.

PSEUDOSİMPLİSEL CEBİR

Sedat PAK

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

2006

.

PSEUDOSİMPLİCİAL ALGEBRA

Sedat PAK

Ph. D. Thesis

Mathematics Department

2006

PSEUDOSİMPLİSEL CEBİR

SEDAT PAK

Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Cebir ve Sayılar Teorisi Dalında
Doktora Tezi
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. İ. İlker AKÇA

Temmuz-2006

Sedat PAK′nın DOKTORA tezi olarak hazırladığı
″PSEUDOSİMPLİSEL CEBİR″ başlıklı bu çalışma jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye: Yrd. Doç. Dr. İ. İlker AKÇA

Üye: Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ

Üye: Prof. Dr. Mahmut KOÇAK

Üye: Yrd. Doç. Dr. Erdal ULUALAN

Üye: Yrd. Doç. Dr. Kürşat YENİLMEZ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu′ nun ..... gün ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCİOGLU
Enstitü Müdürü

ÖZET

Inasaridze, [14], pseudosimplisel grupların homotopi gruplarını kullanarak, gruplar kategorisindeki değerleri ile birlikte abelyen olmayan üretilmiş funktorları oluşturmuştur. Bu, asosyatif halkalar kategorisi içindeki cebirsel K-teorisinin, GL kovaryant funktorunun sol üretilmiş funktorlar teorisi olarak elde edilmesine olanak sağlamaktadır. Cebirsel K - teori, modern cebir, topoloji, cebirsel geometri, fonksiyonel analiz ve cebirsel sayı teorisi ile ilişkisi olan matematiğin birçok temel alanında önemli uygulamaları bulunmaktadır. Günümüzde Swan, [30], Volodin, [15], Karoubi ve Villamayor, [24], Gersten, [35], ve Quillen, [7], tarafından oluşturulmuş birçok cebirsel K - teori ile ilgili bir çok çalışma vardır.

Inasaridze, [14], halka kategorisinden grup kategorisine tanımlı E ve GL kovaryant funktorlarını kullanarak elde edilen K_n funktorlarının Swan, [30], tarafından tanımlanmış cebirsel K - teoriyi verdiğini ispatlamıştır.

Bu çalışmada, Inasaridze, [14], tarafından tanımlanmış olan pseudosimplisel grupları ile pseudosimplisel grupların homotopi grupları gözönünde bulundurularak komütatif cebirler için pseudosimplisel cebir yapısı oluşturuldu. ve Inasaridze, [14], tarafından pseudosimplisel gruplar için yapılanlar pseudosimplisel cebirler için incelendi.

Tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümü olup bu bölümde tezin yapısı kısaca tanıtılmıştır. İkinci bölümde tezde kullanılacak temel kavramlar verilmiştir. Projektif sınıf, üretilmiş funktor ve sıralı üçlü (Cotriple) kavramları incelenmiştir. Sonrasında ise homotopi modülü kavramı ve çaprazlanmış modüller hatırlatıldı.

Üçüncü bölümde Inasaridze, [14], tarafından tanımlanmış olan pseudosimplisel grupların homotopi gruplarını kullanarak pseudosimplisel cebir yapısı

tanımlandı ve Inasaridze, [14], de pseudosimplisel gruplar için elde edilen sonuçlar pseudosimplisel cebirler için incelendi.

Son bölümde ise Arvasi, [39], nin simplisel komütatif cebirler için göstermiş olduğu sonuçların bazıları pseudosimplisel cebirler içinde kısmen geçerli olduğu gösterildi. Daha sonra çaprazlanmış modüllerin kategorisi ile Moore kompleksinin uzunluğu 1 olan pseudosimplisel cebirler kategorisinin denkliği gösterildi. Ayrıca Ellis, [13], den faydalanarak pseudo 2 - çaprazlanmış modül yapısı tanımlandı ve pseudo 2 - çaprazlanmış modül kategorisinin, Moore kompleksinin uzunluğu 2 olan pseudosimplisel cebirler kategorisine denkliği gösterildi. Ayrıca bu bölümde pseudosimplisel cebirlerin n - tipleride incelendi.

SUMMARY

Using the homotopy groups of pseudosimplicial groups, Inasaridze, [14], construct nonabelian derived functors with values in the category of groups. This enables him to obtain algebraic K - theory in the category of associative rings as the theory of left derived functors of the covariant functor GL. Algebraic K - theory is a modern and perspective branch of algebra having many important applications in fundamental areas of mathematics connected with algebra, topology, algebraic geometry, functional analysis and algebraic number theory. There are several algebraic K - theories in existence, constructed Swan, [30], Karoubi and Villamayor, [24], Volodin, [15], Gersten, [35], and Quillen, [7], that enlist homotopical methods into the study of algebraic objects.

Inasaridze, [14], proved that the functors K_n give the algebraic K - theory of Swan using two covariant functors GL and E from the category of rings to the category of groups. In this thesis we define pseudosimplicial algebra considering pseudosimplicial groups. Then we give some results of pseudosimplicial algebras.

This thesis consists of four chapter. In the first chapter we introduce structure of thesis. In the second chapter we give some basic information. We recall projective class, derived functors, cotriples, homotopy modules and crossed modules. In the next chapter we define pseudosimplicial algebra considering pseudosimplicial groups and homotopy groups of that.

In the last chapter we work on the higer order Peiffer elements of pseudosimplicial algebras which are given by Z. Arvasi for simlicial algebras version. Arvasi, [39], and we show that this results are partially correct for pseudosimplicial algebras. Then we show that the category of crossed module is

equivalent to the category of pseudosimplicial algebras with Moore compleks of length 1. Also we define pseudo 2 - crossed module and we prove that the category of pseudo 2 - crossed module is equivalent to the category of pseudosimplicial algebras with Moore compleks of length 2. Then we examine n - types of pseudosimplicial algebras.

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmamı yöneten ve bu tezin hazırlanması sırasında, çalışma boyunca vakit ayırarak ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam sayın İ. İlker AAKÇA'ya sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Aynı zamanda daima bana destek olan herzaman yanımda olduklarına inandığım Zekeriya ARVASİ, Mahmut KOÇAK, İbrahim GÜNALTI başta olmak üzere diğer tüm hocalarıma ve arkadaşlarıma sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Son olarakda sevgili eşim, kızım ve oğluma bana daima destek olup varlıklarıyla bana güç verdikleri için sonsuz saygı ve minnetlerimi sunarım.

Eskişehir, 2006

İçindekiler

1 Giriş **1**

2 Pseudosimplisel Cebirler **5**

2.1 Pseudosimplisel Cebirler 6

2.2 **Projektif Sınıf** 8

2.3 Üretilmiş Funktorlar 9

2.4 Sıralı Üçlü(Cotriples) 17

2.5 Pseudosimplisel Çözülme 19

2.5.1 Tanım ve Gösterimler 19

2.5.2 Homotopi Modülünde Yokolan Elemanlar 20

2.6 Cebirler Üzerinde Çaprazlanmış Modüller 24

2.6.1 Çaprazlanmış Modül Kavramı 24

2.6.2 Serbest Çaprazlanmış Modüller 31

3 Abelyen olmayan Üretilmiş Funktorlar ve Cebirsel K - teori **32**

3.1 Pseudosimplisel Cebirler 33

3.2 **Abelyen Olmayan Üretilmiş Funktorlar** 47

3.2.1 Cebirsel K - Teori 60

4 Pseudosimplisel Cebirlerin n-Tipleri **63**

4.1 Giriş 63

4.1.1 Tanım ve Notasyonlar 65
4.1.2 Bir Pseudosimplisel Cebirin Yarıdirekt Ayrışımı 67
4.2 Pseudo 2 - Çaprazlanmış Modüller 78
4.3 Pseudosiplisel Cebirlerin n-Tipleri 87
4.3.1 Cat^n - Cebirler ve Çaprazlanmış n - Tipler 87
4.3.2 Crs^n Kategorisinden PseudosimpAlg Kategorisine . . . 91

Bölüm 1

Giriş

Inasaridze, [14], pseudosimplisel grupların homotopi gruplarını kullanarak, gruplar kategorisindeki değerleri ile birlikte abelyen olmayan üretilmiş funktorları oluşturmuştur. Bu, asosyatif halkalar kategorisi içindeki cebirsel K-teorisinin, GL kovaryant funktorunun sol üretilmiş funktorlar teorisi olarak elde edilmesine olanak sağlamaktadır. Cebirsel K - teori, cebirin modern ve önemli bir branşıdır ve cebir, topoloji, cebirsel geometri, fonksiyonel analiz ve cebirsel sayı teorisi ile ilişkisi olan matematiğin birçok temel alanında önemli uygulamaları bulunmaktadır. Günümüzde Swan, [30], Volodin, [15], Karoubi ve Villamayor, [24], Gersten, [35], ve Quillen, [7], tarafından oluşturulmuş birçok cebirsel K - teori mevcuttur.

Inasaridze, [14], halka kategorisinden grup kategorisine tanımlı E ve GL kovaryant funktorlarını kullanarak elde edilen K_n funktorlarının Swan, [30], tarafından tanımlanmış cebirsel K - teoriyi verdiğini ispatlamıştır.

Bu çalışmada, Inasaridze, [14], tarafından tanımlanmış olan pseudosimplisel grupları ve pseudosimplisel grupların homotopi grupları gözönünde bulundurularak komütatif cebirler için pseudosimplisel cebir yapısı oluşturuldu. ve Inasaridze, [14], tarafından pseudosimplisel gruplar için yapılanlar pseu-

dosimplisel cebirler için incelendi.

Çaprazlanmış Modüller ilk olarak Whitehead, [17], tarafından 1949 de tanımlanmış, daha sonra Peiffer, [31], ve Reidemeister, [19], tarafından incelenmiştir. Whitehead, K yol bağlı topolojik uzay ve L yol bağlı altuzay olmak üzere, $\pi_2(K, L)$ ikinci relatif homotopi grubunun yapısını incelerken çaprazlanmış modül kavramını tanımlamıştır. Ayrıca, ikinci relatif homotopi grubundan temel gruba giden

$$\partial : \pi_2(K, L) \longrightarrow \pi_1(L)$$

sınır dönüşümünün, $\pi_1(L)$ nin $\pi_2(K, L)$ üzerine standart etkisi ile birlikte bir çaprazlanmış modül olduğunu göstermiştir.

k komütatif bir halka R, birimli bir k-cebir olsun.

$$\partial : C \longrightarrow R$$

bir R-cebir morfizmi ve

$$\begin{array}{lll} R \times C & \longrightarrow C \\ (r, c) & \longmapsto r \cdot c \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{lll} C \times R & \longrightarrow R \\ (c, r) & \longmapsto c \cdot r \end{array}$$

R nin C üzerine etkisi ile birlikte, her $c, c' \in C$ ve $r \in R$ için

$$\begin{array}{lrcl} \text{ÇM1)} & \partial(r \cdot c) & = & r\partial(c) \\ & \partial(c \cdot r) & = & \partial(c)r \\ \text{ÇM2)} & \partial c \cdot c' & = & cc' \\ & c \cdot \partial c' & = & cc' \end{array}$$

şartları sağlanıyor ise R üzerinde C cebirine bir çaprazlanmış (crossed) modül denir ve (C, R, ∂) ile gösterilir.

Simplisel gruplar ise, ilk olarak Kan, [4], tarafından çalışılmıştır. Kan, Moore, Milnor, ve Dold kısaca aşağıda verilen önemli sonuçları elde etmişlerdir.

(i) simplisel objelerin, iyi yapılandırılmış bir homotopi teorisine sahip olduğunu,

(ii) simplisel objelerin, bağlantılı uzayların tüm homotopi tiplerini modellediğini,

(iii) abelyen simplisel grupların, zincir komplekslerininkine denk bir araç olduğunu ve böylece bunların homolojik cebire uygulanabilir olduğunu, ve

(iv) düşük boyutlarda hesaplamaların mümkün olduğunu göstermişlerdir.

Brown ve Loday, [32], bir $\mathbf{G}$ simplisel grubunun G_2 ikinci boyutu dejenere elemanlar tarafından üretiliyorsa, yani düşük boyuttan gelen elemanlar tarafından, bu durumda $\mathbf{G}$ nin $(\mathbf{NG}, \partial)$ Moore kompleksinin NG_2 ikinci teriminin ∂ altındaki görüntüsünün

$$[\text{Çek}\, d_1, \text{Çek}\, d_2]$$

olduğunu göstermişlerdir, burada köşeli parantez, komütatör altgrubu göstermektedir. NG_1 in bu altgrubu, $(s_0d_1(x)ys_0d_1(x)^{-1})(xy^{-1}x^{-1})$ formundaki elemanlar tarafından üretilir ve bu tam olarak NG_1 in Peiffer altgrubudur.

Brown ve Loday, [32], in gruplar için verdiği bu sonucu Arvasi, [39], komütatif cebirler için daha yüksek boyutlara genelleştirmiş, Mutlu, [1], ise Z.Arvasi nin doktora tezindeki bu sonuçları gruplar için genişletmiştir. Bu çalışmada, Arvasi, [39], nin simplisel cebirler için elde ettiği sonuçların bazılarının kısmen Pseudosimplisel cebirler içinde sağlanıldığı gösterildi.

Daha sonra çaprazlanmış modüllerin kategorisi ile Moore kompleksinin uzunluğu 1 olan pseudosimplisel cebirler kategorisinin denkliği gösterildi. Ayrıca Ellis, [13], den faydalanarak pseudo 2 - çaprazlanmış modül yapısı tanımlandı ve pseudo 2 - çaprazlanmış modül kategorisinin, Moore kompleksinin uzunluğu 2 olan pseudosimplisel cebirler kategorisine denkliği gösterildi.

Ayrıca Porter, [38], Loday, [18], in $(n+1)$ tiplerin Cat^n - gruplar yada çaprazlanmış n - küplerin bir bölüm kategorisine denkliğini ispatlayan cebirsel

bir ispatını yapmıştır. Bu ispat yardımıyla Arvasi, Koçak, Alp, [42], simplisel komütatif cebirler için benzer sonuçlar elde etmişlerdir. Bu çalışmada, [42], daki bu sonuçlar pseudosimplisel cebirler için incelendi.

Çalışmanın ilk bölümünde, üzerinde çalışılacak temel yapı olan pseudosimplisel cebirler tanıtılarak genel özellikleri verildi. Daha sonra pseudosimplisel cebir yapısıyla simplisel cebir yapısı arasındaki fark belirlenerek pseudosimplisel cebirler ve homotopi modülleri üzerinde bazı genel sonuçlar ifade edildi. Sonrasında projektif sınıf, üretilmiş funktor ve sıralı üçlü kavramları incelendi. Bu bölümde ayrıca pseudosimplisel çözülmenin adım adım oluşturulması da çalışılmıştır.

Bir sonraki bölümde, Inasaridze, [14], tarafından tanımlanmış olan pseudosimplisel grupları ile pseudosimplisel grupların homotopi grupları gözönünde bulundurularak komütatif cebirler için pseudosimplisel cebir yapısı oluşturuldu. ve Inasaridze, [14], nin elde ettiği sonuçlar pseudosimplisel cebirler için incelendi.

Son bölümde ise, Arvasi nin simplisel komütatif cebirler için göstermiş oldukları sonuçları, prseudosimplisel cebirler için kısmen geçerli olduğu gösterildi. Daha sonra çaprazlanmış modüllerin kategorisi ile Moore kompleksinin uzunluğu 1 olan pseudosimplisel cebirler kategorisinin denkliği gösterildi. Ayrıca Ellis, [13], den faydalanarak pseudo 2 - çaprazlanmış modül yapısı tanımlandı ve pseudo 2 - çaprazlanmış modül kategorisinin, Moore kompleksinin uzunluğu 2 olan pseudosimplisel cebirler kategorisine denkliği gösterildi.

Ayrıca Porter, [38], Loday, [18], in $(n+1)$ tiplerin Cat^n - gruplar yada çaprazlanmış n - küplerin bir bölüm kategorisine denkliğini ispatlayan cebirsel bir ispatını yapmıştır. Bu ispat yardımıyla, [42], de simplisel cebirler için benzer sonuçlar elde edilmiştir. Bu bölümde, [42], deki bu sonuçlar pseudosimplisel cebirler için incelendi.

Bölüm 2

Pseudosimplisel Cebirler

Bu bölümde ilk olarak Inasaridze, [14], tarafından tanımlanmış olan pseudosimplisel grupların temel özelliklerinden faydalanarak ve simplisel yapıyı hatırlayarak komütatif cebirler için pseudosimplisel cebir kavramı, bir pseudosimplisel cebirin temel özellikleri ve bir pseudosimplisel cebirin Moore kompleksi kavramı verildi. Daha sonra da pseudosimplisel cebirler için simplisel çözülemenin adım adım oluşturulması metodunda, bir pseudosimplisel cebirin homotopi modülü önemli bir rol oynadığından, pseudosimplisel cebirin homotopi modülü kavramıda verildi. Son olarakta Porter, [28], komütatif cebirler için tanımlamış olduğu çaprazlanmış modül kavramı tanıtıldı ve komütatif cebirler üzerinde çaprazlanmış modüllerin çeşitli örnekler incelendi. Bu konular hakkında daha detaylı bilgi için Arvasi, [39], ve Andre, [20], ye bakınız.

2.1 Pseudosimplisel Cebirler

k komütatif halka ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere K_n ler k-cebir ve $0 \leq i \leq n$ için

$$\partial_i^n : K_n \longrightarrow K_{n-1} \quad \text{ve} \quad s_i^n : K_n \longrightarrow K_{n+1}$$

k-cebir homomorfizmlerini gözönüne alalım. Eğer bu homomorfizmler için

$$\begin{aligned}
\partial_i^n \partial_j^n &= \partial_{j-1}^n \partial_i^n, && i < j \\
\partial_i^{n+1} s_j^n &= s_{j-1}^{n-1} \partial_i^n, && i < j \\
\partial_j^{n+1} s_j^n &= \partial_{j+1}^{n+1} s_j^n = 0 \\
\partial_i^{n+1} s_j^n &= s_j^{n-1} \partial_{i-1}^n, && i > j+1
\end{aligned}$$

aksiyomları sağlanıyorsa, K_n, k-cebirleri ile birlikte ∂_i^n ve s_i^n homomorfizmlerinin oluşturduğu

$$\mathbf{K}_* = (K_n, \partial_i^n, s_i^n, \text{ özdeşlikler})$$

sistemine bir **pseudosimplisel cebir** denir. Kısaca

$$\mathbf{K}_* = \cdots \quad K_{n+1} \underset{\substack{\xleftarrow{s_n} \\ \vdots \\ \xleftarrow[s_0]{}}}{\overset{\substack{\xrightarrow{\partial_{n+1}} \\ \vdots \\ \xrightarrow[\partial_0]{}}}{\rightleftarrows}} K_n \underset{\substack{\xleftarrow{s_n} \\ \vdots \\ \xleftarrow[s_0]{}}}{\overset{\substack{\xrightarrow{\partial_n} \\ \vdots \\ \xrightarrow[\partial_0]{}}}{\rightleftarrows}} K_{n-1} \cdots K_1 \underset{s_0}{\overset{\partial_1, \partial_0}{\rightleftarrows}} K_0$$

biçiminde gösterilir. Burada $0 \leq i \leq n$ için

$$\partial_i^n : K_n \longrightarrow K_{n-1}$$

homomorfizmlerine sınır homomorfizmi ve

$$s_i^n : K_n \longrightarrow K_{n+1}$$

homomorfizmlerine de **pseudodejenere homomorfizmleri** denir.

Eğer yukarıdaki aksiyomlara $i \leq j$ için

$$s_i^{n+1} s_j^n = s_{j+1}^{n+1} s_i^n$$

şartı da ilave edilirse, simplisel cebir yapısı elde edilir. Herhangi bir $\mathbf{K}_*$ simplisel cebiri için $n \geq 0$ olmak üzere,

$$L_n(\mathbf{K}_*) = K_n \cap \text{Çek}\partial_0^n \cap \cdots \cap \text{Çek}\partial_{n-1}^n \qquad n > 0$$

ve $d_n = \partial_n^n$ alalım. Bu durumda $n > 0$ için Görd_n, K_{n-1} in bir ideali ve

$$\text{Gör}d_{n+1} \subseteq \text{Çek}d_n$$

dir. Bu ise

$$L_n(\mathbf{K}_*) = \{L_n(\mathbf{K}_*), d_n\}$$

Moore zincir kompleksini verir. ($n < 0$ için $L_n(\mathbf{K}_*) = \{0\}$ alınmaktadır.) $L(\mathbf{K}_*)$ ın pseudodejenere homomorfizmlerinden bağımsız olduğu ve sınır homomorfizmlerine bağlı olduğu açıktır.

Tanım 2.1.1 $n \geq 0$ için $L(\mathbf{K}_*)$ zincir kompleksinin n boyutlu homolojisine, $\mathbf{K}_*$ pseudosimplisel cebirinin n boyutlu homotopi modülü denir ve $\pi_n(\mathbf{K}_*)$ ile gösterilir.

Bir pseudosimplisel cebiri için, $(n \geq 0)$ olmak üzere

$$L_n'(\mathbf{K}_*) = K_n \cap \text{Çek}\partial_1^n \cap \cdots \cap \text{Çek}\partial_n^n$$

ve d_n', ∂_0^n ın $L_n'(\mathbf{K}_*)$ kısıtlanması olmak üzere,

$$L_n'(\mathbf{K}_*) = \left\{L_n'(\mathbf{K}_*), d_n'\right\}$$

şeklinde tanımlanan ikinci zincir kompleksini oluşturabiliriz.

2.2 Projektif Sınıf

Burada homolojik cebir yapısını oluşturmak için gerekli olan projektif sınıf kavramı açıklanacaktır. Sezgisel olarak projektif sınıf, bir takım elemanların bir seçimidir. Bir X kümesinin elemanları, tek elemanlı bir kümeden X 'e giden dönüşümlerle birebir ve örten bir şekilde eşlenir ve bir A abelyan grubunun elemanlarıda $\mathbb{Z}$ den A ya giden dönüşümlerle birebir örten olarak eşlenir. Böylece herhangi bir kategorideki $P \to A$ dönüşümüne A nın bir P elemanı denir. Eğer burada P vurgulanmak istenmezse böyle bir dönüşüme A nın bir genelleştirilmiş elemanı denir. Herhangi bir kategoride bir $A \to B$ dönüşümü genelleştirilmiş elemanlar üzerinde yaptığı etki ile belirlidir. Eğer $\mathcal{P}$ bir objeler ailesi ise, $\mathcal{P}$ içindeki herhangi bir P objesi için $\mathcal{P}-$elemanı P eleman anlamındadır.

$\mathcal{A}$ bir abelyen kategori ve $f : B \to C$ bir dönüşüm olsun, eğer f den elde edilen

$$\mathcal{A}(P; B) \to \mathcal{A}(P; C)$$

dönüşümü abelyen grupların bir örten dönüşümü ise f dönüşümüne P -epik denir. Eğer $\mathcal{P}$ içindeki bütün P ler için $\mathcal{P}$ -epik ise, f ye $\mathcal{P}$ - epik denir.

Tanım 2.2.1 $\mathcal{A}$ üzerindeki bir projektif sınıf aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekildeki, $\mathcal{A}$ nın objelerinin bir $\mathcal{P}$ kolleksiyonu ve $\mathcal{A}$ daki dönüşümlerin bir ε kolleksiyonudur.

i) ε sadece bütün $\mathcal{P}$ -epik dönüşümlerinin bir kolleksiyonudur.

ii) $\mathcal{P}$, ε daki herbir dönüşüm P -epik olacak şekildeki bütün P objelerinin kümesidir.

iii) Herbir B objesi için $\mathcal{P}$ nin P elemanı ile birlikte ε içinde bir $P \to B$ dönüşümü vardır.

$\mathcal{P}$ kolleksiyonu bir $(\mathcal{P}, \varepsilon)$ projektif sınıfının bir parçası olduğundan, projektif sınıf tektir. Böylece söyleyebiliriz ki ya $\mathcal{P}$ bir projektif sınıf belirtir yada $\mathcal{P}$ nin kendisi bir projektif sınıftır. $\mathcal{P}$ nin bir objesi $\mathcal{P}$ - projektif olarak adlandırılır. Yada konu açıksa relatif projektifde denilebilir.

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

dizisini ele alalım. Eğer $gof : A \to C$ sıfır dönüşümü ve

$$\mathcal{A}(P, A) \to \mathcal{A}(P, B) \to \mathcal{A}(P, C)$$

abelyen gruplarının bir tam dizisi ise $A \to B \to C$ dizisine P-tamdır denir. Buna göre bir $A \to B \to C$ dizisi, P- elemanlarının bir tam dizisini indirger. Bir $\mathcal{P}$ - tam dizisi, $\mathcal{P}$ nin bütün P leri için, P tam anlamındadır.

Örnek 2.2.2 Assosyatif bir R halkası için $\mathcal{A}$, sol R modülleri kategorisi, $\mathcal{P}$ serbest R modüllerinin tüm toplamlarının bir kolleksiyonu ve ε da R-modüllerinin örten dönüşümlerinin bir kolleksiyonu olsun. Bu durumda ε, $\mathcal{P}$ - epimorfizimlerinin bir kolleksiyonudur ve $\mathcal{P}$ bir projektif sınıftır. $\mathcal{P}$ tam dizileri bilinen tam dizilerdir.

2.3 Üretilmiş Funktorlar

Eğer $\underline{A}$ yeteri kadar projektiflere sahip bir abelyen kategori ise, temel olarak aşağıdaki gibi projektif çözülmeler oluşturulabilir. Eğer $A \in \underline{A}$ ise, $X_0 \xrightarrow{\partial_0} A$, projektif X_0 ile, bir epimorfizm olsun. $K_1 \longrightarrow X_0$ dönüşümü ∂_0 ın çekirdeği ve $X_1 \xrightarrow{e_1} K_1$ dönüşümü projektif X_1 ile bir epimorfizm olsun. ∂_1 ise

$$X_1 \xrightarrow{e_1} K_1 \longrightarrow X_0$$

bileşimi olsun ve bu şekilde devam edilsin.

Tanım 2.3.1 $\underline{A}$ bir kategori olsun ve $n \geq 0$ için

$$X \underset{f^n}{\overset{f^0}{\vdots}} Y$$

$n+1$ tane $\underline{A}$ morfizimlerinin bir dizisi olsun. $(f^0, ..., f^n)$ nin bir simplisel çekirdeği $0 \leq i < j \leq n+1$ *için*

$$f^i k^j = f^{\,j-1} k^i$$

şartını sağlayan $\underline{A}$ morfizimlerinin $n+2$ li dizisi

$$K \underset{k^{n+1}}{\overset{k^0}{\vdots}} X$$

dir. Yani eğer

$$Z \underset{h^{n+1}}{\overset{h^0}{\vdots}} X$$

$$f^i h^j = f^{j-1} h^i, \ 0 \leq i < j \leq n+1$$

şartını sağlayan herhangi bir dizi ise

$$k^i h = h_i, \ 0 \leq i \leq n+1$$

olacak şekilde birtek $h : Z \longrightarrow K$ dönüşümü vardır.

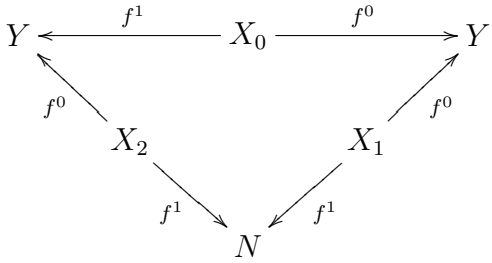
Bu durumda eğer simplisel çekirdekler varsa izomorfizim altında tektir.

Yardımcı teorem 2.3.2 Eğer $\underline{A}$ sonlu limitlere sahipse herhangi bir $n \geq 0$ için $(f^0, ..., f^n)$ simplisel çekirdekleri vardır.

İspat: Tümavarımla yardımcı teorem 2.3.2 nin ispatını $n = 1$ için yapalım.

$$X \underset{f^1}{\overset{f^0}{\rightrightarrows}} Y$$

$\underline{A}$ morfizimlerinin ise ikilisi (f^0, f^1) in simplisel çekirdeği aşağıdaki diyagramın limitidir.



$\mathcal{P}$, $\underline{A}$ nin objelerinin bir sınıfı olsun, bir $f : A \to A'$, $\underline{A}$ morfizmini alalım, eğer her $X \in \mathcal{P}$ için

$$\underline{A}\,(X, f) : \ \underline{A}\,(X, A) \longrightarrow \ \underline{A}\,(X, A')$$

örten ise, $f : A \to A'$, $\underline{A}$ morfizmine $\mathcal{P}$-epimorfiktir denir.

Herbir $A \in \underline{A}$ için, $X \in \mathcal{P}$ olmak üzere bir $e : X \longrightarrow A$, $\mathcal{P}$-epimorfizmi varsa, bu durumda $\mathcal{P}$ ye bir **projektif sınıf** denir. Daha detaylı bilgi için Eilenberg ve Moore, [33], bakılabilir.

$\underline{A}$ nin, A üzerinde arttırılmış (dejenereler olmaksızın) bir simplisel objesi, $0 \leqq i < j \leqq n$ için

$$\partial^i_{n-1}\partial^j_n = \partial^{j-1}_{n-1}\partial^i_n$$

olacak şekilde $\underline{A}$ içinde

$$\cdots X_n \underset{\partial^n_n}{\overset{\partial^0_n}{\rightrightarrows}} X_{n-1} \underset{\partial^{n-1}_{n-1}}{\overset{\partial^0_{n-1}}{\rightrightarrows}} \cdots X_1 \underset{\partial^1_1}{\overset{\partial^0_1}{\rightrightarrows}} X_0 \xrightarrow{\partial^0_0} A$$

bir diyagramdır. ∂^i_n yüzey operatörü olarak isimlendirilir.

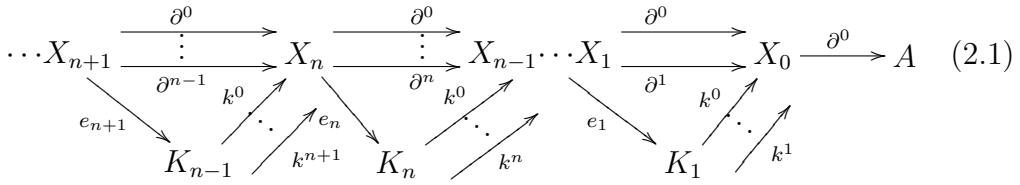
Eğer $f : A \longrightarrow A'$, ve $X \xrightarrow{\partial^0} A$ ve $X' \xrightarrow{\partial^0} A'$, A ve A' üzerinde arttırılmış simplisel objeler ise, f üzerinde bir $\bar{f}$ morfizimi

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\bar{f}} & X \\ {\scriptstyle \partial^0_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \partial^0_0} \\ A & \xrightarrow[f]{} & A \end{array}$$

şekilde de görüldüğü gibi, $n \geq 0$ için,

$$\partial_n^i \bar{f}_n = \bar{f}_{n-1}\partial_n^i \qquad 0 \leqq i \leqq n \ \text{ için} \qquad (f_{-1} = f \ \text{ alalım})$$

sağlayan $\bar{f}_n : X_n \longrightarrow X'_n$, $\underline{A}$ - morfizimlerinden oluşur. Eğer $\mathcal{P}$, $\underline{A}$ da bir projektif sınıf ve A üzerinde arttırılmış bir simplisel obje $X \xrightarrow{\partial^0} A$ ise, bu durumda herbir $X_n \in \mathcal{P}$ olması için gerek ve yeter şart $X \xrightarrow{\partial^0} A$ nın $\mathcal{P}$ - projektif olmasıdır. Farzedelimki $\underline{A}$ sonlu bir limite sahip olsun, bu durumda yardımcı teorem 2.3.2 vasıtasıyla



(2.1)

elde ederiz, burada $n \geqq 1$ için

$$K_n \underset{k^n}{\overset{k^0}{\rightrightarrows}} X_{n-1}$$

$$X_{n-1} \underset{\partial^{n-1}}{\overset{\partial^0}{\rightrightarrows}} X_{n-2}$$

in bir simpleks çekirdeğidir. ($X_{-1} = A$ alalım)

$X \xrightarrow{\partial^0} A$ nın $\mathcal{P}$ -tam olması için gerek ve yeter şart ∂_0^0 ın ve $n \geqq 1$ için e_n nin $\mathcal{P}$-epimorfik olmasıdır. $X \xrightarrow{\partial^0} A$ ın $\underline{A}$ nin bir $\mathcal{P}$-projektif çözümlemesi olması için gerek ve yeter şart ise, bunun $\mathcal{P}$-projektif ve $\mathcal{P}$-tam olmasıdır. Açıktır ki eğer $\mathcal{P}$, $\underline{A}$ içinde bir projektif sınıf ve $\underline{A}$ sonlu bir limite sahip ise, bu durumda herbir $A \in \underline{A}$ yeniden çözümlenebilir. Dahası böyle bir çözümleme, simplisel homotopi eşitliğine göre tekdir. □

Teorem 2.3.3 $X \xrightarrow{\partial^0} A$ bir $\mathcal{P}$-projektif ve $X' \xrightarrow{\partial^0} A'$ $\mathcal{P}$ -tam olsun. Bu durumda herhangi bir $f : A \longrightarrow A'$ morfizmi, f üzerinde

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\overline{f}} & X' \\ {\scriptstyle \partial^0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \partial^0} \\ A & \xrightarrow[f]{} & A' \end{array}$$

morfizmine genişletilebilir, dahası bu şekildeki herhangi iki genişleme simplisel olarak homotopiktdir. Yani eğer $\overline{f}, \overline{g} : X \longrightarrow X'$, f *nin* iki genişlemesi ise, bu durumda $0 \leq i \leq n$ *için*

$$h_n^i : X_n \longrightarrow X'_{n+1}$$

$\underline{A}$ morfizmleri

$$\begin{aligned} \partial^0_{n+1} h^0_n &= \overline{f}_n, \\ \partial^{n+1}_{n+1} h^n_n &= \overline{g}_n, \end{aligned}$$

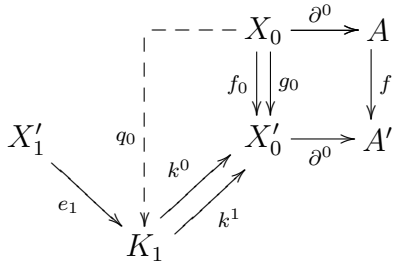
$$\partial^i h^j = \begin{cases} h^{j-1}\partial^i & i < j \\ h^j \partial^{i-1} & i > j+1 \end{cases}$$

ve

$$\partial^{j+1} h^{j+1} = \partial^{j+1} h^j.$$

olacak şekilde mevcuttur.

İspat: $\overline{f}$ nin varlığı (2.1) de verilen $X' \xrightarrow{\partial^0} A'$ bileşke işleminden açıktır. Varsayalımki $\overline{g}$ de başka bir genişleme olsun. Bu durumda $n = 0$ için aşağıdaki diyagramı göz önüne alalım,



burada (2.1) deki gibi $X' \xrightarrow{\partial^0} A'$ nın bir birleşkesidir. Bu durumda

$$\partial^0 f_0 = \partial^0 g_0$$

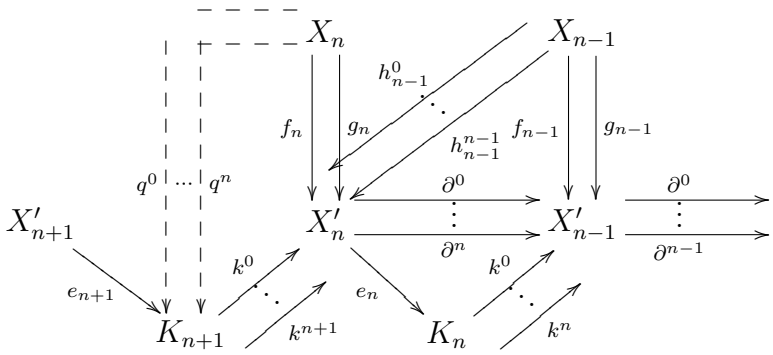
olduğundan dolayı, $q^0 : X_0 \longrightarrow K$ vardır öyleki

$$k^0 q^0 = f_0 \quad \text{ve} \quad k^1 q^0 = g_0$$

dır. Bu takdirde X_0, $\mathcal{P}$ -projektif ve e_1 ise $\mathcal{P}$ -epimorfik olduğundan, $h_0^0 : X_0 \longrightarrow Y_1$ vardır, öyleki

$$e_1 h_0^0 = q^0 \cdot h_0^0$$

dir, böylece bir simplisel homotopi oluşturmak için gerekli olan özellik elde edilmiş olur. Bunu tümevarımla göstermek için aşağıdaki diyağramı inceleyelim:



İlk olarak $q^0, ..., q^n : X_n \longrightarrow K_{n+1}$ yapısını

$$k^0 q^0 = f_n,$$
$$k^{n+1} q^n = g_n,$$

$$k^i q^j = \begin{cases} h^{j-1}\partial^i & i < j \\ h^j \partial^{i-1} & i > j+1 \end{cases}$$

ve

$$k^{j+1} q^{j+1} = k^{j+1} q^j$$

olacak şekilde oluşturalım.

$$\alpha_0^{n-1} = f_{n-1}$$
$$\alpha_{j+1}^{n-1} = \partial_n^{j+1} h_{n-1}^{j+1} = \partial_n^{j+1} h_{n-1}^{j} \qquad 0 \leqq j \leqq n-2,$$
$$\alpha_n^{n-1} = g_{n-1}$$

ler yardımıyla $0 \leqq j \leqq n$ için

$$\alpha_j^{n-1} : X_{n-1} \longrightarrow X'_{n-1}$$

morfizimlerini tanımlayalım. Şimdi $0 \leqq i \leqq n$, $0 \leqq j \leqq n-1$ için

$$\psi_{j+1}^{i} = \begin{cases} \alpha_j^{n-1} \partial_n^i & 0 \leqq i < j+1. \\ \alpha_{j+1}^{n-1} \partial_n^i & i \geqq j+1. \end{cases}$$

yazalım ve $l < i$ için,

$$\partial^l \psi_{j+1}^{i} = \partial^{i-1} \psi_{j+1}^{l},$$

doğruluğunu gösterelim, yani,

$$\psi_{j+1} : X_n \longrightarrow K_n \quad 0 \leqq j \leqq n-1$$

var olduğunu ve böylece

$$k^i \psi_{j+1} = \psi_{j+1}^{i} \quad 0 \leqq i \leqq n$$

olduğunu gösterelim. Burada X_n, $\mathcal{P}$ -projektif ve e_n ise $\mathcal{P}$ -epimorfik olduğuna göre

$$\alpha_{j+1}^{n} : X_n \longrightarrow X'_n \qquad 0 \leqq j \leqq n-1$$

vardır. Öyleki

$$e_n \alpha_{j+1}^{n} = \psi_{j+1}$$

dir. Yeniden

$$\alpha_0^n = f_n,$$

$$\alpha_{n+1}^{n} = g_n,$$

yazarak $0 \leqq i \leqq n$, $0 \leqq j \leqq n-1$ için $\varphi_j^i : X_n \longrightarrow X'_n$ morfizimlerini

$$\varphi_j^i = \begin{cases} h_{n-1}^{j-1}\partial_n^i & 0 \leqq i < j, \\ \alpha_j^n & i = j, \\ \alpha_{j+1}^n & i = j+1, \\ h_{n-1}^{j}\partial_n^{i-1} & n+1 \geqq i > j+1. \end{cases}$$

vasıtasıyla tanımlayalım. Yine

$$l < i \text{ için } \partial_n^l \varphi_j^i = \partial_n^{i-1}\varphi_j^l$$

olduğunu ve böylece

$$q^j : X_n \longrightarrow K_{n+1} \qquad 0 \leqq j \leqq n$$

var ve dolayısıyla

$$k^i q^j = \varphi_j^i \qquad 0 \leqq i \leqq n+1$$

olduğunu kontrol edelim. φ_j^i tanımlıyabilmek için q^j gereklidir. Çünkü X_n, $\mathcal{P}$ - projektifdir ve e_{n+1} de $\mathcal{P}$ -epimorfiktir. Böylece

$$h_n^j : X_n \longrightarrow X'_{n+1} \quad 0 \leqq j \leqq n$$

elde ederiz, öyleki $e_{n+1}h_n^j = q^j$ dir. Böylece tüme varımla ispatlanmış olur.

teorem 2.3.3 dekine benzer yöntemler kullanarak bir $X \xrightarrow{\partial^0} A$, $\mathcal{P}$ - projektif çözümlemesinin pseudodejenere oparatörlere sahip olduğunu kabul edebiliriz, yani,

$$s_n^j : X_n \longrightarrow X_{n+1} \qquad 0 \leqq j \leqq n$$

vardır ve öyleki

$$\varphi_j^i = \begin{cases} s^{j-1}\partial^i & i < j, \\ 1 & i = j, \quad j+1, \\ s^j\partial^{i-1} & i > j+1. \end{cases}$$

dir.

$$i \leqq j \quad \text{için} \quad s^i s^j = s^{j+1} s^i$$

özdeşliği genel olarak doğru değildir, fakat $\underline{A}$ nin abelyen olması durumunda doğruluğu gösterilebilir. teorem 2.3.3 elde edilince üretilmiş funktorların nasıl tanımlanabileceği açıklanmış olur. İlk olarak aşağıdaki notasyonu tanımlayalım: Y bir toplamsal kategoride bir simplisel obje ise, bu durumda kY, $n \geqq 0$ boyutta bileşenleri Y_n olan zincir kompleksini göstersin ve bunun
$\partial_n : Y_n \longrightarrow Y_{n-1}$ sınır operatörüde

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, \partial_n^i$$

olsun. $\underline{A}$ sonlu limitlere ve bir $\mathcal{P}$ - projektif sınıfına sahip bir kategori olsun. Eğer $\underline{B}$ abelyen ve $E : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ bir keyfi (Kovaryant) funktor ise $n \geqq 0$ olmak üzere her $A \in \underline{A}$ için bir $X \xrightarrow{\partial_0} A$ projektif çözümlemesini ve

$$L_n E\,(A) = H_n\,(kEX)$$

alarak

$$L_n E : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$$

funktorları tanımlanır.

Bu tanım çözümlemelerin seçiminden ve teorem 2.3.3 de ifade edilen A funktorlarından bağımsızdır. □

2.4 Sıralı Üçlü(Cotriples)

Bir $\underline{A}$ kategorisindeki $\mathcal{G} = (G, \varepsilon, \delta)$ sıralı üçlüsü

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\delta} & G^2 \\ & \searrow^{1_G} & \downarrow\!\downarrow \varepsilon G \;\; G\varepsilon \\ & & G \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\delta} & G^2 \\ \downarrow \delta & & \downarrow G\delta \\ G^2 & \xrightarrow[\delta G]{} & G^3 \end{array}$$

olacak şekilde $G : \underline{A} \longrightarrow \underline{A}$ bir endofunktoru ile $\varepsilon : G \longrightarrow 1_{\underline{A}}$ ve $\delta : G \longrightarrow G^2$ doğal dönüşümlerinden oluşmaktadır. Bir sıralı üçlü $A \in \underline{A}$ için

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}A)_n &= G^{n+1}A \quad (n+1) \\ \partial_n^i &= G^i \varepsilon G^{n-i} : G^{n+1} \longrightarrow G^n \qquad 0 \leqq i \leqq n, \\ s_n^i &= G^j \delta G^{n-j} : G^{n+1} \longrightarrow G^{n+2} \qquad 0 \leqq j \leqq n \end{aligned}$$

ve

$$\partial_0^0 = \varepsilon : G \longrightarrow 1_{\underline{A}}$$

biçiminde tanımlanan bir $\mathcal{G}A \xrightarrow{\varepsilon A} A$ funktorsal artırılmış simplisel objesini verir.

Eğer $E : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$, abelyen $\underline{B}$ kategorisine bir funktor ise bu durumda üretilmiş funktorlar,

$$H_n(\ , E)_{\mathcal{G}} : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$$

ve $A \in \underline{A}$ için

$$H_n(A, E)_{\mathcal{G}} : H_n(kE\mathcal{G}A)$$

olarak tanımlanabilir. (Barr ve Beck, [2],)

Eğer $\mathcal{G}$, $\underline{A}$ de bir sıralı üçlü ise, $\varepsilon X\theta = 1_X$ olacak şekilde bir

$$\theta : X \longrightarrow GX$$

$\underline{A}$ morfizminin varolması için gerek ve yeter şart $X \in \mathcal{P}_{\mathcal{G}}$ alınarak $\mathcal{G}$ projektiflerinin $\mathcal{P}_{\mathcal{G}}$ sınıfının tanımlanmasıdır. Herhangi bir $A \in \underline{A}$ için

$$\varepsilon A : GA \longrightarrow A$$

bir $\mathcal{P}_{\mathcal{G}}$-epimorfik ve $GA \in \mathcal{P}_{\mathcal{G}}$ olduğu için $\mathcal{P}_{\mathcal{G}}$, $\underline{A}$ de bir projektif sınıftır.

2.5 Pseudosimplisel Çözülme

Andre, komütatif cebirlerin homolojisi üzerine yaptığı Andre, [21], çalışmasında, bir cebirin çözülmesinin adım adım oluşturmasını vermiştir. Çözülme, şu şekilde inşaa edilir; herbir adımda bir önceki adımın homotopi gruplarını yoketmek için yeni simpleksler eklemek suretiyle bir sonraki adım oluşturulur. Arvasi ve Porter, [40], ise, bir cebirin çaprazlanmış çözülmesinin oluşturmasını tanıtarak ayrıntılı bir biçimde incelemişlerdir. Bu kesim pseudosimplisel çözülmenin nasıl oluşturulacağının kısa bir özetidir. Daha detaylı bilgi için Andre, [21], Keune, [10], Quillen, [5], ve Morgenegg, [25], bakılabilir.

2.5.1 Tanım ve Gösterimler

İlk olarak pseudosimplisel çözülmenin oluşturulmasında kullanılacak olan terminolojiyi ve gösterimleri hatırlayalım.

$[n] = \{0 < 1 < \ldots < n\}$ bir sıralı küme olsun. $0 \leq i \leq n \neq 0$ için

$$\delta_i^n : [n-1] \longrightarrow [n]$$

dönüşümü,

$$\delta_i^n(x) = \begin{cases} x & , \quad x < i \text{ ise} \\ x+1 & , \quad x \geq i \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olan birebir monoton dönüşümdür. Bu dönüşümlerin tamamı

$$[0] \;\overset{\delta_0}{\underset{\delta_1}{\rightrightarrows}}\; [1] \;\overset{\delta_0}{\underset{\delta_2}{\overset{\delta_1}{\rightrightarrows}}}\; [2] \;\overset{\delta_0}{\underset{\delta_3}{\overset{\delta_1}{\underset{\delta_2}{\rightrightarrows}}}}\; [3] \quad . \quad . \quad .$$

biçiminde gösterilebilir. Tersine $0 \leq i \leq n$ için artan örten bir monoton

$$\sigma_i^n : [n+1] \longrightarrow [n]$$

dönüşümü ise,

$$\sigma_i^n(x) = \begin{cases} x & , \quad x \leq i \text{ ise} \\ x-1 & , \quad x > i \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Bunlar ise

$$[0] \overset{\sigma_0}{\longleftarrow} [1] \underset{\overset{\sigma_1}{\longleftarrow}}{\overset{\sigma_0}{\longleftarrow}} [2] \underset{\overset{\sigma_2}{\longleftarrow}}{\overset{\sigma_1}{\longleftarrow}} [3] \quad . \quad . \quad .$$

biçiminde gösterilebilir.

$\{m, n\}$ ile de, $[m] \longrightarrow [n]$, $[m]$ den $[n]$ ye giden artan örten dönüşümlerin kümesi gösterilir.

2.5.2 Homotopi Modülünde Yokolan Elemanlar

Bu kesimde, Andre, [21], nin adım adım oluşturmasının komütatif cebirlere uyarlamasını vereceğiz.

K bir pseudosimplisel cebir ve $k \geq 1$ sabit bir tamsayı olsun.

$$x_\lambda \in \pi_{k-1}(\mathbf{K})$$

olmak üzere,

$$\Omega = \{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$$

elemanlarının bir Ω kümesi verilsin, bu durumda

$$x_\lambda = \nu_\lambda + \partial_k(NK_k)$$

olacak şekilde $\nu_\lambda \in NK_{k-1}$ elemanlarının bir kümesini seçebiliriz. (Eğer $k = 1$ ise $NK_0 = K_0$ olur ve $\nu_\lambda \in NK_0$ elemanlarının kümesi boştur.)

$$\mathbf{j} : \mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{L}$$

monomorfizm ile birlikte bir $\mathbf{L} = \mathbf{K}(\Omega)$ pseudosimplisel cebiri tanımlamak istiyoruz öyleki

$$\pi_{k-1}(\mathbf{j}) : \pi_{k-1}(\mathbf{K}) \longrightarrow \pi_{k-1}(\mathbf{L})$$

dönüşümü x_λ elemanlarını yok edecek. Bunu, $j(\nu_\lambda) \in \partial N L_k$ yapmak maksadı ile NK_k yı genişletmek için, NK_k ya yeni üreteçler ekleyerek yaparız. Daha açık olarak,

1) $\lambda \in \Lambda$ ve $t \in \{n, k\}$ için, $L_n = K_n[y_{\lambda,t}]$ olmak üzere L_n bir serbest komütatif cebiri K_n dir.

2) $0 \leq i \leq n$ için, $s_i^n : L_n \longrightarrow L_{n+1}$ komütatif cebir homomorfizmleri

$$s_i^n(y_{\lambda,t}) = y_{\lambda,u} \ , \ u = t\sigma_i^n \ , \ t : [n] \longrightarrow [k]$$

bağıntıları geçerli olmak üzere $s_i^n : K_n \longrightarrow K_{n+1}$ homomorfizmlerinden elde edilir.

3) $0 \leq i \leq n \neq 0$ için $d_i^n : L_n \longrightarrow L_{n-1}$ cebir homomorfizmleri,

$$d_i^n(y_{\lambda,t}) = \begin{cases} y_{\lambda,u} & , \ u = t\delta_i^n \text{ örten ise} \\ t'(\nu_\lambda) & , \ u = \delta_k^k t' \text{ ise} \\ 0 & , \ u = \delta_j^k t' \text{ ise } (j \neq k) \end{cases}$$

bağıntılarını sağlayan, $d_i^n : K_n \longrightarrow K_{n-1}$ dönüşümlerinden elde edilen homomorfizmlerdir. Burada, $t' : [n-1] \longrightarrow [k-1]$ dir. Bu $t' : K_{k-1} \longrightarrow K_{n-1}$ birtek komütatif cebir homomorfizmine karşılık gelir.(Andre, [21],)

Not: Simplisel çözülmenin adım adım oluşturulmasında aşağıdaki özellikler mevcuttur.

(i) $n < k$ için, $L_n = K_n$ dir,

(ii) L_k, dejenere olmayan üreteç elemanlarının bir kümesi üzerinde bir serbest komütatif cebiri K_k-cebiridir, yüz dönüşümlerinin tamamı ise (k.ıncı hariç) birimdir.

(iii) L_n, $n > k$ için dejenere elemanlarının bir serbest komütatif K_n-cebiridir.

Önerme 2.5.1 $\mathbf{L} = \mathbf{K}(\Omega)$ olmak üzere

$$\mathbf{K} \hookrightarrow \mathbf{L}$$

pseudosimplisel cebirlerin içine dönüşümünden

$$\pi_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \pi_n(\mathbf{K})$$

şeklinde bir homomorfizm elde edilir. $n < k-1$ için

$$\pi_n(\mathbf{K}) \cong \pi_n(\mathbf{L})$$

dir ve $n = k-1$ için bu homomorfizm, çekirdeği

$$\overline{\nu}_\lambda = \nu_\lambda + \partial_k N K_k$$

biçimindeki elemanlar tarafından üretilen, bir epimorfizmdir.

Aşağıda vereceğimiz sonuçları, Andre, [21], den komütatif cebirlere uyarlavdık.

Teorem 2.5.2 D bir komütatif cebir ise, D nin bir $\mathbf{K}$ serbest pseudosimplisel çözülmesi mevcuttur.

İspat: Yukarıda verilen oluşturmanın tekrarı bir komütatif cebirinin pseudosimplisel çözülmesini verecektir.

D bir komütatif cebir olsun. Oluşumun sıfırıncı adımını tanımlayalım. Bu adım, bir K serbest pseudosimplisel cebiri ile örten bir $g : K \longrightarrow D$ homomorfizminin seçilişinden oluşur. Bu durumda, $K/$çek$g$ ile$D$ arasında bir cebir izomorfizmi (kendisi ve tersi sürekli olan cebir homomorfizmi) mevcuttur. Sonra, sabit $\mathbf{K}^{(0)}$ pseudosimplisel cebirini oluşturalım. Buna göre bütün

n ler için $K_n = K$ ve her i, j için

$$d_i^n = id = s_j^n$$

dir. Böylece

$$\mathbf{K}^{(0)} = \mathbf{F}(K, 0) \text{ ve } \pi_0(\mathbf{K}^{(0)}) = K$$

dir. Şimdi I =çek$(K \xrightarrow{g} D)$ idealinin üreteçlerinin bir Ω^0 kümesini seçelim ve $K_1^{(1)} = K[\Omega^0]$ ile $n > 1$ için, $K_n^{(1)}$ yukarıda tanımlandığı gibi dejenere elemanların üzerinde bir serbest komütatif K_n-cebiri olacak şekildeki pseudosimplisel cebiri belirleyelim. Bu pseudosimplisel cebir $\mathbf{K}^{(1)}$ ile gösterilir ve buna D komütatif cebirinin bir pseudosimplisel çözülmesinin $1-$iskeleti denir.

Daha sonraki adımlar

$$\Omega^0, \Omega^1, \ldots, \Omega^k, \ldots$$

kümelerinin seçilişine dayanır. $\mathbf{K}^{(k)}$, k.adım sonunda oluşturulan, çözülmenin $k-$iskeleti olan pseudosimplisel cebir olsun. Ω^k kümesi, $0 \leq i \leq k$ için, $d_i^k(a) = 1$ olacak şekildeki $K_k^{(k)}$ nın a elemanlarından oluşur ve a nın $\pi_k(\mathbf{K}^{(k)})$ içindeki $\overline{a}$ görüntüsü $K_k^{(k)}$ üzerindeki modülü üretir.

Sonuçta pseudosimplisel cebirlerin

$$\mathbf{K}^{(0)} \subseteq \mathbf{K}^{(1)} \subseteq \ \ldots \ \subseteq \mathbf{K}^{(k-1)} \subseteq \mathbf{K}^{(k)} \ \ldots$$

biçimindeki kapsaması elde edilir. Buradan inductive (colimit) limite geçerek, $n \leq k$ ise, $D_n = K_n^{(k)}$ olmak üzere devirli bir $\mathbf{K}$ serbest pseudosimplisel cebiri elde edilir. Böylece $\mathbf{K}$, D komütatif cebirinin pseudosimplisel çözülmesidir. Buna göre ispat tamamlanmış olur. $\square$

2.6 Cebirler Üzerinde Çaprazlanmış Modüller

Whitehead, [17], in gruplar üzerinde tanımladığı çaprazlanmış modül kavramı, diğer cebirsel yapılarda da önemlidir. Özel olarak asosyatif ve komütatif cebirler için Lichtenbaum-Schlessinger, [34], ve Gerstenhaber, [23], ın çalışmaları vardır. Bununla birlikte Porter, [28], komütatif cebirler için literatüre uygun bir biçimde çaprazlanmış modül kavramını tanımlamıştır. Bu bölümde, öncelikle cebirler üzerinde çaprazlanmış modüllerin tanımı verilerek çeşitli örnekler incelenmiştir. Burada cebirlerin komütatif olması gerekmediğini de belirtelim. Daha sonra bu tanım yardımıyla bazı temel özellikler incelenmiştir. Ayrıca, çaprazlanmış modüller üzerine yapılan çalışmalarda önemli rolü olan, alt çaprazlanmış modüller, çaprazlanmış idealler ve çaprazlanmış bölüm modülü kavramları ayrıntılı olarak analiz edilmiştir. Bu konu ile ayrıntılı bilgi için Ellis, [11], ,[12], bakılabilir.

2.6.1 Çaprazlanmış Modül Kavramı

Çaprazlanmış modüller, modüller ve ideallerin genelleştirilmesidir. Ayrıca herhangi bir halka (cebir) bir çaprazlanmış modüldür. Böylece çaprazlanmış modüller, halka (cebir) kavramının genelleştirilmesi olarak görülebilir. Şimdi, k daha önce söz ettiğimiz, sıfırdan farklı birimi olan komütatif halka olmak üzere k-cebirler üzerinde çaprazlanmış modül kavramının tanımını verelim. Daha sonra ise çeşitli cebirsel yapılar üzerindeki örnekleri inceleyelim.

Tanım 2.6.1 *R, birimli bir k-cebir olsun.*

$$\partial : C \longrightarrow R$$

bir R-cebir morfizmi ve

$$\begin{array}{lll} R \times C & \longrightarrow C & \\ (r,c) & \longmapsto r \cdot c & \end{array} \quad ve \quad \begin{array}{lll} C \times R & \longrightarrow R & \\ (c,r) & \longmapsto c \cdot r & \end{array}$$

R nin C üzerine etkisi ile birlikte, her $c, c' \in C$ ve $r \in R$ için

$$\begin{array}{lrcl} \text{ÇM1)} & \partial(r \cdot c) & = & r\partial(c) \\ & \partial(c \cdot r) & = & \partial(c)r \\ \text{ÇM2)} & \partial c \cdot c' & = & cc' \\ & c \cdot \partial c' & = & cc' \end{array}$$

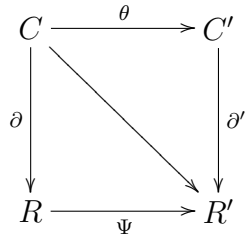
şartları sağlanıyor ise R üzerinde C cebirine bir çaprazlanmış (crossed) modül denir ve (C, R, ∂) ile gösterilir.

Şimdi, çaprazlanmış modül kavramını ifade ettikten sonra, iki çaprazlanmış modül arasındaki morfizm kavramını tanımlayalım.

Tanım 2.6.2 *(C, R, ∂) ve (C', R', ∂') iki çaprazlanmış modül olsun.*

$$\begin{aligned} \theta(r \cdot c) &= \psi(r) \cdot \theta(c) \\ \theta(c \cdot r) &= \theta(c) \cdot \psi(r) \end{aligned}$$

ve



diyagramı komütatif, yani

$$\partial' \theta(c) = \psi \partial(c)$$

olacak şekilde $\theta : C \to C',\ \psi : R \to R'$ k-cebir morfizmleri varsa

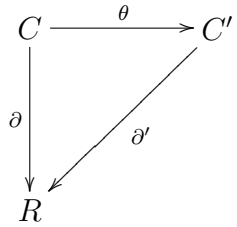
$$(\theta, \psi) : (C, R, \partial) \longrightarrow (C', R', \partial')$$

morfizmine çaprazlanmış modüller arasındaki morfizm denir.

O halde, $R = R'$ ve ψ birim dönüşüm ise, θ bir R-cebir morfizmi olduğundan

$$\theta(r \cdot c) = r\theta(c)$$

dir ve



diyagramı komütatif olduğundan, yani

$$\partial'\theta(c) = \partial(c)$$

sağlandığından, θ bir çaprazlanmış R-modül morfizmidir.

Örnek 2.6.3 R bir k-cebiri ve $I,\ R$ nin ideali olsun.

$$\begin{aligned} \text{iç} : \quad I &\longrightarrow R \\ i &\longmapsto i \end{aligned}$$

içine (inclusion) dönüşümünü ele alalım. R nin I üzerine etkisi

$$\begin{aligned} R \times I \quad &\longrightarrow I \\ (r, i) \quad &\longmapsto r \cdot i = ri \end{aligned}$$

şeklinde çarpım işlemi olarak verilsin. Bu durumda çaprazlanmış modül aksiyomları

$$\text{ÇM1)} \qquad \partial(r \cdot i) = \partial(ri) = ri = r\partial(i)$$
$$\text{ÇM2)} \qquad \partial i \cdot i' = i \cdot i' = ii'$$

şeklinde kolayca sağlanır. Dolayısıyla, $(I, R, \text{iç})$ bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Tersine, herhangi bir $\partial : C \to R$ çaprazlanmış R-modül verildiğinde, $\partial C = I$ nın R de ideal olduğu kolayca gösterilebilir.

Örnek 2.6.4 M, herhangi bir R-bimodül olsun.

$$\begin{aligned} M \times M &\longrightarrow M \\ (m_1, m_2) &\longmapsto m_1 m_2 = 0 \end{aligned}$$

çarpımı tanımlanırsa, M bir R-cebir yapısı oluşturur. Bu durumda

$$\begin{aligned} 0 : M &\longrightarrow R \\ x &\longmapsto 0(x) = 0 \end{aligned}$$

şeklinde verilen sıfır morfizmi,

$$\begin{aligned} R \times M &\longrightarrow M \\ (r, m) &\longmapsto r \cdot m = rm \end{aligned}$$

etki fonksiyonu ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Çünkü;

$$\text{ÇM1)} \qquad 0(r \cdot m) = 0(rm) = 0 = r0 = r0(m)$$
$$\text{ÇM2)} \qquad 0m \cdot m' = 0 \cdot m' = 0m' = 0 = mm'$$

şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomları sağlanır.

Tersine, $\partial : C \to R$ herhangi bir çaprazlanmış modül verildiğinde, Çek ∂ bir $R/\partial C$-modül yapısı oluşturur.

Örnek 2.6.5 K bir k-cebir ve her $k, k' \in K$ için

$$R = \{f_k;\ f_k : K \longrightarrow K\ \ f_k(k') = kk'\}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \partial : \quad & K \longrightarrow R \\ & k \longmapsto f_k \end{aligned}$$

cebir homomorfizmi,

$$\begin{aligned} R \times K \quad & \longrightarrow K \\ (f_k, k') \quad & \longmapsto (f_k) \cdot k' = kk' \end{aligned}$$

etki fonksiyonu ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Gerçekten;

$$\begin{aligned} \text{ÇM1)} \qquad \partial((f_k) \cdot k') &= \partial(kk') \\ &= \partial(k)\partial(k') \\ &= f_k \partial(k') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ÇM2)} \qquad \partial k \cdot k' &= (f_k) \cdot k' \\ &= kk' \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Örnek 2.6.6

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow R \xrightarrow{\partial} L \longrightarrow 0$$

bir merkezsel genişleme (yani $i \in I, r \in R$ olmak üzere $ir = ri = 0$ olacak şekilde bir tam dizi) olmak üzere

$$\begin{aligned} \partial : \quad & R \longrightarrow L \\ & r \longmapsto \partial(r) \end{aligned}$$

cebir homomorfizmi,

$$\partial s(l) = l$$

şartını sağlayan

$$\begin{aligned} s : \quad & L \longrightarrow R \\ & l \longmapsto s(l) \end{aligned}$$

kesit homomorfizmi yardımıyla tanımlanan

$$\begin{aligned} L \times R &\longrightarrow R \\ (l, r) &\longmapsto l \cdot r = s(l)r \end{aligned}$$

etki fonksiyonu ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Çünkü;

$$\begin{aligned} \text{ÇM1)} \qquad \partial(l \cdot r) &= \partial(s(l)r) \\ &= l\partial(r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ÇM2)} \qquad \partial r \cdot r' &= s(\partial r)r' \\ &= s(\partial r)r') \\ &= rr' \end{aligned}$$

şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomları sağlanır.

Örnek 2.6.7 L ve M birer R-modül ve

$$\theta : L \longrightarrow M$$

R -modüllerin bir morfizmi olsun. $R \ltimes M$ yarı direkt çarpımı

$$(r, m)(r', m') = (rr', rm' + r'm)$$

şeklinde bilinen çarpım ile ifade edilir. Bu durumda L, her $l, l' \in L$ için

$$ll' = 0$$

şeklinde sıfır çarpım ve

$$\begin{aligned} R \ltimes M &\longrightarrow R \\ (r, m) &\longmapsto r \end{aligned}$$

şeklinde izdüşüm (projection) yoluyla bir $R \ltimes M$-modül yapısı verildiğinde

$$\begin{aligned} \widetilde{\theta} : L &\longrightarrow R \ltimes M \\ l &\longmapsto (0, \theta(l)) \end{aligned}$$

fonksiyonu bir çaprazlanmış $R \ltimes M$-modül yapısı oluşturur. Gerçekten;

$$\begin{aligned} (R \ltimes M) \times L &\longrightarrow L \\ ((r,m),l) &\longmapsto (r,m)\cdot l = rl \end{aligned}$$

şeklindeki etki fonksiyonu ile birlikte $\widetilde{\theta} : L \to R \ltimes M$ fonksiyonu

$$\begin{array}{lrcll} \text{ÇM1)} & \widetilde{\theta}((r,m)\cdot l) & = & \widetilde{\theta}(rl) & \textit{(etki tanımından)} \\ & & = & (0,\theta(rl)) & (\widetilde{\theta},\ \textit{tanımından)} \\ & & = & (0,r\theta(l)) & (\theta, R\textit{-modül morfizmi)} \\ & & = & (r0,(r\theta(l)+0m)) & \\ & & = & (r,m)(0,\theta(l)) & \textit{(yarı direkt çarpım tanımı)} \\ & & = & (r,m)\widetilde{\theta}(l) & (\widetilde{\theta},\ \textit{tanımından)} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcll} \text{ÇM2)} & \widetilde{\theta}l\cdot l' & = & (0,\theta(l))\cdot l' & (\widetilde{\theta},\ \textit{tanımından)} \\ & & = & 0l' & \textit{(etki tanımından)} \\ & & = & 0 & \\ & & = & ll' & (L\ \textit{de sıfır çarpımdan)} \end{array}$$

şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomlarını sağlar.

Örnek 2.6.8 $\mathbf{K}$ bir pseudosimplisel cebir ve $\mathbf{I}$ bir pseudosimplisel ideal olsun

$$Inc : \mathbf{I} \hookrightarrow \mathbf{K}$$

içine dönüşümünden bir

$$\partial : \pi_0(\mathbf{I}) \longrightarrow \pi_0(\mathbf{K})$$

dönüşümü indirgenir ve $\mathbf{K}$ nın $\mathbf{I}$ üzerine çarpım vasıtasıyla olan etkisi, $\pi_0(\mathbf{K})$ nın $\pi_0(\mathbf{I})$ üzerine bir etki indirger. Böylece $(\pi_0(\mathbf{I}), \pi_0(\mathbf{K}), \partial)$ bir çaprazlanmış modüldür.

Çünkü,

ÇM1) her $k \in \mathbf{K}$ için

$$\begin{aligned} \partial([k][i]) &= [ki] \\ &= [k][Inc(i)] \\ &= [k]\,\partial([i]) \end{aligned}$$

ÇM2)

$$\begin{aligned} \partial([i])[i'] &= [Inc(i)\,i'] \\ &= [ii'] \\ &= [i][i']. \end{aligned}$$

dir.

2.6.2 Serbest Çaprazlanmış Modüller

Komütatif cebirler üzerinde serbest çaprazlanmış modüller, Aznar, [9], tarafından verilmiştir. Bizde bu tanımdan hareketle serbest çaprazlanmış modül tanımını verelim. Serbest çaprazlanmış modüllerin oluşturulması için Arvasi, [41], e bakınız.

Teorem 2.6.9 *[39]* R komütatif cebir $f : X \longrightarrow R$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere (C, R, ∂) bir serbest çaprazlanmış modülü mevcuttur.

Porter, [37], de verilen, serbest çaprazlanmış modül ile Kozsul kompleksi arasındaki ilişkiyi vermiştir.

Eğer (C, R, ∂), $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ olmak üzere, $f : Y \longrightarrow R$ fonksiyonu üzerinde bir serbest çaprazlanmış modül ise,

$$C \cong R^n/\text{Görd}$$

izomorfizmi mevcuttur, burada $d : \Lambda^2 R^n \longrightarrow R^n$ Kozsul diferensiyelidir.

Bölüm 3

Abelyen olmayan Üretilmiş Funktorlar ve Cebirsel K - teori

Inasaridze, [14], pseudosimplisel grupların homotopi gruplarını kullanarak, gruplar kategorisindeki değerleri ile birlikte abelyen olmayan üretilmiş funktorları oluşturmuştur. Bu, asosyatif halkalar kategorisi içindeki cebirsel K-teorisinin, GL kovaryant funktorunun sol üretilmiş funktorlar teorisi olarak elde edilmesine olanak sağlamaktadır. Cebirsel K - teori, cebirin modern ve önemli bir branşıdır ve cebir, topoloji, cebirsel geometri, fonksiyonel analiz ve cebirsel sayı teorisi ile ilişkisi olan matematiğin birçok temel alanında önemli uygulamaları bulunmaktadır. Günümüzde Swan, [30], Volodin, [15], Karoubi ve Villamayor, [24], Gersten, [35], ve Quillen, [7], tarafından oluşturulmuş birçok cebirsel K - teori mevcuttur.

Inasaridze, [14], halka kategorisinden grup kategorisine tanımlı E ve GL kovaryant funktorlarını kullanarak elde edilen K_n funktorlarının Swan, [30], tarafından tanımlanmış cebirsel K - teoriyi verdiğini ispatlamıştır.

Bu çalışmada, Inasaridze, [14], tarafından tanımlanmış olan pseudosimplisel grupları ile pseudosimplisel grupların homotopi grupları gözönünde bu-

lundurularak komütatif cebirler için pseudosimplisel cebir yapısı oluşturuldu ve Inasaridze, [14], tarafından pseudosimplisel gruplar için yapılanlar pseudosimplisel cebirler için incelendi.

Fakat zaman darlığı ve çeşitli nedenlerle çalışmanın bu kısmında gerekli olan halka kategorisinden değişmeli cebir kategorisine giden, gruplar için tanımlı olan GL ve E kovaryant funktorlarına benzer funktorları tanımlanamamıştır. Bundan dolayı Inasaridze, [14], nin verdiği sonuçlar. Pseudosimplisel cebirlere genişletilememiştir.

3.1 Pseudosimplisel Cebirler

$n \in N$ olmak üzere K_n ler k-cebir ve $0 \leq i \leq n$ için

$$\partial_i^n : K_n \longrightarrow K_{n-1} \quad \text{ve} \quad s_i^n : K_n \longrightarrow K_{n+1}$$

k-cebir homomorfizmlerini gözönüne alalım. Eğer bu homomorfizmler için

$$\begin{aligned} \partial_i^n \partial_j^n &= \partial_{j-1}^n \partial_i^n && , i < j \\ \partial_i^{n+1} s_j^n &= s_{j-1}^{n-1} \partial_i^n && , i < j \\ \partial_j^{n+1} s_j^n &= \partial_{j+1}^{n+1} s_j^n = 0 \\ \partial_i^{n+1} s_j^n &= s_j^{n-1} \partial_{i-1}^n && , i > j+1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

aksiyomları sağlanıyorsa, $K_{n,}$ k-cebirleri ile birlikte ∂_i^n ve s_i^n homomorfizmlerinin oluşturduğu sisteme bir pseudosimplisel cebir denir ve bu genel olarak

$$\mathbf{K}_* = \cdots \quad K_{n+1} \underset{\substack{\xleftarrow{s_0} \\ \vdots \\ \xleftarrow{s_n}}}{\overset{\substack{\xrightarrow{\partial_0} \\ \vdots \\ \xrightarrow{\partial_{n+1}}}}{\rightleftarrows}} K_n \underset{\substack{\xleftarrow{s_0} \\ \vdots \\ \xleftarrow{s_n}}}{\overset{\substack{\xrightarrow{\partial_0} \\ \vdots \\ \xrightarrow{\partial_n}}}{\rightleftarrows}} K_{n-1} \cdots K_1 \underset{s_0}{\overset{\partial_1, \partial_0}{\rightrightarrows}} K_0$$

biçiminde gösterilir. Burada $0 \leq i \leq n$ için

$$\partial_i^n : K_n \longrightarrow K_{n-1}$$

homomorfizmlerine sınır homomorfizmi ve

$$s_i^n : K_n \longrightarrow K_{n+1}$$

homomorfizmlerine de **pseudodejenere homomorfizmleri** denir.

Eğer yukarıdaki aksiyomlara $i \leq j$ için

$$s_i^{n+1} s_j^n = s_{j+1}^{n+1} s_i^n$$

şartı da ilave edilirse, simplisel cebir yapısı elde edilir. Herhangi bir $\mathbf{K}_*$ simplisel cebiri için $n \geq 0$ olmak üzere,

$$L_n(\mathbf{K}_*) = K_n \cap \text{Çek}\partial_0^n \cap \cdots \cap \text{Çek}\partial_{n-1}^n$$

alınsın ve d_n, ∂_n^n nin $L_n(\mathbf{K}_*)$ $(n > 0)$ a kısıtlanmışı olsun. Bu durumda $n > 0$ için Görd_n, K_{n-1} in bir ideali ve

$$\text{Gör}d_{n+1} \subset \text{Çek}d_n$$

dir. Bu ise

$$L_n(\mathbf{K}_*) = \{L_n(\mathbf{K}_*), d_n\}$$

Moore zincir kompleksini verir. ($n < 0$ için $L_n(\mathbf{K}_*) = \{e\}$ alınıyor.) $L(\mathbf{K}_*)$ ın pseudodejenere homomorfizmlerinden bağımsız olduğu ve sınır homomorfizmlerine bağlı olduğu açıktır.

Tanım 3.1.1 $n \geq 0$ için $L(\mathbf{K}_*)$ zincir kompleksinin n boyutlu homolojisine, $\mathbf{K}_*$ pseudosimplisel cebirinin n boyutlu homotopi modülü denir ve $\pi_n(\mathbf{K}_*)$ ile gösterilir.

Bir pseudosimplisel cebiri için, $(n \geq 0)$ olmak üzere

$$L_n'(\mathbf{K}_*) = K_n \cap \text{Çek}\partial_1^n \cap \cdots \cap \text{Çek}\partial_n^n$$

ve $\acute{d_n}$, ∂_0^n ın $\acute{L_n}(\mathbf{K}_*)$ kısıtlanması olmak üzere,

$$\acute{L_n}(\mathbf{K}_*) = \left\{\acute{L_n}(\mathbf{K}_*), \acute{d_n}\right\}$$

şeklinde tanımlanan ikinci zincir kompleksini oluşturulabilir.

Teorem 3.1.2 $n \geq 0$ için $\acute{L}(\mathbf{K}_*)$ zincir kompleksinin n boyutlu homolojisi, $\pi_n(\mathbf{K}_*)$ homotopi modülü ile aynıdır.

İspat:

$$\text{Çek}d_n = \text{Çek}\acute{d_n}$$

olduğu açıktır. $x \in \text{Gör}d_{n+1}$ olsun. Bu durumda $0 \leq i \leq n$ için

$$\partial_i^n(x) = 0$$

dir ve $0 \leq i \leq n$ için

$$\partial_{n+1}^{n+1}(y) = x \quad \text{ve} \quad \partial_i^{n+1}(y) = 0$$

olacak şekilde bir $y \in K_{n+1}$ vardır. Şimdi,
n çift ise,

$$a = \partial_{n+2}^{n+2}(s_0^{n+1}y - s_1^{n+1}y + s_2^{n+1}y \cdots + s_n^{n+1}y - s_{n+1}^{n+1}y)$$

n tek ise,

$$a = \partial_{n+2}^{n+2}(s_0^{n+1}y - s_1^{n+1}y + s_2^{n+1}y \cdots - s_n^{n+1}y + s_{n+1}^{n+1}y)$$

dir. İlk olarak n çift olması durumunu inceleyelim,

$$\begin{aligned}
a &= \partial_{n+2}^{n+2}(s_0^{n+1}y - s_1^{n+1}y + s_2^{n+1}y \cdots - s_n^{n+1}y - s_{n+1}^{n+1}y) \\
\partial_i^{n+1}(a) &= \partial_i^{n+1}(\partial_{n+2}^{n+2}s_0^{n+1}y - \partial_{n+2}^{n+2}s_1^{n+1}y + \partial_{n+2}^{n+2}s_2^{n+1}y \cdots + \curvearrowright \\
&\qquad + \partial_{n+2}^{n+2}s_n^{n+1}y - \partial_{n+2}^{n+2}s_{n+1}^{n+1}y) \\
&= \partial_i^{n+1}(s_0^n\partial_{n+1}^{n+1}y - s_1^n\partial_{n+1}^{n+1}y + s_2^n\partial_{n+1}^{n+1}y \cdots + s_n^n\partial_{n+1}^{n+1}y - 0) \\
&= \partial_i^{n+1}(s_0^n x - s_1^n x + s_2^n x \cdots + s_n^n x - 0) \\
&= \partial_i^{n+1}(s_0^n x - s_1^n x + s_2^n x \cdots + s_n^n x) \\
&= \partial_i^{n+1}s_0^n x - \partial_i^{n+1}s_1^n x + \partial_i^{n+1}s_2^n x \cdots + \partial_i^{n+1}s_n^n x \\
&\quad 1 \leq i \leq n+1,\ n \text{ çift ise} \\
&= 0 - 0 + 0 \cdots + 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

dir. n tek olma durumunda ise,

$$\begin{aligned}
a &= \partial_{n+2}^{n+2}(s_0^{n+1}y - s_1^{n+1}y + s_2^{n+1}y \cdots - s_n^{n+1}y + s_{n+1}^{n+1}y) \\
\partial_i^{n+1}(a) &= \partial_i^{n+1}(\partial_{n+2}^{n+2}s_0^{n+1}y - \partial_{n+2}^{n+2}s_1^{n+1}y + \partial_{n+2}^{n+2}s_2^{n+1}y \cdots - \curvearrowright \\
&\quad -\partial_{n+2}^{n+2}s_n^{n+1}y + \partial_{n+2}^{n+2}s_{n+1}^{n+1}y) \\
&= \partial_i^{n+1}(s_0^n\partial_{n+1}^{n+1}y - s_1^n\partial_{n+1}^{n+1}y + s_2^n\partial_{n+1}^{n+1}y \cdots - s_n^n\partial_{n+1}^{n+1}y - 0) \\
&= \partial_i^{n+1}(s_0^n x - s_1^n x + s_2^n x \cdots - s_n^n x + 0) \\
&= \partial_i^{n+1}(s_0^n x - s_1^n x + s_2^n x \cdots - s_n^n x) \\
&= \partial_i^{n+1}s_0^n x - \partial_i^{n+1}s_1^n x + \partial_i^{n+1}s_2^n x \cdots - \partial_i^{n+1}s_n^n x \\
&\quad 1 \leq i \leq n+1,\ n \text{ tek ise} \\
&= 0 - 0 + 0 \cdots + 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

dir.

Böylece $a \in K_{n+1}$ biçiminde tanımlanan elemanı ele alacak olursak. $1 \leq i \leq n+1$ için

$$\partial_i^{n+1}(a) = 0$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\partial_0^{n+1}(a) &= \partial_0^{n+1}(\partial_{n+2}^{n+2}s_0^{n+1}y - \partial_{n+2}^{n+2}s_1^{n+1}y + \partial_{n+2}^{n+2}s_2^{n+1}y \cdots + \curvearrowright \\
&\qquad + \partial_{n+2}^{n+2}s_n^{n+1}y - \partial_{n+2}^{n+2}s_{n+1}^{n+1}y) \\
&= \partial_0^{n+1}(s_0^n\partial_{n+1}^{n+1}y - s_1^n\partial_{n+1}^{n+1}y + s_2^n\partial_{n+1}^{n+1}y \cdots + s_n^n\partial_{n+1}^{n+1}y - 0) \\
&= \partial_0^{n+1}(s_0^n x - s_1^n x + s_2^n x \cdots + s_n^n x - 0) \\
&= \partial_0^{n+1}(s_0^n x - s_1^n x + s_2^n x \cdots + s_n^n x) \\
&= \partial_0^{n+1}s_0^n x - \partial_0^{n+1}s_1^n x + \partial_0^{n+1}s_2^n x \cdots + \partial_0^{n+1}s_n^n x \\
&= x - s_0^{n-1}\partial_0^n x + s_1^{n-1}\partial_0^n x \cdots + s_{n-1}^{n-1}\partial_0^n x \\
&= x - e + e \cdots + e \\
&= x
\end{aligned}$$

olup $x \in \text{Gör}\acute{d}_{n+1}$ dir. $\square$

Tanım 3.1.3 $\mathbf{K}_*$ ve $\mathbf{K}_*^{'}$ bir pseudosimplisel cebirler olsun. Bu durumda $n > 0$ ve $0 \leq i \leq n$ için

$$f_{n-1}\partial_i^{'n} = \partial_i^n f_{n+1}$$

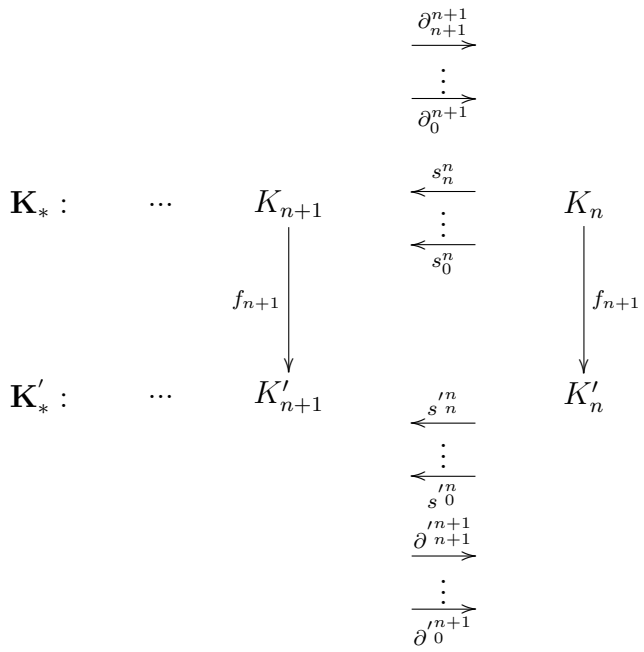
olacak şekildeki $f_n : K_n \longrightarrow K_n^{'}$ fonksiyonlarının

$$f = \left\{ f_n : K_n \longrightarrow K_n^{'} \ , \ n \geq 0 \right\}$$

ailesine $\mathbf{K}_*$ den $\mathbf{K}_*^{'}$ ne bir dönüşüm denir ve $f : \mathbf{K}_* \longrightarrow \mathbf{K}_*^{'}$ ile gösterilir. Buna göre bir $f : \mathbf{K}_* \longrightarrow \mathbf{K}_*^{'}$ dönüşümü doğal olarak $n \geq 0$ için

$$\pi_n(f) : \pi_n(\mathbf{K}_*) \longrightarrow \pi_n\left(\mathbf{K}_*^{'}\right)$$

homomorfizmini indirger.



Tanım 3.1.4 f ve g, $\mathbf{K}_*$ dan $\mathbf{K}'_*$ iki dönüşüm olsun. Eğer $0 \leq i \leq n$ için

$$\begin{aligned}
\partial_0^{n+1}h_0^n &= f_n, \partial_{n+1}^{n+1}h_n^n = g_n, \\
\partial_i^{n+1}h_j^n &= h_{j-1}^{n-1}\partial_i^n && i < j, \\
\partial_{j+1}^{n+1}h_{j+1}^n &= \partial_{j+1}^{n+1}h_j^n, \\
\partial_i^{n+1}h_j^n &= h_j^{n-1}\partial_{i-1}^n && i > j+1,
\end{aligned}$$

olacak şekilde $h_i^n : \mathbf{K}_n \longrightarrow \mathbf{K}'_{n+1}$ homomorfizimleri mevcutsa f ve g ye pseudohomotopiktirler denir. f ve g nin homotopi tanımını elde etmek için $i \leq j$ için

$$s_i^{n+1}h_j^n = h_{j+1}^{n+1}s_i^n$$

ve $i > j$ için

$$s_i^{n+1}h_j^n = h_j^{n+1}\partial_{i-1}^n$$

koşulları ilave edilmelidir.

Teorem 3.1.5 $n \geq 1$ için $\pi_n(K_*)$ homotopi modülleri abelyendir. Eğer $f : K_* \longrightarrow K'_*$ dönüşümü bir g dönüşümüne pseudohomotopik ise $n \geq 0$ için $\pi_n(f) = \pi_n(g)$ dir.

İspat: $n \geq 1$ için $x, y \in$Çekd_n olsun, K_{n+1} cebirinin

$$t = s_n^n(xy) - s_{n-1}^n y \cdot s_n^n x$$

elemanını göz önüne alalım. Bu durumda

$0 \leq i \leq n$ için

$$\begin{aligned} \partial_i^{n+1}(t) &= \partial_i^{n+1}\left(s_n^n(xy) - s_{n-1}^n y \cdot s_n^n x\right) \\ &= \partial_i^{n+1} s_n^n(xy) - \partial_i^{n+1} s_{n-1}^n y \cdot \partial_i^{n+1} s_n^n x \\ &= xy - yx \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$\partial_i^n(t) = 0$$

ve

$$\begin{aligned} \partial_{n+1}^{n+1}(t) &= \partial_{n+1}^{n+1}\left(s_n^n(xy) - s_{n-1}^n y \cdot s_n^n x\right) \\ &= \partial_{n+1}^{n+1} s_n^n(xy) - \partial_{n+1}^{n+1} s_{n-1}^n y \cdot \partial_{n+1}^{n+1} s_n^n x \\ &= 0 \end{aligned}$$

dir. Bu durumda

$$\partial_{n+1}^{n+1}(t) = 0 \in (\ker d_n)(\ker d_n)$$

$$Gör d_{n+1} = Çek d_n$$

cebirinin çarpım idealidir.

$$Gör d_{n+1} = (\text{Çek} d_n)^2$$

dir ve böylece $\pi_n(G_*)$ abelyandır.

Varsayılım ki f, g de pseudohomotopikdir ve $x \in$Çekd_n alalım. $0 \leq i \leq n$ için K_{n+1} in bir a elemanı
n çift ise

$$a = (h_0^n(x) - f_{n+1}s_0^n(x)) + (f_{n+1}s_1^n(x) - h_1^n(x)) \cdots + (f_{n+1}s_n^n(x) - h_n^n(x))$$

n tek ise

$$a = (h_0^n(x) - f_{n+1}s_0^n(x)) + (f_{n+1}s_1^n(x) - h_1^n(x)) \cdots + (h_n^n(x) - f_{n+1}s_n^n(x))$$

Buradanda $0 \leq i \leq n$ için

$$\partial_i^{n+1}(a) = 0$$

ve n çift ise

$$\partial_{n+1}^{n+1}(a) = f_n(x)\, g_n\left(x^{-1}\right)$$

olur. Eğer n tek ise

$$\partial_{n+1}^{n+1}(a) = g_n(x)\, f_n\left(x^{-1}\right)$$

olur. Böylece

$$\pi_n(f) = \pi_n(g)$$

olduğu gösterilir ki istenendir. □

Tanım 3.1.6 *Bir* $\epsilon : K_0 \longrightarrow K$ homomorfizmi ile $\mathbf{K}_*$ pseudosimplisel cebirinin oluşturduğu

$$\partial_0^1 \epsilon = \partial_1^1 \epsilon$$

olacak şekildeki $(\mathbf{K}_*, \epsilon, K)$ yapısına bir **arttırılmış pseudosimplisel cebir** denir.

Eğer $n \geq 0$ için $h_n : K_n \longrightarrow K_{n+1}$ cebir homomorfizmleri ve $h : K \longrightarrow K_0$ dönüşümü

$$\epsilon h = 0,$$

$n \geq 0$ için

$$\partial_0^{n+1} h_n = 0,$$

$i, n \geq 1$ için

$$\partial_1^1 h_0 = h\epsilon \text{ ve } \partial_i^{n+1} h_n = h_{n-1}\partial_{i-1}^n$$

olacak biçimde varsa bu durumda $(\mathbf{K}_*, \epsilon, K)$ arttırılmış pseudosimplisel cebirine **sol büzülme** denir.

Eğer $n \geq 0$ için $h_n : K_n \longrightarrow K_{n+1}$ ve $h : K \longrightarrow K_0$ dönüşümü, $n \geq 0$ için

$$\epsilon h = 0,$$

$$\partial_{n+1}^{n+1} h_n = 0,$$

$n \geq 1$ ve $i \leq n$ için

$$\partial_0^1 h_0 = h\epsilon$$

ve

$$\partial_i^{n+1} h_n = h_{n-1}\partial_i^n$$

olacak şekilde varsa bu durumda $(\mathbf{K}_*, \epsilon, K)$ arttırılmış pseudosimplisel cebirine **sağ büzülme** denir.

Tanım 3.1.7 $(\mathbf{K}_*, \epsilon, K)$ arttırılmış bir pseudosimplisel cebiri için eğer $n \neq 0$ olmak üzere

$$\pi_n(\mathbf{K}_*) = 0$$

ve

$$\epsilon : \pi_0(\mathbf{K}_*) \xrightarrow{\approx} K$$

ise, bu durumda genişletilmiş pseudosimplisel cebir **devirli** olarak isimlendirilir.

Tanım 3.1.8 Eğer bir $f : K \longrightarrow \mathbf{K}'_*$ pseudosimplisel cebir dönüşümü için $n \geq 0$, $0 \leq i \leq n$ olmak üzere

$$f_{n+1} s_i^n = s_i^n f_n$$

şartları sağlanıyorsa, bu dönüşüme **simplisel dönüşüm** denir.

Tanım 3.1.9 *Bir* $f : K \longrightarrow K^{'}_{*}$ pseudosimplisel cebir dönüşümü eğer;

1. f simplisel ve,
2. her $n \geq 0$ için $f_n : K \longrightarrow K^{'}_{*}$ homomorfizimleri örten ise bir **fibrasyon** olarak isimlendirilir.

Teorem 3.1.10 Eğer $f : K \longrightarrow K^{'}_{*}$ bir fibrasyon ise, bu durumda homotopi modüllerinin

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}\left(K^{'}_{*}\right) \longrightarrow \pi_n\left(\text{Çek}f\right) \longrightarrow \pi_n\left(K_n\right) \longrightarrow \pi_n\left(K^{'}_{*}\right) \longrightarrow \cdots$$

dizisi tamdır.

İspat: Açıktır ki Çek$f$, K_* pseudosimplisel cebirinden indirgenmiş sınır ve pseudodegenere operatörleri ile bir pseudosimplisel cebirdir. Bundan dolayı moore zincir komplekslerinin dizisinin tam olduğunu göstermek yeterlidir.

$$0 \longrightarrow L\left(\text{Çek}f\right) \longrightarrow L\left(K_*\right) \longrightarrow L\left(K^{'}_{*}\right) \longrightarrow 0$$

$x \in L_n\left(K^{'}_{*}\right)$ olsun yani, $0 \leq i \leq n-1$ için

$$\partial^n_i\left(x\right) = 1$$

olur. Burada,

$$f_n\left(y\right) = x$$

olacak şekilde bir $y \in K_n$ vardır. Şimdi, K_n nin

$$\begin{aligned}
y_0 &= y \cdot s^{n-1}_0 \partial^n_0\left(y^{-1}\right), \\
y_1 &= y_0 \cdot s^{n-1}_1 \partial^n_1\left(y^{-1}_0\right), \ \cdots, \curvearrowright \\
y_{n-2} &= y_{n-3} \cdot s^{n-1}_{n-2} \partial^n_{n-2}\left(y^{-1}_{n-3}\right), \\
y_{n-1} &= y_{n-2} \cdot s^{n-1}_{n-1} \partial^n_{n-1}\left(y^{-1}_{n-2}\right),
\end{aligned}$$

biçimindeki elemanlarını gözönüne alalım. Buna göre, $0 \leq i \leq n-1$ için

$$f_n(y_i) = x$$

ve $0 \leq i \leq j$ için

$$\partial_i^n(y_i) = 1$$

elde edilir. Aynı şekilde devam edersek

$$y_{n-1} \in L_n\left(G_*^{'}\right) \quad \text{ve} \quad f_n(y_{n-1}) = x$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Tanım 3.1.11 K_{pq} komütatif cebirler $\partial_i^h, \partial_i^v$ sınır homomorfizmleri ve s_i^h, s_i^v pseudodejenere homomorfizmleri olmak üzere

$$\left\{K_{pq}, \partial_i^h, s_i^h, \partial_i^v, s_i^v, p, q \geq 0\right\}$$

ailesine bir ikili pseudosimplisel cebir denir ve K_{**} biçiminde temsil edilir, burada h ile v, sırasıyla

$$\partial_j^h \partial_i^v = \partial_i^v \partial_j^h, \ \partial_j^h \partial_i^v = \partial_i^v s_j^h, s_j^v \partial_i^h = \partial_i^h s_j^v.$$

koşullarını sağlayan yatay yapı ve dikey yapıdır. İkili pseudosimplisel cebirin her satırı ve her sütunu bir pseudosimplisel cebirdir. Bir ikili pseudosimplisel cebirinin her satır ve sırası bir pseudosimplisel cebirdir. Bir ikili pseudosimplisel cebirin kullanılmasıyla Quillen, [6], spektral dizisinin bir çifti elde edilebilir. Bunun içinde aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.1.12 Eğer K_{**} bir ikili pseudosimplisel cebir ise,

$$E_{pq}^2 = \pi_p^h \pi_q^v K_{**} \Rightarrow \pi_{p+q}(\Delta K_{**}),$$

$$E_{pq}^2 = \pi_p^v \pi_q^h K_{**} \Rightarrow \pi_{p+q}(\Delta K_{**}).$$

biçiminde iki tane spektral dizisi mevcuttur, burada ΔK_{**},

$$\left\{K_{nn}, \partial_i^h \partial_i^v, s_i^h s_i^v\right\}$$

diagonal pseudosimplisel cebrirdir.

İspat: Bir ikili simplisel cebir için aşağıdaki ispatı (Quillen, [6],) izleyeceğiz,

$$K_* = \{K_n, \partial_i^n, s_i^n\}$$

bir pseudosimplisel cebir olsun. K_* dan üretilen sınır ve dejenere operatörler ile

$$(EK_*) = \left\{x \in K_{n+1} : \partial_0^1 \partial_0^2 \cdots \partial_0^{n+1}(x) = 1\right\}$$

biçiminde bir EK_* pseudosimplisel cebir tanımlayalım. Ayrıca

$$(C\pi_0 K_*)_n = \pi_0(K_*)$$

özdeş sınır ve dejenere operatörler ile $C\pi_0(K_*)$ bir sabit pseudosimplisel cebir olsun.

$$1 \longrightarrow \Omega K_* \xrightarrow{i} EK_* \xrightarrow{v} K_* \xrightarrow{j} C\pi_0(K_*) \longrightarrow 1 \qquad (3.2)$$

(3.2) biçiminde pseudosimplisel cebirlerin bir dizisi vardır, burada
$v_n : (EK_*)_n \longrightarrow K_n$, $\partial_{n+1}^{n+1} : K_{n+1} \longrightarrow K_n$ homomorfizmlerinden üretilir, $j_n : K_n \longrightarrow (C\pi_0 K_*)_n$, $\partial_0^1 \partial_0^2 \cdots \partial_0^n$ nın $K_0 \longrightarrow \pi_0(K_*)$ doğal homomorfizmi ile bileşkesidir ve $i : \Omega K_* \longrightarrow EK_*$, v nin çekirdeğidir.Bu durumda

$$Görv = \text{Çek}f$$

dir ve j ve v dönüşümleride fibrasyondur. Böylece (3.2) dizisi, aşağıdaki homotopi modüllerinin bir tam dizisini verir,

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(\Omega K_*) \longrightarrow \pi_n(EK_*) \longrightarrow \pi_n(Görv)$$
$$\longrightarrow \pi_{n-1}(\Omega K_*) \longrightarrow \cdots,$$
$$\cdots \longrightarrow \pi_n(Görv) \longrightarrow \pi_n(K_*) \longrightarrow \pi_n(C\pi_0 K_*)$$
$$\longrightarrow \pi_{n-1}(Görv) \longrightarrow \cdots$$

tüm n ler için

$$\pi_n(EK_*) = 0$$

olduğu gösterilmelidir. $0 : EK_* \longrightarrow EK_*$ aşikar dönüşümü $1 : EK_* \longrightarrow EK_*$ birim dönüşümüne pseudohomotopik dir. Pseudohomotopi $n \geq 0$ için

$$h_0^n = s_{n+1}^{n+1} s_n^n \cdots s_1^1 \partial_1^2 \partial_1^3 \cdots \partial_1^n \partial_1^{n+1},$$

$$h_1^n = s_{n+1}^{n+1} s_n^n \cdots s_3^3 s_2^2 \partial_2^3 \partial_2^4 \cdots \partial_2^n \partial_2^{n+1},\ h_2^n = s_{n+1}^{n+1} \cdots s_3^3 \partial_3^4 \cdots \partial_3^{n+1},$$

$$\cdots h_{n-1} = s_{n+1}^{n+1} s_n^n \partial_n^{n+1},\ h_n = s_{n+1}^{n+1}$$

homomorfizmlerini kullanarak elde edilebilir. $\pi_n(EK_*)$ homotopi modüllerinin aşikarlığı, $(EK_*, \epsilon, 1)$ arttırılmış pseudosimplisel cebirinin, $h = 0$ ve $n \geq 0$ için

$$h_n = s_{n+1}^{n+1}$$

olmak üzere sağ büzülebilir olduğu gerçeğinden görülür. Bu ise $n \geq 1$ için

$$\pi_{n-1}(\Omega K_*) \approx \pi_n(K_*)$$

olması demektir. (3.2) dizisini K_{**} ikili pseudosimplisel cebirinin sutunlarına uygulayarak ikili pseudosimplisel cebirlerin

$$1 \longrightarrow \ \Omega_v K_{**} \ \xrightarrow{i_v}\ E_v K_{**} \ \xrightarrow{v_v}\ K_{**} \ \xrightarrow{j_v}\ C_v \pi_0^v(K_{**}) \ \longrightarrow 1$$

tam dizisi elde edilir ki bu homotopi modüllerin

$$\cdots \longrightarrow \pi_p\left(\Delta\Omega_v K_{**}\right) \longrightarrow \pi_p\left(\Delta E_v K_{**}\right) \longrightarrow \pi_p\left(\Delta G\ddot{o}rv_v\right)$$
$$\longrightarrow \pi_{p-1}\left(\Delta\Omega_v K_{**}\right) \longrightarrow \cdots,$$
$$\cdots \longrightarrow \pi_p\left(\Delta G\ddot{o}rv_v\right) \longrightarrow \pi_p\left(\Delta K_{**}\right) \longrightarrow \pi_p\left(\Delta C_v \pi_0^v K_{**}\right)$$
$$\longrightarrow \pi_{p-1}\left(\Delta G\ddot{o}rv_v\right) \longrightarrow \cdots$$

tam dizisini verir. $\Delta E_v K_{**}$ pseudosimplisel cebiri için aşikar dönüşüm, $n \geq 0$, $0 \leq i \leq n$ için

$$h_i^n = s_i^h s_{n+1}^v s_n^v \cdots s_{i+1}^v \left(\partial_{i+1}^v\right)$$

homomorfizimleri vasıtasıyla, birim dönüşüme pseudohomotopik olduğundan dolayı her p için

$$\pi_p\left(\Delta E_v K_{**}\right) = 0$$

dır. Bu durumda,

$$\cdots \longrightarrow \pi_{p-1}\left(\Delta\Omega_v K_{**}\right) \longrightarrow \pi_p\left(\Delta K_{**}\right) \longrightarrow \pi_p^h \pi_0^v K_{**}$$
$$\longrightarrow \pi_{p-2}\left(\Delta\Omega_v K_{**}\right) \longrightarrow \cdots$$

şeklinde bir tam dizi vardır. Eğer tam dizi $\Omega_v^q K_{**}$ pseudosimplisel cebirine uygulanırsa ve eğer

$$\pi_0^q\left(\Omega_v^q K_{**}\right) = \pi_q^v\left(K_{**}\right)$$

eşitliği kullanılırsa

$$E_{pq}^2 = \pi_p^h \pi_q^v K_{**}$$

olmak üzere,

$$\begin{array}{ccc} \pi_{p-1}\left(\Delta\Omega_v^{q+1} K_{**}\right) & \longrightarrow & \pi_p\left(\Delta\Omega_v^q K_{**}\right) \\ \uparrow & & \downarrow \\ \pi_p^h \pi_q^v K_{**} & = & \pi_p^h \pi_q^v K_{**} \end{array}$$

çifti elde edilir. Bu çiftin spektral dizisi

$$F_p \pi_{p+q}\left(\Delta K_{**}\right) = \operatorname{Im}\left\{\pi_p\left(\Delta\Omega_v^q K_{**}\right) \longrightarrow \pi_{p+q}\left(\Delta K_{**}\right)\right\}$$

fibrasyonu ile birlikte, $\pi_{p+q}\left(\Delta K_{**}\right)$ a yakınsar. $\square$

3.2 Abelyen Olmayan Üretilmiş Funktorlar

$\mathfrak{U}$ keyfi bir kategori ve $\mathfrak{P}$, Eilenberg-Moore, [33], de verildiği anlamda $\mathfrak{U}$ içindeki objelerin bir projektif sınıfı olsun. Bu sınıf, herbir $A \in \mathfrak{U}$ objeleri için bir

$$\tau : X \to A$$

$\mathfrak{P}$ -epimorfizmi mevcut olacak şekildeki $\mathfrak{U}$ nun objelerinin sınıfıdır, burada X, $\mathfrak{P}$ sınıfına aittir. Eğer bir $P \in \mathfrak{P}$ için

$$\mathfrak{U}(P, f) : \mathfrak{U}(P, C) \to \mathfrak{U}(P, C')$$

dönüşümü örten dönüşüm ise, $\mathfrak{U}$ daki bir $f : C \to C'$ morfizmine, $\mathfrak{P}$ -epimorfizm denir.

$\mathfrak{U}$ daki herhangi bir A objesi için (X_*, ∂_0^0, A), $\mathfrak{P}$ - projektif çözümlemesi Tierney ve Vogel, [26], de verildiği anlamda düşünülebilir. Bu çözümleme, $0 \leq i < j \leq n$ için

$$\partial_i^{n-1}\partial_j^n = \partial_{j-1}^{n-1}\partial_i^n$$

koşullarını sağlayan $0 \leq i \leq n$ için $\partial_i^n : X_n \to X_{n-1}$ sınır morfizimleri ve bir $\partial_0^0 : X_0 \to A$ morfizmi ile birlikte X_* objesidir, burada herbir X_n, $\mathfrak{P}$ sınıfına aittir ve $\mathfrak{P}$ tamdır.

$f : A \longrightarrow A$, $\mathfrak{U}$ içinde bir morfizim olsun ve (X_*, ∂_0^0, A) ile $\left(X_*', \partial_0^0, A\right)$ sırasıyla A ve A' nün $\mathfrak{P}$-projektif çözümlemeleri olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{ccc} X_* & \xrightarrow{\overline{f}} & X_* \\ {\scriptstyle \partial_0^0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \partial_0^0} \\ A & \xrightarrow[f]{} & A \end{array}$$

diyagramı komütatif olacak şekilde f den elde edilen bir $\overline{f} : X_* \to X_*'$ morfizmi mevcuttur. (Tierney ve Vogel, [26], Teorem 3.2.5)

T, $\mathfrak{U}$ kategorisinden $\mathfrak{SA}$ komütatif cebirler kategorisine bir kovaryant funktor olsun. Buna göre aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 3.2.1 $\mathfrak{U}$, $(T(X_*), T(\partial_0^0), T(A))$ bir arttırılmış pseudosimplisel cebirdir ve eğer $\overline{f}, \overline{g} : X_* \to X_*^{'}$ dönüşümleri $\mathfrak{U}$ içerisinde $f : A \to A^{'}$ üzerinde herhangi iki morfizim ise bu durumda $T\left(\overline{f}\right)$ ve $T(\overline{g})$ dönüşümleri pseudohomotopikdir.

İspat: Tierney ve Vogel, [26], da belirtildiğine göre bir A objesinin (X_*, ∂_0^0, A) projektif $\mathfrak{P}$ çözümlenmesi $0 \leq i \leq n$ için $s_i^n : X_n \to X_{n+1}$ morfizimlerine sahiptir. Öyleki $i < j$ için

$$\partial_i s_j = s_{j-1}\partial_i,\ \partial_j s_j = 1 = \partial_{j+1} s_j$$

ve $i > j+1$ için

$$\partial_i s_j = s_j \partial_{i-1}$$

dir. Buna rağmen $i \leq j$ için

$$s_i s_j = s_{j+1} s_i$$

eşitliği herzaman doğru olmaz. Ayrıca (Tierney ve Vogel, [26], teorem 3.2.5) deki gibi $i < j$ için

$$\partial_0^{n+1} h_0^n = \overline{f}_n,\quad \partial_{n+1}^{n+1} h_n^n = \overline{g}_n,\ \partial_i h_j = h_{j-1}\partial_i$$

ve $i > j+1$ için

$$\partial_{j+1} h_{j+1} = \partial_{j+1} h_j,\ \partial_i h_j = h_j \partial_{i-1}$$

olacak şekilde $0 \leq i \leq n$ için $h_i^n : X_n \to X_{n+1}^{'}$ morfizimleri mevcuttur.

Buna göre $n \geq 0$, $0 \leq i \leq n$ için $T(s_i^n)$ pseudodejenere homomorfizmleri ile birlikte $T(X_*)$ bir pseudo simplisel cebirdir ve $T\left(\overline{f}\right)$ ve $T(\overline{g})$ aralarında pseudohomotopi $n \geq 0$, $0 \leq i \leq n$ için $T(h_i^n)$ homomorfizimleri tarafından verilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.1.5 ve teorem 3.2.1, $\pi_n(T(X_*))$ homotopi modüllerinin, A objesinin (X_*, ∂_0^0, A) $\mathfrak{P}$ - projektif çözümlemesinden bağımsız olduğunu ve $f : A \to A'$ morfizminin

$$\pi_n\left(T\left(\ \bar{f}\ \right)\right) : \pi_n(T(X_*)) \to \pi_n\left(T\left(X'_*\right)\right)$$

homomorfizmlerini tek bir şekilde belirlediğini gösterir. □

Tanım 3.2.2 Keyfi bir $T : \mathfrak{U} \to \mathfrak{SA}$ kovaryant funktorunu ele alalım $n \geq 0$ ve, $\mathfrak{U}$ içerisinde ki herhangi $f : A \to A'$ morfizmi için

$$L_n^{\mathfrak{P}} T : \mathfrak{U} \to \mathfrak{SA}$$

$$L_n^{\mathfrak{P}} T(A) = \pi_n(T(X_*)) \quad ve \quad L_n^{\mathfrak{P}} T(A) = \pi_n\left(T\left(\ \bar{f}\ \right)\right)$$

biçiminde tanımlanan dönüşümlere sol $\mathfrak{P}$ - derived funktolar denir.

Burada $T(\partial_0^0)$ homomorfizimlerinden elde edilen bir

$$\varepsilon : L_0^{\mathfrak{P}} T(A) \to T(A)$$

dogal bir homomorfizimi mevcuttur.

Teorem 3.2.3 Eğer P, $\mathfrak{P}$ projektif sınıfı içerisinde bir obje ise $n \neq 0$ için $L_n^{\beta} T(P) = 0$ dır ve $\varepsilon : L_n^{\beta} T(P) \xrightarrow{\approx} T(P)$ dir.

İspat: P objesinin (X_*, ∂_0^0, P) sabit $\mathfrak{P}$ - projektif çözümlemesi ele alınsın, burada $n \geq 0$ için $X_n = P$ ve ∂_i^n ve s_i^n morfizimleri de birim morfizimleridir. $(T(X_*), T(\partial_0^0), T(P))$ artırılmış psudosimplisel cebiri sol büzülebilirdir ve böylece aspherical dır. Buda teoremi ispatlar. □

$\mathfrak{U}$ kategorisinde bir $\mathfrak{F} = (F, \tau, \delta)$ sıralı üçlüsünün verildiğini kabul edelim. Yani

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\delta} & F^2 \\ & \searrow^{1_F} & \downarrow{\scriptstyle \tau F} \quad \downarrow{\scriptstyle F\tau} \\ & & F \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\delta} & F^2 \\ \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle F\delta} \\ F^2 & \xrightarrow[\delta F]{} & F^3 \end{array}$$

diyağramları komütatif olacak şekilde $\tau : F \to 1_{\mathfrak{U}}$ ve $\delta : F \to F^2$ doğal dönüşümü ile birlikte $F : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ bir endofunktoru verilmiş olsun. Bu durumda $\mathfrak{F}$ sıralı üçlüsü $\mathfrak{P}$ projektif sınıfını oluşturur: $X \in \mathfrak{P}$ olması için gerek ve yeter şart bir $\mathfrak{v} : X \to F(X)$ morfizmi, $\tau_X \mathfrak{v} = 1_X$ olacak şekilde varolmasıdır. Her $A \in \mathfrak{U}$ objesi için $\tau_A : F(A) \to A$ morfizmi bir $\mathfrak{P}$ epimorfizmidir. Bu durumda $A \in \mathfrak{U}$ objesi

$$\cdots \begin{array}{c}\longrightarrow\\ \vdots \\ \longrightarrow\end{array} F(L_2A) \xrightarrow{\tau_{L_2A}} L_2A \underset{l_2^2}{\overset{l_0^2}{\rightrightarrows}} F(L_1A) \xrightarrow{\tau_{L_1A}} Ł_1A \underset{l_1^1}{\overset{l_0^2}{\rightrightarrows}} F(A) \xrightarrow{\tau_A} A$$

$$\cdots \begin{array}{c}\longrightarrow\\ \vdots \\ \longrightarrow\end{array} F(L_{n+1}A) \longrightarrow L_{n+1}A \underset{l_{n+1}^{n+1}}{\overset{l_0^{n+1}}{\begin{array}{c}\longrightarrow\\ \vdots \\ \longrightarrow\end{array}}} F(L_nA) \xrightarrow{\tau_{L_nA}} Ł_nA \underset{l_n^n}{\overset{l_0^n}{\begin{array}{c}\longrightarrow\\ \vdots \\ \longrightarrow\end{array}}} F(L_{n-1}A) \longrightarrow$$

biçiminde oluşturulan bir kanonik $\mathfrak{P}$ projektif çözümlemesine sahiptir, burada (L_1A, l_0^1, l_1^1), τ_A morfizminin simpleks çekirdeğidir,

$$\left(L_2A, l_0^2, l_1^2, l_2^2\right), \ \left(l_0^1\tau_{L_1A}, l_1^1\tau_{L_1A}\right)$$

morfizim ikililerinin simplisel çekirdeğidir ve eğer $(L_nA, l_0^n, ..., l_n^n)$ oluşturulmuşsa bu durumda

$$\left(L_{n+1}A, l_0^{n+1}, ..., l_{n+1}^{n+1}\right), \ \left(l_0^n\tau_{L_nA}, ..., l_n^n\tau_{L_nA}\right)$$

morfizimler dizisinin simplisel çekirdeğidir. Böylece A nın bir $\mathfrak{P}$ projektif çözümlemesi

$$\cdots \begin{array}{c}\to\\ \vdots \\ \to\end{array} F_{n+1}A \underset{\partial_{n+1}^{n+1}}{\overset{\partial_o^{n+1}}{\begin{array}{c}\to\\ \vdots \\ \to\end{array}}} F_nA \underset{\partial_n^n}{\overset{\partial_o^n}{\begin{array}{c}\to\\ \vdots \\ \to\end{array}}} \cdots \begin{array}{c}\to\\ \vdots \\ \to\end{array} F_2A \underset{\partial_2^2}{\overset{\partial_o^2}{\rightrightarrows}} F_1A \underset{\partial_1^1}{\overset{\partial_o^1}{\rightrightarrows}} F_0A \xrightarrow{\partial_o^0} A, \tag{3.3}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $n > 0$ için

$$F_0A = F(A), \quad F_nA = F(L_nA)$$

ve $n > 0,\ 0 \leq i \leq n$ için

$$\partial_0^0 = \tau_A,\ \ \partial_i^n = \tau_{L_nA} l_i^n$$

dir. Bu ise

$$F_*A = \{F_nA\ ,\ \partial_i^n\}$$

biçiminde gösterilir. $\mathfrak{U}$ içerisinde bir $g : A \longrightarrow B$ morfizmi

$$F_*(g) = \left(F_*A,\ \partial_0^0,\ A\right) \longrightarrow \left(F_*B,\ \partial_0^0,\ B\right)$$

morfizmini oluşturur. Burada

$$F_0(g) = F(g)$$

dir; $F(g)$ morfizmi bir $g_1 : L_1A \longrightarrow L_1B$ morfizmini indirger.

$$F_1(g) = F(g_1)$$

diyelim; böylece $j = 0, 1, ..., n-1$ için $F_j(g)$ morfizimleri oluşturulmuşsa $F_{n-1}(g)$ morfizmi bir $g_n : L_nA \longrightarrow L_nB$ morfizmini indirger.

$$F_n(g) = F(g_n)$$

olsun. Buna göre

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & \longrightarrow & & & & & & & & & \\
\cdots & \vdots & F_2A & \longrightarrow & L_2A & \rightrightarrows & F_1A & \longrightarrow & L_1A & \rightrightarrows & F_0A & \longrightarrow & A \\
 & \longrightarrow & \downarrow{\scriptstyle F(g_2)} & & \downarrow{\scriptstyle g_2} & & \downarrow{\scriptstyle F(g_1)} & & \downarrow{\scriptstyle g_1} & & \downarrow{\scriptstyle F(g)} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\
 & \longrightarrow & & & & & & & & & & & \\
\cdots & \vdots & F_2B & \longrightarrow & L_2B & \rightrightarrows & F_1B & \longrightarrow & L_1B & \rightrightarrows & F_0B & \longrightarrow & B \\
 & \longrightarrow & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

komütatif diyagramı elde edilir. Şimdi (3.1) eşitliğini sağlayan $n \geq 0$ için $0 \leq i \leq n$ için $s_i^n : F_nA \longrightarrow F_{n+1}$ kanonik morfizimlerine sahip A objesinin F_*A kanonik $\mathfrak{P}$ projektif çözümlemesini gösterelim bunu n üzerinden indirgeme yaparak oluşturacagız $n = 0$ için $u_0^0 : F_0A \longrightarrow L_1A$,

$$(1_{F_0A},\ 1_{F_0A})$$

ikilisinden indirgenmiş morfizim olsun bu durumda

$$s_0^0 = F\left(u_0^0\right)\delta_A$$

denilebilir.

$n = 1$ için $u_0^1, u_1^1 : F_1A \longrightarrow L_2A$ morfizimleri sırasıyla

$$\left(1, 1, s_0^0\partial_1^1\right) \quad \text{ve} \quad \left(s_0^0\partial_0^1, 1, 1\right)$$

indirgenmiş morfizimler olsun. Bu durumda

$$s_0^1 = F\left(u_0^1\right)\delta_{L_1A} \quad \text{ve} \quad s_1^1 = F\left(u_1^1\right)\delta_{L_1A}$$

denilebilir.

$n = 2$ için $u_0^2, u_1^2, u_2^2 : F_2A \longrightarrow L_3A$ morfizimleri sırasıyla

$$\left(1, 1, s_0^1\partial_1^2, s_0^1\partial_2^2\right), \ \left(s_0^1\partial_0^2, 1, 1, s_1^1\partial_2^2\right) \quad \text{ve} \quad \left(s_1^1\partial_0^2, s_1^1\partial_1^2, 1, 1\right)$$

morfizimlerinden indirgenmiş morfizimler olsun. Bu durumda

$$s_0^2 = F\left(u_0^2\right)\delta_{L_2A}, \ s_1^2 = F\left(u_1^2\right)\delta_{L_2A} \quad \text{ve} \quad s_2^2 = F\left(u_2^2\right)\delta_{L_2A}$$

olur.

Şimdi de s_i^k morfizmlerinin $k = n - 1$ kadar tanımlandığını kabul edelim ve s_i^n morfizmlerini tanımlayalım $u_0^n : F_nA \longrightarrow L_{n+1}A$ morfizmi

$$\left(1, 1, s_0^{n-1}\partial_1^n, s_0^{n-1}\partial_2^n, ..., s_0^{n-1}\partial_n^n\right)$$

sisteminden indirgenmiş olsun. $0 < i < n$ için $u_i^n : F_nA \longrightarrow L_{n+1}A$ morfizmleri

$$\left(s_{i-1}^{n-1}\partial_0^n, s_{i-1}^{n-1}\partial_1^n, ..., s_{i-1}^{n-1}\partial_{i-1}^n, 1, 1, s_i^{n-1}\partial_{i+1}^n, ..., s_i^{n-1}\partial_n^n\right)$$

sisteminden indirgenmiş morfizmler olsun ve $u_n^n : F_nA \longrightarrow L_{n+1}A$ morfizmi

$$\left(s_{n-1}^{n-1}\partial_0^n, s_{n-1}^{n-1}\partial_1^n, ..., s_{n-1}^{n-1}\partial_{n-1}^n, 1, 1\right)$$

sisteminden indirgenmiş morfizm olsun. Bu durumda $0 \leq i \leq n$ için

$$s_i^n = F\left(u_i^n\right) \delta_{L_n A}$$

olur.

$T, \mathfrak{U}$ kategorisinden $\mathfrak{SA}$ komütatif cebirler kategorisine bir kovaryant funktor olsun R_n, $\mathfrak{U}$ dan $\mathfrak{SA}$ giden kovaryant funktorlar ∂_i^n, s_i^n ve ∂_0^0, (3.3) ve

$$\partial_0^0 \, \partial_0^1 = \partial_0^0 \, \partial_1^1$$

koşullarını sağlayan doğal dönüşümleri ile birlikte

$$R_* = \{R_n, \ \partial_i^n, \ s_i^n, \quad n \geq 0\}$$

olmak üzere (R_*, ∂_0^0, T) arttırılmış pseudosimplisel funktoruna T funktorunun pseudosimplisel çözümlemesi denir.

Bir $T : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{SA}$ funktoru verilsin, $n \geq 0$ ve $A \in \mathfrak{U}$ için

$$T_n\left(A\right) = T\left(F_n A\right)$$

olsun ve $g : A \longrightarrow A'$ dönüşümü $\mathfrak{U}$ içerisinde ise $n > 0$ için

$$T_0\left(g\right) = T\left(F\left(g\right)\right) \quad \text{ve} \quad T_n\left(g\right) = T\left(F\left(g_n\right)\right)$$

olsun. Herhangi bir $A \in \mathfrak{U}$ objesi $n \geq 0$, $0 \leq i \leq n$ için

$$\begin{aligned} \partial_i^n\left(A\right) &= T\left(\partial_i^n\right) : T_n\left(A\right) \longrightarrow T_{n-1}\left(A\right), \\ s_i^n\left(A\right) &= T\left(s_i^n\right) : T_n\left(A\right) \longrightarrow T_{n+1}\left(A\right) \end{aligned}$$

olsun ve

$$\partial_0^0\left(A\right) = T\left(\tau_A\right) : T_0\left(A\right) \longrightarrow T\left(A\right)$$

olsun. Buna göre

$$T_* = \{T_n, \partial_i^n, s_i^n, \quad n \geq 0\}$$

olsun.

Teorem 3.2.4 $(T_*, \partial_0^0, T), T$ funktorunun bir pseudosimplisel çözümlemesidir.

İspat: (3.3) eşitlikleri ve $\partial_0^0\partial_0^1 = \partial_0^1\partial_1^1$ eşitliğinin sağlandığı açık olduğu için, sadece

$$s_i^n = T_n \longrightarrow T_{n+1}$$

dönüşümünün bir doğal dönüşüm olduğu gösterilmelidir.

Eğer $g : A \longrightarrow B$ ise bu durumda $n \geq 0$, $0 \leq i \leq n$ için

$$s_i^n F(g_n) = F(g_{n+1})\, s_i^n$$

olduğunu gösterilecektir. Burada $g_0 = g$ dir.

İlk olarak $n = 0$ durumunu inceleyelim. Bunun için aşağıdaki diyağramı gözönüne alalım

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(g_0)} & F(B) \\ {\scriptstyle u_0^0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u_0^0} \\ L_1A & \xrightarrow{g_1} & L_1B \\ {\scriptstyle l_1^1}\downarrow\downarrow{\scriptstyle l_0^1} & & {\scriptstyle l_1^1}\downarrow\downarrow{\scriptstyle l_0^1} \\ FA & \xrightarrow{F(g_0)} & FB. \end{array}$$

Buna göre

$$\begin{aligned} l_0^1 u_0^0 F(g_0) &= F(g_0), \\ l_1^1 u_0^0 F(g_0) &= F(g_0), \\ l_0^1 g_1 u_0^0 F(g_0) &= F(g_0)\, l_0^1 u_0^0 = F(g_0), \\ l_1^1 g_1 u_0^0 F(g_0) &= F(g_0)\, l_1^1 u_0^0 = F(g_0) \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla

$$l_0^1 u_0^0 F(g_0) = l_0^1 g_1 u_0^0 \;\; ve \;\; l_1^1 u_0^0 F(g_0) = l_1^1 g_1 u_0^0$$

dır. Aynı şekilde devam edilirse,

$$u_0^0 F(g_0) = g_1 u_0^0$$

bulunur. Böylece aşağıdaki diyağram komütatiftir

$$\begin{array}{ccccc} F(A) & \xrightarrow{\delta_A} & F^2(A) & \xrightarrow{F(u_0^0)} & F(L_1A) \\ \downarrow{\scriptstyle F(g_0)} & & \downarrow{\scriptstyle F^2(g_0)} & & \downarrow{\scriptstyle F(g_1)} \\ F(B) & \xrightarrow[\delta_B]{} & F^2(B) & \xrightarrow[F(u_0^0)]{} & F(L_1A) \end{array}$$

ve

$$s_0^0 F(g_0) = F(g_1)\, s_0^0$$

yazılabilir.

Şimdi $k = 0, 1, ..., n-1$ için dejenere morfizimleri ile birlikte $F(g_k)$ nın komütatif olduğunu varsayarak $0 \leq i \leq n$ için

$$s_i^n F(g_n) = F(g_{n+11})\, s_i^n$$

olduğunu ispatlayalım. Bunun için aşağıdaki diyağramı gözönüne alalım,

$$\begin{array}{ccc} F(L_nA) & \xrightarrow{F(g_n)} & F(L_nB) \\ \downarrow{\scriptstyle u_i^n} & & \downarrow{\scriptstyle u_i^n} \\ L_{n+1}A & \xrightarrow{g_{n+1}} & L_{n+1}B \\ \downarrow{\scriptstyle l_0^{n+1}} \downarrow \ldots \downarrow{\scriptstyle l_{n+1}^{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle l_{n+1}^{n+1}} \downarrow \ldots \downarrow{\scriptstyle l_0^{n+1}} \\ F(L_nA) & \xrightarrow{F(g_n)} & F(L_nB). \end{array}$$

$i = 0$ için,

$$l_j^{n+1} u_0^n F(g_n) = \begin{cases} F(g_n), & j = 1, 2, \\ s_0^{n-1} \partial_{i-2}^n\ F(g_n), & 2 < j \leq n+1 \end{cases}$$

$0 < i < n$ için,

$$l_j^{n+1} u_0^n F(g_n) = \begin{cases} s_{i-1}^{n-1} \partial_j^n F(g_n), & 0 \leq j < i \\ F(g_n), & j = i, i+1 \\ s_i^{n-1} \partial_j^n F(g_n), & i+2 \leq j \leq n+1 \end{cases} \tag{3.4}$$

$i = n$ için,

$$l_j^{n+1}u_n^n F(g_n) = \begin{cases} s_{n-1}^{n-1}\partial_j^n F(g_n), & 0 \leq j < n \\ F(g_n), & i = n, n+1 \end{cases}$$

başka bir deyişle

$$l_j^{n+1}g_{n+1}u_i^n = F(g_n)l_j^{n+1}u_i^n$$

dir. (3.4) dekine benzer eşitliklerden elde edilen $F(g_n)l_j^{n+1}u_i^n$ morfizimlerinde yalnızca sondaki değil başataki $F(g_n)$ çarpanı farklıdır. Böylece

$$s_i^{n-1}F(g_{n-1}) = F(g_n)s_i^{n-1}$$

dir.

$$0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n+1 \text{ için } l_j^{n+1}u_i^n F(g_n) = l_j^{n+1}g_{n-1}u_i^n$$

elde edilir. Böylece $0 \leq i \leq n$ için

$$u_i^n F(g_n) = g_{n+1}u_i^n$$

dir. Bu nedenle aşagıdaki şekildeki diyagram komütatifttir.

$$\begin{array}{ccccc} F(L_nA) & \xrightarrow{\delta_{L_nA}} & F^2(L_nA) & \xrightarrow{F(u_i^n)} & F(L_{n+1}A) \\ \downarrow{\scriptstyle F(g_n)} & & \downarrow{\scriptstyle F^2(g_n)} & & \downarrow{\scriptstyle F(g_{n+1})} \\ F(L_nB) & \xrightarrow[\delta_{L_nB}]{} & F^2(L_nB) & \xrightarrow[F(u_i^n)]{} & F(L_{n+1}B) \end{array}$$

Buradanda

$$s_i^n F(g_n) = F(g_{n+1})s_i^n$$

ve böylce $n \geq 0$, $0 \leq i \leq n$ için

$$T(s_i^n)T(F(g_n)) = T(F(g_{n+1}))(s_i^n)$$

yazılabilirki. Böylelikle teorem ispatlanmış oldu. □

Özellikle gösterebiliriz ki herhangi bir $g : A \longrightarrow B$ dönüşümü için

$$T_*(g) : T_*(A) \longrightarrow T_*(B)$$

bir simplisel dönüşümdür.

Teorem 3.2.4 deki çözümleme T funktorlarının kanonik çözümlemesi olarak adlandırılır ve sıralı üçlüler tarafından indirgenen $\mathfrak{P}$ projektif sınıfının $L_n^{\mathfrak{P}}T$ relatif sol üretilmiş funktorlarının hesaplanmasına imkan verir.

$\mathcal{U}$ kategorisindeki bir sıralı üçlü $\Im=(F,\tau,\delta)$ olsun. Eğer $U_\tau : UF \longrightarrow U$ dönüşümü bölüm(split) epimorfizmi ise bu durumda $U:\mathcal{U}\longrightarrow\mathfrak{S}$ funktoru F -projektif olarak adlandırılır. (Swan, [29],)

Eğer $\mathfrak{P}$ projektif sınıfı $\Im$ sıralı üçlüsü tarafından indirgeniyor ve $T:\mathcal{U}\longrightarrow\mathfrak{S}$ dönüşümü kovaryant funktor ise T funktorunun (T_*,∂_0^0,T) kanonik $\mathfrak{P}$ - çözümlemesi herbir T_n, F - projektif olmak üzere F projektif olarak adlandırılır.

Teorem 3.2.5 Eğer $\mathfrak{P}$ projektif sınıfı $\Im=(F,\tau,\delta)$ sıralı üçlüsü tarafından indirgenmiş ve $T:\mathcal{U}\longrightarrow\mathfrak{S}$ kovaryant funktorunun kanonik $\mathfrak{P}$ - çözümlemesi F - projektifse, o zaman $L_n^{\mathfrak{P}}T$ sol üretilmiş funktoru $\Im$ sıralı üçlüsüne relatif olan swam sol üretilmiş funktorlarına izomorfiktir. Eğer T komütatif cebir kategorisinde bir kovaryant funktor ise o zaman $L_n^{\mathfrak{P}}T$ funktorlarının keyfi bir $\mathfrak{P}$ projektif sınıfı için Tireny ve Vogel'in sol derived funktorlarına izomorfiktir.

İspat: $\Im=(F,\tau,\delta)$ sıralı üçlüsünü alalım. Bilindiği gibi

$$F'_n=F^{n+1},\ \partial'_i=F^i\tau F^{n-1}\ \text{ ve }\ s'_i=F^i\delta F^{n-i}$$

olmak üzere $(F'_*,\tau,1_{\mathcal{U}})$ arttırılmış simplisel funktorudur (Gersten, [35],). $A\in\mathcal{U}$ objesinin kanonik $\mathfrak{P}$ projektif çözümlemesini gözönüne alalım ve

$$G_{pq}(A)=T_p\left(F'_qA\right),\qquad \partial_i^v=TF_p\left(\partial'_i\right),$$

$$s_i^v=TF_p\left(s'_i\right),\qquad \partial_i^h=T\left(\partial_i\right),\qquad s_i^h=T\left(s_i\right).$$

alarak bir ikili $G_{**}(A)$ pseudosimlisel komütatif cebir yapısını oluşturalım. Herbir yatay pseudosimlisel komütatif cebiri $q \geq 0$ için $TF_*\left(F'_qA\right)$ dır ve

$$\pi_p\left(TF_*\left(F'_qA\right)\right) = L_p^{\mathfrak{P}}T\left(F'_qA\right)$$

vardır. Teorem 3.2.1 dende görüldüğü gibi $p \neq 0$ için

$$\pi_p^h(G_{**}) = \text{o} \quad \text{ve} \quad \pi_{\text{o}}^h(G_{**}) = TF'_*A$$

dır. Sonuç olarak, teorem 3.1.12 de gösterildiği gibi

$$\pi_n(\Delta G_{**}) = \pi_n(TF'_*A) = \Im$$

sıralı üçlüsüne relatif olan Swan'ın n inci sol üretilmiş fuktoruna eşittir.

Her $p \geq 0$ için $TF_p = T_p$ funktoru F - projektiftir ve $(TF_pF'_*, TF_p\tau, TF_p)$ arttırılmış simplisel funktoru sol büzülebilirdir (Swan, [29],). Böylece $q \neq 0$ için

$$\pi_q^v(G_{**}) = 0 \quad \text{ve} \quad \pi_0^v(G_{**}) = TF_*(A)$$

dır. Sonuç olarak, teorem 3.1.12 de gösterildiği gibi $L_n^{\mathfrak{P}}T(A) = \pi_n(\Delta G_{**}) =$ Swan'ın n inci sol üretilmiş funktorudur.

Eğer komütatif cebirler kateğorisindeki bir funktor T ve $\mathfrak{P}$ keyfi bir projektif sınıf ise, o zaman komütatif cebirlerin

$$\{T(X_n), \partial_n, n \geq 0\}$$

zincir kompleksinin homoloji grupları Tierney ve Vogel sol türetilmiş funktorlarını verir (Tierney ve Vogel, [26],), burada (X_*, ∂_0^0, A), A daki objelerin bir $\mathfrak{P}$ projektif çözümlemesi ve

$$\partial_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i T(\partial_i^n)$$

dir.

$$\{L_n(T_*), (-1)^n d_n, n \geq 0\}$$

zincir kompleksi

$$\{T(X_n), \partial_n, n \geq 0\}$$

kompleksinin bir alt kompleksidir veiçine dönüşüm, Tierney ve Vogel'in n inci üretilmiş funktoru içinde

$$\pi_n(T(X_*)) = L_n^{\mathfrak{P}} T(A)$$

nin doğal bir homomorfizmini indirger. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

$\mathfrak{P}$, $\Im = (F, \tau, \delta)$ sıralı üçlüsü tarafından indirgenmiş $\mathcal{U}$ kategorisindeki bir projektif sınıf ve$T$, $\mathcal{U}$ dan $\mathfrak{S}$ komütatif cebirler kategorisine bir kovaryant funktor olmak üzere aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 3.2.6 Her $n \geq 0$ için $TF_n(f) : T(F_nA) \longrightarrow T(F_nB)$ homomorfizmi örten ise $\mathcal{U}$ içerisindeki $f : A \longrightarrow B$ morfizmi bir T - **fibrasyonu** olarak isimlendirilir.

Eğer $f : A \longrightarrow B$ bir bölüm(split) epimorfizmi ise (yani $g : B \longrightarrow A$ morfizmi var ve $fg = 1_B$ ise) bu durumda f herhangi $\mathfrak{P}$ projektif sınıfına relatif olan keyfi bir T funktoru için bir T - fibrasyonudur.

$f : A \longrightarrow B$ bir $\mathfrak{P}$ - projektif sınıfına relatif bir T - fibrasyonu olsun. Bu durumda

$$\text{Çek}TF_*(f) = \{\text{Çek}TF_n(f),\ n \geq 0\}$$

bir pseudosimplisel komütatif cebirdir.

$$L_n^{\mathfrak{P}} T(A, B, f) = \pi_n(\text{Çek}TF_*(f)),\ n \geq 0$$

alalım. Teorem 3.1.10 de de gösterildiği gibi $f : A \longrightarrow B$ biçiminde belirtilen T - fibrasyonu aşağıdaki sol üretilmiş funktorların bir tam dizisini belirler,

$$\cdots \to L_{n+1}^{\mathcal{B}} T(B) \to L_n^{\mathcal{B}} T(A, B, f) \to L_n^{\mathcal{B}} T(A) \to L_n^{\mathcal{B}} T(B) \to \cdots \qquad (3.5)$$

3.2.1 Cebirsel K - Teori

$\mathfrak{U}$, birimli olması zorunlu olmayan halkaların bir kategorisi ve $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{U}$ kategorisinde Eilenberg-Moore anlamında halkaların bir projektif sınıfı olsun.

Bu bölümde, cebirsel K-teorisinde önemli rol oynayan ve $\mathfrak{U}$ kategorisinden, grupların $\mathfrak{P}$ kategori halkalarına tanımlı olan GL ve E kovaryant funktorları ele alınsın.

Herhangi bir $A \in \mathfrak{U}$ halkasını ve birimli A^+ halkasını düşünelim. A ve A^+ Abelyen grup olduklarından $A^+ = A + Z$ ve çarpım işlemi

$$(a, n)(a', n') = (aa' + n'a + na', nn')$$

ile verilir. Bu durumda halkaların

$$0 \leq A \quad \stackrel{i_1}{\rightarrow} \quad A^+ \quad \stackrel{p_2}{\rightarrow} \quad Z \quad \rightarrow \quad 0$$

dizisi tamdır. Burada $i_1(a) = (a, 0)$ ve $p_2(a, n) = n, p_2$ bir bölüm epimorfizm ve eğer A bir birimli bir halka ise $A^+ \approx A \times Z$ dir.

$GL(f^+)$ tarafından indirgenmiş homomorfizm

$$GL'(f^+) : GL'(A) \rightarrow GL'(B),$$

$f : A \rightarrow B$ halka homomorfizmi ve $GL(A^+)$, A^+ birimli halkası üzerinde lineer grubu olmak üzere

$$GL'(A) = \text{Çek}GL(p_2)$$

olarak alalım.

Üstelik, $E'(f)$, $E'(f^+)$ tarafından indirgenmiş ve $E(A^+)$, A^+ üzerindeki elementer grup olmak üzere

$$E'(A) = \ker E(p_2)$$

alalım.

$$[GL'(A), GL'(A)] \subset E'(A) \quad \text{ve} \quad E'(A), GL'(A)$$

nın normal bir alt grubudur.

Eğer A bir birimli halka ise

$$\eta(a, n) = ne + a$$

olmak üzere $\eta : A^+ \to A$ bir homomorfimzdir. Bu durmda

$$GL(\eta) : GL(A^+) \to GL(A)$$

homomorfizmi $GL(A')$ üzerine indirgenmiş doğal izormorfizmdir(Gersten, [36], de görüldüğü gibi) ve $E(\eta)$ nın $E(A')$ ne kısıtlanmışı bir indirgenmiş $E(A') \approx E(A)$ izomorfizmidir. Bu nedenden dolayı, tüm halkalar için, $GL'(A)$ ve $E'(A)$ notasyonları yerine sırası ile $GL(A)$ ve $E(A)$ notasyonları kullanılacaktır.

Kovaryant funktor sol tamdır ve fiber çarpımını korur.

$\forall A \in \mathfrak{U}$ ve $\varepsilon : L_0^{\mathfrak{P}} GL(A) \to GL(A)$ doğal homomorfizm olmak üzere $n > 2$ için

$$K_0^{\mathfrak{P}}(A) = L_{n-2}^{\mathfrak{P}} GL(A)$$

ve

$$K_2^{\mathfrak{P}}(A) = \text{Çek}\varepsilon$$

olarak alınsın ($K_1^{\mathfrak{P}}$ nin tanımında, $Gör\varepsilon$, $GL(A)$ bir normal alt grubu olarak kabul edilmiştir.) $\mathfrak{U}$ kategorisi sonlu ters spektranın limitlerine sahip olduğu için bu sekilde bir seçim yapılması mümkündür. Her $f : A \to B$ homomorfizmi, $n > 2$ için

$$K_n^{\mathfrak{P}}(f) = L_{n-2}^{\mathfrak{P}} GL(f)$$

ve $K_2^B(f)$ ile $K_1^B(f)$ yi $L_0^B GL(f)$ tarafından indirgenmiş homomorfizmlere eşit olarak alınsın.

Tanım 3.2.7 K_n^B funktorlarına $\mathfrak{P}$ halkaların projektif sınıfına relatif olan cebirsel K-funktorları ya da relatif cebirsel K-funktorları denir.

Eğer $\mathfrak{P}_0$ serbest halkaların projektif sınıfı ise bu durumda cebirsel K-funktorlar mutlak cebirsel $K-$funktorlar olarak adlandırılır ve K_n ile gösterilir.

$\mathfrak{P}_0$ projektif sınıfını kullanarak, aşağıdaki biçimde belirtilen yeni bir projektif $\mathfrak{P}_0'$ sınıfını tanımlayalım: $\forall A \in \mathfrak{U}$ için A tarafından üretilen keyfi F_A halkasını göz önüne alalım ve $0 \in A$ olmak üzere $|0|$ tarafından üretilen F_A nın asli idealleri I olsun. $F_A' = F_A/I$ alalım. $A \in \mathfrak{U}$ için bütün F_A' lerin sınıfı $\mathfrak{P}_0'$ dır. $F_A \to F_A/I$ doğal homomorfizmi bir funktorsal bölüm epimorfizm olduğundan $K_n^{\mathfrak{P}_0'}$ funktoru $n \geq 1$ ler için K_n funktoruna izomorfiktir.

Inasaridze, [14], halka kategorisinden grup kategorisine tanımlı E ve GL kovaryant funktorlarından elde edilen K_n cebirsel K - funktorlarının Swan, [30], ın tanımladığı cebirsel K teoriyi verdiğini ispatlamıştır.

Bu kısımda amacımız halka kategorisinden grup kategorisine tanımlı olan GL ve E kovaryant funktorlarına benzer olarak halka kategorisinden cebir kategorisine funktorlar tanımlamaktı ve bu funktorlar yardımıyla Inasaridze, [14], nin pseudosimplisel gruplar için elde ettiği sonuçları pseudosimplisel cebirlere aktarmaktı. Fakat zaman darlığı ve çeşitli nedenlerden dolayı bu funktorlar tanımlanamadı.

Dolayısıyla pseudosimplisel cebirler için istenilen sonuçlar elde edilemedi.

Bölüm 4

Pseudosimplisel Cebirlerin n-Tipleri

4.1 Giriş

Arvasi, [39], $\mathbf{A}$, Moore kompleksi $\mathbf{NA}$ olan bir simplisel komütatif cebir ve $n > 1$ için D_n, n.boyuttaki dejenere elemanlar tarafından üretilen ideal ise $A_n = D_n$ ve B_n, A_n içinde, önceden tam olarak belirlenmiş elemanların kümesi tarafından üretilen bir ideal olmak üzere, $n \geq 1$ için

$$\partial_n(NA_n) = \partial(B_n)$$

olduğunu göstermiştir.

Ayrıca $n = 2, 3$ ya da 4 ise, $\mathbf{A}$ simplisel cebirinin Moore kompleksinin görüntüsü

$$\partial_n(NA_n) = \sum_{I,J} K_I K_J$$

formunda verilebilir, burada

$$\varnothing \neq I, J \subset [n-1] = \{0, 1, \ldots, n-1\} \text{ ve } I \cup J = [n-1]$$

olmak üzere

$$K_I = \underset{i\in I}{\cap}\text{çek } d_i \qquad \text{ve} \qquad K_j = \underset{j\in J}{\cap}\text{çek } d_j$$

dir. Arvasi ayrıca, genel olarak $n > 4$ için

$$\sum_{I,J} K_I K_J \subseteq \partial_n(NA_n)$$

olduğunu da göstermiştir. Castiglioni, [16], ise değişik bir yaklaşımla her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{I,J} K_I K_J = \partial_n(NA_n)$$

eşitliğinin doğru olduğunu göstermiştir.

Biz bu bölümde, Arvasi nin simplisel komütatif cebirler için göstermiş oldukları sonuçları, pseudosimplisel komütatif cebirler için kısmen geçerli olduğunu gösterdik. Daha sonra çaprazlanmış modüllerin kategorisi ile Moore kompleksinin uzunluğu 1 olan pseudosimplisel cebirler kategorisinin denkliği gösterildi. Ayrıca Ellis, [13], den faydalanarak pseudo 2 - çaprazlanmış modül yapısı tanımlandı ve pseudo 2 - çaprazlanmış modül kategorisinin, Moore kompleksinin uzunluğu 2 olan pseudosimplisel cebirler kategorisine denkliği gösterildi. Ayrıca pseudosimplisel cebirlerin n - tipleride incelendi.

Cebirsel topoloji ve homotopik cebirin birarada kullanılmaya başlanması ile homotopi tiplerinin yeni ve önemli modellerinin homolojik cebirde uygulamalarının mümkün olduğu anlaşılmıştır. Çaprazlanmış modüller,grup teorinin dışındaki cebirin diğer kısımlarında birçok kez ortaya çıkmış ve daima konunun Abelyen olmayan durumları ile ilişkilendirilmiştir. Loday'in n - tipleri sınıflandırma teoreminin genel bir Abelyen olmayan homolojik yada homotopik cebirsel versiyonunu incelerken ortaya çıkan problem topolojik metodların kullanılmasıdır. Porter, [38], Loday, [18], in $(n+1)$ - tiplerin Cat^n gruplar yada çaprazlanmış n - küplerin bir bölüm kategorisine denkliğini ispatlayan sonuçların cebirsel bir ispatını yapmıştır. Bu cebirsel ispat yardımıyla

Arvasi, Koçak ve Alp, [42], simplisel komütatif cebirler için benzer sonuçlar elde etmişlerdir. Bu bölümde amaç, [42], deki sonuçları pseudosimplisel cebirler için elde etmektir. Buna göre bu bölümde çaprazlanmış n - küp kategorisinden pseudosimplisel cebir kategorisine giden bir funktor verilecektir.

4.1.1 Tanım ve Notasyonlar

Aşağıdaki tanım ve notasyonlar Arvasi, [39], Carrasco ve Cegarra, [27], dan alınmıştır.

Herhangi bir $[n] = \{0 < 1 < 2 < ... < n\}$, ve $\alpha_i^n : [n+1] \to [n]$ örten dönüşümleri

$$\alpha_i^n = \begin{cases} j, & j \leq i \quad \text{ise} \\ j-1, & j > i \quad \text{ise} \end{cases}$$

ile verilsin. $S(n, n-r)$, $[n]$ den $[n-r]$ ye giden örten dönüşümlerin kümesi olsun. Bu durumda bu küme değişik α_i^n lerin bileşkelerinden üretilir. Bu üreteç dönüşümlerinin bileşkesi, $j < i$ için

$$\alpha_j \alpha_i = \alpha_{i-1} \alpha_j$$

ile tanımlıdır. O halde, $0 \leq i_1 < i_2 < ... < i_r \leq n-1$ olmak üzere, her $\alpha \in S(n, n-r)$ elemanı bir tek;

$$\alpha = \alpha_{i_1} \circ \alpha_{i_2} \circ ... \circ \alpha_{i_r}$$

açılımına sahiptir. Buradaki i_k indisleri,

$$\{i_1, i_2, ..., i_r\} = \{i : \alpha(i) = \alpha(i+1)\}$$

şeklindeki elemanlardır.

Böylece $S(n, n-r)$ kümesini

$$\{(i_r, ..., i_1) : 0 \leq i_1 < i_2 < ... < i_r \leq n-1\}$$

kümesi ile tanımlayabiliriz. Özellikle $[n]$ üzerinde birim dönüşüm $S(n,n)$ şeklindeki tek eleman ile tanımlanır. Benzer şekilde $S(n,0)$ ın tek elemanı $(n-1,n-2,...,0)$ dır. $n \geq 0$ için

$$S(n) = \bigcup_{0 \leq r \leq n} S(n, n-r)$$

olsun. $S(n)$ deki herhangi iki

$$\alpha = (i_r, ..., i_1)$$

ve

$$\beta = (j_s, ..., j_1)$$

elemanları için, $r < s$ olduğunda

$$i_1 = j_1, ..., i_k = j_k$$

veya $i_{k+1} > j_{k+1}$ olduğunda

$$i_1 = j_1, ..., i_k = j_k$$

oluyorsa

$$\alpha = (i_r, ..., i_1) < \beta = (j_s, ..., j_1)$$

dir. Bu durumda $S(n)$ sıralı bir küme olur.

Örneğin $S(2)$ ve $S(3)$ ü sırasıyla aşağıdaki gibi yazabiliriz;

$$S(2) = \{\emptyset < (1) < (0) < (1,0)\}$$

ve

$$S(3) = \{\emptyset < (2) < (1) < (2,1) < (0) < (2,0) < (1,0) < (2,1,0)\}$$

4.1.2 Bir Pseudosimplisel Cebirin Yarıdirekt Ayrışımı

Şimdi bir pseudosimplisel cebirin yarı-direkt ayrışımını verelim. Bu konu, gruplar üzerinde ilk olarak Counduché tarafından, [3], de incelenmiştir. Simplisel cebirler için ise detaylı bilgi için Arvasi, [39], ve Carrasco ve Cagarra, [27], e bakınız.

Tanım 4.1.1 K bir bir pseudosimplisel cebir ve $n \geq 2$ için $K_1, K_2, ..., K_n$ ise K nin alt cebirleri olsun. Eğer

1) $1 \leq s \leq n$ *için* $K_1 + K_2 + ... + K_s$, K nin idealidir;

2) $K_1 + K_2 + ... + K_n = K$;

3) $1 \leq s < t \leq n$ *için* $(K_1 + K_2 + ... + K_s) \cap K_t = 0$;

ifadeleri sağlanıyorsa, K ye $K_1, K_2, ..., K_n$ cebirlerinin n-**yarı-direkt çarpımı** denir ve $K = K_1 \rtimes K_2 \rtimes ... \rtimes K_n$ ile gösterilir. Herhangi bir $k \in K$ elemanı

$$k = k_1 + k_2 + ... + k_n \qquad (k_i \in K_i)$$

formunda bir tek şekilde yazılabilir.

Aşağıdaki yardımcı teoremde bir simplisel cebirin n-yarı-direkt çarpımının nasıl olduğu verilecektir. İspatı için Arvasi, [39], bakınız.

Yardımcı teorem 4.1.2 **K** bir pseudosimplisel cebir olsun. Bu durumda K_n,

$$K_n \cong \text{Çek } d_n^n \rtimes s_{n-1}^{n-1}(K_{n-1})$$

biçiminde ayrıştırılabilir.

İspat: K_n ile $\text{Çek}\, d_n^n \rtimes s_{n-1}^{n-1}(K_{n-1})$ arasındaki izomorfizm

$$\begin{array}{rccc} \theta: & K_n & \longrightarrow & \text{Çek}\, d_n^n \rtimes s_{n-1}^{n-1}(K_{n-1}) \\ & k & \longmapsto & (k - s_{n-1}d_n k, s_{n-1}d_n k) \end{array}$$

biçiminde tanımlanır.

$$K_n \cong \text{Çe}k\, d_n^n \rtimes s_{n-1}^{n-1}(K_{n-1})$$

izomorfizmi mevcut olduğundan, herbir K_n yi, K_n nin Moore kompleksindeki terimlerin dejenere olanlarının çok katlı yarıdirekt çarpımı olarak elde edebilmek için, gerektiğinde bu izomorfizm işlemini tekrarlayabiliriz. $\mathbf{M}$,

$$M_n = \text{Çek}\, d_{n+1}^{n+1}, \qquad d_i^n = d_i^{n+1}|_{\text{Çek}d_{n+1}^{n+1}}, \qquad s_i^n = s_i^{n+1}|_{\text{Çek}d_{n+1}^{n+1}}$$

biçiminde tanımlanan pseudosimplisel cebir olsun. $i \leq n-1$ için,

$$d_{n-1}^{n-1} d_i^n = d_i^{n-1} d_n^n$$

olduğundan, $i \leq n-1$ iken Çekd_n^n ler, d_i^n morfizmleri vasıtasıyla Çek d_{n-1}^{n-1} lere dönüşür. Benzer şekilde, $i \leq n-2$ için,

$$d_{n+1}^{n+1} s_i^n = s_i^{n-1} d_n^n$$

olduğundan, $i \leq n-2$ iken , s_i^{n+1} homomorfizmleri de Çekd_n^n leri, Çek d_{n+1}^{n+1} lere dönüştürür. Buna göre, yardımcı teorem 4.1.2 yi M_{n-1} ve K_{n-1} e uygularsak,

$$\begin{aligned} K_n &\cong \text{Çek}\, d_n \rtimes s_{n-1} K_{n-1} \\ &\cong \text{Çek}\, d_n \rtimes s_{n-1}(\text{Çek}\, d_{n-1} \rtimes s_{n-2} K_{n-2}) \\ &\cong M_{n-1} \rtimes (s_{n-1}\text{Çek}\, d_{n-1} \rtimes s_{n-1} s_{n-2} K_{n-2}) \end{aligned}$$

elde edilir. $\mathbf{M}$ da bir pseudosimplisel cebir olduğundan,

$$\begin{aligned} \text{Çek}\, d_n = M_{n-1} &\cong \text{Çek}\, d_{n-1}^M \rtimes s_{n-2} M_{n-2} \\ &\cong (\text{Çek}\, d_{n-1} \cap \text{Çek}\, d_n) \rtimes s_{n-2}\text{Çek}\, d_{n-1} \end{aligned}$$

olur ve buna göre

$$K_n = ((\text{Çek}\, d_{n-1}^n \cap \text{Çek}\, d_n^n) \rtimes s_{n-2}(\text{Çek}\, d_{n-1}^{n-1})) \rtimes (s_{n-1}(\text{Çek} d_{n-1}^{n-1}) \rtimes s_{n-1} s_{n-2}(K_{n-2}))$$

elde edilir. Buna göre K_n, aşağıdaki biçimde ayrıştırılabilir. $\square$

Önerme 4.1.3 *([39])* **K** bir pseudosimplisel cebir olsun. Bu durumda her $n \geq 0$ için

$$\begin{aligned} K_n &\cong (...(NK_n \rtimes s_{n-1}NK_{n-1}) \rtimes ... \rtimes s_{n-2}...s_0NK_1) \rtimes \\ &\quad (...(s_{n-2}NK_{n-1} \rtimes s_{n-1}s_{n-2}NK_{n-2}) \rtimes ... \rtimes s_{n-1}s_{n-2}...s_0NK_0) \end{aligned}$$

dir.

Örneğin;

$$\begin{aligned} K_1 &\cong NK_1 \rtimes s_0NK_0 \\ K_2 &\cong (NK_2 \rtimes s_1NK_1) \rtimes (s_0NK_1 \rtimes s_1s_0NK_0) \\ K_3 &\cong ((NK_3 \rtimes s_2NK_2) \rtimes (s_1NK_2 \rtimes s_2s_1NK_1)) \rtimes \\ &\quad ((s_0NK_2 \rtimes s_2s_0NK_1) \rtimes (s_1s_0NK_1 \rtimes s_2s_1s_0NK_0)) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} K_4 &\cong (((NK_4 \rtimes s_3NK_3) \rtimes (s_2NK_3 \rtimes s_3s_2NK_2)) \rtimes \\ &\quad ((s_1NK_3 \rtimes s_3s_1NK_2) \rtimes (s_2s_1NK_2 \rtimes s_3s_2s_1NK_1))) \rtimes \\ &\quad s_3(K_3 \text{ ün ayrışımı}) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

$\alpha = (i_r, ..., i_1) \in S(n)$ ye karşılık gelen terim

$$s_\alpha(NK_{n-\#\alpha}) = s_{i_r...i_1}(NK_{n-\#\alpha}) = s_{i_r}...s_{i_1}(NK_{n-\#\alpha})$$

dir. Burada, $\#\alpha = r$ dir. Dolayısıyla herhangi bir $x \in K_n$ elemanı, $y \in NK_n$ ve $x_\alpha \in NK_{n-\#\alpha}$ için

$$x = y + \sum_{\alpha \in S(n)} s_\alpha(x_\alpha)$$

formunda yazılabilir.

Yardımcı teorem 4.1.4 Bir **K** pseudosimplisel cebiri için, K_n içinde,

$$NK_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} \text{Çek}\, d_i \qquad \text{ile} \qquad \overline{NK}_n^{(r)} = \bigcap_{i \neq r} \text{Çek}\, d_i$$

arasında bir birebir dönüşüm vardır.

İspat: Bu birebir dönüşüm

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & NK_n & \longrightarrow & \overline{NK}_n^{(r)} \\ & k & \longmapsto & \varphi(k) = k - \sum_{m=0}^{n-r-1} (-1)^{m+1} s_{r+m} d_n k \end{array}$$

biçiminde verilir.

φ dönüşümünün her zaman bir homomorfizm belirtmediğine dikkat edilmelidir. Aşağıdaki özel durum, öncelikle Moore kompleksi alternatif biçimi ile karşılaştırmada olmak üzere, sık sık kullanılır. □

Sonuç 4.1.5 **K** bir pseudosimplisel cebir ise,

$$\begin{array}{rccl} \varphi': & \text{Çek}d_0 \cap \ldots \cap \text{Çek}d_{n-1} & \longrightarrow & \text{Çek}d_1 \cap \ldots \cap \text{Çek}d_n \\ & k & \longmapsto & \varphi'(k) = k + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-i} s_{n-i-1} d_n(k) \end{array}$$

şeklinde tanımlı φ' birebir dönüşümü vardır.

Yardımcı teorem 4.1.6 Bir **K** pseudosimplisel cebiri. Buna göre,

$$d_n(NK_n) = d_l(\overline{NK}_n^{(r)})$$

dir.

İspat: $k \in NK_n$ ve $k - \sum_{i=0}^{n-r-1} (-1)^{i+1} s_{r+i} d_n k$ formundaki $\overline{NK}_n^{(r)}$ nin bütün elemanları için

$$d_r(k - \sum_{i=0}^{n-r-1} (-1)^{i+1} s_{r+i} d_n k) = d_n k$$

dir. Ayrıca $\overline{NK}_n^{(r)}$ nin tüm elemanları yardımcı teorem 4.1.4 gereği,

$$k - \sum_{i=0}^{n-l-1} (-1)^{i+1} s_{r+i} d_n k$$

formunda olup,

$$d_n(NK_n) = d_r(\overline{NK}_n^{(r)})$$

dir. □

Önerme 4.1.7 **K** bir pseudosimplisel cebir olsun. $n \geq 2$ için ve

$$I \cup J = [n-1]$$

olacak şekildeki $I, J \subseteq [n-1]$ için,

$$(\underset{i\in I}{\cap} Çekd_i)(\underset{j\in J}{\cap} Çekd_j) \subseteq \partial_n NK_n$$

dir.

İspat: Herhangi bir$J \subset [n-1]$, $J \neq \emptyset$ için l, I nın en küçük elemanı olsun. Eğer $l = 0$ ise, I ile J nin yeri değiştirilerek işleme yeniden başlanır ve eğer $0 \in I \cap J$ ise, l, I nın sıfır olmayan en küçük elemanı olarak yeniden tanımlanır. Diğer durumlarda ise, ispata aşağıdaki şekilde devam edilir.

$k_0 \in \underset{j\in J}{\cap}$Çek$d_j$ ve $k_1 \in \underset{i\in I}{\cap}$Çek$d_i$ olsun. Buna göre $i \neq l$ için

$$d_i(s_{l-1}k_0s_lk_1) = 0$$

elde edilir ve böylece $s_{l-1}k_0s_lk_1 \in \overline{NK}_n^{(l)}$ olur. Buradan, yardımcı teorem 4.1.6 gereği

$$k_0k_1 = d_l(s_{l-1}k_0s_lk_1 \in d_l(\overline{NK}_n^{(l)}) = d_nNK_n$$

elde edilir ve böylece

$$(\underset{i\in I}{\cap}$Çek$d_i)(\underset{j\in J}{\cap}$Çek$d_j) \subseteq \partial_n NK_n$$

bulunur.

$$M_I = \underset{i\in I}{\cap}$Çek$d_i \qquad$ ve $\qquad M_J = \underset{j\in J}{\cap}$Çek$d_j$$

kısaltmaları yapıldığı taktirde, önerme 4.1.7,

$$\emptyset \neq I, J \subset [n-1] \text{ ve } I \cup J = [n-1]$$

için,

$$\sum_{i,j} M_IM_J \subseteq \partial_n NK_n$$

halini alır.

Örnek 4.1.8 $n = 2$ halini düşünelim. $(s_0d_1y - y) \in$Çekd_1 olacak şekilde, $x, y \in NK_1 =$Çekd_0 olsun.

$$x(s_0d_1y - y) \quad = d_2(s_1x((s_0y - s_1y))$$

dir ve bu Peiffer elemanına karşılık gelir. Bu elemanların, her x, y elemanları için ihmal edilebilir olması için gerekli ve yeterli koşul,

$$\partial_1 : NK_1 \longrightarrow NK_0$$

ın çaprazlanmış modül olmasıdır. Ayrıca,

$$\text{Çek}d_1\text{Çek}d_0 \subseteq \partial_2(NK_2)$$

dir.

□

Not 4.1.9 $\partial_n(NK_n)$, K_{n-1} in bir ideali dir. $x_n \in NK_n$ ve $z \in K_{n-1}$ olsun.

$$w = s_{n-1}(z)x$$

tanımlayalım. $i \leq n - 1$ için

$$d_i(w) = 0$$

olur ve böylece $w \in NK_n$ ve

$$d_n(w) = zd_n(x)$$

olur ve $z\partial_n(x) \in \partial_n(NK_n)$ elde edilir.

Sonuç 4.1.10 $\mathbf{K}$ pseudosimplisel cebir ve $\mathbf{K}'$, $\mathbf{K}$ ye karşılık gelen n boyutlu parçalanmış pseudosimplisel cebir olsun. Buradan aşağıdaki kanonik morfizm elde edilir.

$$\begin{array}{lccccccccc}
\mathbf{K}: & K_n & \rightrightarrows & K_{n-1} & \rightrightarrows & K_{n-2} & \rightrightarrows & \cdots & \longrightarrow & K_0 \\
 & & \leftleftarrows & & \leftleftarrows & & \leftleftarrows & & \longleftarrow & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
\mathbf{K}': & K'_n & \rightrightarrows & K_{n-1}/\partial_n NK_n & \rightrightarrows & K_{n-2} & \rightrightarrows & \cdots & \longrightarrow & K_0 \\
 & & \leftleftarrows & & \leftleftarrows & & \leftleftarrows & & \longleftarrow &
\end{array}$$

O halde $\mathbf{K}'$ aşağıdaki özelliği sağlar:

$I \cup J = [n-1]$ olacak şekildeki boş olmayan bütün $(I \neq J)$ $I, J \subset [n-1]$ indis kümeleri için

$$(\underset{i\in I}{\cap} \text{Çek}\, d_i^{n-1})(\underset{j\in J}{\cap} \text{Çek}\, d_j^{n-1}) = 0$$

dir.

Yüksek mertebeli çaprazlanmış kompleks çiftleri Carrasco ve Cegarra, [27], tarafından tanımlanmıştır. Şimdi, Arvasi, [39], tarafından tanımlanan yüksek mertebeli çaprazlanmış kompleks çiftleri ile üretilen I_n üreteçli idealini açıklayalım.

$\alpha = (i_r, ..., i_1)$ ve $\beta = (j_s, ..., j_1) \in S(n)$ için $\alpha \cap \beta = \emptyset$ olmak üzere $S(n)$ den (α, β) çiftlerinden oluşan bir $P(n)$ kümesi tanımlanır.

$$\begin{array}{ccc}
NK_{n-\#\alpha} \otimes NK_{n-\#\beta} & \xrightarrow{C_{\alpha,\beta}} & NK_n \\
{\scriptstyle s_\alpha \otimes s_\beta}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle p} \\
K_n \otimes K_n & \xrightarrow[\mu]{} & K_n
\end{array}$$

diyagramından

$$\{C_{\alpha,\beta} : NK_{n-\#\alpha} \otimes NK_{n-\#\beta} \longrightarrow NK_n : (\alpha, \beta) \in P(n), n \geq 0\}$$

şeklindeki k-lineer morfizmleri elde edilir. Burada

$$s_\alpha = s_{i_r}...s_{i_1} : NK_{n-\#\alpha} \longrightarrow K_n, \qquad s_\beta = s_{j_s}...s_{j_1} : NK_{n-\#\beta} \longrightarrow K_n$$

ve

$$p = p_{n-1}...p_0 : K_n \longrightarrow NK_n,$$

$j = 0, 1, ..., n-1$ için

$$p_j = 1 - s_j d_j$$

şeklinde tanımlı projeksiyon fonksiyonudur.

$$\begin{array}{rccc} \mu : & K_n \otimes K_n & \longrightarrow & K_n \\ & x \otimes y & \longmapsto & xy \end{array}$$

ile tanımlı çarpım dönüşümü olup,

$$\begin{aligned} C_{\alpha,\beta}(x_\alpha \otimes y_\beta) &= p\mu(s_\alpha \otimes s_\beta)(x_\alpha \otimes y_\beta) \\ &= p(s_\alpha(x_\alpha)s_\beta(y_\beta)) \\ &= (1 - s_{n-1}d_{n-1})...(1 - s_0 d_0)(s_\alpha(x_\alpha)s_\beta(y_\beta)) \end{aligned}$$

şeklinde $C_{_{\alpha,\beta}}$ fonksiyonları tanımlanabilir. Burada $\#\alpha$, α nın içerdiği, $\#\beta$ ise β nın içerdiği eleman sayısıdır.

I_n ideali ise, $x_\alpha \in NK_{n-\#\alpha}$ ve $y_\beta \in NK_{n-\#\beta}$ olmak üzere $C_{\alpha,\beta}(x_\alpha \otimes y_\beta)$ formundaki elemanlar tarafından üretilen bir idealdir. Arvasi, [39], yukarıda tanımlanan $C_{\alpha,\beta}$ üreteç elemanlarını kullanarak, Moore kompleksi NE olan bir E simplisel cebiri için

$$\partial_n (NE_n) \subseteq \sum_{I,J} K_I K_J \qquad\qquad n = 2, 3, 4$$

oldugunu dolayısıyla

$$\partial_n (NE_n) = \sum_{I,J} K_I K_J$$

eşitliğinin doğruluğunu ispatlamıştır.

Simplisel cebirlerde mevcut olan

$$s_i^{n+1} s_j^n = s_{j+1}^{n+1} s_i^n \qquad\qquad 0 \leq i \leq j \leq n$$

eşitliği pseudosimplisel cebirlerde mevcut olmadığından Moore kompleksi NK olan bir K pseudosimplisel cebiri için

$$\partial_n (NK_n) \subseteq \sum_{I,J} M_I M_J \qquad n = 2, 3, 4$$

kapsamasının doğruluğu gösterilemedi.

Bundan dolayı Arvasi, [39], de ispatlanan, simplisel cebirler için

$$\partial_n (NE_n) = \sum_{I,J} K_I K_J \qquad n = 2, 3, 4$$

eşitliği pseudosimplisel cebirler için doğru değildir. Sadece pseudosimplisel cebirler için

$$\sum_{I,J} M_I M_J \subseteq \partial_n (NK_n)$$

kapsaması mevcuttur.

Teorem 4.1.11 Değişmeli cebirlerin çaprazlanmış modüllerinin kategorisi, Moore kompleksinin uzunluğu 1 olan pseudosimplisel cebirler kategorisine denktir.

İspat: **K** Moore kompleksinin uzunluğu 1 olan bir pseudosimplisel cebir olsun. $P = K_0$, $M =$Çek$(d_0 : K_1 \to K_0)$ ve $\partial = d_1$ (M ye kısıtlanmışı) alalım. Bu durumda $p \in P$ nin $m \in M$ üzerine olan etkisi

$$p_m = s_0 (p) \cdot m$$

ile veriliyor. Buna göre $m, m' \in M$ için

$$\begin{aligned}
\text{ÇM1)} \qquad \partial(p_m) &= d_1 s_0\,(p)\cdot d_1\,(m)\\
&= p\cdot d_1(m)\\
&= p_{\partial(m)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ÇM2)} \qquad (\partial m)_{m'} &= (s_0 d_1 m)m'\\
&= (s_0 d_1 m)m' - mm' + mm'\\
&= d_2((s_0 m - s_1 m)\, s_1 m') + mm'\\
&= mm'
\end{aligned}$$

dir. Burada

$$(s_0 m - s_1 m)\, s_1 m \in NK_2 = 0$$

dır. Böylece, $\partial : M \to P$ bir çaprazlanmış modüldür.

Tersine $\partial : M \to P$ bir çaprazlanmış modül olsun. P nin M üzerine etkisi kullanılarak

$$M \rtimes P = \{(m,p) : m \in M,\, p \in P\}$$

yarıdirekt çarpımını oluşturabiliriz, burada $\lambda \in \Lambda$, $m, m' \in M$, $p, p' \in P$ için skalerle çarpım

$$\lambda\,(m,p) = (\lambda m, \lambda p)$$

toplam

$$(m,p) + (m',p') = (mm' - p'_m - p_m, pp')$$

biçiminde tanımlıdır. Ayrıca

$$\begin{aligned} d_0 &= M \rtimes P \to P \\ &\quad (m,p) \mapsto p \\ d_1 &= M \rtimes P \to P \\ &\quad (m,p) \mapsto (\partial m) + p \\ d_0 &= P \to M \rtimes P \\ &\quad p \mapsto (0,p) \end{aligned}$$

homomorfizimleri tanımlanabilir. $K_0 = P$, $K_1 = M \rtimes P$ olsun. Böylece 1 - yaniskeletin $\mathbf{K}^1$ olan bir $\{K_0, K_1\}$ 1 - parçalanmış pseudosimplisel cebiri elde edilir.

$M \rtimes P$ cebiri, M üzerine, P nin M üzerine olan etkisi ve d_1 homomorfizmi yoluyla etki eder. Böylece $M \rtimes (M \rtimes P)$ yarıdirekt çarpımını elde ederiz ve

$$\begin{aligned} d_0 &= M \rtimes (M \rtimes P) \to M \rtimes P \\ &\quad (m, m', p) \longmapsto (m', p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1 &= M \rtimes (M \rtimes P) \to M \rtimes P \\ &\quad (m, m', p) \longmapsto (m + m', p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_2 &= M \rtimes (M \rtimes P) \to M \rtimes P \\ &\quad (m, m', p) \longmapsto (m, \partial m' + p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_0 &= M \rtimes P \longrightarrow M \rtimes (M \rtimes P) \\ &\quad (m, p) \longmapsto (0, m, p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= M \rtimes P \longrightarrow M \rtimes (M \rtimes P) \\ &\quad (m, p) \longmapsto (m, 0, p) \end{aligned}$$

homomorfizimlerini oluşturabiliriz.

$$K_2 = M \rtimes (M \rtimes P)$$

olsun. Bu durumda 2 - yaniskeleti $\mathbf{K}^2$ olan $\{K_0, K_1, K_2\}$ 2 - parçalanmış pseudosimplisel cebiri elde edilir. 0 ve 1 inci boyutta birim olan tek bir

$$\mathbf{K}^2 \longrightarrow \mathbf{K}^1$$

simplisel dönüşümü mevcuttur. $\mathbf{K}^2$ nin $\mathbf{K}^1$ içindeki görüntüsünü $\bar{\mathbf{K}}^2$ ile gösterelim. $\mathbf{K}^2$ nin Moore kompleksinin 2 - inci boyutta 0 olduğunu kontrol etmek zor değildir. Böylece $\bar{\mathbf{K}}^2$ Moore kompleksinin uzunluğu 1 olan bir olan bir pseudosimplisel cebir dir. □

4.2 Pseudo 2 - Çaprazlanmış Modüller

L, M ve P değişmeli cebirleri ile P nin M üzerine etkisi, P nin L üzerine etkisi ve

$$\{,\} : M \rtimes M \to L$$

n - bilineer fonksiyonu ile birlikte

$$L \xrightarrow{\delta} M \xrightarrow{\partial} P$$

kompleksini ele alalım. Eğer $l, l' \in L$, $m, m', m'' \in M$ ve $p \in P$ için

$$\begin{array}{lll}
(1) & \partial\delta & = 0; \\
(2) & \delta\left(p_l\right) & = p\left(\delta_l\right) \quad \text{ve} \quad \partial\left(p_m\right) = p \cdot m; \\
(3) & \delta\{m, m'\} & = \left(\partial m\right)_{m'} - mm'; \\
(4) & \{\delta l, \delta l'\} & = ll'; \\
(5) & \{\delta l, m\} + \{m, \delta l\} & = \partial m_l;
\end{array}$$

aksiyomları sağlanıyorsa

$$L \xrightarrow{\delta} M \xrightarrow{\partial} P$$

kompleksine bir pseudo 2 - çaprazlanmış modül denir.

Teorem 4.2.1 Pseudo 2 - çaprazlanmış modüller kategorisi, Moore kompleksinin uzunluğu 2 - olan pseudosimplisel cebirler kategorisine denktir.

İspat: **K**, Moore kompleksinin uzunluğu 2 olan bir pseudosimplisel cebir olsun. Buna göre pseudo 2 - çaprazlanmış modül yapısını inceleyelim.

$$P = K_0, \quad M = \text{Çek}\,(d_0 : K_1 \to K_0)$$

ve

$$L = \text{Çek}\,(d_0 : K_2 \to K_1) \cap \text{Çek}\,(d_1 : K_2 \to K_1)$$

olsun.$p \in P$ nın $m \in M$ üzerine etkisi,

$$p_m = s_0\,(p) \cdot m$$

ile, ve $p \in P$ nin $l \in L$ üzerine olan etkisi,

$$p_l = s_0 s_0\,(p) \cdot l$$

ile tanımlansın. $m, m' \in M$ için

$$\{m, m'\} = (s_0\,(m) - s_1\,(m))\,(s_1\,(m'))$$

olarak verilsin. $\partial = d_1($ M ye kısıtlanmışı $)$ ve $\delta = d_2($ L ye kısıtlanmışı $)$ olsun. Bu şekilde elde edilen yapının pseudo 2 - çaprazlanmış modül aksiyomlarını sağladığını gösterelim.

$$\begin{aligned} (1) \quad \partial\delta\,(l) &= d_1 d_2\,(l) \\ &= d_1 d_1\,(l) \\ &= d_1\,(l) \\ &= 0 \qquad\qquad l \in L \text{ için} \end{aligned}$$

bulunur

$$\begin{aligned}(2)\quad \delta\left(p_l\right) &= \delta\left(s_0 s_0\left(p\right)\cdot l\right)\\ &= d_2\left(s_0 s_0\left(p\right)\cdot l\right)\\ &= d_2 s_0 s_0(p) d_2(l)\\ &= s_0 d_1 s_0(p) d_2(l)\\ &= s_0(p) d_2(l)\\ &= s_0(p)\delta(l)\\ &= p_{\delta(l)}\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}(3)\quad \delta\{m,m'\} &= \delta\left(s_0\left(m\right)-s_1\left(m\right)\right)s_1(m')\\ &= \delta\left(s_0\left(m\right)s_1\left(m'\right)-s_1(m)s_1(m')\right)\\ &= d_2\left(s_0\left(m\right)s_1\left(m'\right)-s_1(m)s_1(m')\right)\\ &= d_2 s_0\left(m\right)d_2 s_1\left(m'\right)-d_2 s_1(m) d_2 s_1(m')\\ &= s_0 d_1\left(m\right)m'-mm'\\ &= \partial m_{m'}-mm'\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}(4)\quad \{\delta l,\delta l'\} &= \left(s_0 d_2\left(l\right)-s_1 d_2\left(l\right)\right)s_1 d_2(l')-ll'+ll'\\ &= \left(s_0 d_2\left(l\right)-s_1 d_2\left(l\right)\right)s_1 d_2(l')-d_3 s_2(ll')+ll'\\ &= \left(d_3 s_0\left(l\right)-d_3 s_1\left(l\right)\right)d_3 s_1(l')-d_3 s_2(ll')+ll'\\ &= d_0[\left(s_0\left(l\right)-s_1\left(l\right)\right)s_1(l'))-s_2(ll')]+ll'\\ &= ll'\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\left(s_0(l)-s_1(l)\right)s_1(l')-s_2(ll')\in NK_3=0$$

dır.

$$
\begin{aligned}
(5)\quad \{\delta l, m\} + \{m, \delta l\} &= (s_0 d_2\,(l) - s_1 d_2\,(l)) s_1(m) + \\
&\qquad + (s_0\,(m) - s_1\,(m))\, s_1 d_2 l \\
&= (d_3 s_0 l - d_3 s_1 l)\, d_3 s_2 s_1\,(m) + d_3 s_2 (s_0(m) - \\
&\qquad - s_1(m)) d_3 s_1 l - s_0 s_0 d_1(m) l + s_0 s_0 d_1(m) l \\
&= d_3[(s_0 l - s_1 l) s_2 s_1(m) + s_2(s_0(m) - s_1(m)) s_1 l] - \\
&\qquad - s_0 d_2 s_0(m) l + s_0 s_0 d_1(m) l \\
&= d_3[(s_0 l - s_1 l) s_2 s_1(m) + s_2(s_0(m) - s_1(m)) s_1 l] - \\
&\qquad - d_3 s_0 s_0(m) l + s_0 s_0 d_1(m) l \\
&= d_3[(s_0 l - s_1 l) s_2 s_1(m) + s_2(s_0(m) - s_1(m)) s_1 l - \\
&\qquad - s_0 s_0(m) l] + s_0 s_0 d_1(m) l \\
&= s_0 s_0(d_1) l \\
&= \partial m_l
\end{aligned}
$$

dir. Burada

$$(s_0 l - s_1 l) s_2 s_1(m) + s_2(s_0(m) - s_1(m)) s_1 l - s_0 s_0(m) l \in NK_3$$

dir.

Tersine,

$$L \xrightarrow{\delta} M \xrightarrow{\partial} P$$

bir pseudo 2 - çaprazlanmış modül olsun. $K_0 = P$ diyelim P nin M üzerine etkisini kullanarak $K_1 = M \rtimes P$ yarıdirekt çarpımını oluşturabiliriz. Ayrıca,

$$\begin{aligned} d_0 &: M \rtimes P \to P \\ &(m,p) \longmapsto p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1 &: M \rtimes P \to P \\ &(m,p) \longmapsto (\partial m) + p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_0 &: P \to M \rtimes P \\ &p \longmapsto (0,p) \end{aligned}$$

homomorfizimleri vardır. $m \in M$ nin $l \in L$ üzerine etkisi

$$m \cdot l = \partial m_l - \{m, \delta l\}$$

ile verilsin. Bu etkiyi kullanarak $L \rtimes M$ yarıdirekt çarpımını oluşturabiliriz.

$(m,p) \in M \rtimes P$ nin $(l,m') \in L \rtimes M$ üzerine etkisi ise

$$(m,p)_{(l,m')} = (p_l + \partial m_l + \{m,m'\}, p_{m'} + mm')$$

ile verilir. Bu etki kullanılarak,

$$K_2 = (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P)$$

yarıdirekt çarpımı oluşturulabilir. Buna göre

$$\begin{aligned} d_0 \quad : \quad & (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P) \to (M \rtimes P) \\ & (l, m', m, p) \longmapsto (m, p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1 \quad : \quad & (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P) \to (M \rtimes P) \\ & (l, m', m, p) \longmapsto (m' + m, p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_2 \quad : \quad & (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P) \to (M \rtimes P) \\ & (l, m', m, p) \longmapsto (m', \partial m + p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_0 \quad : \quad & (M \rtimes P) \longrightarrow (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P) \\ & (m, p) \longmapsto (0, 0, m, p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_1 \quad : \quad & (M \rtimes P) \longrightarrow (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P) \\ & (m, p) \longmapsto (0, m, 0, p) \end{aligned}$$

homomorfizimleri mevcuttur.

$(l, m) \in L \rtimes M$ nin $l' \in L$ üzerine

$$(l, m)_{l'} = ll' + ml'$$

ile verilen bir etkisi mevcuttur. Buradan $L \rtimes (L \rtimes M)$ yarıdirekt çarpımı oluşturulabilir. Buna göre $(m, p) \in M \rtimes P$ nin $(l, l', m') \in L \rtimes (L \rtimes M)$ üzerine

$$(m, p)_{(l,l',m')} = (p_l + \partial m_l, p_{l'} + \partial m_{l'}, p_{m'} + mm')$$

ile verilen bir etkisi mevcuttur.

Ayrıca $(l'', m) \in L \rtimes M$ nin $(l, l', m') \in L \rtimes (L \rtimes M)$ üzerine

$$\begin{aligned} (l'', m)_{(l,l',m')} = (& ml + l''l + \{m, \delta l'\} + \{l'', \delta l'\}, ml' + \\ & + l''l' + \{m, m'\}, mm') \end{aligned}$$

ile verilen bir etkisi de mevcuttur. Burada son iki etki birleştirilerek$(L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P)$ nin $L \rtimes (L \rtimes M)$ üzerine etkisi elde edilir ve böylece,

$$K_3 = (L \rtimes (L \rtimes M)) \rtimes ((L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P))$$

yarıdirekt çarpımı oluşturulur. Burada,

$$\begin{aligned} d_0 \quad : \quad & (L \rtimes (L \rtimes M)) \rtimes ((L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P)) \to ((L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P)) \\ & (l, l', m, l'', m', m'', p) \longmapsto (l'', m', m'', p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1 \quad : \quad & (L \rtimes (L \rtimes M)) \rtimes ((L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P)) \to ((L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P)) \\ & (l, l', m, l'', m', m'', p) \longmapsto (l' + l'', m + m', m'', p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_2 \quad : \quad & (L \rtimes (L \rtimes M)) \rtimes ((L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P)) \longrightarrow ((L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P)) \\ & (l, l', m, l'', m', m'', p) \longmapsto (l + l', m, m' + m, p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_3 \quad : \quad & (L \rtimes (L \rtimes M)) \rtimes ((L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P)) \longrightarrow ((L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P)) \\ & (l, l', m, l'', m', m'', p) \longmapsto (l, \delta l' + m, \delta l'' + m', \partial m'' + p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_0 \quad : \quad & (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P) \longrightarrow (L \rtimes (L \rtimes M)) \rtimes ((L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P)) \\ & (l, m, m', p) \longmapsto (0, 0, 0, 0, l, m, m', p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_1 \quad : \quad & (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P) \longrightarrow (L \rtimes (L \rtimes M)) \rtimes ((L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P)) \\ & (l, m, m', p) \longmapsto (0, 0, l, m, 0, 0, m', p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_2 \quad & (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P) \longrightarrow (L \rtimes (L \rtimes M)) \rtimes ((L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes P)) \\ & (l, m, m', p) \longmapsto (0, l, 0, m, 0, 0, m', p) \end{aligned}$$

homomorfizimleri mevcuttur. $\mathbf{K}^2$, $\{K_0, K_1, K_2\}$ 2 - parçalanmış pseudosimplisel cebirinin 2 - yaniskeleti olsun, $\mathbf{K}^3$ ise, $\{K_0, K_1, K_2, K_3\}$ 3 - parçalanmış

pseudosimplisel cebirinin 3 - yaniskeleti olsun.

Buna göre $0, 1$ ve 2 inci boyutlarda birim olan tek bir $\mathbf{K}^3 \longrightarrow \mathbf{K}^2$ simplisel dönüşümü vardır. $\mathbf{K}^3$ ün $\mathbf{K}^2$ içindeki görüntüsü $\bar{\mathbf{K}}^3$ ile gösterilsin. $\mathbf{K}^3$ ün Moore kompleksinin 3 - boyuttu 0 dır. Buna göre $\bar{\mathbf{K}}^3$, Moore kompleksinin uzunluğu 2 olanbir pseudosimplisel cebirdir.

Şimdi herbir $\mathbf{K}$ pseudosimplisel cebirini aşağıdaki önermeyi sağlayacak şekilde bir $U^k\mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{K}$ içine dönüşümü ve $\mathbf{K} \longrightarrow V^k\mathbf{K}$ bölüm dönüşümü ile ilişkilendireceğiz.

(M_n, ∂_n), $\mathbf{K}$ nın Moore kompleksi olsun. Bu durumda $U^k\mathbf{K}$

$$\cdots \longrightarrow M_{k+0} \longrightarrow M_{k+2} \longrightarrow \text{Çek}\,(\partial_{k+1}) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Moore kompleksine sahiptir ve $V^k\mathbf{K}$

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathit{Gör}\,(\partial_{k+1}) \rightarrowtail M_k \longrightarrow M_{k-1} \longrightarrow \cdots$$

Moore kompleksine sahiptir. □

Önerme 4.2.2 Herhangi bir $\mathbf{K}$ pseudosimplisel cebiri için ve $k \geq 0$ tamsayısı için aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde pseudosimplisel cebirlerin bir

$$0 \longrightarrow U^k\mathbf{K} \xrightarrow{l} \mathbf{K} \xrightarrow{\phi} V^k\mathbf{K} \longrightarrow 0$$

funktorsal kısa tam dizisi mevcuttur.

(i) $U^k\mathbf{K}$ nın Moore kompleksi, $0, 1, ..., k$ boyutlarında aşikardır ve $k+2$ den büyük boyutlarda ise $\mathbf{K}$ nın Moore kompleksi ile aynıdır.

(ii) l dönüşümü, $n \geq k+1$ için homotopi gruplarının

$$\pi_n\left(U^k\mathbf{K}\right) \cong \pi_n\left(\mathbf{K}\right)$$

izomorfizmini indirger.

(iii) $V^k\mathbf{K}$ nın Moore kompleksi $k+2$ den büyük boyutlarda aşikardır ve k dan küçük boyutlarda ise $\mathbf{K}$ nın Moore kompleksi ile aynıdır.

İspat: İlk olarak $\mathbf{K}$ nın $Cosk^k\left(tr^k\mathbf{K}\right)$, k - yan iskeletini oluşturalım. $Cosk^k\left(tr^k\mathbf{K}\right)$ nın Moore kompleksi

$$\longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow C \overset{\partial_{k+1}}{\rightarrowtail} M_k \xrightarrow{\partial_k} M_{k-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\partial_1} M_0$$

biçimindedir. Burada ∂_{k+1} içine dönüşüm, C, ∂_k çekirdeği ve k dan küçük boyutlarda bu zincir, $\mathbf{K}$ nın Moore kompleksi ile çakışıktır. C, $\mathbf{K}_k$ da bir ideal olduğundan,

$$tr^k\mathbf{K}/\mathbf{C} = \{K_0, ..., K_{k-1}, K_k/C\}$$

k - parçalanmış pseudosimplisel cebirini elde etmek için $tr^k\mathbf{K}$ yi C ye bölebiliriz. Şimdi de $Cosk^k\left(tr^k\mathbf{K}/\mathbf{C}\right)$ k - yaniskeletini oluşturalım. k dan küçük olan boyutlarda $\mathbf{K}_k \longrightarrow \mathbf{K}_k/C$ bölüm dönüşümüne eşit olan bir tek

$$\mathbf{K} \longrightarrow Cosk^k\left(tr^k\mathbf{K}/\mathbf{C}\right)$$

simplisel dönüşümü mevcuttur; bu dönüşümün çekirdeğini $U^k\mathbf{K}$ ile gösterelim ve $\mathbf{K}$ nın $Cosk^k\left(tr^k\mathbf{K}/\mathbf{C}\right)$ içindeki görüntüsünüde $V^k\mathbf{K}$ ile gösterelim. Böylece pseudosimplisel cebirlerin

$$0 \longrightarrow U^k\mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{K} \longrightarrow V^k\mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{0}$$

kısa tam dizisi mevcuttur, bu homotopi modüllerinin bir

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(U^k\mathbf{K}) \longrightarrow \pi_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \pi_n(V^k\mathbf{K}) \longrightarrow \pi_{n-1}(U^{\mathbf{k}}\mathbf{K}) \longrightarrow \cdots$$

uzun tam dizisini indirger. □

Önerme 4.2.3 $\mathbf{K}$, her $n = 0, ..., k$ için $\pi_n\mathbf{K} = 0$ olacak şekilde bir pseudosimplisel cebir olsun. Bu durumda $\mathbf{F}$, $n = 0, ..., k$ için $\mathbf{F}_n = 0$ olacak şekilde ki bir serbest pseudosimplisel cebir olmak üzere bir $\mathbf{F} \simeq \mathbf{K}$ zayıf homotopi denkliği mevcuttur.

İspat: Önerme 4.2.2 (i) gereği ve pseudosimplisel özdeşlikler gereği $U^k\mathbf{K}$ pseudosimplisel cebiri k dan küçük olan boyutlarda aşikardır. Bir model kategorinin (Quillen, [8], bakınız) (M_2) aksiyomu gereği $\mathbf{F}$ bir serbest pseudosimplisel cebir olmak üzere bir $\mathbf{F} \simeq U^k\mathbf{K}$ zayıf denkliği mevcuttur. Böylece önermede istenen $\mathbf{F}$ oluşturulmuş olur. □

4.3 Pseudosiplisel Cebirlerin n-Tipleri

Bu bölümde çaprazlanmış n - tip kategorisinden pseudosimplisel cebir kategorisine giden bir funktor tanımlanacaktır.

4.3.1 Cat^n - Cebirler ve Çaprazlanmış n - Tipler

Ellis ve Steiner, [12], cat^n - gruplarının çaprazlanmış n - tiplere denkliğini göstermiştir.

A bir değişmeli cebir ve $1 \leq i \leq n$ için

$$s_i, t_i : A \to A$$

endomorfizmlerini ele alalım. Eğer

$$\begin{array}{llll} t_i s_i = s_i & & s_i t_i = t_i & \\ s_i s_j = s_j s_i & t_i t_j = t_j t_i, & s_i t_j = t_j s_i, & i \neq j \\ aa' = 0 & a \in \text{Çek} s_i, & a' \in \text{Çek} t_i. & \end{array}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa, $2n$ sayıdaki

$$s_i, t_i : A \to A$$

endomorfizmleri ile birlikte A değişmeli cebirine bir $\mathcal{A}$ cat^n cebiri denir. Cat^n cebirlerin bir $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ morfizmi ise s_i ve t_i leri koruyan bir $\phi : A \to A'$ cebir homomorfizmidir.

Porter, [38], bir cat^1 cebirin bir çaprazlanmış modüle ve cebirler kategorisindeki bir internal kategoriye denkliğini göstermiştir.

$A \subseteq < n >= \{1, ..., n\}$ için M_A komütatif cebirlerini ele alalım. Eğer $i \in < n >$ için

$$\mu_i : M_A \to M_{A-\{i\}}$$

homomorfizmleri ve $A, B \subseteq < n >$ için

$$h : M_A \times M_B \to M_{A \cup B}$$

fonksiyonları için aşağıdaki eşitlikler sağlanıyorsa bu μ_i homomorfizmleri ve h fonksiyonları ile birlikte M_A değişmeli cebir ailesine, komütatif cebirlerin bir çaprazlanmış n - tipi denir, her $k \in \mathbf{k}$, $a, a' \in M_A$, $b, b' \in M_B$, $c \in M_C$, $i, j \in < n >$ ve $A \subseteq B$ için

1)	$\mu_i a$	$= a$	$i \notin A$
2)	$\mu_i \mu_j a$	$= \mu_j \mu_i a$	
3)	$\mu_i h\,(a, b)$	$= h(\mu_i a, \mu_i b)$	
4)	$h(a, b)$	$= h(\mu_i a, b) = h(a, \mu_i b)$	$i \in A \cap B$
5)	$h(a, a')$	$= aa'$	
6)	$h(a, b)$	$= h(b, a)$	
7)	$h(a + a', b)$	$= h(a, b) + h(a', b)$	
8)	$h(a, b + b')$	$= h(a, b) + h(a, b')$	
9)	$k \cdot h(a, b)$	$= h(k \cdot a, b) = h(a, k \cdot b)$	
10)	$h(h(a, b), c)$	$= h(a, h(b, c)) = h(b, h(b, c))$.	

dir. $A \subseteq < n >$ için μ_i ve h ler ile birlikte

$$f_A : M_A \to M'_A$$

komütatif cebir homomorfizimlerinin ailesine çaprazlanmış n -tiplerin bir morfizmi denir. Böyle çaprazlanmış n - tiplerin bir kategorisi elde edilir $\mathbf{Crs}^n$ ile gösterilir.

Yardımcı teorem 4.3.1 $\mathcal{M} = \{M_A : A \subseteq < n >, \{\mu_i\}, h\}$ cebirlerin bir çaprazlanmış n - küpü olsun ve $i \in < n >$ olsun $\mathcal{M}_1$, $i \in A$ olmak üzere $\mathcal{M}$ nin A ya kısıtlamasını ve $\mathcal{M}_0$, $i \notin A$ olmak üzere $\mathcal{M}$ nin A ya kısıtlaması olsun. Bu durumda $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_0$, cebirlerin çaprazlanmış $(n-1)$ küpleridir ve $\mu_i : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_0$ ise cebirlerin $(n-1)$ küplerinin bir morfizmidir.

Seçilen n tane ideal ile birlikte bir cebire $(n+1) - ad$ ideali denir ve $(R; I_1, ..., I_n)$ ile gösterilir.

R, idealleri $I_1, ..., I_n$ olan bir ceir olsun $A \subseteq < n >$ ve $M_A = \cap\{I_i : i \in A\}$ olsun. Eğer $i \in < n >$ ise, M_A, $M_{A-\{i\}}$ nin bir idealidir.

$$\mu_i : M_A \to M_{A-\{i\}}$$

içine dönüşümü (inclusion) tanımlansın. Eğer $A, B \subseteq < n >$ ise,

$$M_{A \cup B} = M_A \cap M_B$$

dir, $h = M_A \times M_B \to M_{A \cup B}$, $M_A M_B \subseteq M_A \cap M_B$ olarak tanımlanmış çarpım ile verilsin, burada $a \in M_A$ ve $b \in M_B$ dir.

Bu durumda $\{M_A : A \subseteq < n >, \mu_i, h\}$ bir çaprazlanmış n - küptür, buna, değişmeli cebirlerin $(R; I_1, ..., I_n)$ $(n+1) - ad$ ideali ile verilen içine çaprazlanmış n - küp denir.

Aşağıdaki sonuç Arvasi ve Porter, [41], den elde edilmiştir.

Önerme 4.3.2 $(\mathbf{K}; I_1, ..., I_n)$ cebirlerin bir $(n+1) - ad$ pseudosimplisel ideali olsun ve $A \subseteq < n >$ için, $\mu_i : M_A \to M_{A-\{i\}}$ homomorfizimleri ve, her-bir seviyeye önceki örneğin uygulaması ile oluşturulan pseudosimplisel içine çaprazlanmış n - küp içinde karşı gelen dönüşümler vasıtasıyla indirgenmiş h - dönüşümleri ile birlikte $M_A = \pi_0(\cap_{i \in A} I_i)$ tanımlansın. Bu durumda $\{M_A : A \subseteq < n >, \mu_i, h\}$ bir çaprazlanmış n - küptür.

İzomorfizim farkıyla, bütün çaprazlanmış n - küpler bu yolla ortaya çıkar. Gerçekte herhangi bir çaprazlanmış n - küp, aşikar olmayan bir π_0 homotopi modülü içindeki bir $(n+1)-ad$ pseudosimplisel idealinden gelen bir π_0 pseudosimplisel içine çaprazlanmış n - küpü olarak elde edilebilir.

[42] da Arvasi, Koçak ve Alp, bir $\mathbf{E}$ simplisel cebiri için,

$$\pi_0\left(Dec\mathbf{E}; Ker\delta_0, ..., Ker\delta_{n-1}\right)$$

ile verilen bir

$$\mathbf{M}\left(-, \mathbf{n}\right) = \mathrm{Si}\,\mathbf{mpA}\,\mathrm{lg} \rightarrow \mathbf{Crs^n}$$

funktorunun var olduğunu ispatlamışlardır. Ayrıca

$$\mathrm{Si}\,\mathbf{mpA}\,\mathrm{lg} \overset{\mathcal{M}}{\rightarrow} \mathrm{Si}\,\mathbf{mp}\left(\mathbf{IncCrs^n}\right) \overset{\pi_0}{\rightarrow} \mathbf{Crs^n}$$

olmak üzere

$$\pi_0\left(\mathcal{M}\left(\mathbf{E}, n\right)\right) = \mathbf{M}\left(\mathbf{E}, n\right)$$

eşitliğinide göstermişlerdir ve *décalage* funktoru bir $\mathbf{E}$ simplisel cebirinin herbir seviyesindeki son yüz oparatörünü unutur ve herşeyi bir düşük seviyeye taşır. Bu *décalage* funktoru Dec ile gösterilir. Böylece $(DecE)_n = E_{n+1}$ dir.

Arvasi ve Porter, [41] dekine benzer şekilde bir $\mathbf{K}$ pseudosimplisel cebiri için aşağıdakileri söyleyebiliriz;

$$\mathbf{M}\left(-, \mathbf{n}\right) = \mathbf{PseudosimpA}\,\mathrm{lg} \rightarrow \mathbf{Crs^n}$$

funktoru vardır. Ayrıca

$$\mathbf{PseudosimpA}\,\mathrm{lg} \overset{\mathcal{M}}{\rightarrow} \mathbf{Pseudosimp}\left(\mathbf{IncCrs^n}\right) \overset{\pi_0}{\rightarrow} \mathbf{Crs^n}$$

olmak üzere

$$\pi_0\left(\mathcal{M}\left(\mathbf{K}, n\right)\right) = \mathbf{M}\left(\mathbf{K}, n\right)$$

sağlanır ve *décalage* funktoru bir $\mathbf{K}$ pseudosimplisel cebirinin herbir seviyesindeki son yüz oparatörünü unutur ve herşeyi bir düşük seviyeye taşır. Böylece $(DecK)_n = K_{n+1}$ dir.

4.3.2 $\mathbf{Crs}^n$ Kategorisinden PseudosimpAlg Kategorisine

$\mathcal{M} = (\partial : C \to R)$ bir çaprazlanmış modül olsun ve karşı gelen cat^1- cebir ise aşağıdaki şekilde verilsin; $S = C \rtimes R$ yarıdirekt çarpımı oluşturulsun, bu

$$(c, r)(c', r') = (rc' + r'c + c'c, rr')$$

ile birlikte yarıdirekt çarpım cebiri bir k - cebirdir. $d_0(c, r) = r$ ve $d_1(c, r) = r + \partial c$ ile tanımlanan iki adet

$$S \underset{d_1}{\overset{d_0}{\rightrightarrows}} R$$

homomorfizmi mevcuttur.(Porter, [37],)

Ayrıca $s : R \to S \quad s(r) = (0, r)$ morfizmide mevcuttur. Bunu bir iç (internal) kategori yapmak için $((c, r), (c', r'))$ ikilisi üzerinde bir $\circ$ birleşke işlemi tanımlanmaktadır. Bu ise

$$(c, r) \circ (c', r + \partial c) = (c + c', r)$$

ile verilir. Bileşke sırası

$$r \overset{(c,r)}{\to} r + \partial c \overset{(c', r+\partial c)}{\to} r + \partial(c + c')$$

biçimindedir. Bu yapı dönüşümlerinin tamamı k - cebir morfizmidir, böylece $\mathbf{A}\mathrm{lg}_k$ k - cebirlerin kategorisi içinde bir iç (internal) kategori oluşturur. Bu kategorinin siniri(nerve) bilinen yolla oluşturulabilir.

Köşelerinin kolleksiyonu, kategorinin objelerinin bir cebiridir, bu cebir R ile gösterilsin ve bunun n - simpliselleri okların n - lileridir. Bütün yüz ve dejenere dönüşümlerin cebir homomorfizmi olduğu ve bu sinirin bir pseudosimplisel cebir olduğu kolayca kontrol edilebilir. Bu pseudosimplisel cebiri

$$\mathbf{H}(\mathcal{M}) = (H_n, d_i, s_j)$$

ile gösterilsin. Verilen bir $\mathcal{M} = (C, R, \partial)$ çaprazlanmış modülü için bu pseudosimplisel cebirin yapısı,

$$\begin{aligned}
H_n &= C \rtimes (C \rtimes (... (C \rtimes R) ...)) && C \text{ nin } n \text{ kopyası} \\
d_0 (c_n, ..., c_1, r) &= (c_n, ..., c_2, r + \partial c_1) && \\
d_i (c_n, ..., c_1, r) &= (c_n, ..., c_{i+1}, c_i, ..., c_1, r) && 0 < i < n \text{ için} \\
d_n (c_n, ..., c_1, r) &= (c_{n-1}, ..., c_1, r) && \\
s_j (c_{n-1}, ..., c_1, r) &= (c_{n-1}, ..., 0, ..., c_1, r) && 0 \leq j \leq n-1
\end{aligned}$$

ile verilir, burada $\mathcal{M}$ nin birim elemanı $(j+1)$ inci durumda ortaya çıkar.

Eğer $\mathcal{M}$ bir çaprazlanmış n - küp ise, bir n- pseudosimplisel cebir elde etmek için $\mathcal{M}$ ye karşılık gelen cat^n - cebirinin n - bağımsız kategori yapısı kullanılabilir, bir pseudosimplisel cebir elde etmek için ise, bilinen işlem olan diagonal funktoru kullanılır.

$\mathbf{Crs^n}$ kategorisinden $\mathbf{PseudosimpA}$ lg kategorisine oluşan funktoru $H^{(n)}$ ile gösterelim.

Bu sinir funktorunun davranışını incelemek için bazı basit örnekler inceleyelim. Her bir durumda $\mathcal{M} = (\partial : C \to R)$ bir çaprazlanmış modül olsun.

(i) Eğer $C = 0$ ise, $\mathcal{M}$ sadece bir R cebiridir, bu durumda karşılık gelen iç(internal) kategori ayrıktır ve $\mathbf{H}(\mathcal{M})$ sabit $K(R, 0)$ pseudosimplisel cebirdir. Yani bütün boyutlar R, ve tüm yüz ve dejenere dönüşümler R nin birim dönüşümleridir.

(ii) Eğer $R = 0$ ise, $\mathcal{M}$, C modülüdür ve $\mathbf{H}(\mathcal{M})$, C nin kopyalarının bir n - li toplamı ile n boyutta verilir. Bir Moore kompleksin incelenmesi $\mathbf{H}(\mathcal{M})$ nin bir $K(C, 0)$ olduğunu gösterir ve $\pi_1(\mathbf{H}(\mathcal{M})) \cong C$ ve $i \neq 1$ için $\pi_i(\mathbf{H}(\mathcal{M}))$ dir.

Diğer örneklere bakmadan önce şunu belirtelim, eğer

$$0 \to \mathcal{M}_0 \to \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2 \to 0$$

çaprazlanmış n -küplerin bir tam dizisi ise,

$$0 \to \mathbf{H}^{(n)}(\mathcal{M}_0) \to \mathbf{H}^{(n)}(\mathcal{M}_1) \to \mathbf{H}^{(n)}(\mathcal{M}_2) \to 0$$

pseudosimplisel cebirlerin bir tam dizisidir.

(iii) Eğer $\partial : C \to R$ bir idealin içine dönüşümü ise,

$$\begin{array}{ccccc} C & \xrightarrow{=} & C & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle =}\downarrow & & {\scriptstyle \partial}\downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & R & \longrightarrow & R\backslash C \end{array}$$

bir tam dizisi olduğu için, $\mathbf{H}(\mathcal{M})$, $\mathbf{H}(C, C, =)$ fibresi ile birlikte bir $K(R/C, 0)$ üzerine izdüşen olarak elde edilir. Son pseudosimplisel cebir,

$$s_{-1}(c_{n-1}, ..., c_1, c_0) = (c_{n-1}, ..., c_1, c_0, 0)$$

ile verilen bir ekstra dejenere ye sahiptir. Böylece $\mathbf{H}(\mathcal{M})$, $K(R/C, 0)$ a doğal homotopi denktir.(Yani, $\mathbf{H}(\mathcal{M}) \to K(R/C, 0)$ bir triviyal fibrasyondur.)

Bu örnekleri kullanarak, genelde $\mathbf{H}(\mathcal{M})$ nin homotopi tipi üzerine bilgi kazandırabiliriz.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Çek}\partial & \longrightarrow & C & \longrightarrow & \text{Gör}\partial \\ \downarrow & & {\scriptstyle \partial}\downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & R & \longrightarrow & R \end{array}$$

kısa tam dizisini ele alalım, buradan,

$$\mathbf{H}(\mathcal{M}_0) \to \mathbf{H}(\mathcal{M}) \to \mathbf{H}(\mathcal{M}_2)$$

kısa tam dizisi elde edilir. Burada $\mathcal{M}_0 = (\text{Çek}\partial \to 0)$, $\mathcal{M}_2 = (\text{Gör}\partial \to R)$ dir. Hesaplamalar sonucunda $\mathbf{H}(\mathcal{M}_0) \cong K(\text{Çek}\partial, 0)$ ve $\mathbf{H}(\mathcal{M}_2) \simeq K(R/\text{Gör}\partial, 0)$ elde edilir. Hem homotopi denklikleri hemde izomorfizimler doğal dönüşümlerdir.

Şimdi de

$$M = \begin{pmatrix} L & \xrightarrow{\lambda} & M \\ {\scriptstyle\lambda'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mu} \\ N & \xrightarrow[\nu]{} & R \end{pmatrix}$$

çaprazlanmış karesini ele alalım. Heriki yöndeki sinir funktorunu kullanmak

$$H_{p,q} \cong (L^p \rtimes N)^q \rtimes (M^p \rtimes R)$$

ile verilen $(H_{p,q})$ bisimplisel cebirini verir. Burada $L \rtimes L \rtimes ... \rtimes L$ (p- kez) için L^p yazılmıştır.

Bu bisimplisel cebir, diagonali olarak $H^{(2)}(\mathcal{M})$ ye sahiptir. Böylece, $H^{(2)}(\mathcal{M})$ nin homotopi modüllerini incelemek için spektral dizi teknikleri kullanılabilir. Fakat bu metodlar burada yeteri kadar iyi sonuç vermez, burada, bir boyutta gördüğümüz fibrasyon dizisi, tam dizi metodları daha kullanışlıdır.

Şimdi,

$$\mathbf{M}(-, n) : \mathbf{PseudosimpA}\lg \to \mathbf{Crs^n}$$

ve

$$\mathbf{H} : \mathbf{Crs^n} \to PseudosimpA\lg .$$

funktorları elde edilmiş olur.

Önerme 4.3.3 Eğer $\mathbf{K}$ bir pseudosimplisel cebir ise ve $n \geq 0$ ise, büzülebilir çekirdeği ile birlikte, bir

$$\mathbf{HM}(\mathbf{K}, n) \to t_{n]}\mathbf{K}$$

epimorfizmi mevcuttur.

İspat: $n = 0$ için

$$\mathbf{HM}(\mathbf{K}, 0) \cong \pi_0(\mathbf{K}) \cong t_{0]}\mathbf{K}$$

olup açıktır.

$n = 1$ için ise,

$$\mathbf{M}(\mathbf{K}, 1) = \left(\frac{\text{Çek}d_0^1}{\text{Çek}d_0^1 \text{Çek}d_1^1} \overset{d_1^1}{\to} K_0 \right)$$

olup

$$\left(t_{1]}\mathbf{K}\right)_1 \cong \frac{NK_1}{d_2 NK_2} \rtimes s_0(K_0)$$

elde edilir. Böylece bu hal için $\mathbf{HM}(\mathbf{K}, 1)$ den $t_{i]}\mathbf{K}$ ya bir izomorfizim vardır. Bu şekilde 0 ve 1 boyuttaki izomorfizimler yüksek boyutlara dejenere dönüşümleri yardımıyla genişletilebilirler.

Daha sonraki kullanım için, $\mathbf{M}(\mathbf{K}, 1)$, çaprazlanmış 0 - küplerin bir çaprazlanmış modülü olarak ayrım(split up) yapılabilir, bunu

$$\mu_1 : \mathbf{M}\left(t_{0]}E, 0\right) \to \mathbf{M}\left(t_{0]}Dec\mathbf{K}, 0\right)$$

ile gösterelim. Burada

$$\mu_n : \mathbf{M}(E, n-1) \to \mathbf{M}(Dec\mathbf{K}, n-1)$$

genel durumu gereklidir. Böylece tümevarım ilkesi ile çaprazlanmış modül yapısı ile uyumlu olan ve büzülebilir bir çekirdeğe sahip olan bir

$$H^{(n-1)}\mathbf{M}(\mathbf{K}, n-1) \to t_{n-1]}\mathbf{K} \tag{4.1}$$

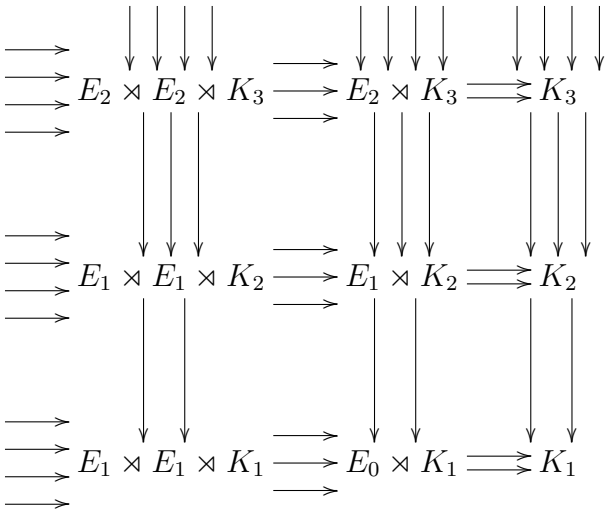
doğal epimorfizminin varlığı elde edilir.

$H^{(n-1)}$ in (4.1) durumuna uygulanması ile

$$\begin{array}{ccc} H^{(n-1)}\mathbf{M}(E, n-1) & \xrightarrow{\simeq} & t_{n-1]}E \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{(n-1)}M(Dec\mathbf{K}, n-1) & \longrightarrow & t_{n-1]}Dec\mathbf{K} \end{array}$$

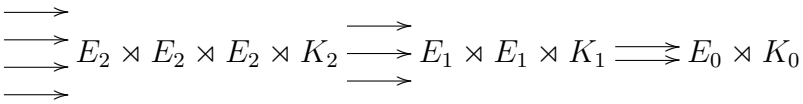
diyagramı elde edilir. Burada yatay dönüşümler aşikar fibrasyonları, dikey dönüşümler ise çaprazlanmış modülleri verir.

Şimdi bu çaprazlanmış modül yapılarının sinirini ele alalım. Bu, bisimplisel cebirlerin bir dönüşümünü verir. Diagonalın sol tarafı $K^{(n)}\mathbf{M}(\mathbf{K}, n)$ yi verir. Sağdaki bisimplisel cebirden ise aşağıdaki diyagram elde edilir. (düşük boyutlarda)



$$K_n \cong E_{n-1} \rtimes K_{n-1}$$

ayrışımı (decomposition) kullanılarak



elde edilir. Ayrıca tüm d_i ve s_j lerin açık tanımlarını vermek ve bu pseudosimplisel cebirden $t_{n]}\mathbf{K}$ ya ($t_{n-1]}E \rtimes t_{n-1]}Dec\mathbf{K}$ ya izomorfik) bir siplit epimorfizmi bulmak kolaydır. Bu epimorfizmin çekirdeği tüm $e_i \in E_n$ olmak üzere tüm $(e_n, ..., e_0, 0)$ lardan oluşan, n boyuttaki alt pseudosimplisel cebirdir. Ekstra dejenere

$$s_{-1}(e_n, ..., e_0, 0) = (s_0 e_n, ..., s_0 e_0, 0, 0)$$

bu çekirdek üzerine doğal bir büzülme olarak etki eder.

$$\mathcal{M}_n : \mathbf{PseudosimpA}\,\mathrm{lg} \to \mathbf{PseudosimpA}\,\mathrm{lg}\,(\mathbf{IncCrs^n})$$

funktoru içinde benzer bir sonuç vardır. Arvasi ve Porter, [41], dekine benzer şekilde tanımlı $\mathcal{QM}_n \cong Id$ olacak şekilde bir

$$\mathcal{Q} : \mathbf{PseudosimpA}\,\mathrm{lg}\,(\mathbf{IncCrs^n}) \to \mathbf{PseudosimpA}\,\mathrm{lg}$$

funktoru mevcuttur.

$$H^{(n)} : \mathbf{Crs^n} \to \mathbf{PseudosimpA}\,\mathrm{lg}$$

funktorunu kullanarak

$$sH^{(n)} : \mathbf{Pseudosimp}\,(\mathbf{IncCrs^n}) \to \mathbf{BisimpA}\,\mathrm{lg}$$

elde edilir ve böylece bisimplisel cebirlerden pseudosimplisel cebirlere giden diagonal funktordan elde edilen bir

$$\mathcal{D}^{(n)} = diagsH^{(n)}$$

funktoru elde edilir. (Artin ve Mazur, [22],) □

Önerme 4.3.4 Bir

$$\mathcal{D}^{(n)} \to \mathcal{Q}$$

doğal epimorfizmi mevcuttur. Öyleki, $\mathcal{M}$ çaprazlanmış n - küpün herhangi bir pseudosimplisel içine dönüşümü için

$$\mathcal{D}^{(n)}\mathcal{M} \to \mathcal{QM}$$

bir büzülebilir çekirdeğe sahiptir. Özel olarak herhangi bir $\mathbf{K}$ pseudosimplisel cebiri için $\mathcal{D}^{(n)}\mathcal{M}_n\,(\mathbf{K})$, $\mathbf{K}$ ya homotopi denktir.

İspat: $n = 0$ için açıktır. $n = 1$ için dikkat edilecek önemli nokta, şudur; Eğer C, R nin bir ideali ise $\partial : C \to R$ içine dönüşümü ile birlikte, $\mathbf{H}(C, R, \partial)$,

$$\mathbf{H}(C, C, =) \to \mathbf{H}(C, R, \partial) \xrightarrow{\varphi} \mathbf{H}(0 \to R/C)$$

tam dizisini sağlar. Böylece φ, büzülebilir çekirdeğe sahip bir epimorfizimdir. Bunun bir pseudosimplisel içine çaprazlanmış $\mathcal{M}$ modülüne uygulanması ile, bisimplisel cebirlerin bir

$$\mathbf{H}(\mathcal{M}) \to \mathbf{H}(0 \to \mathcal{Q}(C))$$

epimorfizmi elde edilir.

$\mathbf{H}(0 \to \mathcal{Q}(C))$ bir sabit pseudosimplisel cebir olduğundan,

$$\mathcal{D}^{(n)}(0 \to \mathcal{Q}(C)) \cong \mathcal{Q}(C)$$

dir. φ nin çekirdeği iki yönünden biri içinde büzülebilirdir ve böylece bir büzülebilir pseudosimplisel cebir bulunur.

$\mathcal{M}$ bir pseudosimplisel içine çaprazlanmış n - küp ise, n - inci yön

$$\mu_n : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_0$$

modülünü ele alarak

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{M}_1 & \xrightarrow{=} & \mathcal{M}_1 & \longrightarrow & 0 \\
{\scriptstyle =}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu_n} & & \downarrow \\
\mathcal{M}_1 & \xrightarrow[\mu_n]{} & \mathcal{M}_0 & \longrightarrow & Co\ker \mu_n
\end{array}$$

biçiminde bir tam dizi oluşturulabilir. $H^{(n)}$ tam olduğu için $\mathcal{D}^{(n)}$ de tamdır. Böylece

$$\mathcal{D}^{(n)}(C) \to \mathcal{D}^{(n)}(0 \to Co\ker \mu_n)$$

doğal büzülebilir çekirdeğe sahip bir epimorfizimdir.

Buna rağmen

$$\mathcal{D}^{(n)}\left(0 \to Co\ker\mu_n\right) \cong \mathcal{D}^{(n-1)}\left(Co\ker\mu_n\right)$$

dir ve $Co\ker\mu_n$ pseudosimplisel içine çaprazlanmış $(n-1)$ küptür. Hiotezden, $\mathcal{D}^{(n-1)}\left(Co\ker\mu_n\right)$ den $\mathcal{Q}\left(\mathcal{M}\right)$ ye giden doğal dönüşüm doğal olarak büzülebilir bir çekirdeğe sahip bir epimorfizimdir. Böylece $\mathcal{D}^{(n)}\left(\mathcal{M}\right)$ den $\mathcal{Q}\left(\mathcal{M}\right)$ ye bileşkede büzülebilir çekirdeğe sahiptir. $\square$

Kaynaklar

[1] A. Mutlu, Peiffer Pairings in the Moore Complex of a Simplicial Group, *Ph. D. Thesis, University of Wales, BANGOR*, (1997).

[2] Barr, M., and J. Beck: Homology and standard constructions. *Springer Lecture Notes in Mathematics* No. 80 (1969)

[3] D. Conduche, Modules Croises Generalises de Longueur, *2. Jour. Pure Appl. Algebra*, 34 (1984) 155-178.

[4] D. M. Kan, A Combinatorial Definition of Homotopy Groups, *Annals of Maths.*, 61, 288-312, (1958).

[5] D. Quillen, On the homology of commutative rings, *Porc. Sympos. Pure Math* 17, (1970).

[6] D. G. Quillen, Spectral sequences of a double semi-simplicial group, *Topology* 5 (1966) , 155 -157. MR 33 # 3302.

[7] D. G. Quillen, Cohomology of groups and algebraic K - theory, *Invited hour adress presented at the 77th Annual Meeting of the Amer. Math. Soc., Atlantic City, N. J., January* 1971.

[8] D. Quillen, Homotopical Algebra, *Lecture Notes in Math.* 43 (Springer, New York, 1967).

[9] E.R. Aznar, Cohomologia no abeliana in categorieas de interés, *Ph.D. Thesis*, *Universidad de Santiago de Compostela, Alxebra* 33 (1981)

[10] F. Keune, Homotopical Algebra and Algebraic K-theory, *Thesis, Universiteit van Amsterdam*, (1972).

[11] G.J. Ellis , Crossed Modules and Their Higher Dimensional Analogues, *Ph.D. Thesis, U.C.N.W.*, (1984)

[12] G.J. Ellis and R. Steiner, Higher Dimensional Crossed Modules and the Homotopy groups of (n+1)-ads. , *J. Pure and Applied Algebra*, 46, 117-136, (1987).

[13] G.J. Ellis , Homotopical Aspects of Lie Algebras, *J.Austral. Math. Soc. (SeriesA)*, 54 (1993) 393 - 419

[14] H. N. Inasaridze, Homotopy of pseudosimplicial groups and non-abelian derived functors, *Sakharth. SSR Mecn. Akad. Moambe* 76 (1974), 533-536. (Russian)

[15] I. A. Volodin, Algebraic K - theory as an extraordinary homology theory on the category of associative rings with a unit, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat* 35 (1971), 884 - 873 = Math. USSR Izv. 5 (1971), 859 - 887. MR 45 # 5201.

[16] J. L. Castiglioni and M. Ladra, Peiffer Elements in Simplicial Groups and Algebras, *Preprint submitted to Elsevier Science,* 24 February 2006.

[17] J. H. C. Whitehead, Combinatorial Homotopy I and II, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55, 231-245 and 453-496, (1949).

[18] J.L. LODAY., Spaces with finitely many non - trivial homotopy groups, *J. Pure Appl. Algebra,* 24 (1982) 179 - 202.

[19] K. Reidemeister, Über Identitaten von Relationen, *Abh. Math. Sem. Univ. hamburg* 16, pp. (114-118), (1949).

[20] M. Andre,.É, Homologie des algébres commutatives, *Die Grundlehren der mathematischen Wisssenschaften in Einzeldarstellungen*, Band 206, Springer-Verlag, (1974).

[21] M. Andre, Homologie des Algebres Commutatives*, Lecture Notes in Math.*, Springer, 206, (1970).

[22] M. ArTIN and B. MAZUR, Etale homotopy, *Lecture Notes in Maths, Springer-Verlag,* 100, (1968).

[23] M.Gerstenhaber. On the Deformation of Rings and Algebras, *Ann. Math.* **84** (1966).

[24] Max Karoubi and Orlando Villamayor, Foncteurs K^n en algebre et en topologie, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser.* A-B 269 (1969) , A416 - A419. MR 40 # 4944.

[25] C. Morgenegg, Sur les invariants d'un anneau local á corps résiduel de caractéristique 2, *Ph.D. thesis,* Lausanne EPFL (1979).

[26] Myles Tierney and Wolfgang Vogel, Simplicial resolutions and derived functors, *Math.Z.* 111 (1969), 1-14. MR 40 # 2733.

[27] P. Carrasco and A.M. Cegarra, Group-theoretic Algebraic Models for Homotopy Types, *Jour. Pure Applied Algebra,* **75**, 195-235, (1991).

[28] P. J: Ehlers and T. Porter, Varietes of Simplicial Gruboids, I: Crossed Complexes, *Jour. Pure Appl. Algebra, (to appear).*

[29] R. G. Swan, Some relations between higher K - functors, *J. Algebra* 21 (1972), 113 - 136. MR 47 # 1916.

[30] R. G. Swan, Nonabelian homological algebra and K - theory, *Proc. Sympos. Pure Math., vol. 17, Amer. Math. Soc., Providence,* R.I., 1968, pp. 88 - 123. MR 41 # 1839.

[31] R. Peiffer, Über Identitaten zwischen Relationen, *Math. Ann.* 121, pp. (67-99), (1949).

[32] R. Brown, and J. L. Loday, Van Kampen Theorems for diagram of spaces, *Topology*, 26, 311-335, (1987).

[33] Samuel Eilenberg and J. C. Moore, Foundations of relative homological algebra, *Mem. Amer. Math. Soc.,* No. 55 (1965). MR 31 # 2294.

[34] S.Lichtenbaum and M.Schlessinger The Cotangent Complex of a Morphism, *Trans. American Society*, **128,** 41-70, (1967).

[35] S. M. Gersten, On the functors K_2. *I. J. Algebra* 17 (1971), 212 - 237. MR 45 # 1992.

[36] S. M. Gersten, On Mayer - Vietoris functors and algebraic K - theory, *J. Algebra* 18 (1971), 51 -88. MR 43 # 6290.

[37] T.Porter. Homology of Commutative Algebras and an Invariant of Simis and Vasconceles, *J. Algebra* **99,** 458-465, (1986).

[38] T.Porter. Some categorical results in the theory of crossed modulesin commutative algebras, *J. Algebra* **109,** 415-429, (1987).

[39] Z. Arvasi, Applications in commutative algebra of Moore complex of simplicial algebra, *Ph.D. Thesis,* University of Wales, Bangor, (1994).

[40] Z. Arvasi,.and T. Porter, Simplicial and Crossed Resolutions of Commutative Algebras, *Journal of Algebra*, 181, 426-448, (1996).

[41] Z. Arvasi and T. Porter, Freness Conditions for 2-Crossed Modules of Commutative Algebras, *Applied Categorical Structures,* Vol. 6, 455-471, (1998).

[42] Z. Arvasi,M. KOCAK and M. ALP, A Combınatorıal definition of n - types of sımplicial commutative algebras, *Tr. Journal of Mathematics*, 22, 243-271, (1998).