$, $f=(f_1,f_0),g=(g_1,g_0) \in M(\delta)$ için

i)

$$\begin{aligned}r.((f_1,f_0)\cdot(x,\delta(x))) &= r.(f_1(x),f_0\delta(x))\\ &= (r.f_1(x),r.f_0\delta(x))\\ &= (f_1(r.x),f_0(r.(\delta(x))))\\ &= (f_1,f_0)\cdot(r.x,r.\delta(x))\\ &= (f_1,f_0)\cdot(r.(x,\delta(x)))\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} f\cdot((x,\delta(x))+(x',\delta(x'))) &= (f_1,f_0)\cdot((x,\delta(x))+(x',\delta(x'))) \\ &= (f_1,f_0)\cdot(x+x',\delta(x)+\delta(x')) \\ &= (f_1,f_0)\cdot(x+x',\delta(x+x')) \\ &= (f_1(x+x'),f_0(\delta(x+x'))) \\ &= (f_1(x)+f_1(x'),f_0(\delta(x))+f_0(\delta(x'))) \\ &= (f_1(x),f_0(\delta(x)))+(f_1(x'),f_0(\delta(x'))) \\ &= (f_1,f_0)\cdot(x,\delta(x))+(f_1,f_0)\cdot(x',\delta(x')) \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} (f+g)\cdot(x,\delta(x)) &= ((f_1,f_0)+(g_1,g_0))\cdot(x,\delta(x)) \\ &= (f_1+g_1,f_0+g_0)\cdot(x,\delta(x)) \\ &= ((f_1+g_1)(x),(f_0+g_0)(\delta(x))) \\ &= (f_1(x)+g_1(x),f_0(\delta(x))+g_0(\delta(x))) \\ &= (f_1(x),f_0(\delta(x)))+(g_1(x),g_0(\delta(x))) \\ &= (f_1,f_0)\cdot(x,\delta(x))+(g_1,g_0)\cdot(x,\delta(x)) \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned} f\cdot((x,\delta(x))(x',\delta(x'))) &= (f_1,f_0)\cdot((x,\delta(x))(x',\delta(x'))) \\ &= (f_1,f_0)\cdot(xx',\delta(xx')) \\ &= (f_1(xx'),f_0(\delta(xx'))) \\ &= (f_1(xx'),f_0(\delta(x)\delta(x'))) \\ &= (f_1(x)x',f_0(\delta(x))\delta(x')) \\ &= (f_1(x),f_0(\delta(x)))(x',\delta(x')) \\ &= ((f_1,f_0)\cdot(x,\delta(x)))(x',\delta(x')) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f\cdot((x,\delta(x))(x',\delta(x'))) &= (f_1,f_0)\cdot((x,\delta(x))(x',\delta(x'))) \\ &= (f_1,f_0)\cdot(xx',\delta(xx')) \\ &= (f_1(xx'),f_0(\delta(xx'))) \\ &= (f_1(xx'),f_0(\delta(x)\delta(x'))) \\ &= (xf_1(x'),\delta(x)f_0(\delta(x'))) \\ &= (x,\delta(x))(f_1(x'),f_0(\delta(x'))) \\ &= (x,\delta(x))((f_1,f_0)\cdot(x',\delta(x'))) \end{aligned}$$

v)

$$\begin{aligned} ((f_1,f_0)\circ(g_1,g_0))\cdot(x,\delta(x)) &= (f_1\circ g_1,f_0\circ g_0)\cdot(x,\delta(x)) \\ &= ((f_1\circ g_1)(x),(f_0\circ g_0)(\delta(x))) \\ &= (f_1(g_1(x)),(f_0(g_0(\delta(x))))) \\ &= (f_1,f_0)\cdot(g_1(x),g_0(\delta(x))) \\ &= (f_1,f_0)\cdot((g_1,g_0)\cdot(x,\delta(x))) \end{aligned}$$

dır. O halde

$$\begin{aligned} M(\delta)\times\underline{\delta} &\longrightarrow \underline{\delta} \\ (f,(x,\delta(x))) &\longmapsto (f_1,f_0)\cdot(x,\delta(x))=(f_1(x),f_0\delta(x)) \end{aligned}$$

dönüşümü bir R-cebir etkisidir.

3.4.2 $\mathcal{M}(\delta)$ Çarpım 2-Cebiri

Bu kısımda objeler kümesi $A_0 = \{\underline{\delta}\}$, 1-morfizmlerin kümesi $A_1 = M(\delta)$ ve 2-morfizmlerin kümesi $A_2 = \underline{\delta} \rtimes M(\delta)$ olan bir 2-cebir yapısı tanımlanacaktır.

k değişmeli halka, R birimli $k-$ cebir ve $\mathrm{Ann}(C_1) = 0, \mathrm{Ann}(C_0) = 0$ yada $C_1^2 = C_1, C_0^2 = C_0$ şartları ile birlikte C_1 ve C_0 birer değişmeli $R-$cebir olsun. $A_0 = \{\underline{\delta}\}$ objeler kümesi olsun ve $A_1 = M(\delta)$ alalım ve A_1 in elemanlarına $1-$morfizmler denilsin. $M(\delta)$ nın $\underline{\delta}$ üzerindeki etkisi

$$\begin{array}{rcl} M(\delta) \times \underline{\delta} & \longrightarrow & \underline{\delta} \\ ((f_1, f_0), (x, \delta(x))) & \longmapsto & (f_1, f_0) \cdot (x, \delta(x)) = (f_1(x), f_0\delta(x)) \end{array}$$

şeklinde tanımlansın.

$M(\delta)$ nın $\underline{\delta}$ üzerine etkisi kullanılarak

$$\underline{\delta} \rtimes M(\delta) \;=\; \{((x, \delta(x)), (f_1, f_0)) \mid (x, \delta(x)) \in \underline{\delta},\ (f_1, f_0) \in M(\delta)\}$$

yarıdirekt çarpım cebiri

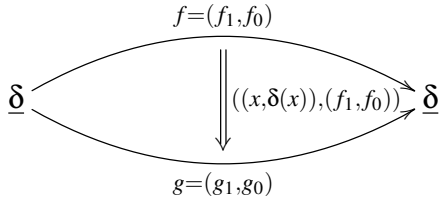
$$\begin{array}{rcl} ((x, \delta(x)), (f_1, f_0))((y, \delta(y)), (g_1, g_0)) & = & ((f_1, f_0) \cdot (y, \delta(y)) + (g_1, g_0) \cdot (x, \delta(x)) + \\ & & (y, \delta(y))(x, \delta(x)), (g_1, g_0) \circ (f_1, f_0)) \\ & = & ((f_1(y), f_0\delta(y)) + (g_1(x), g_0\delta(x)) + \\ & & (xy, \delta(xy)), (g_1 f_1, g_0 f_0)) \\ & = & (f_1(y) + g_1(x) + xy, f_0\delta(y) + g_0\delta(x) + \\ & & \delta(xy), (g_1 f_1, g_0 f_0)) \end{array}$$

şeklindeki çarpım ile tanımlansın.

$A_2 = \underline{\delta} \rtimes M(\delta)$ alalım ve A_2 nin elemanlarına $2-$morfizmler denilsin. Böylece

$$((x, \delta(x)), (f_1, f_0)) \in \underline{\delta} \rtimes M(\delta)$$

için



olur. Kaynak, hedef ve birim dönüşümler ise

$$\begin{array}{rcccl} s & : & \underline{\delta} \rtimes M(\delta) & \longrightarrow & M(\delta) \\ & & ((x, \delta(x)), (f_1, f_0)) & \longmapsto & s((x, \delta(x)), (f_1, f_0)) = (f_1, f_0) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} t & : & \underline{\delta} \rtimes M(\delta) & \longrightarrow & M(\delta) \\ & & ((x,\delta(x)),(f_1,f_0)) & \longmapsto & t((x,\delta(x)),(f_1,f_0)) = M_{(x,\delta(x))} \diamond (f_1,f_0) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rccc} e & : & M(\delta) & \longrightarrow & \underline{\delta} \rtimes M(\delta) \\ & & (f_1,f_0) & \longmapsto & e(f_1,f_0) = ((0,0),(f_1,f_0)) \end{array}$$

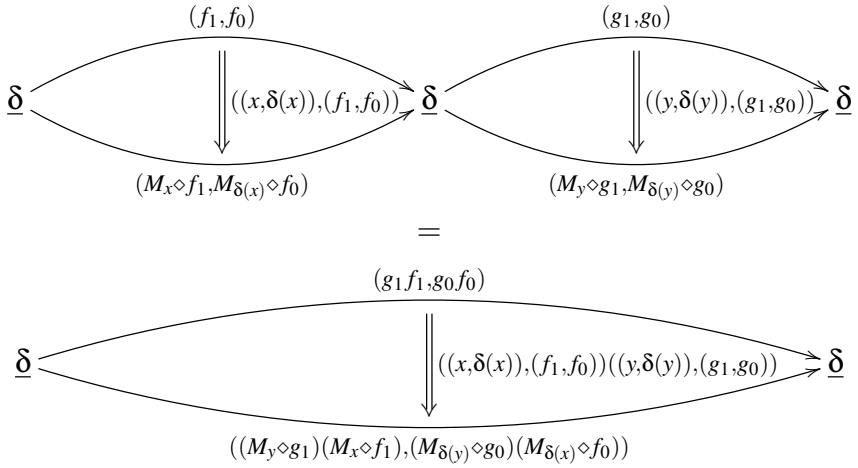
şeklinde tanımlansın. Burada $(u,\delta(u)) \in \underline{\delta}$ için

$$\begin{array}{rcl} (M_{(x,\delta(x))} \diamond (f_1,f_0))(u) & = & (x,\delta(x))(u,\delta(u)) + (f_1,f_0)(u,\delta(u)) \\ & = & (x(u),\delta(x)\delta(u)) + (f_1(u), f_0\delta(u)) \\ & = & (x(u)+f_1(u), \delta(xu)+f_0\delta(u)) \end{array}$$

şeklinde tanımlanır.

2−morfizmler için iki türlü bileşke söz konusu olduğundan şimdi bu bileşkeler tanımlansın.

$((x,\delta(x)),(f_1,f_0))$ ve $((y,\delta(y)),(g_1,g_0)) \in \underline{\delta} \rtimes M(\delta)$ için



olur, burada

$$\begin{array}{rcl} M_{(f_1(y)+g_1(x)+xy, f_0\delta(y)+g_0\delta(x)+\delta(xy))} \diamond (g_1f_1, g_0f_0) & = & (M_{f_1(y)+g_1(x)+xy} \diamond g_1f_1, \\ & & M_{f_0\delta(y)+g_0\delta(x)+\delta(xy)} \diamond g_0f_0) \\ & = & ((M_y \diamond g_1)(M_x \diamond f_1), \\ & & (M_{\delta(y)} \diamond g_0)(M_{\delta(x)} \diamond f_0)) \end{array}$$

olduğu gösterilmelidir, her $(u,\delta(u)) \in \underline{\delta}$ için

$$\begin{array}{rcl} (M_{f_1(y)+g_1(x)+xy} \diamond g_1f_1, & & \\ M_{f_0\delta(y)+g_0\delta(x)+\delta(xy)} \diamond g_0f_0)(u,\delta(u)) & = & (f_1(y)t + g_1(x)u + xyu + (g_1f_1)u, \\ & & f_0\delta(yu) + g_0\delta(xu) + \delta(xyu) + (g_0f_0)\delta(u)) \end{array} \qquad (1)$$

ve

$$\begin{array}{rcl} ((M_y \diamond g_1)(M_x \diamond f_1), & & \\ (M_{\delta(y)} \diamond g_0)(M_{\delta(x)} \diamond f_0))(u, \delta(u)) & = & ((M_y \diamond g_1)(xu + f_1(u)), (M_{\delta(y)} \diamond g_0)(\delta(xu) + f_0\delta(u))) \\ & = & (yxu + yf_1(u) + g_1(xu) + (g_1 f_1)(u), \\ & & \delta(yxu) + \delta(y)(f_0\delta)(u) + g_0\delta(xu) + (g_0 f_0)\delta(u)) \end{array} \quad (2)$$

olur, buna göre (1) ve (2) den

$$M_{(f_1(y)+g_1(x)+xy, f_0\delta(y)+g_0\delta(x)+\delta(xy))} \diamond (g_1 f_1, g_0 f_0) = ((M_y \diamond g_1)(M_x \diamond f_1), (M_{\delta(y)} \diamond g_0)(M_{\delta(x)} \diamond f_0))$$

elde edilir.

O halde $((x,\delta(x)),(f_1,f_0))$ ve $((y,\delta(y)),(g_1,g_0)) \in \underline{\delta} \rtimes M(\delta)$ için

$$\begin{array}{rcl} ((x,\delta(x)),(f_1,f_0)) \circ ((y,\delta(y)),(g_1,g_0)) & = & ((f_1,f_0)\cdot(y,\delta(y)) + (g_1,g_0)\cdot(x,\delta(x)) + \\ & & (y,\delta(y))(x,\delta(x)), (g_1,g_0) \circ (f_1,f_0)) \\ & = & ((f_1(y), f_0\delta(y)) + (g_1(x), g_0\delta(x)) + \\ & & (xy, \delta(xy)), (g_1 f_1, g_0 f_0)) \\ & = & (f_1(y) + g_1(x) + xy, f_0\delta(y) + \\ & & g_0\delta(x) + \delta(xy), (g_1 f_1, g_0 f_0)) \end{array}$$

şeklinde tanımlanan işleme **yatay bileşke işlemi** denir.

Şimdi de $t((x,\delta(x)),(f_1,f_0)) = s((x_1,\delta(x_1)),(h_1,h_0))$ olacak şekildeki

$$((x,\delta(x)),(f_1,f_0)),\ ((x_1,\delta(x_1)),(h_1,h_0)) \in \underline{\delta} \rtimes M(\delta)$$

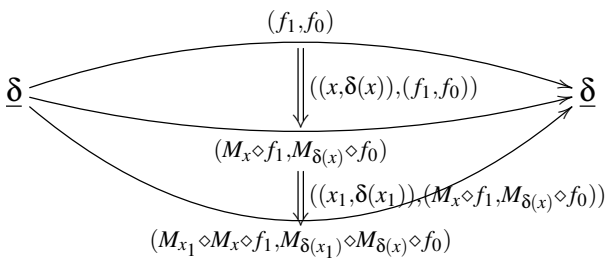
elemanları alınsın. Buna göre

$$\begin{array}{rcl} t((x,\delta(x)),(f_1,f_0)) & = & M_{(x,\delta(x))} \diamond (f_1,f_0) \\ & = & (M_x \diamond f_1, M_{\delta(x)} \diamond f_0) \\ & = & s((x_1,\delta(x_1)),(h_1,h_0)) \\ & = & (h_1,h_0) \end{array}$$

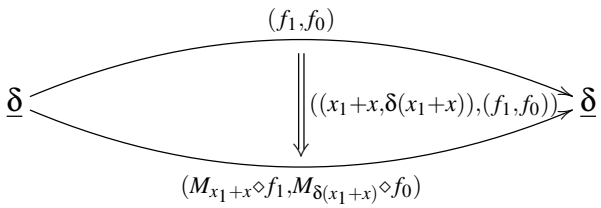
olduğundan

$$(M_x \diamond f_1, M_{\delta(x)} \diamond f_0) = (h_1,h_0)$$

elde edilir. Buradan



$=$



diyagramları gözönüne alınırsa,

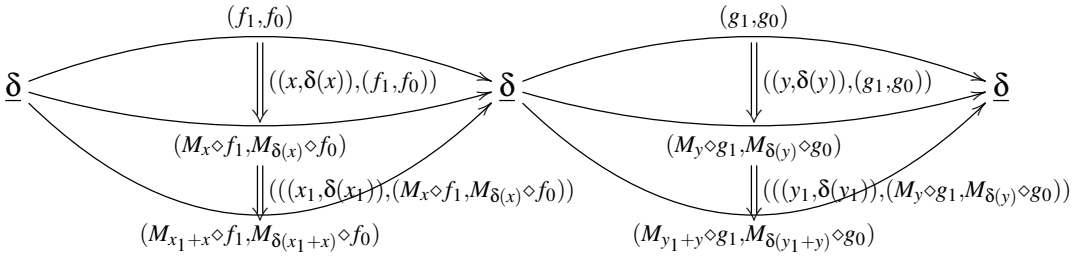
$$\begin{array}{lcl}(M_{x_1}\diamond M_x\diamond f_1, M_{\delta(x_1)}\diamond & & \\ M_{\delta(x)}\diamond f_0)(u,\delta(u)) & = & (M_{x_1}\diamond(M_x\diamond f_1), M_{\delta(x_1)}\diamond(M_{\delta(x)}\diamond f_0))(u,\delta(u)) \\ & = & (x_1u+(M_x\diamond f_1)(u), \delta(x_1u)+(M_{\delta(x)}\diamond f_0)\delta(u)) \\ & = & (x_1u+xu+f_1(u), \delta(x_1u)+\delta(xu)+f_0\delta(u)) \\ & = & ((x_1+x)u+f_1(u), \delta((x_1+x)\delta(u)+f_0\delta(u)) \\ & = & (M_{x_1+x}\diamond f_1, M_{\delta(x_1+x)}\diamond f_0)(u,\delta(u))\end{array}$$

bulunur. O halde $t((x,\delta(x)),(f_1,f_0)) = s((x_1,\delta(x_1)),(M_x\diamond f_1, M_{\delta(x)}\diamond f_0))$ olacak şekildeki $((x,\delta(x)),(f_1,f_0)),((x_1,\delta(x_1)),(M_x\diamond f_1, M_{\delta(x)}\diamond f_0)) \in \underline{\delta}\rtimes M(\delta)$ için

$$((x,\delta(x)),(f_1,f_0))\bullet((x_1,\delta(x_1)),(M_x\diamond f_1, M_{\delta(x)}\diamond f_0) = ((x_1+x,\delta(x_1+x)),(f_1,f_0))$$

şeklinde tanımlanan işleme ise **dikey bileşke işlemi** denir.

Bileşkeler için değişim kuralı (interchange law) nın sağlandığı gösterilmelidir. Yani



diyagramı gözönüne alınarak

$$\begin{array}{lcl}[((x,\delta(x),(f_1,f_0))\circ((y,\delta(y)),(g_1,g_0))]\bullet & & \\ [((x_1,\delta(x_1),(M_x\diamond f_1, M_{\delta(x)}\diamond f_0))\circ & & \\ ((y_1,\delta(y_1),(M_y\diamond g_1, M_{\delta(y)}\diamond g_0))] & = & [((x,\delta(x),(f_1,f_0))\bullet \\ & & ((x_1,\delta(x_1),(M_x\diamond f_1, M_{\delta(x)}\diamond f_0))]\circ \\ & & [((y,\delta(y),(g_1,g_0))\bullet((y_1,\delta(y_1), \\ & & (M_y\diamond g_1, M_{\delta(y)}\diamond g_0))]\end{array}$$

eşitliğinin sağlandığı gösterilsin. Eşitliğin sol tarafı;

$$
\begin{aligned}
&[(f_1,f_0)\cdot(y,\delta(y))+(g_1,g_0)\cdot(x,\delta(x))+(x,\delta(x))(y,\delta(y)),(g_1,g_0)\circ(f_1,f_0)]\bullet\\
&[(M_x\diamond f_1,M_{\delta(x)}\diamond f_0)\cdot(y_1,\delta(y_1))+(M_y\diamond g_1,M_{\delta(y)}\diamond g_0)\cdot(x_1,\delta(x_1))\\
&+(x_1,\delta(x_1))(y_1,\delta(y_1)),(M_y\diamond g_1,M_{\delta(y)}\diamond g_0)\circ(M_x\diamond f_1,M_{\delta(x)}\diamond f_0)]\\
&=[(f_1(y),f_0(\delta(y))+(g_1(x),g_0(\delta(x))+(xy,\delta(xy)),(g_1f_1,g_0f_0)]\bullet\\
&[xy_1+f_1(y_1),\delta(xy_1)+f_0(\delta(y_1))+(yx_1+g_1(x_1),\delta(yx_1)+g_0(\delta(x_1))\\
&+(x_1y_1,\delta(x_1y_1)),((M_y\diamond g_1)(M_x\diamond f_1),(M_{\delta(y)}\diamond g_0)(M_{\delta(x)}\diamond f_0))]\\
&=[f_1(y)+g_1(x)+xy,f_0(\delta(y))+g_0(\delta(x))+\delta(xy)),(g_1f_1,g_0f_0)]\bullet\\
&[(xy_1+f_1(y_1)+yx_1+g_1(x_1)+x_1y_1,\delta(xy_1)+f_0(\delta(y_1))+\delta(yx_1)+g_0(\delta(x_1))\\
&+\delta(x_1y_1)),((M_{f_1(y)+g_1(x)+xy}\diamond g_1f_1,M_{f_0\delta(y)+g_0\delta(x)+\delta(xy)}\diamond g_0f_0)]\\
&=[(f_1(y)+g_1(x)+xy+xy_1+f_1(y_1)+yx_1+g_1(x_1)+x_1y_1,\\
&\delta(f_1(y)+g_1(x)+xy+xy_1+f_1(y_1)+yx_1+g_1(x_1)+x_1y_1)),(g_1f_1,g_0f_0)]\\
&=[(f_1(y+y_1)+g_1(x+x_1)+(x_1+x)(y_1+y),\\
&(f_0\delta)(y_1+y)+(g_0\delta)(x_1+x)+\delta((x_1+x)(y_1+y)),(g_1f_1,g_0f_0)]
\end{aligned}
$$

ve eşitliğin sağ tarafı;

$$
\begin{aligned}
&[((x,\delta(x),(f_1,f_0))\bullet((x_1,\delta(x_1),(M_x\diamond f_1,M_{\delta(x)}\diamond f_0))]\circ\\
&[((y,\delta(y),(g_1,g_0))\bullet((y_1,\delta(y_1),(M_y\diamond g_1,M_{\delta(y)}\diamond g_0))]\\
&=[((x_1+x),\delta(x_1+x)),(f_1,f_0)]\circ[((y_1+y),\delta(y_1+y)),(g_1,g_0)]\\
&=[(f_1,f_0)\cdot((y_1+y),\delta(y_1+y))+(g_1,g_0)\cdot((x_1+x),\delta(x_1+x))+\\
&((x_1+x),\delta(x_1+x))((y_1+y)\delta(y_1+y)),(g_1,g_0)\circ(f_1,f_0))]\\
&=[(f_1(y_1+y),f_0\delta(y_1+y))+(g_1(x_1+x),g_0\delta(x_1+x))+\\
&((x_1+x)(y_1+y),\delta((x_1+x)(y_1+y)),(g_1f_1,g_0f_0))]\\
&=[(f_1(y_1+y)+g_1(x_1+x)+(x_1+x)(y_1+y),f_0\delta(y_1+y)+\\
&g_0\delta(x_1+x)+\delta((x_1+x)(y_1+y)),(g_1f_1,g_0f_0)]
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Buradan iki ifadenin eşit olduğu görülür, buna göre bileşkeler için değişim kuralı (interchange law) sağlanmış olur.

O halde $\mathcal{M}(\delta)=(A_0=\{\underline{\delta}\},A_1,A_2)$ bir 2-cebirdir.

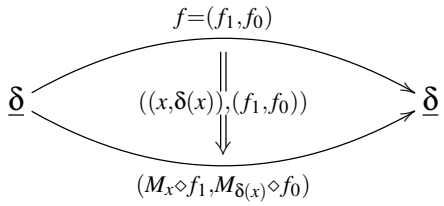
Teorem 3.2 $\mathcal{M}(\delta)=(A_0,A_1,A_2)$ 2-cebirinden değişmeli cebirlerin bir çaprazlanmış modülü elde edilebilir.

İspat. $\mathcal{M}(\delta)=(A_0,A_1,A_2)$ 2-cebiri ele alınsın, yani

$A_0=\{\underline{\delta}\}$

$A_1=M(\delta)=\{f=(f_1,f_0):(C_1\xrightarrow{\delta}C_0)\longrightarrow(C_1\xrightarrow{\delta}C_0),\ \delta f_1=f_0\delta\}$ $1-$morfizmlerinin kümesi

$A_2=\underline{\delta}\rtimes M(\delta)=\{((x,\delta(x)),(f_1,f_0))\mid(x,\delta(x))\in\underline{\delta},(f_1,f_0)\in M(\delta)\}$ $2-$morfizmlerinin kümesi olsun.



Burada kaynak, hedef ve birim dönüşümleri

$$\begin{array}{rccc} s: & A_2 & \longrightarrow & A_1 \\ & ((x,\delta(x)),(f_1,f_0)) & \longmapsto & s((x,\delta(x)),(f_1,f_0)) = f = (f_1,f_0) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} t: & A_2 & \longrightarrow & A_1 \\ & ((x,\delta(x)),(f_1,f_0)) & \longmapsto & t((x,\delta(x)),(f_1,f_0)) = (M_x \diamond f_1, M_{\delta(x)} \diamond f_0) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} e: & A_1 & \longrightarrow & A_2 \\ & (f_1,f_0) & \longmapsto & e(f_1,f_0) = ((0,0),(f_1,f_0)) \end{array}$$

biçiminde tanımlansın. Ayrıca s kaynak dönüşümünün çekirdeği

$$\begin{array}{rcl} \text{Çek}s = H & = & \{((x,\delta(x)),(f_1,f_0)) \in A_2 \mid s((x,\delta(x)),(f_1,f_0)) = id_{A_1}\} \\ & = & \{s((x,\delta(x)),(f_1,f_0)) = (f_1,f_0) = id_{A_1}\} \\ & = & \{((x,\delta(x)),(0,0))\} \end{array}$$

olur,

$$\begin{array}{rccc} \partial = t\mid_{\text{Çek}s=H}: & \text{Çek}s & \longrightarrow & A_1 \\ & ((x,\delta(x)),(0,0)) & \longmapsto & \partial((x,\delta(x)),(0,0)) = (M_x \diamond 0, M_{\delta(x)} \diamond 0) \end{array}$$

dönüşümü tanımlansın. A_1 in Çek$s$ üzerine

$$\begin{array}{rcl} A_1 \times \text{Çek}s & \longrightarrow & \text{Çek}s \\ ((f_1,f_0),((x,\delta(x)),(0,0))) & \longmapsto & (f_1,f_0)\cdot((x,\delta(x)),(0,0)) \\ & = & e(f_1,f_0)((x,\delta(x)),(0,0)) \\ & = & ((0_{C_1},0_{C_0}),(f_1,f_0)).((x,\delta(x)),(0,0)) \\ & = & ((f_1,f_0)(x,\delta(x)) + (0,0)(0_{C_1},0_{C_0}) + (x,\delta(x))(0_{C_1},0_{C_0}), \\ & & (0,0)(f_1,f_0)) \\ & = & ((f_1(x),f_0\delta(x)) + (0_{C_1},0_{C_0}) + (0_{C_1},0_{C_0}),(0,0)) \\ & = & ((f_1(x),f_0\delta(x)),(0,0)) \end{array}$$

biçimindeki etkisi yardımıyla

$$\text{Çek}s \rtimes A_1 \quad = \{((x,\delta(x)),(0,0)),(f_1,f_0)) \mid ((x,\delta(x)),(0,0)) \in \text{Çek}s, (f_1,f_0) \in A_1\}$$

yarı direkt çarpımı tanımlanabilir, burada

$$\begin{array}{rcl} ((x,\delta(x)),(0,0)),(f_1,f_0))((y,\delta(y)), & & \\ (0,0)),(g_1,g_0)) & = & \{(f_1,f_0)\cdot((y,\delta(y)),(0,0)) + \\ & & (g_1,g_0)\cdot((x,\delta(x)),(0,0)) \\ & & +((y,\delta(y)),(0,0))((x,\delta(x)),(0,0)), \\ & & (g_1,g_0)(f_1,f_0)\} \\ & = & \{((f_1(y),f_0\delta(y)),(0,0)) + ((g_1(x),g_0\delta(x)), \\ & & (0,0)) + ((yx,\delta(yx)),(0,0)),(g_1f_1,g_0f_0)\} \\ & = & \{((f_1(y)+g_1(x)+yx,f_0\delta(y)+g_0\delta(x)+ \\ & & \delta(yx)),(0,0)),(g_1f_1,g_0f_0)\} \end{array}$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca Çek$s \rtimes A_1 \simeq A_2$ olduğundan ve $\mathcal{M}(\delta)$ bir 2-cebir olduğundan

$$\begin{array}{rccc} s: & \text{Çek}s \rtimes A_1 & \longrightarrow & A_1 \\ & ((x,\delta(x)),(0,0),(f_1,f_0)) & \longmapsto & s((x,\delta(x)),(0,0),(f_1,f_0)) = (f_1,f_0) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} t: & \text{Çek}s \rtimes A_1 & \longrightarrow & A_1 \\ & ((x,\delta(x)),(0,0)),(f_1,f_0)) & \longmapsto & \partial((x,\delta(x)),(0,0))+(f_1,f_0) \\ & & & = (M_x \diamond 0, M_{\delta(x)} \diamond 0)+(f_1,f_0) \\ & & & = (M_x \diamond 0+f_1, M_{\delta(x)} \diamond 0+f_0) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} e: & A_1 & \longrightarrow & \text{Çek}s \rtimes A_1 \\ & (f_1,f_0) & \longmapsto & e(f_1,f_0) = ((0,0),(f_1,f_0)) \end{array}$$

cebir morfizmleri tanımlanabilir. Ayrıca

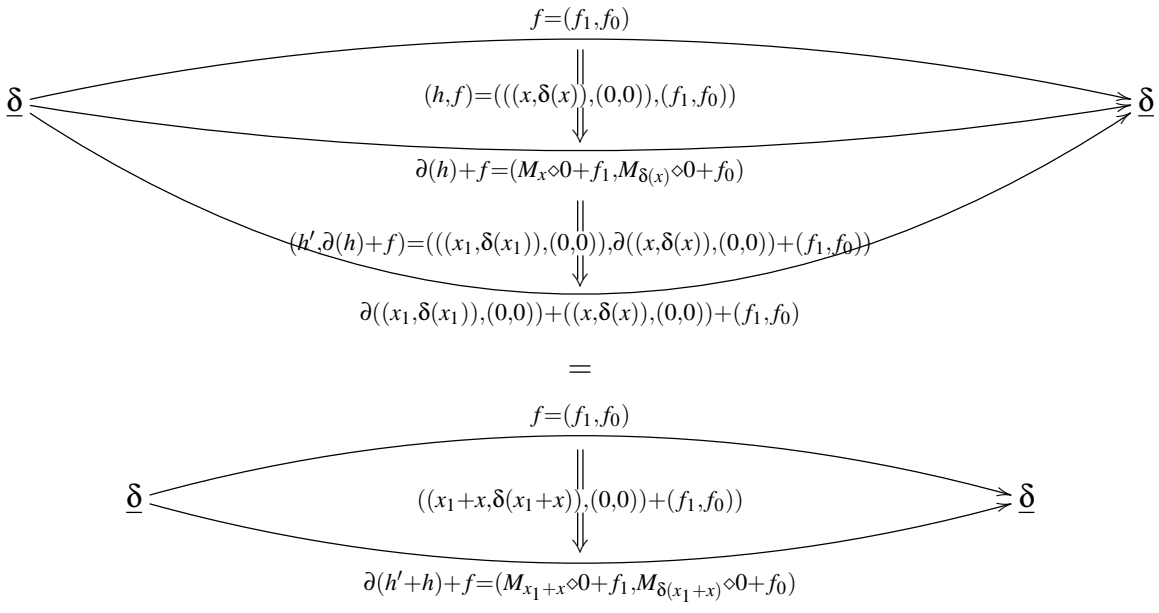
$$t((x,\delta(x)),(0,0)),(f_1,f_0)) = s(((x_1,\delta(x_1)),(0,0)),\partial((x,\delta(x)),(0,0))+(f_1,f_0)))$$

için

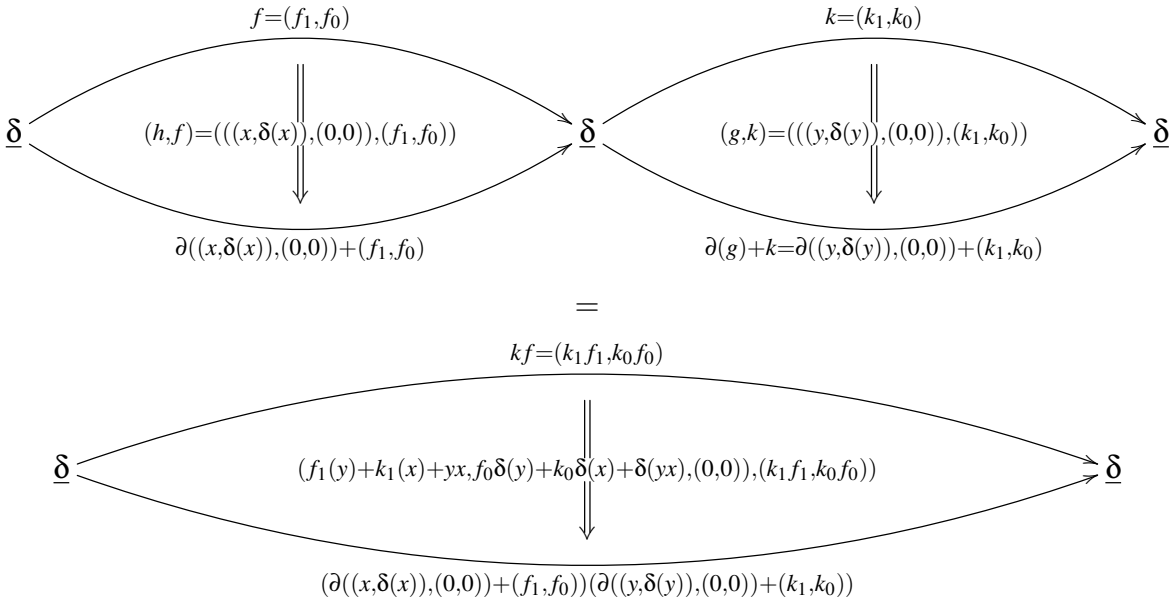
$$\begin{array}{rccc} m: & (\text{Çek}s \rtimes A_1)_t \times_s (\text{Çek}s \rtimes A_1) & \longrightarrow & \text{Çek}s \rtimes A_1 \\ & (((x,\delta(x)),(0,0)),(f_1,f_0)),((x_1,\delta(x_1)), & & \\ & (0,0)),\partial((x,\delta(x)),(0,0))+(f_1,f_0)) & \longmapsto & (((x_1+x,\delta(x_1+x)),(0,0))+(f_1,f_0)) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \partial((x_1,\delta(x_1))+(x,\delta(x)),(0,0)+(0,0))+ & & \\ (f_1,f_0) & = & \partial((x_1+x),\delta(x_1+x)), \\ & & (0+0,0+0))+(f_1,f_0) \\ & = & \partial((x_1+x),\delta(x_1+x)),(0,0))+(f_1,f_0) \\ & = & (M_{x_1+x} \diamond 0+f_1, M_{\delta(x_1+x)} \diamond 0+f_1) \end{array}$$

tanımlansın. Bu m dönüşümü dikey bileşkedir.



$(h,f),(g,k) \in$ Çeks $\rtimes A_1$ için yatay bileşke ise



$$\begin{aligned}(h,f)\circ(g,k) &= (f\cdot g + k\cdot h + gh, f\circ k)\\ &= ((x,\delta(x)),(0,0)),(f_1,f_0))\circ(y,\delta(y)),(0,0)),(k_1,k_0))\\ &= \{(f_1(y)+k_1(x)+yx, f_0\delta(y)+k_0\delta(x)+\delta(yx)),(0,0)),(k_1f_1,k_0f_0)\}\end{aligned}$$

yani

$$\begin{aligned}(h,f)\circ(g,k) &= ((x,\delta(x)),(0,0)),(f_1,f_0))\circ((y,\delta(y)),(0,0)),(k_1,k_0))\\ &= ((f_1,f_0)\cdot((y,\delta(y)),(0,0))+(k_1,k_0)\cdot((x,\delta(x)),(0,0))+\\ &\quad ((y,\delta(y)),(0,0))(x,\delta(x)),(0,0)),(f_1,f_0)\circ(k_1,k_0))\\ &= (e(f_1,f_0)((y,\delta(y)),(0,0))+e(k_1,k_0)((x,\delta(x)),(0,0))+\\ &\quad ((y,\delta(y)),(0,0))((x,\delta(x)),(0,0)),(f_1,f_0)\circ(k_1,k_0))\\ &= (e(f)g+e(k)h+gh, f\circ k)\end{aligned}$$

şeklindedir. Böylece

$$\begin{aligned}\partial(f\cdot h) &= \partial(e(f)h)\\ &= \partial(e(f_1,f_0)((x,\delta(x)),(0,0)))\\ &= \partial(((0,0),(f_1,f_0))((x,\delta(x)),(0,0))\\ &= \partial((f_1(x),f_0\delta(x)),(0,0)))\\ &= M_{f_1(x)}\diamond 0, M_{f_0\delta(x)}\diamond 0)(c_1,c_0)\\ &= (f_1(x)c_1+0(c_1), f_0(\delta(x))(c_0)+0(c_0))\\ &= (f_1(xc_1)+0(c_1)), f_0(\delta(x)c_0)+0(c_0))\\ f\partial(h) &= (f_1,f_0)(M_x\diamond 0, M_{\delta(x)}\diamond 0)(c_1,c_0)\\ &= (f_1,f_0)(xc_1+0(c_1),\delta(x)c_0+0(c_0))\\ &= (f_1(xc_1+0(c_1)), f_0(\delta(x)c_0+0(c_0))\end{aligned}$$

olduğundan çaprazlanmış modüller için gerekli olan $CM1$ şartı sağlanır.

Bileşkelerin değişim kuralından

$$[(h,f)\circ(g,k)]\bullet[(h',\partial(h)+f)\circ(g',\partial(g)+k)]=[(h,f)\bullet(h',\partial(h)+f)]\circ[(g,k)\bullet(g',\partial(g)+k)]$$

eşitliği geçerlidir.

O halde bu eşitliğin her iki tarafı da açılırsa:

$$\begin{aligned}
Sol &= [(f_1,f_0)\cdot((y,\delta(y)),(0,0))+(k_1,k_0)\cdot((x,\delta(x))),(0,0))+\\
&\quad((y,\delta(y),(0,0))((x,\delta(x)),(0,0)),(f_1,f_0)(k_1,k_0)]\bullet\\
&\quad[(\partial((x,\delta(x)),(0,0))+(f_1,f_0))\cdot((y',\delta(y')),(0,0))+\\
&\quad(\partial((y,\delta(y)),(0,0))+(k_1,k_0))\cdot((x',\delta(x')),(0,0))\\
&\quad+((y',\delta(y')),(0,0))((x',\delta(x')),(0,0)),(\partial((x,\delta(x)),(0,0))\\
&\quad+(f_1,f_0))(\partial((y,\delta(y)),(0,0))+(k_1,k_0))\\
&= (\partial((x,\delta(x)),(0,0))+(f_1,f_0))\cdot((y',\delta(y')),(0,0))+\\
&\quad(\partial((y,\delta(y)),(0,0))+(k_1,k_0))\cdot((x',\delta(x')),(0,0))\\
&\quad+((y',\delta(y')),(0,0))((x',\delta(x')),(0,0))+\\
&\quad((f_1,f_0)((y,\delta(y)),(0,0))+(k_1,k_0)((x,\delta(x))),(0,0))\\
&\quad+((y,\delta(y),(0,0))((x,\delta(x)),(0,0)),(f_1,f_0)(k_1,k_0))\\
&= (\partial((x,\delta(x)),(0,0))((y',\delta(y')),(0,0))+e(f_1,f_0)((y',\delta(y')),(0,0))\\
&\quad+\partial((y,\delta(y)),(0,0))((x',\delta(x')),(0,0))\\
&\quad+e(k_1,k_0))((x',\delta(x')),(0,0))+\\
&\quad((y',\delta(y')),(0,0))((x',\delta(x')),(0,0))+e(f_1,f_0)((y,\delta(y)),(0,0))\\
&\quad+e(k_1,k_0)((x,\delta(x))),(0,0))+\\
&\quad((y,\delta(y)),(0,0))((x,\delta(x)),(0,0)),(f_1,f_0)(k_1,k_0)))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Sağ &= [((x',\delta(x')),(0,0))+((x,\delta(x)),(0,0)),(f_1,f_0))]\circ\\
&\quad[(y',\delta(y')),(0,0))+((y,\delta(y)),(0,0)),(k_1,k_0)]\\
&= [(f_1,f_0))\cdot((y',\delta(y')),(0,0))+((y,\delta(y),(0,0))+\\
&\quad(k_1,k_0))\cdot((x',\delta(x')),(0,0))+((x,\delta(x))),(0,0))\\
&\quad+((y',\delta(y')),(0,0))+((y,\delta(y)),(0,0))((x',\delta(x')),(0,0))+\\
&\quad((x,\delta(x)),(0,0)),(f_1,f_0)(k_1,k_0))]\\
&= (e(f_1,f_0)((y',\delta(y')),(0,0))+e(f_1,f_0)((y,\delta(y)),(0,0))+\\
&\quad e(k_1,k_0))((x',\delta(x')),(0,0))+e(k_1,k_0))((x,\delta(x)),(0,0))\\
&\quad+((y',\delta(y')),(0,0))((x',\delta(x')),(0,0))+((y',\delta(y')),(0,0))((x,\delta(x)),(0,0))+\\
&\quad((y,\delta(y)),(0,0))((x',\delta(x')),(0,0))\\
&\quad+((y,\delta(y)),(0,0)).((x,\delta(x)),(0,0)),(f_1,f_0)(k_1,k_0)))
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. İki taraf da eşit olduğundan, ilk bileşenlerinin de eşit olması gerektiği bilindiğinden,

$$\begin{aligned}
&\partial((x,\delta(x)),(0,0))((y',\delta(y')),(0,0))+\\
&\partial((y,\delta(y)),(0,0))((x',\delta(x')),(0,0)) \quad = \quad ((x,\delta(x)),(0,0))((y',\delta(y')),(0,0))\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +((y,\delta(y)),(0,0))((x',\delta(x')),(0,0))
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& ((x,\delta(x)),(0,0))((y',\delta(y')),(0,0))+((y,\delta(y)),(0,0))((x',\delta(x')),(0,0)) \\
= \;& \partial((x,\delta(x)),(0,0))((y',\delta(y')),(0,0))+\partial((y,\delta(y)),(0,0))((x',\delta(x')),(0,0)) \\
= \;& \partial[((x,\delta(x)),(0,0))+(y,\delta(y)),(0,0))][((y',\delta(y')),(0,0))+((x',\delta(x')),(0,0))] \\
& -\partial((x,\delta(x)),(0,0))((x',\delta(x')),(0,0))-\partial((y,\delta(y)),(0,0))((y',\delta(y')),(0,0)) \\
= \;& \partial(((x,\delta(x)),(0,0))+((y,\delta(y)),(0,0)))(((y',\delta(y')),(0,0))+((x',\delta(x')),(0,0)) \\
& -(((x,\delta(x)),(0,0))((x',\delta(x')),(0,0))+((y,\delta(y)),(0,0))((y',\delta(y')),(0,0))) \\
= \;& \partial((x,\delta(x)),(0,0))+((y,\delta(y)),(0,0))((y',\delta(y')),(0,0))+((x',\delta(x')),(0,0)) \\
= \;& ((x,\delta(x)),(0,0))((y',\delta(y')),(0,0))+((y,\delta(y)),(0,0))((x',\delta(x')),(0,0))+ \\
& ((x,\delta(x)),(0,0))((x',\delta(x')),(0,0))+((y,\delta(y)),(0,0))((y',\delta(y')),(0,0)) \\
= \;& ((x,\delta(x)),(0,0))+((y,\delta(y)),(0,0))((x',\delta(x')),(0,0))+((y',\delta(y')),(0,0))
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Böyıece $h+g=t$, $h'+g'=l \in$Çeks denirse

$$\partial(t).l = tl$$

eşitliği elde edilir ki, bu da çaprazlanmış modüller için istenilen Peiffer şartı olup $CM2$ şartı sağlanır.

O halde $(\text{Ç}eks, A_1, \partial)$ bir çaprazlanmış modüldür. □

BÖLÜM 4

2-CEBİR REPRESENTASYONU

Değişmeli $k-$cebirlerin herhangi bir (G,C,∂) çaprazlanmış modülünden, bölüm 3 de tanımlanan $\mathcal{M}(\delta) = (\{\underline{\delta}\}, M(\delta), \underline{\delta} \rtimes M(\delta))$ çarpım $2-$cebirinden elde edilen (Çeks, $M(\delta), \partial'$) çaprazlanmış modülüne bir çaprazlanmış modül morfizmi yazılabilir ve bu çaprazlanmış modüllerin her ikisi de aslında $2-$cebirlere karşılık geldiğinden, bu çaprazlanmış modül morfizmi de aslında bir $2-$funktora karşılık gelir.

$2-$cebirlerin representasyonunu herhangi bir $\mathcal{G}$ $2-$cebirinden $\mathcal{M}(\delta)$ çarpım $2-$cebirine bir $2-$funktor olarak tanımlanacak,yani

$$\rho \ : \ \mathcal{G} \ \rightarrow \ \mathcal{M}(\delta)$$

$2-$funktoruna $\mathcal{G}$ $2-$cebirinin representasyonu denilecektir.

(G,C,∂) değişmeli $k-$cebirlerin bir çaprazlanmış modülü olsun. Bir $2-$cebir, tek objeli olan ve $1-$morfizmleri ile $2-$morfizmlerinin aileleri birer $k-$cebir olan bir $2-$kategori olduğundan, (G,C,∂) çaprazlanmış modülünden elde edilen $2-$cebirini, objesi $*$ olan, $1-$morfizmlerinin $k-$cebiri C ve $2-$morfizmlerinin $k-$cebiri $G \rtimes C$ olan ve $\mathcal{G} = (\{*\}, C, G \rtimes C)$ şeklinde gösterilen bir $2-$kategori olarak alınsın.

O halde alınan $\mathcal{G} = (\{*\}, C, G \rtimes C)$ $2-$cebirinin $2-$cebir representasyonunu oluşturmak için

$$\rho \ : \ (\{*\}, C, G \rtimes C) \ \rightarrow \ (\{\underline{\delta}\}, M(\delta), \underline{\delta} \rtimes M(\delta))$$

$2-$funktorunu tanımlanmalıdır.

İlk olarak objeler için

$$\rho(*) = \underline{\delta}$$

tanımlansın. Her bir $c \in C$ $1-$morfizmi

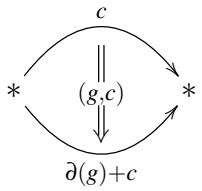
$$c : * \rightarrow *$$

biçiminde olup bunun ρ dönüşümü altındaki görüntüsü

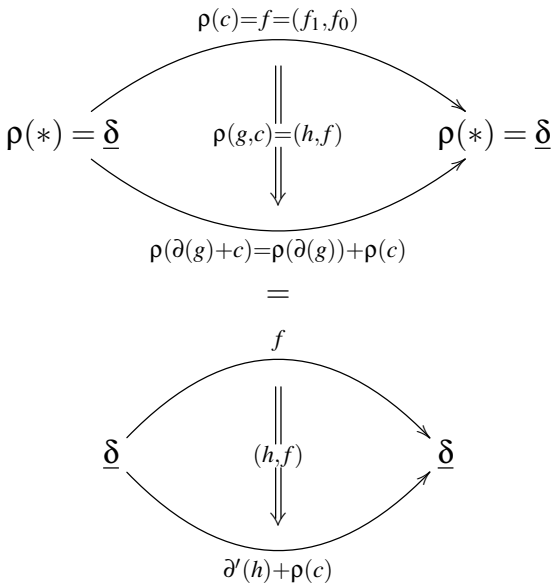
$$f = \rho(c) \quad : \quad \underline{\delta} \quad \rightarrow \quad \underline{\delta}$$

ile belirlensin. Burada $f = (f_1, f_0)$ şeklindedir.

Her bir $(g,c) \in G \rtimes C$ 2−morfizmi ise,



olup, bunun ρ dönüşümü altındaki görüntüsü de



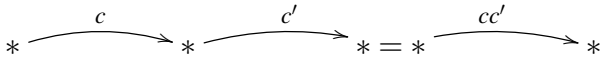
biçiminde tanımlansın. Burada

$$\begin{aligned} \rho(\partial(g)+c) &= \partial'(h)+f \\ &= \partial'(\rho(g))+f \\ &= \partial'(\rho(g))+\rho(c) \\ &= \rho(\partial(g))+\rho(c) \end{aligned}$$

şeklindedir.

Bu şekilde tanımlanmış olan $\rho : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{M}(\delta)$ dönüşümünün $2-$funktor olabilmesi için, bu dönüşüm altında $\mathcal{G}$ $2-$cebirinde mevcut olan tüm birimlerin ve tüm bileşke işlemlerin korunması gereklidir. Şimdi de bunun gösterilmesi gerekmektedir. Önce bileşke işlemlerin korunduğu gösterilsin.

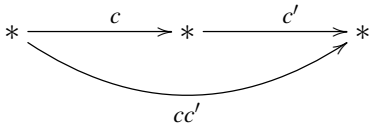
$\mathcal{G}$ nin $c, c' \in C$ $1-$morfizmlerinin bileşkesi



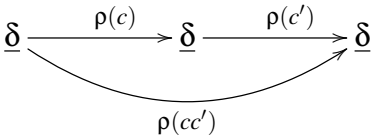
dır. Bu bileşkenin ρ altındaki görüntüsü

$$\begin{aligned} \rho(cc') &= \rho(c)\rho(c') \\ &= ff' = (f_1, f_0)(f_1', f_0') \\ &= (f_1 f_1', f_0 f_0') \end{aligned}$$

olur. Yani

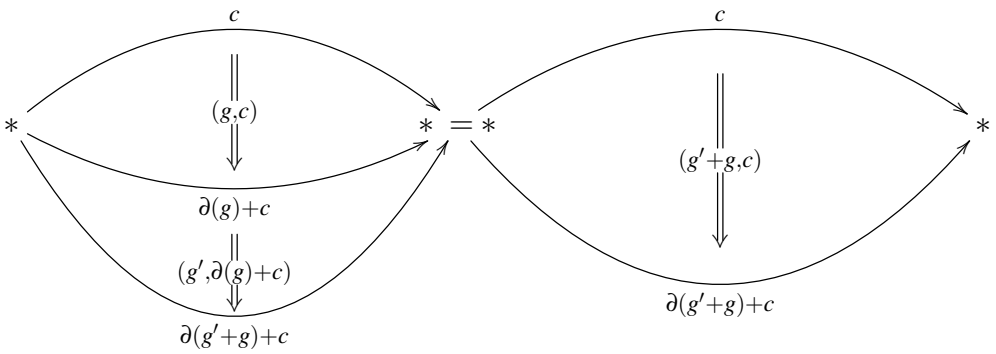


için

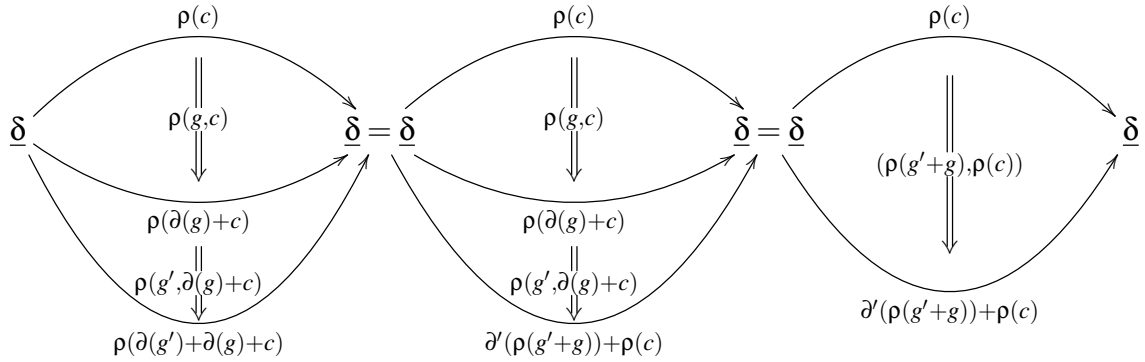


dir.

Herbir $(g,c),(g'\partial(g)+c) \in G \rtimes C$ $2-$morfizmleri için dikey bileşke



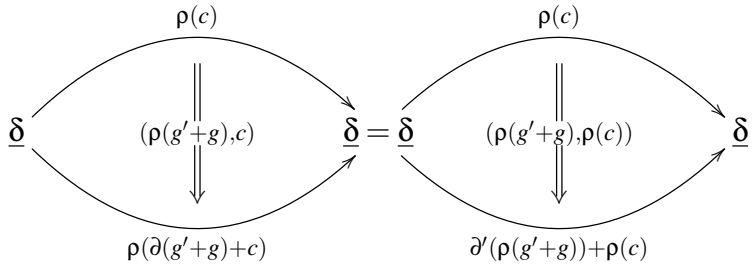
şeklinde olduğundan, bu bileşkenin ρ altındaki görüntüsü incelensin. Sol taraftaki diyagram için görüntü,



şeklindedir. Burada

$$\begin{aligned}\rho(\partial(g')+\partial(g)+c) &= \rho(\partial(g'+g)+c)\\ &= (\rho\partial)(g'+g)+\rho(c)\\ &= \partial'(\rho(g'+g))+\rho(c)\end{aligned}$$

dir. Sağ taraftaki diyagram için görüntü ise,

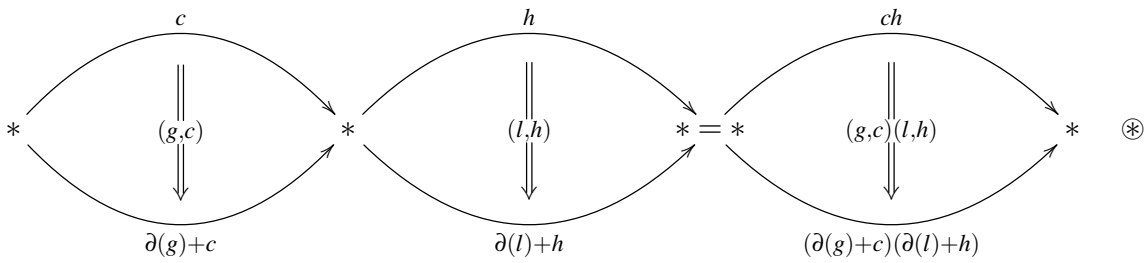


şeklindedir. Buradan, elde edilen diyagramlardan dikey bileşke için

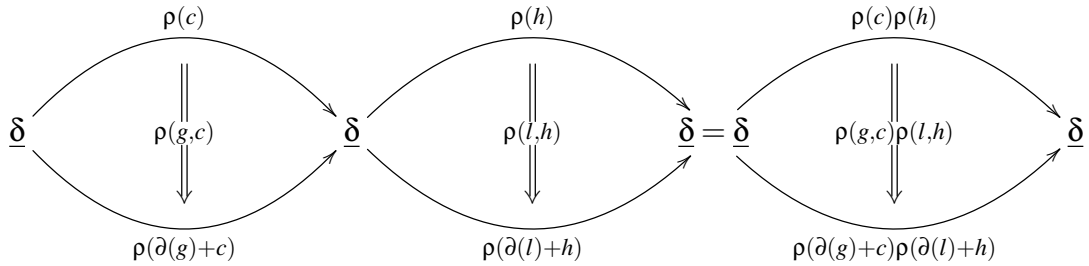
$$\rho((g,c)\bullet(g',\partial(g)+c)) = \rho(g,c)\bullet\rho(g',\partial(g)+c)$$

eşitliğinin sağlandığı görülür.

$(g,c),(l,h)\in G\rtimes C$ için yatay bileşke



biçiminde olduğundan, bu bileşkenin ρ altındaki görüntüsü incelensin. ⊛ da sol taraftaki diyagramın görüntüsü,



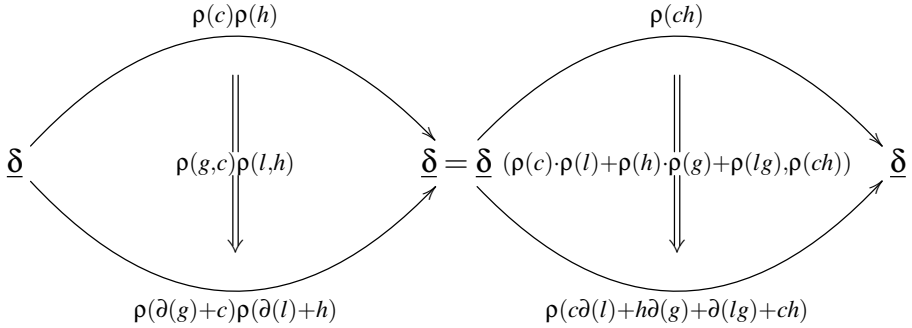
şeklindedir. Burada

$$\begin{aligned}\rho(g,c)\rho(l,h) &= (\rho(g),\rho(c))(\rho(l),\rho(h))\\ &= (\rho(c)\cdot\rho(l)+\rho(h)\cdot\rho(g)+\rho(l)\rho(g),\rho(c)\rho(h))\\ &= (\rho(c)\cdot\rho(l)+\rho(h)\cdot\rho(g)+\rho(lg),\rho(ch))\end{aligned}$$

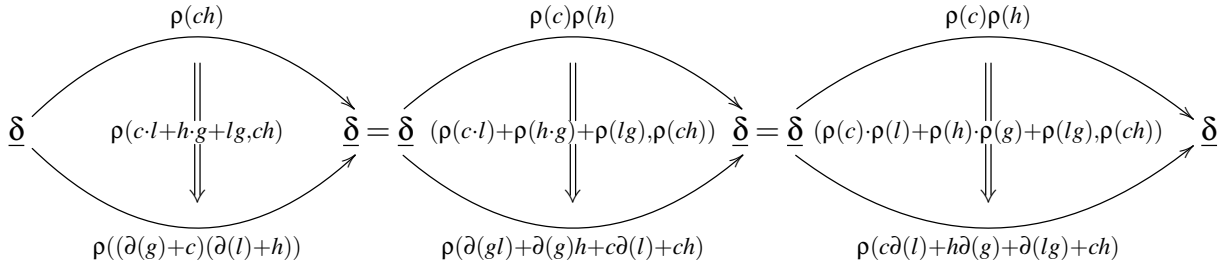
ve

$$\begin{aligned}t(\rho(g,c)\rho(l,h)) &= t((\rho(c)\cdot\rho(l)+\rho(h)\cdot\rho(g)+\rho(lg),\rho(ch)))\\ &= \partial'(\rho(c)\cdot\rho(l)+\rho(h)\cdot\rho(g)+\rho(lg))+\rho(ch)\\ &= \partial'(\rho(c)\cdot\rho(l))+\partial'(\rho(h)\cdot\rho(g))+\partial'(\rho(lg))+\rho(ch)\\ &= \rho(c)\partial'(\rho(l))+\rho(h)\partial'(\rho(g))+\partial'(\rho(lg))+\rho(ch)\\ &= \rho(c)\rho\partial(l)+\rho(h)\rho\partial(g)+\rho\partial(lg)+\rho(ch)\\ &= \rho(c\partial(l)+h\partial(g)+\partial(lg)+ch)\end{aligned}$$

olduğundan



elde edilir.Şimdi de $\circledast$ da sağ taraftaki görüntüsü ise

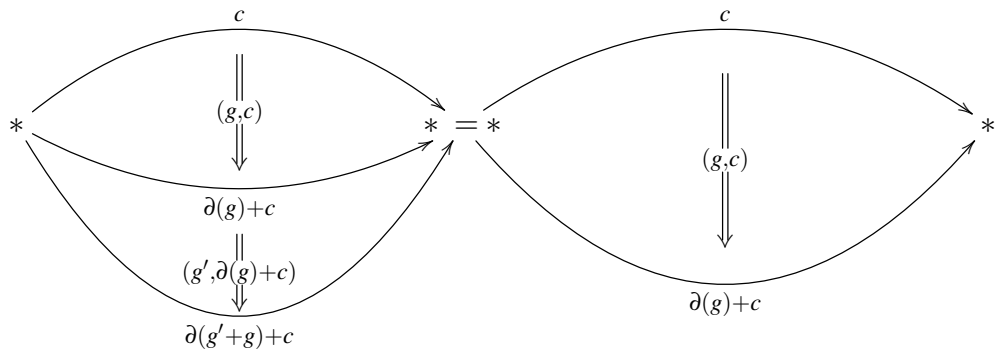


olur. Buradan elde edilen diyagramlardan yatay bileşke için

$$\rho((g,c)\circ(l,h)) = \rho(g,c)\circ\rho(l,h)$$

eşitliğinin sağlandığı görülür.

Bileşkeler için birimin korunduğu gösterilsin.



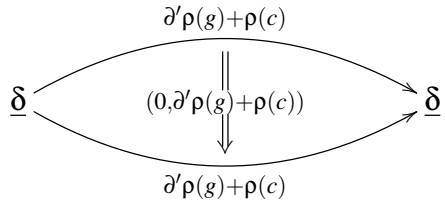
diyagramlarından

$$\begin{aligned}(g,c)\bullet(g',\partial(g)+c) &= (g'+g,c)\\ &= (g,c)\end{aligned}$$

eşitliğini sağlayan $(g',\partial(g)+c)$ $2-$morfizmi $(0,\partial(g)+c)$ olarak bulunur. Bu ise dikey kompozisyon için birimi verir. Buna göre

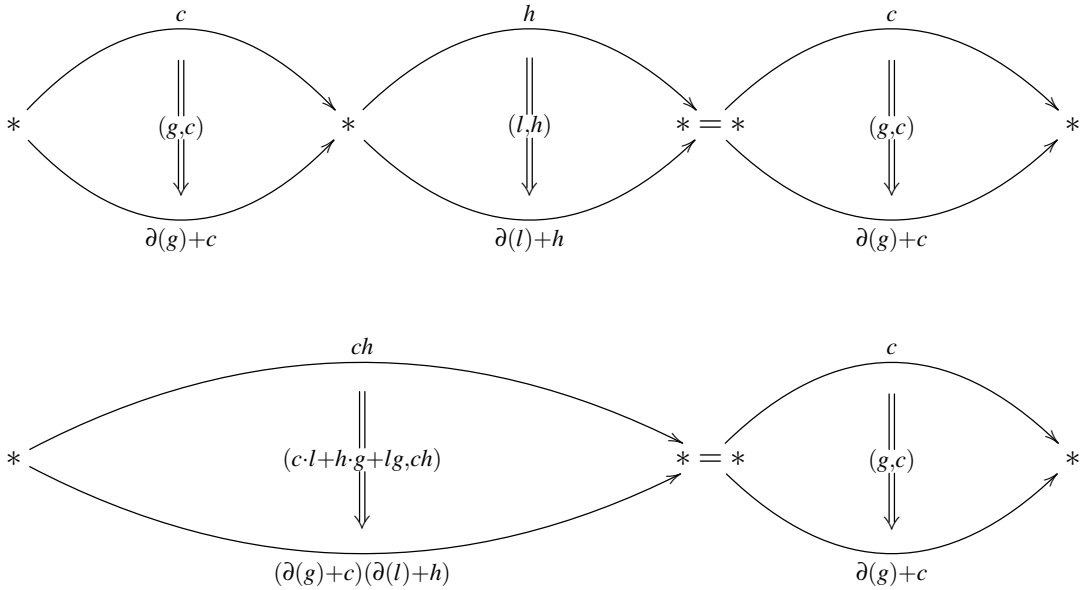
$$\begin{aligned}\rho[0,\partial(g)+c)] &= (\rho(0),\rho(\partial(g))+c))\\ &= (0,\rho(\partial(g))+\rho(c))\\ &= (0,(\partial'\rho(g))+\rho(c))\end{aligned}$$

elde edilir. Yani

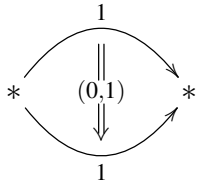


olur.

Yatay kompozisyon için birimin korunduğu gösterilsin.



eşitliklerini sağlayacak şekilde, yatay bileşke için birim



şeklinde olup, diyagramlardan

$$\begin{aligned}(g,c)\circ(l,h) &= (c\cdot l+h\cdot g+l\mathrm{g},ch)\\ &= (g,c)\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan $c \cdot l + h \cdot g + lg = g$ ve $ch = c$ olmalıdır. $ch = c$ eşitliğinden $h = 1$ olduğu görülür. Buna göre $c \cdot l + h \cdot g + lg = g$ eşitliğinde $h = 1$ yazılırsa $c \cdot l + 1 \cdot g + lg = g$ elde edilir. Bunu sağlayan l ise 0 olmalıdır. O halde yatay bileşke için birim

$$\begin{aligned} \rho(0,1) &= (\rho(0), \rho(1)) \\ &= (0,1) \end{aligned}$$

elde edilir.

O halde tanımlanan ρ dönüşümü bir $2-$funktordur. Böylece ρ $2-$funktoru en başta tanımlamak istenilen $2-$cebir representasyonu olarak karşımıza çıkar.

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

Representasyon teorisi, grup teori içinde önemli bir yere sahiptir. Representasyon sayesinde, soyut objeler üzerinde soyut işlemler yapmak yerine, permütasyon ve matris gibi objeler üzerinde daha kolay ve daha anlaşılır işlemler yapılabilir. Aynı zamanda representasyon teorisi, grup teori ile cebirin diğer alanları arasında önemli bağıntılar kurduğu gibi soyut grupların yapısının anlaşılmasına da yardımcı olur.

Yapılan bu çalışma ile 2-grupların representasyonuna paralel biçimde 2-cebirlerin representasyonu tanımlanmıştır. Bunun için bir 2-cebir örneği olan değişmeli cebirlerin çaprazlanmış modülünden faydalanılmıştır. Bu sayede representasyon kavramının 2 boyutlu cebirlere genişletilmesi sağlanmıştır.

Bu tezin sonucu olarak representasyon teori içinde yer alan bir çok önemli özellikler ve sonuçlar 2-cebirler için de incelenebilir ve bunların daha detaylı çalışmaları yapılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] Akca,İ., Arslan, U.E., *On Two Algebras.* In pereparation. 2, 9, 17

[2] Baez, J.C., Lauda, A.D., Higher Dimensional Algebra V, 2-Groups, *Theory and Applications of Categories,* Vol. 12, No.14, 2004, pp.423-491. 2, 9

[3] Baez, J.C., Crans, A.S., *Higher Dimensional Algebra VI, Lie 2-Algebras,* Theory and Applications of Categories, 12, 2004, No. 15, 492-538. 9, 13

[4] Barker,M.F., *Representations of Crossed Modules and Cat-1 groups,* Phd Thesis, 2003. 1, 2

[5] Borceux, F., *Handbook of Categorical algebra 1,* Cambridge University Press, 1994. 4

[6] Brown, R., Thickstun (eds)., *Low Dimensional Topology,* no.48, LMS Lecture Note Series, Cambridge University Press, 1982. 1

[7] Brown, R., Higher Dimensional Group Theory, 1999,. Web article, avalieble at http://www.bangor.ac.uk/mas010/hdaweb2.htm. 1

[8] Kelly, G.M., Street, R., *Review of the elements of 2-categories,* In category seminar (Proc. Sem., Sydney, 1972-1973) vol. 420 of Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1974. 4

[9] Ledermann, W., Weir, A.J., *Introduction to Group Theory,* Addison Wesley Longman, 2nd edn., 1996. 1

[10] Lue A.S.T., *Semi-complete crossed modules and holomorphs of groups,* Bull. London Math. Soc., 11 (1979), 8-16. 23

[11] Mac Lane, S., *Extension and Obstructures for Rings,* Illinois Journal of Math., 121,316-345, (1958). 23

[12] Mac Lane, S., *Categories for the working Mathematician,* 2nd. ed. vol. 5 of Graduate texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1998. 4

[13] Norrie K.J., *Actions and Automorphisms of Crossed Modules,* Bull. Soc. Math. France, 118 (1990) 129-146. 23

[14] Porter, T., *Some Categorical Results in the Theory of Crossed Modules in Commutative Algebras,* Journal of Algebra, 109 (1987) 415-429. 9, 17

[15] Porter, T., *Homology of commutative algebras and an Invariant of Simis and Vasconceles,* Journal of Algebra, 109 (1987) 458-465. 17

[16] Porter, T., *The Crossed Menagerie: An Introduction to Crossed Gadgetry and Cohomology in Algebra and Topology,* Bangor, 2012. 24

[17] Serre, J.P., *Representations Linearies des Groups Finis*, Hermann, Paris, 1971. 1

[18] Whitehead, J.H.C., *Combinatorial Group Theory II,* American Mathematical Society, 1949. 17