.

SERBEST PROFINITE GRUPLAR

Hasan SERİM

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

2006

.

FREE PROFINITE GROUPS

Hasan SERİM

Master Thesis

Mathematics Department

2006

SERBEST PROFINITE GRUPLAR

HASAN SERİM

Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Topoloji Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. İ. İlker AKÇA

Haziran-2006

Hasan SERİM in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı
″SERBEST PROFİNİTE GRUPLAR″ başlıklı bu çalışma jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye: Prof.Dr. Mahmut KOÇAK

Üye: Yrd.Doç.Dr. İ.İlker AKÇA

Üye: Yrd.Doç.Dr. Ö. Enver USLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu′ nun ..... gün ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Abdurrahman KARAMANCIOGLU
Enstitü Müdürü

ÖZET

Profinite gruplara olan ilgi ilk olarak cisimlerin sonsuz Galois genişlemelerinin Galois gruplarının çalışmalarında ortaya çıkmıştır. Aslında profinite gruplar Galois gruplarıdır ve profinite grupların bir çok uygulaması sayı teorisi ile ilgilidir. Galois grupları, Krull topolojisi olarak bilinen bir topolojiye sahiptir. Bu topoloji altında Hausdorff, kompakt ve tamamen bağlantısız olan topolojik gruplardır. Bu özellik profinite grupları karakterize eder. Profinite gruplar hakkında bilinen bir diğer gerçek de, sürekli homomorfizmler altındaki görüntüleri ile belirlenirler, yani bir profinite grup sonlu görüntülerinin ters limitidir. Bu da keyfi gruplarla olan ilişkiyi açıklamaktadır. Eğer G keyfi bir sonsuz grup ise, G nin sonlu gruplar içine tüm homomorfizmlerinin çekirdekleri G üzerindeki bir topoloji için komşulukların bir temel sistemini ve bu topolojiye göre G nin tamlaması bir topolojik grup verir. Profinite gruplar ile ilgili detaylı bilgi için [2], [3], [4], [5] e bakılabilir.

Bu çalışmada amacımız serbest gruplar hakkında bilgi vererek, bu yapının profinite ve pro-$\mathcal{C}$ gruplar üzerindeki durumunu incelemektir. Çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin geneli için gerekli ön bilgi verildi. İkinci bölümde keyfi gruplar için serbest grup yapısı ve genel özellikleri verildi. Detaylı bilgi için [1] e bakılabilir. Üçüncü bölümde ise serbest profinite grup yapısı tanıtıldı ve genel özellikleri incelendi ve son olarak serbest gruplar ile serbest profinite gruplar arasındaki ilişki incelendi.

SUMMARY

Profinite groups are objects of interest for mathematicians working in a variety of areas. For the specialist in abstract groups, they provide the means for focussing attention on properties of finite homomorphic images, and sometimes for derving strong results having no obvious connection with finite images. For the number theorist, profinite groups are the groups which arise as Galois groups of algebraic field extensions. And for the analyst, they are the quotient groups of compact Hausdorff topological groups modulo the connected component of the identity.

In this thesis we give free gruops with their main properties and we examine free profinite groups. This thesis prepared on free profinite groups consists of three chapters. In the first chapter, we give the basic concepts of profinite groups. Chapter two gives free groups. In the last chapter we examine free profinite groups and we give relations between free groups and free profinite groups.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmamı yöneten ve bu tezin hazırlanması sırasında, çalışma boyunca vakit ayırarak ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam sayın

İ. İLKER AKÇA 'ya

sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Eskişehir, 2006

İçindekiler

1 GİRİŞ **1**

1.1 **TOPOLOJİK UZAYLAR** 1

1.1.1 **TOPOLOJİK UZAYLARIN ÇARPIMI** 6

1.2 **TOPOLOJİK GRUPLAR** 8

1.3 **TERS (INVERSE) yada PROJEKTİF LİMİTLER** . 13

1.4 **PROFİNİTE GRUPLAR** 21

1.4.1 **PRO-$\mathcal{C}$ GRUPLAR** 25

2 SERBEST GRUPLAR **29**

2.0.2 **SERBEST GRUPLAR, ÜRETEÇLER VE BAĞINTILAR** 30

3 SERBEST PRO-$\mathcal{C}$ GRUPLAR **40**

3.1 **SERBEST PRO-$\mathcal{C}$ GRUPLAR** 40

Bölüm 1

GİRİŞ

Bu bölümde öncelikle topolojik uzay ve topolojik grup ile ilgili genel bir hatırlatma yapıldı ve sonra profinite gruplar ve pro-$\mathcal{C}$ gruplar tanıtılarak gerekli özellikleri incelendi. Bu bölümde vereceğimiz temel kavramlarla ilgili ayrıntılı bilgi için okuyucuya [1],[2],[3] referanslarını tavsiye ederiz.

1.1 TOPOLOJİK UZAYLAR

X bir küme ve $\mathcal{T}$ X in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa X kümesine $\mathcal{T}$ ailesi ile birlikte bir **topolojik uzay** denir.

(i) $\emptyset$ ve X, $\mathcal{T}$ ailesine aittir.

(ii)$\mathcal{T}$ ya ait olan sonlu sayıda kümenin arakesiti yine $\mathcal{T}$ ya aittir.

(iii) $\mathcal{T}$ ya ait herhangi sayıda kümenin birleşimi yine $\mathcal{T}$ ya aittir.

$\mathcal{T}$ ailesine X üzeride bir **topoloji** ve $\mathcal{T}$ nun her bir elemanına X in **açık alt kümesi** denir.

X in bir Y alt kümesi için, tümleyeni $\mathcal{T}$ ya ait oluyorsa Y ye X içinde **kapalıdır** denir. X in Y alt kümesi için, Y yi içeren bütün kapalı alt kümelerin

kesişimine Y nin $\overline{Y}$ **kapanışı** denir. Böylece $\overline{Y}$ de kapalı kümedir. Eğer X in Y alt kümesi için $\overline{Y} = X$ ise Y ye X içinde **yoğundur** denir. X in bir x elemanı için, x i içeren bir açık kümeye x elemanının bir **açık komşuluğu** denir. X in açık kümelerinin $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ kolleksiyonunu düşünelim. Eğer X in her açık alt kümesi bazı U_λ kümelerinin bir birleşimi olarak yazılabiliyorsa, $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ ailesine X üzerindeki topoloji için bir **taban** denir (ve x elemanının açık komşuluklarının bir tabanı da benzer şekilde tanımlanır). Herhangi bir X kümesi, her alt kümesi açık olan kümeler ile oluşan topolojiye göre bir topolojik uzay olarak ele alınabilir. Bu topolojiye X üzerinde **ayrık (discrete) topoloji** denir ve X e **ayrık uzay** denir.

Eğer Y, X uzayının bir alt kümesi ise U, X in açık alt kümesi olmak üzere, $Y \cap U$ formundaki tüm alt kümelerin ailesi Y üzerinde bir topoloji belirtir, bu topolojiye **alt uzay topolojisi** denir ve bu topolojiye göre Y ye X in **alt uzayı** denir.

X topolojik uzay olsun. Birleşimi X i veren X in açık alt kümelerinin herhangi bir $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ ailesi için, yine birleşimi X i veren $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}\}$ sonlu bir alt aile bulunabiliyorsa X uzayına **kompaktır** denir.

X in herhangi farklı iki x, y elemanı için $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde sırayla x ve y nin U ve V açık komşulukları bulunabiliyorsa X e **Hausdorff uzay** denir. Eğer X, Hausdorff uzayı ise her bir $x \in X$ elemanı için $\{x\}$ kapalıdır. Bir X uzayı boş olmayan iki açık alt kümesinin ayrık birleşimi olarak yazılamıyorsa, X uzayına **bağlantılıdır** denir. X uzayının her bir bağlantılı alt uzayı en çok bir elemandan oluşuyorsa X e **tamamen bağlantısızdır** denir.

Yardımcı teorem 1.1.1 *X kompakt Hausdorff uzay olsun.*

(a) *Eğer C ve D, $C \cap D = \emptyset$ olacak şekilde kapalı alt kümeler ise, $C \subseteq U$, $D \subseteq V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U ve V açık alt kümeleri mevcuttur.*

(b) *$x \in X$ olsun ve A, X uzayının x elemanını içeren hem açık hemde kapalı tüm alt kümelerinin kesişimi olsun. Bu durumda A bağlantılıdır.*

(c) *Eğer X aynı zamanda tamamen bağlantısız ise, her açık küme, hem açık hemde kapalı olan kümelerin bir birleşimidir.*

İspat: **(a)** İlk olarak her bir $c \in C$ elemanı için, $C \subseteq U_c$ ve $D \subseteq V_c$ olacak şekilde U_c ve V_c ayrık açık kümelerinin var olduğunu gösterelim. Sabit bir $c \in C$ seçelim. Her bir $d \in D$ için $c \in O_d$ ve $d \in P_d$ şeklinde O_d ve P_d ayrık açık kümeleri mevcuttur. Açıktır ki,

$$U_c = O_{d_1} \cap \ldots \cap O_{d_m}$$

ve

$$V_c = P_{d_1} \cup \ldots \cup P_{d_m}$$

kümeleri iddia edilen özelliklere sahiptir. Şimdi de c elemanı C de değişsin. X uzayı, $X \setminus C$ ile, $c \in C$ için U_c kümelerinin birleşimi olduğundan ve X kompakt uzay olduğundan öyle $c_1, c_2, \ldots, c_n \in C$ elemanları vardır ki, X, $X \setminus C$ ile $U_{c_1}, \ldots, U_{c_n}$ lerin birleşimine eşittir. O halde,

$$U = U_{c_1} \cup \ldots \cup U_{c_n}$$

ve

$$V = V_{c_1} \cap \ldots \cap V_{c_n}$$

dir.

(b) $\{C_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, $x \in X$ i içeren açık-kapalı kümelerin ailesi olsun. $A = C \cup D$ olduğunu kabul edelim. Burada C ile D, A da açık ve $C \cap D = \emptyset$ olsun. Böylece C ile D, X içinde kapalı olan A kümesinde kapalıdır ve böylece (alt uzay topolojisi tanımından) C ile D, X içinde kapalıdır. U ve V kümeleri, (a) nın koşullarını sağlayan açık kümeler olsun. $B = X \setminus (U \cup V)$ yazalım.

Kapalı kümelerin $\{B\} \cup \{C_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ ailesinin kesişimi boştur; bundan dolayı $B \cap C_{\lambda_1} \cap \ldots \cap C_{\lambda_n} = \emptyset$ olacak şekilde bir $\{C_{\lambda_1}, \ldots, C_{\lambda_n}\}$ sonlu ailesi mevcuttur. Böylece $I = C_{\lambda_1} \cap \ldots \cap C_{\lambda_n}$ kümesi $I \subseteq U \cup V$ yi sağlar ve I, $I \cap U$, $I \cap V$ ayrık kümelerinin birleşimine eşittir. Bu kümelerin her biri I içinde hem açık hemde kapalıdır. I, X içinde hem açık hemde kapalı olduğundan dolayı, $I \cap U$ ile $I \cap V$ kümeleri de X içinde hem açık hemde kapalıdır. Böylece eğer $x \in I \cap U$ ise, $A \subseteq I \cap U$ olmalıdır, o halde $D \subseteq A \cap V \subseteq U \cap V = \emptyset$ dir.

Benzer şekilde $x \in I \cap V$ ise, $C = \emptyset$ olduğu sonucuna varırız. Buna göre A bağlantılıdır.

(c) U bir açık küme ve $x \in U$ olsun. Her bir $y \in X \setminus \{y\}$ için, $x \in F_y$ ve $y \notin F_y$ yi sağlayan ve hem açık hemde kapalı olan bir F_y kümesi vardır. X, U açık kümesi ile $X \setminus F_y$ açık kümelerinin birleşimidir. Böylece $X = U \cup (X \setminus F_{y_1}) \cup \ldots \cup (X \setminus F_{y_n})$ olacak şekilde sonlu sayıda $y_1, \ldots, y_n$ elemanı mevcuttur. Böylece $F_{y_1} \cap \ldots \cap F_{y_n}$, U içindedir. Bu küme aynı zamanda X i içerir ve hem açık hemde kapalıdır. □

X ve Y birer topolojik uzay olsun. $f : X \longrightarrow Y$ dönüşümünü ele alalım. Eğer Y nin her bir U açık kümesi için $f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \in U\}$ kümesi X içinde açık ise, f ye **süreklidir** denir. Buna denk olarak, eğer Y nin her C kapalı alt kümesi için $f^{-1}(C)$, X içinde kapalı ise f ye süreklidir denir. Eğer $f : X \longrightarrow Y$ ve $g : Y \longrightarrow Z$ sürekli ise $gf : X \longrightarrow Z$ nin sürekli olduğu açıktır. Eğer $f : X \longrightarrow Y$ birebir ve örten ise $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ ters fonksiyonu tanımlıdır fakat sürekli olması gerekmez. Eğer bir f dönüşümü birebir örten ve f ile f^{-1} sürekli ise f ye **homeomorfizm** denir.

Yardımcı teorem 1.1.2 ***(a)*** *Bir Kompakt uzayın her kapalı alt kümesi kompakttır.*

(b) *Bir Hausdorff uzayın her kompakt alt kümesi kapalıdır.*

(c) *Eğer $f : X \longrightarrow Y$ sürekli ve X kompakt ise $f(X)$ kompakttır.*

(d) *Eğer $f : X \longrightarrow Y$ sürekli ve birebir örten ise, X kompakt ve Y Hausdorff ise, f bir homeomorfizmdir.*

(e) *Eğer $f : X \longrightarrow Y$ ile $g : X \longrightarrow Y$ sürekli fonksiyonlar ve Y Hausdorff ise, $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ kümesi X içinde kapalıdır.*

İspat: **(a), (b)** ve **(c)** açıktır.

(d) X in her bir kapalı alt kümesinin f altındaki görüntüsünün kapalı olduğunu göstermemiz yeterlidir. A, X in kapalı alt kümesi olsun. X hausdorff ve $A \subseteq X$ kapalı olduğundan (a) gereği kompaktır. (c) gereği $f(A) \subset Y$ kompakttır. Y Hausdorff ve $f(X)$ kompakt olduğundan (b) gereği $f(X)$ kapalıdır. O halde f homeomorfizmdir.

(e) $N = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ olsun. $g \in N$ alalım ve U ile V, $f(y)$ ve $g(y)$ yi içeren Y nin ayrık açık alt kümeleri olsun. Açıktır ki, $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ X in açık komşuluğudur ve N içinde kalır. Böylece N açık kümelerin bir birleşimidir ve bundan dolayı açıktır. O halde tümleyeni, yani $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ kümesi, X içinde kapalıdır. □

Yardımcı teorem 1.1.3 *X tamamen bağlantısız bir uzay olsun. Bu durumda her $x \in X$ için, $\{x\}$ kümesi X içinde kapalıdır.*

İspat: C, $\{x\}$ kümesinin kapanışı olsun. Eğer C, $x \in A$ olmak üzere, iki ayrık açık A ve B alt kümelerinin birleşimi ise, A C de kapalıdır. Böylece A, X de de kapalıdır. $A = C$ olduğunu göstermeliyiz. X tamamen bağlantısız olduğundan, C kapalı kümesi bağlantılıdır ve $C = \{x\}$ dir. □

p, X topolojik uzayında bir denklik bağıntısı olsun ve bölüm kümesini X/p ile gösterelim ve X den X/p ye bölüm dönüşümünü q ile gösterelim. (Böylece X/p nin elemanları, p nin denklik sınıflarıdır ve q, X in her bir elemanını denklik sınıfına resmeder). X/p nun üzerindeki bölüm topolojisi ;

$q^{-1}(V)$, X içinde açık olacak şekilde, X/p nun V alt kümelerinden oluşur. Böylece, eğer X/p üzerinde bölüm topolojisi verilirse, bölüm dönüşümü q süreklidir.

1.1.1 TOPOLOJİK UZAYLARIN ÇARPIMI

Kümelerin $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ bir ailesinin kartezyen çarpımı, $C = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ olup, bunun elemanları Λ dan $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ kümesine giden ve her bir $\lambda \in \Lambda$ için $x(\lambda) \in X_\lambda$ özelliğindeki X dönüşümleridir. C nin bu elemanlarını Λ nın elemanları ile indekslenmiş koordinatlar (girdiler) gibi düşünebiliriz. Buna göre bir eleman (X_λ) şeklinde yazılabilir, bu eleman λ yı X_λ ya dönüştüren bir fonksiyona karşılık gelir. Π_λ projeksiyon dönüşümü, C nin bir elemanını bunun λ daki değerine eşleyen dönüşümdür. Kümelerin sonlu sayıdaki $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ailesinin çarpımı $X_1 \times \ldots \times X_n$ şeklinde gösterilir.

X_λ bir topolojik uzay olsun. C üzerindeki çarpım topolojisinin açık kümeleri; n sonlu bir sayı, her bir λ_i, Λ içinde ve U_i, X_{λ_i} içinde açık olmak üzere

$$\Pi_{\lambda_1}^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap \Pi_{\lambda_n}^{-1}(U_n)$$

biçimindeki kümelerin birleşimlerinden oluşur. Böylece her bir Π_λ projeksiyon dönüşümü süreklidir. Aslında çarpım topolojisi, her bir projeksiyon dönüşümünün sürekli olduğu en dar topolojidir. I bir başka topolojik uzay ve $f : I \longrightarrow C$ bir dönüşüm olsun. f nin sürekli olması için gerek ve yeterli şart her bir $\Pi_\lambda f$ dönüşümünün sürekli olmasıdır. f sürekli ise $\Pi_\lambda f$ nin sürekli olduğu açıktır. Tersine $\Pi_\lambda f$ nin sürekli olduğunu kabul edelim. Her $i = 1, \ldots, n$ için U_i, X_{λ_i} içinde açık ise, herbir $(\Pi_{\lambda_i} f)^{-1}(U_i)$, I da açıktır. Böylece

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \Pi_{\lambda_i}^{-1}(U_i)\right) = \bigcap_{i=1}^{n} (\Pi_{\lambda_i} f)^{-1}(U_i) \tag{0.1}$$

I da açıktır. $a = (a_\lambda) \in C$ olsun ve N, a nın C de bir açık komşuluğu olsun. Böylece a yı içinde bulunduran ve N içinde kalan (0.1) formunda bir küme vardır; yani, öyle bir n tamsayısı, Λ nın $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ elemanları ve $i = 1, \ldots, n$ için X_{λ_i} nin U_i açık kümeleri vardır öyle ki herbir i için $a_{\lambda_i} \in U_i$ dir ve

$$\Pi_{\lambda_i}^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap \Pi_{\lambda_n}^{-1}(U_n) \subseteq N$$

dir. Özel olarak N

$$\{x \in C \mid \Pi_{\lambda_1}(x) = a_{\lambda_1}, \ldots, \Pi_{\lambda_n}(x) = a_{\lambda_n}\}$$

kümesini içerir.

Teorem 1.1.4 *$\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ topolojik uzayların bir ailesi ve C bunların kartezyen çarpımı olsun.*

(a) *Eğer herbir X_λ Hausdorff ise C de Hausdorfftur.*

(b) *Eğer herbir X_λ tamamen bağlantısız ise C de tamamen bağlantısızdır.*

(c) *Eğer herbir X_λ kompakt ise C de kompakttır.*

İspat: Açıktır. □

X bir küme ve $\pounds$, X in alt kümelerinin bir ailesi olsun öyle ki $A_1, A_2 \in \pounds$ ise $A_1 \cap A_2 \in \pounds$ ve $A_1 \cup A_2 \in \pounds$ olsun. $\pounds$ içinde bir süzgeç aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\digamma \subseteq \pounds$ ailesidir;

(i) Eğer A_1, $A_2 \in \digamma$ ise $A_1 \cap A_2 \in \digamma$ dir.

(ii) Eğer $A \in \digamma$ ve $A \subseteq B \in \pounds$ ise $B \in \digamma$ dir.

(iii) $\emptyset \notin \digamma$ dir.

$\pounds$ içindeki tüm süzgeçlerin kümesi kapsamaya göre kısmi sıralıdır. Böylece $\digamma_1 \subseteq \digamma_2$ ise $\digamma_1 \leq \digamma_2$ yazarız. Bu kısmi sıralı kümenin bir maksimal elemanına ultra süzgeç denir.

Yardımcı teorem 1.1.5 ***(a)*** *£ içindeki her $\digamma_0$ süzgeci bir ultra süzgeç içinde bulunur.*

(b) *Eğer $\digamma$ £ içinde bir ultra süzgeç ise ve A, B £ içinde $A \cup B \in \digamma$ olacak şekildeki kümeler ise ya $A \in \digamma$ yada $B \in \digamma$ dir.*

(c) *X bir topolojik uzay olsun. Bu durumda X in kompakt olması için gerekli ve yeterli şart, X in kapalı alt kümelerinin ailesi içindeki herbir $\digamma$ ultra süzgeci için $\cap(D \mid D \in \digamma) \neq \emptyset$ dir.*

1.2 TOPOLOJİK GRUPLAR

G bir küme olsun. G hem bir grup hem de bir topolojik uzay ise ve $G \times G \longrightarrow G$, $(x, y) \longmapsto xy^{-1}$ dönüşümü sürekli ise G ye bir **topolojik grup** denir.

Aşağıdaki yardımcı teoremde topolojik gruplar hakkındaki bazı sonuçları biraraya toplayacağız. Eğer G bir grup, g ,G nin bir elemanı ve U, V G nin alt kümeleri ise $U_g = \{ug \mid u \in U\}$, $gU = \{gu \mid u \in U\}$, $U^{-1} = \{U^{-1} \mid u \in U\}$ dır ve $UV = \{uv \mid u \in U \text{ ve } v \in V\}$ dir. Bir grubun birim elemanını 1 ile göstereceğiz.

Yardımcı teorem 1.2.1 *G bir topolojik grup olsun.*

(a) *$G \times G \longrightarrow G$, $(x, y) \longmapsto xy$ dönüşümü süreklidir ve $G \longrightarrow G$, $x \longmapsto x^{-1}$ dönüşümü bir homeomorfizmdir. Herbir $g \in G$ için, $G \longrightarrow G$, $x \longmapsto gx$ ve $x \longmapsto xg$ dönüşümleri homeomorfizmdir.*

(b) *Eğer H, G nin bir açık (yada kapalı) altgrubu ise, G içinde H nın herbir Hg yada gH koseti açık (yada kapalı) dır.*

(c) *G nin her açık altgrubu kapalıdır ve sonlu indisli her kapalı altgrubu açıktır. Eğer G kompakt ise G nin her açık alt grubu sonlu indislidir.*

(d) *Eğer H, G nin U boş olmayan bir açık alt kümesini içeren bir alt grup ise H, G içinde açıktır.*

(e) *Eğer H, G nin bir altgrubu ve K, G nin bir normal altgrubu ise, H altgrup topolojisine göre bir topolojik gruptur ve G/K bölüm topolojisine göre bir topolojik gruptur ve $g : G \longrightarrow G/K$ bölüm dönüşümü açık kümeleri açık kümelere dönüştürür.*

(f) *G nin Hausdorff olması için gerekli ve yeterli koşul $\{1\}$ in G nin bir kapalı alt kümesi olmasıdır ve eğer K, G nin bir normal altgrubu ise G/K nın Hausdorff olması için gerekli ve yeterli koşul K nin G içinde kapalı olmasıdır. Eğer G tamamen bağlantısız ise G Hausdorfftur.*

(g) *Eğer G kompakt ve Hausdorff ve C ile D kapalı kümeler ise CD kapalı kümedir.*

(h) *Kabul edelim ki G kompakt olsun ve $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ "herbir $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ için $X\mu \subseteq X_{\lambda_1} \cap X_{\lambda_2}$ olacak şekilde bir $\mu \in \Lambda$ elemanı mevcut" özelliğine sahip kapalı kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer Y, G nin bir kapalı alt kümesi ise,*

$$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right) Y = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda Y$$

dir.

İspat: **(a)** Bir X uzayından $G\times G$ ye giden bir dönüşümün sürekli olması için gerekli ve yeterli şart projeksiyon dönüşümlerinin herbirinin çarpımının sürekli olmasıdır. Böylece eğer $\theta : G \longrightarrow G$ ve $\varphi : G \longrightarrow G$ sürekli ise, $G \longrightarrow G \times G$, $x \longmapsto (\theta(x), \varphi(x))$ dönüşümü de süreklidir. İlk olarak bunu θ için $x \longmapsto 1$ sabit dönüşüm ve φ için Id_G birim dönüşüm olarak uygulayalım ve sonuçta elde edilen dönüşüm ile $G \times G \longrightarrow G$ $C : (x, y) \longmapsto xy^{-1}$ sürekli dönüşümünün birleşimini bulalım. Sonuçta $G \longrightarrow G$ $x \longmapsto x^{-1}$ elde edilir ve bu süreklidir. Böylece tersine de eşit olduğu için bir homeomorfizmdir. Böylece $(x, y) \longmapsto (x, y^{-1})$ dönüşümü süreklidir ve bunun C ile birleşimi

$(x,y) \longmapsto (x,y^{-1}) \longmapsto xy$ olup süreklidir. Şimdi θ için Id_G yi ve φ için $x \longmapsto y^{-1}$ sabit dönüşümünü alalım ve sonuçta elde edilen dönüşüm ile C nin birleşimi alalım. Bu durumda $x \longmapsto xg$ elde edilir ve bu süreklidir. Tersi de $x \longmapsto xg^{-1}$ süreklidir. $x \longmapsto xg$ dönüşümü için de benzer inceleme yapılabilir.

(b) Herbir $g \in G$ için $G \longrightarrow G$ $x \longmapsto xg$ ve $x \longmapsto gx$ dönüşümleri homeomorfizm dolayısıyla açık dönüşüm ve kapalı dönüşümlerdir. Dolayısıyla G nin herbir açık alt grubunun görüntüsü de açıktır. O halde G nin H açık altgrubunun görüntüsü Hg ve gH G nin açık altgruplarıdır. (veya kapalıdır)

(c) G nin herbir açık altgrubunun kapalı olduğunu görmek için tümleyeninin açık olduğunu göstermeliyiz. H, G nin açık altgrubu olsun.

$$G \setminus H = \cup \{Hg \mid g \notin H\}$$

dir. Böylece H açık ise Hg ler, dolayısıyla bunların birleşiminden oluşan $G \setminus H$ açıktır. O halde H kapalıdır.

Eğer H sonlu indeksli ise $G \setminus H$ sonlu sayıda kosetlerin bir birleşimidir ve böylece H kapalı ise $G \setminus H$ da kapalıdır ve H açıktır. Eğer H açık ise, Hg kümeleri açık, ayrık ve bunların birleşimi G yi verir. Böylece kompaktlık tanımından, G kompakt ise H, G içinde sonlu indekse sahip olmak zorundadır.

(d) H, G nin boş olmayan bir U açık alt kümesini içeren bir alt grup olsun. Buna göre herbir $Uh = \{uh \mid u \in U\}$ kümesi açık olup $H = \cup \{Uh \mid h \in H\}$ olduğundan H de açıktır.

(e) H hakkındaki durum açıktır.

V, G içinde açık olsun. kV, $k \in K$ için açıktır ve $V_1 = KV$ açıktır. Böylece $q(V) = q(V_1)$ ve $q^{-1}q(V_1) = V_1$ olduğundan $q(V)$, G/K içinde açıktır. Şimdi

$$m : \begin{array}{ccc} G/K \times G/K & \longrightarrow & G/K \\ (\varepsilon, \iota) & \longmapsto & \varepsilon\iota^{-1} \end{array}$$

dönüşümünün sürekli olduğunu göstermeliyiz. U, G/K da açık ve $(Kw_1, Kw_2) \in m^{-1}(U)$ olsun. q dönüşümü ile $G \times G \longrightarrow G \quad (x,y) \longmapsto xy^{-1}$, sürekli olduğundan w_1 ve w_2 nin W_1 ve W_2 açık komşulukları vardır öyle ki $W_1 W_2^{-1} \subseteq q^{-1}(U)$ dur. Böylece $q(W_1) \times q(W_2)$, (KW_1, KW_2) nin $G/K \times G/K$ de bulunan $m^{-1}(U)$ içinde bir açık komşuluğudur.

(f) Hausdorff uzayların tek elemanlı alt kümelerinin kapalı olduğunu biliyoruz. O halde $\{1\}$ kümesi kapalı ise G nin Hausdorff olduğunu göstermeliyiz. a ve b G nin farklı elemanları olsun. (a) gereği $\{ab^{-1}\}$ kapalıdır ve bundan dolayı $1 \in U$ ve $ab^{-1} \notin U$ olacak biçimde bir U açığı vardır. $(x,y) \longmapsto xy^{-1}$ dönüşümü süreklidir. Bundan dolayı U nun ters görüntüsü açıktır. Buradan $VW^{-1} \subseteq U$ olacak şekilde 1 i içeren V ve W açık kümeleri mevcuttur. Buna göre $a^{-1}b \notin VW^{-1}$ dir ve $aV \cap bW = \emptyset$ dır. aV ve bW açık olduklarından G Hausdorfftur. İkinci ve üçüncü iddia ilkinin bir sonucu olarak kolayca gösterilebilir.

g) YardımcıTeorem 1.1.2 nin sonucunu kullanacağız C , D kapalı ve G kompakt olduğundan hem C hemde D kompakttır ve böylece $(x,y) \longmapsto xy$ sürekli dönüşümü altında $C \times D$ nin görüntüsü de kompakttır. Bunun görüntüsü CD dir ve G Hausdorff olduğundan dolayı herbir kompakt küme kapalıdır. □

Yardımcı teorem 1.2.2 *G kompakt topolojik grup olsun. Eğer C, 1 i içeren hem açık hemde kapalı bir alt küme ise, C bir açık normal altgrup içerir.*

İspat: Herbir $x \in C$ için $W_x = Cx^{-1}$ kümesi 1 in bir açık komşuluğudur öyle ki $W_x x \subseteq C$ dir. $G \times G$ den G ye çarpım dönüşüm sürekli olduğundan dolayı 1 i içeren L_x ve R_x açık kümeleri vardır öyle ki $L_x \times R_x$ in görüntüsü, W_x in içinde bulunur, yani; $L_x R_x \subset W_x$ dir. $S_x = L_x \cap R_x$ diyelim, $S_x S_x \subseteq W_x$ ve S_x açıktır. C kompakttır ve $C \cap S_x x$ biçiminde açık kümelerinin birleşimine

eşittir. Böylece bu küme bu biçimdeki kümelerin sonlu tanesinin birleşimi biçiminde yazılabilir. Bunu $C \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} S_{x_i} X_i$ şeklinde gösterelim. $S = \bigcap_{i=1}^{n} S_{x_i}$ kümesi açıktır ve 1 i içerir. Bunu göre

$$SC \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} SS_{x_i} X_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i} X_i \subseteq C \tag{0.2}$$

olur, böylece $S \subseteq C$ elde edilir.

$T = S \cap S^{-1}$ olsun. Böylece T açıktır, $T = T^{-1}$ dir ve $1 \in T$ dir. $T^1 = T$ yazalım, $n > 1$ için $T^n = TT^{n-1}$ yazalım, ve $H = \bigcup_{nT^0} T^n$ yazalım. Böylece H, T tarafından üretilen gruptur ve bu açıktır. (0.2) den $n > 0$ için $T^n \subseteq C$ olduğu elde edilir. Buradan da $H \subseteq C$ elde edilir. Buna göre H, G de sonlu indekse sahiptir. Böylece G de sadece sonlu sayıda konjuge mevcuttur. Bu konjugelerin kesişimi ise C de bir açık normal alt gruptur. □

Önerme 1.2.3 *G, kompakt tamamen bağlantısız bir topolojik grup olsun.*

(a) *G içindeki her açık küme açık normal altgrupların kosetlerinin bir birleşimidir.*

(b) *G nin bir alt kümesinin hem açık hemde kapalı olması için gerekli ve yeterli şart, açık normal altgrupların sonlu sayıda kosetlerinin bir birleşimi olmasıdır.*

(c) *Eğer X, G nin bir alt kümesi ise bunun $\overline{X}$ kapanışı*

$$\overline{X} = \cap \{NX \mid N, G \text{ nin açık normal altgrubu}\}$$

şeklindedir. Özel olarak, herbir C kapalı alt kümesi için

$$C = \cap \{NC \mid N \text{ , } G \text{ nın açık normal altgrubu}\}$$

dır ve G nın açık normal altgruplarının kesişimi trivial (aşikar) altgruptur.

Yardımcı teorem 1.2.4 *$\{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ topolojik gruplar ailesi olsun ve*

$$C = \prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$$

yazalım. C de nokta çarpımı tanımlayalım. (C de her (X_λ) , (Y_λ) için $(X_\lambda)(Y_\lambda) = (X_\lambda Y_\lambda)$) Bu çarpıma ve çarpım topolojisine göre C bir topolojik grup olur.

1.3 TERS (INVERSE) yada PROJEKTİF LİMİTLER

I kısmi sıralı ve yönlendirilmiş bir indis kümesi (yani aşağıdaki özellikleri sağlayan bir kısmi sıralı küme) olsun.

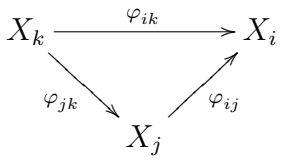
(a) $i \in I$ için $i \leq i$ dir,

(b) $i, j, k \in I$ için $i \leq j$ ve $j \leq k$ ise $i \leq k$ dir,

(c) $i, j \in I$ için $i \leq j$ ve $j \leq i$ ise $i = j$ dir,

(d) $i, j \in I$ ise $i, j \leq k$ olacak şekilde bir $k \in I$ mevcuttur.

$i \in I$ için X_i bir topolojik grup ve $i, j \in I$, $i \leq j$ için $\varphi_{ij} : X_j \longrightarrow X_i$ sürekli grup homomorfizmini göz önüne alalım. $\{X_i \mid i \in I\}$ topolojik gruplar ailesi ile, $i \in I$ için $\varphi_{ii} : X_i \longrightarrow X_i$ birim dönüşüm ve $i \leq j \leq k$, $i, j, k \in I$ için



diyagramı değişmeli yani $\varphi_{ik} = \varphi_{ij}\varphi_{jk}$ olacak şekildeki

$$\left\{\varphi_{ij} : X_j \longrightarrow X_i \mid i, j \in I, i \leq j\right\}$$

sürekli grup homomorfizmler ailesinin oluşturduğu $\{X_i, \varphi_{ij}\}$ sistemine bir **ters sistem** denir.

Ters sistem kavramı kümeler, topolojik uzaylar, topolojik halkalar vb. içinde benzer şekilde tanımlanır.

ÖRNEKLER (1) $I = \mathbb{N}$ olsun. $i \in I$ için X_i sonlu küme olsun ve herbir $i \in I$ için $\varphi_{i,i+1} : X_{i+1} \longrightarrow X_i$ keyfi dönüşüm olsun. $\varphi_{ij} = Id_{X_i}$ şeklinde tanımlayalım ve $j > i$ için $\varphi_{ij} = \varphi_{i,i+1} \circ \varphi_{i+1,i+2} \circ \ldots \circ \varphi_{j-1,j}$ şeklinde olsun. Buna göre $\{X_i, \varphi_{ij}\}$, sonlu kümelerin bir ters sistemidir.

(2) $I = \mathbb{N}$, p bir asal sayı ve her $i \in I$ için $G_i = \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ olsun. $i \leq j$ için

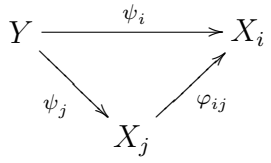
$$\varphi_{ij} : G_j \longrightarrow G_i$$

dönüşümü ise her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$\varphi_{ij}\left(n + p^j\mathbb{Z}\right) = n + p^i\mathbb{Z}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre $\{G_i, \varphi_{ij}\}$, sonlu grupların bir ters sistemidir.

$\{X_i, \varphi_{ij}\}$ topolojik grupların bir ters sistemi ve Y bir topolojik grup olsun. $i \in I$ için $\psi_i : Y \longrightarrow X_i$ sürekli grup homomorfizmlerini ele alalım. Eğer $i \leq j$ için

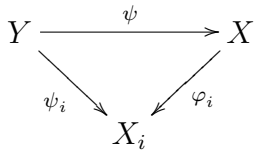


diyagramı değişmeli yani $\psi_i = \varphi_{ij}\psi_j$ oluyorsa $\{\psi_i\}_{i\in I}$ ailesine **uyumlu aile** denir.

Tanım 1.3.1 *(Ters limit)* $\{X_i, \varphi_{ij}\}$ *, topolojik gruplar ve sürekli grup homomorfizmlerinin bir ters sistemi olsun.* X *bir topolojik grup ve* $\{\varphi_i : X \longrightarrow X_i\}$

sürekli grup homomorfizmlerinin bir uyumlu ailesi olsun. Buna göre evrensel özellik dediğimiz aşağıdaki özellik sağlanıyorsa $\{X, \varphi_i\}$ *ikilisine* $\left\{X_i, \varphi_{ij}\right\}$ *ters sisteminin bir* ***ters limiti*** *denir.*

"Herbir Y *topolojik grubu ve her* $\{\Psi_i : Y \longrightarrow X_i\}$ *sürekli grup homomorfizmlerinin uyumlu aileleri için*

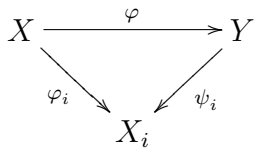


diyagramı değişmeli yani $\psi_i = \varphi_i\psi$ *olacak şekilde bir tek* $\psi : Y \longrightarrow X$ *sürekli dönüşümü mevcuttur."*

Teorem 1.3.2 $\left\{X_i, \varphi_{ij}\right\}$ *, topolojik grupların bir ters sistemi olsun. Bu durumda*

(a) $\left\{X_i, \varphi_{ij}\right\}$ *ters sisteminin bir ters limiti mevcuttur.*

(b) *Bu limit aşağıdaki anlamda tektir. Eğer* $\{X, \varphi_i\}$ *ve* $\{Y, \psi_i\}$, $\left\{X_i, \varphi_{ij}\right\}$ *ters sisteminin iki ters limiti ise, her* $i \in I$ *için*

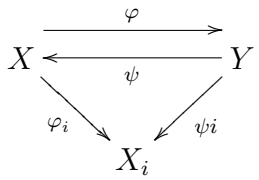


diyagramı değişmeli yani $\varphi_i = \psi_i\varphi$ *olacak şekilde bir tek* $\varphi : X \longrightarrow Y$ *topolojik izomorfizmi mevcuttur.*

İspat: **(a)** $X, \prod_{i\in I} X_i$ direkt çarpımının bir alt grubu olsun öyle ki $(x_i) \in X$ için $i \leq j$ olmak üzere $\varphi_{ij}(x_j) = X_i$ şeklinde tanımlansın. $\varphi_i : X \longrightarrow X_i$ ise $\prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_i$ izdüşüm dönüşümünün kısıtlanmışını göstersin. Buna göre,

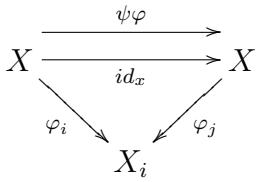
her bir φ_i nın sürekli homomorfizm ve (X, φ_i) nin ise bir ters limit olduğunu görmek kolaydır.

(b) Kabul edelim ki (X, φ_i) ile (Y, ψ_i) , $\{X_i, \varphi_{ij}\}$ ters sisteminin iki ters limiti olsun.



$\psi_i : Y \longrightarrow X_i$ dönüşümleri uyumlu dönüşümler olduğundan, (X, φ_i) ters limitin evrensel özelliği gereği, her $i \in I$ için $\varphi_i\psi = \psi_i$ olacak şekilde bir tek $\psi : Y \longrightarrow X$ sürekli homomorfizmi mevcuttur. Benzer şekilde $\varphi_i : X \longrightarrow X_i$ dönüşümleri uyumlu dönüşümler olduğundan (Y, ψ_i) ters limitin evrensel özelliği gereği; her $i \in I$ için $\psi_i Y = \varphi_i$ olacak şekilde bir tek $\varphi : X \longrightarrow Y$ sürekli homomorfizmi mevcuttur.

Şimdi şuna dikkat edelim : Her bir $i \in I$ için



diyagramı sağlanır.Yani $\varphi_i = \varphi_i Id_x$ ve $\varphi_i = \varphi_i(\Psi\varphi)$ dir. Ters limit tanımı gereği bu özelliği sağlayan sadece bir tane dönüşüm bulunmalıdır. O halde $\psi\varphi = Id_x$ olduğu söylenebilir. Böylece φ dönüşümü bir topolojik izomorfizmdir. □

Eğer $\{X_i, \varphi_{ij}\}$ bir ters sistem ise, bu sistemin ters limitini genelde

$$\varprojlim_{i \in I} X_i$$

biçiminde göstereceğiz.

Yardımcı teorem 1.3.3 *Eğer* $\{X_i, \varphi_{ij}\}$, *Hausdorff topolojik grupların bir ters sistemi ise,* $\varprojlim X_i$, $\prod_{i\in I} X_i$ *nin bir kapalı alt grubudur.*

İspat: $(X_i) \in (\Pi X_i) - \left(\varprojlim X_i\right)$ alalım. Buna göre, öyle $r, s \in I$ mevcuttur ki $r \leq s$ için $\varphi_{rs}(X_s) \neq X_r$ dir. X_r içinde $\varphi_{rs}(X_s)$ ve X_r nin, sırayla U ve V ayrık açık komşuluklarını seçelim. U', X_s içinde X_s nin bir açık komşuluğu olsun öyle ki $\varphi_{rs}(U') \subseteq U$ olsun. $i \neq r, s$ için $V_i = X_i$, $V_s = U'$ ve $V_r = V$ olmak üzere, $\prod_{i\in I} X_i$ nin $W = \prod_{i\in I} V_i$ açık alt kümesini göz önüne alalım. Buna göre $W_1 \prod_{i\in I} X_i$ içinde (X_i) nin bir açık komşuluğudur ve $\varprojlim X_i$ den ayrıktır. Her noktası için böyle bir açık komşuluk bulunabileceğinden $(\Pi X_i) - \left(\varprojlim X_i\right)$ açıktır, dolayısıyla $\varprojlim X_i$ kapalıdır. □

Önerme 1.3.4 $\{X_i, \varphi ij\}$ *bir ters sistem ve* $X = \varprojlim X_i$ *olsun.*

(a) *Her bir* X_i *Hausdorff ise,* X *de Hausdorfftur.*

(b) *Her bir* X_i *tamamen bağlantısız ise,* X *de tamamen bağlantısızdır.*

(c) *Her bir* X_i *Hausdorff ise,* $s\varprojlim X_i$, $C = \prod_{i\in I} X_i$ *içinde kapalıdır.*

(d) *Her bir* X_i *kompakt ve Hausdorff ise,* X *de kompakt ve Hausdorfftur.*

(e) *Her bir* X_i *boş olmayan kompakt Hausdorff uzay ise* X *de boş değildir.*

İspat: **(a)** Her bir X_i Hausdorff olsun. Bu durumda X_i lerin kartezyen çarpımı da Hausdorff ve $s\varprojlim X_i \subset \Pi X_i$ de Hausdorfftur. Buna göre $s\varprojlim X_i$ ye izomorf olan her X ters limiti de Hausdorff olur.

(b) Her bir X_i tamamen bağlantısız olsun. (a) daki gibi X ters limitinin tamamen bağlantısız olduğu görülür.

(c) $f, g : X \longrightarrow Y$ sürekli ve Y Hausdorff ise, $\{x \mid f(x) = g(x)\}$ kümesi X içinde kapalıdır.

$$s\varprojlim X_i = \bigcap_{j>i} \left\{c \in C \mid \varphi_{ij}\Pi_j(c) = \Pi_i(c)\right\}$$

olduğundan, (Π_i dönüşümleri projeksiyon dönüşümleridir) her bir X_i Hausdorff ise, $s\varprojlim X_i$ kapalı kümelerin kesişimidir ve $\prod_{i\in I} X_i \left(C = \prod_{i\in I} X_i\right)$ kartezyen çarpımı içinde kapalıdır.

(d) Her bir X_i Hausdorff ise (a) gereği X de Hausdorfftur.

Her bir X_i kompakt olsun. Buna göre $\prod_{i\in I} X_i$ kompakt ve $s\varprojlim X_i$, $\prod_{i\in I} X_i$ içinde kapalıdır. Kompakt uzayın kapalı alt kümesi kompakt olduğundan $s\varprojlim X_i$ kompakttır. O halde X ters limiti de kompakt olur.

(e) $i < j$ için $D_{ij} = \left\{c \in C \mid \varphi_{ij}\Pi_j(c) = \Pi_i(c)\right\}$ diyelim. Her bir D_{ij} kapalıdır ve C kompakttır. $s\varprojlim X_i = \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda bazı n tamsayıları ve $i_r, y_r \in I$ için $\bigcap_{r=1}^{n} D_{i_r y_r} = \emptyset$ olur.

I yönlendirilmiş olduğundan her r için $k \geq j_r$ olacak şekilde bir $k \in I$ bulabiliriz. $x_k \in X_k$ seçelim ve $l \leq k$ için $X_l = \varphi_{lk}(X_k)$ diyelim ve X_l yi I nın diğer tüm elemanları için keyfi olarak tanımlayalım. Kartezyen çarpımı (x_i) elemanı $\bigcap_{r=1}^{n} D_{ir}j_i$ içinde bulunur. Bu ise çelişkidir. O halde $s\varprojlim X_i \neq \emptyset$ dır ve buna göre X ters limiti de boş olmaz. □

Önerme 1.3.5 *$\{X, \varphi_i\}$, boş olmayan kompakt Hausdorff uzaylar $\left\{X_i, \varphi_{ij}\right\}$ ters sisteminin bir ters limiti olsun. Bu göre,*

(a) *Her bir $i \in I$ için $\varphi_i(X) = \bigcap_{i\leq j} \varphi_{ij}(X_j)$ dir.*

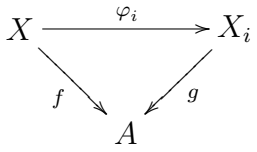
(b) *$i \in I$ ve U X_i içinde açık olmak üzere $\varphi_i^{-1}(U)$ kümeleri, X üzerindeki topoloji için bir taban oluşturur.*

(c) *Eğer Y, her i için $\varphi_i(Y) = X_i$ olacak şekilde X in bir alt kümesi ise Y, X içinde yoğundur.*

(d) *Eğer θ, Y den X e giden bir dönüşüm ise, θ nın sürekli olması için gerekli ve yeterli şart $\varphi_i\theta$ nın sürekli olmasıdır.*

(e) *A bir ayrık uzay olsun. Eğer $f : X \longrightarrow A$ sürekli dönüşüm ise, bazı i*

ler için



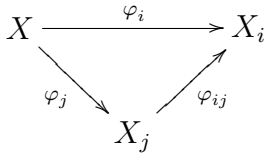
diyagramı komutatif yani

$$f = g\varphi_i$$

olacak şekilde bir $g : X_i \longrightarrow A$ *sürekli dönüşümü vardır.*

İspat: İspatı $X = s\varprojlim X_i$ için yapalım. $C = \prod_{i\in I} X_i$ diyelim ve $\Pi_i : C \longrightarrow X_i$ projeksiyon dönüşümü olup $\varphi_i : X \longrightarrow X_i$ dönüşümü $\varphi_i = \Pi_i \diagup X$ şeklinde tanımlansın.

(a) $i \leq j$ için



$\varphi_i(X) = \varphi_{ij}\varphi_j(X) \subseteq \varphi_{ij}(X_j)$ dir. Böylece $\varphi_i(X) \subseteq \bigcap_{i\leq j} \varphi_{ij}(X_j)$ dir. Şimdi i yi sabitleyelim. $a \in \bigcap_{i\leq j} \varphi_{ij}(X_j)$ seçelim ve $i \leq j$ için

$$Y_j = \left\{ y \in X_j \mid \varphi_{ij}(y) = a \right\}$$

yı oluşturalım. Böylece Y_j, kapalı bir kümenin ters görüntüsü olup X_j içinde kapalıdır ve böylece kompakttır. Eğer $i \leq j \leq k$ ve $y_k \in Y_k$ ise, $\varphi_{ij}\left(\varphi_{jk}(Y_k)\right) = \varphi_{ik}(Y_k) = a$ dır ve böylece $\varphi_{yk}(Y_k) \in Y_j$ dir. Buna göre $\{Y_j \mid i \leq j\}$ kümesi (φ_{ij} dönüşümlerinin kısıtlamalarına göre) boş olmayan kompakt Hausdorff uzayların bir ters limitidir ve $(b_j) \in s\varprojlim Y_j$ elemanı mevcuttur. O halde $i \leq j \leq k$ ise $\varphi_{jk}(b_k) = b_j$ dir ve $b_i = a$ dır. Eğer $l \in I$ ve $i \nleq l$ ise, $i \leq j$

olacak şekilde bir j bulunur ve $b_l = \varphi_{lj}(b_j)$ diyelim, bu j den bağımsızdır çünkü, aynı zamanda $i, l \leq j'$ olursa, $j, j' \leq k$ bulabiliriz ve

$$\varphi_{lj}(b_j) = \varphi_{lj}\varphi_{jk}(b_k) = \varphi_{lj'}\varphi_{j'k}(b_k) = \varphi_{lj'}(b_j)$$

olur. Şimdi $j \leq k$ olacak şekildeki j, k indis çiftleri için $\varphi_{yk}(b_k) = b_j$ olduğunu göstermek kolaydır. Böylece $b = (b_j)_{j\in I} \in \underset{\underset{j\in I}{\longleftarrow}}{s\lim} \quad Y_j \subseteq X$ dir. Buna ilaveten $\varphi_i(b) = \Pi_i(b) = a$ olup ispat biter.

(b) X deki her açık küme

$$P = X \cap \Pi_i^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap \Pi_{in}^{-1}(U_n)$$

biçimindeki açık kümelerin bir birleşimidir. Burada n bir tam sayı ve $i_1, \ldots, i_n \in I$ ve her r için $U_r, \ldots, X_{i_r}$ de açıktır.

Eğer her $a \in P$ için U, X_k da açık ve $a \in \varphi_k^{-1}(U) \subseteq P$ olacak şekilde bir $\varphi_k^{-1}(U)$ kümesi bulabilirsek istenilen gösterimiş olur. $a = (a_i)$ olsun. $i_1, i_2, \ldots, i_n \leq k$ olacak şekilde bir $k \in I$ seçelim. $\varphi_{i_r k}$ sürekli olduğundan dolayı $\varphi_{i_r k}^{-1}(U_r)$ kümesi X_k da açıktır. $i \leq k$ için $\varphi_{ik}(a_k) = a_i$ olduğundan dolayı a_k yı verir. $U = \bigcap_{r=1}^{n} \varphi_{i_r k}^{-1}(U_r)$ yazalım. Bu X_k da a_k nın bir açık komşuluğudur ve böylece $\varphi_k^{-1}(U)$ da X de a nın bir açık komşuluğudur. Buna rağmen $b = (b_i) \in \varphi_k^{-1}(U)$ ise $b_k \in U$ dir öyleki $r = 1, 2, \ldots, n$ için $b_{i_r} = \varphi_{i_r k}(b_k) \in U_r$ dir. $\varphi_k^{-1}(U) \subseteq P$ elde edilir.

(c) Her bir $i \in I$ için ve X_i deki her bir boş olmayan U açık kümesi için $\varphi_i(Y) \cap U \neq \emptyset$ dur ve böylece $Y \cap \varphi_i^{-1}(U) \neq \emptyset$ dır. (b) den Y, X de yoğundur.

(d) Eğer θ sürekli ise, her bir $\varphi_i\theta$ dönüşümünün sürekli olduğu açıktır. Her bir $\varphi_i\theta$ dönüşümü sürekli ise, her bir i için ve X_i deki her bir U açık kümesi için $\theta^{-1}\left(\varphi_i^{-1}(U)\right) = (\varphi_i\theta)^{-1}(U)$ açıktır ve (b) den θ süreklidir.

(e) f nin A_0 görüntüsü kompakt ve ayrıktır, böylece sonludur. Her bir $a \in A_0$ için $Y_a = f^{-1}(a)$ kümesi kompakt ve açıktır. Böylece bu, $\varphi_j^{-1}(U)$ temel açıklarının sonlu bir birleşimine eşittir ($j \in I$ ve U, X_j de açık). Böylece

Y_a kümeleri, bunların bazılarının birleşimine eşit olacak şekilde, sonlu tane $\varphi_{j_1}^{-1}(U_1), \ldots, \varphi_{j_n}^{-1}(U_n)$ kümeleri vardır. $r = 1, 2, \ldots, n$ için $j_r \leq k$ olacak şekilde bir k indisi seçelim. Her bir r için

$$\varphi_{y_r}^{-1}(U_r) = \varphi_k^{-1}\left(\varphi_{y_r k}^{-1}(U_r)\right)$$

dir ve böylece her bir $a \in A_0$ için $Y_a = \varphi_k^{-1}(V_a)$ dir, burada V_a, X_k nın bir açık alt kümesidir. $D = X_k \setminus \bigcup_{a \in A_0} V_a$ diyelim. Açıktır ki $D \cap \varphi_k(X) = \emptyset$ dir ve (a) dan $D \cap \left(\bigcap_{k \leq l} \varphi_{kl}(X_l) \right) = \emptyset$ dir. Böylece D ve her bir $\varphi_{kl}(X_l)$ kapalı ve X_k kompakt olduğundan

$$D \cap \varphi_{kl_i}(X_{l_1}) \cap \ldots \cap \varphi_{kl_s}(X_{l_s}) = \emptyset$$

olacak şekilde sonlu sayıda $l_1, l_2, \ldots, l_s \leq i$ seçelim. $k \leq l \leq i$ için $\varphi_{k_i}(X_i) = \varphi_{kl}\left(\varphi_{l_i}(X_i)\right) \subseteq \varphi_{kl}(X_k)$ dir ve

$$D \cap \varphi_{ki}(X_i) = \emptyset$$

ve

$$\varphi_{k_i}(X_i) \subseteq \bigcup_{a \in A_0} V_a$$

dır. Her bir a için $W_a = \varphi_{k_i}^{-1}(V_a)$ yazalım. Böylece her bir W_a, X_i de açıktır ve açıktır ki $a_1 \neq a_2$ için $W_{a_1} \cap W_{a_2} = \emptyset$ dir. $x \in X_i$ olsun. Bu durumdaki bazı a lar için $\varphi_{k_i}(x) \in U_a$ dır ve $x \in \varphi_{k_i}^{-1}(V_a) = W_a$ dır. Böylece $X_i = \bigcup_{a \in A_0} W_a$ dır ve her W_a aynı zamanda kapalıdır. Böylece her $a \in A_0$ için W_a yı a ya dönüştüren $g : X_i \longrightarrow A$ dönüşümü süreklidir ve $f = g\varphi_i$ sağlanır. □

1.4 PROFİNİTE GRUPLAR

P bir topolojik grup olsun. Eğer P sonlu P_i gruplarının ters sisteminin bir ters limiti oluyorsa, yani

$$P = \varprojlim P_i$$

ise P ye bir **profinite grup** denir.

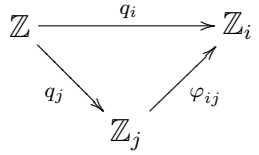
ÖRNEK: $I = \{1, 2, 3, 4\}$ alalım. I üzerindeki sırayı "$i, j \in I$ için $i \leq j \Longleftrightarrow i \diagup j$ " bağıntısı ile tanımlayalım. Buna göre I yönlendirilmiş kısmi sıralı kümedir. $\mathbb{Z}$, üzerinde ayrık topoloji ile birlikte bir topolojik gruptur. $i \in I$ için $i\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ nin normal altgrubudur. Ayrıca $i\,\mathbb{Z}$ üzerindeki topoloji de ayrık topolojidir. Buna göre $\mathbb{Z} \diagup i\mathbb{Z}$ bölüm grubunu oluşturabiliriz. Bunun üzerindeki topoloji ise

$$\begin{array}{rccc} q_i : \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \diagup i\mathbb{Z} \\ z & \longmapsto & z + i\mathbb{Z} \end{array}$$

dönüşümü ile elde edilen $\tau_{\mathbb{Z} \diagup i\mathbb{Z}} = \left\{U : q_i^{-1}(U) \in \tau_{\mathbb{Z}}\right\}$ şeklindeki sonuç topolojisidir. Her $i \in I$ için q_i dönüşümü süreklidir. $i, j \in I$ için $i \leq j$ için $i \diagup j$ oluduğundan

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{ij} : & \mathbb{Z} \diagup j\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \diagup i\mathbb{Z} \\ & z + j\mathbb{Z} & \longmapsto & z + i\mathbb{Z} \end{array}$$

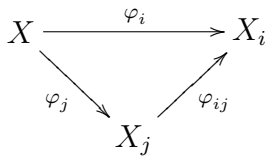
dönüşümü vardır. Bu dönüşüm homomorfizmdir. $\mathbb{Z} \diagup i\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}i$ olduğundan $\mathbb{Z} \diagup i\mathbb{Z}$ yerine $\mathbb{Z}i$ alalım. Ayrıca evrensellik özelliğinden,



diyagramı komütatiftidir. Yani $q_i = \varphi_{ij} q_j$ dir. q_i ve q_j dönüşümleri sürekli olduğundan φ_{ij} de süreklidir. Buna göre $i \leq j$ için φ_{ij} dönüşümü sürekli homomorfizmdir. O halde $i \in I$ için $\mathbb{Z}i$ topolojik grupları ile, $i \leq j$ için yukarıdaki gibi tanımlı φ_{ij} sürekli homomorfizmlerinin oluşturduğu $\left\{\mathbb{Z}i, \varphi_{ij}\right\}$ ailesi bir ters sistemdir.

$$C = \prod_{i \in I} \mathbb{Z}i = \mathbb{Z}_1 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$$

çarpımını ele alalım. Bu çarpım üzerinde çarpım topolojisi mevcuttur. $i, j \in I$, $i \leq j$ için,



diyagramına $\Pi_i(c) = \varphi_{ij}\Pi_j(c)$ özelliğini sağlayan $c \in C$ elemanlarının kümesi

$$\begin{aligned} X &= \left\{c \in C \mid \Pi_i(c) = \varphi_{ij}\Pi_j(c), i, j \in I, i \leq j\right\} \\ &= \left(\overline{0},\overline{0},\overline{0},\overline{0}\right), \left(\overline{0},\overline{0},\overline{0},\overline{2}\right), \left(\overline{0},\overline{0},\overline{1},\overline{0}\right), \left(\overline{0},\overline{0},\overline{1},\overline{2}\right), \left(\overline{0},\overline{0},\overline{2},\overline{0}\right), \left(\overline{0},\overline{0},\overline{2},\overline{2}\right), \\ &\quad \left(\overline{0},\overline{1},\overline{0},\overline{1}\right), \left(\overline{0},\overline{1},\overline{0},\overline{3}\right), \left(\overline{0},\overline{1},\overline{1},\overline{1}\right), \left(\overline{0},\overline{1},\overline{1},\overline{3}\right), \left(\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{1}\right), \left(\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3}\right)\} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. O halde X, $\left\{\mathbb{Z}i, \varphi_{ij}\right\}$ ters sisteminin bir ters limitidir. Yani

$$\varprojlim \mathbb{Z}i = X$$

olur. Ayrıca $\mathbb{Z}i$ ler sonlu gruptur. Buna göre X bir profinite gruptur.

Önerme 1.4.1 *X kompakt, Hausdorff ve tamamen bağlantısız olan bir uzay olsun. Bu durumda X, X in ayrık bölüm uzaylarının oluşturduğu bir ters sistemin ters limitidir.*

İspat: I, X in sonlu sayıdaki açık ve kapalı alt kümelerinin tüm parçalanışlarının kümesi olsun. Her $i \in I$ için X_i, karşılık gelen bölüm grubu olsun (elemanları i parçalanışının açık ve kapalı kümeleridir) ve $q_i : X \longrightarrow X_i$, X den X_i ye giden bölüm dönüşümü olsun. Böylece X_i kümeleri bölüm topolojisine göre ayrık olan X in bölüm uzaylarıdır.

$i \leq j$ olması için gerekli ve yeterli koşul için $q_{ij}q_j = q_i$ eşitliğini sağlayacak şekilde bir $q_{ij} : X_j \longrightarrow X_i$ dönüşümünün varlığını yazalım. Bu q_{ij} dönüşümü

tek şekilde bellidir çünkü q_j örtendir. I nın kısmi sıralı küme olduğu açıktır. Eğer

$$i = \{U_r \mid 1 \leq r \leq m\}$$

ve

$$j = \{V_s \mid 1 \leq s \leq n\}$$

I nın elemanları ise, bu durumda

$$\{U_r \cap V_s \mid 1 \leq r \leq m, 1 \leq s \leq n\}$$

$i, j \leq k$ olacak şekilde bir k elemanıdır ve böylece I yönlendirilmiş bir küme olur. Her bir q_{ij} dönüşümü tek şekilde belli olduğundan (X_i, q_{ij}), uyumlu dönüşümler ailesidir. $Y = \varprojlim X_i$ olsun ve $\widehat{q_i} = Y \longrightarrow X_i$, her bir i için izdüşüm fonksiyonu olsun. Ters limitin evrensel özelliği gereği her i için

$$\widehat{q_i}\upsilon = q_i$$

olacak şekilde bir $\upsilon : X \longrightarrow Y$ sürekli dönüşümü vardır. Eğer x_1, x_2 ; $\upsilon(x_1) = \upsilon(x_2)$ olacak şekildeki X in elemanları ise her i için $q_i(x_1) = q_i(x_2)$ dir. Buna göre x_1, x_2 nin sadece birini içeren hiçbir açık-kapalı küme yoktur. Böylece X tamamen bağlantısız olduğundan $x_1 = x_2$ dir. Buna göre υ birebirdir. Her bir q için

$$\widehat{q_i}(\upsilon(X)) = q_i(X) = X_i$$

olduğundan $\upsilon(X)$, Y içinde yoğundur. υ sürekli X kompakt ve Y Hausdorff olduğundan $\upsilon(X)$ kapalıdır ve böylece υ örtendir. Buna göre υ homeomorfizmdir. □

G bir topolojik grup olsun. Eğer H, G nin bir kapalı altgrubu ise bunu $H \leq G$ ile, N , G nin açık normal altgrubu ise bunu $N \lhd_0 G$ ile göstereceğiz.

I keyfi bir G grubunun normal altgruplarının ailesi olsun. Eğer her bir $K_1, K_2 \in I$ için $K_3 \subseteq K_1 \cap K_2$ olacak şekilde en az bir $K_3 \in I$ altgrubu mevcutsa I ya bir **süzgeç tabanı** denir.

Teorem 1.4.2 *G bir topolojik grup olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.*

(1) *G profinite gruptur.*

(2) *G, sonlu grupların bir kartezyen çarpımının bir kapalı altgrubuna izomorftur.*

(3) *G kompakttır ve $\cap\{N \mid N \lhd_0 G\} = 1$ dir.*

(4) *G kompakt, Hausdorff ve tamamen bağlantısızdır.*

1.4.1 PRO-$\mathcal{C}$ GRUPLAR

$\mathcal{C}$, sonlu grupların boş olmayan bir sınıfı olsun (bunun anlamı, $\mathcal{C}$ ye ait grupların tüm izomorf görüntüleri yine $\mathcal{C}$ ye ait). $\mathcal{C}$ içindeki G_i gruplarının bir $\{G_i, \varphi_{ij}\}$ ters sisteminin

$$G = \varprojlim G_i$$

ters limitine, **pro-$\mathcal{C}$ grup** denir. Her bir G_i grubunun ayrık topolojiye sahip olduğunu kabul ediyoruz. Bu şekilde tanımlanan bir pro-$\mathcal{C}$ grubunu, topolojik grup gibi düşünebiliriz. Üzerindeki topoloji ise ΠG_i üzerindeki çarpım topolojisinden indirgenen topolojidir.

Eğer her $G \in \mathcal{C}$ ve $H \leq G$ için $H \in \mathcal{C}$ oluyorsa, $\mathcal{C}$ sınıfına alt gruplara göre kapalıdır denir. Eğer bir $\mathcal{C}$ sınıfı altgruplara göre kapalı ise, $\mathcal{C}$ deki grupların bir ters sisteminin ters limiti bir pro-$\mathcal{C}$ gruptur.

G grup, $\{G_j \mid j \in J\}$ grupların bir ailesi olsun. Eğer her bir $j \in J$ için $\bigcap_{j \in J} N_j = 1$ ve $G/N_j \cong G_j$ olacak şekilde, G nin normal alt gruplarının

bir $\{N_j \mid j \in J\}$ ailesi mevcutsa, G grubuna $\{G_j \mid j \in J\}$ gruplar ailesinin bir altdirekt çarpımı denir. Eğer G, $\{G_j \mid j \in J\}$ gruplarının bir altdirekt çarpımı ise, bu durumda G nin $\prod_{j \in J} G_j$ direkt çarpımının bir alt grubuna izomorf olacağı açıktır.

Pro-$\mathcal{C}$ grupların özellikleri, $\mathcal{C}$ sınıfının özelliklerine bağlı olarak değişmektedir.

(C1) $\mathcal{C}$, altgruplara göre kapalıdır.

(C2) $\mathcal{C}$, bölme altında kapalıdır, yani ; eğer $G \in \mathcal{C}$ ve $K \lhd G$ normal altgrup ise, $G/K \in \mathcal{C}$ dir.

(C3) $\mathcal{C}$, sonlu dierkt çarpımlar altında kapalıdır yani $i = 1, 2, \ldots, n$ için $G_i \in \mathcal{C}$ ise

$$\prod_{i=1}^{n} G_i \in \mathcal{C}$$

dir.

(C4) G bir sonlu grup, N_1 ile N_2, G nin G/N_1,$G/N_2 \in \mathcal{C}$ olacak şekildeki normal altgrupları ise, $G/N_1 \cap N_2 \in \mathcal{C}$ dir. Buna denk olarak, $\mathcal{C}$ sonlu altdirekt çarpımlar altında kapalıdır yani $G_i \in \mathcal{C}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ve G , $G_1, \ldots, G_n$ lerin bir altdirekt çarpımı ise, $G \in \mathcal{C}$ dir.

(C5) $\mathcal{C}$, genişlemeler altında kapalıdır, yani eğer

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} H \longrightarrow 1$$

grupların kısa tam dizisi ise (φ momomorfizm (birebir), ψ epimorfizm (örten)) ve($m\varphi = Ker\psi$) ve $K, H \in \mathcal{C}$ ise $G \in \mathcal{C}$ dir.

Buna göre

$$\begin{aligned} (C1) + (C3) &\implies (C4) \\ (C4) &\implies (C3) \\ (C5) &\implies (C3) \end{aligned}$$

dir.

BAZI ÖZEL PRO-C GRUPLAR

(a) $\mathcal{C}$, tüm sonlu grupların sınıfı: $\mathcal{C}$ tüm (C1)-(C5) koşullarını sağlar, bu durumda pro-$\mathcal{C}$ gruba profinite grup denir. Her pro-$\mathcal{C}$ grup aynı zamanda profinite gruptur.

(b) $\mathcal{C}$, sonlu devirli grupların sınıfı: $\mathcal{C}$, (C1) ve (C2) koşullarını sağlar, fakat (C3), (C4) ve (C5) koşullarını sağlamaz. Bu durumda pro-$\mathcal{C}$ grubuna pro-devirli (procyclic) grup denir.

(c) $\mathcal{C}$, sonlu solvable (çözülebilir) grupların sınıfı: $\mathcal{C}$, (C1)-(C5) koşullarını sağlar. Bu durumda pro-$\mathcal{C}$ grubuna pro-solvable grup denir.

(d) $\mathcal{C}$, sonlu abelyan gruplar sınıfı: $\mathcal{C}$, (C1)-(C4) koşullarını sağlar, fakat (C5) koşulunu sağlamaz. Bu durumda pro-$\mathcal{C}$ grubuna pro-abelyan grup denir.

(e) $\mathcal{C}$, sonlu nilpotent grupların sınıfı: $\mathcal{C}$, (C1)-(C4) koşullarını sağlar, fakat (C5) i sağlamaz. Bu durumda pro-$\mathcal{C}$ grubuna pro-nilpotent grup denir.

(f) $\mathcal{C}$, p asal sayı olmak üzere sonlu p-gruplar sınıfı: $\mathcal{C}$, (C1)-(C5) koşullarını sağlar. Bu durumda pro-$\mathcal{C}$ grubuna pro-p grup denir.

Sonlu grupların boş olmayan bir $\mathcal{C}$ sınıfı eğer (C2) ve (C4) koşullarını sağlıyor ise, buna bir formasyon denir. Sonlu grupların boş olmayan bir $\mathcal{C}$ sınıfı eğer (C1)-(C3) koşullarını sağlıyorsa, buna bir variyete denir. Normal altgruplar ve genişlemeler altında kapalı olan bir formasyona NE-formasyonu denir. Genişlemeler altında kapalı olan bir variyeteye ise, genişlemelere göre kapalı bir variyete denir.

Buna göre, bir variyete aynı zamanda bir formasyondur ve altgruplara göre kapalı olan bir formasyon aynı zamanda bir variyetedir

Yardımcı teorem 1.4.3 $\{G_i, \varphi_{ij}\}$ *sonlu grupların bir ters sistemi ve*

$$G = \varprojlim G_i$$

olsun ve

$$\varphi_i : G \longrightarrow G_i$$

izdüşüm homomorfizmleri olsun. Buna göre

$$\{S_i \mid S_i = Ker\,(\varphi_i)\}$$

G içinde 1 birim elemanının açık komşuluklarının bir temel sistemidir.

Teorem 1.4.4 *C, sonlu grupların bir formasyonu ve G bir topolojik grup olsun. Buna göre aşağıdaki ifadeler denktir.*

(a) *G, bir pro-C gruptur.*

(b) *G, kompakt Hausdorff ve tamamen bağlantısızdır ve G nin her bir U açık normal altgrubu için $G/U \in C$ dir.*

(c) *G kompakttır ve G nın 1 birim elemanı için U, $G/U \in C$ olacak şekildeki G nin açık normal altgrubu ve $\bigcap_{u \in U} U = 1$ olacak şekildeki açık komşuluklarının bir temel sistemini oluşturur.*

(d) *G nin 1 birim elemanı açık U komşulukların oluşturduğu $\mathcal{U}$ temel sistemine sahiptir. Her bir U, G nin normal altgrubu ve $G/U \in \mathcal{C}$ için*

$$G = \varprojlim_{u \in U} G/U$$

dir.

Bölüm 2

SERBEST GRUPLAR

V, bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

a) Eğer $(x_i)_{i\in I}$, V nin elemanlarının bir ailesi ise, i_k lar farklı indisler ve $\lambda_i \in k$ olmak üzere, $\lambda_i x_i + \ldots + \lambda_n x_{i_n}$ biçimindeki V nin herhangi bir elemanına x_i elemanlarının bir lineer kombinasyonu denir. Bunu şu şekilde de ifade edebiliriz. $(x_i)_{i\in I}$ ailesinin bir lineer kombinasyonu, sadece sonlu sayıdaki $\lambda_{i\in K}$ kat sayıları sıfırdan farklı olmak üzere, $\sum \lambda_i x_i$ toplamıdır.

b) Eğer X, V nin boş olmayan herhangi bir alt kümesi ise, X in elemanlarının tüm lineer kombinasyonlarının kümesine X in gereni denir ve bu $spanX$ ile gösterilir. $spanX$ e bazen X in lineer çekirdeği (lineer hall) denir.

V, bir vektör uzayı ve X, V nin bir alt kümesi olsun. Bu durumda $spanX$, X i içeren V nin tüm alt uzaylarının kesişimidir (böylece X i içeren V nin en küçük alt uzayıdır).

V bir vektör uzayı ve X, V nin bir alt kümesi olsun.

a) Eğer X in elemanlarının bir lineer kombinasyonu sıfır vektörüne eşit olduğunda tüm kat sayılar sıfır oluyorsa yani

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$$

iken tüm $\lambda_i = 0$ oluyorsa X kümesine free (serbest) yada lineer bağımsızdır

denir. Aksi takdirde X e lineer bağımlı denir.

b) V nin her elemanı X in elemanlarının bir lineer kombinasyonu olarak yazılabiliyorsa X kümesine V nin üreteci denir.

c) V nin her v elemanı, X in elemanlarının bir lineer kombinasyonu olarak tek şekilde yazılabiliyorsa X kümesine V nin bir tabanı denir.

2.0.2 SERBEST GRUPLAR, ÜRETEÇLER VE BAĞINTILAR

G, birim elemanı 1 olan ve $X \neq \emptyset$ kümesinin ürettiği bir grup olsun. G nin 1 den farklı tüm elemanları $n \in N$ ve $x_i \in X$ ve $\epsilon_i \in \left\{\binom{+}{-}1\right\}$ olmak üzere $x_1^{\epsilon_1}.x_2^{\epsilon_2}\dots x_n^{\epsilon_n}$ biçiminde yazılabilir. Fakat tüm bu çarpım ifadeleri G nin farklı elemanlarını temsil etmeyebilir, çünkü farklı üreteçler arasında belirli bir takım ilişkiler (bağıntılar) mevcut olabilir, örneğin $a, b, c\epsilon X$ için $a^2 = b^3$ veya $b^4 = 1$ eşitlikleri söz konusu olabilir. Ayrıca her $x \in X$ için grup aksiyomlarından elde edilen, $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$ bağıntılarıda mevcuttur, böylece her $a, b, c \in X$ için $abb^{-1}c^{-1}ca^{-1} = 1$ dir. Eğer X in elemanları arasında, grup aksiyomlarından elde edilen bağıntılardan başka hiçbir bağıntı yoksa G grubuna X üzerinde **serbesttir** *(free)* denir. Bu durumda G tam olarak 1 birim elemanından ve $x_1^{\epsilon_1}\dots x_n^{\epsilon_n}$ çarpımlarından oluşur.

Her $\emptyset \neq X$ kümesi bir serbest grubun üreteç kümesi olur ve karşı gelen serbest grup, izomorfizm farkıyla tek türlü bellidir, bu serbest grubu $F(X)$ ile göstereceğiz.

Şimdi $X \neq \emptyset$ kümesinin üzerindeki serbest grubu inşaa edelim. $\overline{X}$, $x \in X$ elemenları için, $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$ eşitliğini sağlayacak özelliklere sahip olan x^{-1} elemanlarının kümesini göstersin. Açıktır ki $X \cap X^{-1} = \emptyset$ tur. $X \cup X^{-1}$ kümesine ait elemanlarını çarpımlarının oluşturduğu kümeyi $M(X \cup X^{-1})$ ile gösterelim. $M(X \cup X^{-1})$ kümesinin her bir elemanına X üzerinde bir **kelime** *(word)* denir. $w \in M(X \cup X^{-1})$ ise $w = x_{i_1}^{\epsilon_1}x_{i_2}^{\epsilon_2}\dots x_{i_n}^{\epsilon_n}$ biçimindedir, burada

$x_{i_1} \in X$ ve $\epsilon_i \in \left\{\binom{-}{+}1\right\}$ dir. n sayısına w kelimesinin uzunluğu ve her bir $x_{i_r}^{\epsilon_r}$ ifadesine w nin harfleri denir. $w = x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}$ ve, $w' = x_{j_1}^{\epsilon_1} \dots x_{j_m}^{\epsilon_m}$ ise $w.w' = x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n} x_{j_1}^{\epsilon_1} \dots x_{j_m}^{\epsilon_m}$ dır.

Bir w kelimesinin sadeleştirilmesi söz konusudur. Eğer bir w kelimesi $1 = x_{i_r} x_{i_r}^{-1}$ yada $x_{i_r}^{-1} x_{i_r} = 1$ şeklinde çarpım içeriyorsa bu iki çarpımın yok edilmesiyle yeni w' kelimesi elde edilir. Buna w den **sadeleştirilen kelime** denir. Eğer benzer şekilde w' içinde bir sadeleştirme söz konusu ise bunda elde edilen w'' kelimesine de w' den sadeleştirilen kelime denir. Bu sadeleştirme işlemi devam edilerek en sade kelime elde edilene kadar yapılır ve bulunan w^* kelimesine, w den elde edilen en sade kelime denir.

Örneğin $w = zxx^{-1}zy^{-1}y$ olsun. $w_1 = zzy^{-1}y$ ve $w_2 = zxx^{-1}z$ kelimeleri w den sadeleştirilen kelimelerdir. Fakat en sade kelime değildir.

$w^* = zz$ kelimesi ise en sade kelimedir.

Sadeleştirme işlemi ile birbirlerinden sadeleştirilen kelimelere, yada bir takım sadeleştirme sonunda aynı kelimeye dönüşen kelimelere denktir denir ve $w \cong w'$ ile gösterilir. Ve bu bir denlik bağıntısıdır. Bir w kelimesine denk olan kelimelerin oluşturduğu kümeyi $[w]$ ile gösterelim, bu küme w nin denklik sınıfını oluşturur. Denklik sınıflarının kümesi ise $F(X)$ ile gösterilir.

u, v, w ve w' kelimeler ve $w \cong w'$ olsun. Buradan $uvw \cong uw'v$ olduğu kolayca gösterilebilir. Ayrıca $u \cong u'$ ve $w \cong w'$ ise $uw \cong u'w'$ dir. Buna göre $F(X)$ üzerinde bir çarpım işlemi

$$[u], [w] \in F(X) \text{ için } [u][w] = [u.w]$$

biçiminde tanımlanır. Bu çarplım işlemi birleşmelidir. 1 birim kelimesi mevcuttur. Ayrıca $w = x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}$ bir kelime ve $w' = (x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}) = x_{i_n}^{-\epsilon_n} \dots x_{i_1}^{-\epsilon_1}$ olup $ww' = 1$ dir ve $[w][w'] = 1$ olur. O halde $F(X)$ bir gruptur.

Buradan

$$\begin{aligned} i : X &\longrightarrow \quad F(X) \\ x &\longmapsto \quad i(x) = [x] \end{aligned}$$

dönüşümü tanımlanabilir ve $F(X)$, $i(X)$ tarafından üretilir.

Tanım 2.0.5 *X bir küme, G bir grup ve $i : X \longrightarrow G$ bir fonksiyon olsun. Eğer herbir H grubu ve $f : X \longrightarrow H$ fonksiyonu için $f = i\varphi$ olacak şekilde bir tek $\varphi : G \longrightarrow H$ homomorfizmi mevcutsa (G, i) ye X üzerinde **serbesttir** denir.*

Teorem 2.0.6 *$(F(x), i)$, X üzerinde serbesttir.*

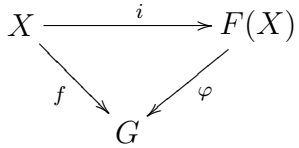
İspat: G bir grup ve $f : X \longrightarrow G$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu yardımıyla

$$\begin{aligned} M(X \cup \overline{X}) &\longrightarrow G \\ x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n} &\longmapsto f(x_{i_1})^{\epsilon_1} \dots f(x_{i_n})^{\epsilon_n} \end{aligned}$$

biçiminde bir fonksiyon tanımlanabilir. Eğer w' kelimesi w kelimesinden sadeleştirilen bir kelime ise w ile w' aynı görüntüye sahiptir. Buna göre $w \cong w''$ ise w ile w'' de aynı görüntüye sahiptir. Böylece $F(x)$ den G ye bir φ fonksiyonu, $\varphi[w]$ nü w nin görüntüsünü karşı getirilerek tanımlanabilir yani $w = x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}$ için

$$\begin{aligned} \varphi : \ F(X) &\longrightarrow G \\ [w] &\longmapsto \varphi[w] = f(x_{i_1})^{\epsilon_1} \dots . f(x_{i_n})^{\epsilon_n} \end{aligned}$$

dır. Böylece

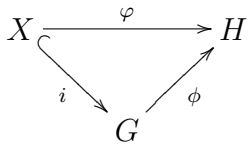


$f(x) = \varphi i(x)$ elde edilir. Ayrıca $i(x)$, $F(X)$ i ürettiğinden, $F(X)$ den G ye en çok bir tane homomorfizm mevcut olabilir. □

Önerme 2.0.7 ***(SERBEST GRUBUN EVRENSEL ÖZELLİĞİ)*** *$X \neq \emptyset$ bir küme ve $F(X)$, X üzerinde serbest grup olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa G grubu, $F(X)$ e izomorftur.*

1) *Bir $i = X \longrightarrow G$ birebir dönüşümü var öyleki $i(X)$, G yi üretir.*

2) *Herhangi bir H grubu içine dönüşen herbir $\varphi = X \longrightarrow H$ dönüşümü için*



diyagramı komütatüf yani $\phi i = \varphi$ olacak şekilde bir tek $\phi : G \longrightarrow H$ grup homomorfizmi vardır.

İspat: İlk olarak $F(X)$ in (dolayısıyla $F(X)$ e izomorf olan her grubun) belirtilen özelliklere sahip olduğunu gösterelim. (1) i sağlatmak için i dönüşümünü, içine dönüşüm almalıyız. $\varphi = X \longrightarrow H$, X den H grubuna bir dönüşüm olsun. φ yi bir

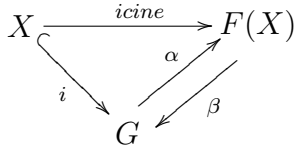
$$\phi : F(X) \longrightarrow H$$

grup homomorfizmine genişletmek için

$$\phi(1) = e \text{ ve } \phi(x_1^{\epsilon_1} \dots x_n^{\epsilon_n}) = \varphi(x_1)^{\epsilon_1} \dots \varphi(x_n)^{\epsilon_n}$$

biçiminde tanımlama yapmalıyız ki bu teklik iddiasını verir. Diğer yandan ϕ iyi tanımlı bir homomorfizmdir.

Tersine, bir G grubunun (1) ve (2) yi sağladığını kabul edelim. $F(X)$ in bu iki özelliğe sahip olduğu gerçeğini kullanarak, aşağıdaki diyagramı komütatif yapacak şekilde α ve β homomorfizmlerini bulabiliriz.



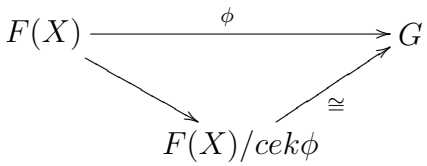
Fakat her $x \in X$ için $(\beta \circ \alpha)(x) = \beta(i(x)) = x$ ve $(\alpha \circ \beta)(i(x)) = \alpha(x) = i(x)$ dir. X, $F(X)$ i ürettiğinden ve $i(X)$,G yi ürettiğinden dolayı, bu $\beta \circ \alpha = Id_{F(x)}$ ve $\alpha \circ \beta = Id_G$ olduğunu doğrular. Böylece α ve β birbirlerinin tersi olan izomorfizmlerdir. □

Teorem 2.0.8 *Eğer bir $G = (G, \circ)$ grubu, $X \neq \emptyset$ kümesi tarafından üretilen bir grup ise, bu durumda $G, F(X)$ in bir bölümüne izomorftur.*

İspat: $F(x)$ den G ye bir ϕ dönüşümünü

$$\begin{array}{rccc} \phi: & F(X) & \longrightarrow & G \\ & 1 & \longmapsto & \phi(1) = e \\ & (x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \dots x_n^{\epsilon_n}) & \longmapsto & \phi(x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}) = x_1^{\varepsilon_1} \circ x_2^{\varepsilon_2} \dots \circ x_n^{\varepsilon_n} \end{array}$$

biçiminde tanımlayalım, böylece ϕ iyi tanımlı bir homomorfizmdir. X, G grubunu ürettiğinden dolayı ϕ örtendir. O halde 1. izomorfizm teoreminden



$$F(x) \mid_{\text{Çek}\phi} \cong G$$

dir. □

Şimdi bir G grubunun bir $X \neq \phi$ kümesi tarafından üretildiğini kabul edelim ve

$$\phi = F(x) \longrightarrow G$$

bir örten homomorfizm olsun. Eğer G içinde $x_1^{\varepsilon_1} \circ x_2^{\varepsilon_2} \circ \ldots \circ x_n^{\varepsilon_n} = e$ bağıntısı sağlanıyorsa $x_1^{\varepsilon_1} \ldots x_n^{\varepsilon_n} \in F(x)$ elemanı ϕ nin çekirdeğindedir. Böylece ϕ nin çekirdeğindeki herbir birimden farklı kelime, G nin elemanları arasında bir bağıntıyı temsil eder (bu bağıntı, $F(x)$ içinde karşı gelen kelimeler tarafından sağlanmaz).

Örneğin, her $x, y \in X$ için $xy \neq yx$ olmasına rağmen G içinde $x \circ y = y \circ x$ olur, böylece G abelyen olur. G grubunu, çekϕ nin üreteçlerinin bir Y kümesini seçerek belirleyebiliriz. Bu durumda G, $(w \in Y)$ $w = e$ bağıntılarını tanımlayarak $F(x)$ den elde edilir.

Tersine, $w = e$ $(w \in Y)$ bağıntılarını sağlayan bir $X \neq \emptyset$ kümesi tarafından üretilen en genel grubu arayalım, burada $Y \subseteq F(x)$, X üzerindeki kelimelerin verilen bir kümesidir. Öncelikle şu örneği inceleyelim.

ÖRNEK: Bir G grubu a ve b elemanlarından üretilsin ve bu elemanlar

$$a^2 = e, b^4 = e \text{ ve } bab = a$$

bağıntılarını sağlasın. Ayrıca yukarıda verilen bağıntılardan ve grup aksiyomlarından elde edilen bağıntılar dışında a ve b elemanları arasında hiç bir bağıntı olmasın. G grubunun yapısı hakkında ne söyleyebiliriz? G, a ve b elemanlarından üretildiğinden, G nin her bir elemanı, $m_i, n_i \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $a^{m_1}b^{n_1}a^{m_2}b^{n_2} \ldots a^{m_k}b^{n_k}$ biçimindedir. Verilen bağıntılardan $a^{-1} = a$ ve $b^{-1} = b^3$ elde edilir, böylece G nin herbir elemanı

$$a^{m_1}b^{n_1} \ldots a^{m_k}b^{n_k} \qquad\qquad 0 \leq m_i \leq 1, 0 \leq n_i \leq 3$$

biçimindedir. Bu elemanları yazalım.

$e, a, b, b^2, b^3, ab, ab^2, ab^3, aba, abab, abab^2, abab^3, ababa, abab^2a, abab^3a, ..., ab^2a,$
$ab^2ab, ab^2ab^2, ab^2ab^3, ab^2aba, ab^2ab^2a, ab^2ab^3a, ab^3a, ab^3ab, ab^3ab^2, ab^3ab^3, ab^3aba$
$, ab^3ab^2a, ab^3ab^3a, ..., ba, b^2a, b^3a....$

şeklindedir. Yukarıdaki bağıntılar vasıtasıyla bu elemanların bir çoğu sadeleşir. Mesela,

$$bab = a \Rightarrow b^3(bab) = b^3a \Rightarrow b^4(ab) = b^3a$$
$$\Rightarrow ab = b^3a \Rightarrow ab(b^2) = b^3ab^2$$
$$\Rightarrow ab^3 = b^2(bab)b \Rightarrow ab^2 = b^2ab$$
$$\Rightarrow ab^3 = b(bab) = ba$$
$$\Rightarrow \boxed{ab^3 = ba}$$

$$bab = a \Rightarrow ab = b^3a \Rightarrow aba = b^3a^2$$
$$\Rightarrow \boxed{aba = b^3}$$

$$bab = a \Rightarrow \boxed{ab = b^3a}$$

$$bab = a \Rightarrow ab^2 = b^3ab \Rightarrow \boxed{ab^2 = b^2a}$$

$$abab = aa = a^2 = e \Rightarrow \boxed{abab = e}$$

$$abab^2 = a(bab) = aab = b$$
$$\boxed{abab^2 = b}$$

$$abab^3 = aab^2 = b^2 \Rightarrow \boxed{abab^3 = b^2}$$

$$ababa = aaa = a \Rightarrow \boxed{ababa = a}$$

$$abab^2a = ababb^2a = b^2a = b^2a \Rightarrow \boxed{abab^3a = b^2a}$$

$$bab = a \Rightarrow ab = b^3a \Rightarrow ab^2 = b^3ab \Rightarrow ab^2 = b^2a$$
$$ab^2a = b^2aa = b^2 \Rightarrow \boxed{ab^2a = b^2}$$

$$ab^2ab = b^2b = b^3 \Rightarrow \boxed{ab^2ab = b^3}$$

$$ab^2ab^2 = b^3b = e \Rightarrow \boxed{ab^2ab^2 = e}$$

$$\boxed{ab^2ab^3 = b} \qquad \boxed{ab^2aba = b^3a = ab}$$

$$\boxed{ab^2ab^2 = a} \qquad \boxed{ab^2ab^3a = ba = ab^3}$$

$$ab^3a = baa = b \Rightarrow \boxed{ab^3a = b}$$

$$\boxed{ab^3ab = bb = b^2}$$

$$\boxed{ab^3ab^2 = b^3} \qquad \boxed{ab^3ab^3 = e}$$

$$\boxed{ab^3aba = b^2a = ab^2}$$

$\boxed{ab^3ab^2a = b^3a = ab}$

$\boxed{ab^3ab^3a = a}$

$\boxed{ba = ab^3}$ $\qquad$ $\boxed{b^2a = ab^2}$

$\boxed{b^3a = ab}$

olur. Buna göre yazılabilecek tüm terimler aşağıdaki elemanlardan birine denktir.

$$e, a, b, b^2, b^3, ab, ab^2, ab^3$$

O halde G grubu tam olarak 8 tane elemana sahiptir.

Şimdi verilen üreteç ve bağıntılarla tek şekilde belirlenen G nin grup yapısını inceleyelim.

Tanım 2.0.9 *$X \neq \emptyset$ bir küme ve $Y \subseteq F(X)$, X üzerindeki kelimelerin denklik sınıflarının bir kümesi olsun. $x \in X$ üreteçleri ve $w = e$ $(w \in Y)$ bağıntıları ile*

$$\langle X/Y \rangle = \frac{F(X)}{N(Y)}$$

şeklinde bir grup tanımlayalım, burada $N(Y)$, Y tarafından üretilen $F(X)$ in normal alt grubudur. Buna göre $\langle X/Y \rangle$ yi, $x \in X$ ve $w \in Y$ olmak üzere $xx^{-1}, x^{-1}x, w$ yada w^{-1} biçimindeki ifadelerin sadeleştirilmesi vasıtıyla elde edilen X üzerindeki kelimelerin kümesi olarak düşünebiliriz. Yani $\langle X/Y \rangle$, X tarafından üretilir ve tüm $w = e(w \in Y)$ bağıntılarını sağlar.

Teorem 2.0.10 *G, $w = e$ $(w \in Y \subseteq F(x))$ bağıntılarını sağlayacak şekilde X kümesi tarafından üretilen bir grup olsun. Bu durumda G, $\langle x/Y \rangle$ nin bir homomorf görüntüsüdür.*

İspat:

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & F(X) & \longrightarrow & G \\ & x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_n^{\varepsilon_n} & \longmapsto & x_1^{\varepsilon_1} \circ x_2^{\varepsilon_2} \circ \ldots \circ x_n^{\varepsilon_n} \end{array}$$

örten homomorfizmini ele alalım. G içinde $w = e$ $(w \in Y)$ bağıntıları sağlandığından, $Y \subseteq$çekφ dir ve böylece $N(Y) \subseteq$çekφ dir. Sonuçta

$$\begin{array}{ccccc} \langle X/Y \rangle & = F(X)/N(Y) & \longrightarrow & F(X)/\text{çek}\varphi \cong G \\ & wN & \longmapsto & w(\text{çek}\varphi) \end{array}$$

dönüşümü iyi tanımlı bir örten homomorfizmdir. Buna göre G, $\langle X/Y \rangle$ nin bir homomorf görüntüsüdür. □

Şimdi $X \neq \emptyset$ üreteç kümesi ile verilen ve $xy = yx$ $(x, y \in X)$ bağıntısını sağlayan grubu inceleyelim, bu grubu X kümesinden oluturulabilen en genel abelyen grup olarak düşünebiliriz.

Tanım 2.0.11 *$X \neq \emptyset$ bir küme ve $Y = \{xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in X\} \subseteq F(x)$ olsun. Buna göre $FA(X) = \langle X/Y \rangle$ ye X üzerinde ki* ***serbest abelyen grup*** *denir.*

$F(X)$ in Y tarafından üretilen normal alt grubu $F(X)$ in $F(X)'$ komütatör alt grubudur. Böylece

$$FA(x) = \frac{F(X)}{F(X)'}$$

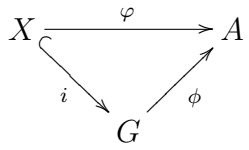
dir, bir başka değişle $FA(X)$ serbest abelyen grubu $F(X)$ serbest grubunun abelyenleştirilmesiyle elde edilir. Buna göre $FA(X)$ i, $x, y \in X$ olmak üzere, $xx^{-1}, x^{-1}x, xyx^{-1}y^{-1}$ biçimindeki elemanların sadeleştirilmesiyle elde edilen kelimelere denk olan tüm kelimelerin kümesi olarak düşünebiliriz.

Serbest gruplar için yaptığımız gibi, bir X kümesi üzerinde serbest abelyen grubu evrensel dönüşüm özelliği ile de karakterize edebiliriz.

Önerme 2.0.12 ***(SERBEST ABELYEN GRUBUN EVRENSEL ÖZELLİĞİ)*** *$X \neq \emptyset$ bir küme ve $FA(X)$, X üzerinde ki serbest abelyen grup olsun. Bir G abelyen grubunun $FA(X)$ e izomorfik olması için gerek ve yeterli şart aşağıda ki iki özelliği sağlamasıdır.*

(1) *$i = X \longrightarrow G$ birebir dönüşümü vardır öyleki $i(X)$, G yi üretir, yani X, G nin bir üreteç alt kümesi olarak ifade edilebilir.*

(2) *Bir A abelyen grubu içine herbir $\varphi = X \longrightarrow A$ dönüşümü için $\emptyset \circ i = \varphi$ olacak şekilde bir tek $\emptyset = G \longrightarrow A$ grup homomorfizmi var yani*



diyagramı komütatif $(\varphi \circ i = \emptyset)$ dir.

Bölüm 3

SERBEST PRO-$\mathcal{C}$ GRUPLAR

Serbest gruplar, grup teoride olduğu gibi profinite grup teoride de önemli bir rol oynar. Serbest profinite gruplar, tıpkı serbest gruplarda olduğu gibi evrensel özellik yardımıyla tanımlanır. Serbest grupların bütün alt grupları serbest olmasına rağmen, serbest profinite grupların keyfi alt grupların yapısını belirlemek kolay değildir. Serbest profinite grupların alt gruplarının yapısını açıklamak için bir projektif profinite grubun yapısı verilmelidir.

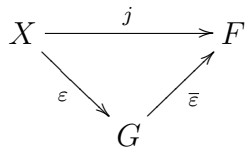
Bu bölümde $\mathcal{C}$, sonlu grupların alt gruplara ve direk çarpımlara göre kapalı olan bir sınıfını gösterecektir.

3.1 SERBEST PRO-$\mathcal{C}$ GRUPLAR

G bir profinite grup, X bir küme ve $\theta : X \longrightarrow G$ bir fonksiyon olsun. Eğer herbir $N \lhd_\circ G$ için $\{X \mid \theta(x) \notin N\}$ sonlu ise, θ fonksiyonuna 1-yakınsak fonksiyon denir. Böylece G sonlu ise, θ nın 1-yakınsak elemanı için gerek ve yeter koşul $\theta^{-1}(1)$ in X in sonlu sayıdaki elemanı dışındaki tüm elemanlarını içermesidir.

Bir X kümesi üzerindeki serbest pro-$\mathcal{C}$ grubu şu şekilde tanımlanır: X

bir küme, F bir pro-$\mathcal{C}$ grup ve $j : X \longrightarrow F$ bir 1-yakınsak fonksiyon olmak üzere eğer aşağıdaki evrensel özellik sağlanıyorsa yani " G bir profinite grup ve $\varepsilon : X \longrightarrow G$ bir 1-yakınsak fonksiyonu için



diyagramı komütatif yani $\varepsilon = \overline{\varepsilon} j$ olacak şekilde tek bir $\overline{\varepsilon} = F \longrightarrow G$ homomorfizmi mevcutsa " F ye X üzerinde serbesttir denir.

Tanımdaki yakınsaklık koşulu X üzerindeki serbest pro-$\mathcal{C}$ grubun, X in sonlu alt kümeleri üzerindeki serbest pro-$\mathcal{C}$ grupların ters limiti olmasını garantilemektedir. Sayılabilir tabanlı serbest pro-$\mathcal{C}$ gruplar sonlu üreteçli olurdu ki, birçok sayılabilir tabanlı serbest pro-$\mathcal{C}$ grupların görüntüsü olmazdı.

ÖRNEKLER:

1) X birtek x elemanını içeren bir küme olsun. Eğer G bir profinite grup ve $g \in G$ ise, $z \longrightarrow g^z$ dönüşümü $\widehat{\mathbb{Z}}$ den G ye 1 birim elemanını g ye dönüştüren biricik homomorfizmdir. Böylece $\widehat{\mathbb{Z}}$, x elemanını $\widehat{\mathbb{Z}}$ nin 1 üretecine dönüştüren dönüşüm ile birlikte X üzerinde serbest profinite gruptur.

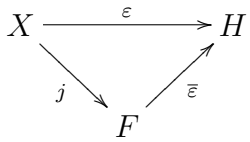
Daha genel olarak, $\mathcal{C}$ keyfi bir sınıf ise $R = \cap \left\{ N \lhd_{\circ} \widehat{\mathbb{Z}} \mid \widehat{\mathbb{Z}}/N \in \mathcal{C} \right\}$ olmak üzere $F = \widehat{\mathbb{Z}/R}$ olsun. Buna göre X elemanını $1 + R$ kosetine dönüştüren dönüşüm ile birlikte F/R, X üzerinde serbest pro-$\mathcal{C}$ gruptur.

2) $\mathcal{C}$, p bir asal sayı olmak üzere p üstel bölenlerin sonlu abelyen grupların bir sınıfı olsun. $\mathcal{C}$ içindeki herbir grup, $\mathbb{F}_p$ cismi p elemanı olan bir vektör uzayı olarak ele alınabilir. Bir X sonlu kümesi üzerindeki serbest pro-$\mathcal{C}$ grup, X den bir vektör uzayı tabanı üzerine bir bire-bir örten bir fonksiyon ile birlikte $\mathbb{F}_p$ üzerinde bir vektör uzayıdır. Böylece $\mathcal{C}$ içindeki herbir grup bir serbest pro-$\mathcal{C}$ gruptur.

Şimdi serbest pro-$\mathcal{C}$ grubun varlığını ve tekliğini gösterelim.

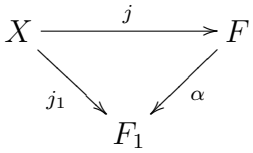
Önerme 3.1.1 ***a)*** *Bir X kümesi üzerinde, eğer varsa (F, j) serbest pro-$\mathcal{C}$ grubu izomorfizm farkıyla tektir ve $j(x)$ tarafından üretilir.*

b) *(F, J) nın X üzerinde serbest pro-$\mathcal{C}$ grup olması için gerek ve yeter koşul, bir H $\mathcal{C}$-grubu ve $\langle \varepsilon(x) \rangle = H$ olacak şekildeki 1-yakınsak $\varepsilon = X \longrightarrow H$ dönüşümü için,*



diyagramı komütatif yani $\varepsilon = \overline{\varepsilon} j$ olacak şekilde biricik (bir tek) $\overline{\varepsilon} = F \longrightarrow H$ homomorfizmi mevcut olmasıdır.

İspat: **(a)** Tekliğin gösterimi oldukça kolaydır. (F, j) ve (F_1, j_1), X üzerinde serbest olsunlar. (F, j) için evrensel özellik gereği

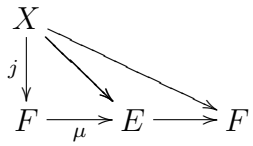


diyagramı komütatif yani $j_1 = \alpha j$ olacak şekilde bir $\alpha = F \longrightarrow F_1$ homomorfizmi mevcuttur. Benzer şekilde $j = \beta j_1$ olacak şekilde bir $\beta = F_1 \longrightarrow F$ homomorfizmide mevcuttur. Böylece

$$j = (\beta\alpha)\, j = (Id_F)\, j$$

dır. Dolayısıyla $\beta\alpha = Id_F$ dır. Benzer şekilde $\alpha\beta = Id_{F_1}$ dır. Böylece $\alpha = F \longrightarrow F_1$ bir izomorfizmdir.

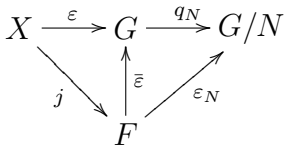
Şimdi E, $j(x)$ tarafından üretilen bir alt grup olsun. j den indirgenmiş olan X den E ye giden dönüşümü düşünerek



diyagramının solundaki üçgeni komütatif olacak şekilde bir $\mu = F \longrightarrow E$ homomorfizminin varlığı elde edilir. $j = X \longrightarrow F$ dönüşümünü ele alarakda, Id_F nın μ ile E den F ye içine dönüşümün çarpımı olduğu gösterilir. O halde $E = F$ elde edilir.

(b) Bunun için (F, j) nin ifade edilen özelliğe sahip olduğunu varsaymak ve bunun X üzerinde serbest olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak; $G \in \mathcal{C}$ ve 1- yakınsak $\varepsilon = X \longrightarrow G$ dönüşümü için $\varepsilon = \overline{\varepsilon} j$ olacak şekilde bir tek $\overline{\varepsilon} = F \longrightarrow G$ homomorfizminin var olduğunu iddia edelim. $H = \langle \varepsilon(x) \rangle$ olsun. $X \longrightarrow H$ dönüşümü için hipotez uygulandığında, $\overline{\varepsilon} j = \varepsilon$ özelliğini sağlayan, H den G ye giden içine dönüşüm ile çarpımı bir homomorfizm oluşturur. Aynı zamanda $\iota : F \longrightarrow G$ dönüşümüde $\iota j = \varepsilon$ özelliğini sağlarsa, bu durumda ιile $\overline{\varepsilon}$, $j(X)$ üzerinde çakışıktır ve F, $j(x)$ tarafından topolojik olarak üretildiğinden F üzerinde çakışıktırlar.

Şimdi, G bir pro-$\mathcal{C}$ grup olsun, herbir $N \lhd_\circ G$ için $q_N : G \longrightarrow G\,|_N$bölüm grubu olsun ve $\varepsilon : X \longrightarrow G$ dönüşümünün 1-yakınsak dönüşüm olduğunu kabul edelim. Buna göre aşağıdaki diyagramı inceleyelim;



burada, büyük üçgen komütatif olacak şekilde tek bir ε_N homomorfizmi vardır ve $\{\varepsilon_N \mid N \lhd_\circ G\}$ ailesi bir uyumlu ailedir, böylece sağ taraftaki üçgen komütatif olacak şekilde tek bir

$$\overline{\varepsilon} : F \longrightarrow G \cong \varprojlim G\,|_N$$

homomorfizmi vardır. Fakat eğer $x \in X$ ise, bu durumda

$$q_N \varepsilon (x) = \varepsilon_N j (x) = q_N \overline{\varepsilon} j (x)$$

olur böylece,

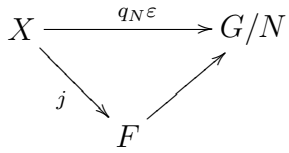
$$\varepsilon (x) (\overline{\varepsilon} j (x))^{-1} \in \cap \text{çek} q_N = 1$$

elde edilir. Buna göre $\varepsilon = \overline{\varepsilon} j$ dir.

Şimdi de $\overline{\varepsilon}$ nın, belirtilen özelliğe sahip tek homomorfizm olduğunu gösterelim. Eğer $\overline{\varepsilon_1} : F \longrightarrow G$ homomorfizmi de $\varepsilon = \overline{\varepsilon_1} j$ olacak şekildeki bir başka homomorfizm ise, bu durumda

$$q_N \overline{\varepsilon}, q_N \overline{\varepsilon_1} : F \longrightarrow G \mid_N$$

dönüşümlerinin her ikisi de



diyagramını komütatif hale getirir. Böylece, bu dönüşümler eşittir. Sonuç olarak $\cap$çek $q_N = 1$ olduğundan $\overline{\varepsilon} = \overline{\varepsilon_1}$ elde edilir. □

Şimdi serbest gruplardan yararlanarak bir serbest pro-$\mathcal{C}$ grubun varlığını gösterelim.

Önerme 3.1.2 *Bir X kümesi üzerinde, (F, j) serbest pro-$\mathcal{C}$ grubu mevcuttur.*

İspat: $G \in \mathcal{C}$ ve $\theta : X \longrightarrow G$ dönüşümü, $G = \langle \theta (x) \rangle$ olacak şekilde 1-yakınsak dönüşüm olmak üzere, (G, θ) ikililerinin sınıfını π ile gösterelim. π nin $\lambda_1 = (G_1, \theta_1)$ ve $\lambda_2 = (G_2, \theta_2)$ elemanları için, $\theta_1 = \varphi \theta_2$ olacak şekilde bir $\varphi : G_2 \longrightarrow G_1$ homomorfizmi varsa, $\lambda_1 \leq \lambda_2$ diyelim. Bu durumda φ örtendir ve $\theta_2(x)$ üreteç kümesi üzerine etkisi ile belirli olduğundan tektir. Bu dönüşümü $\varphi_{\lambda_1 \lambda_2}$ ile gösterelim.

$\leq$ bağıntısı, π üzerinde yansıyan ve geçişkendir. Buna göre "$\lambda \sim \mu$ olması için gerek ve yeter şart $\lambda \leq \mu$ ve $\mu \leq \lambda$ olmasıdır. " diyelim ve Λ, herbir denklik sınıfından bir temsilci eleman alınarak oluşturulsun. Buradan $\mathcal{C}$ içindeki grupların sadece sayılabilir sayıda izomorfizm tipleri olduğundan her bir sabit $G \in \mathcal{C}$ için, π içindeki (G, θ) ikilileri, X den G ye dönüşümlerin bir kümesi ile birebir olarak karşılık gelirler.

Buradan Λ bir kısmi sıralı küme olur, şimdi de Λ nın yönlendirilmiş küme olduğunu gösterelim. (G_1, θ_1) ve $(G_2, \theta_2) \in \Lambda$ verilsin. $G_3, G_1 \times G_2$ nın

$$\langle (\theta_1(x), \theta_2(x)) \mid x \in X \rangle$$

alt grubu olsun ve $\theta_3 : X \longrightarrow G_3$, $\theta_3(x) = (\theta_1(x), \theta_2(x))$ olarak tanımlayalım. Böylece $(G_{3,}\theta_3) \in \pi$ dır ve $G_1 \times G_2$ den G_1 ve G_2 ye giden projeksiyonların G_3 e kısıtlamaları olan p_1 ve p_2, $\theta_1 = p_1\theta_3$ ve $\theta_2 = p_2\theta_3$ eşitliklerini sağladığından dolayı

$$(G_{3,}\theta_3) \leq (G_1, \theta_1), (G_2, \theta_2)$$

elde edilir. Ayrıca $\Lambda, \lambda \sim (G_3, \theta_3)$ biçiminde ki λ elemanınıda içerir.

$\lambda \in \Lambda$ için $\lambda = (G_\lambda, \theta_\lambda)$ vasıtasıyla G_λ ve θ_λ yı tanımlayalım. G_λ grupları ve $\varphi_{\lambda\mu}$ dönüşümleri Λ ile indislenen bir ters sistem oluştururlar. Buradan,

$$(F, \varphi_\lambda) = s\varprojlim (G_\lambda, \varphi_{\lambda\mu})$$

diyelim ve $j : X \longrightarrow F$, $j(x) = (\theta_\lambda(x))$ dönüşümünü tanımlayalım. Böylece her λ için, sonlu sayıdakilerin dışında ki bütün x elemanları için $\theta_\lambda(x) = 1$ dir, böylece $\{x \mid j(x) \notin \text{çek } \varphi_\lambda\}$ sonludur. F nin her açık normal alt grubu çek φ_λ gruplarından birini içerir ve böylece j dönüşümü 1-yakınsak elde edilir.

Şimdi teoremin ifadesinden yararlanarak, F nin X üzerinde serbest pro-$\mathcal{C}$ grup olduğunu gösterelim. $\varepsilon : X \longrightarrow H$, 1- yakınsak bir dönüşüm olsun, $H \in \mathcal{C}$ ve $H = \langle \varepsilon(x) \rangle$ alalım. Böylece $(H, \varepsilon) \sim \lambda$ olacak şekilde $\lambda = (G_\lambda, \theta_\lambda)$

bulabiliriz, öyleki $\beta\theta_\lambda = \varepsilon$ olmak üzere, bir $\beta = G_\lambda \longrightarrow H$ izomorfizmi vardır ve böylece $\varepsilon = (\beta\varphi_\lambda)j$ elde edilir.

$\overline{i} = 1, 2$ için $\overline{\varepsilon_i} = F \longrightarrow H$ bir homomorfizm olmak üzere $\varepsilon = \overline{\varepsilon_i}j$ olduğunu kabul edelim. Buna göre çek$\overline{\varepsilon_i}$ açıktır ve böylece bazı $\lambda_i \in \Lambda$ için çek$\varphi\lambda_i$ leri içerir. $\mu \geqslant \lambda_1, \lambda_2$ olarak seçilirse, çek $\overline{\varepsilon_i} \geqslant$çek$\varphi_\mu$ olacak şekilde $V_i = G_\mu \longrightarrow H$ homomorfizminin var olduğunu söyleyebiliriz. $\varphi_\mu j = \theta_\mu$ olduğundan, her bir i için $V_i\theta_\mu = \overline{\varepsilon_i}j = \varepsilon$ elde edilir. Böylece, $V_i\theta_\mu = V_2\theta_\mu$ bulunur. Bunu göre V_1 ile V_2, G_μ için θ_μ (x) üreteç kümesi üzerinde çakışırlar ve sonuçta $V_1 = V_2$ ve $\overline{\varepsilon}_1 = \overline{\varepsilon}_2$ olduğu elde edilir. □

Şimdi de serbest gruplar ile serbest pro-$\mathcal{C}$ grupların ilişkisini ifade eden önermeyi inceleyelim.

Önerme 3.1.3 *E, bir X kümesi üzerinde serbest grup olsun ve*

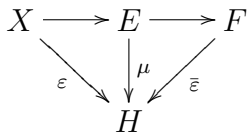
$$I = \{U \lhd E \mid E/U \in \mathcal{C},\ X\backslash U \text{ sonlu}\}$$

kümesini tanımlayalım. I ailesine göre, E nin $F = s\varprojlim(E/U)$ biçiminde tamlaması, $j : x \mapsto Ux$ dönüşümü ile birlikte X üzerinde serbest pro-$\mathcal{C}$ gruptur.

İspat: $P_U : F \longrightarrow E/_U$ dönüşümlerinin çekirdekleri $s\varprojlim(E/_U)$ içinde 1 in açık komşuluklarının bir tabanını oluşturur ve $j(x) \in$çekP_u olması için gerekli ve yeterli şart $x \in U$ olmasıdır. Buna göre j, 1-yakınsaktır. $\iota : X \longrightarrow E$ içine dönüşüm ve ε, E den E nin tamlamasına kanonik dönüşüm olmak üzere, $j = \varepsilon\iota$ dır.

$\varepsilon : X \longrightarrow H$ dönüşümü $H, \mathcal{C}$ grubuna giden bir 1-yakınsak dönüşüm olsun. Serbest grubun evrensel özelliği vasıtasıyla $\varepsilon = \mu$ olacak şekilde bir tek $\mu : E \longrightarrow H$ homomorfizmi mevcuttur. X in sonlu sayıdaki elemanı dışındaki tüm elemanları H içinde 1 e dönüştüğünden dolayı çek$\mu \in I$ elde edilir. Ve böylece, 1 in açık komşuluklarının bir tabanı olan I ya sahip E

üzerindeki topolojiye göre μ süreklidir. Buna göre F tamlamasının evrensel özelliği



komütatif diyagramını tamamlayan ve $\overline{\varepsilon} j = \varepsilon$ eşitliğini sağlayan bir $\overline{\varepsilon} : F \longrightarrow H$ dönüşümü verir. Eğer $\overline{\varepsilon}_1 : F \longrightarrow H$ dönüşümü $\overline{\varepsilon}_1 j = \varepsilon$ eşitliğini sağlayan bir homomorfizm ise, bu durumda $(\overline{\varepsilon}, \varepsilon)\, \iota = \varepsilon$ elde edilir. Böylece E nin evrensel özelliğinden $\overline{\varepsilon}_1 \varepsilon = \overline{\varepsilon}\varepsilon$ elde edilir, F nin evrensel özelliğinden ise $\overline{\varepsilon}_1 = \overline{\varepsilon}$ elde edilir. $\square$

KAYNAKLAR

[1] Spindler, K. Abstract Algebra with Applications Volume I, II. Marcel Dekker,Inc. (1994).

[2] Ribes, L., Zalesskii, P., Profinite Groups, Springer, (2000).

[3] Wilson,J.,S., Profinite Groups, Clarendon Press, Oxford, (1998).

[4] Akça, I. Applications of the Moore Complex of a Pro-C Simplicial Object, Phd Theses, Osmangazi University, (2002).

[5] Korkes, F.J., Porter, T., Profinite Homotopical and Homological Algebra, In preparation.