İnterest Kategorileri

Yaşar Boyacı

DOKTORA TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Aralık 2012

Categories of Interest

Yaşar Boyacı

DOCTORAL DISSERTATION
Department of Mathematics
December 2012

İnterest Kategorileri

Yaşar Boyacı

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik Anabilim Dalı

Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalında

DOKTORA TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Yrd. Doç. Dr. İ. İlker AKÇA

Aralık 2012

ONAY

Matematik Anabilim Dalı Doktora öğrencisi Yaşar Boyacı' nın DOKTORA tezi olarak hazırladığı "**İnterest Kategorileri**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. İ. İlker AKÇA

İkinci Danışman : Yrd. Doç. Dr. Enver Önder USLU

Doktora Tez Savunma Jürisi:

Üye : Yrd. Doç. Dr. İ. İlker AKÇA

Üye : Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ

Üye : Doç. Dr. Erdal ULUALAN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Enver Önder USLU

Üye : Yrd. Doç. Dr. Alper ODABAŞ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, asosyatif cebirler ve değişmeli cebirler üzerinde tanımlanan ön çaprazlanmış modüller hakkında temel bilgiler, özellikler ve örnekler yer almaktadır. İkinci bölümde, modifiye interest kategorisi tanımlanarak ona ait özellikler verilmiş ve aktör, kesin etki, genel aktör ve evrensel kesin genel aktör kavramlarına değinilmiştir. Üçüncü bölümde, asosyatif cebirler üzerinde tanımlanan ön çaprazlanmış modüllerin aktörleri tanımlanmış ve bunlarla ilgili özellikler verilmiştir. Dördüncü bölümde ise, yine benzer şekilde, değişmeli cebirler üzerinde tanımlanan ön çaprazlanmış modüllerin aktörleri üzerinde durulmuş ve örnekler verilmiştir. Ayrıca, değişmeli cebirlerde tanımlı ön çaprazlanmış modüller kategorisinde etkinin ve yarı-direk çarpımın tanımı yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Asosyatif cebir, değişmeli cebir, ön çaprazlanmış modül, modifiye interest kategorisi, aktör, yarı-direk çarpım.

SUMMARY

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, there are some preliminaries, properties and examples about precrossed modules on associative and commutative algebras. In the second chapter, modified category of interest is defined, related properties are given and the notions of actor, strict action, general actor and universal strict general actor are mentioned. In the third chapter, an actor of a precrossed module in associative algebras is defined and its properties are given. In the fourth chapter, similarly, an actor of a precrossed module in commutative algebras is defined and examples are given. In addition, an action and the semi-direct product are defined in the categories of precrossed modules in commutative algebras.

Keywords: Associative algebra, commutative algebra, precrossed module, modified category of interest, actor, semi-direct product.

Beni bu çalışmaya sevkeden ve yöneten, çalışma boyunca değerli yardımlarını esirgemeyen, saygıdeğer hocam,

Yrd. Doç. Dr. Enver Önder USLU ya

ayrıca her türlü desteği için değerli hocam sayın,

Yrd. Doç. Dr. İ.İlker AKÇA ya

ve her zaman yanımda olup desteklerini hiçbir zaman eksik etmeyen,

eşime ve yakınlarıma

sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 0. ÖNSÖZ **1**

0.1 Giriş 1

0.2 Tezin Yapısı 2

BÖLÜM 1. TEMEL BİLGİLER **11**

1.1 Giriş 11

1.2 Asosyatif Cebirler Üzerinde Ön Çaprazlanmış Modüller 11

1.3 Değişmeli Cebirler Üzerinde Ön Çaprazlanmış Modüller 13

1.4 Lie Cebirleri Üzerinde Ön Çaprazlanmış Modüller 17

BÖLÜM 2. MODİFİYE İNTEREST KATEGORİSİ **18**

2.1 Giriş 18

2.2 Modifiye İnterest Kategorisi ile İlgili Bazı Tanımlar ve Özellikler 18

2.3 Modifiye İnterest Kategorisinde Etki ve Aktör Objesi 25

BÖLÜM 3. ASOSYATİF CEBİRLER ÜZERİNDE ÖN ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİN AKTÖRLERİ **37**

3.1 Giriş 37

3.2 Aktör Objenin İnşaası 37

BÖLÜM 4. DEĞİŞMELİ CEBİRLER ÜZERİNDE ÖN ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİN AKTÖRLERİ **50**

4.1 Giriş 50

4.2 Aktör Objenin İnşaası 50

4.3 PXCom da Etki ve Yarı-Direk Çarpım 53

BÖLÜM 0

ÖNSÖZ

0.1 Giriş

İnterest kategorileri konusunun fikri ilk olarak Higgins (1956) tarafından ortaya atılmış ve tanımı da Orzech (1972) tarafından yapılmıştır. İnterest kategorilerine örnek olarak; gruplar, bir halka üzerinde tanımlı modüller, vektör uzayları, asosyatif cebirler, değişmeli cebirler, Lie cebirleri ve Leibniz cebirleri kategorileri verilebilir. Bu kategorilerden, Orzech (1972) ve Casas, Datuashvili ve Ladra (2009) da bahsedilmiştir. Yine, Casas, Datuashvili ve Ladra (2009, 2010) da yer aldığı üzere, gruplar üzerinde tanımlı çaprazlanmış ve ön çaprazlanmış modüller kategorileri de interest kategorilerine denktir. Bu tezde de, interest kategorisinin yeni bir çeşidi tanımlanarak özellikleri üzerinde durulacaktır. Tanımlanacak olan bu kategori, Porter (1987) da belirtilen kategorinin, biri hariç bütün aksiyomlarını sağlamaktadır. Sağlanmayan aksiyomun yerine yeni bir aksiyom şartı eklenecektir. Bu şekilde oluşturulan bir kategori, aynı zamanda Orzech (1972) de tanımlanan interest kategorileri için verilen iki aksiyomu da sağlamaktadır. Lie cebirleri, Leibniz cebirleri, asosyatif cebirler ve değişmeli cebirler üzerinde tanımlı çaprazlanmış modüller ve ön çaprazlanmış modüller kategorileri, oluşturulan interest kategorisinin bu yeni çeşidine birer örnektir. Bu tezde, bu türden kategoriler "modifiye interest kategorisi" olarak isimlendirilmiştir.

Tezde, öncelikle asosyatif ve değişmeli cebirlerle ilgili temel bilgiler ve bunlar üzerinde tanımlı ön çaprazlanmış modüllerle ilgili özellikler hatırlatılacaktır. Daha sonrasında, modifiye interest kategorisinin tanımı verilecek, özellikleri üzerinde durulacak ve Casas, Datuashvili ve Ladra (2010) da tanımlanan aktör, genel aktör, kesin etki ve evrensel kesin genel aktör kavramları modifiye interest kategorisi için yeniden düzenlenecek ve farklılık gösteren noktalar belirtilecektir. Arkasından da uygulama olarak üçüncü ve dördüncü bölümlerde, asosyatif cebirler ve değişmeli cebirler üzerinde tanımlı ön çaprazlanmış modüller kategorisinde bir aktörün varlığı için hangi şartların yeterli olacağı araştırılacak ve aktörlerin inşaası için gerekli olan yollar izlenecektir. Benzer bir problem, gruplar üzerinde tanımlı ön çaprazlanmış modüller kategorisi için Casas, Datuashvili ve Ladra (2009) da çözülmüştür.Yine benzer çalışmalar, gruplar üzerinde tanımlı çaprazlanmış modüller, regular değişmeli halkalar, asosyatif cebirler ve değişmeli cebirler, Leibniz cebirleri, alternatif cebirler, değişmeli cebirler ve Lie cebirleri üzerinde tanımlı çaprazlanmış modüller ve Lie cebirler üzerinde tanımlı ön çaprazlanmış

modüller için, Arvasi ve Ege (2003), Borceux, Janelidze ve Kelly (2005), Casas, Datuashvili ve Ladra (2009), Casas, Datuashvili, Ladra ve Uslu (2012), Casas ve Ladra (1995) ve Norrie (1990) de yapılmıştır.

0.2 Tezin Yapısı

Birinci bölümde, asosyatif ve değişmeli cebirler üzerinde tanımlanan ön çaprazlanmış modüller hakkında temel bilgiler, özellikler ve örnekler yer almaktadır. Ayrıca, asosyatif cebirler için bimultiplier ve değişmeli cebirler için multiplier kavramlarına da yer verilmiştir.

Tanım 0.1 A bir asosyatif cebir olsun. $f_l : A \longrightarrow A$ ve $f_r : A \longrightarrow A$ lineer dönüşümleri her $a, a' \in A$ için,

$$\begin{aligned} 1)\ f_l(a * a') &= f_l(a) * a' \\ 2)\ f_r(a * a') &= a * f_r(a') \\ 3)\ a * f_l(a') &= f_r(a) * a' \end{aligned}$$

şartlarını sağlıyorsa (f_l, f_r) ikilisine A nın bir bimultiplieri denir. A nın bimultiplierlerinin kümesi $Bim(A)$ ile gösterilecektir.

Tanım 0.2 Asosyatif cebirler kategorisinde, $d : A_1 \longrightarrow A_0$ asosyatif cebir homomorfizmi ve A_0 ın A_1 üzerine etkisi ile birlikte, her $a_1 \in A_1$ ve $a_0 \in A_0$ için

$$d({}^{a_0}a_1) = a_0 * d(a_1), d(a_1^{a_0}) = d(a_1) * a_0$$

şartları sağlanıyor ise $\mathcal{A} : (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ ya bir ön çaprazlanmış modül denir. Eğer, buna ek olarak her $a_1, a_1' \in A_1$ için

$${}^{d(a_1')}a_1 = a_1' * a_1, a_1^{d(a_1')} = a_1 * a_1'$$

şartları da sağlanırsa, $\mathcal{A} : (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ ya bir çaprazlanmış modül denir.

$\mathcal{A} : (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ ve $\mathcal{A}' : (A_1' \xrightarrow{d''} A_0')$ iki ön çaprazlanmış modül olsun. Her $a_1 \in A_1$ ve $a_0 \in A_0$ için

$$f({}^{a_0}a_1) = {}^{g(a_0)} f(a_1),\ f(a_1^{a_0}) = f(a_1)^{g(a_0)} \text{ ve } d'f = gd$$

şartlarını sağlayan $f : A_1 \longrightarrow A_1'$ ve $g : A_0 \longrightarrow A_0'$ asosyatif cebir homomorfizimlerinin oluşturduğu (f, g) ikilisine $\mathcal{A}$ ile $\mathcal{A}'$ ön çaprazlanmış modülleri arasındaki bir morfizim denir. Asosyatif cebirler üzerinde tanımlı ön çaprazlanmış modüller kategorisi ile çaprazlanmış modüller kategorisi sırasıyla **PXAss** ve **XAss** şeklinde gösterilecektir.

$\omega_0 : A \longrightarrow A$ ve $\omega_1 : A \longrightarrow A$ birer asosyatif cebir homomorfizmi olmak üzere,

$$\omega_0\omega_1 = \omega_1,\ \omega_1\omega_0 = \omega_0$$

şartlarını sağlayan ω_0 ve ω_1 dönüşümleri ile birlikte (A, ω_0, ω_1) üçlülerinin kategorisi $\overline{\mathbb{A}}$ ile gösterilecektir.

$P : \overline{\mathbb{A}} \longrightarrow \mathbf{PXAss}$ funktoru şu şekilde tanımlansın; $\overline{\mathbb{A}}$ daki herhangi bir (A, ω_0, ω_1) objesi için, $P(A, \omega_0, \omega_1)$, $A_1 = \ker \omega_0$, $A_0 = \operatorname{Im} \omega_0$ ve $d = \omega_1|_{\ker \omega_0}$ şartlarının sağlandığı $\mathcal{A} : (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ şeklindeki ön çaprazlanmış modüldür. $S : \mathbf{PXAss} \longrightarrow \overline{\mathbb{A}}$ funktoru da şöyle tanımlansın; herhangi bir $\mathcal{A} : (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ ön çaprazlanmış modülü için, $S(\mathcal{A})$, her $a_1 \in A_1$, $a_0 \in A_0$ için

$$\omega_0(a_1, a_0) = (0, a_0) \text{ ve } \omega_1(a_1, a_0) = (0, d(a_1) + a_0)$$

şartlarını sağlayacak şekildeki $S(\mathcal{A}) := (A_1 \rtimes A_0, \omega_0, \omega_1)$ üçlüsü olarak tanımlanır. Buradaki $A_1 \rtimes A_0$ yarı-direk çarpımı ön çaprazlanmış modüldeki etki tarafından tanımlanır.

Bu iki funktor Ellis (1988) de tanımlandığı gibi, **PXAss** ve $\overline{\mathbb{A}}$ kategorileri arasında bir doğal denklik oluşturur.

Tanım 0.3 C bir değişmeli cebir olsun. $f : C \longrightarrow C$ lineer dönüşümü her $c, c' \in C$ için,

$$f(c * c') = f(c) * c'$$

şartını sağlıyorsa, bu dönüşüme C nin bir multiplieri denir. C nin multiplierlerinin kümesi $Mul(C)$ ile gösterilecektir.

Tanım 0.4 Değişmeli cebirler kategorisinde, $d : C_1 \longrightarrow C_0$ değişmeli cebir homomorfizmi ve C_0 ın C_1 üzerine etkisi ile birlikte, her $c_1 \in C_1$ ve $c_0 \in C_0$ için

$$d({}^{c_0}c_1) = c_0 * d(c_1)$$

şartı sağlanıyor ise $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ ye bir ön çaprazlanmış modül denir. Eğer, buna ek olarak her $c_1, c_1' \in C_1$ için

$${}^{d(c_1')}c_1 = c_1' * c_1$$

şartı da sağlanırsa, $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ ye bir çaprazlanmış modül denir.

$\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ ve $\mathcal{C}' : (C_1' \xrightarrow{d'} C_0')$ iki ön çaprazlanmış modül olsun. Her $c_1 \in C_1$ ve $c_0 \in C_0$ için

$$d'f = gd \text{ ve } f({}^{c_0}c_1) = {}^{g(c_0)}f(c_1)$$

şartlarını sağlayan $f : C_1 \longrightarrow C_1'$ ve $g : C_0 \longrightarrow C_0'$ değişmeli cebir homomorfizimlerinin oluşturduğu (f,g) ikilisine $\mathcal{C}$ ile $\mathcal{C}'$ ön çaprazlanmış modülleri arasındaki bir morfizim denir. Değişmeli cebirler üzerinde tanımlı ön çaprazlanmış modüller kategorisi ile çaprazlanmış modüller kategorisi sırasıyla **PX*C*om** ve **X*C*om** şeklinde gösterilecektir.

$\omega_0 : C \longrightarrow C$ ve $\omega_1 : C \longrightarrow C$ birer değişmeli cebir homomorfizmi olmak üzere,

$$\omega_0\omega_1 = \omega_1,\ \omega_1\omega_0 = \omega_0$$

şartlarını sağlayan ω_0 ve ω_1 dönüşümleri ile birlikte (C,ω_0,ω_1) üçlülerinin kategorisi $\overline{\mathbb{C}}$ ile gösterilecektir.

$P : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow$ **PXCom** funktoru şu şekilde tanımlansın; $\overline{\mathbb{C}}$ deki herhangi bir (C,ω_0,ω_1) objesi için, $P(C,\omega_0,\omega_1)$, $C_1 = \ker\omega_0$, $C_0 = \mathrm{Im}\,\omega_0$ ve $d = \omega_1|_{\ker\omega_0}$ şartlarının sağlandığı $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ şeklindeki ön çaprazlanmış modüldür. $S :$ **PXCom** $\longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ funktoru da şöyle tanımlansın; herhangi bir $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ ön çaprazlanmış modülü için, $S(\mathcal{C})$, her $c_1 \in C_1$ ve $c_0 \in C_0$ için

$$\omega_0(c_1,c_0) = (0,c_0) \text{ ve } \omega_1(c_1,c_0) = (0,d(c_1)+c_0)$$

şartlarını sağlayacak şekilde $S(\mathcal{C}) := (C_1 \rtimes C_0,\omega_0,\omega_1)$ üçlüsü olarak tanımlanır. Buradaki $C_1 \rtimes C_0$ yarı-direk çarpımı ön çaprazlanmış modüldeki etki tarafından tanımlanır.

Bu iki funktor Ellis (1988) de tanımlandığı gibi, **PXCom** ve $\overline{\mathbb{C}}$ kategorileri arasında bir doğal denklik oluşturur.

İkinci bölümde, modifiye interest kategorisi tanımlanarak ona ait özellikler verilmiş ve aktör, kesin etki, genel aktör ve evrensel kesin genel aktör kavramlarına değinilmiştir. Bu tanımlamalar yapılırken, Boyacı, Casas, Datuashvili ve Uslu'nun "Modified Category of Interest" isimli makalesi dikkate alınmıştır.

Orzech (1972), Datuashvili (1995), Casas, Datuashvili ve Ladra (2010) da interest kategorileri tanımlanmış ve üzerinde çalışmalar yapılmıştır. Birinci bölümde tanımları verilen $\overline{\mathbb{L}}$, $\overline{\mathbb{A}}$ ve $\overline{\mathbb{C}}$ kategorilerinin ise interest kategorisinin bir şartını sağlamadığı görülmüş ve o şartın yerine başka bir şart getirilerek interest kategorisinin yeni bir çeşidi olan modifiye interest kategorisi elde edilmiştir. Burada, bu çalışmalarda yer alan tanım ve ifadelerin üzerinde belli düzenlemeler yapılarak modifiye interest kategorisinin tanımı verilecektir.

Ω ve $\mathbb{E}$ sırasıyla, gruptaki işlemler kümesini ve grup kurallarını içine alacak şekildeki özdeşlikler kümesini temsil etmek üzere, $\mathbb{C}$ sistemi, Ω ve $\mathbb{E}$ ile birlikte grupların bir kategorisi olsun ve bu kategori için aşağıdaki şartlar sağlansın:

Ω_i, Ω daki i-li işlemlerin kümesi olsun ve C, $\mathbb{C}$ nin bir objesi olmak üzere $x,y,z \in C$ olsun. Buna göre:

(a) $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$;

(b) toplamsal grup işlemleri olan $0,-,+$ işlemleri, sırasıyla Ω_0, Ω_1 ve Ω_2 nin elemanlarıdır. Ayrıca, $\Omega_2' = \Omega_2 \setminus \{+\}$, $\Omega_1' = \Omega_1 \setminus \{-\}$ olmak üzere, $* \in \Omega_2$ iken Ω_2', $x *^\circ y = y * x$ şeklinde tanımlanan $*^\circ$ işlemini içerir ve $\Omega_0 = \{0\}$ olarak kabul edilir;

(c) her bir $* \in \Omega_2'$ için, $\mathbb{E}$, $x*(y+z) = x*y+x*z$ özdeşliğini içerir;

(d) her bir $\omega \in \Omega_1'$ ve $* \in \Omega_2'$ için, $\mathbb{E}$, $\omega(x+y) = \omega(x) + \omega(y)$ ve $\omega(x) * \omega(y) = \omega(x*y)$ özdeşliklerini içerir.

Yukarıda verilen şartlar doğrultusunda C, $\mathbb{C}$ nin bir objesi ve $x_1,x_2,x_3 \in C$ olsun. Buna göre:

Aksiyom 1: Her $* \in \Omega_2'$ için, $x_1 + (x_2 * x_3) = (x_2 * x_3) + x_1$ dir.
Aksiyom 2: Her $(*,\overline{*}) \in \Omega_2' \times \Omega_2'$ sıralı ikilisi için,

$$(x_1 * x_2)\overline{*}x_3 = W(x_1(x_2x_3), x_1(x_3x_2), (x_2x_3)x_1,$$
$$(x_3x_2)x_1, x_2(x_1x_3), x_2(x_3x_1), (x_1x_3)x_2, (x_3x_1)x_2)$$

şeklinde tanımlanan bir W kelimesi vardır. Yani, $(x_1 * x_2)\overline{*}x_3$ elemanı, $(x_1(x_2x_3), ...)$ elemanlarının ürettiği alt cebirin elemanıdır.

Tanım 0.5 Aksiyom 1 ve Aksiyom 2 şartlarıyla birlikte, $\mathbb{C}$ kategorisine modifiye interest kategorisi denir.

Not 0.6 Böylelikle, Orzech (1972), Datuashvili (1995), Casas, Datuashvili ve Ladra (2010) da yer alan interest kategorisi tanımında $\omega(x) * (y) = \omega(x * y)$ şeklinde verilen eşitlik, modifiye interest kategorisi tanımında $\omega(x) * \omega(y) = \omega(x * y)$ olarak değişmiştir.

Tanım 0.7 $C_0, C_1 \in \mathbb{C}$, C_0 ın C_1 üzerinde derived etkisi ve $\partial : C_1 \longrightarrow C_0$, $\mathbb{C}$ de bir morfizim olmak üzere, her $r \in C_0$, $c \in C_1$ ve $* \in \Omega_2'$ için,

(i) $\partial(r \cdot c) = r + \partial(c) - r$,

(ii) $\partial(r * c) = r * \partial(c)$

şartları sağlandığında, (C_1, C_0, ∂) üçlüsüne $\mathbb{C}$ de bir ön çaprazlanmış modül denir.
Eğer $\partial : C_1 \longrightarrow C_0$ morfizmi, her $c, c' \in C_1$ ve $* \in \Omega_2'$ için,

(iii) $\partial(c)\cdot c' = c + c' - c$

(iv) $\partial(c) * c' = c * c'$

şartlarını da sağlarsa, (C_1, C_0, ∂) üçlüsüne $\mathbb{C}$ de bir çaprazlanmış modül denir.

Tanım 0.8 $\mathbb{C}$ bir modifiye interest kategorisi ve A, $\mathbb{C}$ nin bir objesi olsun. $B \in \mathbb{C}$ objesinin, Borceux, Janelidze ve Kelly (2005) de bahsedildiği gibi, A için bir split genişleme sınıflandırıcısı olabilmesi için gerek ve yeter şart; B nin A üzerine bir derived etkisi olmak üzere, A üzerinde bir derived etkisi olan her $C \in \mathbb{C}$ objesi için, her $* \in \Omega_2'$, $a \in A$ ve $c \in C$ için, $c \cdot a = \varphi(c)\cdot a$, $c * a = \varphi(c) * a$ şeklinde tanımlı tek bir $\varphi : C \longrightarrow B$ morfizminin var olmasıdır.

Bu şartı sağlayan $B \in \mathbb{C}$ objesine, A nın bir aktörü denir ve $\mathrm{Act}(A)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 0.9 $A, B \in \mathbb{C}$ olsun. Herhangi $b, b' \in B$ verildiğinde, her $a \in A$, $\omega \in \Omega_1'$ ve $* \in \Omega_2'$ için, $b \cdot a = b' \cdot a$, $(\omega(b))\cdot a = (\omega(b'))\cdot a$, $b * a = b' * a$ ve $(\omega(b)) * a = (\omega(b')) * a$ şartları altında $b = b'$ oluyorsa, B nin A üzerine etkisine kesin etki denir.

Tanım 0.10 $A \in \mathbb{C}$ objesinin genel aktörü, $\mathbb{C}_G$ de A üzerinde bir derived etkiye sahip $\mathbb{C}_G$ nin bir objesidir, $\mathrm{GA}(A)$ olarak gösterilir ve herhangi bir $C \in \mathbb{C}$ objesi ve C nin A üzerinde bir derived etkisi verildiğinde, her $c \in C$, $a \in A$ ve $* \in \Omega_2'$ için, $c \dot{*} a = \varphi(c) \dot{*} a$ şeklinde tanımlı $\mathbb{C}_G$ de tek bir $\varphi : C \longrightarrow \mathrm{GA}(A)$ morfizmi vardır.

Tanım 0.11 Eğer $\mathrm{GA}(A)$ genel aktörünün A üzerindeki etkisi kesinse, $\mathrm{GA}(A)$ ya A nın bir kesin genel aktörü denir ve $\mathrm{SGA}(A)$ şeklinde gösterilir.

Koşul 1: $A \in \mathbb{C}$ olsun ve A üzerinde bir derived etkiye sahip olan $\mathbb{C}$ nin bütün objelerinin kümesi $\{B_j\}_{j\in J}$ ile gösterilsin. $\varphi_j : B_j \longrightarrow \mathrm{GA}(A)$, $j \in J$ morfizmi de, her $b_j \in B_j$, $a \in A$ ve $* \in \Omega_2'$ için, $b_j \dot{*} a = \varphi_j(b_j) \dot{*} a$ şeklinde tanımlanan tek morfizmi göstersin. Buna göre, $\mathrm{GA}(A)$ nın elemanları, herhangi $b \in B_i$, $b' \in B_j$, $* \in \Omega_2'$ ve $i, j \in J$ için,

$$(\varphi_i(b) * \varphi_j(b'))\overline{*}a = W(\varphi_i(b), \varphi_j(b'); a; *, \overline{*})$$

eşitliğini sağlar.

Tanım 0.12 Bir A objesinin evrensel kesin genel aktörü, Koşul 1 i sağlayan bir kesin genel aktördür, $\mathrm{USGA}(A)$ şeklinde gösterilir ve Koşul 1 i sağlayan herhangi bir $\mathrm{SGA}(A)$ kesin genel aktörü verildiğinde, herhangi bir $j \in J$ için $\psi_j \eta = \varphi_j$ şeklinde tanımlı, $\mathbb{C}_G$ kategorisinde tek bir $\eta : \mathrm{USGA}(A) \to \mathrm{SGA}(A)$ morfizmi vardır. Buradaki $\varphi_j : B_j \to \mathrm{SGA}(A)$ ve $\psi_j : B_j \to \mathrm{USGA}(A)$ morfizimleri, genel aktör tanımına göre oluşturulan tek morfizimleri gösterir.

Teorem 0.13 $\mathbb{C}$ bir modifiye interest kategorisi ve $A \in \mathbb{C}$ olsun. A nın bir aktörünün olabilmesi için gerek ve yeter şart $\mathrm{USGA}(A) \ltimes A$ yarı direk çarpımının $\mathbb{C}$ nin bir objesi olmasıdır. Bu durumda, $\mathrm{Act}(A) \cong \mathrm{USGA}(A)$ olur.

Üçüncü bölümde, asosyatif cebirler üzerinde tanımlanan ön çaprazlanmış modüllerin aktörleri tanımlanmış ve bunlarla ilgili özellikler verilmiştir.

Tanım 0.14 $\mathcal{A} : (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ bir ön çaprazlanmış modül olsun. α ve β sırasıyla A_1 ve A_0 ın bimultiplierleri olmak üzere, (α, β) ikilisi $d\alpha_{l,r} = \beta_{l,r}d$ eşitliği ile her $a_0 \in A_0$ ve $a_1 \in A_1$ için

a) $\alpha_l({}^{a_0}a_1) = {}^{\beta_l(a_0)}a_1$

b) $\alpha_l(a_1^{a_0}) = (\alpha_l(a_1))^{a_0}$

c) ${}^{a_0}(\alpha_l(a_1)) = {}^{\beta_r(a_0)}a_1$

d) $\alpha_r(a_1{}^{a_0}) = a_1{}^{\beta_r(a_0)}$

e) $\alpha_r({}^{a_0}a_1) = {}^{a_0}\alpha_r(a_1)$

f) $(\alpha_r(a_1))^{a_0} = a_1{}^{\beta_l(a_0)}$

şartlarını sağlarsa, bu ikiliye $\mathcal{A}$ nın bir bimultiplieri denir.

Öncelikle, $\overline{\mathbb{A}}$ daki bir (A, ω_0, ω_1) objesinin aktörü oluşturulmuştur. Bunun için aşağıdaki yol izlenmiştir:

A nın bimultiplierlerinden oluşan (f, f^0, f^1) üçlüleri verilsin ve bu üçlüler

M1) $i = 0, 1$ için, $f^i_{l,r}\omega_i = \omega_i f_{l,r}$,

M2) $i = 0, 1$ için, $f^0_{l,r}\omega_i = \omega_i f^0_{l,r}$,

M3) $i = 0, 1$ için, $f^1_{l,r}\omega_i = \omega_i f^1_{l,r}$.

şartlarını sağlasın. Bu şartları sağlayan bütün üçlülerin kümesi $\mathfrak{A}(A)$ ile gösterilsin. Buna göre, her (f, f^0, f^1) ve $(g, g^0, g^1) \in \mathfrak{A}(A)$ için

$$(f, f^0, f^1) * (g, g^0, g^1) = (f * g, f^0 * g^0, f^1 * g^1)$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi, bileşensel toplama işlemi ve skaler çarpma işlemi ile birlikte, $\mathfrak{A}(A)$ bir asosyatif cebirdir.

Şimdi de, $\overline{\omega_0}$ ve $\overline{\omega_1}$ tekli işlemleri verilsin ve bu işlemler $\overline{\omega_0} : \mathfrak{A}(A) \longrightarrow \mathfrak{A}(A), \overline{\omega_0}(f, f^0, f^1) = (f^0, f^0, f^0)$ ve $\overline{\omega_1} : \mathfrak{A}(A) \longrightarrow \mathfrak{A}(A), \overline{\omega_1}(f, f^0, f^1) = (f^1, f^1, f^1)$ şeklinde tanımlansın. Bu tekli işlemlerle birlikte $(\mathfrak{A}(A), \overline{\omega_0}, \overline{\omega_1})$, $\overline{\mathbb{A}}$ içinde bir objedir. Buna göre, $\mathfrak{A}(A)$ nın A üzerine bir asosyatif cebir etkisi vardır ve bu etki, her $a \in A$ ve $(f, f^0, f^1) \in \mathfrak{A}(A)$ için, $\mathfrak{A}(A) \times A \longrightarrow A$, $((f, f^0, f^1), a) = f_l(a)$, $A \times \mathfrak{A}(A) \longrightarrow A$, $(a, (f, f^0, f^1)) = f_r(a)$ şeklinde verilen dönüşümler ile tanımlanır.

Sonuç 0.15 $(\mathfrak{B}(A), \omega_0, \omega_1)$ evrensel kesin genel aktörü, $(\mathfrak{A}(A), \overline{\omega_0}, \overline{\omega_1})$ objesine izomorftur ve izomorfizim farkıyla aktörün tek olmasından dolayı, $(\mathfrak{A}(A), \overline{\omega_0}, \overline{\omega_1})$, (A, ω_0, ω_1) nın aktörüdür.

Daha sonrasında da, $(A_1 \rtimes A_0, \omega_0, \omega_1)$ objesinin aktörü araştırılmıştır. Bunun için, $\mathcal{A} : (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ ön çaprazlanmış modülü ele alınmış ve buna bağlı olarak $(A_1 \rtimes A_0, \omega_0, \omega_1)$ asosyatif cebiri elde edilmiştir. $f = (f_l, f_r) \in Bim(A_1 \rtimes A_0)$ dönüşümü tanımlanmış ve bununla ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir. $(A_1 \rtimes A_0, \omega_0, \omega_1)$ asosyatif cebirinin aktörü $(\mathfrak{A}(A_1 \rtimes A_0), \overline{\omega_0}, \overline{\omega_1})$ olarak bulunmuştur.

Diğer taraftan, $\mathcal{A}$ ön çaprazlanmış modülünün genelleştirilmiş bimultiplierlerinin kümesi olan $\mathfrak{BM}(\mathcal{A})$ nın tanımı ve bununla ilgili özellikler verilmiştir.

Arkasından, her $(\alpha, \partial, \alpha^1) \in \mathfrak{BM}(\mathcal{A})$ için, $\Delta(\alpha, \partial, \alpha^1) = (\alpha^1, \beta)$ şeklinde tanımlanan $\Delta : \mathfrak{BM}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{Bim}(\mathcal{A})$ ön çaprazlanmış modülü elde edilmiştir.

Son olarak da, $\mathcal{A} : (A_1 \longrightarrow A_0)$ ön çaprazlanmış modülünün aktörü tanımlanmıştır.

Tanım 0.16 $\Delta : \mathfrak{BM}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{Bim}(\mathcal{A})$ ön çaprazlanmış modülüne, $\mathcal{A} : (A_1 \longrightarrow A_0)$ ön çaprazlanmış modülünün aktörü denir ve $\mathrm{Act}(\mathcal{A})$ şeklinde gösterilir.

Önerme 0.17 $\mathcal{A} : (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ bir ön çaprazlanmış modül, $(A_1 \rtimes A_0, \omega_0, \omega_1)$, tekli işlemlerle birlikte buna bağlı olarak elde edilen asosyatif cebir ve $(\mathfrak{A}(A_1 \rtimes A_0), \overline{\omega_0}, \overline{\omega_1})$ de bu asosyatif cebirin aktörü olsun. Buna göre, $\mathrm{Act}(\mathcal{A}) \cong P(\mathrm{Act}(S(\mathcal{A})))$ dır.

Dördüncü bölümde ise, yine benzer şekilde, değişmeli cebirler üzerinde tanımlanan ön çaprazlanmış modüllerin aktörleri üzerinde durulmuş ve örnekler verilmiştir. Ayrıca, değişmeli cebirlerde tanımlı ön çaprazlanmış modüller kategorisinde etkinin ve yarı-direk çarpımın tanımı yapılmıştır.

Tanım 0.18 $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ bir ön çaprazlanmış modül olsun.

i) $\mu_1 \in Mul(C_1)$ ve $\mu_0 \in Mul(C_0)$

ii) $d\mu_1 = \mu_0 d$

iii) Her $c_i \in C_i$, $i = 0,1$ için, $\mu_1(c_1 \cdot c_0) = c_0 \cdot \mu_1(c_1) = \mu_0(c_0) \cdot c_1$

şartları sağlandığında (μ_1, μ_0) ikilisine $\mathcal{C}$ nin bir multiplieri denir. $\mathcal{C}$ nin multiplierlerinin kümesi $Mul(\mathcal{C})$ ile gösterilir.

Tanım 0.19 $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ bir ön çaprazlanmış modül olsun. $\delta, \delta_1 \in Mul(C_1)$, ∂ bir çaprazlanmış multiplier (her $c_0, c_0' \in C_0$ için $\partial(c_0 c_0') = c_0 \cdot \partial(c_0')$ eşitliğini sağlayan bir k-lineer dönüşüm) ve $\gamma = d\partial$ olmak üzere, her $c_0 \in C_0$, $c_1 \in C_1$ için,

1. $\delta(c_0 \cdot c_1) = c_0 \cdot \delta(c_1) = (\partial(c_0))c_1$

2. $\delta_1(c_0 \cdot c_1) = c_0 \cdot \delta_1(c_1) = (\gamma(c_0)) \cdot c_1$

3. $\gamma d = d\delta = d\delta_1$

şartlarını sağlayan $(\delta, \partial, \delta_1)$ üçlülerine $\mathcal{C}$ nin genelleştirilmiş multiplierleri denir. Bu bölümde, $\mathcal{C}$ nin genelleştirilmiş multiplierlerinin kümesi $\mathfrak{M}(\mathcal{C})$ ile gösterilecektir.

Önerme 0.20 $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ bir ön çaprazlanmış modül olsun. $\Delta : \mathfrak{M}(\mathcal{C}) \longrightarrow Mul(\mathcal{C})$, $(\delta, \partial, \delta_1) \longmapsto (\delta, \gamma)$ dönüşümü, her $(\delta, \partial, \delta_1) \in \mathfrak{M}(\mathcal{C})$ ve $(\mu_1, \mu_0) \in Mul(\mathcal{C})$ için, $Mul(\mathcal{C}) \times \mathfrak{M}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathfrak{M}(\mathcal{C})$, $((\mu_1, \mu_0), (\delta, \partial, \delta_1)) \longmapsto (\mu_1\delta, \mu_1\partial, \mu_1\delta_1)$ şeklinde tanımlanan etki ile birlikte bir ön çaprazlanmış modüldür.

Tanım 0.21 Önermede tanımlanan Δ ön çaprazlanmış modülüne $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ ön çaprazlanmış modülünün aktörü denir ve $Act(\mathcal{C})$ şeklinde gösterilir.

Önerme 0.22 $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ bir ön çaprazlanmış modül ve $(C_1 \rtimes C_0, \omega_0, \omega_1)$ de, bu ön çaprazlanmış modüle denk olan değişmeli cebir olsun. Buna göre, $Act(\mathcal{C}) \cong P(Act(S(\mathcal{C})))$ dir.

Tanım 0.23 $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ ve $\mathcal{C}' : (C_1' \xrightarrow{d'} C_0')$ birer ön çaprazlanmış modül olsun. Eğer **PXCom** da,

$$0 \to \mathcal{C} \to \mathcal{E} \overset{s}{\underset{\curvearrowleft}{\longrightarrow}} \mathcal{C}' \to 0$$

şeklinde bir split genişleme varsa, $\mathcal{C}'$ nün $\mathcal{C}$ üzerine bir etkisi vardır denir.

Önerme 0.24 $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ ve $\mathcal{C}' : (C_1' \xrightarrow{d'} C_0')$ birer ön çaprazlanmış modül olsun ve $\mathcal{C}'$ nün $\mathcal{C}$ üzerine etkisi

$$0 \to \mathcal{C} \to \mathcal{E} \overset{s}{\underset{\curvearrowleft}{\longrightarrow}} \mathcal{C}' \to 0$$

split genişlemesi tarafından tanımlansın. Buna göre, $C_0 \rtimes C_0'$ nün $C_1 \rtimes C_1'$ üzerine, her $c_i \in C_i$, $c_i' \in C_i'$, $i = 0, 1$ için

$$(c_0, c_0') \cdot (c_1, c_1') = (c_0 \cdot c_1 + s_0(c_0') \cdot c_1 + c_0 \cdot s_1(c_1'), c_0' \cdot c_1')$$

şeklinde tanımlanan etkisi ile birlikte $(d, d') : C_1 \rtimes C_1' \longrightarrow C_0 \rtimes C_0'$, bir ön çaprazlanmış modüldür.

Tanım 0.25 $\mathcal{C}'$ nün $\mathcal{C}$ üzerine etkisi ile birlikte, $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ ve $\mathcal{C}' : (C_1' \xrightarrow{d'} C_0')$ birer ön çaprazlanmış modül olsun. Buna göre, Önermede verilen

$$(d, d') : C_1 \rtimes C_1' \longrightarrow C_0 \rtimes C_0'$$

ön çaprazlanmış modülüne, $\mathcal{C}'$ ve $\mathcal{C}$ ön çaprazlanmış modüllerinin yarı-direk çarpımı denir ve $\mathcal{C} \rtimes \mathcal{C}'$ şeklinde gösterilir.

BÖLÜM 1

TEMEL BİLGİLER

1.1 Giriş

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan asosyatif cebirler, değişmeli cebirler ve Lie cebirleri üzerinde tanımlı ön çaprazlanmış modüllere ait temel bilgiler, özellikler ve bazı örnekler yer almaktadır.

k, birimli ve değişmeli sabit bir halka olsun. Tezin bundan sonraki bölümlerinde geçen bütün cebirler **k** üzerinde tanımlı ve asosyatif olacaktır. Asosyatif cebir ifadesi yerine kısaca cebir, ayrıca asosyatif ve değişmeli cebir yerine değişmeli cebir ifadesi kullanılacaktır.

1.2 Asosyatif Cebirler Üzerinde Ön Çaprazlanmış Modüller

A ve B herhangi iki cebir olsun. B nin A üzerine etkisi, her $a, a_1 \in A$, $b, b_1 \in B$ için,

$$\begin{aligned}
{}^{(b*b_1)}a &= {}^{b}({}^{b_1}a) \\
a^{(b*b_1)} &= (a^{b})^{b_1} \\
({}^{b}a)^{b_1} &= {}^{b}(a^{b_1}) \\
{}^{b}(a*a_1) &= ({}^{b}a)*a_1 \\
(a*a_1)^{b} &= a*(a_1^{b}) \\
a*({}^{b}a_1) &= (a^{b})*a_1
\end{aligned}$$

şartlarını sağlayan $(b,a) \longmapsto {}^{b}a, (a,b) \longmapsto a^{b}$ şeklinde tanımlı, **k**-bilineer $B \times A \longrightarrow A, A \times B \longrightarrow A$ dönüşümlerinden oluşur.

Tanım 1.1 A bir cebir olsun. $f_l : A \longrightarrow A$ ve $f_r : A \longrightarrow A$ lineer dönüşümleri her $a, a' \in A$ için,

1) $f_l(a*a') = f_l(a)*a'$

2) $f_r(a*a') = a*f_r(a')$

3) $a*f_l(a') = f_r(a)*a'$

şartlarını sağlıyorsa (f_l, f_r) ikilisine A nın bir bimultiplieri denir. A nın bimultiplierlerinin kümesi $Bim(A)$ ile gösterilecektir.

Sonuç 1.2 $Bim(A)$ üzerindeki çarpma işlemi, $f := (f_l, f_r)$ ve $g := (g_l, g_r)$ için $f * g := (f_l g_l, f_r g_r)$ şeklinde tanımlanır. Buradaki $f_l g_l$ ve $f_r g_r$ bileşke işlemini ifade eder ve her $a \in A$ için $(f_l g_l)(a) = f_l(g_l(a))$ ve $(f_r g_r)(a) = g_r(f_r(a))$ dır. Buna göre, bu şekilde tanımlanan çarpma işlemi, alışılmış toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile birlikte $Bim(A)$ bir asosyatif cebirdir.

Tanım 1.3 Cebirler kategorisinde, $d : A_1 \longrightarrow A_0$ cebir homomorfizmi ve A_0 ın A_1 üzerine etkisi ile birlikte, her $a_1 \in A_1$ ve $a_0 \in A_0$ için

$$d({}^{a_0}a_1) = a_0 * d(a_1), d(a_1^{a_0}) = d(a_1) * a_0$$

şartları sağlanıyor ise $\mathcal{A} : (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ ya bir ön çaprazlanmış modül denir. Eğer, buna ek olarak her $a_1, a_1' \in A_1$ için

$${}^{d(a_1')}a_1 = a_1' * a_1, a_1^{d(a_1')} = a_1 * a_1'$$

şartları da sağlanırsa, $\mathcal{A} : (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ ya bir çaprazlanmış modül denir.

$\mathcal{A} : (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ ve $\mathcal{A}' : (A_1' \xrightarrow{d''} A_0')$ iki ön çaprazlanmış modül olsun. Her $a_1 \in A_1$ ve $a_0 \in A_0$ için

$$f({}^{a_0}a_1) = {}^{g(a_0)} f(a_1),\ f(a_1^{a_0}) = f(a_1)^{g(a_0)} \text{ ve } d'f = gd$$

şartlarını sağlayan $f : A_1 \longrightarrow A_1'$ ve $g : A_0 \longrightarrow A_0'$ cebir homomorfizimlerinin oluşturduğu (f, g) ikilisine $\mathcal{A}$ ile $\mathcal{A}'$ ön çaprazlanmış modülleri arasındaki bir morfizim denir. Cebirler üzerinde tanımlı ön çaprazlanmış modüller kategorisi ile çaprazlanmış modüller kategorisi sırasıyla **PXAss** ve **XAss** şeklinde gösterilecektir.

Örnek 1.1 I, A cebirinin iki yönlü bir ideali olsun. Buna göre, A nın I üzerine eşlenik etkisi ile birlikte, $inc. : I \longrightarrow A$ bir çaprazlanmış modüldür. Ayrıca, $id : A \longrightarrow A$ ve $inc. : 0 \longrightarrow A$ da yine birer çaprazlanmış modül olur.

Örnek 1.2 C, bir tekil cebir olsun ve A nın da C üzerine bir cebir etkisi olsun. Buna göre, $0 : C \longrightarrow A$ bir çaprazlanmış modüldür. $C = A$ olarak alınırsa, $0 : A \longrightarrow A$ ve $0 : A \longrightarrow 0$ da birer çaprazlanmış modül olur. Fakat, C tekil değilse, o zaman $0 : C \longrightarrow A$ bir ön çaprazlanmış modül olur.

Tanım 1.4 A_1' ve A_0' sırasıyla A_1 ve A_0 ın altcebirleri olmak üzere, $d' = d\Big|_{A_1'}$ ise, A_0' nün A_1' üzerine etkisi A_0 ın A_1 üzerine etkisi tarafından üretiliyor ve ön çaprazlanmış modül şartlarını sağlıyorsa, $\mathcal{A}' : (A_1' \xrightarrow{d'} A_0')$ ön çaprazlanmış modülüne $\mathcal{A} : (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ ön çaprazlanmış modülünün bir ön çaprazlanmış altmodülü denir.

Tanım 1.5 A'_1 ve A'_0 sırasıyla A_1 ve A_0 ın ideali ve $\mathcal{A}' : (A'_1 \xrightarrow{d'} A'_0)$, $\mathcal{A}$ nın bir ön çaprazlanmış altmodülü olmak üzere, her $a_0 \in A_0, a'_1 \in A'_1$ için ${}^{a_0}(a'_1), (a'_1)^{a_0} \in A'_1$ ve her $a'_0 \in A'_0, a_1 \in A_1$ için ${}^{a'_0}(a_1), (a_1)^{a'_0} \in A'_1$ ise, $\mathcal{A}' : (A'_1 \xrightarrow{d} A'_0)$ ön çaprazlanmış altmodülüne, $\mathcal{A} : (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ ön çaprazlanmış modülünün bir ideali denir. Bu durum $\mathcal{A}' \trianglelefteq \mathcal{A}$ şeklinde gösterilir.

$\mathcal{A}' : (A'_1 \xrightarrow{d} A'_0)$, $\mathcal{A} : (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ ön çaprazlanmış modülünün bir ideali olsun. Buna göre, $\mathcal{A}/\mathcal{A}'$ bölüm ön çaprazlanmış modülü, $A_1/A'_1 \longrightarrow A_0/A'_0$ şeklindeki ön çaprazlanmış modül olarak tanımlanır. Buradaki etki her $a_0 \in A_0$ ve $a_1 \in A_1$ için ${}^{[a_o]}[a_1] = [{}^{a_0}a_1]$ şeklinde tanımlanır.

$\omega_0 : A \longrightarrow A$ ve $\omega_1 : A \longrightarrow A$ birer cebir homomorfizmi olmak üzere,

$$\omega_0\omega_1 = \omega_1,\ \omega_1\omega_0 = \omega_0$$

şartlarını sağlayan ω_0 ve ω_1 dönüşümleri ile birlikte (A, ω_0, ω_1) üçlülerinin kategorisi $\overline{\mathbb{A}}$ ile gösterilecektir. Bu kategoride, (A, ω_0, ω_1) ve $(A', \omega'_0, \omega'_1)$ elemanları arasındaki morfizimler $\omega_0, \omega_1, \omega'_0, \omega'_1$ dönüşümleriyle uyumlu $f : A \longrightarrow A'$ cebir homomorfizimlerinden oluşur. Burada uyumluluktan kasıt, $\omega'_i f = f\omega_i$, $i = 0, 1$ eşitliklerinin sağlanmasıdır.

$P : \overline{\mathbb{A}} \longrightarrow$ **PXAss** funktoru şu şekilde tanımlansın; $\overline{\mathbb{A}}$ daki herhangi bir (A, ω_0, ω_1) objesi için, $P(A, \omega_0, \omega_1)$, $A_1 = \ker\omega_0$, $A_0 = \mathrm{Im}\,\omega_0$ ve $d = \omega_1|_{\ker\omega_0}$ olmak üzere $\mathcal{A} : (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ şeklindeki ön çaprazlanmış modüldür. $S :$ **PXAss** $\longrightarrow \overline{\mathbb{A}}$ funktoru da şöyle tanımlansın; herhangi bir $\mathcal{A} : (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ ön çaprazlanmış modülü için, $S(\mathcal{A})$, her $a_1 \in A_1$, $a_0 \in A_0$ için

$$\omega_0(a_1, a_0) = (0, a_0) \text{ ve } \omega_1(a_1, a_0) = (0, d(a_1) + a_0)$$

olmak üzere $S(\mathcal{A}) := (A_1 \rtimes A_0, \omega_0, \omega_1)$ üçlüsü olarak tanımlanır. Buradaki $A_1 \rtimes A_0$ yarı-direk çarpımı ön çaprazlanmış modüldeki etki tarafından tanımlanır.

Bu iki funktor Ellis (1988) de gösterildiği üzere, **PXAss** ve $\overline{\mathbb{A}}$ kategorileri arasında bir doğal denklik oluşturur.

1.3 Değişmeli Cebirler Üzerinde Ön Çaprazlanmış Modüller

C ve B herhangi iki değişmeli cebir olsun. B nin C üzerine etkisi, her $c, c' \in C$, $b, b' \in B$ için,

$$\begin{aligned} {}^{(b*b')}c &= {}^{b}({}^{b'}c) \\ {}^{b}(c*c') &= ({}^{b}c)*c' \end{aligned}$$

şartlarını sağlayan $(b,c) \longmapsto {}^{b}c$ şeklinde tanımlanan, **k**-bilineer $B \times C \longrightarrow C$ dönüşümünden oluşur.

Tanım 1.6 C bir değişmeli cebir olsun. $f : C \longrightarrow C$ lineer dönüşümü her $c, c' \in C$ için,

$$f(c * c') = f(c) * c'$$

şartını sağlıyorsa, bu dönüşüme C nin bir multiplieri denir. C nin multiplierlerinin kümesi $Mul(C)$ ile gösterilecektir.

Sonuç 1.7 Alışılmış toplama ve skalerle çarpma işlemleri ve her $f, f' \in Mul(C)$ için $f * f' = ff'$ şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile birlikte $Mul(C)$ bir değişmeli cebirdir. Burada ff', f ile f' nün bileşkesini temsil etmektedir.

Örnek 1.3 $\mathfrak{Mul}(C) := \{f \in Mul(C) \mid \text{her } g \in Mul(C) \text{ için, } fg = gf\}$ kümesi tanımlansın. Buna göre, $\mathfrak{Mul}(C)$ bir değişmeli cebirdir ve her $f \in \mathfrak{Mul}(C)$, $c \in C$ için, $\mathfrak{Mul}(C)$ nin C üzerinde

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Mul}(C) \times C & \longrightarrow & C \\ (f,c) & \longmapsto & f \cdot c = f(c) \end{array}$$

şeklinde tanımlı bir etkisi vardır.

Tanım 1.8 Değişmeli cebirler kategorisinde, $d : C_1 \longrightarrow C_0$ değişmeli cebir homomorfizmi ve C_0 ın C_1 üzerine etkisi ile birlikte, her $c_1 \in C_1$ ve $c_0 \in C_0$ için

$$d({}^{c_0}c_1) = c_0 * d(c_1)$$

şartı sağlanıyor ise $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ ye bir ön çaprazlanmış modül denir. Eğer buna ek olarak her $c_1, c_1' \in C_1$ için

$${}^{d(c_1')}c_1 = c_1' * c_1$$

şartı da sağlanırsa, $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ ye bir çaprazlanmış modül denir.

$\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ ve $\mathcal{C}' : (C_1' \xrightarrow{d'} C_0')$ iki ön çaprazlanmış modül olsun. Her $c_1 \in C_1$ ve $c_0 \in C_0$ için

$$d'f = gd \text{ ve } f({}^{c_0}c_1) = {}^{g(c_0)}f(c_1)$$

şartlarını sağlayan $f : C_1 \longrightarrow C_1'$ ve $g : C_0 \longrightarrow C_0'$ değişmeli cebir homomorfizimlerinin oluşturduğu (f,g) ikilisine $\mathcal{C}$ ile $\mathcal{C}'$ ön çaprazlanmış modülleri arasındaki bir morfizim denir. Değişmeli cebirler üzerinde tanımlı ön çaprazlanmış modüller kategorisi ile çaprazlanmış modüller kategorisi sırasıyla **PX*C*om** ve **X*C*om** şeklinde gösterilecektir.

Örnekler 1.1 i) C bir değişmeli cebir ve I da C nin bir ideali olsun. Buna göre,

$$I \xrightarrow{inc_{\cdot}} C,$$

her $c \in C$ ve $i \in I$ için

$$c \cdot i = ci$$

şeklinde tanımlanan etki ile birlikte bir çaprazlanmış modüldür. $I = 0$ veya $I = C$ olarak alınırsa, sırasıyla $0 \xrightarrow{inc_{\cdot}} C$ ve $C \xrightarrow{inc_{\cdot}} C$ çaprazlanmış modülleri elde edilir.

ii) C bir değişmeli cebir olsun. Her $c, c' \in C$ için, $ad_c(c') = cc'$ olacak şekilde

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & \mathfrak{Mul}(C) \\ c & \longmapsto & ad_c \end{array}$$

dönüşümü tanımlansın. Buna göre,

$$C \xrightarrow{d} \mathfrak{Mul}(C),$$

her $f \in \mathfrak{Mul}(C)$ ve $c \in C$ için

$$f \cdot c = f(c)$$

şeklinde tanımlanan $\mathfrak{Mul}(C)$ nin C üzerine etkisi ile birlikte bir çaprazlanmış modüldür.

iii) C_0 ve C_1 birer değişmeli cebir ve C_0 ın da C_1 üzerine bir etkisi olsun. Buna göre,

$$C_1 \xrightarrow{0} C_0$$

sıfır dönüşümü bir ön çaprazlanmış modüldür. Bu dönüşümün bir çaprazlanmış modül olması için gerek ve yeter şart C_1 in tekil olmasıdır.

iv) C bir değişmeli cebir olsun. Her $c_1, c_2 \in C$ için, $\pi_1(c_1, c_2) = c_1$ şeklinde tanımlı $\pi_1 : C \times C \longrightarrow C$ homomorfizmi ile her $c, c_1, c_2 \in C$ için, $c \cdot (c_1, c_2) = (cc_1, 0)$ şeklinde tanımlı C nin $C \times C$ üzerine etkisi verilsin. Buna göre, $C \times C \xrightarrow{\pi_1} C$ bir ön çaprazlanmış modüldür, fakat, bir çaprazlanmış modül değildir.

v) C, tekil olmayan bir değişmeli cebir olsun. $C_{\text{ab}} := C/CC$ şeklinde bir tanımlama yapılsın. Buna göre, C_{ab} nin C üzerine etkisi bir aşikar etkidir. Bu durumda, $\pi : C \longrightarrow C_{\text{ab}}$ kanonik projeksiyon dönüşümü bir ön çaprazlanmış modüldür, fakat, bir çaprazlanmış modül değildir.

vi) C_0 ve C_1 birer değişmeli cebir ve C_0 ın da C_1 üzerine bir etkisi olsun. $\pi_1 : C_0 \ltimes C_1 \longrightarrow C_0, \pi_1(c_0, c_1) = c_0$ kanonik projeksiyon dönüşümü ile C_0 ın $C_0 \ltimes C_1$ üzerine $c_0 \cdot (c_0', c_1) = (c_0 c_0', c_0 \cdot c_1)$ şeklinde tanımlı etkisi verilsin. Buna göre, $C_0 \ltimes C_1 \xrightarrow{\pi_1} C_0$ bir ön çaprazlanmış

modüldür, fakat, bir çaprazlanmış modül değildir.

vii) Değişmeli cebirler üzerinde tanımlı $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ ve $\mathcal{C}' : (C_1' \xrightarrow{d'} C_0)$ ön çaprazlanmış modülleri verilsin. Buna göre,

$$\begin{array}{ccc} \delta : C_1 \times C_1' & \longrightarrow & C_0 \\ (c_1, c_1') & \longmapsto & d(c_1) + d'(c_1'), \end{array}$$

her $c_0 \in C_0$, $c_1 \in C_1$ ve $c_1' \in C_1'$ için

$$c_0 \cdot (c_1, c_1') = (c_0 \cdot c_1, c_0 \cdot c_1')$$

şeklinde tanımlanan etki ile birlikte bir ön çaprazlanmış modüldür, fakat, bir çaprazlanmış modül değildir. Buradaki yarı-direk çarpım, C_1' nün C_1 üzerine etkisi ile elde edilir ve C_1' nün C_1 üzerine etkisi de C_0 ın C_1 üzerine etkisi yardımıyla tanımlanır.

Tanım 1.9 C_1' ve C_0' sırasıyla C_1 ve C_0 ın değişmeli altcebirleri olmak üzere, $d' = d\Big|_{C_1'}$ ise, C_0' nün C_1' üzerine etkisi C_0 ın C_1 üzerine etkisi tarafından üretiliyor ve ön çaprazlanmış modül şartlarını sağlıyorsa, $\mathcal{C}' : (C_1' \xrightarrow{d'} C_0')$ ön çaprazlanmış modülüne $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ ön çaprazlanmış modülünün bir ön çaprazlanmış altmodülü denir.

Tanım 1.10 C_1' ve C_0' sırasıyla C_1 ve C_0 ın ideali olmak üzere, her $c_0 \in C_0$, $c_1' \in C_1'$ için ${}^{c_0}(c_1') \in C_1'$ ve her $c_0' \in C_0'$, $c_1 \in C_1$ için ${}^{c_0'}(c_1) \in C_1'$ ise, $\mathcal{C}' : (C_1' \xrightarrow{d} C_0')$ ön çaprazlanmış altmodülüne, $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ ön çaprazlanmış modülünün bir ideali denir. Bu durum $\mathcal{C}' \trianglelefteq \mathcal{C}$ şeklinde gösterilir.

$\mathcal{C}' : (C_1' \xrightarrow{d} C_0')$, $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ ön çaprazlanmış modülünün bir ideali olsun. Buna göre, $\mathcal{C}/\mathcal{C}'$ bölüm ön çaprazlanmış modülü, $C_1/C_1' \longrightarrow C_0/C_0'$ şeklindeki ön çaprazlanmış modül olarak tanımlanır. Buradaki etki her $c_0 \in C_0$ ve $c_1 \in C_1$ için ${}^{[c_0]}[c_1] = [{}^{c_0}c_1]$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.11 $(f,g) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ ön çaprazlanmış modül homomorfizminin çekirdeği, $\mathcal{C}$ nin $(\operatorname{Ker} f, \operatorname{Ker} g, d|_{\operatorname{Ker} f})$ şeklindeki idealidir. (f,g) nin görüntüsü de, $(\operatorname{Im} f, \operatorname{Im} g, d'|_{\operatorname{Im} f})$ şeklindeki ön çaprazlanmış altmodüldür.

Tanım 1.12 $(f,g) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ve $(f',g') : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$, ön çaprazlanmış modüller arasında birer morfizim olsun. $\operatorname{Im}(f,g) = \operatorname{Ker}(f'',g'')$ ise, $\mathcal{C} \xrightarrow{(f,g)} \mathcal{C}' \xrightarrow{(f',g')} \mathcal{C}''$ dizisi $\mathcal{C}'$ nde tamdır denir. $0 \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}'' \longrightarrow 0$ dizisi her bir bileşeninde tamsa, bu diziye kısa tam dizi veya ön çaprazlanmış modüllerin genişlemesi denir. Buradaki 0, aşikar ön çaprazlanmış modülünü, diğer bir ifadeyle, **PXCom** daki sıfır objesini gösterir. Eğer (f',g') nin bir bölümü mevcutsa, bu genişlemeye split genişleme adı verilir.

$\omega_0 : C \longrightarrow C$ ve $\omega_1 : C \longrightarrow C$ birer değişmeli cebir homomorfizmi olmak üzere,

$$\omega_0\omega_1 = \omega_1,\ \omega_1\omega_0 = \omega_0$$

şartlarını sağlayan ω_0 ve ω_1 dönüşümleri ile birlikte (C, ω_0, ω_1) üçlülerinin kategorisi $\overline{\mathbb{C}}$ ile gösterilecektir.

$P : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow$ **PXCom** funktoru şu şekilde tanımlansın; $\overline{\mathbb{C}}$ deki herhangi bir (C, ω_0, ω_1) objesi için, $P(C, \omega_0, \omega_1)$, $C_1 = \ker \omega_0$, $C_0 = \mathrm{Im}\, \omega_0$ ve $d = \omega_1|_{\ker \omega_0}$ şartlarının sağlandığı $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ şeklindeki ön çaprazlanmış modüldür. $S :$ **PXCom** $\longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ funktoru da şöyle tanımlansın; herhangi bir $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ ön çaprazlanmış modülü için, $S(\mathcal{C})$, her $c_1 \in C_1$ ve $c_0 \in C_0$ için

$$\omega_0(c_1, c_0) = (0, c_0) \text{ ve } \omega_1(c_1, c_0) = (0, d(c_1) + c_0)$$

şartlarını sağlayacak şekilde $S(\mathcal{C}) := (C_1 \rtimes C_0, \omega_0, \omega_1)$ üçlüsü olarak tanımlanır. Buradaki $C_1 \rtimes C_0$ yarı-direk çarpımı ön çaprazlanmış modüldeki etki tarafından tanımlanır.

Bu iki funktor Ellis (1988) de tanımlandığı gibi, **PXCom** ve $\overline{\mathbb{C}}$ kategorileri arasında bir doğal denklik oluşturur.

1.4 Lie Cebirleri Üzerinde Ön Çaprazlanmış Modüller

Bu bölümde sadece, tezin bundan sonraki bölümlerinde kullanılacak olan, Lie cebirleri üzerinde tanımlı ön çaprazlanmış modüller kategorisi ile ilgili bazı notasyonlar verilecektir. Bu kategoriyle ilgili yapılan tanımlar ve işlemlerin ayrıntıları Casas, Datuashvili, Ladra ve Uslu (2012) da yer almaktadır.

Bu tezde, Lie cebirleri üzerinde tanımlı ön çaprazlanmış modüller kategorisi ile çaprazlanmış modüller kategorisi sırasıyla **PXLie** ve **XLie** şeklinde gösterilecektir. Ayrıca, $\omega_0 : L \longrightarrow L$ ve $\omega_1 : L \longrightarrow L$ birer Lie cebir homomorfizmi olmak üzere,

$$\omega_0\omega_1 = \omega_1,\ \omega_1\omega_0 = \omega_0$$

şartlarını sağlayan ω_0 ve ω_1 dönüşümleri ile birlikte (L, ω_0, ω_1) üçlülerinin kategorisi de $\overline{\mathbb{L}}$ ile gösterilecektir.

BÖLÜM 2

MODİFİYE İNTEREST KATEGORİSİ

2.1 Giriş

Genel olarak bu bölüm, Boyacı, Casas, Datuashvili ve Uslu'nun "Modified Category of Interest" isimli makalesi esas alınarak hazırlanmış ve ön çaprazlanmış modüllere genelleme yapılmıştır.

2.2 Modifiye İnterest Kategorisi ile İlgili Bazı Tanımlar ve Özellikler

Orzech (1972), Datuashvili (1995), Casas, Datuashvili ve Ladra (2010) da interest kategorileri tanımlanmış ve bu kategorilerde bazı cebirsel özellikler incelenmiştir. Burada, bu çalışmalarda yer alan tanım ve ifadelerin üzerinde belli düzenlemeler yapılarak interest kategorisinin yeni bir çeşidinin, yani modifiye interest kategorisinin, tanımı verilecektir.

Öncelikle, yeni oluşturulan olan interest kategorisinin tanımı için gerekli olan Ω ve $\mathbb{E}$ kavramlarına ve bunlara bağlı olarak, interest kategorisinde olduğu gibi, sağlanması gereken şartlara değinilecektir.

Ω ve $\mathbb{E}$ sırasıyla, gruptaki işlemler kümesini ve grup kurallarını içine alacak şekildeki özdeşlikler kümesini temsil etmek üzere, $\mathbb{C}$ sistemi, Ω ve $\mathbb{E}$ ile birlikte grupların bir kategorisi olsun ve bu kategori için aşağıdaki şartlar sağlansın:

Ω_i, Ω daki i-li işlemlerin kümesi olsun ve C, $\mathbb{C}$ nin bir objesi olmak üzere $x, y, z \in C$ olsun. Buna göre:

(a) $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$;

(b) toplamsal grup işlemleri olan $0, -, +$ işlemleri, sırasıyla Ω_0, Ω_1 ve Ω_2 nin elemanlarıdır. Ayrıca, $\Omega_2' = \Omega_2 \setminus \{+\}$, $\Omega_1' = \Omega_1 \setminus \{-\}$ olmak üzere, $* \in \Omega_2$ iken Ω_2', $x *^\circ y = y * x$ şeklinde tanımlanan $*^\circ$ işlemini içerir ve $\Omega_0 = \{0\}$ olarak kabul edilir;

(c) her bir $* \in \Omega_2'$ için, $\mathbb{E}$, $x * (y + z) = x * y + x * z$ özdeşliğini içerir;

(d) her bir $\omega \in \Omega_1'$ ve $* \in \Omega_2'$ için, $\mathbb{E}$, $\omega(x+y) = \omega(x) + \omega(y)$ ve $\omega(x) * \omega(y) = \omega(x*y)$ özdeşliklerini içerir.

Şimdi de, yeni interest kategorisinin tanımı için gerekli olan iki aksiyom verilecektir.
Yukarıda verilen şartlar doğrultusunda C, $\mathbb{C}$ nin bir objesi ve $x_1, x_2, x_3 \in C$ olsun. Buna göre:

Aksiyom 1: Her $* \in \Omega_2'$ için, $x_1 + (x_2 * x_3) = (x_2 * x_3) + x_1$ dir.
Aksiyom 2: Her $(*, \overline{*}) \in \Omega_2' \times \Omega_2'$ sıralı ikilisi için,

$$(x_1 * x_2)\overline{*}x_3 = W(x_1(x_2x_3), x_1(x_3x_2), (x_2x_3)x_1,$$
$$(x_3x_2)x_1, x_2(x_1x_3), x_2(x_3x_1), (x_1x_3)x_2, (x_3x_1)x_2)$$

şeklinde tanımlanan bir W kelimesi vardır. Yani, $(x_1 * x_2)\overline{*}x_3$ elemanı, $(x_1(x_2x_3), ...)$ elemanlarının ürettiği alt cebirin elemanıdır.

Not 2.1 Tezin bundan sonraki kısımlarında Aksiyom 2 deki eşitliğin sağ tarafı $W(x_1, x_2; x_3; *, \overline{*})$ olarak temsil edilecektir.

Tanım 2.2 Aksiyom 1 ve Aksiyom 2 şartlarıyla birlikte, $\mathbb{C}$ kategorisine modifiye interest kategorisi denir.

Not 2.3 Böylelikle, Orzech (1972), Datuashvili (1995), Casas, Datuashvili ve Ladra (2010) da yer alan interest kategorisi tanımında $\omega(x) * (y) = \omega(x*y)$ şeklinde verilen eşitlik, modifiye interest kategorisi tanımında $\omega(x) * \omega(y) = \omega(x*y)$ olarak değişmiştir.

Yukarıdaki tanımda yer alan (c) ve (d) eşitliklerini ve grup kurallarını içeren, $\mathbb{E}$ nin alt kümesi $\mathbb{E}_G$ ile, buna bağlı olarak elde edilen kategori de $\mathbb{C}_G$ ile gösterilsin. Buna göre, $\mathbb{E}_G \hookrightarrow \mathbb{E}$, $\mathbb{C} = (\Omega, \mathbb{E})$, $\mathbb{C}_G = (\Omega, \mathbb{E}_G)$ olmak üzere, $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}_G$ tam içine funktoru elde edilir.

Bundan sonrası için, Aksiyom 1 ve Aksiyom 2 dışındaki şartları sağlayan kategori, $\mathbb{C}$ kategorisinin bir genellemesi olarak, $\mathbb{C}_G$ şeklinde gösterilecektir.

Örnek 2.1 Birinci bölümde tanımları verilen $\overline{\mathbb{L}}$, $\overline{\mathbb{A}}$ ve $\overline{\mathbb{C}}$ kategorileri interest kategorisi olmamasına rağmen birer modifiye interest kategorisidir. Daha genel olarak, Ellis (1988) de bahsedilen her cat^n-cebiri (Lie cebiri, Leibniz cebiri, Jordan cebiri) bir modifiye interest kategorisidir.

Burada sadece $\overline{\mathbb{A}}$ için ayrıntılı bir açıklama vermek yeterli olacaktır. $\overline{\mathbb{L}}$ ve $\overline{\mathbb{C}}$ için de benzer işlemler yapılabilir.

$\mathcal{A} : (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$, asosyatif cebirler kategorisinde bir ön çaprazlanmış modül ve $(A_1 \rtimes A_0, \omega_0, \omega_1)$ de buna bağlı olarak elde edilen $\overline{\mathbb{A}}$ da bir obje olsun. ω_0 ve ω_1 işlemleri birinci bölümde bahsedildiği gibi her $a_1 \in A_1$, $a_0 \in A_0$ için,

$$\omega_0(a_1, a_0) = (0, a_0) \text{ ve } \omega_1(a_1, a_0) = (0, d(a_1) + a_0)$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca, $A_1 \rtimes A_0$ üzerindeki "$*$" işlemi de, Tanım 2.9 da verildiği gibi her $a_1, a_1' \in A_1$, $a_0, a_0' \in A_0$ için,

$$(a_1', a_0') * (a_1, a_0) = (a_1' * a_1 + a_1' * a_0 + a_0' * a_1, a_0' * a_0)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada sadece modifiye interest kategorisinin tanımındaki "$\omega(x) * \omega(y) = \omega(x * y)$" şartının kontrol edilmesi yeterli olacaktır, diğer şartlar interest kategorisinde verilenlerle aynıdır.
Buna göre, ω_0 işlemi, önce "$*$" işlemi açılarak uygulandığında, her $a_1, a_1' \in A_1$, $a_0, a_0' \in A_0$ için,

$$\omega_0((a_1', a_0') * (a_1, a_0)) = \omega_0(a_1' * a_1 + a_1' * a_0 + a_0' * a_1, a_0' * a_0) = (0, a_0' * a_0)$$

olarak bulunur. Diğer taraftan, ω_0 işlemi, (a_1', a_0') ve (a_1, a_0) için ayrı ayrı uygulanırsa

$$\omega_0(a_1', a_0') * \omega_0(a_1, a_0) = (0, a_0') * (0, a_0) = (0, a_0' * a_0)$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\omega_0((a_1', a_0') * (a_1, a_0)) = \omega_0(a_1', a_0') * \omega_0(a_1, a_0)$ olduğu görülür.
Oysa ki, interest kategorisinin tanımındaki "$\omega(x) * (y) = \omega(x * y)$" şartına göre işlem yapılsaydı

$$\omega_0(a_1', a_0') * (a_1, a_0) = (0, a_0') * (a_1, a_0) = (a_0' * a_1, a_0' * a_0)$$

ifadesi elde edilecekti ve dolayısıyla $\omega_0((a_1', a_0') * (a_1, a_0)) = \omega_0(a_1', a_0') * (a_1, a_0)$ eşitliği sağlanmamış olacaktı. Yine benzer şekilde, ω_1 işlemi için de aynı adımlar takip edilebilir.

$$\omega_1((a_1', a_0') * (a_1, a_0)) = \omega_1(a_1' * a_1 + a_1' * a_0 + a_0' * a_1, a_0' * a_0) = (0, d(a_1' * a_1 + a_1' * a_0 + a_0' * a_1) + a_0' * a_0) = (0, d(a_1') * d(a_1) + d(a_1') * a_0 + a_0' * d(a_1) + a_0' * a_0)$$

olarak bulunur. Diğer taraftan,

$$\omega_1(a_1', a_0') * \omega_1(a_1, a_0) = (0, d(a_1') + a_0') * (0, d(a_1) + a_0) = (0, (d(a_1') + a_0') * (d(a_1) + a_0)) = (0, d(a_1') * d(a_1) + d(a_1') * a_0 + a_0' * d(a_1) + a_0' * a_0)$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\omega_1((a_1', a_0') * (a_1, a_0)) = \omega_1(a_1', a_0') * \omega_1(a_1, a_0)$ eşitliği sağlanmış olur. Fakat, yine aynı şekilde interest kategorisinin tanımındaki "$\omega(x) * (y) = \omega(x * y)$" şartına göre işlem yapılırsa,

$\omega_1(a_1',a_0')*(a_1,a_0) = (0, d(a_1')+a_0')*(a_1,a_0) = ((d(a_1')+a_0')*a_1, (d(a_1')+a_0')*a_0)$

ifadesi elde edilir, yani, $\omega_1((a_1',a_0')*(a_1,a_0)) = \omega_1(a_1',a_0')*(a_1,a_0)$ eşitliği sağlanmamış olur. Sonuç olarak, $\overline{\mathbb{A}}$ nın bir interest kategorisi olmadığı halde, modifiye interest kategorisinin şartlarını sağladığı gösterilmiş oldu.

Tanım 2.4 $C \in \mathbb{C}$ olmak üzere, eğer C nin bir alt objesi bazı morfizimlerin çekirdeği olarak yazılabiliyorsa buna C nin bir ideali denir.

Teorem 2.5 $\mathbb{C}$ kategorisinde A, B nin bir alt objesi olsun. Buna göre, A alt objesinin B nin bir ideali olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartların sağlanmasıdır:

(i) A, B nin normal alt grubudur;

(ii) her $a \in A$, $b \in B$ ve $* \in \Omega_2'$ için, $a*b \in A$ dır.

İspat: A, B nin bir ideali olsun. Bu durumda A, $f : B \longrightarrow B'$ şeklinde bir morfizmin çekirdeğidir. f morfizmi, grup homomorfizmi şartını sağladığında, herhangi $a \in A$ elemanına karşılık, her $b \in B$ için, $f(b+a-b) = f(b)+f(a)+f(-b) = f(b)+0+f(-b) = f(b-b) = f(0) = 0$ olduğundan $b+a-b \in A$ dır. Yani A, B nin normal alt grubudur. Diğer taraftan, her $* \in \Omega_2'$, $a \in A$ ve $b \in B$ için, $f(a*b) = f(a)*f(b) = 0*f(b) = 0$ olduğundan, $a*b \in A$ dır. Tersine, (i) ve (ii) şartlarından, B/A bölüm objesi elde edilir. Buradan A, $p : B \longrightarrow B/A$ projeksiyonunun çekirdeğidir. Yani A, B nin bir ideali olur. □

Tanım 2.6 $A,B \in \mathbb{C}$ olsun. p bir epimorfizim ve i, p nin çekirdeği olmak üzere, B nin A tarafından genişlemesi aşağıdaki gibi bir dizi ile temsil edilir:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B \longrightarrow 0 \tag{2.1}$$

Ayrıca, $ps = 1_B$ olacak şekilde bir $s : B \longrightarrow E$ morfizmi varsa bu genişlemeye split genişleme denir.

Tanım 2.7 B nin A tarafından oluşturulan split genişlemesine B-yapı denir.

Tanım 2.8 Her $* \in \Omega_2$ için $f_* : A \times B \longrightarrow A$ dönüşümü varsa, $A,B \in \mathbb{C}$ için B nin A üzerine etkilerinin bir kümesi vardır denir. Bir B-yapı, $\mathbb{C}$ deki işlemlere göre B nin A üzerine etkisini üretir. Eğer (2.1) dizisi bir split genişlemeyse, $b \in B$, $a \in A$ ve $* \in \Omega_2'$ için,

$$b \cdot a = s(b)+a-s(b), \tag{2.2}$$

$$b*a = s(b)*a. \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanan etkiler mevcuttur. (2.2) ve (2.3) tarafından tanımlanan etkilere B nin A üzerindeki derived etkileri denir. Tezin bundan sonraki kısımlarında $b\dot{*}a$ ifadesi, hem nokta hem de yıldız etkisini belirtmek için kullanılacaktır.

Tanım 2.9 B nin A üzerine etkisi verilsin. Buna göre, $A \rtimes B$ yarı-direk çarpımı $A \times B$ kümesi üzerinde, her $a, a' \in A$ ve $b, b' \in B$ için, üzerindeki işlemler

$$\omega(a,b) = (\omega(a), \omega(b)),$$

$$(a',b') + (a,b) = (a' + b' \cdot a, b' + b),$$

$$(a',b') * (a,b) = (a' * a + a' * b + b' * a, b' * b).$$

şeklinde tanımlı olan bir evrensel cebirdir.

Teorem 2.10 B nin A üzerine etkisinin bir derived etki olabilmesi için gerek ve yeter şart $A \rtimes B$ nin $\mathbb{C}$ nin elemanı olmasıdır.

İspat: B nin A üzerine aşağıdaki split genişleme tarafından tanımlanan bir derived etkisi olsun.

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B \longrightarrow 0$$

Burada sadece $A \rtimes B$ nin, modifiye interest kategorisi için verilen yeni şartı sağladığı gösterilecektir, diğer şartlar kolaylıkla kontrol edilebilir. Modifiye interest kategorisinin tanımından yola çıkılarak,

$\omega((a',b') * (a,b)) = \omega(a' * a + a' * b + b' * a, b' * b) = (\omega(a' * a) + \omega(a' * b) + \omega(b' * a), \omega(b' * b)) = (\omega(a') * \omega(a) + \omega(a') * \omega(b) + \omega(b') * \omega(a), \omega(b') * \omega(b)) = (\omega(a'), \omega(b')) * (\omega(a), \omega(b)) = \omega(a', b') * \omega(a, b)$ olduğu bulunur. □

Önerme 2.11 $\mathbb{C}_G$ de, B nin A üzerine etkisinin bir derived etki olabilmesi için gerek ve yeter şart her $\omega \in \Omega'_1$, $* \in \Omega'_2$, $b, b_1, b_2 \in B$, $a, a_1, a_2 \in A$ ve $x, y, z, t \in A \cup B$ için aşağıdaki şartların sağlanmasıdır:

1. $0 \cdot a = a$,
2. $b \cdot (a_1 + a_2) = b \cdot a_1 + b \cdot a_2$,
3. $(b_1 + b_2) \cdot a = b_1 \cdot (b_2 \cdot a)$,
4. $b * (a_1 + a_2) = b * a_1 + b * a_2$,
5. $(b_1 + b_2) * a = b_1 * a + b_2 * a$,
6. $(b_1 * b_2) \cdot (a_1 * a_2) = a_1 * a_2$,
7. $(b_1 * b_2) \cdot (a * b) = a * b$,

8. $a_1 * (b \cdot a_2) = a_1 * a_2$,
9. $b * (b_1 \cdot a) = b * a$,
10. $\omega(b \cdot a) = \omega(b) \cdot \omega(a)$,
11. $\omega(a * b) = \omega(a) * \omega(b)$,
12. $x * y + z * t = z * t + x * y$.

İspat: Tanım 2.8, 2.9 ve Teorem 2.10 kullanılarak ispat yapılabilir. □

Not 2.12 Önerme 2.11 deki 11. şart, interest kategorisi için Casas, Datuashvili ve Ladra (2010) da $\omega(a * b) = \omega(a) * b$ olarak verilmiştir.

Örnek 2.2 $(A, \omega_1^A, \omega_0^A)$ ve $(B, \omega_1^B, \omega_0^B)$, $\overline{\mathbb{A}}$ da iki asosyatif cebir olsun. Ayrıca, B nin A üzerine

$$0 \to A \to E \overset{s}{\underset{\frown}{\longrightarrow}} B \to 0$$

split genişlemesi tarafından elde edilen bir derived etkisi olsun. Buna göre, Tanım 2.8 ve Önerme 2.11 den hareketle her $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ için,

$$(b * b') * a = b * (b' * a)$$

$$a * (b * b') = (a * b) * b'$$

$$(b * a) * b' = b * (a * b')$$

$$b * (a * a') = (b * a) * a'$$

$$(a' * a) * b = a' * (a * b)$$

$$a * (b * a') = (a * b) * a'$$

eşitlikleri elde edilir.
Diğer taraftan, $\ker \omega_0^{A,B} * \ker \omega_1^{A,B} = 0$, $\ker \omega_1^{A,B} * \ker \omega_0^{A,B} = 0$ olduğundan her $a \in \ker \omega_0^A$, $b \in \ker \omega_0^B$ için,

$$b * (\omega_1^A(a) - a) = 0, (\omega_1^A(a) - a) * b = 0$$

ve

$$(\omega_1^B(b) - b) * a = 0, a * (\omega_1^B(b) - b) = 0$$

eşitlikleri elde edilir.
Sonuç olarak, her $b \in \ker \omega_0^B$, $a \in \ker \omega_0^A$ için,

$$b * \omega_1^A(a) = \omega_1^B(b) * a = b * a$$

ve

$$\omega_1^A(a) * b = a * \omega_1^B(b) = a * b$$

elde edilmiş olur.

Tanım 2.13 $C_0, C_1 \in \mathbb{C}$, C_0 ın C_1 üzerinde derived etkisi ve $\partial : C_1 \longrightarrow C_0$, $\mathbb{C}$ de bir morfizim olmak üzere, her $r \in C_0$, $c \in C_1$ ve $* \in \Omega_2'$ için,

(i) $\partial(r \cdot c) = r + \partial(c) - r$,

(ii) $\partial(r * c) = r * \partial(c)$

şartları sağlandığında, (C_1, C_0, ∂) üçlüsüne $\mathbb{C}$ de bir ön çaprazlanmış modül denir.
Eğer $\partial : C_1 \longrightarrow C_0$ morfizmi, her $c, c' \in C_1$ ve $* \in \Omega_2'$ için,

(iii) $\partial(c) \cdot c' = c + c' - c$

(iv) $\partial(c) * c' = c * c'$

şartlarını da sağlarsa, (C_1, C_0, ∂) üçlüsüne $\mathbb{C}$ de bir çaprazlanmış modül denir.

Tanım 2.14 (C_1, C_0, ∂) ve (C_1', C_0', ∂'), $\mathbb{C}$ de iki (ön)çaprazlanmış modül olsun. Her $r \in C_0$, $c \in C_1$ ve $* \in \Omega_2'$ için,

$$\mu_0 \partial(c) = \partial' \mu_1(c),$$
$$\mu_1(r \cdot c) = \mu_0(r) \cdot \mu_1(c),$$
$$\mu_1(r * c) = \mu_0(r) * \mu_1(c)$$

şartlarını sağlayan $\mu_0 : C_0 \longrightarrow C_0'$ ve $\mu_1 : C_1 \longrightarrow C_1'$ morfizimlerinin oluşturduğu (μ_1, μ_0) ikilisine (C_1, C_0, ∂) ile (C_1', C_0', ∂') (ön)çaprazlanmış modülleri arasındaki bir morfizim denir.

Tanım 2.15 A, B nin bir ideali olsun. Buna göre,

$C_B(A) = \{b \in B \mid \text{her } a \in A, \text{ tekli işlem } \omega \text{ ve } * \in \Omega_2' \text{ için, } a + b = b + a,\ a + \omega b = \omega b + a,\ a * b = 0,\ \omega(b) * a = 0\}$

kümesine A nın B deki merkezleyicisi denir. Buradaki ω, Ω_1' ndeki tekli işlemlerin herhangi bir sonlu bileşimidir.

Örnek 2.3 $L : L_1 \xrightarrow{d} L_0$, Lie cebirler kategorisinde bir ön çaprazlanmış modül ve $A : A_1 \xrightarrow{d} A_0$ da L nin bir ideali olsun. Buna göre, $\overline{\mathbb{L}}$ deki $L' := (L_1 \rtimes L_0, \omega_1, \omega_0)$ ve $A' := (A_1 \rtimes A_0, \omega_1, \omega_0)$ objelerinden yola çıkılarak $C_{L'}(A') = \{(l_1, l_0) \mid \text{her } (a_1, a_0) \in A_1 \rtimes A_0 \text{ için}, \left([l_1, a_1] +^{a_0} l_1 -^{l_0} a_1, [a_0, l_0]\right) = 0,\ \left({}^{l_0}a_1, [a_0, l_0]\right) = 0,\ \left(^{d(l_1)+l_0}a_1, [a_0, l_0]\right) = 0\}$ elde edilir.

Not 2.16 $P : \overline{\mathbb{L}} \longrightarrow PXLie$ ve $S : PXLie \longrightarrow \overline{\mathbb{L}}$ funktorları, bir merkezi yine bir merkeze taşırlar. Bu durum, $\overline{\mathbb{A}}$ ve $\overline{\mathbb{C}}$ için de geçerlidir.

Yardımcı Teorem 2.17 Bir modifiye interest kategorisinde, $C_B(A)$, B nin bir idealidir.

İspat: Tanım 2.15 den yola çıkılarak gösterilebilir. □

2.3 Modifiye İnterest Kategorisinde Etki ve Aktör Objesi

Şimdi, bir objenin aktörü kavramına giriş yapılacak ve $\mathbb{C}$ bir modifiye interest kategorisi olmak üzere, $\mathbb{C}$ de, bir objenin kesin etkisi, genel aktörü ve evrensel kesin genel aktörü kavramlarına yer verilecektir. Bu kavramlar, Casas, Datuashvili ve Ladra (2010) dakine benzer bir şekilde ve modifiye interest kategorisi için bazı düzenlemeler yapılarak verilecektir.

Tanım 2.18 $\mathbb{C}$ bir modifiye interest kategorisi ve A, $\mathbb{C}$ nin bir objesi olsun. $B \in \mathbb{C}$ objesinin, Borceux, Janelidze ve Kelly (2005) de bahsedildiği gibi, A için bir split genişleme sınıflandırıcısı olabilmesi için gerek ve yeter şart; B nin A üzerine bir derived etkisi olmak üzere, A üzerinde bir derived etkisi olan her $C \in \mathbb{C}$ objesi için, her $* \in \Omega_2'$, $a \in A$ ve $c \in C$ için, $c \cdot a = \varphi(c) \cdot a$, $c * a = \varphi(c) * a$ şeklinde tanımlı tek bir $\varphi : C \longrightarrow B$ morfizminin var olmasıdır.

Bu şartı sağlayan $B \in \mathbb{C}$ objesine, A nın bir aktörü denir ve $\mathrm{Act}(A)$ şeklinde gösterilir.

Not 2.19 Tanım 2.18 den anlaşılacağı üzere, bir objenin aktörü izomorfizim farkıyla tektir.

Tanım 2.20 $A, B \in \mathbb{C}$ olsun. Herhangi $b, b' \in B$ verildiğinde, her $a \in A$, $\omega \in \Omega_1'$ ve $* \in \Omega_2'$ için, $b \cdot a = b' \cdot a$, $(\omega(b)) \cdot a = (\omega(b')) \cdot a$, $b * a = b' * a$ ve $(\omega(b)) * a = (\omega(b')) * a$ şartları altında $b = b'$ oluyorsa, B nin A üzerine etkisine kesin etki denir.

Not 2.21 $\mathbb{C}_G$ deki derived etkiler söz konusu olduğunda tanımda verilen şart
"Her $a \in A$, $\omega \in \Omega_1'$ ve $* \in \Omega_2'$ için, $b \cdot a = a$, $(\omega(b)) \cdot a = a$, $b * a = 0$ ve $(\omega(b)) * a = 0$ ise, $b = 0$ dır"
şartına denk olur.

Not 2.22 Genellikle, $b * a = 0$ şartı $\omega(b) * a = 0$ olmasını gerektirmez. Örneğin, $L : L_1 \xrightarrow{d} L_0$ Lie cebirler kategorisinde bir ön çaprazlanmış modül ve $A_1 = \ker d$ olsun. Buna göre, $A : A_1 \xrightarrow{d} 0$, L nin bir ideali olur. $L' := (L_1 \rtimes L_0, \omega_1, \omega_0)$ ve $A' := (A_1 \rtimes 0, \omega_1, \omega_0)$ olsun. $l_1 \in Z(L_1)$ ise, her $a_1 \in A_1$ için, $[(l_1, 0), (a_1, 0)] = 0$ olur. Fakat, $[\omega_1(l_1, 0), (a_1, 0)] = [(0, d(l_1)), (a_1, 0)] = ({}^{d(l_1)}a_1, 0)$ ifadesi, $d(l_1) \in st_{L_0}L_1$ veya $a_1 \in L_1^{L_0}$ olduğunda sıfıra bölünür. Buradaki $st_{L_0}L_1$ ve $L_1^{L_0}$ kavramlarının tanımları, Casas, Datuashvili, Ladra ve Uslu (2012) da verilmiştir.

Örnek 2.4 Herhangi bir $A \in \mathbb{C}$ objesi için, A nın kendisi üzerine etkisi, her $a, a' \in A$ ve $* \in \Omega_2'$ için, $a \cdot a' = a + a' - a, a * a' = a * a'$ şeklinde tanımlanır. Burada $*$ sembolü, sol tarafta etkiyi, sağ tarafta A daki işlemi gösterir. Bu etkiye, A nın kendisi üzerindeki eşlenik etkisi denir.

Örnek 2.5 $A \in \mathbb{C}$ ve $Z(A) = 0$ olsun(Merkez tanımı Tanım 2.35 da verilmiştir). Buna göre, A nın A üzerindeki eşlenik etkisi kesindir.

Önerme 2.23 Bir derived etkinin kesin olması için gerek ve yeter şart (2.1) de verilen split genişlemede $\mathrm{Im(s)} \bigcap \mathrm{C_E(A)} = 0$ olmasıdır.

İspat: Tanım 2.15 ve 2.20 kullanılarak ispat yapılabilir. □

Örnek 2.6 $A \in \mathbb{C}$ olsun. Eğer A objesinin aktörü varsa, $\mathrm{Act}(A)$ nın A üzerindeki derived etkisi kesindir.

Not 2.24 $A \in \mathbb{C}$ olsun. Eğer $\mathrm{Act}(A)$ varsa, Tanım 2.18 ve Örnek 2.4 ten hareketle, her $a, a' \in A$ için, $\beta(a) \cdot a' = a \cdot a'$ ve $\beta(a) * a' = a * a'$ şeklinde tanımlanan $\mathbb{C}$ de tek bir $\beta : A \to \mathrm{Act}(A)$ morfizmi vardır.

Önerme 2.25 $A \in \mathbb{C}$ objesinin aktörü varsa:

(a) $\beta : A \to \mathrm{Act}(A)$ bir çaprazlanmış modüldür.

(b) $\beta : A \to \mathrm{Act}(A)$, tanım kümesi A olan çaprazlanmış modüller kategorisinde bir terminal objedir.

(c) Bu özelliği sağlayan izomorfizim farkıyla tek bir çaprazlanmış modül vardır.
(Yani; C, A nın başka bir aktörü olmak üzere, $\gamma : A \to C$ çaprazlanmış modülü varsa, $(A, \mathrm{Act}(A), \beta) \approx (A, C, \gamma)$ şeklinde bir çaprazlanmış modüller izomorfizmi vardır)

İspat: (a) Burada, herhangi $a, a' \in A$, $b \in \mathrm{Act}(A)$ ve $* \in \Omega_2'$ için,

$$(i)\beta(a) \cdot a' = a + a' - a,$$
$$(ii)\beta(b \cdot a) = b + \beta(a) - b,$$
$$(iii)\beta(a) * a' = a * a'$$
$$(iv)\beta(b * a) = b * \beta(a).$$

eşitliklerinin doğruluğunun gösterilmesi gerekmektedir. A nın kendisi üzerinde bir eşlenik etkisi olduğu için, buradan (i) ve (iii) eşitlikleri elde edilir. (i). eşitlik kullanılarak (ii). eşitlik için,

$$(\beta(b \cdot a)) \cdot a' = b \cdot a + a' - b \cdot a,$$

$$(b+\beta(a)-b)\cdot a' = b\cdot(\beta(a)\cdot(-b\cdot a')) = b\cdot(a-b\cdot a'-a) = b\cdot a+a'-b\cdot a.$$

ifadeleri yazılabilir. Ayrıca, Önerme 2.11 deki 8. şarttan

$$(\beta(b\cdot a))*a' = (b\cdot a)*a' = a*a'.$$

elde edilir. Diğer yandan, Önerme 2.11 deki 12. şart kullanılarak

$$(b+\beta(a)-b)*a' = b*a'+\beta(a)*a'-b*a' = \beta(a)*a' = a*a'.$$

elde edilir. Herhangi bir $\omega \in \Omega_1'$ tekli işlemi için, Önerme 2.11 deki 10. şart uygulanırsa,

$$\omega(\beta(b\cdot a)) = \beta(\omega(b\cdot a)) = \beta(\omega(b)\cdot\omega(a)),$$

elde edilir. Buradan da,

$$\omega(b+\beta(a)-b) = \omega(b)+\beta(\omega(a))-\omega(b).$$

olduğu bulunur.

Yukarıdaki eşitliklerde gösterildiği üzere, $\beta(\omega(b)\cdot\omega(a))$ ve $\omega(b)+\beta(\omega(a))-\omega(b)$ biçimindeki elemanlar, nokta etkisiyle, herhangi bir $a' \in A$ elemanı üzerinde aynı şekilde etkiye sahiptirler. $\omega_1,\ldots,\omega_n$ tekli işlemlerinin herhangi bir sonlu bileşimi için de, bu eşitlikler benzer bir şekilde elde edilebilir. Örnek 2.6 ya göre, $\mathrm{Act}(A)$ nın A üzerine etkisi kesin olduğundan (ii). eşitlik elde edilir.

(iv). eşitlik için, Aksiyom 1 in bir sonucu olarak, modifiye interest kategorisindeki derived etkinin özelliğinden $\beta(b*a)\cdot a' = (b*a)\cdot a' = a'$ eşitliği elde edilir. Aynı özellikten $(b*\beta(a))\cdot a' = a'$ eşitliği de yazılabilir. Yıldız işlemi için, $(A\cup B)$ kümesi için Aksiyom 2 uygulanırsa ve $\beta(a)*a' = a*a'$ olduğu dikkate alınırsa

$$\beta(b*a)*a' = (b*a)*a',$$

$$(b*\beta(a))*a' = (b*a)*a',$$

eşitlikleri elde edilir. Diğer yandan,

$$\omega(\beta(b*a))*a' = \beta(\omega(b*a))*a' = \omega(b*a)*a' = (\omega(b)*\omega(a))*a'$$

eşitlikleri ve Aksiyom 2 den de

$$\omega(b*\beta(a))*a' = (\omega(b)*\omega\beta(a))*a' = (\omega(b)*\beta\omega(a))*a' = (\omega(b)*\omega(a))*a'$$

eşitlikleri yazılabilir.

Act(A) nın A üzerinde bir kesin etkisi olduğundan, elde edilen eşitlikler (iv). eşitliğin doğru olduğunu gösterir.

(b) Yukarıda ispatı verilen (a) ifadesinden, çaprazlanmış modülün tanımından, bir aktörün evrensel bir obje olmasından ve A nın aktörlerinin A.üzerindeki etkilerinin kesin olmasından hareketle (b) ifadesi doğru olur.

(c) (b) den yola çıkılarak (c) ifadesinin de doğruluğu gösterilebilir. □

Tanım 2.26 $A \in \mathbb{C}$ objesinin genel aktörü, $\mathbb{C}_G$ de A üzerinde bir derived etkiye sahip $\mathbb{C}_G$ nin bir objesidir, GA(A) olarak gösterilir ve herhangi bir $C \in \mathbb{C}$ objesi ve C nin A üzerinde bir derived etkisi verildiğinde, her $c \in C$, $a \in A$ ve $* \in \Omega_2'$ için, $c \dot{*} a = \varphi(c) \dot{*} a$ şeklinde tanımlı $\mathbb{C}_G$ de tek bir $\varphi : C \longrightarrow$ GA(A) morfizmi vardır.

Tanım 2.27 Eğer GA(A) genel aktörünün A üzerindeki etkisi kesinse, GA(A) ya A nın bir kesin genel aktörü denir ve SGA(A) şeklinde gösterilir.

Koşul 1: $A \in \mathbb{C}$ olsun ve A üzerinde bir derived etkiye sahip olan $\mathbb{C}$ nin bütün objelerinin kümesi $\{B_j\}_{j\in J}$ ile gösterilsin. $\varphi_j : B_j \longrightarrow$ GA(A), $j \in J$ morfizmi de, Tanım 2.26 ye göre oluşturulan ve her $b_j \in B_j$, $a \in A$ ve $* \in \Omega_2'$ için, $b_j \dot{*} a = \varphi_j(b_j) \dot{*} a$ şeklinde tanımlanan tek morfizmi göstersin. Buna göre, GA(A) nın elemanları, herhangi $b \in B_i$, $b' \in B_j$, $* \in \Omega_2'$ ve $i, j \in J$ için,

$$(\varphi_i(b) * \varphi_j(b'))\overline{*}a = W(\varphi_i(b), \varphi_j(b'); a; *, \overline{*})$$

eşitliğini sağlar.

Tanım 2.28 Bir A objesinin evrensel kesin genel aktörü, Koşul 1 i sağlayan bir kesin genel aktördür, USGA(A) şeklinde gösterilir ve Koşul 1 i sağlayan herhangi bir SGA(A) kesin genel aktörü verildiğinde, herhangi bir $j \in J$ için $\psi_j \eta = \varphi_j$ şeklinde tanımlı, $\mathbb{C}_G$ kategorisinde tek bir $\eta :$ USGA$(A) \to$ SGA(A) morfizmi vardır. Buradaki $\varphi_j : B_j \to$ SGA(A) ve $\psi_j : B_j \to$ USGA(A) morfizimleri, genel aktör tanımına göre oluşturulan biricik morfizimleri gösterir.

Önerme 2.29 $\mathbb{C}$ bir modifiye interest kategorisi ve $A \in \mathbb{C}$ olsun. Eğer Act(A) aktörü varsa, $\eta :$ USGA$(A) \to$ Act(A) biricik morfizmi, her $x \in$ USGA(A) ve $a \in A$ için, $x \dot{*} a = \eta(x) \dot{*} (a)$ eşitliğini sağlayan bir izomorfizimdir.

İspat: Tanım 2.18 ve 2.28 kullanılarak gösterilebilir. □

Teorem 2.30 $\mathbb{C}$ bir modifiye interest kategorisi ve $A \in \mathbb{C}$ olsun. A nın bir aktörünün olabilmesi için gerek ve yeter şart $\mathrm{USGA}(A) \ltimes A$ yarı direk çarpımının $\mathbb{C}$ nin bir objesi olmasıdır. Bu durumda, $\mathrm{Act}(A) \cong \mathrm{USGA}(A)$ olur.

İspat: Tanım 2.18 ve Teorem 2.10 dan yola çıkılarak ispat yapılabilir. □

Şimdi, $\mathbb{C}$ deki bir A objesinin evrensel kesin genel aktörünün tanımı verilecek ve $\mathbb{C}_G$ deki herhangi bir obje için bu yapının varlığı gösterilecektir. Bu yapı oluşturulurken, Casas, Datuashvili ve Ladra (2010) da yer alan interest kategorisi için izlenen yola benzer bir şekilde ve modifiye interest kategorisi için bazı düzenlemeler yapılarak bir yöntem uygulanacaktır.

$A \in \mathbb{C}$ olsun; A nın $\mathbb{C}$ deki bütün split genişlemeleri ele alınsın.

$$E_j : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i_j} C_j \xrightarrow{p_j} B_j \longrightarrow 0\,, \quad j \in \mathbb{J}.$$

$j \neq k$ için $B_j = B_k = B$ olduğunda, bu duruma bağlı olarak oluşturulan genişlemeler B nin A üzerindeki farklı etkilerini türetir. $\{b_j\cdot, b_j * | b_j \in B_j, * \in \Omega_2'\}$, B_j nin A üzerindeki etkisi ile tanımlanan fonksiyonların kümesi olsun. Herhangi bir $b_j \in B_j$ elemanı için, $\mathbf{b}_j = \{b_j\cdot, b_j*, * \in \Omega_2'\}$ şeklinde bir gösterim verilsin ve $\mathbb{B} = \{\mathbf{b}_j | b_j \in B_j, j \in \mathbb{J}\}$ olsun.

Böylece, her $\mathbf{b}_j \in \mathbb{B}$, $j \in \mathbb{J}$ elemanı, $\mathbf{b}_j(*) = b_j * - : A \longrightarrow A, * \in \Omega_2$ şeklinde tanımlı bir $\mathbf{b}_j : \Omega_2 \longrightarrow$ Dönüşümler$(A \to A)$ fonksiyonunun özel bir halini ifade eder.

Modifiye interest kategorisi tanımındaki Aksiyom 2 ye göre, $\mathbb{B}$ nin elemanları için yazılan $\mathbf{b}_i * \mathbf{b}_k, * \in \Omega_2'$ şeklindeki yıldız işlemi,

$$(\mathbf{b}_i * \mathbf{b}_k)\overline{*}(a) = W(b_i, b_k; a; *, \overline{*}),$$
$$(\mathbf{b}_i * \mathbf{b}_k) \cdot (a) = a.$$

eşitlikleri ile tanımlanır. Toplama işlemi de,

$$(\mathbf{b}_i + \mathbf{b}_k) \cdot (a) = b_i \cdot (b_k \cdot a),$$
$$(\mathbf{b}_i + \mathbf{b}_k) * (a) = b_i * a + b_k * a.$$

eşitlikleri ile tanımlanır.
$\omega \in \Omega_1'$ tekli işlemi için,

$\omega(\mathbf{b}_k)\cdot(a) = \omega(b_k)\cdot(a)$,

$\omega(\mathbf{b}_k)*(a) = \omega(b_k)*(a)$,

$\omega(b*b') = \omega(b)*\omega(b')$ (interest kategorisinde bu şart $\omega(b*b') = \omega(b)*b'$ olarak verilmiştir),

$\omega(b_1+\cdots+b_n) = \omega(b_1)+\cdots+\omega(b_n)$,

$(-\mathbf{b}_k)\cdot(a) = (-b_k)\cdot a$,

$(-b)\cdot(a) = a$,

$(-\mathbf{b}_k)*(a) = -(b_k*a)$,

$(-b)*(a) = -(b*(a))$,

$-(b_1+\cdots+b_n) = -b_n-\cdots-b_1$.

eşitlikleri tanımlanır. Buradaki $b,b',b_1,...,b_n$ elemanları, $\mathbb{B}$ nin elemanları üzerindeki yıldız işlemlerinin belli bileşimleridir.

Yukarıda tanımlanan işlemlerin bütün türlerinin uygulanması ile elde edilen $\Omega_2 \longrightarrow$Dönüşümler$(A \to A)$ şeklindeki tüm fonksiyonların kümesi $\mathfrak{B}'(A)$ ile gösterilsin. Herhangi bir $a \in A$ ve herhangi bir $* \in \Omega_2'$ için, $b\dot{*}a = b'\dot{*}a$ eşitliği elde edilebilir. Fakat, herhangi bir $a \in A$ ve herhangi bir ω tekli işlemi için, $\omega b\cdot a = \omega b'\cdot a$ eşitliği yazılamaz (Buradaki ω işlemi, Ω_1' nün elemanlarının bir sonlu bileşimidir). Buna göre, şu şekilde bir bağıntı tanımlanır: $b,b' \in \mathfrak{B}'(A)$ için $b \sim b'$ bağıntısının tanımlanabilmesi için gerek ve yeter şart herhangi bir $a \in A$, herhangi bir $* \in \Omega_2'$ ve herhangi bir ω tekli işlemi için, $b\dot{*}(a) = b'\dot{*}(a)$ ve $\omega b\dot{*}(a) = \omega b'\dot{*}(a)$ olmasıdır. Bu bağıntı $\mathfrak{B}'(A)$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Buna göre $\mathfrak{B}(A) = \mathfrak{B}'(A)/\sim$ tanımlanır. $\mathfrak{B}'(A)$ üzerinde tanımlı işlemler $\mathfrak{B}(A)$ üzerindeki ilgili işlemleri tanımlar. Bundan sonrası için kolaylık açısından $\mathfrak{B}(A)$ nın elemanları, clb, clb' gibi sınıfların yerine b,b' gibi harflerle gösterilecektir.

Teorem 2.31 $A \in \mathbb{C}$ olsun. Buna göre;

i) $\mathfrak{B}(A)$, $\mathbb{C}_G$ nin bir objesidir.

ii) $\mathfrak{B}(A)$ nın A üzerindeki etkisi, $\mathbb{C}_G$ deki kesin derived etkidir.

iii) $\mathfrak{B}(A) \cong$ USGA(A).

İspat: $\mathfrak{B}(A)$ nın oluşturulması göz önünde bulundurularak ve Tanım 2.20, 2.28 kullanılarak ispat yapılabilir. □

Sonuç 2.32 $\mathbb{C}$ bir modifiye interest kategorisi olsun. Her $A \in \mathbb{C}$ objesinin bir evrensel kesin genel aktörü vardır. Bir A objesinin herhangi bir C evrensel kesin genel aktörü verildiğinde, her $c \in C$ ve $a \in A$ için, $\theta(c) \dot{*} a = c \dot{*} a$ eşitliğini sağlayan bir $\theta : C \approx \mathfrak{B}(A)$ izomorfizmi vardır.

Sonuç 2.32 e göre, bir evrensel kesin genel aktör izomorfizim farkıyla tektir.

$\mathfrak{a} = \{a\cdot, a*, * \in \Omega_2'\}$ olmak üzere, $d(a) = \mathfrak{a}$ şeklinde bir $d : A \longrightarrow \mathfrak{B}(A)$ dönüşümü tanımlansın. Buna göre tanımdan hareketle, her $a, a' \in A$ ve $* \in \Omega_2'$ için,

$$d(a) \cdot a' = a + a' - a,$$
$$d(a) * a' = a * a'$$

eşitlikleri elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.33 d, $\mathbb{C}_G$ de bir homomorfizimdir.

İspat: İlk olarak, her $\omega \in \Omega_1'$ ve $a \in A$ için, $d(\omega a) = \omega d(a)$ olduğu gösterilmelidir. Yani, her $a, a' \in A$, $\omega' \in \Omega_1'$ ve $* \in \Omega_2'$ için,

$$d(\omega a) \cdot (a') = (\omega d(a)) \cdot (a'),$$
$$\omega'(d(\omega a)) \cdot a' = \omega'(\omega d(a)) \cdot a',$$
$$d(\omega a) * (a') = (\omega d(a)) * (a'),$$
$$\omega'(d(\omega a)) * a' = \omega'(\omega d(a)) * a'.$$

olduğu gösterilmelidir.

Tanımdan,

$$d(\omega a) \cdot a' = \omega a + a' - \omega a,$$
$$\omega d(a) \cdot a' = \omega(\mathfrak{a}) \cdot a' = \omega a + a' - \omega a.$$

olduğu görülebilir.

Birinci eşitlik kullanılarak ikinci eşitlik elde edilebilir. Üçüncü eşitlik için ise,

$$d(\omega a) * a' = (\omega a) * a',$$
$$(\omega d(a)) * a' = \omega(\mathfrak{a}) * a' = \omega(a) * a'.$$

eşitlikleri kullanılabilir.

Ayrıca, üçüncü eşitlikten de ikinci eşitlik elde edilebilir.

$\omega = -$ için, $d(-a)\cdot(a') = (-(da))\cdot a'$ ve $(d(-a))*a' = (-d(a))*a'$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Şimdi, $d(a_1+a_2) = d(a_1)+d(a_2)$ olduğu gösterilecektir. Tanımdan yola çıkılarak, her $a \in A$ için eşitliğin iki tarafı da açılarak yazılırsa,

$$d(a_1+a_2)\cdot(a) = a_1+a_2+a-a_2-a_1,$$
$$\big(d(a_1)+d(a_2)\big)\cdot(a) = d(a_1)\cdot\big(d(a_2)\cdot a\big),$$

ifadeleri elde edilir, bu da nokta etki için istenen eşitliğin sağlanması demektir. $\omega(d(a_1+a_2))\cdot a = \omega(d(a_1)+d(a_2))\cdot a$ eşitliğinin ispatı birinci eşitliğe bağlı olarak yapılabilir.

Her $* \in \Omega_2'$ için,

$$d(a_1+a_2)*(a) = \big(d(a_1)+d(a_2)\big)*(a).$$

olduğu gösterilecektir.

Tanımdan ve özelliklerden,

$$d(a_1+a_2)*(a) = (a_1+a_2)*a = a_1*a+a_2*a,$$
$$\big(d(a_1)+d(a_2)\big)*(a) = d(a_1)*a+d(a_2)*a = a_1*a+a_2*a$$

ifadeleri elde edilir, bu da eşitliğin doğru olduğunu gösterir.

Sıradaki $d(a_1*a_2) = d(a_1)*d(a_2)$ eşitliğinin doğruluğunu ispatlamak için, aşağıdaki eşitliklerin her $\overline{*} \in \Omega_2'$ için doğru olduğu gösterilmelidir:

$d(a_1*a_2)\cdot(a) = (d(a_1)*d(a_2))\cdot(a)$,

$\omega(d(a_1*a_2))\cdot a = \omega(d(a_1)*d(a_2))\cdot a$,

$d(a_1*a_2)\overline{*}(a) = (d(a_1)*d(a_2))\overline{*}(a)$

$\omega(d(a_1*a_2))*a = \omega(d(a_1)*d(a_2))*a$.

$d(a_1*a_2)\cdot a = a_1*a_2+a-a_1*a_2 = a$ olduğu biliniyor, $A \in C$ olduğu için de Aksiyom 1 sağlanır. $\mathfrak{B}(A)$ nın A üzerine etkisinden yola çıkılarak, $(d(a_1)*d(a_2))\cdot a = a$ olduğu bulunur. İkinci eşitlik de benzer şekilde, d nin ω ile örtüşmesi kullanılarak ispatlanabilir.

Üçüncü eşitlik için, aşağıdaki hesaplamalar kullanılır:

$$d(a_1 * a_2)\overline{*}(a) = (a_1 * a_2)\overline{*}a = W(a_1, a_2; a; *, \overline{*}),$$
$$\big(d(a_1) * d(a_2)\big)\overline{*}(a) = W\big(d(a_1), d(a_2); a; *, \overline{*}\big).$$

Aksiyom 2 deki W kelimesinin ve d nin tanımından, yukarıdaki iki eşitliğin sağ tarafları birbirine eşittir. Son olarak dördüncü eşitlik için, aşağıdaki işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\omega(d(a_1 * a_2)) * a &= d(\omega(a_1 * a_2)) * a \\
&= (\omega(a_1) * \omega(a_2)) * a \\
&= W(\omega(a_1), \omega(a_2); a; *, \overline{*}) \\
&= W(d\omega(a_1), d\omega(a_2); a; *, \overline{*}) \\
&= (d\omega(a_1) * d\omega(a_2)) * a \\
&= (\omega d(a_1) * \omega d(a_2)) * a \\
&= \omega(d(a_1) * d(a_2)) * a
\end{aligned}$$

istenen sonuç elde edilmiş olur. □

Önerme 2.34 Herhangi bir $A \in \mathbb{C}$ objesi için:

(a) $d : A \longrightarrow \mathfrak{B}(A)$, $\mathbb{C}_G$ de bir çaprazlanmış modüldür.

(b) $\mathbb{C}$ deki herhangi bir $\gamma : A \to B$ çaprazlanmış modülü için, $\mathbb{C}_G$ de $A : (A, B, \gamma) \to (A, \mathfrak{B}(A), d)$ şeklinde tanımlı tek bir çaprazlanmış modül morfizmi vardır.

(c) $d : A \longrightarrow \mathfrak{B}(A)$ çaprazlanmış modülü, $\mathfrak{B}(A)$ nın, A nın bir evrensel kesin genel aktörü olması özelliği ile birlikte, izomorfizim farkıyla tektir.

İspat: (a) Çaprazlanmış modül tanımında verilen (i)-(iv) şartlarının sağlandığı kontrol edilmelidir.

(i). ve (iii). şartlar için, sırasıyla, $d(a_1) \cdot a_2 = a_1 + a_2 - a_1$ ve $d(a_1) * a_2 = a_1 * a_2$ eşitliklerinin doğru olduğu gösterilmelidir. Her iki eşitlik de d nin tanımından dolayı doğru olur. $a_1 * (d(a_2)) = d(a_2) *^{\circ} a_1 = a_2 *^{\circ} a_1 = a_1 * a_2$ olduğu dikkat edilmelidir.

(i). şart, $a \in A$ ve $b \in \mathfrak{B}(A)$ için, $d(b \cdot a) = b + d(a) - b$ olduğunu gösterir; dolayısıyla, $d(b \cdot a) \dot{*} a' = (b + da - b) \dot{*} a'$ ve $\omega_1 \ldots \omega_n(d(b \cdot a)) \cdot a' = \omega_1 \ldots \omega_n(b + da - b) \cdot a'$ olduğu

gösterilmelidir. Aşağıda birinci eşitliğin her iki tarafı nokta etki için hesaplanmıştır:

$$\begin{aligned} d(b\cdot a)\cdot a' &= b\cdot a + a' - b\cdot a, \\ (b+d(a)-b)\cdot a' &= b\cdot(d(a)\cdot(-b\cdot a')) \\ &= b\cdot(a-b\cdot a'-a) = b\cdot a + a' - b\cdot a. \end{aligned}$$

İkinci eşitlik de benzer şekilde ispatlanabilir. Şimdi de, birinci eşitliğin her iki tarafı yıldız etki için hesaplanacak olursa: Önerme 2.11 deki 8. özellik kullanılarak, $d(b\cdot a)*a' = (b\cdot a)*a' = a*a'$; herhangi bir $\overline{a}\in A$ için, Aksiyom 1 deki $\overline{a}+a*a' = a*a'+\overline{a}$ özelliği kullanılarak, $(b+da-b)*a' = b*a'+d(a)*a'-b*a' = b*a'+a*a'-b*a' = a*a'$ eşitlikleri elde edilir.

(iv). şart, herhangi $b\in\mathfrak{B}(A)$, $a\in A$ ve $*\in\Omega_2'$ için,

$$d(b*a) = b*d(a)$$

eşitliğini ifade eder. Bu nedenle, $b\in\mathfrak{B}(A)$, $a\in A$, $\omega\in\Omega_1'$ ve $\overline{*}\in\Omega_2'$ için,

$$d(b*a)\dot{\overline{*}}a' = (b*d(a))\dot{\overline{*}}a', \omega(d(b*a))\cdot a' = \omega(b*da)\cdot a', \omega(d(b*a))*a' = \omega(b*da)*a' \quad (2.4)$$

olduğu gösterilmelidir.
İlk olarak nokta işlemi için, (2.4) ün birinci eşitliği gösterilmelidir. Nokta işlemi için, ikinci eşitliğin ispatı benzer şekilde tekli işlemlerin özellikleri uygulanarak yapılabilir. $\mathfrak{B}(A)$ nın A üzerine etkisinin tanımından, (2.4) teki birinci eşitliğin sağ tarafı a' ne eşittir. Sol taraf için,

$$d(b*a)\cdot a' = b*a+a'-b*a.$$

elde edilir.

$b=b_i$ ise, $b*a = b_i*a$ dır. $B_i\in\mathbb{C}$ ve B_i nin A üzerine etkisi olduğundan, Aksiyom 1 e göre, $b*a+a' = a'+b*a$ ve dolayısıyla $d(b*a)\cdot a' = a'$ olur.

$b = b_{i_1}*_1\cdots*_{n-1}b_{i_n}$ ise, $*$ işleminin $\mathfrak{B}(A)$ daki tanımından, $b*a$ belli i_t ve $\overline{a}_t\in A$ elemanı için, $b_{i_t}*\overline{a}$ biçimindeki elemanların toplamı olarak yazılır; bu türden bir eleman tekrardan A nın herhangi bir elemanına karşılık gelir ve $d(b*a)\cdot a' = a'$ olur. Eğer b, $b_{i_1}*_1\cdots*_{n-1}b_{i_n}$ biçimindeki elemanların toplamı olarak yazılırsa, aynı sonuç elde edilir.

d nin tanımından,

$$d(b*a)\overline{*}a' = (b*a)\overline{*}a'.$$

eşitliği yazılır. $b=b_i$, $i\in J$, $b*a = b_i*a = b_i*a$ olması durumunda,

$$d(b*a)\overline{*}a' = (b_i*a)\overline{*}a = W(b_i,a;a';*,\overline{*}).$$

ifadesi elde edilir. $\mathbb{C}$ deki etkinin özelliklerine ve Aksiyom 2 ye göre ikinci eşitlik yazılır. $b = b_i$ olması durumunda, (2.4) ün sağ tarafı için,

$$(b * d(a))\overline{*}a' = (\mathbf{b}_i * \mathfrak{a})\overline{*}a' = W(b_i, a; a'; *, \overline{*}).$$

elde edilir.

$b = b_{i_1} *_1 \cdots *_{n-1} b_{i_n}$ olsun. Buna göre, $b * a$, $b_{i_t} * \overline{a}_t$ biçimindeki ve $(b * a)\overline{*}a'$ de $(b_{i_t} * \overline{a}_t)\overline{*}a'$ biçimindeki elemanların toplamıdır. Eşitliğin sağ tarafındaki bir eleman, $(b_{i_t} * \overline{a}_t) * a'$ biçimindeki elemanların toplamı şeklinde olacaktır. $(b_{i_t} * \overline{a}_t)\overline{*}a'$ elemanı için Aksiyom 2 uygulanırsa, $\mathfrak{B}(A)$ nın, $(b_{i_t} * \overline{\mathfrak{a}}_t) * a'$ şeklindeki elemanları için oluşturulan işlemin tanımından ve $b_{i_t} * a = b_{i_t} * a$, $\overline{\mathfrak{a}}_t * a = \overline{a}_t * a$ eşitliklerinden (2.4) teki ikinci eşitlik elde edilir. Benzer şekilde, b nin, $b_{i_1} *_1 \cdots *_{n-1} b_{i_n}$ biçimindeki elemanların toplamı olarak yazılması durumunda, eşitlik $*$ işlemi için de ispatlanabilir.

Diğer taraftan, $b = b_i$, $i \in J$, $\omega(b) * a = \omega(\mathbf{b}_i) * a = \omega(b_i) * a$ olması durumunda,

$$\begin{aligned}
\omega(d(b*a))\,\overline{*}a' &= d(\omega(b*a))\,\overline{*}a' \\
&= d(\omega(b) * \omega(a))\,\overline{*}a' \\
&= (\omega(b) * \omega(a))\,\overline{*}a' \\
&= (\omega(\mathbf{b}_i) * \omega(\mathfrak{a}))\,\overline{*}a' \\
&= W(\omega(b_i), \omega(a); a'; *, \overline{*}) \\
&= W(\omega(b_i), d\omega(a); a'; *, \overline{*}) \\
&= (\omega(b) * d\omega(a))\,\overline{*}a' \\
&= (\omega(b) * \omega d(a))\,\overline{*}a' \\
&= \omega(b * da) * a'
\end{aligned}$$

elde dilir. $b = b_{i_1} *_1 \cdots *_{n-1} b_{i_n}$ durumu için, aynı sonuç üçüncü şartta verilen yolla bulunabilir.

(b) ve (c) nin ispatları için, Sonuç 2.32 uygulanabilir. □

Tanım 2.35 $A \in \mathbb{C}$ olsun. A nın merkezi,

$$Z(A) = \ker d = \{z \in A \mid \text{her } a \in A,\ \omega \in \Omega_1 \text{ ve } * \in \Omega_2' \text{ için},$$
$$a + z = z + a,\ a + \omega z = \omega z + a,\ a * z = 0,\ \omega(z) * a = 0\}.$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanım ile, Huq (1968) da verilen tanım yeniden elde edilmiş olur ve $C_A(A) = Z(A)$ olduğu bulunur.

Sonuç 2.36 $\mathbb{C}$ bir modifiye interest kategorisi ve $A \in \mathbb{C}$ olsun. A nın bir aktörünün olması için gerek ve yeter şart $\mathfrak{B}(A) \ltimes A$ yarı direk çarpımının $\mathbb{C}$ nin bir objesi olmasıdır. Eğer A nın $\mathbb{C}$ de bir aktörü varsa, $\mathrm{Act}(A) \cong \mathfrak{B}(A)$ olur.

BÖLÜM 3

ASOSYATİF CEBİRLER ÜZERİNDE ÖN ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİN AKTÖRLERİ

3.1 Giriş

Norrie (1990) de gruplar üzerinde tanımlı çaprazlanmış modüllerin etkileri ve otomorfizimlerinden bahsedilmiştir. Arvasi ve Ege (2003) de değişmeli cebirler üzerinde tanımlı çaprazlanmış modüllerin aktörleri incelenmiştir. Casas ve Ladra (1995) da Lie cebirler üzerinde tanımlı çaprazlanmış modüllerin aktörleri verilmiştir. Casas, Datuashvili ve Ladra (2007, 2010) da genel olarak interest kategorilerindeki aktör kavramından, Casas, Datuashvili ve Ladra (2009) da gruplar üzerinde tanımlı ön çaprazlanmış modüllerin ve alternatif cebirlerin aktörlerinden bahsedilmiştir. Casas, Datuashvili, Ladra ve Uslu (2012) da da Lie cebirler kategorisinde tanımlı ön çaprazlanmış modüllerin aktörlerine değinilmiştir. Boyacı, Casas, Datuashvili ve Uslu'nun "Modified Category of Interest" isimli makalesinde de asosyatif cebirler üzerinde tanımlı çaprazlanmış modüllerin aktörlerine yer verilmiştir. Bu bölümde de, bu makalede yapılan çalışmanın bir genellemesi olarak, asosyatif cebirler üzerinde tanımlı ön çaprazlanmış modüllerin aktörleri inşaa edilecektir.

3.2 Aktör Objenin İnşaası

Bu bölümde bahsi geçen bütün ön çaprazlanmış modüller asosyatif cebirler kategorisinde tanımlı olacaktır ve her asosyatif cebirin aşağıdaki koşulu sağladığı kabul edilecektir.

Koşul 2: A bir asosyatif cebir ise, $Ann(A) = 0$ veya $A^2 = A$ dır.

Tanım 3.1 $\mathcal{A} : (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ bir ön çaprazlanmış modül olsun. α ve β sırasıyla A_1 ve A_0 ın bimultiplierleri olmak üzere, (α, β) ikilisi, $d\alpha_{l,r} = \beta_{l,r}d$ eşitliği ile her $a_0 \in A_0$ ve $a_1 \in A_1$ için

a) $\alpha_l({}^{a_0}a_1) = {}^{\beta_l(a_0)}a_1$

b) $\alpha_l(a_1^{a_0}) = (\alpha_l(a_1))^{a_0}$

c) ${}^{a_0}(\alpha_l(a_1)) = {}^{\beta_r(a_0)}a_1$

d) $\alpha_r(a_1{}^{a_0}) = a_1{}^{\beta_r(a_0)}$

e) $\alpha_r({}^{a_0}a_1) = {}^{a_0}\alpha_r(a_1)$

f) $(\alpha_r(a_1))^{a_0} = a_1{}^{\beta_l(a_0)}$

şartlarını sağlarsa, bu ikiliye $\mathcal{A}$ nın bir bimultiplieri denir. $\mathcal{A}$ nın bütün bimultiplierlerinin kümesi $Bim(\mathcal{A})$ ile gösterilir.

Not 3.2 Tanım 3.1 de, $d\alpha_l = \beta_l d$ ve $d\alpha_r = \beta_r d$ eşitlikleri birleştirilerek tek eşitlik olarak $d\alpha_{l,r} = \beta_{l,r} d$ şeklinde yazılmıştır. Tezin bundan sonraki kısmında bu gösterim şekli kullanılacaktır.

Sonuç 3.3 Toplama işlemi, skaler çarpım işlemi ve her $(\alpha,\beta),(\alpha',\beta') \in Bim(\mathcal{A})$ için,

$$(\alpha,\beta) * (\alpha',\beta') = ((\alpha * \alpha'),(\beta * \beta'))$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile birlikte $Bim(\mathcal{A})$ bir asosyatif cebir belirtir. Burada, $\alpha * \alpha' = (\alpha_l \circ \alpha'_l, \alpha_r \circ \alpha'_r)$ ve $\beta * \beta' = (\beta_l \circ \beta'_l, \beta_r \circ \beta'_r)$ şeklinde tanımlıdır.

İspat: Burada sadece $*$ işleminin iyi tanımlı olduğu gösterilecektir, diğer şartlar rutin işlemler ile kontrol edilebilir.

Her $a_1 \in A_1$ için,

$(d(\alpha_l \circ \alpha'_l))(a_1) = (d(\alpha_l\alpha'_l))(a_1) = d((\alpha_l\alpha'_l)(a_1)) = d(\alpha_l(\alpha'_l(a_1))) = \beta_l(d(\alpha'_l(a_1))) = \beta_l(\beta'_l(d(a_1))) = ((\beta_l\beta'_l)d)(a_1) = ((\beta_l \circ \beta'_l)d)(a_1)$
ve
$(d(\alpha_r \circ \alpha'_r))(a_1) = (d(\alpha_r\alpha'_r))(a_1) = d((\alpha_r\alpha'_r)(a_1)) = d(\alpha'_r(\alpha_r(a_1))) = \beta'_r(d(\alpha_r(a_1))) = \beta'_r(\beta_r(d(a_1))) = ((\beta_r\beta'_r)d)(a_1) = ((\beta_r \circ \beta'_r)d)(a_1)$

dir. Ayrıca, her $a_0 \in A_0$ ve $a_1 \in A_1$ için,

a) $(\alpha_l\alpha'_l)({}^{a_0}a_1) = \alpha_l(\alpha'_l({}^{a_0}a_1)) = \alpha_l({}^{\beta'_l(a_0)}a_1) = {}^{\beta_l(\beta'_l(a_0))}a_1 = {}^{(\beta_l\beta'_l)(a_0)}a_1$

b) $(\alpha_l\alpha'_l)(a_1^{a_0}) = \alpha_l(\alpha'_l(a_1^{a_0})) = \alpha_l((\alpha'_l(a_1))^{a_0}) = (\alpha_l(\alpha'_l(a_1)))^{a_0} = ((\alpha_l\alpha'_l)(a_1))^{a_0}$

c) ${}^{a_0}((\alpha_l\alpha'_l)(a_1)) = {}^{a_0}(\alpha_l(\alpha'_l(a_1))) = {}^{\beta_r(a_0)}\alpha'_l(a_1) = {}^{\beta'_r(\beta_r(a_0))}a_1 = {}^{(\beta_r\beta'_r)(a_0)}a_1$

d) $(\alpha_r\alpha'_r)({a_1}^{a_0}) = \alpha'_r(\alpha_r({a_1}^{a_0})) = \alpha'_r({a_1}^{\beta_r(a_0)}) = {a_1}^{\beta'_r(\beta_r(a_0))} = {a_1}^{(\beta_r\beta'_r)(a_0)}$

e) $(\alpha_r\alpha'_r)({}^{a_0}a_1) = \alpha'_r(\alpha_r({}^{a_0}a_1)) = \alpha'_r({}^{a_0}\alpha_r(a_1)) = {}^{a_0}\ \alpha'_r(\alpha_r(a_1)) = {}^{a_0}\ (\alpha_r\alpha'_r)(a_1)$

f) $((\alpha_r\alpha'_r)(a_1))^{a_0} = (\alpha'_r(\alpha_r(a_1)))^{a_0} = (\alpha_r(a_1))^{\beta'_l(a_0)} = {a_1}^{\beta_l(\beta'_l(a_0))} = {a_1}^{(\beta_l\beta'_l)(a_0)}$

olduğundan $(\alpha,\beta)*(\alpha',\beta') = ((\alpha*\alpha'),(\beta*\beta')) \in \mathit{Bim}(\mathcal{A})$ dır, yani çarpım iyi tanımlıdır. □

Şimdi, $\overline{\mathbb{A}}$ daki bir (A,ω_0,ω_1) objesinin bir aktörünün inşaası verilecektir. A nın bimultiplier (f,f^0,f^1) üçlülerinden,

M1) $i=0,1$ için, $f^i_{l,r}\omega_i = \omega_i f_{l,r}$,

M2) $i=0,1$ için, $f^0_{l,r}\omega_i = \omega_i f^0_{l,r}$,

M3) $i=0,1$ için, $f^1_{l,r}\omega_i = \omega_i f^1_{l,r}$.

şartlarını sağlayanlarının kümesi $\mathfrak{A}(A)$ ile gösterilsin. Buna göre, her (f,f^0,f^1) ve $(g,g^0,g^1) \in \mathfrak{A}(A)$ için

$$(f,f^0,f^1)*(g,g^0,g^1) = (f*g, f^0*g^0, f^1*g^1)$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi, bileşensel toplama işlemi ve skalerle çarpma işlemi ile birlikte, $\mathfrak{A}(A)$ bir asosyatif cebir yapısı oluşturur. 0, sıfır dönüşümünü göstermek üzere, bu cebir yapısının sıfır elemanı $(0,0,0)$ üçlüsüdür.

$\overline{\omega_0}$ ve $\overline{\omega_1}$ tekli işlemleri sırasıyla $\overline{\omega_0} : \mathfrak{A}(A) \longrightarrow \mathfrak{A}(A), \overline{\omega_0}(f,f^0,f^1) = (f^0,f^0,f^0)$ ve $\overline{\omega_1} : \mathfrak{A}(A) \longrightarrow \mathfrak{A}(A), \overline{\omega_1}(f,f^0,f^1) = (f^1,f^1,f^1)$ şeklinde tanımlansın. Bu tekli işlemlerle birlikte $(\mathfrak{A}(A),\overline{\omega_0},\overline{\omega_1})$, $\overline{\mathbb{A}}$ içinde bir objedir. Buna göre, $\mathfrak{A}(A)$ nın A üzerine her $a \in A$ ve $(f,f^0,f^1) \in \mathfrak{A}(A)$ için, $\mathfrak{A}(A)\times A \longrightarrow A$, $((f,f^0,f^1),a) = f_l(a)$, $A\times\mathfrak{A}(A) \longrightarrow A$, $(a,(f,f^0,f^1)) = f_r(a)$ şeklinde verilen dönüşümler ile tanımlanan bir asosyatif cebir etkisi vardır.

Sonuç 3.4 $(\mathfrak{B}(A),\omega_0,\omega_1)$ evrensel kesin genel aktörü, $(\mathfrak{A}(A),\overline{\omega_0},\overline{\omega_1})$ objesine izomorftur ve $(\mathfrak{A}(A),\overline{\omega_0},\overline{\omega_1})$, (A,ω_0,ω_1) nın aktörüdür.

$\mathcal{A} : (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ bir ön çaprazlanmış modül ve $(A_1 \rtimes A_0,\omega_0,\omega_1)$, buna bağlı olarak elde edilen $\mathbf{Cat^1}$-cebir olsun. Şimdi, $(A_1 \rtimes A_0,\omega_0,\omega_1)$ in aktörü olan $(\mathfrak{A}(A_1 \rtimes A_0),\overline{\omega_0},\overline{\omega_1})$ ile ilgili bazı özellikler elde edilecektir.

$f=(f_l,f_r)\in Bim(A_1\rtimes A_0)$ olsun. Buna göre,

$$f_l : A_1\rtimes A_0 \longrightarrow A_1\rtimes A_0$$

dönüşümü

$$\alpha_l : A_1 \longrightarrow A_1, \gamma_l : A_1 \longrightarrow A_0, \beta_l : A_0 \longrightarrow A_0 \text{ ve } \partial_l : A_0 \longrightarrow A_1$$

şeklinde tanımlı dört tane k-lineer dönüşümünden oluşur. Bu dönüşümler, her $a_1\in A_1$, $a_0\in A_0$ için

$$f_l(a_1,a_0)=(\alpha_l(a_1)+\partial_l(a_0),\beta_l(a_0)+\gamma_l(a_1))$$

eşitliğini sağlar. Benzer şekilde,

$$f_r : A_1\rtimes A_0 \longrightarrow A_1\rtimes A_0$$

dönüşümü de

$$\alpha_r : A_1 \longrightarrow A_1, \gamma_r : A_1 \longrightarrow A_0, \beta_r : A_0 \longrightarrow A_0 \text{ ve } \partial_r : A_0 \longrightarrow A_1$$

şeklinde tanımlı dört tane k-lineer dönüşümünden oluşur. Bu dönüşümler de, her $a_1\in A_1$, $a_0\in A_0$ için

$$f_r(a_1,a_0)=(\alpha_r(a_1)+\partial_r(a_0),\beta_r(a_0)+\gamma_r(a_1))$$

eşitliğini sağlar.

$f=(f_l,f_r)\in Bim(A_1\rtimes A_0)$ olsun ve f, M2 veya M3 şartını sağlasın. Buna göre, $(a_1,0)\in (A_1\rtimes A_0)$ için,

$f_l\omega_0=\omega_0 f_l$,
$f_l\omega_0(a_1,0)=\omega_0 f_l(a_1,0)$,
$f_l(0,0)=\omega_0(\alpha_l(a_1)+\partial_l(0),\beta_l(0)+\gamma_l(a_1))$,
$(0,0)=\omega_0(\alpha_l(a_1),\gamma_l(a_1))$,
$(0,0)=(0,\gamma_l(a_1))$
ve
$f_r\omega_0=\omega_0 f_r$,
$f_r\omega_0(a_1,0)=\omega_0 f_r(a_1,0)$,
$f_r(0,0)=\omega_0(\alpha_r(a_1)+\partial_r(0),\beta_r(0)+\gamma_r(a_1))$,
$(0,0)=\omega_0(\alpha_r(a_1),\gamma_r(a_1))$,
$(0,0)=(0,\gamma_r(a_1))$

olduğundan $\gamma_r=\gamma_l=0$ olarak bulunur ve f, kısaca (α,∂,β) üçlüsü ile gösterilebilir. Ayrıca, her

$(a_1,a_0),(b_1,b_0) \in (A_1 \rtimes A_0)$ için,

$f_l((a_1,a_0)*(b_1,b_0)) = f_l(a_1,a_0)*(b_1,b_0)$ olduğundan

$f_l(a_1*b_1+ {}^{a_0}b_1 + a_1{}^{b_0}, a_0*b_0) = (\alpha_l(a_1)+\partial_l(a_0), \beta_l(a_0))*(b_1,b_0)$

$(\alpha_l(a_1*b_1)+\alpha_l({}^{a_0}b_1)+\alpha_l(a_1{}^{b_0})+\partial_l(a_0*b_0), \beta_l(a_0*b_0)) = ((\alpha_l(a_1)+\partial_l(a_0))*b_1+(\alpha_l(a_1)+\partial_l(a_0))^{b_0}+ {}^{\beta_l(a_0)}b_1, \beta_l(a_0)*b_0)$

eşitliği sağlanır. Bu son eşitlikte, $a_0 = b_0 = 0$ olarak seçilirse,

$(\alpha_l(a_1*b_1),0) = ((\alpha_l(a_1))*b_1,0) \Longrightarrow \alpha_l(a_1*b_1) = \alpha_l(a_1)*b_1,$

$a_1 = b_1 = 0$ olarak seçilirse,

$(\partial_l(a_0*b_0), \beta_l(a_0*b_0)) = ((\partial_l(a_0))^{b_0}, \beta_l(a_0)*b_0) \Longrightarrow \beta_l(a_0*b_0) = \beta_l(a_0)*b_0$ ve $\partial_l(a_0*b_0) = (\partial_l(a_0))^{b_0},$

$a_1 = b_0 = 0$ olarak seçilirse,

$(\alpha_l({}^{a_0}b_1),0) = (\partial_l(a_0)*b_1+ {}^{\beta_l(a_0)}b_1, 0) \Longrightarrow \alpha_l({}^{a_0}b_1) = \partial_l(a_0)*b_1+ {}^{\beta_l(a_0)}b_1,$

$a_0 = b_1 = 0$ olarak seçilirse,

$(\alpha_l(a_1{}^{b_0}),0) = ((\alpha_l(a_1))^{b_0},0) \Longrightarrow \alpha_l(a_1{}^{b_0}) = (\alpha_l(a_1))^{b_0}$

olarak bulunur. Yine benzer şekilde, her $(a_1,a_0),(b_1,b_0) \in (A_1 \rtimes A_0)$ için,

$f_r((a_1,a_0)*(b_1,b_0)) = (a_1,a_0)*f_r(b_1,b_0)$ olduğundan

$f_r(a_1*b_1+ {}^{a_0}b_1 + a_1{}^{b_0}, a_0*b_0) = (a_1,a_0)*(\alpha_r(b_1)+\partial_r(b_0), \beta_r(b_0))$

$(\alpha_r(a_1*b_1)+\alpha_r({}^{a_0}b_1)+\alpha_r(a_1{}^{b_0})+\partial_r(a_0*b_0), \beta_r(a_0*b_0)) = (a_1*(\alpha_r(b_1)+\partial_r(b_0))+ {}^{a_0}(\alpha_r(b_1)+\partial_r(b_0))+ a_1{}^{\beta_r(b_0)}, a_0*\beta_r(b_0))$

eşitliği sağlanır. Bu son eşitlikte, $a_0 = b_0 = 0$ olarak seçilirse,

$(\alpha_r(a_1*b_1),0) = (a_1*\alpha_r(b_1),0) \Longrightarrow \alpha_r(a_1*b_1) = a_1*\alpha_r(b_1),$

$a_0 = b_1 = 0$ olarak seçilirse,

$(\alpha_r(a_1{}^{b_0}),0) = (a_1*\partial_r(b_0)+a_1{}^{\beta_r(b_0)},0) \Longrightarrow \alpha_r(a_1{}^{b_0}) = a_1*\partial_r(b_0)+a_1{}^{\beta_r(b_0)},$

$a_1 = b_0 = 0$ olarak seçilirse,

$(\alpha_r({}^{a_0}b_1),0) = ({}^{a_0}\alpha_r(b_1),0) \Longrightarrow \alpha_r({}^{a_0}b_1) = {}^{a_0}\ \alpha_r(b_1)$,

$a_1 = b_1 = 0$ olarak seçilirse,

$(\partial_r(a_0 * b_0), \beta_r(a_0 * b_0)) = ({}^{a_0}\partial_r(b_0), a_0 * \beta_r(b_0)) \Longrightarrow \partial_r(a_0 * b_0) = {}^{a_0}\ \partial_r(b_0)$ ve $\beta_r(a_0 * b_0) = a_0 * \beta_r(b_0)$

eşitlikleri elde edilir. Diğer taraftan, her $(a_1,a_0),(b_1,b_0) \in (A_1 \rtimes A_0)$ için,

$(a_1,a_0) * f_l(b_1,b_0) = f_r(a_1,a_0) * (b_1,b_0)$ olduğundan

$(a_1,a_0) * (\alpha_l(b_1) + \partial_l(b_0), \beta_l(b_0)) = (\alpha_r(a_1) + \partial_r(a_0), \beta_r(a_0)) * (b_1,b_0)$

$(a_1 * (\alpha_l(b_1) + \partial_l(b_0)) + {}^{a_0}(\alpha_l(b_1) + \partial_l(b_0)) + a_1{}^{\beta_l(b_0)}, a_0 * \beta_l(b_0)) = ((\alpha_r(a_1) + \partial_r(a_0)) * b_1 + (\alpha_r(a_1) + \partial_r(a_0))^{b_0} + {}^{\beta_r(a_0)}b_1, \beta_r(a_0) * b_0)$

eşitliği sağlanır. Bu son eşitlikte, $a_0 = b_0 = 0$ olarak seçilirse,

$(a_1 * \alpha_l(b_1), 0) = (\alpha_r(a_1) * b_1, 0) \Longrightarrow a_1 * \alpha_l(b_1) = \alpha_r(a_1) * b_1$,

$a_1 = b_1 = 0$ olarak seçilirse,

$({}^{a_0}(\partial_l(b_0)), a_0 * \beta_l(b_0)) = ((\partial_r(a_0))^{b_0}, \beta_r(a_0) * b_0) \Longrightarrow {}^{a_0}(\partial_l(b_0)) = (\partial_r(a_0))^{b_0}$ ve $a_0 * \beta_l(b_0) = \beta_r(a_0) * b_0$,

$a_0 = b_1 = 0$ olarak seçilirse,

$(a_1 * \partial_l(b_0) + a_1{}^{\beta_l(b_0)}, 0) = ((\alpha_r(a_1))^{b_0}, 0) \Longrightarrow a_1 * \partial_l(b_0) + a_1{}^{\beta_l(b_0)} = (\alpha_r(a_1))^{b_0}$,

$a_1 = b_0 = 0$ olarak seçilirse,

$({}^{a_0}(\alpha_l(b_1)), 0) = ((\partial_r(a_0)) * b_1 + {}^{\beta_r(a_0)}b_1, 0) \Longrightarrow {}^{a_0}(\alpha_l(b_1)) = (\partial_r(a_0)) * b_1 + {}^{\beta_r(a_0)}b_1$

olarak bulunur. Dolayısıyla, bu elde edilenlerden yola çıkılarak $\alpha \in Bim(A_1)$, $\beta \in Bim(A_0)$ olduğu ve her $a_1 \in A_1$, $a_0, a_0' \in A_0$ için

$$
\begin{aligned}
A1. \quad \alpha_l({}^{a_0}a_1) &= \partial_l(a_0) * a_1 + {}^{\beta_l(a_0)}a_1 \\
A2. \quad \alpha_l(a_1^{a_0}) &= (\alpha_l(a_1))^{a_0} \\
A3. \quad {}^{a_0}(\alpha_l(a_1)) &= (\partial_r(a_0)) * a_1 + {}^{\beta_r(a_0)}a_1 \\
A4. \quad \alpha_r(a_1{}^{a_0}) &= a_1 * \partial_r(a_0) + a_1{}^{\beta_r(a_0)} \\
A5. \quad \alpha_r({}^{a_0}a_1) &= {}^{a_0}\alpha_r(a_1) \\
A6. \quad (\alpha_r(a_1))^{a_0} &= a_1 * \partial_l(a_0) + a_1{}^{\beta_l(a_0)} \\
A7. \quad \partial_r(a_0 * a_0') &= {}^{a_0}\partial_r(a_0') \\
A8. \quad \partial_l(a_0 * a_0') &= (\partial_l(a_0))^{a_0'} \\
A9. \quad {}^{a_0}(\partial_l(a_0')) &= (\partial_r(a_0))^{a_0'}
\end{aligned}
$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür.

$f := (\alpha, \partial, \beta)$, $f' := (\alpha', \partial', \beta') \in Bim(A_1 \rtimes A_0)$ olsun ve f ile f', M2 veya M3 şartını sağlasın. Buna göre, $f * f'$ çarpımının tanımı kullanılarak $f * f' = (\alpha * \alpha', \partial * \partial', \beta * \beta')$ elde edilir. Burada, $\alpha * \alpha'$ ile $\beta * \beta'$ bimultiplierlerin çarpımını ifade eder ve $\alpha * \alpha' = (\alpha_l \circ \alpha_l', \alpha_r \circ \alpha_r')$ ve $\beta * \beta' = (\beta_l \circ \beta_l', \beta_r \circ \beta_r')$ şeklinde tanımlıdır. $\partial * \partial'$ için de

$$
\begin{aligned}
(\partial * \partial')_l &= \alpha_l \partial_l' + \partial_l \beta_l' \\
(\partial * \partial')_r &= \alpha_r' \partial_r + \partial_r' \beta_r
\end{aligned}
$$

eşitlikleri sağlanır. Bu eşitliklerin elde edilişinde aşağıdaki yol izlenir:
Her $(a_1, a_0) \in (A_1 \rtimes A_0)$ için,

$$(f_l f_l')(a_1, a_0) = f_l(f_l'(a_1, a_0))$$

$$((\alpha_l \alpha_l')(a_1) + (\partial_l \partial_l')(a_0), (\beta_l \beta_l')(a_0)) = f_l(\alpha_l'(a_1) + \partial_l'(a_0), \beta_l'(a_0))$$

$$(\alpha_l(\alpha_l'(a_1)) + \partial_l(\partial_l'(a_0)), \beta_l(\beta_l'(a_0))) = (\alpha_l(\alpha_l'(a_1) + \partial_l'(a_0)) + \partial_l(\beta_l'(a_0)), \beta_l(\beta_l'(a_0)))$$

$$(\alpha_l(\alpha_l'(a_1)) + \partial_l(\partial_l'(a_0)), \beta_l(\beta_l'(a_0))) = (\alpha_l(\alpha_l'(a_1)) + \alpha_l(\partial_l'(a_0)) + \partial_l(\beta_l'(a_0)), \beta_l(\beta_l'(a_0)))$$

eşitlikleri sağlanır. Buradan, $(\partial * \partial')_l = \alpha_l \partial_l' + \partial_l \beta_l'$ olduğu görülür. Yine benzer şekilde, her $(a_1, a_0) \in (A_1 \rtimes A_0)$ için,

$$(f_r f_r')(a_1, a_0) = f_r'(f_r(a_1, a_0))$$

$$((\alpha_r \alpha_r')(a_1) + (\partial_r \partial_r')(a_0), (\beta_r \beta_r')(a_0)) = f_r'(\alpha_r(a_1) + \partial_r(a_0), \beta_r(a_0))$$

$$(\alpha_r'(\alpha_r(a_1)) + (\partial_r \partial_r')(a_0), \beta_r'(\beta_r(a_0))) = (\alpha_r'(\alpha_r(a_1) + \partial_r(a_0)) + \partial_r'(\beta_r(a_0)), \beta_r'(\beta_r(a_0)))$$

$(\alpha'_r(\alpha_r(a_1))+(\partial_r\partial'_r)(a_0),\beta'_r(\beta_r(a_0)))=(\alpha'_r(\alpha_r(a_1))+\alpha'_r(\partial_r(a_0))+\partial'_r(\beta_r(a_0)),\beta'_r(\beta_r(a_0)))$

eşitlikleri sağlanır. Buradan, $(\partial*\partial')_r=\alpha'_r\partial_r+\partial'_r\beta_r$ olduğu görülür.

Tanım 3.5 $\mathcal{A}:(A_1\xrightarrow{d}A_0)$ bir ön çaprazlanmış modül, $\partial_l:A_0\longrightarrow A_1$ ile $\partial_r:A_0\longrightarrow A_1$ birer **k**-lineer dönüşüm olmak üzere her a_0, $a'_0\in A_0$ için $\partial_r(a_0*a'_0)={}^{a_0}\partial_r(a'_0)$, $\partial_l(a_0*a'_0)=(\partial_l(a_0))^{a'_0}$ ve ${}^{a_0}(\partial_l(a'_0))=(\partial_r(a_0))^{a'_0}$ şartları sağlanıyorsa $\partial:=(\partial_l,\partial_r)$ ikilisine $\mathcal{A}$ nın bir çaprazlanmış bimultiplieri denir.

Önerme 3.6 $\mathcal{A}:(A_1\xrightarrow{d}A_0)$ bir ön çaprazlanmış modül ve $(A_1\rtimes A_0,\omega_0,\omega_1)$, buna bağlı olarak elde edilen $\mathbf{Cat^1}$-cebir olsun. Ayrıca, $(f,f^0,f^1)\in\mathfrak{A}(A_1\rtimes A_0)$ ve $f:=(\alpha,\partial,\beta)$, $f^0:=(\alpha^0,\partial^0,\beta^0)$, $f^1:=(\alpha^1,\partial^1,\beta^1)$ olsun. Buna göre, (f,f^0,f^1), her $a_1\in A_1$, $a_0\in A_0$ için

1.) $\beta_{l,r}(a_0)=\beta^0_{l,r}(a_0)$

2.) $i=0,1$ için, $\partial^i_{l,r}(a_0)=0$

3.) $\beta^1_{l,r}(a_0)=d\partial_{l,r}(a_0)+\beta_{l,r}(a_0)$

4.) $\beta^1_{l,r}d(a_1)=d\alpha_{l,r}(a_1)$

5.) $i=0,1$ için, $\beta^i_{l,r}d(a_1)=d\alpha^i_{l,r}(a_1)$

şartlarını sağlar.

İspat: 1.) $(f,f^0,f^1)\in\mathfrak{A}(A_1\rtimes A_0)$ olduğundan, M1 şartında $i=0$ alınırsa $f^0_l\omega_0=\omega_0 f_l$ eşitliği sağlanır. Bu eşitlik $(a_1,a_0)\in(A_1\rtimes A_0)$ için uygulanırsa,

$f^0_l\omega_0(a_1,a_0)=\omega_0 f_l(a_1,a_0)$,

$f^0_l(0,a_0)=\omega_0(\alpha_l(a_1)+\partial_l(a_0),\beta_l(a_0))$,

$(\partial^0_l(a_0),\beta^0_l(a_0))=(0,\beta_l(a_0))$,

olarak bulunur. Buradan da $\partial^0_l(a_0)=0$ ve $\beta^0_l(a_0)=\beta_l(a_0)$ elde edilir. Yine benzer şekilde, aynı eşitlikten $\partial^0_r(a_0)=0$ ve $\beta^0_r(a_0)=\beta_r(a_0)$ elde edilebilir.

2.) 1. maddeden $\partial^0_{l,r}(a_0)=0$ elde edilir. $\partial^1_{l,r}(a_0)=0$ için ise, M1 şartı $i=1$ için tekrar kullanılabilir. $f^1_l\omega_1=\omega_1 f_l$ eşitliği $(0,a_0)\in(A_1\rtimes A_0)$ için uygulanırsa,

$f^1_l\omega_1(0,a_0)=\omega_1 f_l(0,a_0)$,

$f_l^1(0,a_0) = \omega_1(\partial_l(a_0), \beta_l(a_0))$,

$(\partial_l^1(a_0), \beta_l^1(a_0)) = (0, d(\partial_l(a_0)) + \beta_l(a_0))$

olarak bulunur. Buradan da $\partial_l^1(a_0) = 0$ ve $\beta_l^1(a_0) = d\partial_l(a_0) + \beta_l(a_0)$ elde edilir. Yine benzer şekilde, aynı eşitlikten $\partial_r^1(a_0) = 0$ ve $\beta_r^1(a_0) = d\partial_r(a_0) + \beta_r(a_0)$ dır.

3.) 2. maddeden elde edilir.

4.) $f_l^1\omega_1 = \omega_1 f_l$ eşitliği $(a_1,0) \in (A_1 \rtimes A_0)$ için uygulanırsa,

$f_l^1\omega_1(a_1,0) = \omega_1 f_l(a_1,0)$,

$f_l^1(0, d(a_1)) = \omega_1(\alpha_l(a_1), 0)$,

$(\partial_l^1 d(a_1), \beta_l^1 d(a_1)) = (0, d\alpha_l(a_1))$

olarak bulunur, buradan $\beta_l^1 d(a_1) = d\alpha_l(a_1)$ dir. Yine benzer şekilde, aynı eşitlikten $\beta_r^1 d(a_1) = d\alpha_r(a_1)$ dir.

5.) M2 şartında $i = 1$ alınırsa, $f_l^0\omega_1 = \omega_1 f_l^0$ eşitliği sağlanır. Bu eşitlik $(a_1,0) \in (A_1 \rtimes A_0)$ için uygulanırsa,

$f_l^0\omega_1(a_1,0) = \omega_1 f_l^0(a_1,0)$,

$f_l^0(0, d(a_1)) = \omega_1(\alpha_l^0(a_1), 0)$,

$(\partial_l^0 d(a_1), \beta_l^0 d(a_1)) = (0, d\alpha_l^0(a_1))$

olarak bulunur, buradan da $\beta_l^0 d(a_1) = d\alpha_l^0(a_1)$ elde edilir. Yine benzer şekilde, aynı eşitlikten $\beta_r^0 d(a_1) = d\alpha_r^0(a_1)$ elde edilebilir. Diğer taraftan, M3 şartında $i = 1$ alınırsa ve aynı işlemler takip edilirse de, $\beta_l^1 d(a_1) = d\alpha_l^1(a_1)$ ve $\beta_r^1 d(a_1) = d\alpha_r^1(a_1)$ elde edilmiş olur. □

Önerme 3.7 $\mathcal{A} : (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ bir ön çaprazlanmış modül, $(A_1 \rtimes A_0, \omega_0, \omega_1)$, buna bağlı olarak elde edilen **Cat^1**-cebir ve $(\mathfrak{A}(A_1 \rtimes A_0), \overline{\omega_0}, \overline{\omega_1})$ de bu asosyatif cebirin aktörü olsun. $\overline{\omega_0}$ dönüşümünün tanımından hareketle, $\ker\overline{\omega_0} = \{(f,0,f^1) : \text{bazı } f^0 \in Bim(A_1 \rtimes A_0) \text{ için}, (f,f^0,f^1) \in \mathfrak{A}(A_1 \rtimes A_0)\}$ elde edilir. Diğer taraftan, Önerme 3.6 daki 1. ve 2. maddelerden dolayı $(f,0,f^1)$, $(f,0,f^1) := ((\alpha,\partial,0),(0,0,0),(\alpha^1,0,\beta^1))$ olarak ifade edilebilir. Buna göre, $(f,0,f^1) := ((\alpha,\partial,0),(0,0,0),(\alpha^1,0,\beta^1)) \in \ker\overline{\omega_0}$ olsun. Her $a_0 \in A_0$, $a_1 \in A_1$ için

1.) a) $\alpha_l({}^{a_0}a_1) = \partial_l(a_0) * a_1,$

b) $\alpha_l(a_1^{a_0}) = (\alpha_l(a_1))^{a_0},$

c) ${}^{a_0}(\alpha_l(a_1)) = (\partial_r(a_0)) * a_1,$

d) $\alpha_r(a_1{}^{a_0}) = a_1 * \partial_r(a_0),$

e) $\alpha_r({}^{a_0}a_1) = {}^{a_0}\alpha_r(a_1),$

f) $(\alpha_r(a_1))^{a_0} = a_1 * \partial_l(a_0),$

2.) $(\alpha^1, \beta^1) \in Bim(\mathcal{A}),$

3.) $\beta_{l,r}(a_0) = 0,$

4.) $d\partial_{l,r}(a_0) = \beta^1_{l,r}(a_0),$

5.) $\beta^1_{l,r}d(a_1) = d\alpha_{l,r}(a_1),$

6.) $\beta^1_{l,r}d(a_1) = d\alpha^1_{l,r}(a_1),$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: 1.) $\beta_{l,r}(a_0) = \beta^0_{l,r}(a_0) = 0$ olduğundan, A1-A6 eşitlikleri buna göre düzenlendiğinde, a-f maddelerinin doğruluğu gösterilmiş olur.

2.) $f^1 \in Bim(A_1 \rtimes A_0)$ ve $\partial^1_{l,r}(a_0) = 0$ olduğundan f^1, $f^1 := (\alpha^1, 0, \beta^1)$ olarak ifade edilir. A1-A6 eşitlikleri buna göre düzenlendiğinde, $\mathcal{A}$ ön çaprazlanmış modülü için bimultiplier olma şartları sağlanmış olur.

3.) Önerme 3.6 dan ve $\beta^0_{l,r}(a_0) = 0$ olduğundan, $\beta_{l,r}(a_0) = \beta^0_{l,r}(a_0) = 0$ elde edilir.

4.) Önerme 3.6 dan ve $\beta_{l,r}(a_0) = 0$ olduğundan, $d\partial_{l,r}(a_0) = \beta^1_{l,r}(a_0)$ elde edilir.

5.) ve 6.) maddeleri Önerme 3.6 dan elde edilir. □

Bundan sonrası için, $\ker\overline{\omega_0}$ ın bir elemanı $(\alpha, \partial, \alpha^1)$ olarak gösterilecektir. Burada, $\alpha, \alpha^1 \in Bim(A_1)$, ∂ bir çaprazlanmış bimultiplierdir ve bunlar Önerme 3.7 deki 1-6 şartlarını sağlar.

Önerme 3.8 $\mathcal{A} : (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ bir ön çaprazlanmış modül, $(A_1 \rtimes A_0, \omega_0, \omega_1)$, buna bağlı olarak elde edilen $\mathbf{Cat^1}$-cebir ve $(\mathfrak{A}(A_1 \rtimes A_0), \overline{\omega_0}, \overline{\omega_1})$ de bu asosyatif cebirin aktörü olsun. Buna göre, $\mathrm{Im}(\overline{\omega_0}) \cong Bim(\mathcal{A})$ dır.

İspat: $\overline{\omega_0}$ dönüşümünün tanımından hareketle

$$\mathrm{Im}(\overline{\omega_0}) = \{(f^0, f^0, f^0) : \text{ bazı } f, f^1 \in Bim(A_1 \rtimes A_0) \text{ için, } (f, f^0, f^1) \in \mathfrak{A}(A_1 \rtimes A_0)\}$$

elde edilir. $\partial_l^0 = 0$, $\partial_r^0 = 0$ olduğundan, $\mathrm{Im}(\overline{\omega_0})$ ın bir elemanı $((\alpha^0, 0, \beta^0), (\alpha^0, 0, \beta^0), (\alpha^0, 0, \beta^0))$ şeklinde gösterilebilir. Burada, $\alpha^0 \in Bim(A_1)$, $\beta^0 \in Bim(A_0)$ dır ve bunlar Önerme 3.7 deki 1-6 şartlarını sağlar. Sonuç olarak (α^0, β^0), $\mathcal{A} : (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ ön çaprazlanmış modülünün bir bimultiplieridir. $\mathrm{Im}(\overline{\omega_0})$ ın herhangi bir elemanı kısaca (α, β) ile gösterilecektir.

Tersine, herhangi bir $(\alpha, \beta) \in Bim(\mathcal{A})$ bimultiplieri $\mathrm{Im}(\overline{\omega_0})$ ın bir elemanı olarak düşünülebilir. Yani, $f^0 := (\alpha, 0, \beta)$ şeklinde tanımlanabilir. $f^0 \in Bim(A_1 \rtimes A_0)$ olduğundan, $(f^0, f^0, f^0) \in \mathfrak{A}(A_1 \rtimes A_0)$ ve $\overline{\omega_0}(f^0, f^0, f^0) = (f^0, f^0, f^0)$ olduğu bulunur. □

Şimdi, verilen bir $\mathcal{A} : (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ ön çaprazlanmış modülünün aktörü tanımlanacaktır.

Tanım 3.9 $\mathcal{A} : (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ bir ön çaprazlanmış modül olsun. α, α^1 dönüşümleri A_1 in bimultiplierleri, ∂, $\mathcal{A}$ nın çaprazlanmış bimultiplieri ve her $a_0 \in A_0, a_1 \in A_1$ için $\beta \in \mathrm{Bim}(A_0)$, $(\beta_l, \beta_r) := (d\partial_l, d\partial_r)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
A1.\quad & \alpha_l({}^{a_0}a_1) &&= \partial_l(a_0) * a_1 + {}^{\beta_l(a_0)}a_1 \\
A2.\quad & \alpha_l(a_1^{a_0}) &&= (\alpha_l(a_1))^{a_0} \\
A3.\quad & {}^{a_0}(\alpha_l(a_1)) &&= (\partial_r(a_0)) * a_1 + {}^{\beta_r(a_0)}a_1 \\
A4.\quad & \alpha_r(a_1{}^{a_0}) &&= a_1 * \partial_r(a_0) + a_1{}^{\beta_r(a_0)} \\
A5.\quad & \alpha_r({}^{a_0}a_1) &&= {}^{a_0}\alpha_r(a_1) \\
A6.\quad & (\alpha_r(a_1))^{a_0} &&= a_1 * \partial_l(a_0) + a_1{}^{\beta_l(a_0)}
\end{aligned}$$

şartlarını sağlayan $(\alpha, \partial, \alpha^1)$ üçlülerine $\mathcal{A}$ nın genelleştirilmiş bimultiplierleri denir. $\mathcal{A}$ ön çaprazlanmış modülünün genelleştirilmiş bimultiplierlerinin kümesi $\mathfrak{BM}(\mathcal{A})$ ile gösterilecektir.

Önerme 3.10 $\mathfrak{BM}(\mathcal{A})$, boş olmayan bir kümedir.

İspat: $a_1 \in A_1$ sabit bir eleman olsun. Her $a_1' \in A_1, a_0 \in A_0$ için, $(\alpha_{a_1})_l(a_1') = a_1 * a_1'$, $(\alpha_{a_1})_r(a_1') = a_1' * a_1$, $(\partial_{a_1})_l(a_0) = -\,{}^{a_0}a_1$, $(\partial_{a_1})_r(a_0) = -\,a_1^{a_0}$, ve $\left(\alpha_{a_1}^1\right)_l(a_1') = {}^{d(a_1)}a_1'$, $\left(\alpha_{a_1}^1\right)_r(a_1') = (a_1')^{d(a_1)}$ şeklindeki tanımlamalarla, $\alpha_{a_1} := ((\alpha_{a_1})_l, (\alpha_{a_1})_r)$, $\alpha_{a_1}^1 :=$

$((\alpha^1_{a_1})_l, (\alpha^1_{a_1})_r) \in \mathrm{Bim}(A_1)$ ve $\partial_{a_1} := ((\partial_{a_1})_l, (\partial_{a_1})_r)$ nin de bir çaprazlanmış bimultiplier olduğu bulunur. Ayrıca, $(\alpha_{a_1}, \partial_{a_1}, \alpha^1_{a_1})$ üçlüsü Tanım 3.9 daki $A1 - A6$ şartlarını sağlar. □

$\mathfrak{BM}(\mathcal{A})$ üzerinde, toplama ve skalerle çarpım işlemleri bileşensel olarak tanımlanır. Çarpma işlemi ise, her $(\alpha, \partial, \alpha^1), (\delta, \partial', \delta^1) \in \mathfrak{BM}(\mathcal{A})$ için

$$(\alpha, \partial, \alpha^1) * (\delta, \partial', \delta^1) = (\alpha * \delta, \partial * \partial', \alpha^1 * \delta^1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\partial * \partial'$ dönüşümü

$$\begin{aligned} (\partial * \partial')_l &= \alpha_l \partial'_l \\ (\partial * \partial')_r &= \delta_r \partial_r \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır ve $\alpha * \delta$ ile $\alpha^1 * \delta^1$ bimultiplierlerin çarpımıdır. Toplama işlemine göre, birim eleman $(0,0,0)$ olup, $(\alpha, \partial, \alpha^1)$ elemanının tersi de $(-\alpha, -\partial, -\alpha^1)$ şeklinde tanımlanır.

Önerme 3.11 $(\alpha, \partial, \alpha^1) \in \mathfrak{BM}(\mathcal{A})$ olsun. Buna göre, β, A_0 ın bimultiplieridir ve $\beta_a = d\partial_a, \beta_{a'} = d\partial_{a'}$ olmak üzere, her $a, a' \in A_0$ için,

$$\beta_a * \beta_{a'} = \beta_{a*a'}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: ∂_a ve $\partial_{a'}$ için Önerme 3.10 daki tanımlama kullanılarak ispat yapılabilir. □

Teorem 3.12 $\mathfrak{BM}(\mathcal{A})$, yukarıda verilen işlemlerle birlikte bir asosyatif cebirdir.

İspat: $\mathfrak{BM}(\mathcal{A})$ nın, asosyatif cebir olma şartlarını sağladığı rutin işlemler yapılarak kontrol edilebilir. □

Yardımcı Teorem 3.13 $\overline{\partial}$ ve $\overline{\overline{\partial}}$ dönüşümleri

$$\overline{\partial}_l = \alpha'_l \partial_l,\ \overline{\partial}_r = \partial_r \beta'_r \text{ ve } \overline{\overline{\partial}}_l = \partial_l \beta'_l,\ \overline{\overline{\partial}}_r = \alpha'_r \partial_r$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mathrm{Bim}(\mathcal{A}) \times \mathfrak{BM}(\mathcal{A}) &\longrightarrow \mathfrak{BM}(\mathcal{A}), \\ \mathfrak{BM}(\mathcal{A}) \times \mathrm{Bim}(\mathcal{A}) &\longrightarrow \mathfrak{BM}(\mathcal{A}) \end{aligned}$$

bilineer dönüşümleri her $(\alpha', \beta') \in \mathrm{Bim}(\mathcal{A})$, $(\alpha, \partial, \alpha^1) \in \mathfrak{BM}(\mathcal{A})$ için,

$$\begin{aligned} \big((\alpha', \beta'), (\alpha, \partial, \alpha^1)\big) &\longmapsto (\alpha' * \alpha, \overline{\partial}, \alpha' * \alpha^1) \\ \big((\alpha, \partial, \alpha^1), (\alpha', \beta')\big) &\longmapsto (\alpha * \alpha', \overline{\overline{\partial}}, \beta * \beta') \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre, bu dönüşümler asosyatif cebirler kategorisinde, $\mathrm{Bim}(\mathcal{A})$ nın $\mathfrak{BM}(\mathcal{A})$ üzerine bir derived etkisini tanımlar.

İspat: Verilen tanımlamalar kullanılarak, etkinin bir derived etki olduğu kolaylıkla gösterilebilir. □

Önerme 3.14 Her $(\alpha,\partial,\alpha^1) \in \mathfrak{BM}(\mathcal{A})$ için, $\Delta : \mathfrak{BM}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{Bim}(\mathcal{A}), \Delta(\alpha,\partial,\alpha^1) = (\alpha^1,\beta)$ şeklinde bir dönüşüm tanımlansın. Bu dönüşüm iyi tanımlıdır ve Yardımcı Teorem 3.13 te verilen etki ile birlikte bir ön çaprazlanmış modüldür.

İspat: Verilen tanımlamalar ve ön çaprazlanmış modül olma şartları dikkate alınarak ispat yapılabilir. □

Tanım 3.15 $\Delta : \mathfrak{BM}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{Bim}(\mathcal{A})$ ön çaprazlanmış modülüne, $\mathcal{A} : (A_1 \longrightarrow A_0)$ ön çaprazlanmış modülünün aktörü denir ve $\mathrm{Act}(\mathcal{A})$ şeklinde gösterilir. Burada bulunan obje, yarı-abelyen olan ön çaprazlanmış modüller kategorisindeki split genişleme sınıflandırıcısı objesi olup kısaca aktör olarak adlandırılmıştır.

Önerme 3.16 $\mathcal{A} : (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ bir ön çaprazlanmış modül, $(A_1 \rtimes A_0, \omega_0, \omega_1)$, tekli işlemlerle birlikte buna bağlı olarak elde edilen asosyatif cebir ve $(\mathfrak{A}(A_1 \rtimes A_0), \overline{\omega_0}, \overline{\omega_1})$ de bu asosyatif cebirin aktörü olsun. Buna göre, $\mathrm{Act}(\mathcal{A}) \cong P(\mathrm{Act}(S(\mathcal{A})))$ dır.

İspat: P ve S funktorlarının tanımları kullanılarak ispat yapılabilir. □

Örnek 3.1 A_1 bir Lie cebiri olsun. Buna göre, $\mathcal{A} : (A_1 \xrightarrow{id} A_1)$ bir ön çaprazlanmış modüldür ve $\Delta : \mathfrak{BM}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{Bim}(\mathcal{A})$ ön çaprazlanmış modülü $\mathcal{A}$ nın aktörüdür. Burada, $\mathfrak{BM}(\mathcal{A}) = \{(\alpha,\partial,\alpha^1) : \alpha = \partial = \alpha^1, \alpha \in \mathrm{Bim}(A_1)\} \cong \mathrm{Bim}(A_1)$, $\mathrm{Bim}(\mathcal{A}) = \{(\alpha,\alpha) : \alpha \in \mathrm{Bim}(A_1)\} \cong \mathrm{Bim}(A_1)$ dir ve Δ, $\Delta(\alpha,\alpha,\alpha) = (\alpha,\alpha)$ şeklinde tanımlıdır. Dolayısıyla, $\mathrm{Act}(\mathcal{A}) = (\mathrm{Bim}(A_1), \mathrm{Bim}(A_1), id)$ olur.

BÖLÜM 4

DEĞİŞMELİ CEBİRLER ÜZERİNDE ÖN ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİN AKTÖRLERİ

4.1 Giriş

Arvasi ve Ege (2003) de, değişmeli cebirler üzerinde tanımlı çaprazlanmış modüllerin aktörleri incelenmiştir. Boyacı, Casas, Datuashvili ve Uslu'nun "Modified Category of Interest" isimli makalesinde de asosyatif cebirler üzerinde tanımlı çaprazlanmış modüllerin aktörlerine yer verilmiştir. Bu bölümde de, bu çalışmaların bir genellemesi olarak, değişmeli cebirler üzerinde tanımlı ön çaprazlanmış modüllerin aktörleri incelenecektir. Ayrıca, *PXCom* da etki ve yarı-direk çarpımın tanımları da verilecektir.

4.2 Aktör Objenin İnşaası

Bu bölümde bahsi geçen bütün ön çaprazlanmış modüller değişmeli cebirler kategorisinde tanımlı olacaktır ve her değişmeli cebirin aşağıdaki koşulu sağladığı kabul edilecektir.

Koşul 3: C bir değişmeli cebir ise, $Ann(C) = 0$ veya $C^2 = C$ dir.

Tanım 4.1 $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ bir ön çaprazlanmış modül olsun.

i) $\mu_1 \in Mul(C_1)$ ve $\mu_0 \in Mul(C_0)$

ii) $d\mu_1 = \mu_0 d$

iii) Her $c_i \in C_i$, $i = 0, 1$ için, $\mu_1(c_1 \cdot c_0) = c_0 \cdot \mu_1(c_1) = \mu_0(c_0) \cdot c_1$

şartları sağlandığında (μ_1, μ_0) ikilisine $\mathcal{C}$ nin bir multiplieri denir. $\mathcal{C}$ nin multiplierlerinin kümesi $Mul(\mathcal{C})$ ile gösterilir.

Sonuç 4.2 Toplama işlemi, skaler çarpım işlemi ve her $(\mu_1, \mu_0), (\mu_1', \mu_0') \in Mul(\mathcal{C})$ için,

$$(\mu_1, \mu_0)(\mu_1', \mu_0') = (\mu_1\mu_1', \mu_0\mu_0')$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile birlikte $Mul(\mathcal{C})$ bir değişmeli cebirdir. Buradaki $\mu_1\mu_1'$ ve $\mu_0\mu_0'$ bileşke işlemini ifade eder.

Bir önceki bölümde olduğu gibi, $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ ön çaprazlanmış modülünün aktörü tanımlanacaktır. C_1 ve C_0, Koşul 3 te belirtilen şartı sağladığında $\mathcal{C}$ nin aktörünün varlığından söz edilebilir. Asosyatif cebirlerde olduğu gibi, değişmeli cebirlerde de yine benzer bir yolla aktör objenin inşaası oluşturulabilir.

Tanım 4.3 $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ bir ön çaprazlanmış modül olsun. $\delta, \delta_1 \in Mul(C_1)$, ∂ bir çaprazlanmış multiplier (her $c_0, c_0' \in C_0$ için $\partial(c_0 c_0') = c_0 \cdot \partial(c_0')$ eşitliğini sağlayan bir k-lineer dönüşüm) ve $\gamma = d\partial$ olmak üzere, her $c_0 \in C_0$, $c_1 \in C_1$ için,

1. $\delta(c_0 \cdot c_1) = c_0 \cdot \delta(c_1) = (\partial(c_0))c_1$

2. $\delta_1(c_0 \cdot c_1) = c_0 \cdot \delta_1(c_1) = (\gamma(c_0)) \cdot c_1$

3. $\gamma d = d\delta = d\delta_1$

şartlarını sağlayan $(\delta, \partial, \delta_1)$ üçlülerine $\mathcal{C}$ nin genelleştirilmiş multiplierleri denir. Bu bölümde, $\mathcal{C}$ nin genelleştirilmiş multiplierlerinin kümesi $\mathfrak{M}(\mathcal{C})$ ile gösterilecektir.

Burada, çaprazlanmış multiplier tanımı kullanılarak $\gamma \in Mul(C_0)$ olduğu da görülebilir.

Örnek 4.1 $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ bir ön çaprazlanmış modül olsun. $c_1 \in C_1$ elemanı sabit bir eleman olarak alınsın. $\delta, \delta_1 : C_1 \longrightarrow C_1$, $\partial : C_0 \longrightarrow C_1$ dönüşümleri her $c_0' \in C_0$, $c_1' \in C_1$ için, $\delta_1(c_1') = dc_1 \cdot c_1'$, $\delta(c_1') = c_1 c_1'$, $\partial(c_0) = c_0 \cdot c_1$ şeklinde tanımlansın. Buna göre, $(\delta, \partial, \delta_1)$ üçlüsü $\mathcal{C}$ nin bir genelleştirilmiş multiplieridir.

Önerme 4.4 Toplama işlemi, skaler çarpım işlemi ve her $(\delta, \partial, \delta_1), (\delta', \partial', \delta_1') \in \mathfrak{M}(\mathcal{C})$ için,

$$(\delta, \partial, \delta_1)(\delta', \partial', \delta_1') = (\delta\delta', \partial\partial', \delta_1\delta_1')$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile birlikte $\mathfrak{M}(\mathcal{C})$ bir değişmeli cebirdir. Burada, $\delta\delta'$ ile $\delta_1\delta_1'$ bileşke işlemini gösterir ve $\partial\partial' = \delta\partial'$ dür.

İspat: $\mathfrak{M}(\mathcal{C})$ nin, değişmeli cebir olma şartlarını sağladığı bilinen kontroller yapılarak kolaylıkla görülebilir. Burada farklı olarak sadece, tanımlanan çarpma işleminin değişme özelliğinin olduğu, yani, $\delta\delta' = \delta'\delta$, $\delta_1\delta_1' = \delta_1'\delta_1$ ve $\partial\partial' = \delta\partial' = \delta'\partial = \partial'\partial$ eşitliklerinin doğruluğu gösterilecektir. İlk olarak, $Ann(C_0) = 0$ ve $x \in C_0$ olsun. Buna göre, her $y \in C_0$ için, $y \cdot \delta(\partial'(x)) = \delta(y \cdot \partial'(x)) = \delta(\partial'(xy)) = \delta(x \cdot \partial'(y)) = \partial(x)\partial'(y) = \partial'(y)\partial(x) = \delta'(y \cdot \partial(x)) = y \cdot \delta'(\partial(x))$ olur. Buradan $\delta\partial' = \delta'\partial$ elde edilir. Şimdi de, $(C_0)^2 = C_0$ ve $x \in C_0$ olsun. Buna göre, $ab = x$ olacak şekilde $a, b \in C_0$ vardır. Buradan da, $\delta(\partial'(x)) = \delta(\partial'(ab)) = a\delta(\partial'(b)) = \delta'(a \cdot \partial(b))$

$= \delta'(\partial(ab)) = \delta'(\partial(x))$ olur. Dolayısıyla, $\partial\partial' = \delta\partial' = \delta'\partial = \partial'\partial$ olduğu bulunur. Benzer bir yolla, $\delta\delta' = \delta'\delta$ ve $\delta_1\delta_1' = \delta_1'\delta_1$ eşitlikleri de elde edilebilir. □

Önerme 4.5 $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ bir ön çaprazlanmış modül olsun. $\Delta : \mathfrak{M}(\mathcal{C}) \longrightarrow Mul(\mathcal{C})$, $(\delta, \partial, \delta_1) \longmapsto (\delta, \gamma)$ dönüşümü, her $(\delta, \partial, \delta_1) \in \mathfrak{M}(\mathcal{C})$ ve $(\mu_1, \mu_0) \in Mul(\mathcal{C})$ için, $Mul(\mathcal{C}) \times \mathfrak{M}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathfrak{M}(\mathcal{C})$, $((\mu_1, \mu_0), (\delta, \partial, \delta_1)) \longmapsto (\mu_1\delta, \mu_1\partial, \mu_1\delta_1)$ şeklinde tanımlanan etki ile birlikte bir ön çaprazlanmış modüldür.

İspat: Her $(\mu_1, \mu_0), (\mu_1', \mu_0') \in Mul(\mathcal{C})$ ve $(\delta, \partial, \delta_1), (\delta', \partial', \delta_1') \in \mathfrak{M}(\mathcal{C})$ için,

$$\begin{aligned}
(\mu_1, \mu_0) \cdot ((\delta, \partial, \delta_1)(\delta', \partial', \delta_1')) &= (\mu_1, \mu_0) \cdot (\delta\delta', \delta\partial', \delta_1\delta_1') \\
&= (\mu_1\delta\delta', \mu_1\delta\partial', \mu_1\delta_1\delta_1') \\
&= ((\mu_1\delta)\delta', (\mu_1\delta)\partial', (\mu_1\delta_1)\delta_1') \\
&= (\mu_1\delta, \mu_1\partial, \mu_1\delta_1)(\delta', \partial', \delta_1') \\
&= ((\mu_1, \mu_0) \cdot (\delta, \partial, \delta_1))(\delta', \partial', \delta_1')
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
((\mu_1, \mu_0)(\mu_1', \mu_0')) \cdot (\delta, \partial, \delta_1) &= (\mu_1\mu_1', \mu_0\mu_0') \cdot (\delta, \partial, \delta_1) \\
&= (\mu_1\mu_1'\delta, \mu_1\mu_1'\partial, \mu_1\mu_1'\delta_1) \\
&= (\mu_1(\mu_1'\delta), \mu_1(\mu_1'\partial), \mu_1(\mu_1'\delta_1)) \\
&= (\mu_1, \mu_0) \cdot (\mu_1'\delta, \mu_1'\partial, \mu_1'\delta_1) \\
&= (\mu_1, \mu_0) \cdot ((\mu_1', \mu_0') \cdot (\delta, \partial, \delta_1))
\end{aligned}$$

olduğundan, etki iyi tanımlıdır. Diğer taraftan, her $(\mu_1, \mu_0) \in Mul(\mathcal{C})$ ve $(\delta, \partial, \delta_1) \in \mathfrak{M}(\mathcal{C})$ için,

$$\begin{aligned}
\Delta((\mu_1, \mu_0) \cdot (\delta, \partial, \delta_1)) &= \Delta(\mu_1\delta, \mu_1\partial, \mu_1\delta_1) \\
&= (\mu_1\delta, d\mu_1\partial) \\
&= (\mu_1\delta, \mu_0 d\partial) \\
&= (\mu_1, \mu_0)(\delta, d\partial) \\
&= (\mu_1, \mu_0)\,(\Delta(\delta, \partial, \delta_1))
\end{aligned}$$

olduğundan ön çaprazlanmış modül şartı sağlanmış olur. □

Tanım 4.6 Önerme 4.5 te tanımlanan Δ ön çaprazlanmış modülüne $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ ön çaprazlanmış modülünün aktörü denir ve $Act(\mathcal{C})$ şeklinde gösterilir.

Önerme 4.7 $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ bir ön çaprazlanmış modül ve $(C_1 \rtimes C_0, \omega_0, \omega_1)$ de, bu ön çaprazlanmış modüle denk olan değişmeli cebir olsun. Buna göre, $Act(\mathcal{C}) \cong P(Act(S(\mathcal{C})))$ dir.

İspat: Birinci bölümde tanımlanan P ve S funktorlarının yardımıyla önermenin doğruluğu gösterilebilir. □

Örnekler 4.1 i) E bir değişmeli cebir ve $\mathcal{C} : (E \xrightarrow{id} E)$ bir ön çaprazlanmış modül olsun. Buna göre, $\mathcal{C}$ nin aktörü $(Mul(E), Mul(E), id)$ olur. Bu aynı zamanda, $\mathcal{C}$ nin çaprazlanmış modüller kategorisindeki aktörü ile de çakışır. Yine benzer şekilde, $0 \xrightarrow{0} E$ ön çaprazlanmış modülünün aktörü $Mul(E)$ ye izomorftur ve bu da $0 \xrightarrow{0} E$ nin çaprazlanmış modüller kategorisindeki aktörü ile çakışır. Değişmeli cebirler üzerinde tanımlı bir çaprazlanmış modülün aktörünün tanımı Arvasi ve Ege (2003) de yer almaktadır.

ii) E tekil olmayan bir değişmeli cebir olmak üzere, $\mathcal{C} : (E \xrightarrow{0} E)$ ve $\mathcal{C}' : (E \xrightarrow{0} 0)$ ön çaprazlanmış modülleri verilsin. Buna göre, $Act(\mathcal{C}) = (\mathfrak{M}(\mathcal{C}), Mul(\mathcal{C}), \Delta)$ dır. Burada, $\delta = \partial$ olmak üzere, $\mathfrak{M}(\mathcal{C})$, $(\delta, \partial, 0)$ şeklindeki bütün üçlülerin kümesini ifade eder, $Mul(\mathcal{C}) \cong Mul(E)$ dir ve Δ, $\Delta(\delta, \partial, 0) = (0,0)$ şeklinde tanımlıdır. Yine benzer şekilde, $Act(\mathcal{C}') = (\mathfrak{M}(\mathcal{C}'), Mul(\mathcal{C}'), \Delta)$ olur. Burada da, $\mathfrak{M}(\mathcal{C}')$, $(\delta, 0, \delta_1)$ şeklindeki bütün üçlülerin kümesini ifade eder, $Mul(\mathcal{C}') \cong Mul(E)$ dir ve Δ, $\Delta(\delta, 0, \delta_1) = (\delta_1, 0)$ şeklinde tanımlıdır.

iii) $\mathcal{C} : (E \times E \xrightarrow{\pi_1} E)$ ön çaprazlamış modülü verilsin ve $Act(\mathcal{C}) = (\mathfrak{M}(\mathcal{C}), Mul(\mathcal{C}), \Delta)$ olsun. Buna göre, $\delta, \delta', \partial, \delta_1, \delta_1' \in Mul(E)$ ve $\delta = \partial = \delta_1$ olmak üzere, $\mathfrak{M}(\mathcal{C})$, $(\delta, \delta'), (\partial, 0), (\delta_1, \delta_1')$ şeklindeki bütün üçlülerin kümesidir, $Mul(\mathcal{C}) \cong Mul(E) \times Mul(E)$ dir ve Δ, $\Delta\big((\delta, \delta'), (\partial, 0), (\delta_1, \delta_1')\big) = \big((\delta, \delta'), \delta\big)$ şeklinde tanımlıdır.

4.3 PXCom da Etki ve Yarı-Direk Çarpım

Şimdi, verilen bir $\mathcal{C}$ ön çaprazlanmış modülünün $(\xi, \eta) : \mathcal{C} \longrightarrow Act(\mathcal{C})$ şeklindeki kanonik dönüşümü tanımlanacaktır.

Önerme 4.8 $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ bir ön çaprazlanmış modül olsun. Her $c_1, c_1' \in C_1$, $c_0 \in C_0$ için, $\delta_{c_1}(c_1') = c_1 c_1'$, $\delta_{1_{c_1}}(c_1') = d(c_1) \cdot c_1'$ ve $\partial_{c_1}(c_0) = c_0 \cdot c_1$ olmak üzere, $\xi : C_1 \longrightarrow \mathfrak{M}(\mathcal{C})$, $\xi(c_1) = (\delta_{c_1}, \partial_{c_1}, \delta_{1_{c_1}})$ şeklinde bir dönüşüm tanımlansın. Buna göre, $\xi : C_1 \longrightarrow \mathfrak{M}(\mathcal{C})$, $(\delta_{c_1}, \partial_{c_1}, \delta_{1_{c_1}}) \cdot c_1 = \delta_1(c_1)$ şeklinde tanımlı etki ile birlikte bir ön çaprazlanmış modüldür.

İspat: Her $c_1, c_1' \in C_1$, $c_0 \in C_0$ için,

$\delta_{c_1 c_1'}(c_1'') = c_1 c_1' c_1'' = c_1(c_1' c_1'') = \delta_{c_1}\delta_{c_1'}(c_1'')$,

$\delta_{1_{c_1 c_1'}}(c_1'') = d(c_1 c_1') \cdot c_1'' = d(c_1) \cdot (d(c_1') \cdot c_1'') = \delta_{1_{c_1}}\delta_{1_{c_1'}}(c_1'')$,

$\partial_{c_1 c_1'}(c_0) = c_0 \cdot (c_1 c_1') = (c_0 \cdot c_1')c_1$,

$\partial_{c_1}\partial_{c_1'}(c_0) = \delta_{c_1}\partial_{c_1'}(c_0) = \delta_{c_1}(c_0 \cdot c_1') = (c_0 \cdot c_1')c_1$

olduğundan,

$$\xi(c_1 c_1') = (\delta_{c_1}, \partial_{c_1}, \delta_{1_{c_1}})(\delta_{c_1'}, \partial_{c_1'}, \delta_{1_{c_1'}}) = \xi(c_1)\xi(c_1')$$

ifadesi elde edilir. Bu da, ξ nın iyi tanımlı olduğunu gösterir. Diğer şartların kontrolü de bilinen işlemler yardımıyla kolaylıkla yapılabilir. □

Önerme 4.9 $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ bir ön çaprazlanmış modül olsun. Her $c_1 \in C_1$, $c_0, c_0' \in C_0$ için, $\delta_{c_0}(c_1) = c_0 \cdot c_1$ ve $\gamma_{c_0}(c_0') = c_0 c_0'$ olmak üzere, $\eta : C_0 \longrightarrow Mul(\mathcal{C})$, $c_0 \longmapsto (\delta_{c_0}, \gamma_{c_0})$ şeklinde bir dönüşüm tanımlansın. Buna göre, η, her $(\mu_1, \mu_0) \in Mul(\mathcal{C})$, $c_0 \in C_0$ için, $(\mu_1, \mu_0) \cdot c_0 = \mu_0(c_0)$ şeklinde tanımlı etki ile birlikte bir ön çaprazlanmış modüldür.

İspat: Her $c_1 \in C_1$, $c_0, c_0', c_0'' \in C_0$ için,

$\delta_{c_0 c_0'}(c_1) = (c_0 c_0') \cdot c_1 = c_0 \cdot (c_0' \cdot c_1) = \delta_{c_0}\delta_{c_0'}(c_1)$,

$\gamma_{c_0 c_0'}(c_0'') = (c_0 c_0')c_0'' = c_0(c_0' c_0'') = \gamma_{c_0}(\gamma_{c_0'}(c_0''))$

olduğundan, η iyi tanımlıdır. $\eta : C_0 \longrightarrow Mul(\mathcal{C})$ nin bir ön çaprazlanmış modül olduğu da bilinen işlemler yardımıyla kolaylıkla gösterilebilir. □

Önerme 4.10 $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ bir ön çaprazlanmış modül olsun. Buna göre, $(\xi, \eta) : \mathcal{C} \longrightarrow Act(\mathcal{C})$, ön çaprazlanmış modüllerin arasında bir homomorfizimdir.

İspat: Her $c_1 \in C_1$ için

$\eta d(c_1) = (\delta_{dc_1}, \gamma_{dc_1})$ ve $\Delta\xi = \Delta(\delta_{c_1}, \partial_{c_1}, \delta_{1_{c_1}}) = (\delta_{1_{c_1}}, d\partial_{c_1})$

olduğundan, ayrıca her $c_1, c_1' \in C_1$, $c_0 \in C_0$ için

$\delta_{dc_1}(c_1') = dc_1 \cdot c_1' = \delta_{1_{c_1}}(c_1')$ ve $\gamma_{dc_1}(c_0) = c_0 dc_1 = d(c_0 \cdot c_1) = d\partial_{c_1}(c_0)$

olduğundan $\eta d = \Delta\xi$ elde edilir.
Diğer yandan, her $c_i, c_i' \in C_i$, $i = 0,1$ için,

$$\xi(c_0 \cdot c_1) = (\delta_{c_0 \cdot c_1}, \partial_{c_0 \cdot c_1}, \delta_{1_{c_0 \cdot c_1}}),$$

$$\eta(c_0) \cdot \xi(c_1) = (\delta_{c_0}\delta_{c_1}, \delta_{c_0}\partial_{c_1}, \delta_{c_0}\delta_{1_{c_1}})$$

ve
$\delta_{c_0}\delta_{c_1}(c_1') = c_0 \cdot (c_1 c_1') = (c_0 \cdot c_1)c_1' = \delta_{c_0 \cdot c_1}(c_1'),$

$\delta_{c_0}\partial_{c_1}(c_0') = \delta_{c_0}(c_0' \cdot c_1) = c_0 \cdot (c_0' \cdot c_1) = c_0' \cdot (c_0 \cdot c_1) = \partial_{c_0 \cdot c_1}(c_0'),$

$\delta_{c_0}\delta_{1_{c_1}}(c_1') = \delta_{c_0}(d(c_1) \cdot c_1') = c_0 \cdot (d(c_1) \cdot c_1') = (c_0 d(c_1) \cdot c_1') = (d(c_0 \cdot c_1)) \cdot c_1' = \delta_{1_{c_0 \cdot c_1}}(c_1')$

olduğundan, ispat için gerektiği gibi, $\xi(c_0 \cdot c_1) = \eta(c_0) \cdot \xi(c_1)$ olduğu bulunur. □

Önerme 4.11 $Z_1 = \ker(\xi) = \{c_1 \in C_1 :$ Her $c_1' \in C_1, c_0 \in C_0$ için, $c_1 c_1' = 0$, $c_0 \cdot c_1 = 0$ ve $d(c_1) \cdot c_1' = 0\}$ ve
$Z_2 = \ker(\eta) = \{c_0 \in C_0 :$ Her $c_0' \in C_0, c_1 \in C_1$ için, $c_0 c_0' = 0$ ve $c_0 \cdot c_1 = 0\}$ olmak üzere, $\mathrm{Im}(\xi, \eta)$, $Act(\mathcal{C})$ nin ve $\ker(\xi, \eta) : (Z_1 \xrightarrow{d} Z_0)$ da $\mathcal{C}$ nin bir ön çaprazlanmış idealidir.

İspat: Birinci bölümde verilen ön çaprazlanmış ideal tanımından ve ξ, η dönüşümlerinin tanımından yola çıkılarak ispat için gereken kontroller yapılabilir. □

Tanım 4.12 $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ bir ön çaprazlanmış modül ve $(\xi, \eta) : \mathcal{C} \longrightarrow Act(\mathcal{C})$ de kanonik dönüşüm olsun. Buna göre, (ξ, η) dönüşümünün görüntüsüne $\mathcal{C}$ nin iç aktörü denir ve $InnAct(\mathcal{C})$ şeklinde gösterilir.

Tanım 4.13 $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ bir ön çaprazlanmış modül ve $(\xi, \eta) : \mathcal{C} \longrightarrow Act(\mathcal{C})$ de kanonik dönüşüm olsun. Buna göre, $Act(\mathcal{C})/InnAct(\mathcal{C})$ bölüm ön çaprazlanmış modülüne $\mathcal{C}$ nin dış aktörü denir ve $OutAct(\mathcal{C})$ şeklinde gösterilir.

$$0 \longrightarrow C' \longrightarrow C \longrightarrow C'' \longrightarrow 0$$

dizisi, **PXCom** da ön çaprazlanmış modüllerin bir tam dizisi olsun. Burada, C', C nin bir ön çaprazlanmış ideali olarak düşünülebilir.

Her $c_1 \in C_1, c_0 \in C_0$ için, $(\xi|,\eta|) : C \longrightarrow Act(C'), \xi|(c_1) = (\delta_{c_1}, \partial_{c_1}, \delta_{1_{c_1}}), \eta|(c_0) = (\delta_{c_0}, \gamma_{c_0})$ şeklinde bir dönüşüm tanımlansın. C', C nin bir ön çaprazlanmış ideali olduğundan, bu dönüşüm iyi tanımlıdır. Bu dönüşüm kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

Sonuç 4.14

$$0 \longrightarrow C' \longrightarrow C \longrightarrow C'' \longrightarrow 0$$

dizisi bir tam dizi olsun. Buna göre, aşağıdaki değişmeli diyagram elde edilir:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & C & \longrightarrow & C'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\xi|,\eta|)} & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & InnAct(C') & \longrightarrow & Act(C') & \longrightarrow & OutAct(C) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Tanım 4.15 $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ bir ön çaprazlanmış modül olsun. Önerme 4.11 de tanımlanan (Z_1, Z_0, d) ön çaprazlanmış idealine $\mathcal{C}$ nin merkezi denir ve $Z(\mathcal{C})$ şeklinde gösterilir.

Bu tanım, Huq (1968) da yer alan tanımla örtüşmektedir.

Tanım 4.16 Eğer $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ ön çaprazlanmış modülü merkeziyle çakışırsa, bu ön çaprazlanmış modül tekildir.

Önerme 4.17 $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ bir ön çaprazlanmış modül olsun. $\mathcal{C}$ nin tekil olması için gerek ve yeter şart C_1 ve C_0 ın tekil, ayrıca C_0 ın C_1 üzerine etkisinin de aşikar olmasıdır.

İspat: $\mathcal{C}$ tekil olsun. Buna göre, $Z_1 = C_1$ ve $Z_0 = C_0$ olur. $Z_1 = C_1$ olduğundan, her $c_1, c_1' \in C_1$ ve $c_0 \in C_0$ için, $c_1 c_1' = 0$ ve $c_0 \cdot c_1 = 0$ dır. Ayrıca, $Z_0 = C_0$ olduğundan, her $c_0, c_0' \in C_0$ için $c_0 \cdot c_0' = 0$ dır. Dolayısıyla, C_1 ve C_0 tekil ve C_0 ın C_1 üzerine etkisi de aşikardır.
Tersine, C_1 ve C_0 tekil ve C_0 ın C_1 üzerine etkisi de aşikar olsun. Buna göre, her $c_1, c_1' \in C_1$ ve $c_0 \in C_0$ için, $d(c_1) \cdot c_1' = 0$ ve $c_0 \cdot c_1 = 0$ olur. Dolayısıyla, $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ tekildir. □

Önerme 4.18 $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ bir ön çaprazlanmış modül olsun. C_0C_1, C_1 in $\{c_0 \cdot c_1 : c_1 \in C_1, c_0 \in C_0\}$ kümesi tarafından üretilen idealini göstermek üzere,

$$C_1C_1 \oplus C_0C_1 \xrightarrow{d} C_0C_0$$

ön çaprazlanmış modülü $\mathcal{C}$ nin bir ön çaprazlanmış idealidir.

İspat: Her $c_1, c_1' \in C_1$, $c_0 \in C_0$ için,

$$d(c_1 c_1') = d(c_1)d(c_1') \in C_0C_0$$

ve

$$d(c_0 \cdot c_1) = c_0 d(c_1) \in C_0C_0$$

olduğundan, d iyi tanımlıdır. Etkinin özellikleri kullanılarak diğer şartların da sağlandığı gösterilebilir. □

Tanım 4.19 $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ bir ön çaprazlanmış modül olsun.

$$C_1C_1 \oplus C_0C_1 \xrightarrow{d} C_0C_0$$

ön çaprazlanmış idealine, $\mathcal{C}$ nin komütatör ideali denir ve CC şeklinde gösterilir.

Önerme 4.20 $\mathcal{C}$ ön çaprazlanmış modülünün tekil olması için gerek ve yeter şart $CC = 0$ olmasıdır.

İspat: $\mathcal{C}$ bir tekil ön çaprazlanmış modül olsun. Buna göre, C_1 ve C_0 tekildir, dolayısıyla, $C_1C_1 = 0$ ve $C_0C_0 = 0$ olur. Diğer taraftan, her $c_0 \in C_0, c_1 \in C_1$ için, $c_0 \cdot c_1 = 0$ olduğundan $C_0C_1 = 0$ dır.
Tersine, $CC = 0$ ise, $C_1C_1 \oplus C_0C_1 = 0$ ve $C_0C_0 = 0$ olur. Bu da, C_1 ve C_0 ın tekil ve C_0 ın C_1 üzerine etkisinin de aşikar olduğu anlamına gelir. Yani, $\mathcal{C}$ tekildir. □

Teorem 4.21 Herhangi bir $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ ön çaprazlanmış modülü için, $\mathcal{C}$ nin $C_1C_1 \oplus C_0C_1 \xrightarrow{d_|} C_0C_0$ biçimindeki komütatör ideali, $\mathcal{C}_{ab} : C_1/(C_1C_1 \oplus C_0C_1) \xrightarrow{\bar{d}} C_0/C_0C_0$ ın tekil olması durumunda,en küçük tek idealdir.

İspat: Eğer $\mathcal{C}' : (C_1' \xrightarrow{d} C_0')$, $\mathcal{C}$ nin bir ideali ise, $C_1/C_1' \xrightarrow{\bar{d}} C_0/C_0'$ şeklinde bir bölüm ön çaprazlanmış modülü vardır. Bu bölümün tekil olması için gerek ve yeter şart C_1/C_1' ve C_0/C_0' nün tekil ve her $[c_0] \in C_0/C_0', [c_1] \in C_1/C_1'$ için $[c_0] \cdot [c_1] = 0$ olmasıdır. Yani, $C_1C_1 \oplus C_0C_1 \trianglelefteq C_1'$ ve $C_0C_0 \trianglelefteq C_0'$ dür. □

Borceux, Janelidze ve Kelly (2005 a) de bahsedildiği gibi, interest kategorilerinde tanımlı ön çaprazlanmış modüller kategorileri yarı-abelyen kategorilerdir. Şimdi, Borceux, Janelidze ve Kelly (2005 b) de yarı-abelyen kategoriler için verilen split genişlemeler kullanılarak, bir ön çaprazlanmış modülün diğer bir ön çaprazlanmış modül üzerine etkisinin tanımı verilecektir. Ayrıca, ön çaprazlanmış modüllerin yarı-direk çarpımı da tanımlanacaktır.

Tanım 4.22 $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ ve $\mathcal{C}' : (C_1' \xrightarrow{d'} C_0')$ birer ön çaprazlanmış modül olsun. Eğer **PXCom** da,

$$0 \to \mathcal{C} \to \mathcal{E} \overset{s}{\underset{\curvearrowleft}{\longrightarrow}} \mathcal{C}' \to 0$$

şeklinde bir split genişleme varsa, $\mathcal{C}'$ nün $\mathcal{C}$ üzerine bir etkisi vardır denir.

Örnek 4.2 $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ bir ön çaprazlanmış modül, $IMul(C_1)$ ve $IMul(C_0)$ sırasıyla C_1 ve C_0 ın iç multiplieri olsun. Buna göre, her $ad_{c_i} \in C_i$, $i = 0,1$ için $ad_{c_0} \cdot ad_{c_1} = ad_{c_0 \cdot c_1}$ şeklinde tanımlı etki ile birlikte $I : (IMul(C_1) \xrightarrow{d} IMul(C_0))$, bir ön çaprazlanmış modüldür. Dolayısıyla, I nın $\mathcal{C}$ üzerine

$$0 \to \mathcal{C} \to \mathcal{C} \rtimes I \overset{s}{\underset{\curvearrowleft}{\longrightarrow}} I \to 0$$

split genişlemesi tarafından tanımlanan bir etkisi vardır.($\mathcal{C} \rtimes I$ yarı-direk çarpımının tanımı Örnek 4.3 te verilmiştir)

Önerme 4.23 $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ ve $\mathcal{C}' : (C_1' \xrightarrow{d'} C_0')$ birer ön çaprazlanmış modül olsun ve $\mathcal{C}'$ nün $\mathcal{C}$ üzerine etkisi

$$0 \to \mathcal{C} \to \mathcal{E} \overset{s}{\underset{\curvearrowleft}{\longrightarrow}} \mathcal{C}' \to 0$$

split genişlemesi tarafından tanımlansın. Buna göre, $C_0 \rtimes C_0'$ nün $C_1 \rtimes C_1'$ üzerine, her $c_i \in C_i$, $c_i' \in C_i'$, $i = 0,1$ için

$$(c_0, c_0') \cdot (c_1, c_1') = (c_0 \cdot c_1 + s_0(c_0') \cdot c_1 + c_0 \cdot s_1(c_1'), c_0' \cdot c_1')$$

şeklinde tanımlanan etkisi ile birlikte $(d, d') : C_1 \rtimes C_1' \longrightarrow C_0 \rtimes C_0'$, bir ön çaprazlanmış modüldür.

İspat: Etkinin iyi tanımlı olduğu bilinen işlemler yardımıyla görülebilir. Burada, ön çaprazlanmış modül şartının kontrol edilmesi yeterli olacaktır. Buna göre, her $c_i \in C_i$, $c_i' \in C_i'$, $i = 0,1$ için aşağıdaki işlemler takip edilirse,

$$\begin{aligned}
(c_0, c_0')((d, d')(c_1, c_1')) &= (c_0, c_0')(d(c_1), d'(c_1')) \\
&= (c_0 d(c_1) + c_0' \cdot d(c_1) + (d'(c_1')) \cdot c_0, c_0' d'(c_1')) \\
&= (c_0 d(c_1) + s_0(c_0') d(c_1) + s_0(d'(c_1')) c_0, c_0' d'(c_1')) \\
&= (d(c_0 \cdot c_1) + d(s_0(c_0') \cdot c_1) + d(s_1(c_1')) c_0, d'(c_0' \cdot c_1') \\
&= (d(c_0 \cdot c_1) + d(s_0(c_0') \cdot c_1) + d(c_0 \cdot s_1(c_1')), d'(c_0' \cdot c_1') \\
&= (d, d')(c_0 \cdot c_1) + s_0(c_0') \cdot c_1 + c_0 \cdot s_1(c_1'), c_0' \cdot c_1') \\
&= (d, d')((c_0, c_0') \cdot (c_1, c_1'))
\end{aligned}$$

olduğu bulunur. □

Tanım 4.24 $\mathcal{C}'$ nün $\mathcal{C}$ üzerine etkisi ile birlikte, $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ ve $\mathcal{C}' : (C_1' \xrightarrow{d'} C_0')$ birer ön çaprazlanmış modül olsun. Buna göre, Önerme 4.23 te verilen

$$(d, d') : C_1 \rtimes C_1' \longrightarrow C_0 \rtimes C_0'$$

ön çaprazlanmış modülüne, $\mathcal{C}'$ ve $\mathcal{C}$ ön çaprazlanmış modüllerinin yarı-direk çarpımı denir ve $\mathcal{C} \rtimes \mathcal{C}'$ şeklinde gösterilir.

Teorem 4.25 $\mathcal{C}' : (C_1' \xrightarrow{d'} C_0')$ ve $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ birer ön çaprazlanmış modül olsun ve $\mathcal{C}$ de aktöre sahip olsun. Buna göre, $\mathcal{C}'$ nün $\mathcal{C}$ tarafından üretilen her bir split genişlemesi için, $(\sigma, \tau) : \mathcal{C}' \longrightarrow Act(\mathcal{C})$ şeklinde tanımlı bir homomorfizim vardır.

İspat: $\mathcal{E} : (E_1 \xrightarrow{\vartheta} E_0)$ bir ön çaprazlanmış modül ve $0 \to \mathcal{C} \to \mathcal{E} \overset{s}{\curvearrowright} \mathcal{C}' \to 0$ da, $\mathcal{C}'$ nün $\mathcal{C}$ tarafından üretilen bir split genişlemesi olsun. Buna göre, her $c_i \in C_i$, $e_i \in E_i$, $i = 0, 1$ için, $\delta_{e_1}(c_1) = e_1 c_1, \partial_{e_1}(c_0) = c_0 \cdot e_1, \delta_{1e_1}(c_1) = \vartheta(e_1) \cdot c_1$ ve $\mu_{1e_0}(c_1) = e_0 \cdot c_1, \mu_{0e_0}(c_0) = e_0 c_0$ olmak üzere, $(\psi_1, \psi_0) =: \mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{Act}(\mathcal{C})$, $\psi_1(e_1) = (\delta_{e_1}, \partial_{e_1}, \delta_{1e_1})$, $\psi_0(e_0) \longmapsto (\mu_{1e_0}, \mu_{0e_0})$ homomorfizmi vardır. Dolayısıyla, $(\sigma, \tau) = \psi \circ s : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathrm{Act}(\mathcal{C})$ olduğu bulunur. □

Önerme 4.26 $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ ve $\mathcal{C}' : (C_1' \xrightarrow{d'} C_0')$ birer ön çaprazlanmış modül olsun ve $(\psi, \varphi) : \mathcal{C}' \longrightarrow Act(\mathcal{C})$ homomorfizmi verilsin. Buna göre, sırasıyla $c_1' \cdot c_1 = (\varphi_1(dc_1'))(c_1)$ ve $c_0' \cdot c_0 = (\varphi_0(c_0'))(c_0)$ şeklinde tanımlanan, C_1' nün C_1 üzerine ve C_0' nün C_0 üzerine etkisi vardır. Bu etkiler yardımıyla $C_1 \rtimes C_1'$ ve $C_0 \rtimes C_0'$ yarı-direk çarpımları elde edilir. Buna göre, $C_0 \rtimes C_0'$ nün $C_1 \rtimes C_1'$ üzerine etkisi ile birlikte,

$$(d, d') : C_1 \rtimes C_1' \longrightarrow C_0 \rtimes C_0'$$

bir ön çaprazlanmış modüldür. Buradaki etki her $c_i \in C_i$, $c_i' \in C_i'$, $i = 0, 1$ için,

$$(c_0, c_0') \cdot (c_1, c_1') = ((\varphi_1(c_0'))(c_1) + \partial_{c_1'}(c_0) + c_0 \cdot c_1, c_0' \cdot c_1')$$

şeklinde tanımlıdır ve $\partial_{c_1'}$, $\psi(c_1') = (\delta_{c_1'}, \partial_{c_1'}, \delta_{1c_1'})$ görüntüsünden elde edilir.

İspat: Verilen etkinin tanımı kullanılarak Önerme 4.23 tekine benzer bir şekilde ispat yapılabilir. □

Teorem 4.27 $\mathcal{C}' : (C_1' \xrightarrow{d'} C_0')$ ve $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ birer ön çaprazlanmış modül olsun ve C de aktöre sahip olsun. Buna göre, her bir $(\sigma, \tau) : \mathcal{C}' \longrightarrow Act(\mathcal{C})$ homomorfizminden, $\mathcal{C}'$ nün $\mathcal{C}$ üzerine etkisi elde edilir.

$$0 \to \mathcal{C} \to \mathcal{E} \overset{s}{\curvearrowright} \mathcal{C}' \to 0\,.$$

İspat: $\psi : \mathcal{C}' \longrightarrow Act(\mathcal{C})$ homomorfizmi verilsin. Buna karşılık gelen etki, bilinen i, q ve s homomorfizimleri ile birlikte aşağıdaki split genişleme tarafından tanımlanabilir:

$$0 \to \mathcal{C} \xrightarrow{i} \mathcal{C}' \ltimes \mathcal{C} \underset{q}{\overset{s}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}' \to 0$$

□

Sonuç 4.28 $\mathcal{C}' : (C_1' \xrightarrow{d'} C_0')$ ve $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ birer ön çaprazlanmış modül olsun. Eğer $Act(\mathcal{C})$ varsa, $\mathcal{C}'$ nün $\mathcal{C}$ üzerine etkisi ile $\mathcal{C}'$ nden $Act(\mathcal{C})$ ye tanımlı homomorfizimler arasında bire bir eşleşme vardır.

Not 4.29 Bu sonuca göre, Önerme 4.26 da verilen aktör yardımıyla yarı-direk çarpım tanımlanabilir.

Önerme 4.30 $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ bir ön çaprazlanmış modül ve aktörü de $Act(\mathcal{C})$ olsun. Buna göre,

$$C_1 \rtimes \mathfrak{M}(\mathcal{C}) \xrightarrow{(d,\Delta)} C_0 \rtimes Mul(\mathcal{C})$$

dönüşümü, $C_0 \rtimes Mul(\mathcal{C})$ nin $C_1 \rtimes \mathfrak{M}(\mathcal{C})$ üzerine etkisi ile birlikte bir ön çaprazlanmış modül olur. Buradaki etki, her $c_i \in C_i$, $i = 0, 1$ için

$$\begin{aligned}(c_0,(\mu_1,\mu_0)) \cdot (c_1,(\delta,\partial,\delta_1)) &= (c_0 \cdot c_1 + (\mu_1,\mu_0) \cdot c_1 + \partial(c_0), (\mu_1,\mu_0) \cdot (\delta,\partial,\delta_1)) \\ &= (c_0 \cdot c_1 + \mu_1(c_1) + \partial(c_0), (\mu_1\delta, \mu_1\partial, \mu_1\delta_1))\end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat: Etkinin iyi tanımlı olduğu bilinen işlemler yardımıyla gösterilebilir. Burada, ön çaprazlanmış modül şartının kontrol edilmesi yeterli olacaktır. Buna göre, her $c_i \in C_i$, $i = 0, 1$, $(\mu_1,\mu_0) \in Mul(\mathcal{C})$, $(\delta,\partial,\delta_1) \in \mathfrak{M}(\mathcal{C})$ için aşağıdaki işlemler takip edilirse,

$$\begin{aligned}(d,\Delta)((c_0,(\mu_1,\mu_0)) \cdot (c_1,(\delta,\partial,\delta_1))) &= (d,\Delta)(c_0 \cdot c_1 + \mu_1(c_1) + \partial(c_0), (\mu_1\delta, \mu_1\partial, \mu_1\delta_1)) \\ &= (d(c_0 \cdot c_1) + d\mu_1(c_1) + d\partial(c_0), (\mu_1\delta_1, d\mu_1\partial)) \\ &= (c_0 d(c_1) + \mu_0 d(c_1) + d\partial(c_0), (\mu_1\delta_1, \mu_0 d\partial)) \\ &= (c_0 d(c_1) + (\mu_1,\mu_0) \cdot d(c_1) + (\delta_1, d\partial) \cdot c_0, (\mu_1,\mu_0)(\delta_1, d\partial)) \\ &= (c_0,(\mu_1,\mu_0))(d(c_1),(\delta_1,d\partial)) \\ &= (c_0,(\mu_1,\mu_0))((d,\Delta)(c_1,(\delta,\partial,\delta_1)))\end{aligned}$$

olduğu bulunur. □

Örnek 4.3 i) $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ bir ön çaprazlanmış modül olsun. Buna göre, $\mathcal{C}$ ve $IMul(\mathcal{C}) : IMul(C_1) \xrightarrow{d_M} IMul(C_0)$ ın yarı-direk çarpımı

$$(d, d_M) : C_1 \rtimes IMul(C_1) \longrightarrow C_0 \rtimes IMul(C_0)$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki etki de aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\begin{aligned}(c_0, ad_{c_0'}) \cdot (c_1, ad_{c_1'}) &= (c_0 \cdot c_1 + ad_{c_0'}(c_1) + c_0 \cdot ad_{c_1'}, ad_{c_0'} \cdot ad_{c_1'}) \\ &= (c_0 \cdot c_1 + c_0' \cdot c_1 + c_0 \cdot c_1', ad_{c_0' \cdot c_1'})\end{aligned}$$

ii) $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ bir ön çaprazlanmış modül ve aktörü de $Act(\mathcal{C})$ olsun. Buna göre, Önerme 4.26 da tanımlandığı gibi $\mathcal{C} \rtimes Act(\mathcal{C})$ elde edilir.

Tanım 4.31 $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$, $\mathcal{C}' : (C_1' \xrightarrow{d'} C_0')$ ve $\mathcal{A} : (A_1 \longrightarrow A_0)$ birer ön çaprazlanmış modül olsun ve $\mathcal{A}$ nın, $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{C}'$ üzerine etkisi sırasıyla

$$\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E} \overset{s}{\curvearrowright} \mathcal{A}, \ \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{E}' \overset{s'}{\curvearrowright} \mathcal{A}$$

split genişlemeleri tarafından tanımlanmış olsun. $(f_1, f_0) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ de ön çaprazlanmış modüller arasında bir homomorfizim olsun. Buna göre, her $a_i \in A_i$, $c_i \in C_i$, $i = 0, 1$ için

1.) $f_0(s_0(a_0)c_0) = s_0'(a_0)f_0(c_0)$

2.) $f_1(s_0(a_0) \cdot c_1) = s_0'(a_0) \cdot f_1(c_1)$

3.) $f_1(c_0 \cdot s_1(a_1)) = f_0(c_0) \cdot s_1'(a_1)$

şartları sağlandığında, (f_1, f_0) homomorfizmi, $\mathcal{A}$ nın $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{C}'$ üzerindeki etkisini korur denir.

Not 4.32 Eğer $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{C}'$ nün aktörleri varsa, $\mathcal{A}$ nın $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{C}'$ üzerine etkisi, $(\psi, \varphi) : \mathcal{A} \longrightarrow Act(\mathcal{C})$ ve $(\psi', \varphi') : \mathcal{A} \longrightarrow Act(\mathcal{C}')$ şeklindeki bazı homomorfizimler tarafından tanımlanabilir. Dolayısıyla, Tanım 4.31 de verilen şartlar her $a_i \in A_i$, $c_i \in C_i$, $i = 0, 1$ için

$1'$) $f_0(a_0 \cdot c_0) = a_0 \cdot f_0(c_0)$

$2'$) $f_1(a_0 \cdot c_1) = a_0 \cdot f_1(c_1)$

$3'$) $f_1(\partial_{a_1}(c_0)) = \partial_{a_1}'(f_0(c_0))$

şartlarına denk olmuş olur. Burada, ∂_{a_1} ve ∂_{a_1}', $\psi(a_1)$ ve $\psi'(a_1)$ üçlüleri tarafından üretilen ön çaprazlanmış multiplierlerdir.

Tanım 4.33 $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ ve $\mathcal{C}' : (C_1' \xrightarrow{d'} C_0')$ birer ön çaprazlanmış modül olsun ve $\mathcal{C}'$ nün $\mathcal{C}$ üzerine etkisi

$$0 \to \mathcal{C} \to \mathcal{E} \overset{s}{\underset{\curvearrowleft}{\longrightarrow}} \mathcal{C}' \to 0$$

split genişlemesi tarafından tanımlanmış olsun. Buna göre, $(\delta_1, \delta_0) : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ multiplieri, her $c_0' \in C_0'$, $c_1' \in C_1'$ için

(i) $\delta_0 d' = d\delta_1$,

(ii) $\delta_1(c_0' \cdot c_1') = s_0(c_0') \cdot \delta_1(c_1') = \delta_0(c_0') \cdot s_1(c_1')$

şartlarını sağlayan $\delta_1 : C_1' \longrightarrow C_1$ ve $\delta_0 : C_0' \longrightarrow C_0$ multiplier ikilisinden oluşur. $\mathcal{C}'$ nden $\mathcal{C}$ ye tanımlı bütün multiplierlerin kümesi $Mul(\mathcal{C}', \mathcal{C})$ ile gösterilir.

Not 4.34 $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ ve $\mathcal{C}' : (C_1' \xrightarrow{d'} C_0')$ birer ön çaprazlanmış modül olsun. Ayrıca, $\mathcal{C}$ aktöre sahip olsun ve $\mathcal{C}'$ nün $\mathcal{C}$ üzerine etkisi de $(\varepsilon, \eta) : \mathcal{C}' \longrightarrow Act(\mathcal{C})$ homomorfizmi ile gösterilsin. Buna göre, $(\delta_1, \delta_0) : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ multiplieri, her $c_0' \in C_0'$, $c_1' \in C_1'$ için

(i) $\delta_0 d' = d\delta_1$,

(ii) $\delta_1(c_0' \cdot c_1') = \eta_{1c_0'}\delta_1(c_1') = \partial_{c_1'}\delta_0(c_0')$

şartlarını sağlayan $\delta_1 : C_1' \longrightarrow C_1$ ve $\delta_0 : C_0' \longrightarrow C_0$ multiplier ikilisinden oluşur. Burada, $\eta_{1c_0'}$ ve $\partial_{c_1'}$, (ε, η) etkisi tarafından üretilir.

Örnek 4.4 $\mathcal{C}'$ ve $\mathcal{C}$ birer ön çaprazlanmış modül olsun ve $\mathcal{C}'$ nün $\mathcal{C}$ üzerine etkisi de $(\varepsilon, \eta) : \mathcal{C}' \to Act(\mathcal{C})$ homomorfizmi ile gösterilsin. Sabit bir $z \in C_1$ elemanı alınsın. Buna göre, her $c_1' \in C_1'$, $c_0' \in C_0'$ için, $\delta_1(c_1') = \alpha_{1c_1'}(z)$ ve $\delta_0(c_0') = \eta_{0c_0'}(z)$ olmak üzere, $(\delta_1, \delta_0) : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$, bir multiplier olur. Bu şekildeki multiplierler, iç multiplier olarak adlandırılır ve $IMul(\mathcal{C}', \mathcal{C})$ şeklinde gösterilir. Ayrıca, $Mul(\mathcal{C}', \mathcal{C})$, bir **k**-vektör uzayı yapısına sahiptir ve $IMul(\mathcal{C}', \mathcal{C})$ de onun alt uzayıdır.

Not 4.35 $\mathcal{E} : (E_1 \xrightarrow{\lambda} E_0)$, $\mathcal{E}' : (E_1' \xrightarrow{\lambda'} E_0')$ ve $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ birer ön çaprazlanmış modül olsun ve $\mathcal{E}$ nin $\mathcal{C}$ üzerine etkisi de $(\sigma, \tau) : \mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{Act}(\mathcal{C})$ homomorfizmi ile gösterilsin. Ayrıca, $(\delta_1, \delta_0) : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}$, bir multiplier ve $(f_1, f_0) : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$ da ön çaprazlanmış modüller arasında bir homomorfizim olsun. Buna göre, $\mathcal{E}'$ nün $\mathcal{C}$ üzerine etkisi $(\sigma, \tau) \circ (f_1, f_0) = (\sigma \circ f_1, \tau \circ f_0)$ şeklinde tanımlanmak üzere, $(\delta_1, \delta_0) \circ (f_1, f_0) \in Mul(\mathcal{E}', \mathcal{C})$ olur.

Önerme 4.36 $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ ve $\mathcal{C}' : (C_1' \xrightarrow{d'} C_0')$ birer ön çaprazlanmış modül olsun ve $\mathcal{C}'$ nün $\mathcal{C}$ üzerine etkisi de $0 \to \mathcal{C} \to \mathcal{E} \overset{s}{\underset{\curvearrowleft}{\longrightarrow}} \mathcal{C}' \to 0$ split genişlemesi ile tanımlansın. Herhangi bir $\mathcal{E} : (E_1 \xrightarrow{\lambda} E_0)$ ön çaprazlanmış modülü ve $(f_1, f_0) : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}'$ homomorfizmi için, $Mul(\mathcal{E}, \mathcal{C})$ vektör uzayı, $(\pi_1, \pi_0) \circ (h_1, h_0) = (f_1, f_0)$ olacak şekildeki $(h_1, h_0) : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}' \ltimes \mathcal{C}$ ön çaprazlanmış modül homomorfizimlerinin oluşturmuş olduğu vektör uzayına izomorftur. Burada, $\mathcal{E}$ nin $\mathcal{C}$ üzerine etkisi $(s_1, s_0) \circ (f_1, f_0)$ bileşkesi ile ifade edilir ve $(\pi_1, \pi_0) : \mathcal{C}' \ltimes \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ dönüşümü de bir kanonik projeksiyondur.

İspat: $(\delta_1, \delta_0) \in Mul(\mathcal{E}, \mathcal{C})$ multiplieri verilsin. Buna göre, her $e_1 \in E_1, e_0 \in E_0$ için, $h_1(e_1) = f_1(e_1), \delta_1(e_1)$ ve $h_0(e_0) = f_0(e_0), \delta_0(e_0)$ şeklinde tek morfizim tanımlanabilir.
Tersine, $(\pi_1, \pi_0) \circ (h_1, h_0) = (f_1, f_0)$ olacak şekilde $(h_1, h_0) : \mathcal{E} \to \mathcal{C}' \ltimes \mathcal{C}$ homomorfizmi verilsin. Buna göre, $(q_1, q_0) \circ (h_1, h_0)$ bileşkesi bir multiplier olur. Burada, $(q_1, q_0) : \mathcal{C}' \ltimes \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, kanonik projeksiyon ile ifade edilen bir multiplierdir. □

Sonuç 4.37 $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ ve $\mathcal{C}' : (C_1' \xrightarrow{d'} C_0')$ birer ön çaprazlanmış modül olsun ve $\mathcal{C}'$ nün $\mathcal{C}$ üzerine etkisi de $0 \to \mathcal{C} \to \mathcal{E} \overset{s}{\underset{\curvearrowleft}{\longrightarrow}} \mathcal{C}' \to 0$ split genişlemesi tarafından tanımlansın. Buna göre, $Mul(\mathcal{C}', \mathcal{C})$ **k**-vektör uzayı ile, $(\pi_1, \pi_0) \circ (h_1, h_0) = id_{C'}$ olacak şekildeki $(h_1, h_0) : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}' \ltimes \mathcal{C}$ ön çaprazlanmış modül homomorfizimlerinin oluşturmuş olduğu **k**-vektör uzayı arasında bire bir eşleşme vardır.

Tanım 4.38 $\mathcal{C} : (C_1 \xrightarrow{d} C_0)$ ve $\mathcal{C}' : (C_1' \xrightarrow{d'} C_0')$ birer ön çaprazlanmış modül olsun. $\mathcal{C}'$ nün $\mathcal{C}$ üzerine bir etkisi varsa ve $\mathcal{C}$ tekil ise, $\mathcal{C}$ ye bir $\mathcal{C}'$-modül denir.

Önerme 4.39 $0 \to (\mathcal{C}' : C_1' \xrightarrow{d'} C_0') \xrightarrow{(\chi_1, \chi_0)} (\mathcal{C} : C_1 \xrightarrow{d} C_0) \xrightarrow{(\pi_1, \pi_0)} (\mathcal{C}'' : C_1'' \xrightarrow{d''} C_0'') \to 0$ dizisi, ön çaprazlanmış modüllerin bir tam dizisi ve $\mathcal{A} : (A_1 \xrightarrow{\mu} A_0)$ da, $0 \to \mathcal{C} \to \mathcal{E} \overset{s}{\underset{\curvearrowleft}{\longrightarrow}} \mathcal{C}' \to 0$ split genişlemesi tarafından tanımlanan etki ile birlikte bir $\mathcal{C}''$-modül olsun. Buna göre, $Hom_{\mathcal{C}''}(\mathcal{C}'_{ab}, \mathcal{A})$, $\mathcal{C}''$-modüller kategorisinde $\mathcal{C}'_{ab} \longrightarrow \mathcal{A}$ şeklindeki morfizimlerin **k**-vektör uzayı olmak üzere,

$$0 \longrightarrow Mul(\mathcal{C}'', \mathcal{A}) \xrightarrow{\phi} Mul(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \xrightarrow{\nu} Hom_{\mathcal{C}''}(\mathcal{C}'_{ab}, \mathcal{A})$$

dizisi, **k**-vektör uzaylarının bir doğal tam dizisidir.

İspat: Etkiler üzerinde bazı düzenlemeler yapılarak Casas, Datuashvili, Ladra ve Uslu (2012) dakine benzer bir yolla ispat yapılabilir. Burada etkiler split genişlemeler tarafından tanımlıdır ve Casas, Datuashvili, Ladra ve Uslu (2012) dakinden daha genel bir durum söz konusudur. □

KAYNAKLAR DİZİNİ

Arvasi, Z. and Ege, U., 2003, Annihilators, multipliers and crossed modules, Appl. Cat. Struct., 11, 487-506.

Borceux, F., Janelidze, G. and Kelly, G.M., 2005, Internal object actions, Comment. Math. Univ. Carolinae, 46(2), 235–255.

Borceux, F., Janelidze, G. and Kelly, G.M., 2005, On the representability of actions in a semi-abelian category, Theory Appl. Categ., 14, No.11, 244–286.

Borceux, F. and Bourn, D., 2007, Split extension classifier and centrality. Contemporary Mathematics, Categories in Algebra, Geometry and Mathematical Physics, 431, 85-104.

Bourn, D. and Janelidze, G., 2009, Centralizers in action accessible categories, Cah. Topol. Géom. Différ. CatégComment. Math. Univ. Carolinae, 3, 211—232.

Boyacı, Y., Casas, J.M., Datuashvili, T. and Uslu, E.Ö., Modified category of interest, preprint.

Casas, J.M., Datuashvili, T. and Ladra, M., 2007, Actors in categories of interest, arXiv:math/0702574v2.

Casas, J.M., Datuashvili, T. and Ladra, M., 2009, Actor of a precrossed module, Comm. Algebra, 37(12), 4516–4541.

Casas, J.M., Datuashvili, T. and Ladra, M., 2009, Actor of an alternative algebra, arXiv:math.RA/0910.0550v1.

Casas, J.M., Datuashvili, T. and Ladra, M., 2010, Universal strict general actors and actors in categories of interest, Appl. Categ. Structures, 18(1), 85–114.

Casas, J.M., Datuashvili, T. and Ladra, M., Noncommutative Poisson algebras, submitted for publication.

Casas, J.M., Datuashvili, T., Ladra, M. and Uslu, E.Ö., 2012, Actor of a precrossed module in the category of Lie algebras, Communications in Algebra, 40, 2962-2982.

Casas, J.M. and Ladra, M., 1995, The actor of a crossed module in Lie algebras, Communications in Algebra, 25(5), 1625-1644.

Datuashvili, T., 1995, Cohomologically trivial internal categories in categories of groups with operations, Appl. Categ. Structures, 3, 221–237.

Datuashvili, T., 2002, Central series for groups with action and Leibniz algebras, Georgian. Math. J., 9(4), 671-681.

Datuashvili, T., 2002, Witt's theorem for groups with action and Leibniz algebras, Georgian. Math. J., 11(4), 691-712.

Ellis, G.J., 1988, Higher dimensional crossed modules of algebras, J. Pure Appl. Algebra, 52:277–282.

Higgins, P.J., 1956, Groups with multiple operators, Proc. London Math. Soc., (3)6, 366–416.

Hochschild, G., 1947, Cohomology and representations of associative algebras, Duke Math. J., 14, 921–948.

Huq, S.A., 1968, Commutator, nilpotency and solvability in categories, Quart. J. Math. Oxford Ser., 2, 19, 363–389.

Loday, J.L., 1995, Algèbres ayant deux opérations associatives (digèbres), C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 321, 141–146.

Loday, J.L., 2001, Dialgebras, Dialgebras and related operads, 7–66, Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 1763.

Loday, J.L. and Ronco, M.O., 2004, Trialgebras and families of polytopes, Homotopy Theory: Relations with Algebraic Geometry, Group Cohomology, and Algebraic K-theory, Contemp. Math., 346, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 369–398.

Mac Lane, S., 1958, Extensions and obstructions of for rings, Illinois J. Math., 2, 316-345.

Montoli, A., 2010, Action accessibility for categories of interest, Theory Appl. Categ., 23(1), 7–21.

Norrie, K., 1990, Actions and automorphisms of crossed modules, Bull. Soc. Math. France, 118(2), 129–146.

Orzech, G., 1972, Obstruction theory in algebraic categories I and II, J. Pure Appl. Algebra, 2, 287–314 and 315–340.

Porter, T., 1987, Extensions, crossed modules and internal categories in categories of groups with operations, Proc. Edinburgh Math. Soc., (2)30, (3), 373–381.

ÖZGEÇMİŞ

Yaşar Boyacı, 25 Kasım 1973 tarihinde, Denizli'nin Tavas ilçesinde doğmuştur. Lisans öğrenimine 1991 yılında Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünde başlamış ve 1997 yılında mezun olmuştur. İş hayatına 2001 yılında matematik öğretmeni olarak başlamış ve 11 yıl bu görevi devam ettirmiştir. 2007 yılında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı Cebir ve Sayılar Teorisi Dalında doktora öğrenimine başlamış ve 2012 yılında tamamlamıştır.