l_p-normlu Uzaylarda İnversiyon Dönüşümünün Özellikleri

Ali Osman Şen

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı

Aralık 2022

Properties of Inversion Mapping in l_p-normed Spaces

Ali Osman Şen

MASTER OF SCIENCE

Deparment of Mathematics - Computer

December 2022

l_p-normlu Uzaylarda İnversiyon Dönüşümünün Özellikleri

Ali Osman Şen

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Temel Ermiş

Aralık 2022

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Temel Ermiş danışmanlığında hazırlamış olduğum "l_p-normlu Uzaylarda İnversiyon Dönüşümünün Özellikleri" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 28/12/2022

Ali Osman Şen

ÖZET

Bu tezde, l_1-normlu düzlemde elipslere göre ve aynı zamanda l_2-normlu düzlemde süper elipslere göre inversiyon dönüşümü tanımlanmış ve geometrik özellikleri verilmiştir. Ayrıca l_1-normlu düzlemde taksi çembere göre bir noktanın inversiyon dönüşümü altında görüntüsünün Öklidyen çember kullanılarak nasıl bulunabileceği sentetik olarak sunulmuştur.

Birinci bölümde tezin giriş ve amacından bahsedilmiştir. İkinci bölümde tezin konusu ile ilgili literatür araştırmasına yer verilmiştir. Üçüncü bölümde l_1 ve l_2-normlu uzaylar ile ilgili temel tanım ve kavramlar hatırlatılmıştır. Dördüncü bölümde l_1 ve l_2-normlu düzlemde elipslerin ve l_2-normlu düzlemde süper elipslerin genel özellikleri verilmiştir. Beşinci bölümde l_1 ve l_2-normlu düzlemde çembere göre inversiyon dönüşümü ile ilgili bilinen tanım ve teoremler hatırlatılmıştır. Çalışmanın orijinal kısımlarından biri olan bu bölümün son kısmında l_1-normlu çembere göre inversiyon dönüşümü l_2-normlu çemberin özellikleri kullanılarak tanımlanmış ve sentetik bir inşa verilmiştir. Altıncı bölümde l_2-normlu uzaylarda elipse göre inversiyon dönüşümü ile ilgili bilinen tanım ve teoremlerden bahsedilmiştir. Bu bölümün diğer kısımlarında sırasıyla l_1-normlu düzlemde elipslere göre ve l_2-normlu düzlemde süper elipslere göre inversiyon dönüşümü tanımlanmış ve sentetik bir inşa sunulmuştur.

Anahtar kelimeler: l_1-Normlu Uzay, l_2-Normlu Uzay, İnversiyon Dönüşümü, Süper Elipsler

SUMMARY

In this thesis, inversion mapping is defined with respect to ellipses in l_1-normed spaces and super ellipses in l_2-normed plane and their geometric properties are investigated. It is also given a synthetic approach how the find image of a point with respect to the taxicab circle in l_1-normed plane under the inversion mapping using the Euclidean circle.

In the first chapter, the introduction and purpose of the thesis is mentioned. In the second chapter, the literature research related to the subject of the thesis is given. In the third part, the basic definitions and concepts of l_1 and l_2-normed spaces are reminded. In the fourth chapter, general properties of ellipses in l_1 and l_2-normed plane, and super ellipses in l_2-normed plane are given. In the fifth chapter, well-known definitions and theorems about the inversion mapping are defined with respect to circle in l_1 and l_2-normed plane. In the last part of this chapter, which is one of the original parts of the study, the inversion mapping is defined with respect to circle in l_1-normed plane using the properties of the circle in l_2-normed plane and a synthetic construction is given. In the sixth chapter, well-known definitions and theorems about the inversion mapping is given with respect to ellipse in l_2-normed plane. In the other parts of this chapter, the inversion mapping is defined with respect to ellipses in l_1-normed plane and super ellipses in l_2-normed plane, respectively, and a synthetic construction is presented.

Key Words: l_1-Normed Plane, l_2-Normed Plane, Inversion Mapping, Super Ellipses

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET . . . . . **vi**

SUMMARY . . . . . **vii**

TEŞEKKÜR . . . . . **viii**

İÇİNDEKİLER . . . . . **ix**

ŞEKİLLER DİZİNİ . . . . . **x**

1. GİRİŞ VE AMAÇ **1**

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI **2**

3. TEMEL KAVRAMLAR **4**

4. ELİPS **10**
4.1. Öklidyen Elips 10
4.2. Taksi Elipsler 19
4.3. Süper Elipsler 32

5. ÇEMBERE GÖRE İNVERSİYON DÖNÜŞÜMÜ **37**
5.1. Öklidyen Çembere Göre İnversiyon Dönüşümünün Özellikleri 38
5.2. Taksi Çembere Göre İnversiyon Dönüşümünün Sentetik Ve Analitik Özellikleri 56
5.3. Öklidyen Çember Kullanılarak Taksi Çembere Göre İnversiyon Dönüşümünün Sentetik Ve Analitik İnşası 72

6. ELİPSE GÖRE İNVERSİYON DÖNÜŞÜMÜ **81**
6.1. Öklidyen Elipse Göre İnversiyon Dönüşümünün Özellikleri 81
6.2. Taksi Elipslere Göre İnversiyon Dönüşümünün Sentetik Ve Analitik Özellikleri 101
6.3. Süper Elipslere Göre İnversiyon Dönüşümünün Sentetik Ve Analitik Özellikleri 130

7. BULGULAR VE TARTIŞMA **146**

8. SONUÇ VE ÖNERİLER **147**

KAYNAKLAR DİZİNİ **148**

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil **Sayfa**

3.1 İki Nokta Arasındaki Öklidyen Uzaklık 5
3.2 İki Nokta Arasındaki Taksi Uzaklık 6
3.3 Merkezil Taksi Birim Çember 7
3.4 Taksi Elipsler 8
3.5 $a = b$ ve $n = 0.5, 1, 1.5, 2, 3, 5$ İçin Süper Elipsler 9
3.6 $a \neq b$ ve $n = 0.5, 1, 1.5, 2, 3, 5$ İçin Süper Elipsler 9

4.1 Öklidyen Düzlemde Merkezil Elips 11
4.2 $E_{d_E}[F_1, F_2, 9]$ Öklidyen Elips 12
4.3 $E_{d_E}[F_1, F_2, 7]$ Öklidyen Elips 13
4.4 $E_{d_E}[F_1, F_2, 10]$ Öklidyen Elips 13
4.5 $E_{d_E}[F_1, F_2, 6]$ Öklidyen Elips 14
4.6 $E_{d_E}[F_1, F_2, 9]$ Öklidyen Elipsin Sentetik İnşası 15
4.7 $E_{d_E}[F_1, F_2, 9]$ Öklidyen Elipsin Sentetik İnşası 16
4.8 $E_{d_E}[F_1, F_2, 7]$ Öklidyen Elipsin Sentetik İnşası 16
4.9 $E_{d_E}[F_1, F_2, 10]$ Öklidyen Elipsin Sentetik İnşası 17
4.10 $E_{d_E}[F_1, F_2, 6]$ Öklidyen Elipsin Sentetik İnşası 17
4.11 $E_{d_E}[F_1, F_2, 5]$ Öklidyen Elipsin Sentetik İnşası 18
4.12 $E_{d_T}[F_1, F_2, 9]$ Taksi Elips 21
4.13 $E_{d_T}[F_1, F_2, 7]$ Taksi Elips 24
4.14 $E_{d_T}[F_1, F_2, 10]$ Taksi Elips 26
4.15 $E_{d_T}[F_1, F_2, 9]$ Taksi Elipsin Sentetik İnşası 27
4.16 $E_{d_T}[F_1, F_2, 9]$ Taksi Elipsin Sentetik İnşası 28
4.17 $E_{d_T}[F_1, F_2, 7]$ Taksi Elipsin Sentetik İnşası 28
4.18 $E_{d_T}[F_1, F_2, 10]$ Taksi Elipsin Sentetik İnşası 29
4.19 $E_{d_T}[F_1, F_2, 9]$ Taksi Elipsin Pratik İnşası 30
4.20 $E_{d_T}[F_1, F_2, 9]$ Taksi Elipsin Pratik İnşası 30
4.21 $E_{d_T}[F_1, F_2, 7]$ Taksi Elipsin Pratik İnşası 31
4.22 $E_{d_T}[F_1, F_2, 10]$ Taksi Elipsin Pratik İnşası 31
4.23 Sergels Torg (Gielis, 2017) 32
4.24 C. Utilis Bitkisinin Kesitleri (Huang vd., 2020) 33
4.25 $n = 3$ ve $n = 4$ İçin Lamé Eğrileri 34
4.26 $a = b$ ve $n = 0.5$ İken Süper Elips 35
4.27 $a = b$ ve $n = 1.5$ İken Süper Elips 36

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

4.28 $a = b$ ve $n = 3$ İken Süper Elips 36

5.1 Peaucellier Cell 37
5.2 C nin İçindeki Bir P Noktasının İnversi 39
5.3 C nin Dışındaki Bir P Noktasının İnversi 40
5.4 İnversiyon Dönüşümü Altında $\triangle OPS$ ve $\triangle OS'P'$ Benzerliği 41
5.5 O dan Geçmeyen Bir l Doğrusunun İnversi 42
5.6 O dan Geçmeyen Bir α Çemberinin İnversi 43
5.7 C ye Dik Olan Bir β Çemberinin İnversi 44
5.8 C ye Dik Olan Bir γ Çemberi 45
5.9 O nun l Doğrusu Üzerinde Olması Durumu 46
5.10 O nun l Doğrusu Üzerinde Olmaması Durumu 46
5.11 γ Yayına P Noktasında Teğet Olan t Işını 47
5.12 $\gamma\,(P, K)$ Çember Yayı Ve $\overrightarrow{PS}$ Işını Arasındaki Açı 47
5.13 $\gamma\,(P, K)$ ve $\gamma'\,(P, D)$ Çember Yayları Arasındaki Açı 48
5.14 İnversiyon Dönüşümü Altında Açıların Korunması 49
5.15 İnversiyon Dönüşümü Altında Çember Yayları Arasındaki Açının Korunması . 50
5.16 Taksi Düzlemde İki Üçgen Arasındaki Benzerlik 58
5.17 C_T nin Dışında x Veya y Ekseninde Olan Bir P Noktasının İnversi 59
5.18 C_T nin Dışında x Veya y Ekseninde Olmayan bir P Noktasının İnversi 60
5.19 C_T nin İçinde x Veya y Ekseninde Olan Bir P Noktasının İnversi 61
5.20 C_T nin İçinde x Veya y Ekseninde Olmayan Bir P Noktasının İnversi 62
5.21 O dan Geçmeyen Bir Doğrunun İnversi 69
5.22 O Merkezli Bir Taksi Çemberin İnversi 70
5.23 O dan Geçen Bir Taksi Çemberin İnversi 70
5.24 O dan Geçmeyen Bir Taksi Çemberin İnversi 71
5.25 O dan Geçmeyen Taksi Koniklerin İnversleri 72
5.26 C_T nin Dışında Olan Bir P Noktasının C ye Göre İnversinin İnşası 74
5.27 C_T nin İçinde Olan Bir P Noktasının C ye Göre İnversinin İnşası 75

6.1 E nin Dışındaki Bir P Noktasının İnversi 82
6.2 E nin Dışındaki Bir P Noktasının İnversinin İnşası 83
6.3 E nin İçindeki Bir P Noktasının İnversinin İnşası 84
6.4 E nin İçindeki Bir P Noktasının İnversi 84
6.5 P, T ve O Doğrudaş Olmaması Halinde $d_E\,(P', T')$ Arasındaki Uzaklık 86
6.6 Düzlemde Keyfi Alınan Bir P Noktasının İnversinin Koordinatları 90
6.7 O dan Geçmeyen Bir l Doğrusunun İnversi 93

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

6.8 Birbirine Dik Olan l_1 ve l_2 Doğrularının İnversleri 95
6.9 Birbirine Dik Olan l_1 ve l_2 Doğrularının İnversleri 95
6.10 E de O dan Farklı Bir H Noktasından Geçen Doğruların İnversleri 96
6.11 E de O dan Geçmeyen Birbirine Paralel Doğruların İnversleri 96
6.12 O dan Geçmeyen E ye Homotetik Olan Bir χ Elipsinin İnversi 98
6.13 O dan Geçen E ye Homotetik Olan Bir χ Elipsinin İnversi 98
6.14 E ye Homotetik Olan Bir χ Elipsinin İnvaryantlığı 99
6.15 O dan Geçmeyen Koniklerin İnversleri 100
6.16 E_T nin Dışında x Veya y Ekseninde Olan Bir P Noktasının İnversi 102
6.17 E_T nin Dışında x Veya y Ekseninde Olmayan Bir P Noktasının İnversi 103
6.18 E_T nin İçinde x Veya y Ekseninde Olan Bir P Noktasının İnversi 104
6.19 E_T nin İçinde x Veya y Ekseninde Olmayan Bir P Noktasının İnversi 105
6.20 E_T ye Homotetik Olan Altıgen χ Elipsinin İnversi 124
6.21 E_T ye Homotetik Olan Sekizgen χ Elipsinin İnversi 125
6.22 E_T ye Homotetik Olan Dikdörtgensel χ Elipsinin İnversi 126
6.23 O dan Geçmeyen Bir Doğrunun İnversi 127
6.24 O dan Geçen Bir Taksi Elipsin İnversi 128
6.25 O dan Geçmeyen Bir Taksi Elipsin İnversi 128
6.26 O dan Geçmeyen Taksi Koniklerin İnversleri 129
6.27 S nin Dışındaki Bir P Noktasının İnversi 131
6.28 S nin İçindeki Bir P Noktasının İnversi 132
6.29 P, T ve O Doğrudaş Olmaması Halinde $d_E(P', T')$ Arasındaki Uzaklık 137
6.30 S ye Homotetik Olan χ Elipsinin İnversi 142
6.31 O dan Geçmeyen Bir Doğrunun İnversi 144
6.32 O dan Geçen Bir $S-$elipsin İnversi 144
6.33 O dan Geçmeyen Bir $S-$elipsin İnversi 145
6.34 O dan Geçmeyen Koniklerin İnversleri 145

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Uzaklık kavramı matematikte her zaman ilgi çekici konulardan biri olmuştur. Matematikte uzaklık fonksiyonu, fiziksel uzaklık kavramının bir genelleştirmesidir. Bu fonksiyon tanımlandığı kümeye uygun davranarak bu kümedeki öğelerin "birbirlerine ne kadar yakın" veya "birbirlerinden ne kadar uzak" olduklarını açıklar. Literatürde en sık görülen uzaklık fonksiyonu Öklidyen uzaklıktır ve Pisagor teoreminden elde edilir. Ancak Öklidyen uzaklık gerçek dünyada mesafeyi ölçmede pek kullanışlı olmayan bir uzaklık fonksiyonudur. Bu anlamda, analitik düzlemde keyfi olarak alınan $P = (x_p, y_p)$ ve $Q = (x_q, y_q)$ noktaları arasındaki Öklidyen uzaklık

$$d_E(P,Q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$$

yerine K. Menger tarafından

$$d_T(P,Q) = |x_p - x_q| + |y_p - y_q|$$

taksi uzaklığı tanıtılmıştır (Menger, 1952). Aslında taksi uzaklık fonksiyonu, $X = (x_1, \ldots, x_n)$ ve $Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için l_p-norm olarak bilinen

$$\|X - Y\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$p-$normun $p = 1$ için özel bir halidir. Daha sonraki yıllarda E. F. Krause tarafından taksi geometri geliştirilmiştir (Krause, 1975). Taksi geometrisinin lineer yapısı Öklidyen geometri ile aynıdır. Noktalar, doğrular ve açılar gibi kavramlar aynı olup tek fark uzaklık fonksiyonunun değişmesidir. Bu tarz geometrilere Minkowski geometri adı verilmekte olup taksi geometri de bir Minkowski geometrisidir.

Bu anlamda, uzaklığa bağlı Öklidyen kavramların taksi geometrideki invaryantlığını (değişmezliğini) incelemek geometrik açıdan oldukça önemlidir. Öklid geometrisinde uzaklığa bağlı önemli kavramlardan biri de inversiyon dönüşümüdür.

Bu çalışmanın temel amacı inversiyon dönüşümünü l_1-normlu uzaylarda elipslerde ve l_2-normlu uzaylarda süper elipslerde tanımlayarak bu dönüşümünün geometrik özelliklerini incelemektir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Literatürde inversiyon dönüşümünün nasıl başladığı ile ilgili bir kaynağa rastlanmamakla birlikte inversiyon dönüşümü muhtemelen ilk olarak Pergalı Apollonius (M.Ö. 225 - 190) tarafından tanıtılmıştır. İnversiyon dönüşümünün sistematik araştırması, 1820' lerde Jakob Steiner (1796 - 1863) ile başlamıştır. Daha sonraki yıllarda, birçok fizikçi ve matematikçi bağımsız olarak inversiyon dönüşümü ile ilgili çalışmalar yapmıştır. 1855 yılında August F. Möbius, inversiyon dönüşümünü ilk kez kapsamlı olarak ele almış ve Mario Pieri, konuyu 1910' ların başlarında "New Principles of the Geometry of Inversions" adlı eserinde aksiyomatik ve sistematik olarak geliştirmiştir (Kozai ve Libeskind, 2009).

Ayrıca literatürde inversiyon dönüşümü ile ilgili yapılan çalışmalar incelendiğinde, 2012 yılında Gerard A. Venema tarafından yazılan "The Foundations of Geometry" adlı eserin 10. bölümünde inversiyon dönüşümü ile ilgili temel, anlaşılabilir ve hemen hemen tüm özelliklerin olduğu bir bölüme yer verilmektedir (Venema, 2012). Daha sonraki yıllarda inversiyon dönüşümü ile ilgili şu temel eserlere rastlanmaktadır;

2014 yılında Bayar ve Ekmekçi "On circular inversions in taxicab plane" adlı çalışmalarında, inversiyon dönüşümünü taksi düzlemde çembere göre incelemiş ve bu dönüşümü taksi uzaklığa bağlı olarak tanımlamışlardır. Ayrıca taksi çembere göre inversiyon dönüşümü altında çifte oran ve harmonik eşleniklerin korunduğunu göstermişlerdir (Bayar ve Ekmekçi, 2014).

2014 yılında Ramírez ve Rubanio "A geometrical construction of inverse points with respect to an ellipse" adlı çalışmalarında, inversiyon dönüşümünü Öklidyen düzlemde çemberin genellemesi olan elipse göre tanımlayarak sentetik bir inşa vermişlerdir (Ramírez ve Rubanio, 2014).

2014 yılında Ramírez "Inversions in an Ellipse" adlı çalışmasında, inversiyon dönüşümünü Öklidyen elipse göre tanımlayarak çember dışında bir eğri için de inversiyon dönüşümünün tanımlanabileceğini göstermiştir. Ayrıca elipse göre inversiyon dönüşümü altında çifte oran ve harmonik eşlenikleri incelemiş, elipse göre inversiyon dönüşümü altında doğruların ve çemberlerin görüntülerini vermiştir (Ramírez, 2014).

2014 yılında Sezgin "Öklidyen Düzlemde ve Taksi Düzlemde Evritim Üzerine" adlı yüksek lisans tez çalışmasında, taksi düzlemde çembere göre inversiyon dönüşümünü

tanımlayarak sentetik ve analitik bir inşa vermiştir. Ayrıca taksi çemberde inversiyon dönüşümü altında doğruların görüntülerini incelemiştir (Sezgin, 2014).

2019 yılında Gelişgen ve Ermiş “Some Properties of Inversions in Alpha Plane” adlı çalışmalarında, inversiyon dönüşümünü alpha düzlemde çembere göre tanımlamış ve geometrik özelliklerini incelenmişlerdir. Ayrıca alpha düzlemde çembere göre inversiyon dönüşümünün çifte oran ve harmonik eşlenikleri koruduğunu göstermişlerdir (Gelişgen ve Ermiş, 2019).

3. TEMEL KAVRAMLAR

Matematikte, uzaklık denilince genel olarak akla gelen ilk uzaklık fonksiyonu Öklidyen uzaklıktır. Ancak uzaklık fonksiyonunun değişimi farklı metrik uzayları da ortaya çıkarır. Bu farklı metrik uzaylarda birçok geometrik ve topolojik çalışmalar yapılmıştır. Kısaca metrik uzayı hatırlatmak gerekirse aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 3.1 *X boştan farklı bir küme olmak üzere,*

$i)$ *Her* $x, y \in X$ *için* $d(x,y) \geq 0$ *ve* $d(x,y) = 0 \iff x = y$

$ii)$ *Her* $x, y \in X$ *için* $d(x,y) = d(y,x)$

$iii)$ *Her* $x, y, z \in X$ *için* $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

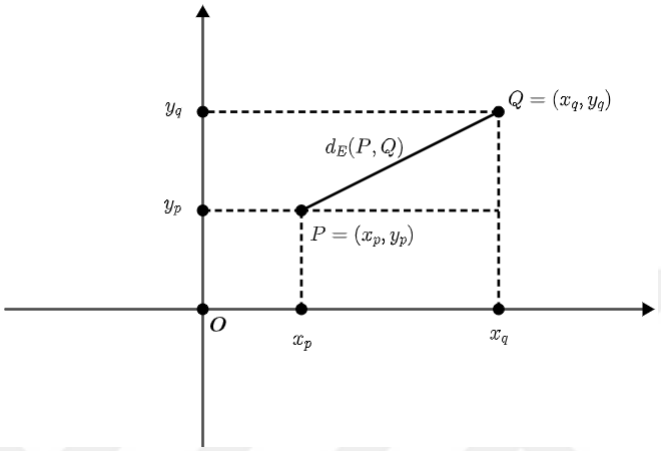
koşullarını sağlayan $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *fonksiyonuna* X *üzerinde bir metrik ve* (X,d) *ikilisine de bir metrik uzay denir.*

Metrik uzayın en iyi bilinen örneği $(\mathbb{R}^2, d_E)$ metrik uzayıdır. Burada d_E Öklidyen uzaklık fonksiyonu olup, adını antik Yunan matematikçi Öklid' den almıştır. Öklid' in binyıllar boyunca geometride standart bir ders kitabı haline gelen "Elements" isimli kitabında iki nokta arasındaki uzaklık aslında bir sayı olarak ifade edilmemiş olup, bunun yerine "doğru parçalarının denkliği", "doğru parçalarının uzunluklarının karşılaştırılması" ve "oran" gibi kavramlar yardımıyla dolaylı olarak ifade edilmiştir. Aslında, M.Ö. 330 - 275 yılları arasında yaşamış İskenderiyeli matematikçi Öklid' den öncede uzaklık ve mesafe kavramlarının kullanıldığı görülmektedir. M.Ö. yaklaşık 4000 li yıllarda Sümer' den kalan Uruk dönemine (Protoliterate dönemi) ait belgelerde uzaklık kavramına rastlanmaktadır (Hoyrup, 2018). Düzlemde iki nokta arasındaki Öklid uzaklığı, iki nokta arasındaki bir doğru parçasının uzunluğudur. Bu uzunluk, Pisagor teoremi kullanılarak noktaların kartezyen koordinatlarından hesaplanabilir. Bu nedenle Öklid uzaklığına bazen Pisagor mesafeside denir. Pisagor teoremi, 1637 yılında René Descartes' ın kartezyen koordinat sistemi buluşundan daha önce biliniyor olmasına rağmen uzaklık ölçümündeki merkezi rolünü bu teoremden sonra almıştır. Pisagor teoremine dayalı olarak Öklid uzaklığının formülüzasyonu ilk olarak A. Clairaut tarafından 1731 yılında tanımlanmıştır (Maor, 2019).

Analitik düzlemde keyfi olarak alınan $P = (x_p, y_p)$ ve $Q = (x_q, y_q)$ noktaları arasındaki Öklidyen uzaklık

$$\begin{array}{rcccl} d_E & : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & [0, \infty) \\ & & (P, Q) & \mapsto & d_E(P, Q) = \left[(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 \right]^{1/2} \end{array}$$

şeklinde tanımlıdır (Şekil 3.1).



Şekil 3.1 İki Nokta Arasındaki Öklidyen Uzaklık

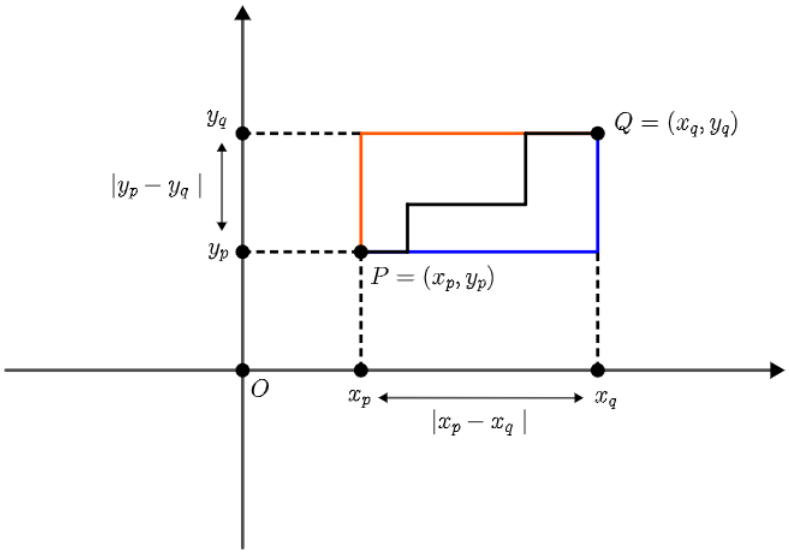
Uzaklık ya da mesafe kavramı üzerine konuşulduğunda bir çok insanın esasen kastettiği veya anladığı şey Öklidyen uzaklığıdır. Bu durum istemsizce herkes tarafından kabul edilen bir antlaşma/gerçek gibidir. Halbuki, asıl gerçek insanoğlunun Öklidyen $3-$uzay $(\mathbb{R}^3)$ da değil küresel bir Dünyada yaşadığıdır. Öklidyen uzaklık, en popüler ve en çok bilinen mesafe fonksiyonu olmasına rağmen, gerçek dünyada hareket ettiğimiz mesafeyi ölçmede hiçte pratik değildir. Uzaklık reel dünyadaki kentsel coğrafyada fiziksel engellerden kaçması gereken bir aracın (taksinin) izleyeceği yolda katedilen mesafenin bir ölçüsü olmalıdır. Öklid mesafesinin reel dünyadaki bu dezavantajından dolayı, reel dünyada bir yerden başka bir yere gitmek için yatay ve dikey sokakları kullanan bir taksinin izleyeceği yolun ölçümüne dayalı bir uzaklık fonksiyonun kullanılması daha gerçekci ve mantıklıdır. Bu anlamda, düzlemde keyfi $P = (x_p, y_p)$ ve $Q = (x_q, y_q)$ noktaları için K. Menger tarafından

$$\begin{array}{rcccl} d_E & : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & [0, \infty) \\ & & (P, Q) & \mapsto & d_E(P, Q) = \left[(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 \right]^{1/2} \end{array}$$

Öklidyen uzaklık fonksiyonu yerine

$$\begin{array}{rcccl} d_T & : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & [0, \infty) \\ & & (P, Q) & \mapsto & d_T(P, Q) = |x_p - x_q| + |y_p - y_q| \end{array}$$

taksi uzaklık fonksiyonu tanıtılmıştır (Menger, 1952), (Şekil 3.2).



Şekil 3.2 İki Nokta Arasındaki Taksi Uzaklık

Teorem 3.1 $\mathbb{R}^2$ *de taksi uzaklık fonksiyonu bir metriktir.*

İspat $P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ *olsun. Mutlak değer tanımı gereği* $|x_1 - x_2| \geq 0$ *ve* $|y_1 - y_2| \geq 0$ *olduğu için*

$$d_T(P, Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \geq 0$$

dır. Diğer bir taraftan

$$d_T(P, Q) = 0 \Longrightarrow |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 0$$

olduğu için $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2| = 0$ *olarak bulunur. Dolayısıyla* $x_1 = x_2$ *ve* $y_1 = y_2$ *olur. Yani* $P = Q$ *dur. Buradan görülür ki* $P = Q$ *ise* $d_T(P, Q) = 0$ *dır. Bu durumda* $d_T(P, Q) = 0 \Longleftrightarrow P = Q$ *olduğu açıktır. Buradan taksi uzaklığının pozitif tanımlı olduğu görülür. Benzer şekilde mutlak değer özelliği gereğince*

$$\begin{aligned} d_T(P, Q) &= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \\ &= |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \\ &= d_T(Q, P) \end{aligned}$$

olduğundan $d_T(P,Q) = d_T(Q,P)$ *dir. Böylelikle taksi uzaklığının simetrik olduğu açıktır. Son olarak* $Q = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ *olsun. Mutlak değer özelliği gereğince*

$$\begin{aligned} d_T(P,Q) &= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \\ &= |(x_1 - x_3) + (x_3 - x_2)| + |(y_1 - y_3) + (y_3 - y_2)| \\ &\leq |x_1 - x_3| + |y_1 - y_3| + |x_3 - x_2| + |y_3 - y_2| \\ &= d_T(P,S) + d_T(S,Q) \end{aligned}$$

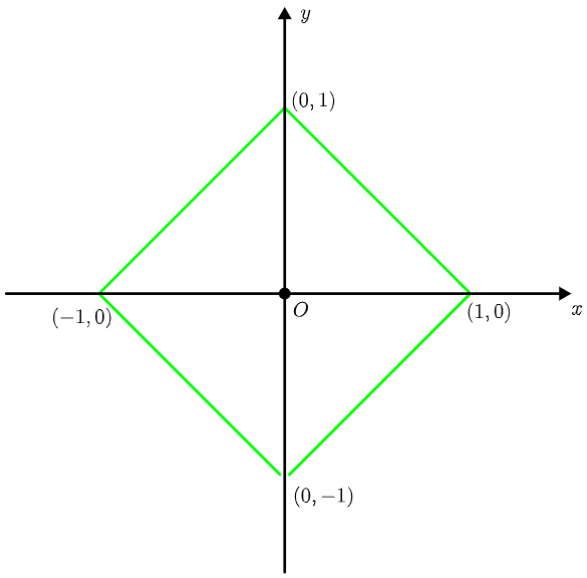
olarak bulunur. Yani taksi uzaklığı üçgen eşitsizliği özelliğini sağlar. Buradan şu sonuca ulaşılır ki taksi uzaklık, $\mathbb{R}^2$ *de bir metriktir.*

Matematikte uzaklık fonksiyonu değiştikçe (farklı tanımlandıkça) uzaklığa bağlı olarak tanımlanan şekillerin formlarının da değişeceği açıktır. Örneğin,

$\mathbb{R}^2$ de merkezil taksi birim çember

$$|x| + |y| = 1$$

denklemini sağlayan noktalar kümesidir (Şekil 3.3).



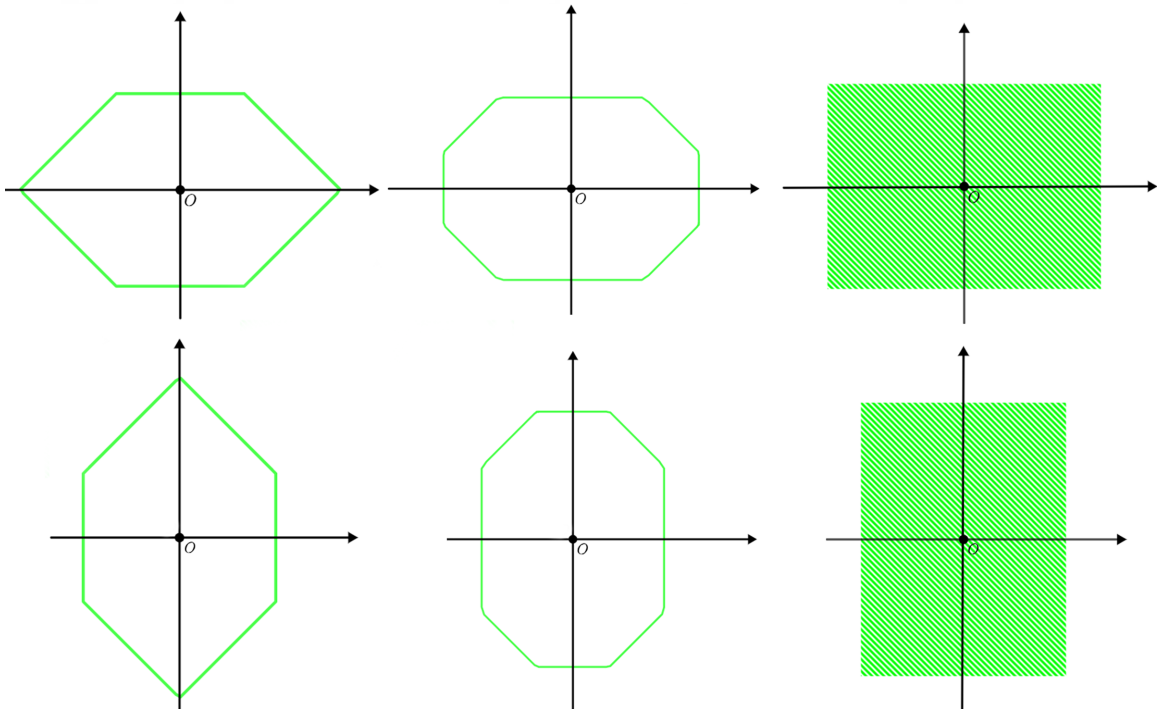
Şekil 3.3 Merkezil Taksi Birim Çember

Benzer şekilde elips de uzaklığa bağlı bir kavramdır. Taksi uzaklığa bağlı olarak elips aşağıdaki gibi tanımlanır.

$\mathbb{R}^2$ de $\lambda \geq 0$ olmak üzere $F_1 = (x_1, y_1)$ ve $F_2 = (x_2, y_2)$ odak noktalarına taksi uzaklıkları toplamı sabit olan noktaların kümesi olarak belirlenen taksi elips

$$\begin{aligned} E_{d_T}[F_1, F_2, \lambda] &= \{X = (x, y) \mid d_T(X, F_1) + d_T(X, F_2) = \lambda,\ \lambda \geq 0\} \\ &= \{(x, y) \mid |x - x_1| + |y - y_1| + |x - x_2| + |y - y_2| = \lambda, \lambda \geq 0\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı noktalar kümesidir. Taksi elips, Öklidyen elipsden farklı olarak üç farklı formda ortaya çıkar. Detaylarına bir sonraki bölümde yer verilecek olan bu formların nasıl göründüğü Şekil 3.4 de gösterilmiştir.



Şekil 3.4 Taksi Elipsler

Aslında taksi uzaklık fonksiyonu $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için l_p-norm olarak bilinen

$$\|X - Y\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

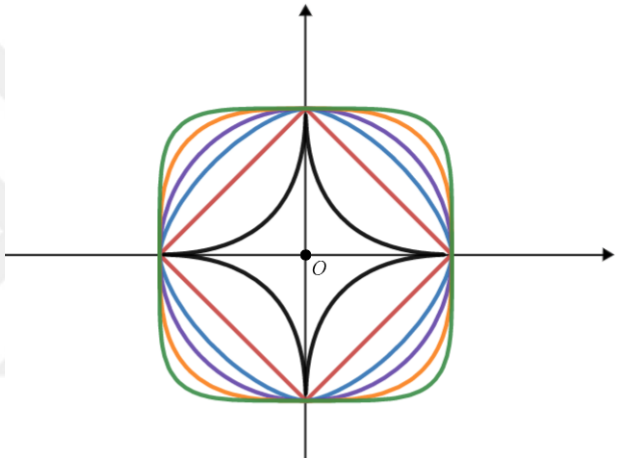
$p-$normun $p = 1$ için özel bir halidir. Daha sonraki yıllarda E. F. Krause tarafından geliştirilen taksi geometrisinin lineer yapısı aslında Öklidyen geometri ile aynıdır. Yani noktalar, doğrular ve açı ölçümü aynıdır. Tek fark uzaklık fonksiyonun değişmesidir. Bu tip

geometrilere Minkowski geometri adı verilmektedir. Bu anlamda taksi geometrinin temel uğraşı, Öklidyen geometride uzaklığa bağlı kavramların, tanımların ve teoremlerin d_E uzaklık fonksiyonu yerine d_T uzaklık fonksiyonu alınarak nasıl değiştiğinin ya da aynı kaldığının belirlenmesi olduğu söylenebilir.

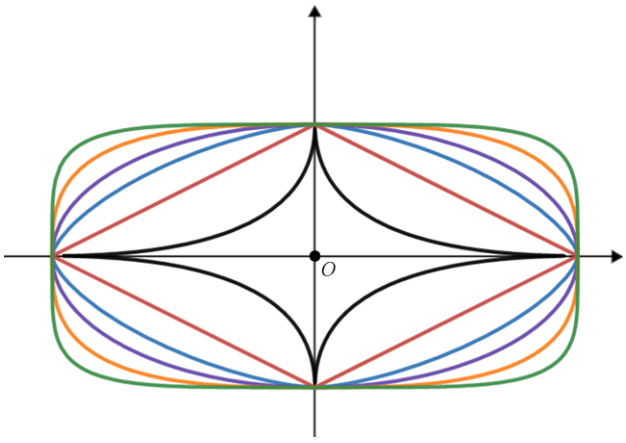
Yukarıda anlatılanlara benzer mantıkla l_p-normlu düzlemde çemberler, uzaklık fonksiyonuna bağlı olarak kare ile çember arasında değişen formlarda ortaya çıkar. Bu çemberler, aslında denklemi

$$\left|\frac{x}{a}\right|^n + \left|\frac{y}{b}\right|^n = 1$$

olan süper elipslerin özel bir halidir. Yani, n, a ve b pozitif reel sayılar olmak üzere ve $a = b$ iken süper elipsler l_p-normlu düzlemde çemberlere karşılık gelir (Şekil 3.5, Şekil 3.6).



Şekil 3.5 $a = b$ ve $n = 0.5, 1, 1.5, 2, 3, 5$ İçin Süper Elipsler



Şekil 3.6 $a \neq b$ ve $n = 0.5, 1, 1.5, 2, 3, 5$ İçin Süper Elipsler

4. ELİPS

Bilindiği gibi elips oval bir şekil olup, düzlemde keyfi olarak verilen ve odaklar olarak adlandırılan iki noktaya uzaklıkları toplamı sabit olan noktaların geometrik yeridir. Metrik geometrinin en önemli unsuru olan uzaklık fonksiyonu değiştikçe (farklı olarak tanımlandıkça) Öklidyen geometride uzaklık kavramına dayalı (geometrik) objelerin şekil değiştireceği çok açıktır. Bu anlamda, farklı uzaklık fonksiyonlarına dayalı olarak aşağıda sırasıyla iki odaklı Öklidyen, taksi ve süper elipsler hatırlatılacaktır.

4.1 Öklidyen Elips

Tanım 4.1 *Düzlemde keyfi $F_1 = (x_1, y_1)$ ve $F_2 = (x_2, y_2)$ noktaları verilsin. $\lambda \geq 0$ olmak üzere; F_1 ve F_2 noktalarına Öklidyen uzaklıkları toplamı λ olan Öklid elipsi*

$$E_{d_E}[F_1, F_2, \lambda] = \{X = (x, y) \mid d_E(X, F_1) + d_E(X, F_2) = \lambda,\ \lambda \geq 0\}$$

şeklinde tanımlı noktalar kümesidir. Burada F_1 ve F_2 noktalarına elipsin odak noktaları, $\overline{F_1F_2}$ doğru parçasının uzunluğuna elipsin odakları arasındaki uzaklık denir ve $\delta \geq 0$ olmak üzere $d_E(F_1, F_2) = \delta$ şeklinde gösterilir.

Özel olarak, $a > b$ olmak üzere köşeleri $A = (a, 0)$, $A' = (-a, 0)$, $B = (0, b)$ ve $B' = (0, -b)$ noktaları olan merkezil elipsin (orjine göre simetrik elips) $\overline{AA'}$ doğru parçasına elipsin asal eksen uzunluğu, $\overline{BB'}$ doğru parçasına elipsin yedek eksen uzunluğu denir ve sırasıyla $d_E(A, A') = 2a$, $d_E(B, B') = 2b$ şeklinde gösterilir. Asal eksen üzerinde bulunan, odak noktaları $F_1 = (-c, 0)$ ve $F_2 = (c, 0)$ olan merkezil elipsin odak noktaları arasındaki uzaklık $d_E(F_1, F_2) = 2c$ olup $d_E(X, F_1) + d_E(X, F_2) > d_E(F_1, F_2)$ eşitsizliğinden dolayı $a > c$ olmalıdır. Bu merkezil elips $\lambda = 2a$ olmak üzere

$$\begin{aligned} E_{d_E}[F_1, F_2, 2a] &= \{X \mid d_E(X, F_1) + d_E(X, F_2) = 2a,\ 2a \geq 0\} \\ &= \left\{(x, y) \mid \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a\right\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı olup,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

eşitliği düzenlenip her iki tarafın karesi alınırsa

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

olarak bulunur. Burada gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 - 4xc$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte gerekli sadeleştirmeler yapılıp her iki tarafın karesi alınırsa

$$a^2\left(x^2 - 2xc + c^2 + y^2\right) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

sonucuna ulaşılır. Gerekli düzenleme ve sadeleştirmeler yapıldığında

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + x^2c^2$$

olur. Buradan düzenlemeler ile

$$x^2\left(a^2 - c^2\right) + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right)$$

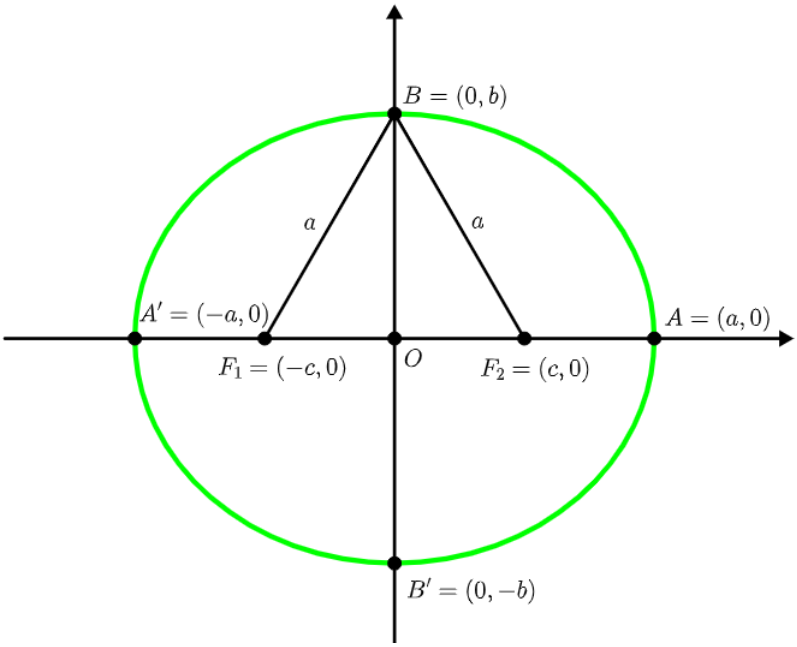
olduğu görülür. $a^2 - c^2 = b^2$ eşitliği kullanıldığında

$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

elde eldilir. Dolayısıyla her iki taraf a^2b^2 ye bölünürse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

şeklindeki bilinen formuna indirgenebilir (Şekil 4.1).



Şekil 4.1 Öklidyen Düzlemde Merkezil Elips

Simetri merkezi (m,n) noktasında bulunan bir elipsin denklemi de

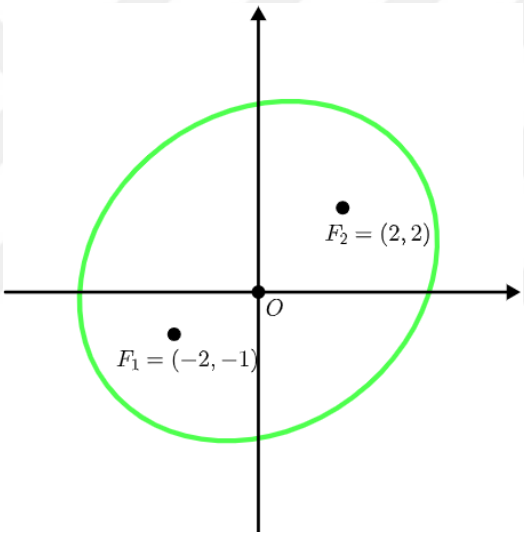
$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

şeklindedir.

Örnek 4.1 *Odak noktaları* $F_1=(-2,-1)$, $F_2=(2,2)$ *ve* $\lambda=9$ *olmak üzere* $E_{d_E}[F_1,F_2,\lambda]=\{X=(x,y)\mid d_E(X,F_1)+d_E(X,F_2)=9\}$ *Öklidyen elipsin denklemi*

$$d_E(X,F_1)+d_E(X,F_2)=\sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=9$$

eşitliğinden gerekli sadeleştirmeler yapılırsa $260x^2+48x-96xy+288y^2-288y-4464=0$ *olarak bulunur (Şekil 4.2).*

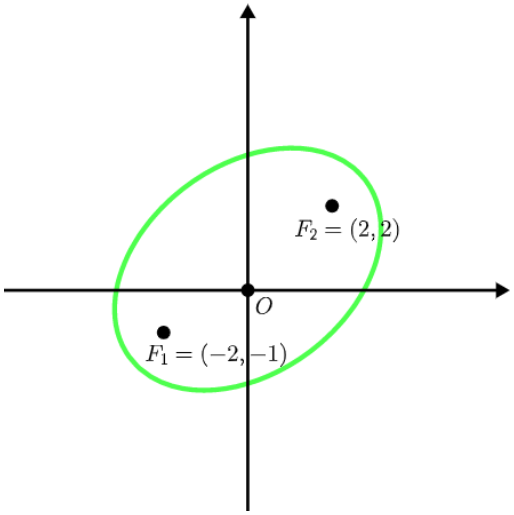


Şekil 4.2 $E_{d_E}[F_1,F_2,9]$ Öklidyen Elips

Örnek 4.2 *Odak noktaları* $F_1=(-2,-1)$, $F_2=(2,2)$ *ve* $\lambda=7$ *olmak üzere* $E_{d_E}[F_1,F_2,\lambda]=\{X=(x,y)\mid d_E(X,F_1)+d_E(X,F_2)=7\}$ *Öklidyen elipsin denklemi*

$$d_E(X,F_1)+d_E(X,F_2)=\sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=7$$

eşitliğinden gerekli sadeleştirmeler yapılırsa $132x^2+48x-96xy+160y^2-160y-1136=0$ *olarak bulunur (Şekil 4.3).*

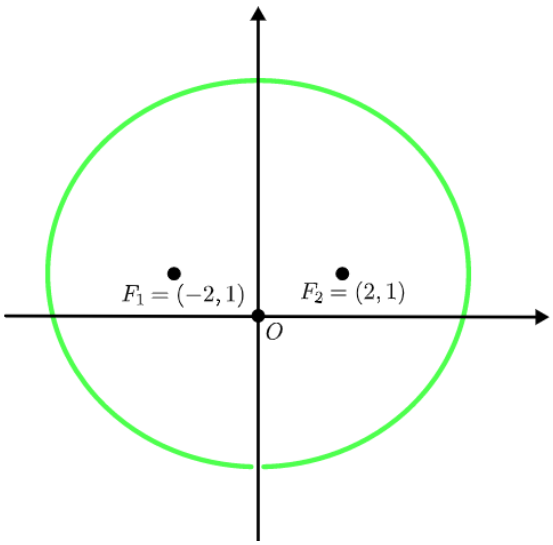


Şekil 4.3 $E_{d_E}[F_1, F_2, 7]$ Öklidyen Elips

Örnek 4.3 *Odak noktaları* $F_1 = (-2,1)$, $F_2 = (2,1)$ *ve* $\lambda = 10$ *olmak üzere* $E_{d_E}[F_1, F_2, \lambda] = \{X = (x,y) \mid d_E(X, F_1) + d_E(X, F_2) = 10\}$ *Öklidyen elipsin denklemi*

$$d_E(X, F_1) + d_E(X, F_2) = \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = 10$$

eşitliğinden gerekli sadeleştirmeler yapılırsa $21x^2 + 25y^2 - 50y - 500 = 0$ *olarak bulunur (Şekil 4.4).*

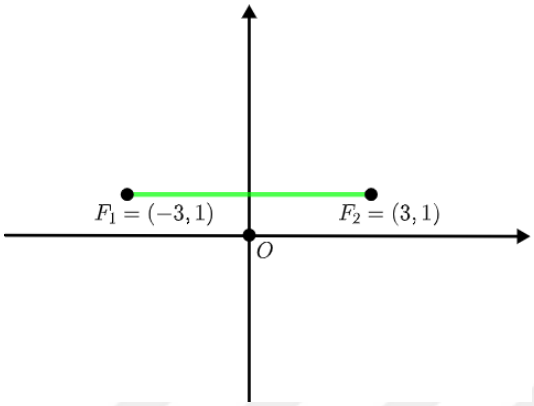


Şekil 4.4 $E_{d_E}[F_1, F_2, 10]$ Öklidyen Elips

Örnek 4.4 *Odak noktaları* $F_1 = (-3,1)$, $F_2 = (3,1)$ *ve* $\lambda = 6$ *olmak üzere* $E_{d_E}[F_1, F_2, \lambda] = \{X = (x,y) \mid d_E(X, F_1) + d_E(X, F_2) = 6\}$ *Öklidyen elipsin denklemi*

$$d_E(X, F_1) + d_E(X, F_2) = \sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = 6$$

eşitliğinden gerekli sadeleştirmeler yapılırsa $y^2 - 2y + 1 = 0$ *olarak bulunur (Şekil 4.5).*



Şekil 4.5 $E_{d_E}[F_1, F_2, 6]$ Öklidyen Elips

Örnek 4.5 *Odak noktaları* $F_1 = (-3,1)$, $F_2 = (3,1)$ *ve* $\lambda = 5$ *olmak üzere* $E_{d_E}[F_1, F_2, \lambda] = \{X = (x,y) \mid d_E(X, F_1) + d_E(X, F_2) = 5\}$ *şeklinde tanımlı Öklidyen elipsi yoktur. Çünkü*

$$d_E(X, F_1) + d_E(X, F_2) = 5 \not> d_E(F_1, F_2) = \sqrt{(-3-3)^2 + (1-1)^2} = 6$$

dır.

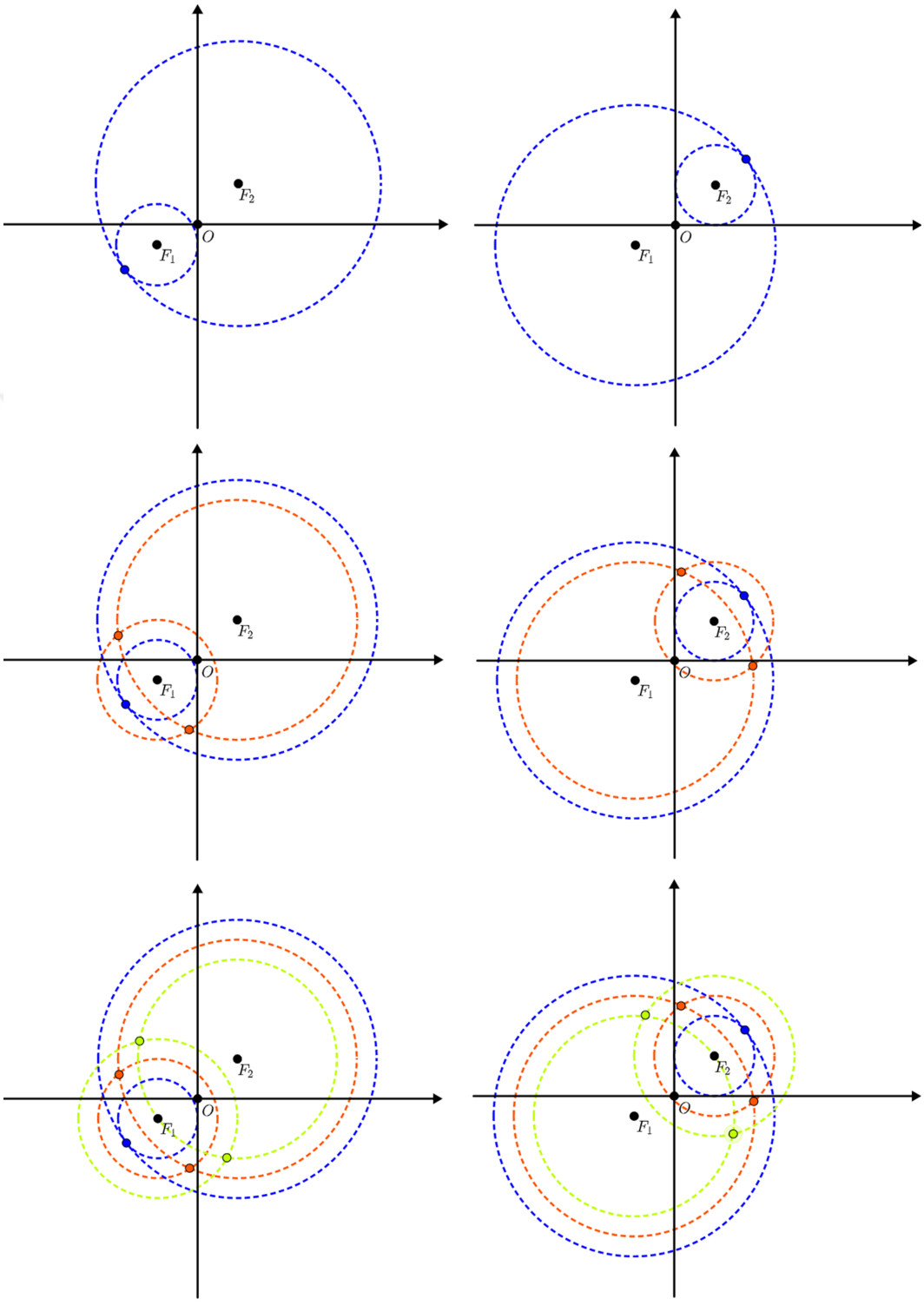
Yukarıdaki örneklerden de görüleceği üzere elipsi, tanım ve bu tanımdan elde edilen denklemlere göre ortaya koymak vakit alıcı bir süreçtir. Bu anlamda, herhangi bir elipsi kısmen daha basit bir şekilde ortaya koymak adına E. F. Krause tarafından sentetik bir yöntem verilmiştir (Krause, 1975). Bu yöntem aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Sentetik Yöntem Kullanılarak Öklidyen Elips Oluşturma

Düzlemde odak noktaları $F_1 = (x_1, y_1)$, $F_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ve $\lambda \geq 0$ olmak üzere, $\{X = (x,y) \mid d_E(X, F_1) + d_E(X, F_2) = \lambda, \lambda \geq 0\}$ Öklidyen elips aşağıdaki sentetik yöntemle oluşturulur;

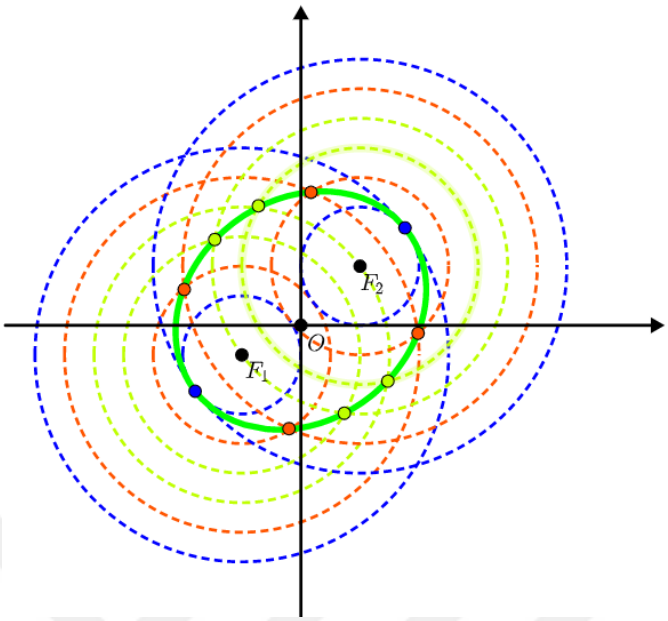
$r_1 + r_2 = \lambda$ olmak üzere, yarıçapları r_1 ve r_2, merkezleri sırasıyla F_1 ve F_2 olan çemberler çizilir. $r_1 + r_2 = \lambda$ için çizilen bu çemberlerin kesişim noktaları birleştirilirse sentetik olarak $E_{d_E}[F_1, F_2, \lambda]$ elipsi belirlenmiş olur.

Örnek 4.6 *Odak noktaları* $F_1 = (-2,-1)$ *ve* $F_2 = (2,2)$ *olan* $E_{d_E}[F_1, F_2, 9]$ *Öklidyen elipsi için yukardaki sentetik yöntem Şekil 4.6 daki gibi uygulanırsa;*



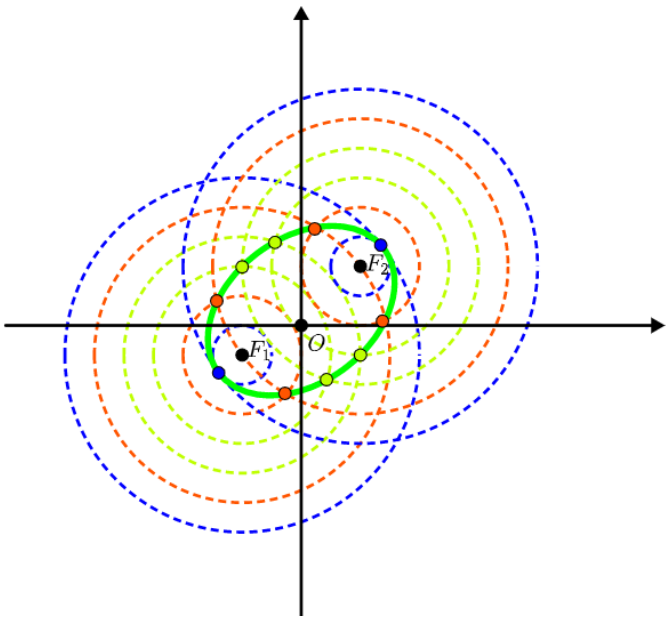
Şekil 4.6 $E_{d_E}[F_1, F_2, 9]$ Öklidyen Elipsin Sentetik İnşası

aşağıdaki kesişim noktalarının oluşturduğu açık yeşil renkteki elips elde edilir (Şekil 4.7).



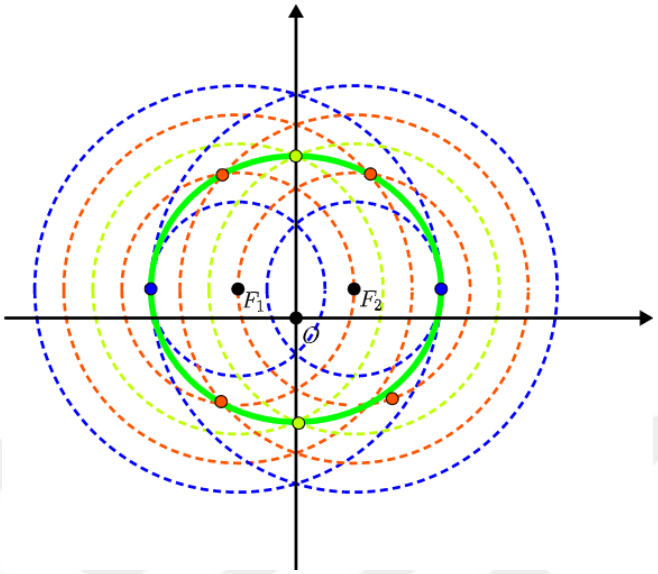
Şekil 4.7 $E_{d_E}\,[F_1, F_2, 9]$ Öklidyen Elipsin Sentetik İnşası

Örnek 4.7 *Odak noktaları* $F_1 = (-2, -1)$ *ve* $F_2 = (2, 2)$ *olan* $E_{d_E}\,[F_1, F_2, 7]$ *Öklidyen elipsi için yukardaki sentetik yöntem uygulanırsa aşağıda Şekil 4.8 de verilen Öklidyen elips elde edilir.*



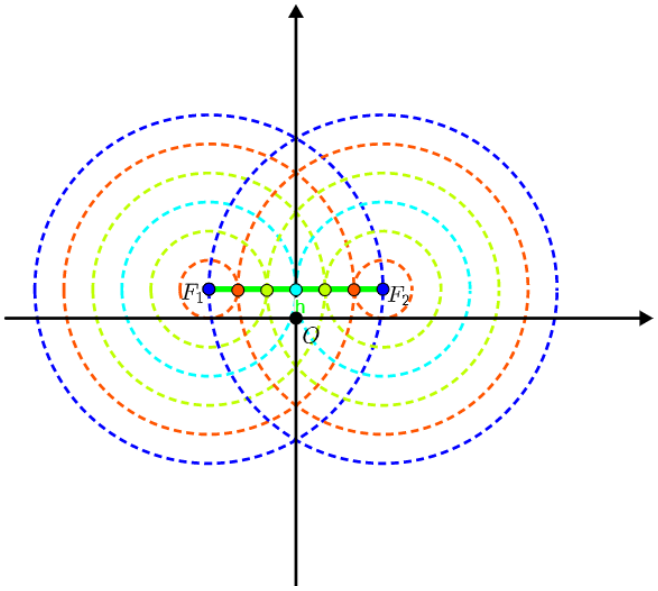
Şekil 4.8 $E_{d_E}\,[F_1, F_2, 7]$ Öklidyen Elipsin Sentetik İnşası

Örnek 4.8 *Odak noktaları* $F_1 = (-2, 1)$ *ve* $F_2 = (2, 1)$ *olan* $E_{d_E}[F_1, F_2, 10]$ *Öklidyen elipsi için yukardaki sentetik yöntem uygulanırsa aşağıda Şekil 4.9 da verilen Öklidyen elips elde edilir.*



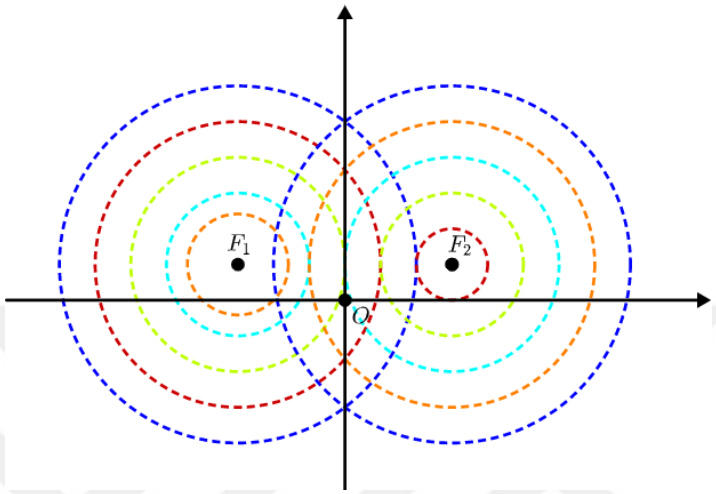
Şekil 4.9 $E_{d_E}[F_1, F_2, 10]$ Öklidyen Elipsin Sentetik İnşası

Örnek 4.9 *Odak noktaları* $F_1 = (-3, 1)$ *ve* $F_2 = (3, 1)$ *olan* $E_{d_E}[F_1, F_2, 6]$ *Öklidyen elipsi için yukardaki sentetik yöntem uygulanırsa aşağıda Şekil 4.10 da verilen Öklidyen elips elde edilir.*



Şekil 4.10 $E_{d_E}[F_1, F_2, 6]$ Öklidyen Elipsin Sentetik İnşası

Odak noktaları $F_1 = (-3, 1)$ ve $F_2 = (3, 1)$ olan $E_{d_E}[F_1, F_2, 5]$ Öklidyen elipsinin boş küme olacağı Örnek 4.5 de gösterilmiş idi. Bu durum, $r_1 + r_2 = \lambda$ olacak şekilde yarıçapları r_1 ve r_2, merkezleri sırasıyla F_1 ve F_2 olan çemberlerin hiçbir noktada kesişemeyeceği (aynı renkteki çemberlere bakınız) aşağıdaki sentetik yöntem ile oluşturulan şekilden de görülebilir (Şekil 4.11).



Şekil 4.11 $E_{d_E}[F_1, F_2, 5]$ Öklidyen Elipsin Sentetik İnşası

Sonuç 4.1 *Sonuç olarak, verilen sentetik yöntemden aşağıdaki sonuçlar kolaylıkla görülebilir;*

$d_E(X, F_1) + d_E(X, F_2) = \lambda > \delta = d_E(F_1, F_2)$ *ise* $E_{d_E}[F_1, F_2, \lambda]$ *alışılmış elips formundadır,*

$d_E(X, F_1) + d_E(X, F_2) = \lambda = \delta = d_E(F_1, F_2)$ *ise* $E_{d_E}[F_1, F_2, \lambda]$*;* F_1 *ve* F_2 *noktalarından geçen doğru parçasıdır,*

$d_E(X, F_1) + d_E(X, F_2) = \lambda < \delta = d_E(F_1, F_2)$ *ise* $E_{d_E}[F_1, F_2, \lambda]$ *boş kümedir.*

Bundan sonraki bölümde taksi uzaklık fonksiyonuna bağlı olarak taksi elipsler hatırlatılacaktır.

4.2 Taksi Elipsler

Elips, Öklidyen düzlemde oval bir yapıdayken taksi düzlemde köşeli bir yapıya sahiptir. Bu bağlamda taksi elipsler, Öklidyen elipsden farklı olarak üç formda ortaya çıkar. Bu kısımda iki odaklı taksi elipsler incelenecektir.

Tanım 4.2 *Düzlemde keyfi $F_1 = (x_1, y_1)$ ve $F_2 = (x_2, y_2)$ noktaları verilsin. $\lambda \geq 0$ olmak üzere; F_1 ve F_2 noktalarına taksi uzaklıkları toplamı λ olan taksi elipsi*

$$\begin{aligned} E_{d_T}[F_1, F_2, \lambda] &= \{X = (x, y) \mid d_T(X, F_1) + d_T(X, F_2) = \lambda,\ \lambda \geq 0\} \\ &= \{(x, y) \mid |x - x_1| + |y - y_1| + |x - x_2| + |y - y_2| = \lambda,\ \lambda \geq 0\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı noktalar kümesidir. Burada F_1 ve F_2 noktalarına elipsin odak noktaları, $\overline{F_1F_2}$ doğru parçasının uzunluğuna elipsin odakları arasındaki uzaklık denir ve $\delta \geq 0$ olmak üzere $d_T(F_1, F_2) = \delta$ şeklinde gösterilir.

Örnek 4.10 *Odak noktaları $F_1 = (-2, -1)$, $F_2 = (2, 2)$ ve $\lambda = 9$ olmak üzere $E_{d_T}[F_1, F_2, 9] = \{X = (x, y) \mid d_T(X, F_1) + d_T(X, F_2) = 9\}$ taksi elipsin denklemi;*

$$\begin{aligned} 9 &= d_T(X, F_1) + d_T(X, F_2) \\ &= |x + 2| + |y + 1| + |x - 2| + |y - 2| \end{aligned}$$

dir. Burada aşağıdaki alt durumlar söz konusudur.

Durum 1: $x < -2$ ve $y < -1$ için

$$\begin{aligned} 9 &= d_T(X, F_1) + d_T(X, F_2) \\ &= |x + 2| + |y + 1| + |x - 2| + |y - 2| \\ &= -x - 2 - y - 1 - x + 2 - y + 2 \end{aligned}$$

olup, $E_{d_T}[F_1, F_2, 9] = \{(x, y) \mid -2x - 2y = 8\}$ noktalar kümesi elde edilir.

Durum 2: $x < -2$ ve $-1 \leq y < 2$ için

$$\begin{aligned} 9 &= d_T(X, F_1) + d_T(X, F_2) \\ &= |x + 2| + |y + 1| + |x - 2| + |y - 2| \\ &= -x - 2 + y + 1 - x + 2 - y + 2 \end{aligned}$$

olup, $E_{d_T}[F_1, F_2, 9] = \{(x, y) \mid -2x = 6\}$ noktalar kümesi elde edilir.

Durum 3: $x < -2$ *ve* $y \geq 2$ *için*

$$\begin{aligned} 9 &= d_T(X, F_1) + d_T(X, F_2) \\ &= |x+2| + |y+1| + |x-2| + |y-2| \\ &= -x - 2 + y + 1 - x + 2 + y - 2 \end{aligned}$$

olup, $E_{d_T}[F_1, F_2, 9] = \{(x, y) \mid -2x + 2y = 10\}$ *noktalar kümesi elde edilir.*

Durum 4: $-2 \leq x < 2$ *ve* $y < -1$ *için*

$$\begin{aligned} 9 &= d_T(X, F_1) + d_T(X, F_2) \\ &= |x+2| + |y+1| + |x-2| + |y-2| \\ &= x + 2 - y - 1 - x + 2 - y + 2 \end{aligned}$$

olup, $E_{d_T}[F_1, F_2, 9] = \{(x, y) \mid -2y = 4\}$ *noktalar kümesi elde edilir.*

Durum 5: $-2 \leq x < 2$ *ve* $-1 \leq y < 2$ *için*

$$\begin{aligned} 9 &= d_T(X, F_1) + d_T(X, F_2) \\ &= |x+2| + |y+1| + |x-2| + |y-2| \\ &= x + 2 + y + 1 - x + 2 - y + 2 \end{aligned}$$

olup, $E_{d_T}[F_1, F_2, 9] = \{(x, y) \mid 4 + 3 \neq 9\} = \emptyset$ *kümesi elde edilir.*

Durum 6: $-2 \leq x < 2$ *ve* $y \geq 2$ *için*

$$\begin{aligned} 9 &= d_T(X, F_1) + d_T(X, F_2) \\ &= |x+2| + |y+1| + |x-2| + |y-2| \\ &= x + 2 + y + 1 - x + 2 + y - 2 \end{aligned}$$

olup, $E_{d_T}[F_1, F_2, 9] = \{(x, y) \mid 2y = 6\}$ *noktalar kümesi elde edilir.*

Durum 7: $x \geq 2$ *ve* $y < -1$ *için*

$$\begin{aligned} 9 &= d_T(X, F_1) + d_T(X, F_2) \\ &= |x+2| + |y+1| + |x-2| + |y-2| \\ &= x + 2 - y - 1 + x - 2 - y + 2 \end{aligned}$$

olup, $E_{d_T}[F_1, F_2, 9] = \{(x, y) \mid 2x - 2y = 8\}$ *noktalar kümesi elde edilir.*

Durum 8: $x \geq 2$ *ve* $-1 \leq y < 2$ *için*

$$\begin{aligned} 9 &= d_T(X, F_1) + d_T(X, F_2) \\ &= |x+2| + |y+1| + |x-2| + |y-2| \\ &= x + 2 + y + 1 + x - 2 - y + 2 \end{aligned}$$

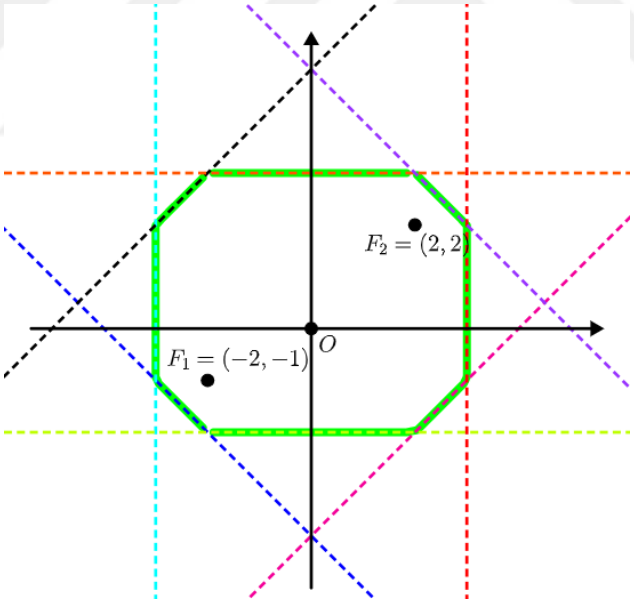
olup, $E_{d_T}[F_1, F_2, 9] = \{(x, y) \mid 2x = 6\}$ *noktalar kümesi elde edilir.*

Durum 9: $x \geq 2$ *ve* $y \geq 2$ *için*

$$\begin{aligned} 9 &= d_T(X, F_1) + d_T(X, F_2) \\ &= |x+2| + |y+1| + |x-2| + |y-2| \\ &= x + 2 + y + 1 + x - 2 + y - 2 \end{aligned}$$

olup, $E_{d_T}[F_1, F_2, 9] = \{(x, y) \mid 2x + 2y = 10\}$ *noktalar kümesi elde edilir.*

Buna göre tüm alt durumlar için belirlenen nokta kümeleri birleştirildiğinde $E_{d_T}[F_1, F_2, 9]$ *taksi elipsi Şekil 4.12 de görülen açık yeşil eğridir.*



Şekil 4.12 $E_{d_T}[F_1, F_2, 9]$ Taksi Elips

Örnek 4.11 *Odak noktaları* $F_1 = (-2, -1)$, $F_2 = (2, 2)$ *ve* $\lambda = 7$ *olmak üzere* $E_{d_T}[F_1, F_2, 7] = \{X = (x, y) \mid d_T(X, F_1) + d_T(X, F_2) = 7\}$ *taksi elipsin denklemi;*

$$\begin{aligned} 7 &= d_T(X, F_1) + d_T(X, F_2) \\ &= |x+2| + |y+1| + |x-2| + |y-2| \end{aligned}$$

dir. Burada aşağıdaki alt durumlar söz konusudur.

Durum 1: $x < -2$ *ve* $y < -1$ *için*

$$\begin{aligned} 7 &= d_T(X, F_1) + d_T(X, F_2) \\ &= |x+2| + |y+1| + |x-2| + |y-2| \\ &= -x - 2 - y - 1 - x + 2 - y + 2 \end{aligned}$$

olup, $E_{d_T}[F_1, F_2, 7] = \{(x, y) \mid -2x - 2y = 6\}$ *noktalar kümesi elde edilir.*

Durum 2: $x < -2$ *ve* $-1 \leq y < 2$ *için*

$$\begin{aligned} 7 &= d_T(X, F_1) + d_T(X, F_2) \\ &= |x+2| + |y+1| + |x-2| + |y-2| \\ &= -x - 2 + y + 1 - x + 2 - y + 2 \end{aligned}$$

olup, $E_{d_T}[F_1, F_2, 7] = \{(x, y) \mid -2x = 4\}$ *noktalar kümesi elde edilir.*

Durum 3: $x < -2$ *ve* $y \geq 2$ *için*

$$\begin{aligned} 7 &= d_T(X, F_1) + d_T(X, F_2) \\ &= |x+2| + |y+1| + |x-2| + |y-2| \\ &= -x - 2 + y + 1 - x + 2 + y - 2 \end{aligned}$$

olup, $E_{d_T}[F_1, F_2, 7] = \{(x, y) \mid -2x + 2y = 8\}$ *noktalar kümesi elde edilir.*

Durum 4: $-2 \leq x < 2$ *ve* $y < -1$ *için*

$$\begin{aligned} 7 &= d_T(X, F_1) + d_T(X, F_2) \\ &= |x+2| + |y+1| + |x-2| + |y-2| \\ &= x + 2 - y - 1 - x + 2 - y + 2 \end{aligned}$$

olup, $E_{d_T}[F_1, F_2, 7] = \{(x, y) \mid -2y = 2\}$ *noktalar kümesi elde edilir.*

Durum 5: $-2 \leq x < 2$ *ve* $-1 \leq y < 2$ *için*

$$\begin{aligned} 7 &= d_T(X, F_1) + d_T(X, F_2) \\ &= |x+2| + |y+1| + |x-2| + |y-2| \\ &= x + 2 + y + 1 - x + 2 - y + 2 \end{aligned}$$

olup, $E_{d_T}[F_1, F_2, 7] = \{(x, y) \mid 4 + 3 = 7\}$ *noktalar kümesi elde edilir.*

Durum 6: $-2 \leq x < 2$ *ve* $y \geq 2$ *için*

$$\begin{aligned} 7 &= d_T(X, F_1) + d_T(X, F_2) \\ &= |x+2| + |y+1| + |x-2| + |y-2| \\ &= x + 2 + y + 1 - x + 2 + y - 2 \end{aligned}$$

olup, $E_{d_T}[F_1, F_2, 7] = \{(x, y) \mid 2y = 4\}$ *noktalar kümesi elde edilir.*

Durum 7: $x \geq 2$ *ve* $y < -1$ *için*

$$\begin{aligned} 7 &= d_T(X, F_1) + d_T(X, F_2) \\ &= |x+2| + |y+1| + |x-2| + |y-2| \\ &= x + 2 - y - 1 + x - 2 - y + 2 \end{aligned}$$

olup, $E_{d_T}[F_1, F_2, 7] = \{(x, y) \mid 2x - 2y = 6\}$ *noktalar kümesi elde edilir.*

Durum 8: $x \geq 2$ *ve* $-1 \leq y < 2$ *için*

$$\begin{aligned} 7 &= d_T(X, F_1) + d_T(X, F_2) \\ &= |x+2| + |y+1| + |x-2| + |y-2| \\ &= x + 2 + y + 1 + x - 2 - y + 2 \end{aligned}$$

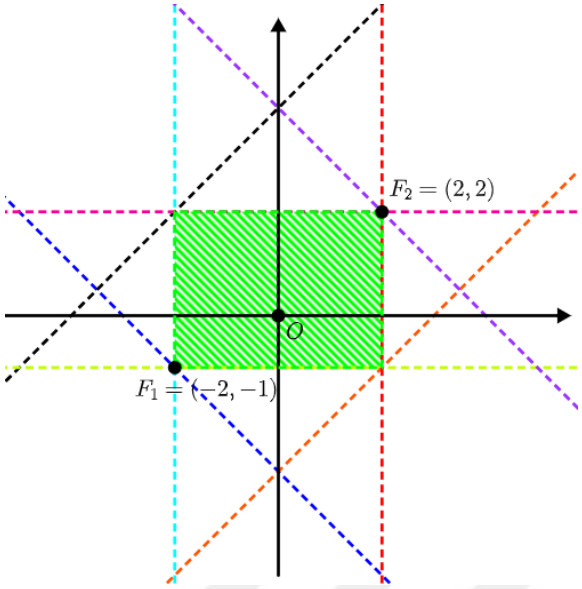
olup, $E_{d_T}[F_1, F_2, 7] = \{(x, y) \mid 2x = 4\}$ *noktalar kümesi elde edilir.*

Durum 9: $x \geq 2$ *ve* $y \geq 2$ *için*

$$\begin{aligned} 7 &= d_T(X, F_1) + d_T(X, F_2) \\ &= |x+2| + |y+1| + |x-2| + |y-2| \\ &= x + 2 + y + 1 + x - 2 + y - 2 \end{aligned}$$

olup, $E_{d_T}[F_1, F_2, 7] = \{(x, y) \mid 2x + 2y = 8\}$ *noktalar kümesi elde edilir.*

Buna göre tüm alt durumlar için belirlenen nokta kümeleri birleştirildiğinde $E_{d_T}[F_1, F_2, 7]$ *taksi elipsi Şekil 4.13 de görülen dikdörtgensel bölgedir.*



Şekil 4.13 $E_{d_T}\left[F_1, F_2, 7\right]$ Taksi Elips

Örnek 4.12 *Odak noktaları* $F_1 = (-2,1)$, $F_2 = (2,1)$ *ve* $\lambda = 10$ *olmak üzere* $E_{d_T}\left[F_1, F_2, 10\right] = \{X = (x,y) \mid d_T\left(X, F_1\right) + d_T(X, F_2) = 10\}$ *taksi elipsin denklemi;*

$$\begin{aligned} 10 &= d_T\left(X, F_1\right) + d_T(X, F_2) \\ &= |x+2| + |y-1| + |x-2| + |y-1| \end{aligned}$$

dir. Burada aşağıdaki alt durumlar söz konusudur.

Durum 1: $x < -2$ *ve* $y < -1$ *için*

$$\begin{aligned} 10 &= d_T\left(X, F_1\right) + d_T(X, F_2) \\ &= |x+2| + |y-1| + |x-2| + |y-1| \\ &= -x-2-y+1-x+2-y+1 \end{aligned}$$

olup, $E_{d_T}\left[F_1, F_2, 10\right] = \{(x,y) \mid -2x - 2y = 8\}$ *noktalar kümesi elde edilir.*

Durum 2: $x < -2$ *ve* $y \geq -1$ *için*

$$\begin{aligned} 10 &= d_T\left(X, F_1\right) + d_T(X, F_2) \\ &= |x+2| + |y-1| + |x-2| + |y-1| \\ &= -x-2+y-1-x+2+y-1 \end{aligned}$$

olup, $E_{d_T}\left[F_1, F_2, 10\right] = \{(x,y) \mid -2x + 2y = 12\}$ *noktalar kümesi elde edilir.*

Durum 3: $-2 \leq x < 2$ *ve* $y < -1$ *için*

$$\begin{aligned} 10 &= d_T(X, F_1) + d_T(X, F_2) \\ &= |x+2| + |y-1| + |x-2| + |y-1| \\ &= x + 2 - y + 1 - x + 2 - y + 1 \end{aligned}$$

olup, $E_{d_T}[F_1, F_2, 10] = \{(x, y) \mid -2y = 4\}$ *noktalar kümesi elde edilir.*

Durum 4: $-2 \leq x < 2$ *ve* $y \geq -1$ *için*

$$\begin{aligned} 10 &= d_T(X, F_1) + d_T(X, F_2) \\ &= |x+2| + |y-1| + |x-2| + |y-1| \\ &= x + 2 + y - 1 - x + 2 + y - 1 \end{aligned}$$

olup, $E_{d_T}[F_1, F_2, 10] = \{(x, y) \mid 2y = 8\}$ *noktalar kümesi elde edilir.*

Durum 5: $x \geq 2$ *ve* $y < -1$ *için*

$$\begin{aligned} 10 &= d_T(X, F_1) + d_T(X, F_2) \\ &= |x+2| + |y-1| + |x-2| + |y-1| \\ &= x + 2 - y + 1 + x - 2 - y + 1 \end{aligned}$$

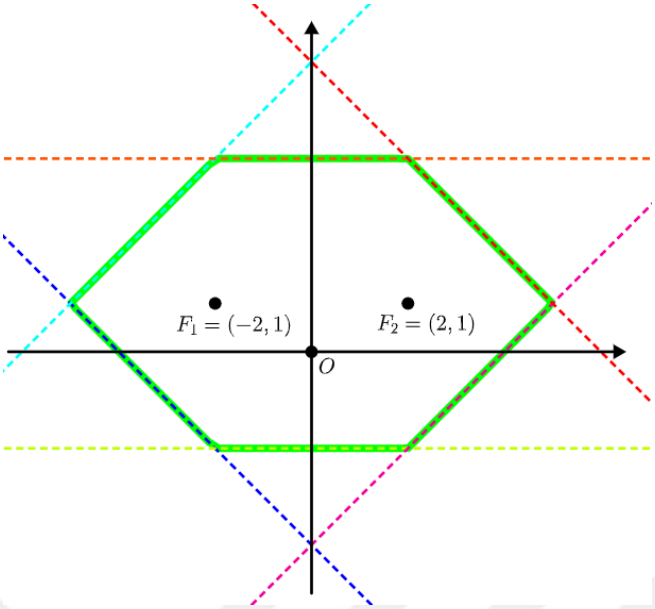
olup, $E_{d_T}[F_1, F_2, 10] = \{(x, y) \mid 2x - 2y = 8\}$ *noktalar kümesi elde edilir.*

Durum 6: $x \geq 2$ *ve* $y \geq -1$ *için*

$$\begin{aligned} 10 &= d_T(X, F_1) + d_T(X, F_2) \\ &= |x+2| + |y-1| + |x-2| + |y-1| \\ &= x + 2 + y - 1 + x - 2 + y - 1 \end{aligned}$$

olup, $E_{d_T}[F_1, F_2, 10] = \{(x, y) \mid 2x + 2y = 12\}$ *noktalar kümesi elde edilir.*

Buna göre tüm alt durumlar için belirlenen nokta kümeleri birleştirildiğinde $E_{d_T}[F_1, F_2, 10]$ *taksi elipsi Şekil 4.14 de görülen açık yeşil eğridir.*



Şekil 4.14 $E_{d_T}\left[F_1, F_2, 10\right]$ Taksi Elips

Taksi elips oluşturmak için denklem çözümü Öklidyen durumdaki gibi oldukça vakit almaktadır. Taksi elips oluşturmak için E. F. Krause tarafından verilen Öklidyen düzlemdeki sentetik inşa kullanılabilir (Krause, 1975).

Sentetik Yöntem Kullanılarak Taksi Elips Oluşturma

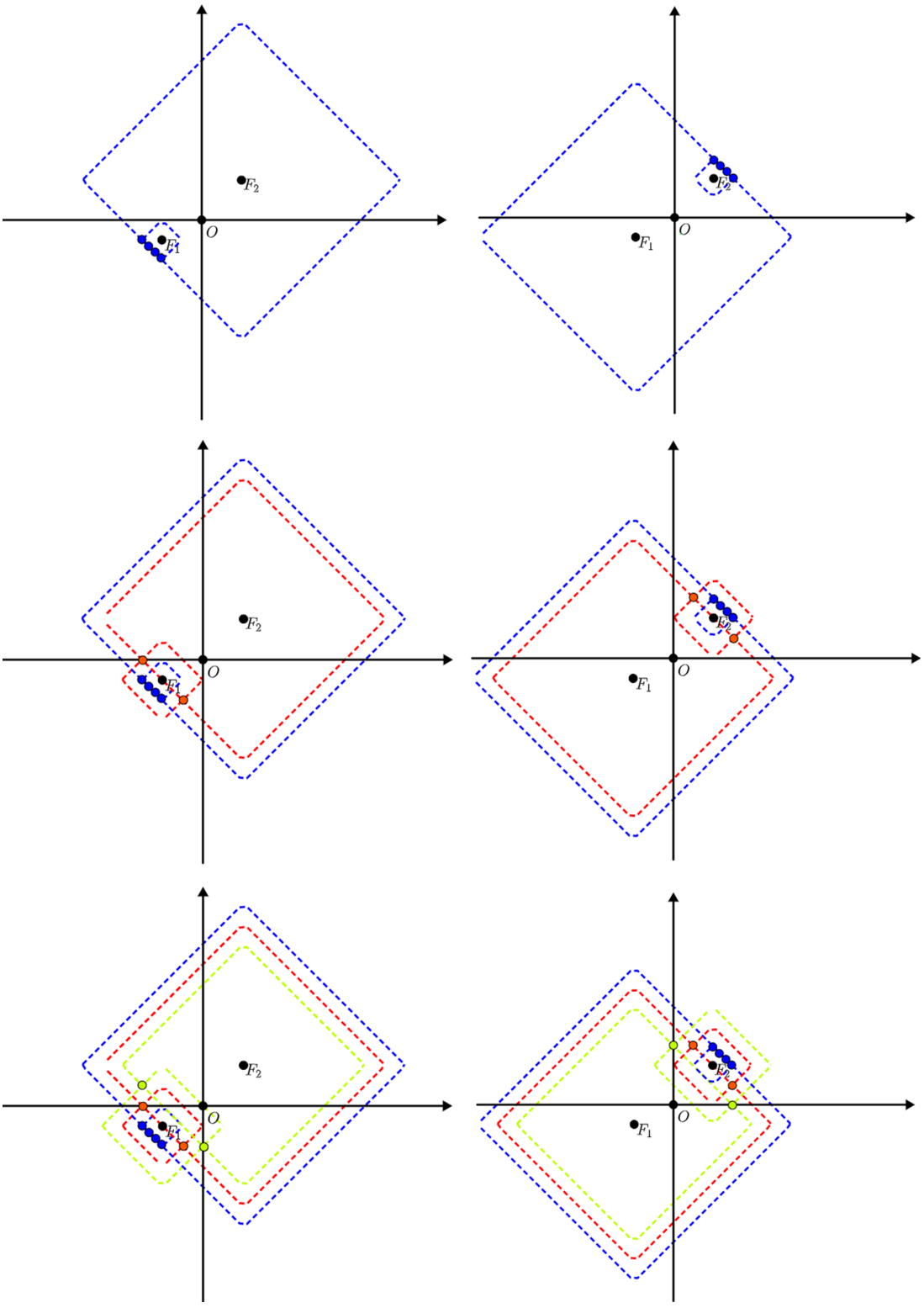
Düzlemde odak noktaları $F_1 = (x_1, y_1)$, $F_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ve $\lambda \geq 0$ olmak üzere,

$$E_{d_T}\left[F_1, F_2, \lambda\right] = \{X = (x, y) \mid d_T\left(X, F_1\right) + d_T\left(X, F_2\right) = \lambda, \lambda \geq 0\}$$

taksi elips aşağıdaki sentetik yöntemle oluşturulur;

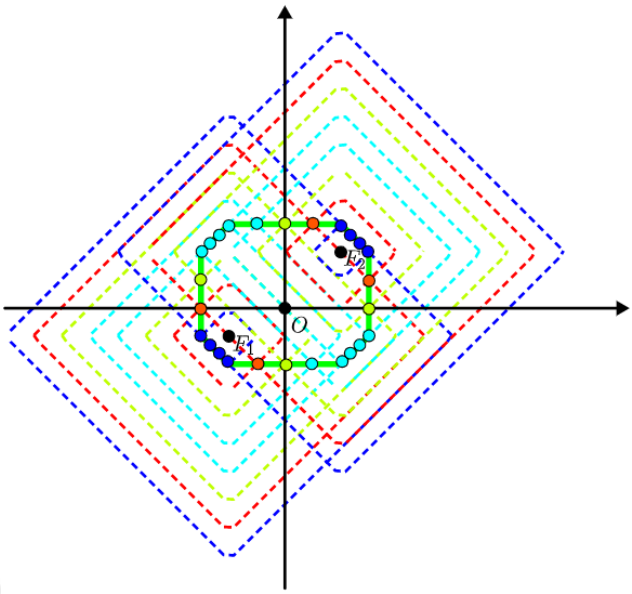
$r_1 + r_2 = \lambda$ olmak üzere, yarıçapları r_1 ve r_2, merkezleri sırasıyla F_1 ve F_2 olan taksi çemberler çizilir. $r_1 + r_2 = \lambda$ için çizilen bu taksi çemberlerin kesişim noktaları birleştirilirse sentetik olarak $E_{d_T}\left[F_1, F_2, \lambda\right]$ elipsi belirlenmiş olur.

Örnek 4.13 *Odak noktaları* $F_1 = (-2, -1)$, $F_2 = (2, 2)$ *ve* $\lambda = 9$ *olmak üzere* $E_{d_T}\left[F_1, F_2, 9\right] = \{X = (x, y) \mid d_T\left(X, F_1\right) + d_T\left(X, F_2\right) = 9\}$ *taksi elipsi için sentetik yöntem Şekil 4.15 deki gibi uygulanırsa;*



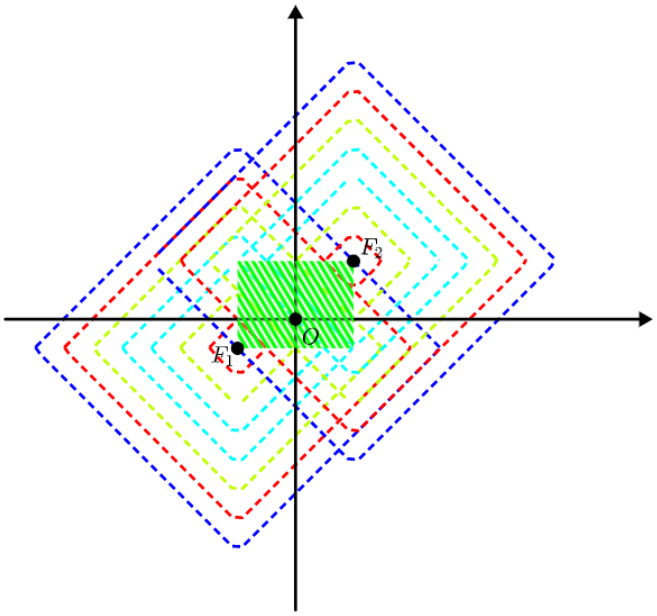
Şekil 4.15 $E_{d_T}\,[F_1, F_2, 9]$ Taksi Elipsin Sentetik İnşası

aşağıdaki kesişim noktalarının oluşturduğu açık yeşil renkteki elips elde edilir (Şekil 4.16).



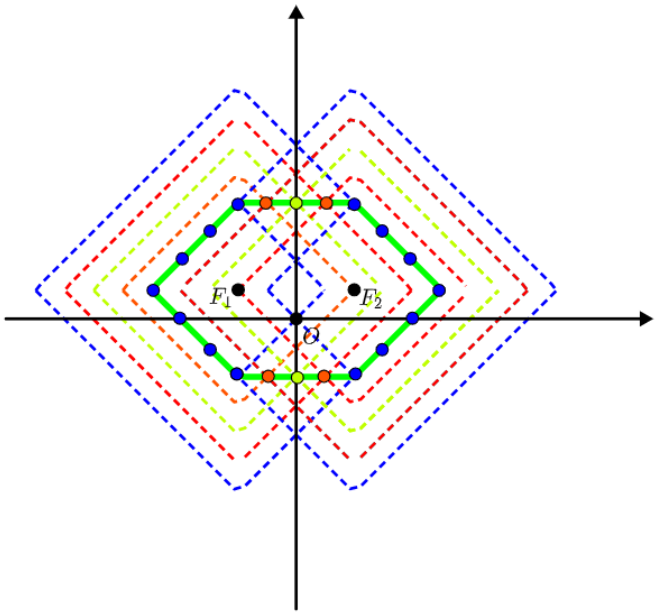
Şekil 4.16 $E_{d_T}\left[F_1, F_2, 9\right]$ Taksi Elipsin Sentetik İnşası

Örnek 4.14 *Odak noktaları* $F_1 = (-2, -1)$ *ve* $F_2 = (2, 2)$ *olan* $E_{d_T}\left[F_1, F_2, 7\right]$ *taksi elipsi için yukardaki sentetik yöntem uygulanırsa Şekil 4.17 deki taksi elipsi elde edilir.*



Şekil 4.17 $E_{d_T}\left[F_1, F_2, 7\right]$ Taksi Elipsin Sentetik İnşası

Örnek 4.15 *Odak noktaları* $F_1 = (-2, 1)$ *ve* $F_2 = (2, 1)$ *olan* $E_{d_T}[F_1, F_2, 10]$ *taksi elipsi için yukardaki sentetik yöntem uygulanırsa Şekil 4.18 deki taksi elipsi elde edilir.*



Şekil 4.18 $E_{d_T}[F_1, F_2, 10]$ Taksi Elipsin Sentetik İnşası

Bundan sonraki kısımda sentetik inşanın dışında taksi elips oluşturmak için daha pratik bir yöntem verilecektir.

Pratik Yöntem Kullanılarak Taksi Elips Oluşturma

Düzlemde odak noktaları $F_1 = (x_1, y_1)$, $F_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ve $\lambda \geq 0$ olmak üzere,

$$E_{d_T}[F_1, F_2, \lambda] = \{X = (x, y) \mid d_T(X, F_1) + d_T(X, F_2) = \lambda, \lambda \geq 0\}$$

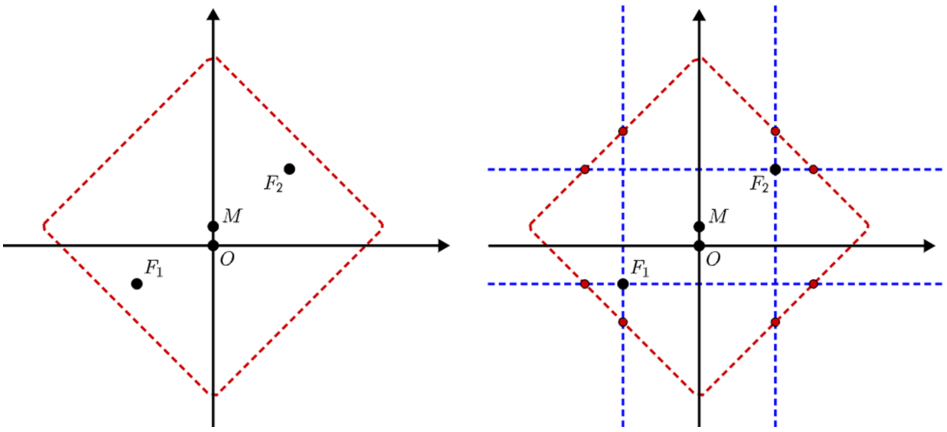
taksi elips aşağıdaki sentetik yöntemle oluşturulur;

$\overline{F_1F_2}$ doğru parçasının orta noktası belirlenir. Bu nokta M olarak adlandırılsın. Merkezi M ve yarıçapı $\frac{\lambda}{2}$ olan taksi çemberi çizilir. Daha sonra F_1 ve F_2 odak noktalarından x ve $y-$eksenlerine paralel doğrular çizilir ve bu doğruların taksi çember ile kesişim noktaları belirlenir. Daha sonra kesişim noktaları doğru parçaları ile birleştirilirse $E_{d_T}[F_1, F_2, \lambda]$ taksi elipsi belirlenmiş olur.

Örnek 4.16 *Odak noktaları* $F_1 = (-2, -1)$ *ve* $F_2 = (2, 2)$ *olan*

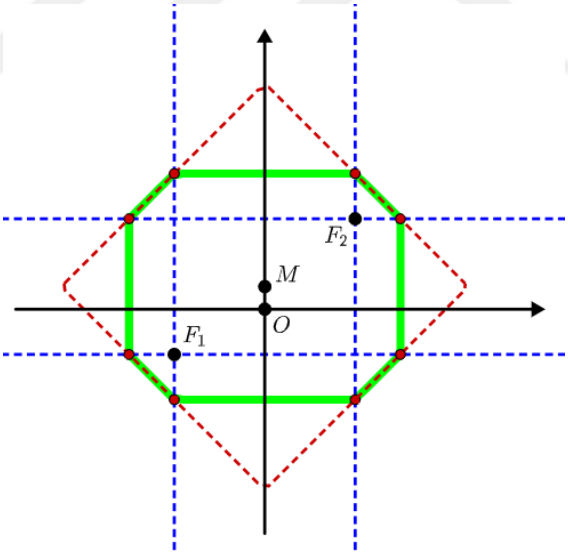
$$E_{d_T}[F_1, F_2, 9] = \{X \mid d_T(X, F_1) + d_T(X, F_2) = 9\}$$

taksi elipsi çizmek için pratik yöntem Şekil 4.19 daki gibi uygulanırsa;



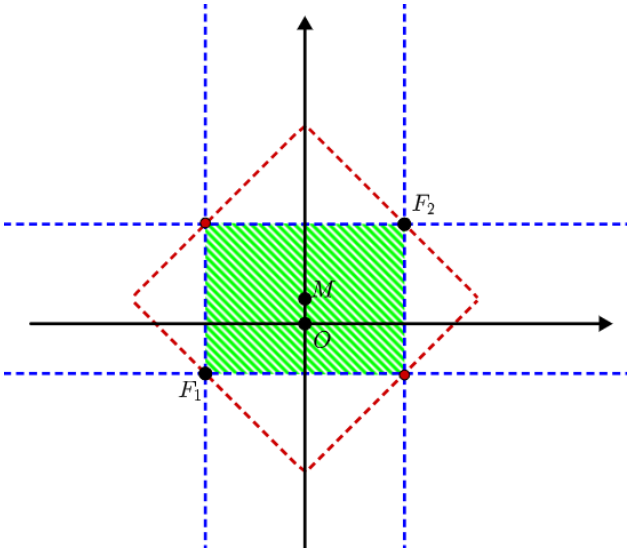
Şekil 4.19 $E_{d_T}\,[F_1, F_2, 9]$ Taksi Elipsin Pratik İnşası

aşağıdaki kesişim noktalarının oluşturduğu açık yeşil rengindeki taksi elips bulunur (Şekil 4.20).



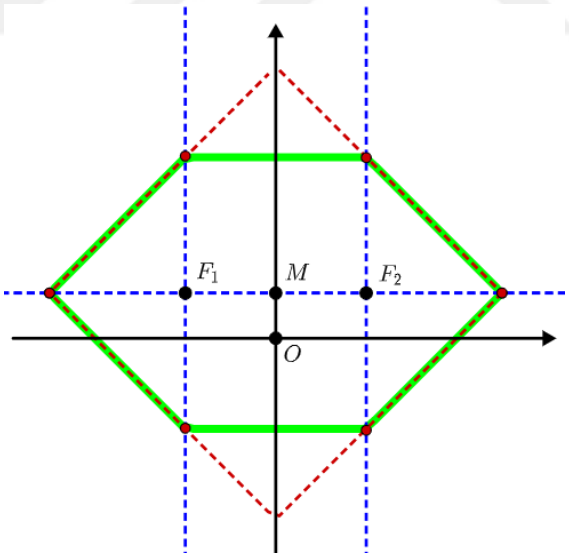
Şekil 4.20 $E_{d_T}\,[F_1, F_2, 9]$ Taksi Elipsin Pratik İnşası

Örnek 4.17 *Odak noktaları* $F_1 = (-2, -1)$ *ve* $F_2 = (2, 2)$ *olan* $E_{d_T}\,[F_1, F_2, 7]$ *taksi elipsi için yukardaki pratik yöntem uygulanırsa Şekil 4.21 deki taksi elipsi elde edilir.*



Şekil 4.21 $E_{d_T}\left[F_1, F_2, 7\right]$ Taksi Elipsin Pratik İnşası

Örnek 4.18 *Odak noktaları* $F_1 = (-2, 1)$ *ve* $F_2 = (2, 1)$ *olan* $E_{d_T}\left[F_1, F_2, 10\right]$ *taksi elipsi için yukardaki sentetik yöntem uygulanırsa Şekil 4.22 deki taksi elipsi elde edilir.*



Şekil 4.22 $E_{d_T}\left[F_1, F_2, 10\right]$ Taksi Elipsin Pratik İnşası

Sonuç 4.2 *(Petrović vd., 2014) Sonuç olarak, verilen yöntemlerden aşağıdaki sonuçlar kolaylıkla görülebilir;*

$d_T(X,F_1)+d_T(X,F_2)=\lambda>\delta=d_T(F_1,F_2)$ *iken* $x_1=x_2$ *ya da* $y_1=y_2$ *ise* $E_{d_T}[F_1,F_2,\lambda]$ *altıgen biçimde bir taksi elips formundadır,*

$d_T(X,F_1)+d_T(X,F_2)=\lambda>\delta=d_T(F_1,F_2)$ *iken* $x_1\neq x_2$ *ve* $y_1\neq y_2$ *ise* $E_{d_T}[F_1,F_2,\lambda]$ *sekizgen biçimde bir taksi elips formundadır,*

$d_T(X,F_1)+d_T(X,F_2)=\lambda=\delta=d_T(F_1,F_2)$ *ise* $E_{d_T}[F_1,F_2,\lambda]$ F_1F_2 *köşegenli dikdörtgensel bir bölge olan taksi elipsdir,*

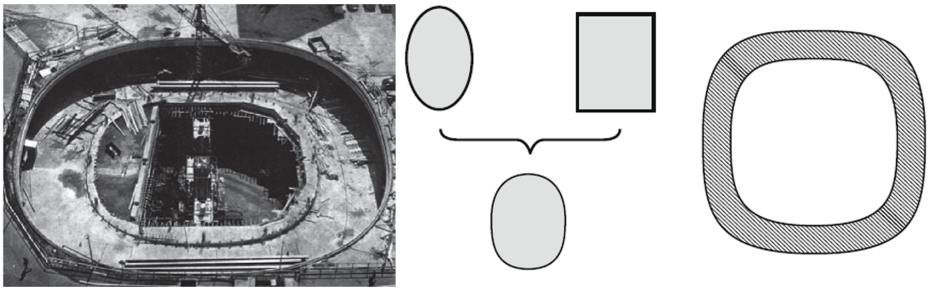
$d_T(X,F_1)+d_T(X,F_2)=\lambda<\delta=d_T(F_1,F_2)$ *ise* $E_{d_T}[F_1,F_2,\lambda]$ *boş kümedir.*

4.3 Süper Elipsler

Tüm uygarlık boyunca insanlık nadiren fark edilen iki eğilim üzerine etrafını şekillendirmiştir; dikdörtgensellik ve dairesellik. Örneğin, dairesel tekerlekler üzerindeki arabalar, dairesel direksiyonlara bağlı olarak yönlendirilir, dikdörtgen bir kafesin çizgileri gibi kesişen caddelerde hareket eder. Oyunlarımız bile dikdötgenselliği ve daireselliği birleştirir. Çoğu açık hava sporu dikdörtgen alanlarda küresel toplarla oynanır.

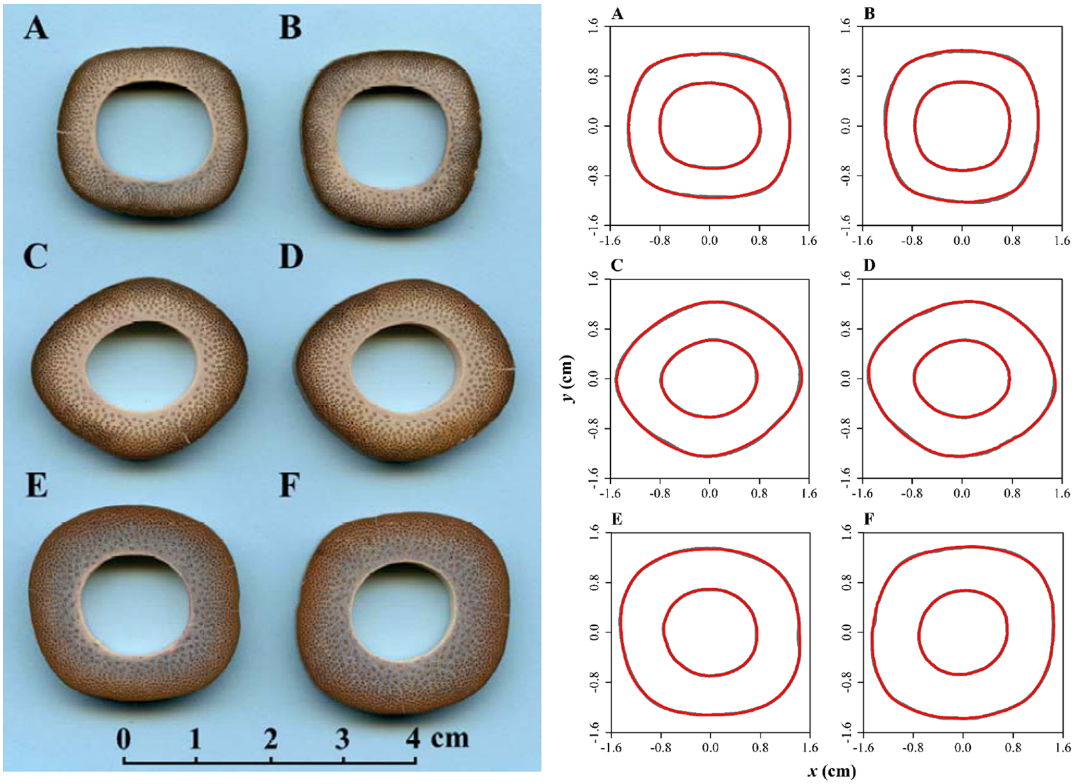
Bu anlamda basit bir formül kullanılarak bu iki eğilimi birleştiren yani bir dikdörtgen ve bir elips arasında tamamen değişebilen matematiksel olarak estetik bir uzlaşma vardır: süper elips.

"Süper elips" terimi Danimarkalı şair ve bilim adamı olan Piet Hein (1905 - 1996) tarafından adlandırılmıştır. Bu Piet Hein' in 1959' da Stockholm' deki Sergels Torg adında açık bir alanın yeniden geliştirilmesi için ortaya çıkan bir tasarım mücadelesi için verdiği yanıttır. Sergels Torg' un süper eliptik şekli, alışveriş merkezinin alanını optimize etmek için dikdörtgenin gücünü ve trafik akışını optimize etmek için elipsin gücünü birleştirir (Gardner, 1975), (Şekil 4.23).



Şekil 4.23 Sergels Torg (Gielis, 2017)

Dikdötgenselliği ve daireselliği birleştiren bu formlar doğada da birçok bitkide gözlemlenmiştir. Ayrıca süper elips ağaç halkalarının geometrik şeklini çembere göre daha iyi bir şekilde tanımlar ve bitkilerin birçok kesitsel şekli elipsden ziyade yaklaşık bir süper elips olarak ortaya çıkar. Normalde süper elipsler sentosimetrikdir (merkezi simetrik) ancak doğa koşullarından dolayı bitkilerde deforme olmuş bir halde bulunur (Huang vd., 2020), (Şekil 4.24).



Şekil 4.24 C. Utilis Bitkisinin Kesitleri (Huang vd., 2020)

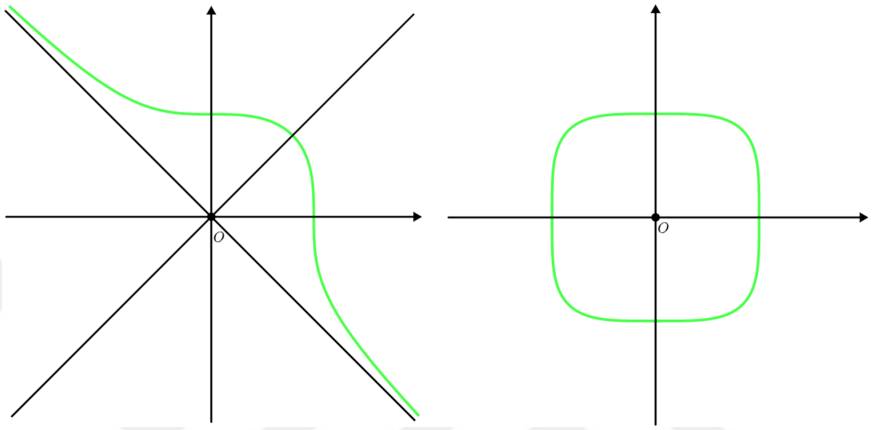
Süper elips denklemi, bir elips denkleminin genelleştirilmiş bir hali olan kapalı eğrileri temsil eder. Bu eğrilerin ilk sistematik çalışması, kristal şekilleri tanımlamak için Gabriel Lamé tarafından yapılmıştır. Gabriel Lamé' den sonra Lamé eğrileri olarak da bilinen süper elipsler; elipse benzeyen, yarı büyük eksen ve yarı küçük eksenin geometrik özelliklerini ve bunlarla ilgili simetriyi koruyan, ancak farklı bir genel şekil olan kapalı bir eğridir (Lamé, 1818).

Süper elips kartezyen koordinat sisteminde,

$$\left|\frac{x}{a}\right|^n + \left|\frac{y}{b}\right|^n = 1 \qquad (4.1)$$

denklemini sağlayan noktarın kümesidir. Burada n, a ve b pozitif reel sayılardır. a ve b çemberin ($a = b$ için) ya da elipsin ($a \neq b$ için) büyüklüğünü verir, n ise bu çemberi ya da elipsi başka şekillere dönüştürür.

Süper elipsler, denklem (4.1) de olduğu gibi mutlak değerleri kullanmadan eğrileri daha genel olarak tanımlayan Lamé eğrilerinin özel durumlarıdır. En genel haliyle Lamé eğrileri $x^n + y^n = z^n$ olarak tanımlanır (Geilis, 2017), (Şekil 4.25).



Şekil 4.25 $n = 3$ ve $n = 4$ İçin Lamé Eğrileri

Bu özel ifade aynı zamanda genelleştirilmiş bir Pisagor Teoremidir. Klasik teorem $n = 2$ olduğunda Öklidyen çemberi tanımlarken $n \neq 2$ için farklı birim çemberler tanımlar. Orijine olan uzaklık basitçe $\sqrt[n]{|x|^n + |y|^n}$ dir ve yöne bağlıdır (Geilis, 2021).

Bu anlamda Lamé 1818' de geometride yöntemler üzerine "Examen de différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie" (Geometri problemlerini çözmek için kullanılan çeşitli yöntemlerin incelenmesi) adlı küçük ama etkili bir kitapçık yazmıştır (Lamé, 1818). Son bölümde, kristalografinin kurucusu Abbé Haüy' nin çalışmasına geometrik bir temel vererek, kristallerin analitik geometrik tanımı için düzlem ve doğru denklemlerini tanıtmıştır. Lamé, kitabının son sayfalarında bunu n tamsayısı için

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1 \tag{4.2}$$

olarak genelleştirmiştir. Böylece Pisagor Teoremi' nin "çok boyutlu" bir versiyonunu tek bir denklemle bütün eğriler ve yüzeyler için tanımlanmıştır.

Doğal formların (Bkz. Şekil 4.24) tanımlanması için kapalı şekiller ve dolayısıyla da (4.1) denkleminde mutlak değerlerin kullanılması gereklidir (Geilis, 2017).

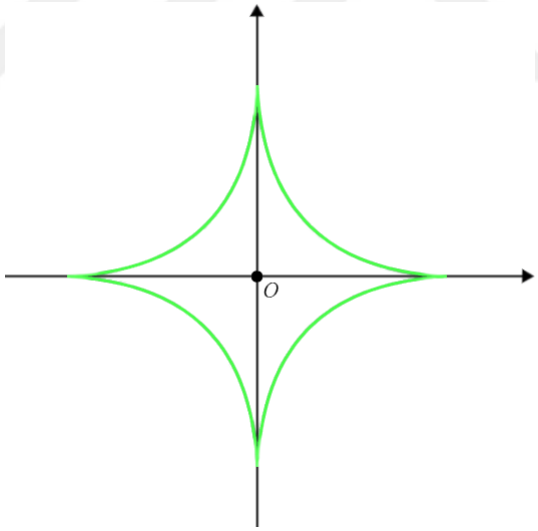
Aslında bu anlamda 1853' te M. Euzet

$$\left|\frac{x}{a}\right|^m + \left|\frac{y}{b}\right|^n = 1 \tag{4.3}$$

denklemini içeren bir çalışma yayınlamıştır. Burada a, b, n ve m pozitif veya negatif olan tamsayı ya da kesirli sayılardır. Bu çalışma, Nouvelles Annales de Mathématiques' te "Sur les courbes planes à equations trinômes et les surfaces à equations tétranômes" (Trinomial denklemlerle düzlem eğrileri ve tetranomial denklemlerle yüzeyler üzerine) başlıklı bir makale olarak da yayınlanmıştır (Euzet, 1853). Ayrıca bu çalışmada $n = m$ için Lamé' in denklemi örnek olarak verilmiş ve son notta Lamé' in çalışmasına atıfta bulunulmuştur. Dolayısıyla süper elipsler, daha genel olarak Lamé-Euzet eğrileri ailesinin bir alt kümesidir (Geilis, 2017).

Denklem (4.1), dikdörtgende bulunan $-a \leq x \leq +a$ ve $-b \leq y \leq +b$ aralığında kapalı bir eğriyi tanımlar. Burada a ve b parametrelerine eğrinin yarıçapları denir. Eğrinin genel şekli, aşağıda gösterildiği gibi n nin değeri ile belirlenir (Ni vd., 2016).

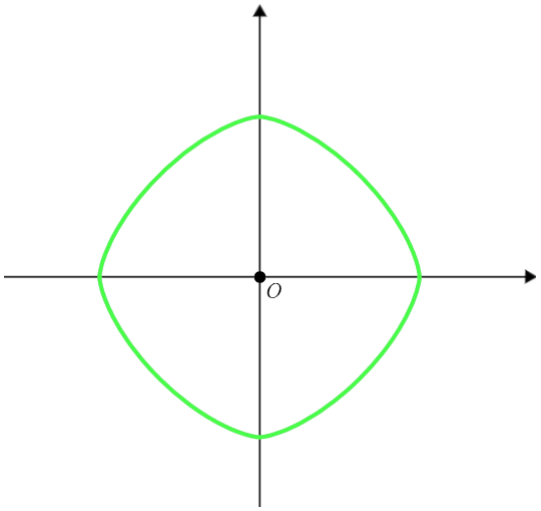
$0 < n < 1$ iken süper elips, içbükey (içe doğru kavisli) kenarları olan dört kollu bir yıldız gibi görünür (Şekil 4.26).



Şekil 4.26 $a = b$ ve $n = 0.5$ İken Süper Elips

$n = 1$ iken süper elips, köşeleri $(\pm a, 0)$ ve $(0, \pm b)$ olan bir eşkenar dörtgendir ($a = b$ iken taksi çemberdir).

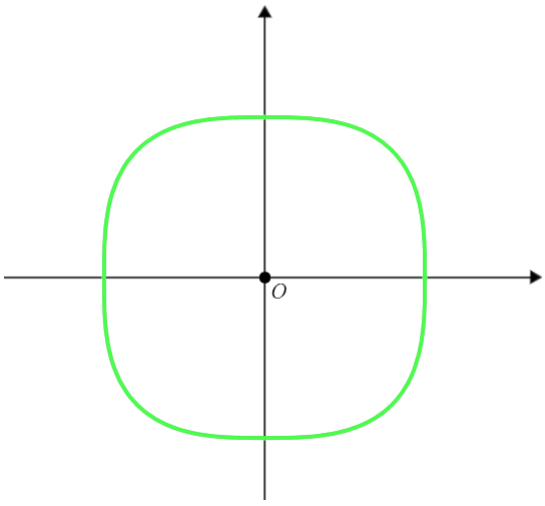
$1 < n < 2$ iken süper elips, köşeleri $(\pm a, 0)$ ve $(0, \pm b)$ olan ancak dışbükey (dışa doğru kavisli) kenarları olan bir eşkenar dörtgen gibi görünür (Şekil 4.27).



Şekil 4.27 $a = b$ ve $n = 1.5$ İken Süper Elips

$n = 2$ iken süper elips, standart/bilinen bir elipstir ($a = b$ ise çemberdir).

$n > 2$ iken süper elips, yüzeysel olarak köşeleri yuvarlatılmış bir dikdörtgen gibi görünür. Eğrilik $(\pm a, 0)$ ve $(0, \pm b)$ noktalarında sıfırdır (Şekil 4.28).

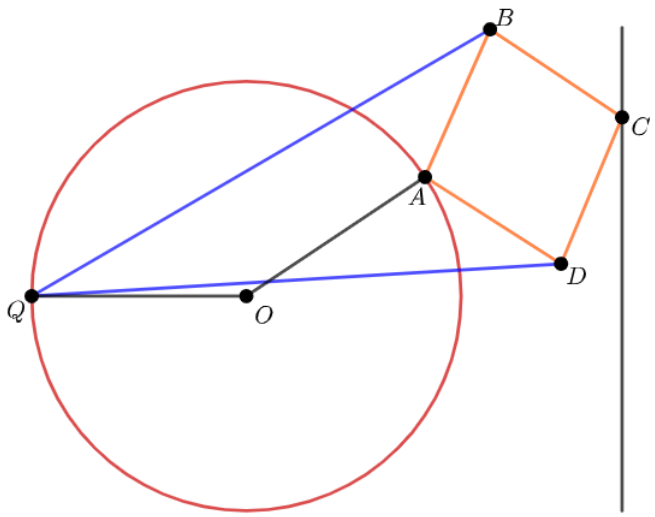


Şekil 4.28 $a = b$ ve $n = 3$ İken Süper Elips

Sonraki bölümde inversiyon dönüşümü ile ilgili tanım ve teoremler (Venema, 2012), (Blair, 2000), (Sezgin, 2014) ve (Bayar ve Ekmekçi, 2014) kaynakları esas alınarak oluşturulmuştur.

5. ÇEMBERE GÖRE İNVERSİYON DÖNÜŞÜMÜ

Geometride inversiyon, bir tür yansıma dönüşümüdür. Bir doğrudaki yansımanın, doğrunun bir tarafındaki noktaları diğer tarafındaki noktalara eşlemesi gibi bir çembere göre inversiyon dönüşümü de çemberin içindeki noktaları dışındaki noktalara eşlerken, dışındaki noktaları çemberin içine ve çember üzerindeki noktaları da kendisine eşler. Ayrıca inversiyon dönüşümü, çemberleri ve doğruları başka çemberlere ve doğrulara dönüştürür, aynı zamanda kesişen eğriler arasındaki açılar da korunur (Brannan vd., 2011). Geometride birçok zor problemin çözümü inversiyon dönüşümü uygulandığında çok daha kolay hale gelir (Ptolemy Teoremi, Miquel Teoremi, Steiner Porizmi, Pappus Arbelosu vb.). Özellikle Apollonius Çemberi ile ilginç bir bağlantısı vardır. İnversiyon dönüşümünün başka bir ilginç uygulaması, çözülemez bir problem olarak düşünülen çembersel hareketi doğrusal harekete dönüştüren "Peaucellier Cell" adlı mekanik bir bağlantının temelini oluşturur (Yates, 1974), (Şekil 5.1).



Şekil 5.1 Peaucellier Cell

Çemberselden doğrusala böyle bir hareket değişikliği birçok farklı mekanik ortamda meydana gelir. Bu anlamda inversiyon dönüşümü birçok alanda oldukça ilgi çekici konulardan biridir.

5.1 Öklidyen Çembere Göre İnversiyon Dönüşümünün Özellikleri

Tanım 5.1 *(Venema, 2012, Definition 10.7.1.) C, $\mathbb{R}^2$ de merkezi O noktası olan r yarıçaplı bir çember olsun. C çemberine göre inversiyon dönüşümü $\psi : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \longmapsto \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ olmak üzere $\psi(P) = P'$ olarak tanımlanır öyle ki P', $\overrightarrow{OP}$ ışını üzerindedir ve $d_E(O,P) \cdot d_E(O,P') = r^2$ dir. P' noktasına P nin inversi, C ye inversiyon çemberi, O ya inversiyon merkezi, r ye inversiyon yarıçapı ve r^2 ye ise inversiyon kuvveti denir.*

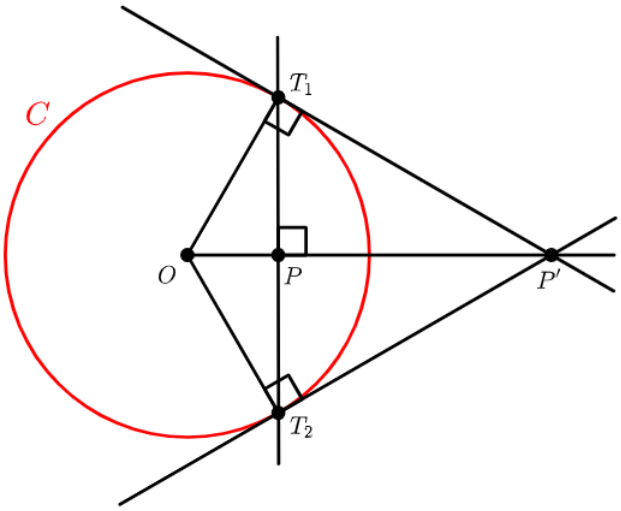
Bir P noktasının inversi P' ise P' noktasının inversinin de P noktası olması gerektiği $d_E(O,P) \cdot d_E(O,P') = r^2$ bağıntısından dolayı açıktır. Ayrıca bir P noktası C çemberinin içindeyse $d_E(O,P) < r$ dir ve $d_E(O,P) \cdot d_E(O,P') = r^2$ bağıntısının sağlanması için $d_E(O,P') > r$ olması gerekir. Yani C çemberinin içindeki noktaların inversleri C çemberinin dışındaki noktalara ve C çemberinin dışındaki noktaların inversleri de C çemberinin içinde noktalara dönüşür. C çemberinin üzerindeki bir noktanın inversi, o noktanın kendisidir. Yani bir P noktasının C çemberinin üzerinde olması durumunda $d_E(O,P) = r$ dir. $d_E(O,P) \cdot d_E(O,P') = r^2$ bağıntısının sağlanması için de $d_E(O,P') = r$ olmalıdır. Bu durumda $P' \in \overrightarrow{OP}$ olması gerektiğinden $P = P'$ olduğu görülür. Bu önermenin tersi de geçerlidir.

İnversiyon dönüşümü O noktası için tanımlı değildir. Ancak O ya yakın noktalar O dan uzak noktalara ve O dan uzaktaki noktalar O ya yakın noktalara dönüşür. Nitekim, Öklid düzleminin hemen dışında bir O_∞ noktası (ideal nokta veya sonsuzdaki bir nokta) eklenerek, tanım kümesine O noktası dahil edilebilir. $\psi(O_\infty) = O$ ve $\psi(O) = O_\infty$ olarak alınırsa inversiyon dönüşümü genişletilmiş düzlemde bire bir dönüşüm olur ve bu düzlem $\mathbb{R}^2_\infty$ ile gösterilir. Bu durumda inversiyon dönüşümünü tekrar tanımlamak gerekirse;

Tanım 5.2 *(Venema, 2012, Definition 10.7.2.) C, $\mathbb{R}^2_\infty$ de merkezi O noktası olan r yarıçaplı bir çember olsun. C çemberine göre inversiyon dönüşümü $\psi : \mathbb{R}^2_\infty \longmapsto \mathbb{R}^2_\infty$ olmak üzere $P \neq O, O_\infty$ iken $\psi(P) = P'$ olarak tanımlanır öyle ki P', $\overrightarrow{OP}$ ışını üzerindedir ve $d_E(O,P) \cdot d_E(O,P') = r^2$ dir. Ayrıca $\psi(O_\infty) = O$ ve $\psi(O) = O_\infty$ dur.*

Bir noktanın inversiyon dönüşümü altındaki görüntüsü geometrik olarak gösterilebilir. Burada bir P noktasının C çemberi içinde olması ve C çemberinin dışında olması gibi iki durum söz konusudur.

P, C çemberinin içinde bir nokta ise P noktasından $\overrightarrow{OP}$ ışınına dik bir doğru çizilir. Bu doğrunun C çemberi ile kesiştiği noktalar T_1 ve T_2 olsun. C çemberine T_1 ve T_2 noktalarında teğetler çizilir. Çizilen teğetlerin $\overrightarrow{OP}$ ışını ile kesiştikleri nokta, P nin inversiyon dönüşümü altındaki görüntüsü olan P' noktasıdır (Şekil 5.2). Gerçekten,



Şekil 5.2 C nin İçindeki Bir P Noktasının İnversi

burada $\triangle OPT_1 \sim \triangle OT_1P'$ dir. Dolayısıyla bu iki üçgen için

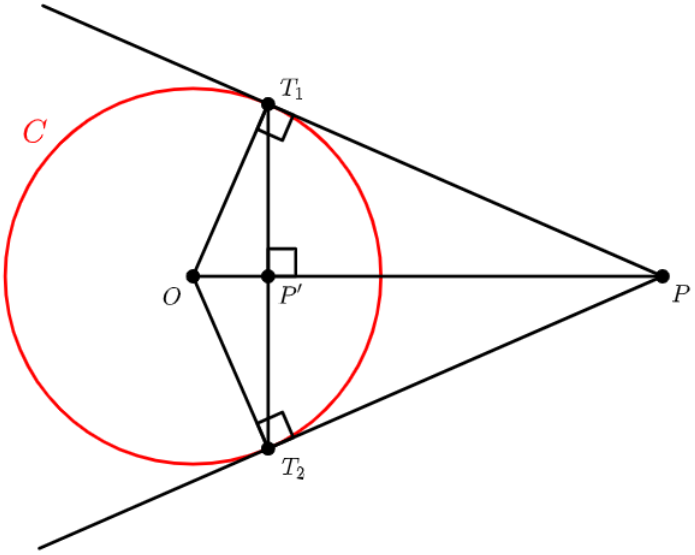
$$\frac{d_E(O,P)}{d_E(O,T_1)} = \frac{d_E(O,T_1)}{d_E(O,P')}$$

eşitliği verilebilir. $d_E(O,T_1) = r$ olduğu için eşitlikte gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$d_E(O,P) \cdot d_E(O,P') = r^2$$

olduğu görülür.

P, C çemberinin dışında bir nokta ise P noktasından C çemberine teğetler çizilir. Bu teğetlerin C çemberi ile keşistiği noktalar T_1 ve T_2 olsun. $\overline{T_1T_2}$ doğru parçası ve $\overrightarrow{OP}$ ışınının kesiştikleri nokta, P nin inversiyon dönüşümü altındaki görüntüsü olan P' noktasıdır (Şekil 5.3). Benzer bir şekilde,



Şekil 5.3 C nin Dışındaki Bir P Noktasının İnversi

burada $\triangle OPT_1 \sim \triangle OT_1P'$ dir. Dolayısıyla bu iki üçgen için

$$\frac{d_E(O,P)}{d_E(O,T_1)} = \frac{d_E(O,T_1)}{d_E(O,P')}$$

eşitliği verilebilir. $d_E(O,T_1) = r$ olduğu için eşitlikte gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$d_E(O,P) \cdot d_E(O,P') = r^2$$

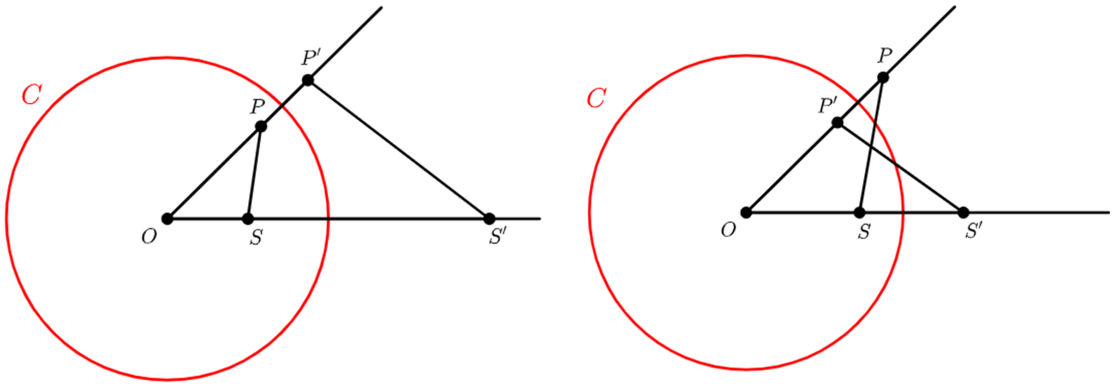
olduğu görülür.

İnversiyonun bir dönüşüm olduğu açıktır. Ancak inversiyon dönüşümü Öklidyen düzlemde uzaklıkları korumaz ve bu nedenle bir inversiyon dönüşümü Öklidyen düzlem için kesinlikle bir izometri değildir. Uzaklıklar inversiyon dönüşümleri ile korunmamasına rağmen, korunan başka geometrik özellikler vardır. Bölümün geri kalanındaki teoremlerin tümü, belirli üçgenlerin benzer üçgenlere dönüştüğü gerçeğine dayanmaktadır. Bu durumla ilgili ilk olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.1 *(Venema, 2012, Theorem 10.7.3.) ψ bir inversiyon ve P, S noktalarının inversleri sırasıyla P', S' olsun. P ve S noktaları O ile doğrudaş değilse, $\triangle OPS$ üçgeni ve $\triangle OS'P'$ üçgeni birbiriyle benzerdir.*

İspat *İnversiyonun tanımından dolayı* $d_E(O,P)\cdot d_E(O,P') = r^2 = d_E(O,S)\cdot d_E(O,S')$ *dir. Dolayısıyla* $\dfrac{d_E(O,P)}{d_E(O,S)} = \dfrac{d_E(O,S')}{d_E(O,P')}$ *yazılabilir. Ayrıca* $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'}$ *ve* $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OS'}$ *olduğu için* $\angle POS = \angle P'OS'$ *dür. Bu nedenle benzerlik kuralı gereği* $\triangle OPS \sim \triangle OS'P'$ *dür.*

Verilen teorem ile ilgili olarak aşağıdaki gibi iki durum söz konusudur (Şekil 5.4).

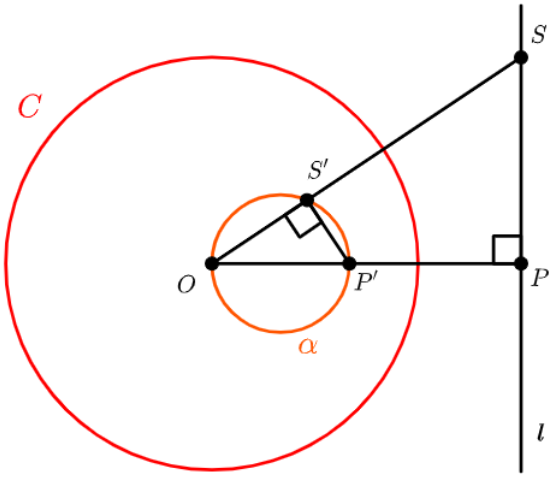


Şekil 5.4 İnversiyon Dönüşümü Altında $\triangle OPS$ ve $\triangle OS'P'$ Benzerliği

Teorem 5.2 *(Venema, 2012, Theorem 10.7.4.)* ψ *bir inversiyon ve* l *inversiyon merkezinden geçmeyen bir doğru ise* $\psi(l\cup\{O_\infty\})$ *inversiyon merkezinden geçen bir çemberdir.*

İspat O *noktasından* l *doğrusuna dik bir doğru çizilir. Çizilen doğrunun* l *doğrusu ile kesiştiği nokta* P *olsun.* $\psi(P) = P'$ *olmak üzere* α*, çapı* $\overline{OP'}$ *doğru parçası olan bir çember olsun.* $\psi(l\cup\{O_\infty\}) = \alpha$ *olduğu gösterilmelidir.*

S*,* l *doğrusu üzerinde herhangi bir nokta olsun.* $S = P$ *ise* S' *noktasının* α *çemberi üzerinde olduğu açıktır.* $S \neq P$ *olarak kabul edilsin. Teorem 5.1 gereği* $\angle OPS \cong \angle OS'P'$ *dür. Dolayısıyla* $\angle OS'P'$ *dik bir açı ve* $\overline{OP'}$ *çapını gördüğü için* α *çemberi üzerinde bir çevre açıdır. Bu nedenle* S'*,* α *çemberi üzerindedir.* $\psi(O_\infty) = O$ *olduğu için* ψ*,* $l\cup\{O_\infty\}$ *doğrusunu* α *çemberine dönüştürür. İspatı tamamlamak için* α *çemberi üzerindeki her noktanın* $l\cup\{O_\infty\}$ *nun bir noktasının görüntüsü olduğunu gösterilmelidir.* N*,* α *çemberi üzerinde bir nokta olarak alınsın.* $N = O$ *ise* $N = \psi(O_\infty)$ *dir.* $N \neq O$ *ise* $\angle ONP'$ *dik ve çapı gören çevre açıdır. Bu nedenle* $\angle OPN'$ *de dik bir açıdır (Teorem 5.1) ve* N'*,* l *doğrusu üzerindedir.* $S = N'$ *olduğundan* $N = \psi(S)$ *dir (Şekil 5.5).*



Şekil 5.5 O dan Geçmeyen Bir l Doğrusunun İnversi

Sonuç 5.1 *(Venema, 2012, Corollary 10.7.5.)* *ψ bir inversiyon ve α inversiyon merkezinden geçen bir çember ise $\psi(\alpha)$ inversiyon merkezinden geçmeyen bir l doğrusudur.*

Teorem 5.3 *(Venema, 2012, Theorem 10.7.6.)* *ψ bir inversiyon ve l inversiyon merkezinden geçen bir doğru ise $\psi(l)$ bu doğrunun kendisidir.*

Teorem 5.4 *(Venema, 2012, Theorem 10.7.7.)* *ψ bir inversiyon ve α inversiyon merkezinden geçmeyen bir çember ise $\psi(\alpha)$ inversiyon merkezinden geçmeyen bir çemberdir.*

İspat *α, merkezi M olan m yarıçaplı bir çember olsun. Eğer $M = O$ ise $\psi(\alpha)$ nın merkezi O olan $\frac{r^2}{m}$ yarıçaplı bir çember olduğu görülür. $M \neq O$ olarak kabul edilsin. Bu durumda $\overleftrightarrow{OM}$ doğrusu α yı iki noktada keser. Bu noktalar S ve N olarak adlandırılsın ve bu noktaların inversleri sırasıyla S' ve N' olarak gösterilsin. Çapı $\overline{S'N'}$ doğru parçası olan β çemberi çizilsin. $\psi(\alpha) = \beta$ olduğu gösterilmelidir. Bu da bir P noktasının (S ve N den farklı) α çemberi üzerinde olması için gerek ve yeter koşulun inversi olan P' noktasının β çemberi üzerinde olması gerektiği anlamına gelir. Aslında $\angle N'P'S'$ nün dik açı olması için gerek ve yeter koşul $\angle SPN$ nin dik açı olması durumunun kanıtlanması yeterlidir. Burada $\mu(XYZ)$ ifadesi $\angle XYZ$ açısının ölçüsünü ve $\sigma(\triangle XYZ)$ ifadesi de $\triangle XYZ$ nin iç açılar toplamını göstermek üzere*

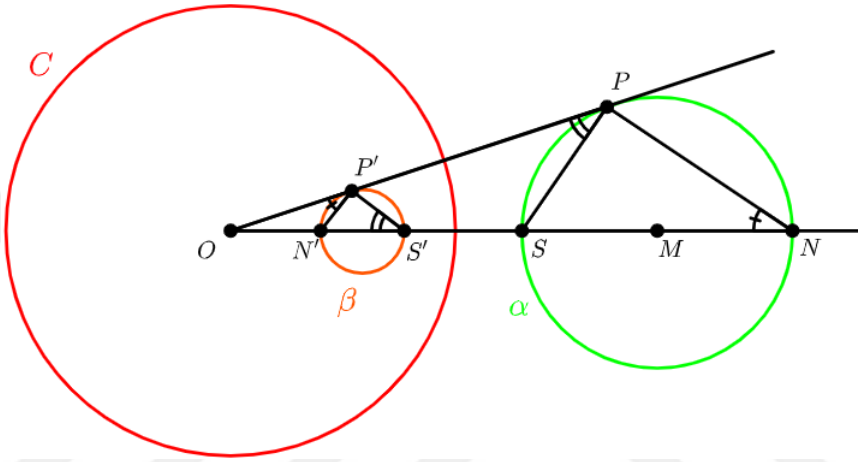
P (S ve N den farklı), α çemberi üzerinde bir nokta olsun. Teorem 5.1 gereğince $\angle OS'P' \cong \angle OPS$ ve $\angle OP'N' \cong \angle ONP$ dir. Bu durumda

$$\mu(\angle N'P'S') = \sigma(\triangle OP'S') - \mu(\angle OP'N') - \mu(\angle OS'P') - \mu(\angle P'OS') = 90°$$

ve

$$\mu(\angle NPS) = \sigma(\triangle OPN) - \mu(\angle ONP) - \mu(\angle OPS) - \mu(\angle PON) = 90°$$

olduğu için $\mu(\angle N'P'S') = \mu(\angle SPN)$ dir. Dolayısıyla $\angle N'P'S'$ nün dik açı olması için gerek ve yeter koşul $\angle SPN$ nin dik açı olmasıdır (Şekil 5.6).



Şekil 5.6 O dan Geçmeyen Bir α Çemberinin İnversi

Bundan sonra Teorem 5.5 den Teorem 5.7 ye kadar olan kısımda inversiyon dönüşümünün özellikleri kullanılarak iki çemberin birbirine dik olması ile ilgili teoremler verilecektir.

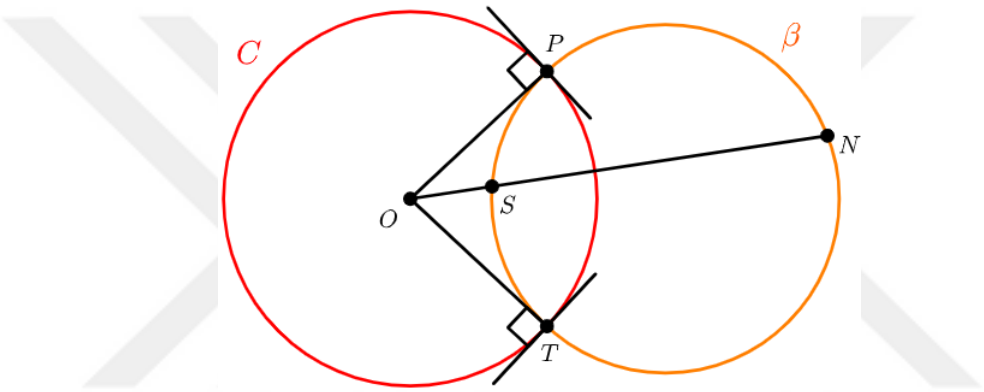
Tanım 5.3 *(Venema, 2012, Definition 10.7.8.) α ve β çemberleri iki noktada kesişiyor ve kesiştikleri noktalarda çizilen teğet doğruları birbirlerine dik ise α ve β birbirlerine diktir.*

Teorem 5.5 *(Venema, 2012, Theorem 10.7.9.) ψ bir inversiyon ve β çemberi C çemberine dik ise $\psi(\beta) = \beta$ dır.*

Bu teorem, β çemberi üzerindeki noktalarının ψ inversiyon dönüşümüne göre sabit noktalar olduğunu iddia etmez. Aslında C çemberinin içinde kalan β çemberinin yayı C çemberinin dışındaki β çemberinin yayına ve C çemberinin dışında kalan β çemberinin yayı da C çemberinin içindeki β çemberinin yayına dönüşür.

İspat *β ve C çemberlerinin kesiştikleri noktalar P ve T olsun. Teğet ve çemberin yarıçapı dik olduğu için $\overleftrightarrow{OP}$ ve $\overleftrightarrow{OT}$, β ya teğettir. Bundan şu sonuç çıkar ki O, β nın dışındadır ve özellikle O, β nın üzerinde bulunmaz. $\psi(P) = P$ ve $\psi(T) = T$ olduğu açıktır. Eğer S, β üzerinde herhangi bir farklı nokta ise $\overleftrightarrow{OS}$, β yı iki noktada kesen bir doğrudur. İkinci nokta N olarak adlandırılsın.*

O noktasının kuvveti β çemberine göre $d_E(O,S) \cdot d_E(O,N) = (d_E(O,P))^2 = r^2$ olarak tanımlanır. Dolayısıyla $\psi(S) = N$ ve $\psi(N) = S$ dir. Bu nedenle β çemberi üzerindeki her noktanın görüntüsü β çemberi üzerinde başka bir noktadır ve β çemberi üzerindeki her nokta, β çemberinin bir noktasının görüntüsüdür. Başka bir deyişle $\psi(\beta) = \beta$ dır (Şekil 5.7).



Şekil 5.7 C ye Dik Olan Bir β Çemberinin İnversi

Teorem 5.6 *(Venema, 2012, Theorem 10.7.10.) ψ bir inversiyon iken C ve β iki çember olsun. Eğer β çemberi üzerinde S gibi bir nokta var ve $S \neq S'$ iken $\psi(S) = S'$ noktası da β üzerinde olursa C, β ya diktir.*

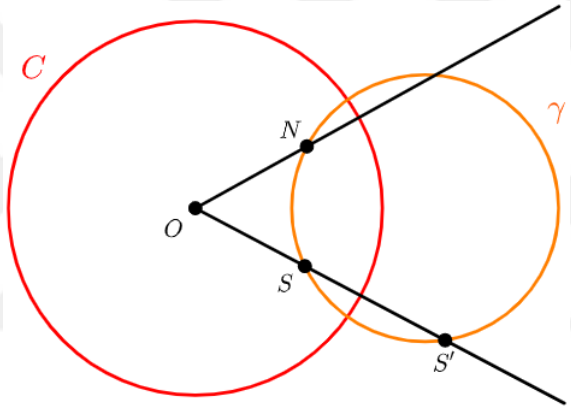
İspat *S ve S', C çemberinin karşıt taraflarında olduğundan β çemberi C yi iki noktada kesiyor olmalıdır. Bu noktalar P ve T olarak adlandırılsın. P noktası C nin üzerinde olduğu için $(d_E(O,P))^2 = r^2$ dir. Ayrıca inversiyon dönüşümünün tanımı gereğince $d_E(O,S) \cdot d_E(O,S') = r^2$ dir. C nin bir yarıçapının β ya teğet olması, C nin β ya dik olması anlamına gelir.*

Bu teorem bir önceki teoreme göre daha güçlü bir teoremdir. Buradan aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

Sonuç 5.2 *(Venema, 2012, Corollary 10.7.11.) ψ bir inversiyon iken C ve β iki çember olsun. C çemberinin β çemberine dik olması için gerek ve yeter koşul $\psi(\beta) = \beta$ olmasıdır.*

Sonuç 5.3 *(Venema, 2012, Corollary 10.7.12.) ψ bir inversiyon iken C bir çember ve N, S bu çemberin içinde fakat aynı çapın üzerinde olmayan iki nokta olsun. O halde N ve S noktalarının ikisi de bir tek γ çemberi üzerindedir ve γ çemberi, C çemberine diktir.*

İspat *N ve S noktaları aynı çapın üzerinde olmadığı kabul edildiğinden bu noktaların ikisi de O ya eşit değildir. Ayrıca N, S ve $\psi(S) = S'$ nün doğrusal olmadığı da görülür. N, S ve S' den bir tek çember geçer. Bu çember γ olarak adlandırılsın. Teorem 5.6 gereğince γ çemberi, C çemberine diktir (Şekil 5.8).*

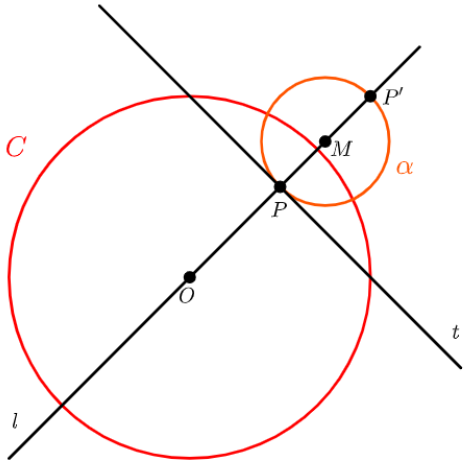


Şekil 5.8 C ye Dik Olan Bir γ Çemberi

Teorem 5.7 *(Venema, 2012, Theorem 10.7.13.) ψ bir inversiyon iken C bir çember ve P noktası C çemberinin içinde O noktasından farklı bir nokta olsun. P noktasından geçen ancak O noktasından geçmeyen her t doğrusu için, t doğrusuna P noktasında teğet ve C çemberine dik olacak şekilde bir tek α çemberi vardır.*

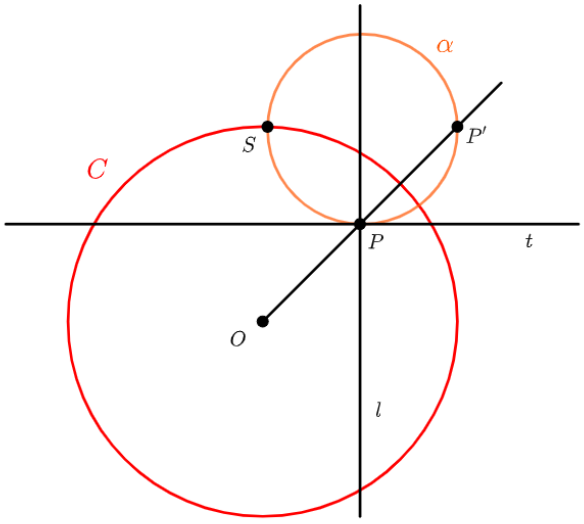
İspat *l, P den geçen ve t ye dik olan bir doğru olarak kabul edilsin. Burada O nun l doğrusu üzerinde olması ve olmaması gibi iki durum söz konusudur.*

O noktası l doğrusu üzerinde ise P nin inversiyon dönüşümü altındaki görüntüsü olan P' de l doğrusu üzerindedir. $\overline{PP'}$ doğru parçasının orta noktası M ve merkezi M noktası olan $d_E(M, P)$ yarıçaplı çember α olarak tanımlansın. Teorem 5.6 dan dolayı α çemberi, C çemberine diktir. Bu nedenle t doğrusu, α çemberine P noktasında teğettir (Şekil 5.9).



Şekil 5.9 O nun l Doğrusu Üzerinde Olması Durumu

O noktası l doğrusu üzerinde değil ise P nin inversiyon dönüşümü altındaki görüntüsü olan P' de l doğrusu üzerinde değildir. P' noktasının l doğrusuna göre yansıması $\rho_l(P') = S$ olarak tanımlansın. P, P' ve S den tek bir çember geçer. Bu çember α olarak adlandırılsın. Hem P hem de P' nün α çemberi üzerinde olması, α nın C ye dik olduğunu gösterir (Teorem 5.6). Ayrıca P' ve S noktaları da α çemberi üzerinde olduğu için α nın merkezi l doğrusu üzerindedir. P, α üzerinde bulunduğundan ve α nın merkezi P noktasında t ye dik doğru üzerinde olduğundan t nin P noktasında α ya teğet olduğu ortaya çıkar (Şekil 5.10).



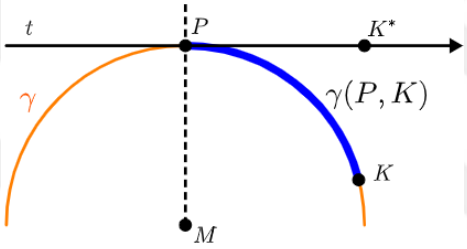
Şekil 5.10 O nun l Doğrusu Üzerinde Olmaması Durumu

İnversiyon dönüşümü çemberler ve doğrular arasındaki açıları korur. Bunu göstermek için ilk önce bu tür açılarla ne kastedildiği açıklanmalıdır.

Gösterim 5.1 *Merkezi M noktası olan çember γ olarak adlandırılsın. P, γ çemberi üzerinde bir nokta olsun. γ çemberi üzerinde ikinci bir K noktası seçilsin ve seçilen bu K noktası P nin tam karşısında olmasın. γ üzerindeki P den K ya kadar olan çember yayı $\gamma\left(P,K\right)$ olarak gösterilecektir.*

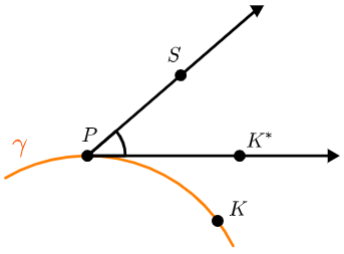
$$\gamma\left(P,K\right)=\{P,K\}\cup\{S\mid S,\ \gamma\ \textit{üzerinde ve}\ \angle PMK\ \textit{açısı içindedir.}\}$$

Bu gösterime göre γ çemberine P noktasında teğet olan t doğrusu çizilir ve t doğrusu üzerinde bir K^* noktası seçilir. Burada K ve K^* noktaları $\overleftrightarrow{MP}$ doğrusunun aynı tarafındadır. Bu durumda $\overrightarrow{PK^*}$ ışınının P noktasında $\gamma\left(P,K\right)$ yayına teğet olduğu görülür (Şekil 5.11).

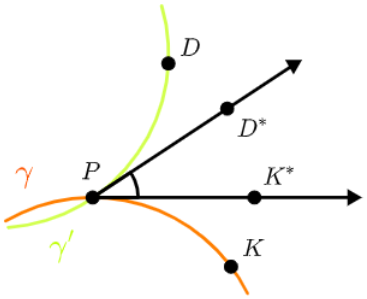


Şekil 5.11 γ Yayına P Noktasında Teğet Olan t Işını

Tanım 5.4 *(Venema, 2012, Definition 10.7.14.) $\gamma\left(P,K\right)$ çember yayı ile $\overrightarrow{PS}$ ışınının arasındaki açı, $\angle K^*PS$ açısı olarak tanımlanır. Eğer γ' ikinci bir çember ve γ' çemberi üzerindeki nokta D ise $\gamma\left(P,K\right)$ ve $\gamma'\left(P,D\right)$ çember yayları arasındaki açı, $\angle K^*PD^*$ açısı olarak tanımlanır (Şekil 5.12, Şekil 5.13).*



Şekil 5.12 $\gamma\left(P,K\right)$ Çember Yayı Ve $\overrightarrow{PS}$ Işını Arasındaki Açı



Şekil 5.13 $\gamma\,(P,K)$ ve $\gamma'\,(P,D)$ Çember Yayları Arasındaki Açı

Yani açının kolları veya kollarından biri çember yayı olduğunda açı ölçüsü ilgili noktada çemberin teğeti kullanılarak belirlenir.

Artık inversiyon dönüşümü altında keyfi olarak alınan doğrular ve çemberler arasındaki açıların korunduğu gösterilebilir. Burada iki tane özel durum söz konusudur.

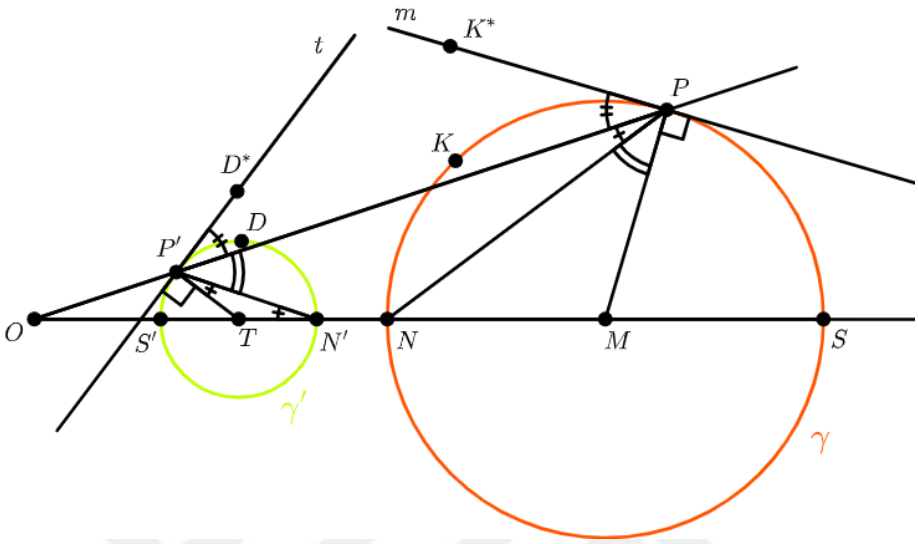
Teorem 5.8 *(Venema, 2012, Theorem 10.7.15.) ψ bir inversiyon ve γ inversiyon merkezinden geçmeyen bir çember olsun. γ çemberi üzerinde bir P noktası ve P noktasının tam karşısında olmayan bir K noktası seçilsin. O halde $\gamma\,(P,K)$ çember yayı ile $\overrightarrow{PP'}$ ışını arasındaki açı, $\gamma'\,(P',K')$ çember yayı ile $\overrightarrow{P'P}$ ışını arasındaki açı eşdeğerdir.*

İspat *γ çemberinin merkezi M olsun. $M = O$ ise γ ile C çemberleri ya birbiriyle tamamen aynı ya da ayrıklardır. İlk durumda sonuç mantıksızdır. İkinci durumda $\psi\,(\gamma)$ eş merkezli bir çemberdir.*

$M \neq O$ olarak kabul edilsin. N ve S, $\overleftrightarrow{OM}$ doğrusunun γ çemberini kestiği noktalar olsun. N ve S noktaların inversiyon dönüşümü altındaki görüntüleri sırasıyla N' ve S' olsun. γ inversiyon merkezinden geçmeyen bir çember olduğundan Teorem 5.4 gereği $\psi\,(\gamma) = \gamma'$ de bir çemberdir. Gösterimi basitleştirmek için γ' çemberinin merkezi T olarak ve K noktasının inversiyon dönüşümü altındaki görüntüsü de D $(D = K')$ olarak gösterilecektir. $\angle PP'D^* \cong \angle P'PK^*$ olduğu gösterilmelidir.

$\angle TP'D^*$ ve $\angle MPK^*$ açılarının dik açılar olduğu şekil üzerinde gözlemlenebilir. Dolayısıyla $\angle TP'N' \cong \angle NPP'$ ve $\angle N'P'P \cong \angle MPN$ olduğunu göstermek yeterlidir. Teorem 5.1 gereği $\triangle OP'N'$ ve $\triangle ONP$ üçgenlerinin benzer olduğu açıktır. Bu

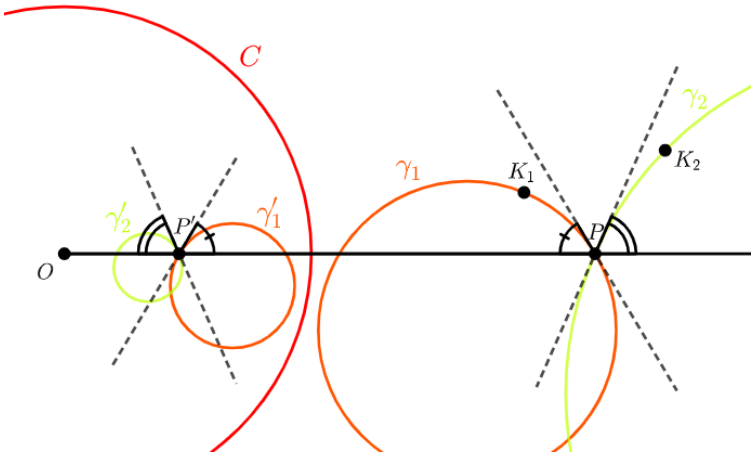
nedenle $\angle OP'N' \cong \angle ONP$ ve $\angle TN'P' \cong \angle NPP'$ dir. Bu durumda $\angle N'P'P \cong \angle MNP$ olduğu görülür. $\triangle TP'N'$ ve $\triangle MNP$ üçgenleri ikizkenar üçgen olduğu için $\angle TN'P' \cong \angle TP'N'$ ve $\angle MNP \cong \angle MPN$ dir. Bu durumda $\angle TP'P \cong \angle MPP'$ olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla $\angle PP'D^* \cong \angle P'PK^*$ dır (Şekil 5.14).



Şekil 5.14 İnversiyon Dönüşümü Altında Açıların Korunması

Teorem 5.9 *(Venema, 2012, Theorem 10.7.16.) ψ bir inversiyon ve l, O noktasından geçmeyen bir doğru olsun. l doğrusunun inversiyon dönüşümü altındaki görüntüsü, γ' çemberi olsun. P ve K, l doğrusu üzerinde farklı iki nokta ve bu noktaların inversiyon dönüşümü altındaki görüntüleri sırasıyla P' ve K' ise $\angle P'PK$ açısı, $\gamma'(P', K')$ çember yayı ve $\overrightarrow{P'P}$ ışını arasındaki açıya eşdeğerdir.*

Teorem 5.10 *(Venema, 2012, Theorem 10.7.17.) ψ bir inversiyon, γ_1 ve γ_2 ya birer doğru ya da birer çember olsunlar. K_1 ve K_2 sırasıyla γ_1 ve γ_2 üzerinde birer nokta ve P de her ikisi üzerinde bir nokta olsun. O halde $\gamma_1(P, K_1)$ ve $\gamma_2(P, K_2)$ çember yayları arasındaki açı, $\gamma_1'(P', K_1')$ ve $\gamma_2'(P', K_2')$ çember yayları arasındaki açıya eşdeğerdir (Şekil 5.15).*



Şekil 5.15 İnversiyon Dönüşümü Altında Çember Yayları Arasındaki Açının Korunması

Gerçekte inversiyon dönüşümü sadece herhangi doğrular ve çemberler arasındaki açıları korumakla kalmaz. Aslında inversiyon dönüşümü geniş anlamda konformal bir dönüşümdür. Bununla ilgili detaylı bilgi için Blair' e (2000) bakılabilir.

İnversiyon dönüşümü altında bir noktanın koordinatları analitik olarak aşağıdaki gibi verilir.

Teorem 5.11 *C, merkezi $O=(x_0,y_0)$ noktası olan r yarıçaplı bir çember ve ψ, C çemberine göre inversiyon dönüşümü olsun. $P=(x_1,y_1)$ olmak üzere $\psi(P)=P'=(x_2,y_2)$ ise*

$$x_2 = \frac{r^2(x_1-x_0)}{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}+x_0$$

$$y_2 = \frac{r^2(y_1-y_0)}{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}+y_0$$

dir.

İspat *$O=(x_0,y_0)$, $P=(x_1,y_1)$ ve $P'=(x_2,y_2)$ noktaları $\overrightarrow{OP}$ ışını üzerinde olduğu için doğrudaştır. $\overrightarrow{OP}$ ve $\overrightarrow{OP'}$ ışınları aynı doğrultuda olduğundan $k\in\mathbb{R}^+$ olmak üzere*

$$\overrightarrow{OP'}=k\overrightarrow{OP}$$

olup, açıkça ifade edilirse

$$(x_2-x_0,y_2-y_0)=k(x_1-x_0,y_1-y_0) \tag{5.1}$$

olarak verilir. Buna göre inversiyon dönüşümünün tanımı (5.1) *bağıntısından elde edilen* $x_2 - x_0 = k(x_1 - x_0)$ *ve* $y_2 - y_0 = k(y_1 - y_0)$ *için tekrar düzenlenirse*

$$\begin{aligned} r^2 &= d_E(O,P) \cdot d_E(O,P') \\ &= \sqrt{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2} \cdot \sqrt{(x_2-x_0)^2 + (y_2-y_0)^2} \\ &= \sqrt{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2} \cdot \sqrt{(k(x_1-x_0))^2 + (k(y_1-y_0))^2} \\ &= \sqrt{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2} \cdot k\sqrt{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeler ile

$$k = \frac{r^2}{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2}$$

olarak bulunur ve (5.1) *için eşitlik düzenlenirse*

$$\begin{aligned} (x_2-x_0, y_2-y_0) &= \frac{r^2}{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2}(x_1-x_0, y_1-y_0) \\ &= \left(\frac{r^2(x_1-x_0)}{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2}, \frac{r^2(y_1-y_0)}{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2} \right) \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla son eşitlikten faydalanarak düzenlemeler ile

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{r^2(x_1-x_0)}{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2} + x_0 \\ y_2 &= \frac{r^2(y_1-y_0)}{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2} + y_0 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Sonuç 5.4 *C, merkezi $O = (0,0)$ noktası olan r yarıçaplı bir çember ve ψ, C çemberine göre inversiyon dönüşümü olsun. $P = (x_1, y_1)$ olmak üzere $\psi(P) = P' = (x_2, y_2)$ ise*

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{r^2 x_1}{(x_1)^2 + (y_1)^2} \\ y_2 &= \frac{r^2 y_1}{(x_1)^2 + (y_1)^2} \end{aligned}$$

dir.

İnversiyon dönüşümü altında Öklidyen uzaklıklar korunmaz ancak uzaklıkların kombinasyonu olan çifte oran korunur. Çifte oran verilmeden önce Öklidyen uzaklığın inversiyon dönüşümü altında nasıl biçimlendiğini inceleyen yardımcı teoremler verilecektir.

$\mathbb{R}^2$ de bir l doğrusu boyunca M noktasından N noktasına kadar olan yönlü uzaklık $\overrightarrow{MN}$ olarak gösterilir. Yani, başlangıç noktası M olan ve N yi içeren ışın pozitif bir yön veya yönlendirme olup, $\overrightarrow{MN} = d_E(M,N)$ dir. Işın ters yönlü ise negatif yön veya yönlendirme olup, $\overrightarrow{NM} = -d_E(M,N)$ dir. Dolayısıyla açıkça $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{NM}$ dir (Blair, 2000).

Yardımcı Teorem 5.1 *(Blair, 2000, Lemma 1.1.)* M, N *ve* R *doğrudaş noktalalar ise* $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NR} + \overrightarrow{RM} = 0$ *dır.*

İspat R *noktası* M *ve* N *arasında ise* $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MR} + \overrightarrow{RN}$ *ya da* $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MR} - \overrightarrow{RN} = 0$ *olmalıdır. Dolayısıyla* $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NR} + \overrightarrow{RM} = 0$ *dır. Diğer durumlarda ispat benzerdir.*

Yardımcı Teorem 5.2 *(Blair, 2000, Lemma 1.2.)* MN *bir* l *doğrusunun doğru parçası ve* O*,* l *doğrusu üzerinde herhangi bir nokta olsun. O halde* $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$ *dir.*

İspat *Yardımcı Teorem 5.1 gereği* $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OM} = 0$ *olduğundan* $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$ *olarak bulunur.*

Yardımcı Teorem 5.3 *(Blair, 2000, Lemma 1.3.)* C*, merkezi* O *olan* r *yarıçaplı bir çember olsun.* M *ve* N *noktalarının inversiyon dönüşümü altında görüntüleri sırasıyla* M' *ve* N' *ise*

$$d_E(M', N') = \frac{r^2 d_E(M,N)}{d_E(O,M) \cdot d_E(O,N)}$$

dir.

İspat *Burada* O*,* M *ve* N *noktalarının doğrudaş olması ve olmaması gibi iki durum vardır.*

$i)$ O*,* M *ve* N *doğrudaş değil ise* O*,* M' *ve* N' *de doğrudaş değildir. O halde*

$$d_E(O,M) \cdot d_E(O,M') = r^2 = d_E(O,N) \cdot d_E(O,N')$$

dir. Aynı zamanda $\angle MON$ ve $\angle M'ON'$ açıları birbirine eşit olduğundan Teorem 5.1 gereği $\triangle ONM \sim \triangle OM'N'$ dir. Dolayısıyla benzerlik kuralı gereği

$$\frac{d_E(M', N')}{d_E(N, M)} = \frac{d_E(O, M')}{d_E(O, N)}$$

olmalıdır. Eşitlikte gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$d_E(M', N') = \frac{d_E(N, M) \cdot d_E(O, M')}{d_E(O, N)}$$

olarak bulunur. Burada eşitliğin sağ tarafı $d_E(O, M)$ ile çarpılıp bölünürse

$$d_E(M', N') = \frac{d_E(N, M) \cdot d_E(O, M')}{d_E(O, N)} \cdot \frac{d_E(O, M)}{d_E(O, M)}$$

elde edilir. Ayrıca $d_E(O, M) \cdot d_E(O, M') = r^2$ olduğundan yukarıdaki son eşitlik düzenlenirse

$$d_E(M', N') = \frac{r^2 d_E(M, N)}{d_E(O, M) \cdot d_E(O, N)}$$

sonucuna ulaşılır.

$ii)$ *O, M ve N doğrudaş ise O, M' ve N' de doğrudaştır. Buna göre*

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = r^2 = \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{ON'}$$

dir. Burada Yardımcı Teorem 5.2 gereği $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NM} - \overrightarrow{NO}$ ve $\overrightarrow{ON'} = \overrightarrow{M'N'} - \overrightarrow{M'O}$ olduğundan

$$\left(\overrightarrow{NM} - \overrightarrow{NO}\right) \cdot \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{ON} \cdot \left(\overrightarrow{M'N'} - \overrightarrow{M'O}\right)$$

olarak bulunur. Yukarıdaki eşitlikte gerekli sadeşleştirmeler ve düzenlemeler yapıldığında

$$\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{OM'}$$

elde edilir. Burada eşitlik düzenlenip sağ tarafı $\overrightarrow{OM}$ ile çarpılıp bölünürse

$$\overrightarrow{M'N'} = \frac{\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{OM'}}{\overrightarrow{ON}} \cdot \frac{\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{OM}}$$

olur. Buna göre $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = r^2$olduğundan gerekli düzenlemeler ile

$$\overrightarrow{M'N'} = \frac{\overrightarrow{NM} \cdot r^2}{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}}$$

sonucuna ulaşılır. Yani

$$d_E(M', N') = \frac{r^2 d_E(M, N)}{d_E(O, M) \cdot d_E(O, N)}$$

dir.

Tanım 5.5 *(Venema, 2012, Definition 10.7.18.)* M, N, P, S *birbirinden farklı dört nokta olsun.* $[MN, PS]$ *çifte oranı*

$$[MN, PS] = \frac{d_E(M,P) \cdot d_E(N,S)}{d_E(M,S) \cdot d_E(N,P)}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 5.12 *(Venema, 2012, Theorem 10.7.19.)* M, N, P, S *ve* O *birbirinden farklı doğrudaş noktalar ve* M, N, P, S *nin inversiyon dönüşümü altındaki görüntüleri* M', N', P', S' *olsun. O halde*

$$[MN, PS] = [M'N', P'S']$$

eşitliği vardır.

İspat

$$\begin{aligned}
[M'N', P'S'] &= \frac{d_E(M',P') \cdot d_E(N',S')}{d_E(M',S') \cdot d_E(N',P')} \\
&= \frac{\dfrac{r^2 d_E(M,P)}{d_E(O,M)\, d_E(O,P)} \cdot \dfrac{r^2 d_E(N,S)}{d_E(O,N)\, d_E(O,S)}}{\dfrac{r^2 d_E(M,S)}{d_E(O,M)\, d_E(O,S)} \cdot \dfrac{r^2 d_E(N,P)}{d_E(O,N)\, d_E(O,P)}} \\
&= \frac{d_E(M,P)\, d_E(N,S)}{d_E(M,S)\, d_E(N,P)} \\
&= [MN, PS]
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Sonuç olarak inversiyon dönüşümünün çifte oranı koruduğu görülür. İnversiyon dönüşümü çifte oran dışında önemli bir kavram olan harmonik eşlenikleri de korur.

Tanım 5.6 *(Blair, 2000)* M, N, P, S *bir doğru üzerindeki dört nokta olsun.* $(MN, PS) = -1$ *ise bu noktalar harmonik küme oluşturur denir. Bu küme* $H(MN, PS)$ *olarak gösterilir.* P *ile* S *ye sıraysıyla* M *ile* N *nin harmonik eşleniği denir.*

Teorem 5.13 C, $\mathbb{R}^2_\infty$ *de merkezi* O *noktası ve çapı* $[MN]$ *doğru parçası olan bir çember olsun.* P *ve* P', $[MN]$ *doğru parçasını içten ve dıştan bölen* $\overrightarrow{OM}$ *ışını üzerinde farklı iki*

nokta olsun. O halde P ve P' nün M ve N noktalarına göre harmonik eşlenikler olması için gerek ve yeter koşul P ve P' nün C inversiyon çemberine göre birbirlerinin invers noktaları olmasıdır.

İspat *P ve P' noktaları M ve N noktalarına göre harmonik eşlenikler olsun. O halde*

$$(MN, PP') = -1$$

olup buradan da

$$\frac{d_E[MP]}{d_E[MP']} \cdot \frac{d_E[NP']}{d_E[NP]} = -1$$

olarak verilir. P, $[MN]$ doğru parçasını içten böldüğü ve $\overrightarrow{ON}$ ışını üzerinde olduğundan $d_E(P,N) = r - d_E(O,P)$ ve $d_E(M,P) = r + d_E(O,P)$ dir. Ayrıca P', $[MN]$ doğru parçasını dıştan böldüğü ve $\overrightarrow{ON}$ ışını üzerinde olduğu için $d_E(M,P') = d_E(O,P') + r$ ve $d_E(N,P') = d_E(O,P') - r$ dir. Dolayısıyla

$$\frac{r + d_E(O,P)}{d_E(O,P') + r} \cdot \frac{d_E(O,P') - r}{d_E(O,P) - r} = -1$$

ise

$$(r + d_E(O,P)) \cdot (d_E(O,P') - r) = (d_E(O,P') + r) \cdot (r - d_E(O,P)) \qquad (5.2)$$

dir. (5.2) eşitliği sadeleştirilirse $d_E(O,P) \cdot d_E(O,P') = r^2$ olduğu görülür. Dolayısıyla P ve P', C inversiyon çemberine göre birbirlerinin invers noktalarıdır.

Tersine P ve P', C inversiyon çemberine göre invers noktalar olsun. O halde

$$d_E(O,P) \cdot d_E(O,P') = r^2$$

dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}(MN, PP') &= \frac{d_E[MP]}{d_E[MP']} \cdot \frac{d_E[NP']}{d_E[NP]} = \frac{d_E[MP]}{d_E[MP']} \cdot \frac{d_E[NP']}{-d_E[PN]} \\ &= \frac{d_E(M,O) + d_E(O,P)}{d_E(M,O) + d_E(O,P')} \cdot \frac{d_E(O,P') - d_E(O,N)}{-d_E(O,N) + d_E(O,P)}\end{aligned}$$

olup, $d_E(M,O) = d_E(O,N) = r$ dir. Buradan

$$(MN, PP') = \frac{r + d_E(O,P)}{r + d_E(O,P')} \cdot \frac{d_E(O,P') - r}{-r + d_E(O,P)}$$

olarak bulunur. Son eşitlikte gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$(MN, PP') = \frac{r \cdot d_E(O,P') - r^2 + d_E(O,P) \cdot d_E(O,P') - r \cdot d_E(O,P)}{r \cdot d_E(O,P) - r^2 + d_E(O,P) \cdot d_E(O,P') - r \cdot d_E(O,P')}$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler ve düzenlemeler ile

$$\begin{aligned}(MN, PP') &= \frac{r \cdot (d_E(O,P') - d_E(O,P))}{r \cdot (d_E(O,P) - d_E(O,P'))} \\ &= -1\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Böylelikle P ve P' nün M ve N ye göre harmonik eşlenikler olduğu görülür.

5.2 Taksi Çembere Göre İnversiyon Dönüşümünün Sentetik Ve Analitik Özellikleri

Tanım 5.7 *(Sezgin, 2014, Tanım 2.1.1) C_T, $\mathbb{R}^2$ de merkezi O noktası olan r_T yarıçaplı bir taksi çember olsun. C_T çemberine göre inversiyon dönüşümü $\psi : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \longmapsto \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ olmak üzere $\psi(P) = P'$ olarak tanımlanır öyle ki P', $\overrightarrow{OP}$ ışını üzerindedir ve $d_T(O,P) \cdot d_T(O,P') = r_T^2$ dir. P' noktasına P nin taksi inversi ya da kısaca $T-$inversi, C_T ye $T-$inversiyon çemberi, O ya $T-$inversiyon merkezi, r_T ye $T-$inversiyon yarıçapı ve r_T^2 ye ise $T-$inversiyon kuvveti denir.*

Öklidyen düzleme benzer şekilde bir P noktasının inversi P' noktası ise P' noktasının inversi de P dir. Yani $T-$inversiyon çemberinin içinde olan noktaların $T-$inversleri çemberin dışında, dışında olan noktaların $T-$inversleri de çemberin içinde olur. C_T çemberinin üzerindeki bir noktanın $T-$inversi, o noktanın kendisidir. Yani bir P noktası C_T çemberinin üzerinde ise $d_T(O,P) = r_T$ dir. $d_T(O,P) \cdot d_T(O,P') = r_T^2$ bağıntısının sağlanması için $d_T(O,P') = r_T$ olmalıdır. Bu durumda $P = P'$ olur. Bu önermenin tersi de geçerlidir.

Öklidyen düzlemde olduğu gibi O noktası için inversiyon dönüşümü taksi düzlemde de tanımlı değildir. Ancak O ya yakın noktalar O dan uzak noktalara ve O dan uzaktaki noktalar O ya yakın noktalara dönüşür. Bu nedenle taksi düzleme de düzlemin dışında olan bir O_∞ noktası (ideal nokta veya sonsuzdaki bir nokta) eklenerek, tanım kümesine O noktası dahil edilebilir. $\psi(O_\infty) = O$ ve $\psi(O) = O_\infty$ olarak alınırsa inversiyon genişletilmiş düzlemde bire bir dönüşüm olur ve bu düzlem $\mathbb{R}^2_\infty$ ile gösterilir. Bu durumda inversiyon dönüşümünü tekrar tanımlamak gerekirse;

Tanım 5.8 *(Sezgin, 2014, Tanım 2.1.1) C_T, $\mathbb{R}^2_\infty$ de merkezi O noktası olan r_T yarıçaplı bir taksi çember olsun. C_T çemberine göre inversiyon dönüşümü $\psi : \mathbb{R}^2_\infty \longmapsto \mathbb{R}^2_\infty$ olmak üzere*

$P \neq O, O_\infty$ iken $\psi(P) = P'$ olarak tanımlanır öyle ki P', $\overrightarrow{OP}$ ışını üzerindedir ve $d_T(O,P) \cdot d_T(O,P') = r_T^2$ dir. Ayrıca $\psi(O_\infty) = O$ ve $\psi(O) = O_\infty$ dur.

Bir noktanın $T-$inversiyon dönüşümü altındaki görüntüsü geometrik olarak verilebilir. Bunun için ilk olarak taksi düzlemle üçgenler arasındaki benzerlik gösterilmelidir. Ancak bu benzerlik her zaman sağlanmaz. Bunun için taksi düzlemde üçgenlerin hangi durumda benzer olduğu, yardımcı bir teorem verilerek gösterilecektir.

Yardımcı Teorem 5.4 *(Sezgin, 2014, Yardımcı Teorem 2.2.0.2) Taksi düzlemde ele alınan iki dik üçgenin dik kenarları yatay ve dikey doğrular üzerinde ve diğer açıları da karşılıklı olarak eşit ise bu üçgenler arasında benzerlik vardır.*

İspat *$\triangle KMN$ ve $\triangle PRF$ dik kenarları yatay ve dikey doğrular üzerinde olan herhangi iki dik üçgen olsun. Burada $\mu\left(\hat{X}\right)$ ifadesi açının ölçümünü göstermek üzere*

$$\begin{aligned} \mu\left(\hat{K}\right) &= \mu\left(\hat{P}\right) \\ \mu\left(\hat{M}\right) &= \mu\left(\hat{R}\right) \\ \mu\left(\hat{N}\right) &= \mu\left(\hat{F}\right) \end{aligned}$$

eşitlikleri verilsin. Gösterilmesi gereken

$$\frac{d_T(M,N)}{d_T(R,F)} = \frac{d_T(K,M)}{d_T(P,R)} = \frac{d_T(K,N)}{d_T(P,F)} = k$$

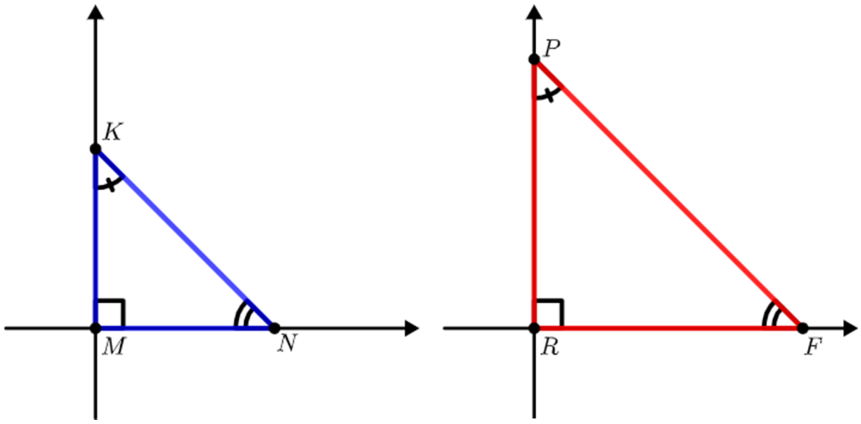
olduğudur. Verilen üçgenlerin dik kenarları yatay ve dikey doğrular üzerinde olduğu için bu kenarların taksi uzaklıkları, Öklidyen uzaklığa eşittir. Bu nedenle dik kenarlar arasında

$$\frac{d_T(M,N)}{d_T(R,F)} = \frac{d_T(K,M)}{d_T(P,R)} = k$$

eşitliği vardır. Orantı kuralı gereği

$$\frac{d_T(M,N)}{d_T(R,F)} = \frac{d_T(K,M)}{d_T(P,R)} = \frac{d_T(M,N)+d_T(K,M)}{d_T(R,F)+d_T(P,R)} = \frac{d_T(K,N)}{d_T(P,F)} = k$$

olarak verilebilir. Bu durumda da $\triangle KMN$ ve $\triangle PRF$ üçgenlerinin benzer olduğu açıktır (Şekil 5.16).



Şekil 5.16 Taksi Düzlemde İki Üçgen Arasındaki Benzerlik

Artık bir noktanın yatay veya dikey doğru üzerinde bulunup bulunmamasına göre $T-$inversi, Sezgin' de (2014) verildiği gibi bulunabilir.

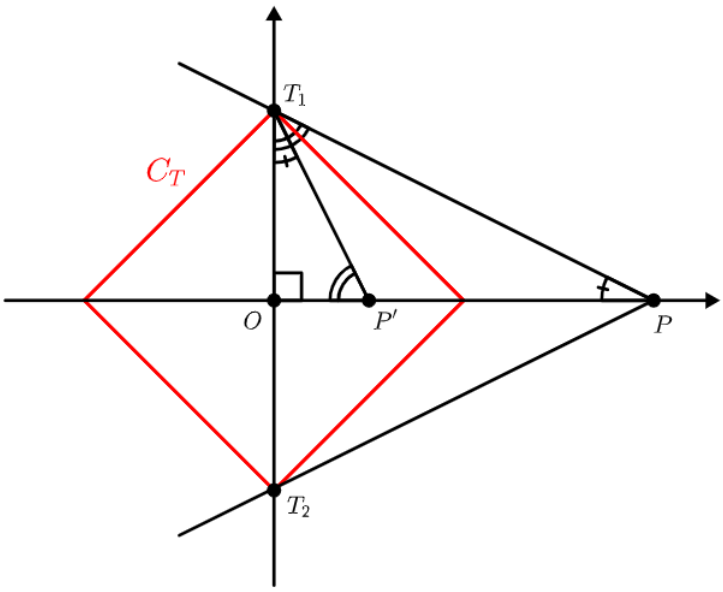
P, C_T taksi çemberi dışında ve O merkezinden geçen yatay ya da dikey doğru üzerinde bir nokta olsun. Her iki durumda da aynı özellikler verileceğinden sadece bir durumda incelenmesi yeterlidir. P den C_T taksi çemberine teğetler çizilir. Çizilen teğetlerin C_T taksi çemberine değme noktaları sırasıyla T_1 ve T_2 olsun. $\angle OPT_1$ açısı $\angle OT_1P'$ açısına eşit olacak bir biçimde $\overrightarrow{OP}$ ışını üzerindeki P' noktası alınsın. Daha sonra $\overline{T_1P'}$ doğru parçası çizilir. Yardımcı Teorem 5.4 gereği $\triangle OPT_1 \sim \triangle OT_1P'$ dir. Dolayısıyla bu iki üçgen için

$$\frac{d_T(O,P')}{d_T(O,T_1)} = \frac{d_T(O,T_1)}{d_T(O,P)}$$

eşitliği verilebilir. $d_T(O,T_1) = r_T$ olduğu için

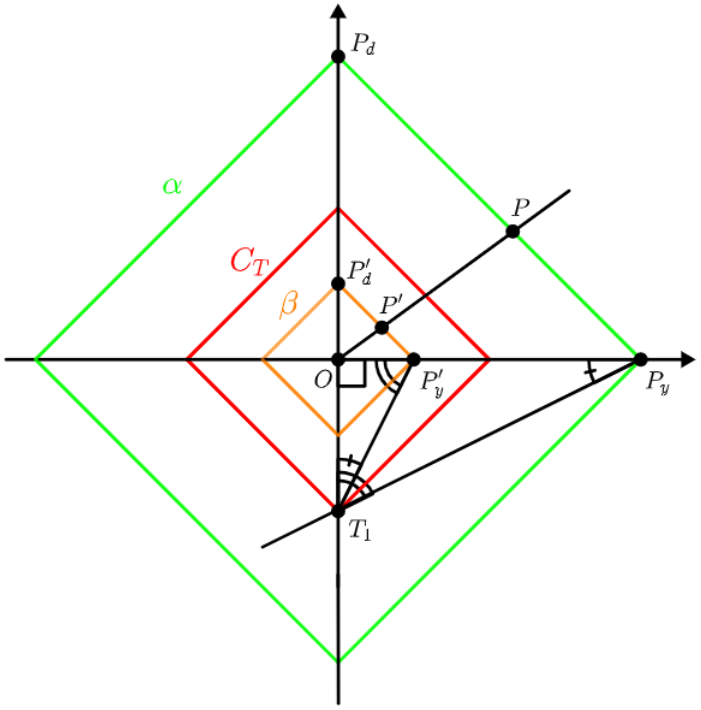
$$\frac{d_T(O,P')}{r_T} = \frac{r_T}{d_T(O,P)}$$

olur. Böylece $d_T(O,P) \cdot d_T(O,P') = r_T^2$ olduğu görülür. Bu durumda da P' noktasının P nin $T-$inversiyon dönüşümü altındaki görüntüsü olduğu açıktır (Şekil 5.17).



Şekil 5.17 C_T nin Dışında x Veya y Ekseninde Olan Bir P Noktasının İnversi

P, C_T taksi çemberi dışında ve O merkezinden geçen yatay ya da dikey doğru üzerinde bulunmayan bir nokta olsun. Merkezi O noktası olan $d_T(O,P)$ yarıçaplı taksi çemberi α olarak adlandırılsın. P, P_y ve P_d doğrusal olacak şekilde α nın O merkezinden geçen yatay doğru ile kesiştiği nokta P_y, dikey doğru ile kesiştiği nokta ise P_d olsun. P, P_y ve P_d noktaları α üzerinde bulunduğundan $d_T(O,P) = d_T(O,P_y) = d_T(O,P_d)$ dir. Dolayısıyla P_y veya P_d noktalarından herhangi biri seçilip $T-$inversi bulunabilir. Seçilen noktanın P_y olması durumunda bu noktanın $T-$inversi P_y' olarak bulunur. Daha sonra merkezi O noktası olan $d_T\left(O,P_y'\right)$ yarıçaplı taksi çemberi çizilir, bu çember β olarak adlandırılsın. $d_T(O,P) = d_T(O,P_y) = d_T(O,P_d)$ olduğu için $d_T(O,P)\cdot d_T(O,P') = r_T^2$ bağıntısı gereği $d_T(O,P') = d_T\left(O,P_y'\right) = d_T(O,P_d')$ dir. Bu nedenle β çemberi ile $\overrightarrow{OP}$ ışınının kesiştiği nokta P nin $T-$inversiyon dönüşümü altındaki görüntüsü olan P' noktasıdır (Şekil 5.18).



Şekil 5.18 C_T nin Dışında x Veya y Ekseninde Olmayan bir P Noktasının İnversi

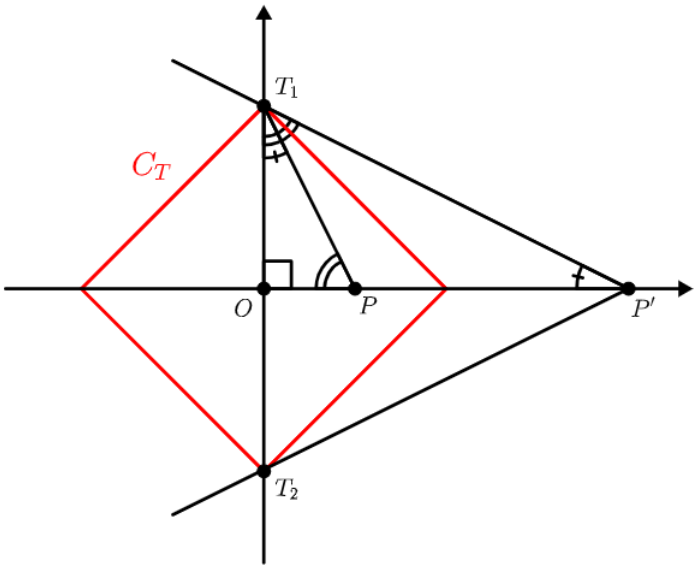
P noktasının C_T içinde olduğu durumda da dışında olduğu duruma benzer bir biçimde P nin O merkezinden geçen yatay veya dikey doğru üzerinde bulunduğu durumlardan birinin incelenmesi yeterlidir. O halde P, C_T taksi çemberinin içinde ve O merkezinden geçen yatay doğru üzerinde bir nokta olsun. C_T taksi çemberinin O dan geçen dikey doğru üzerindeki köşelerinden biri T_1 olarak adlandırılsın. Daha sonra $\overline{PT_1}$ doğru parçası çizilir. $\angle OPT_1$ açısı $\angle OT_1P'$ açısına eşit olacak bir biçimde $\overrightarrow{OP}$ ışını üzerindeki P' noktası alınsın. Yardımcı Teorem 5.4 gereği $\triangle OPT_1 \sim \triangle OT_1P'$ dir. Dolayısıyla

$$\frac{d_T(O,P)}{d_T(O,T_1)} = \frac{d_T(O,T_1)}{d_T(O,P')}$$

eşitliği verilebilir. $d_T(O,T_1) = r_T$ olduğu için

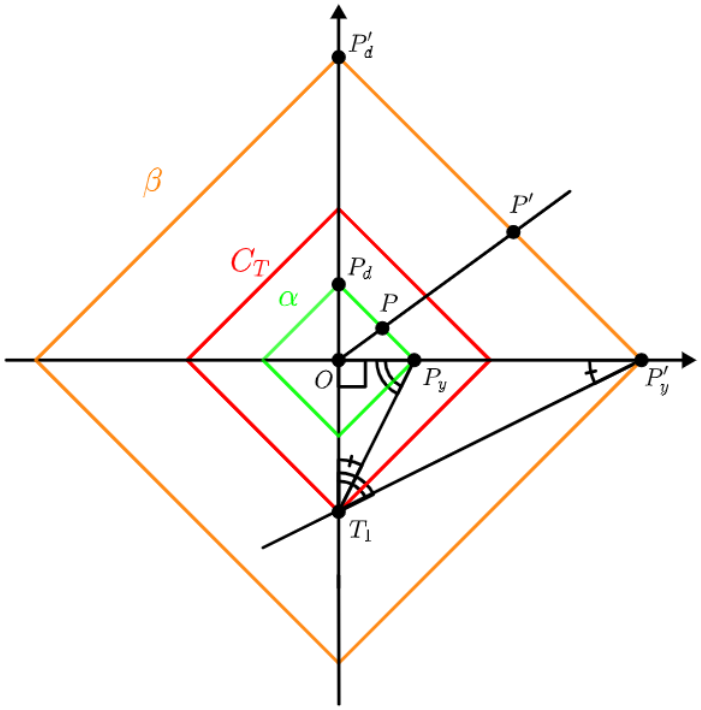
$$\frac{d_T(O,P)}{r_T} = \frac{r_T}{d_T(O,P')}$$

olur. Böylece $d_T(O,P) \cdot d_T(O,P') = r_T^2$ olduğu görülür. Bu durumda da P' noktasının P nin $T-$inversiyon dönüşümü altındaki görüntüsü olduğu açıktır (Şekil 5.19).



Şekil 5.19 C_T nin İçinde x Veya y Ekseninde Olan Bir P Noktasının İnversi

P, C_T taksi çemberi içinde ve O merkezinden geçen yatay ya da dikey doğru üzerinde bulunmayan bir nokta olsun. Merkezi O noktası olan $d_T(O,P)$ yarıçaplı taksi çemberi α olarak adlandırılsın. P, P_y ve P_d doğrusal olacak biçimde α nın O merkezinden geçen yatay doğru ile kesiştiği nokta P_y, dikey doğru ile kesiştiği nokta ise P_d olsun P, P_y ve P_d noktalarının $T-$inversleri de sırasıyla P', P'_y ve P'_d olsun. P, P_y ve P_d noktaları α üzerinde bulunduğundan $d_T(O,P) = d_T(O,P_y) = d_T(O,P_d)$ dir. Dolayısıyla P_y ve P_d noktalarından herhangi biri seçilip $T-$inversi bulunabilir. Seçilen noktanın P_y olması durumunda bu noktanın $T-$inversi P'_y olarak bulunur. Daha sonra merkezi O noktası olan $d_T\left(O,P'_y\right)$ yarıçaplı taksi çemberi çizilir, bu çember β olarak adlandırılsın. $d_T(O,P) = d_T(O,P_y) = d_T(O,P_d)$ olduğu için $d_T(O,P)\cdot d_T(O,P') = r_T^2$ bağıntısı gereği $d_T(O,P') = d_T\left(O,P'_y\right) = d_T(O,P'_d)$ dir. Bu nedenle β çemberi ile $\overrightarrow{OP}$ ışınının kesiştiği nokta P nin $T-$inversiyon dönüşümü altındaki görüntüsü olan P' noktasıdır (Şekil 5.20).



Şekil 5.20 C_T nin İçinde x Veya y Ekseninde Olmayan Bir P Noktasının İnversi

$T-$inversiyon dönüşümü altında bir noktanın koordinatları analitik olarak verilebilir.

Teorem 5.14 *(Bayar ve Ekmekçi, 2014, Corollary 2.3.)* C_T*, merkezi* $O = (x_0, y_0)$ *noktası olan* r_T *yarıçaplı bir taksi çember ve* ψ*,* C_T *çemberine göre inversiyon dönüşümü olsun.* $P = (x_1, y_1)$ *olmak üzere* $\psi(P) = P' = (x_2, y_2)$ *ise*

$$x_2 = \frac{r_T^2 (x_1 - x_0)}{(|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|)^2} + x_0$$

$$y_2 = \frac{r_T^2 (y_1 - y_0)}{(|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|)^2} + y_0$$

dir.

İspat $O = (x_0, y_0)$*,* $P = (x_1, y_1)$ *ve* $P' = (x_2, y_2)$ *noktaları* $\overrightarrow{OP}$ *ışını üzerinde olduğu için doğrudaştır.* $\overrightarrow{OP}$ *ve* $\overrightarrow{OP'}$ *ışınları aynı doğrultuda olduğundan* $k \in \mathbb{R}^+$ *olmak üzere*

$$\overrightarrow{OP'} = k\overrightarrow{OP}$$

olup, açıkça ifade edilirse

$$(x_2 - x_0, y_2 - y_0) = k(x_1 - x_0, y_1 - y_0) \tag{5.3}$$

olarak verilir. Bu taktirde inversiyon dönüşümünün tanımı (5.3) *bağıntısından elde edilen* $x_2 - x_0 = k(x_1 - x_0)$ *ve* $y_2 - y_0 = k(y_1 - y_0)$ *için tekrar düzenlenirse*

$$\begin{aligned} r_T^2 &= d_T(O,P) \cdot d_T(O,P') \\ &= (|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|) \cdot (|x_2 - x_0| + |y_2 - y_0|) \\ &= (|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|) \cdot (k|x_1 - x_0| + k|y_1 - y_0|) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeler ile

$$k = \frac{r_T^2}{(|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|)^2}$$

olarak bulunur ve (5.3) *için eşitlik düzenlenirse*

$$\begin{aligned} (x_2 - x_0, y_2 - y_0) &= \frac{r_T^2}{(|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|)^2}(x_1 - x_0, y_1 - y_0) \\ &= \left(\frac{r_T^2(x_1 - x_0)}{(|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|)^2}, \frac{r_T^2(y_1 - y_0)}{(|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|)^2} \right) \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla son eşitlikten faydalanarak düzenlemeler ile

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{r_T^2(x_1 - x_0)}{(|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|)^2} + x_0 \\ y_2 &= \frac{r_T^2(y_1 - y_0)}{(|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|)^2} + y_0 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Sonuç 5.5 *(Bayar ve Ekmekçi, 2014, Theorem 2.2.)* C_T*, merkezi* $O = (0,0)$ *noktası olan* r_T *yarıçaplı bir taksi çember ve* ψ*,* C_T *çemberine göre inversiyon dönüşümü olsun.* $P = (x_1, y_1)$ *olmak üzere* $\psi(P) = P' = (x_2, y_2)$ *ise*

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{r_T^2 \cdot x_1}{(|x_1| + |y_1|)^2} \\ y_2 &= \frac{r_T^2 \cdot y_1}{(|x_1| + |y_1|)^2} \end{aligned}$$

dir.

Teorem 5.15 *(Bayar ve Ekmekçi, 2014, Theorem 2.4.)* $\mathbb{R}^2_\infty$ *de* M, N *ve* O *birbirinden farklı herhangi üç doğrudaş nokta olsun.* M *ve* N *noktalarının* $T-$*inversiyon dönüşümü altındaki görüntüleri sırasıyla* M' *ve* N' *ise*

$$d_T(M', N') = \frac{r_T^2 \cdot d_T(M, N)}{d_T(O, M) \cdot d_T(O, N)}$$

dir.

İspat M, N *ve* O *noktaları doğrudaş ise* $T-$*inversiyon dönüşümünün tanımı gereği* $d_T(O, M) \cdot d_T(O, M') = r_T^2 = d_T(O, N) \cdot d_T(O, N')$ *dür. Bir doğru boyunca Öklidyen ve taksi uzaklıklarının oranı aynı olduğundan*

$$\begin{aligned} d_T(M', N') &= |d_T(O, M') - d_T(O, N')| \\ &= \left| \frac{r_T^2}{d_T(O, M)} - \frac{r_T^2}{d_T(O, N)} \right| \\ &= \frac{r_T^2 \cdot d_T(M, N)}{d_T(O, M) \cdot d_T(O, N)} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Taksi düzlemde M, N ve O noktaları doğrudaş değil ise bu eşitlik geçerli değildir.

Teorem 5.16 *(Bayar ve Ekmekçi, 2014, Theorem 2.5.)* $\mathbb{R}^2_\infty$ *de* M, N *ve* O *doğrudaş olmayan birbirinden farklı üç nokta olsun.* M *ve* N *noktalarının* $T-$*inversiyon dönüşümü altındaki görüntüleri sırasıyla* M' *ve* N' *olsun.* M *ve* N *noktaları* O *dan geçen* $\{0, \infty\}$ *ya da* $\{-1, 1\}$ *eğimli doğrular üzerinde ise*

$$d_T(M', N') = \frac{r_T^2 \cdot d_T(M, N)}{d_T(O, M) \cdot d_T(O, N)}$$

dir.

İspat *Ötelemeler taksi uzaklığı koruduğu için* O *noktasını orijin kabul eden inversiyon çemberini incelemek yeterlidir.*

M *ve* N *noktaları* $\mathbb{R}^2_\infty$ *de sırasıyla* x *ekseni ve* y *ekseni üzerinde olsun.* $M = (m, 0)$ *ve* $N = (0, n)$ *noktalarının* $T-$*inversleri sırasıyla* $M' = \left(\frac{r_T^2}{m}, 0\right)$ *ve* $N' = \left(0, \frac{r_T^2}{n}\right)$ *olsun. Bu durumda*

$$d_T(M', N') = \frac{r_T^2}{|m|} + \frac{r_T^2}{|n|} = \frac{r_T^2 \cdot d_T(M, N)}{d_T(O, M) \cdot d_T(O, N)}$$

dir. M ve N noktaları $\mathbb{R}^2_\infty$ de $y = x$ ya da $y = -x$ doğruları üzerinde ise $M = (m, m)$ ve $N = (n, -n)$ olarak alınabilir. Bu noktaların $T-$inversleri sırasıyla $M' = \left(\frac{r_T^2}{4m}, \frac{r_T^2}{4m}\right)$ ve $N' = \left(\frac{r_T^2}{4n}, -\frac{r_T^2}{4n}\right)$ dir. Sonuç olarak gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$d_T(M', N') = \frac{r_T^2}{4} \cdot \frac{|m-n| + |m+n|}{|m|\,|n|} = \frac{r_T^2 \cdot d_T(M, N)}{d_T(O, M) \cdot d_T(O, N)}$$

olarak bulunur.

Bu teoremlerden sonra taksi düzlemde çembere göre inversiyon dönüşümünün çifte oranı koruduğu gösterilebilir. Bunun için bazı tanımlar aşığıdaki gibi verilecektir.

$\mathbb{R}^2_\infty$ de bir l doğrusu boyunca M noktasından N noktasına kadar olan yönlü taksi uzaklığı $d_T[MN]$ olarak gösterilir. Yani, başlangıç noktası M olan ve N yi içeren ışın pozitif bir yön veya yönlendirme olup, $d_T[MN] = d_T(M, N)$ dir. Işın ters yönlü ise negatif bir yön veya yönlendirme olup, $d_T[NM] = -d_T(M, N)$ dir. Dolayısıyla açıkça $d_T[MN] = -d_T[NM]$ dir.

Tanım 5.9 *(Bayar ve Ekmekçi, 2014, Definition 3.1.) $\mathbb{R}^2_\infty$ de M, N, P ve S yönlendirilmiş bir doğru üzerinde dört farklı nokta olsun. $(MN, PS)_T$ taksi çifte oranı*

$$(MN, PS)_T = \frac{d_T[MP]}{d_T[MS]} \cdot \frac{d_T[NS]}{d_T[NP]}$$

dir.

P ve S noktalarının her ikisi de M ve N arasında ise çifte oran pozitiftir. Benzer bir şekilde P ve S noktalarının M ve N arasında olmaması durumunda da çifte oran pozitiftir. $\{M, N\}$ ve $\{P, S\}$ çiftleri birbirinden ayrı ise çifte oran negatiftir. Ayrıca Öklidyen düzlemde çifte oran, bir çembere göre inversiyon dönüşümü altında M, N, P ve S noktalarının herhangi birinin merkez olmaması durumunda invaryanttır. Benzer şekilde bu özellik taksi düzlem için de geçerlidir.

Teorem 5.17 *(Bayar ve Ekmekçi, 2014, Theorem 3.2.) $\mathbb{R}^2_\infty$ de taksi çemberde $T-$inversiyon dönüşümü taksi çifte oranı korur.*

İspat *C_T, $\mathbb{R}^2_\infty$ de merkezi O noktası olan r_T yarıçaplı çember olsun. M, N, P, S doğrudaş noktalar ve M, N, P, S noktalarının $T-$inversiyon dönüşümü altındaki*

görüntüleri sırasıyla M', N', P', S' olsun. $T-$inversiyon, $\mathbb{R}^2_\infty$ de bir l doğrusu boyunca M noktasından N noktasına kadar olan yönlü taksi uzaklığını N' noktasından M' noktasına kadar olan yönlü taksi uzaklığına dönüştürür. Ayrıca $\{M,N\}$ ve $\{P,S\}$ çiftlerinin ayrık olma ve olmama durumlarını korur.

Dolayısıyla $|(M'N',P'S')_T| = |(MN,PS)_T|$ eşitliğinin olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned}(M'N',P'S')_T &= \frac{d_T(M',P')}{d_T(M',S')}\cdot\frac{d_T(N',S')}{d_T(N',P')}\\ &= \frac{\dfrac{r_T^2\cdot d_T(M,P)}{d_T(O,M)\cdot d_T(O,P)}\cdot\dfrac{r_T^2\cdot d_T(N,S)}{d_T(O,N)\cdot d_T(O,S)}}{\dfrac{r_T^2\cdot d_T(M,S)}{d_T(O,M)\cdot d_T(O,S)}\cdot\dfrac{r_T^2\cdot d_T(N,P)}{d_T(O,N)\cdot d_T(O,P)}}\\ &= \frac{d_T(M,P)\cdot d_T(N,S)}{d_T(M,S)\cdot d_T(N,P)}\\ &= (MN,PS)_T\end{aligned}$$

dir.

Taksi düzlemde inversiyon dönüşümü altında harmonik eşlenikler de korunur.

Tanım 5.10 *(Bayar ve Ekmekçi, 2014, Definition 4.1.) $\mathbb{R}^2_\infty$ de M ve N bir l doğrusu üzerinde iki nokta olsun. l doğrusu üzerinde herhangi iki P ve S çifti için*

$$\frac{d_T[MP]}{d_T[PN]}=\frac{d_T[MS]}{d_T[SN]}$$

eşitliği mevcut ise M ve N yi harmonik olarak böler. P ve S noktaları, M ve N noktalarına göre harmonik eşlenikler olarak adlandırılır. Taksi harmonik noktalar kümesi $H(MN,PS)_T$ olarak gösterilir. Farklı iki P ve S noktasının M ve N noktalarına göre harmonik eşlenikler olması için gerek ve yeter koşulun $(MN,PS)_T=-1$ olması gerektiği açıktır.

Teorem 5.18 *(Bayar ve Ekmekçi, 2014, Theorem 4.2.) C_T, $\mathbb{R}^2_\infty$ de merkezi O noktası ve çapı $[MN]$ doğru parçası olan bir çember olsun. P ve P', $[MN]$ doğru parçasını içten ve dıştan bölen $\overrightarrow{OM}$ ışını üzerinde farklı iki nokta olsun. O halde P ve P' nün M ve N noktalarına göre taksi harmonik eşlenikler olması için gerek ve yeter koşul P ve P' nün C_T inversiyon çemberine göre birbirlerinin invers noktaları olmasıdır.*

İspat *P ve P' noktaları M ve N noktalarına göre taksi harmonik eşlenikler olsun. O halde*

$$(MN, PP')_T = -1$$

olup buradan da

$$\frac{d_T[MP]}{d_T[MP']} \cdot \frac{d_T[NP']}{d_T[NP]} = -1$$

olarak verilir. P, $[MN]$ doğru parçasını içten böldüğü ve $\overrightarrow{ON}$ ışını üzerinde olduğu için $d_T(P,N) = r_T - d_T(O,P)$ ve $d_T(M,P) = r_T + d_T(O,P)$ dir. Ayrıca P', $[MN]$ doğru parçasını dıştan böldüğü ve $\overrightarrow{ON}$ ışını üzerinde olduğu için $d_T(M,P') = d_T(O,P') + r_T$ ve $d_T(N,P') = d_T(O,P') - r_T$ dir. Dolayısıyla

$$\frac{r_T + d_T(O,P)}{d_T(O,P') + r_T} \cdot \frac{d_T(O,P') - r_T}{d_T(O,P) - r_T} = -1$$

ise

$$(r_T + d_T(O,P)) \cdot (d_T(O,P') - r_T) = (d_T(O,P') + r_T) \cdot (r_T - d_T(O,P)) \qquad (5.4)$$

dir. (5.4) eşitliği sadeleştirilirse $d_T(O,P) \cdot d_T(O,P') = r_T^2$ olduğu görülür. Dolayısıyla P ve P', $T-$inversiyon çemberine göre birbirlerinin invers noktalarıdır.

Tersine P ve P', $T-$inversiyon çemberine göre invers noktalar olsun. O halde

$$d_T(O,P) \cdot d_T(O,P') = r_T^2$$

dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}(MN, PP') &= \frac{d_T[MP]}{d_T[MP']} \cdot \frac{d_T[NP']}{d_T[NP]} = \frac{d_T[MP]}{d_T[MP']} \cdot \frac{d_T[NP']}{-d_T[PN]} \\ &= \frac{d_T(M,O) + d_T(O,P)}{d_T(M,O) + d_T(O,P')} \cdot \frac{d_T(O,P') - d_T(O,N)}{-d_T(O,N) + d_T(O,P)}\end{aligned}$$

olup, $d_T(M,O) = d_T(O,N) = r_T$ dir. Buradan

$$(MN, PP') = \frac{r_T + d_T(O,P)}{r_T + d_T(O,P')} \cdot \frac{d_T(O,P') - r_T}{-r_T + d_T(O,P)}$$

olarak bulunur. Son eşitlikte gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$(MN, PP') = \frac{r_T \cdot d_T(O,P') - r_T^2 + d_T(O,P) \cdot d_T(O,P') - r_T \cdot d_T(O,P)}{r_T \cdot d_T(O,P) - r_T^2 + d_T(O,P) \cdot d_T(O,P') - r_T \cdot d_T(O,P')}$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler ve düzenlemeler ile

$$\begin{aligned}(MN, PP') &= \frac{r_T \cdot (d_T(O,P') - d_T(O,P))}{r_T \cdot (d_T(O,P) - d_T(O,P'))} \\ &= -1\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Böylelikle P ve P' nün M ve N ye göre harmonik eşlenikler olduğu görülür.

Artık taksi inversiyon dönüşümü altında doğrular, taksi çemberler ve taksi konikler incelenebilir.

Teorem 5.19 *(Bayar ve Ekmekçi, 2014, Theorem 5.1.)* C_T, $\mathbb{R}^2_\infty$ *de merkezi* O *noktası olan* r_T *yarıçaplı çember olsun.* O *noktasından geçen bir doğrunun* $T-$*inversiyon dönüşümü altındaki görüntüsü, o doğrunun kendisidir.*

İspat l, O *noktasından geçen bir doğru olsun.* l *üzerindeki noktaların* $T-$*inversiyon dönüşümü altındaki görünüleri yine* l *üzerinde olacağından,* l *doğrusu* $T-$*inversiyon dönüşümü altında değişmez.*

Öklidyen düzlemde ve hiperbolik düzlemde çembere göre inversiyon dönüşümü altında doğrular ve çemberlerin yine doğru veya çemberlere dönüştüğü bilinmektedir. Ayrıca inversiyon merkezinden geçmeyen doğrular, inversiyon merkezinden geçen çemberlere dönüşür. Ancak $T-$inversiyon dönüşümü altında O noktasını içermeyen doğrular, O noktasından geçen taksi çemberlere dönüşmez.

Teorem 5.20 *(Bayar ve Ekmekçi, 2014, Theorem 5.2.)* C_T, $\mathbb{R}^2_\infty$ *de merkezi* O *noktası olan* r_T *yarıçaplı çember olsun.*

$i)$ *Taksi inversiyon merkezini içermeyen doğrular* $T-$*inversiyon dönüşümü altında,* O *merkezini içeren taksi çemberlere dönüşmez.*

$ii)$ *Merkezi* O *noktası olan taksi çemberler* $T-$*inversiyon dönüşümü altında, merkezi* O *noktası olan taksi çemberler dönüşür.*

$iii)$ *Taksi inversiyon merkezini içeren taksi çemberler* $T-$*inversiyon dönüşümü altında,* O *noktasını içermeyen doğrulara dönüşmez.*

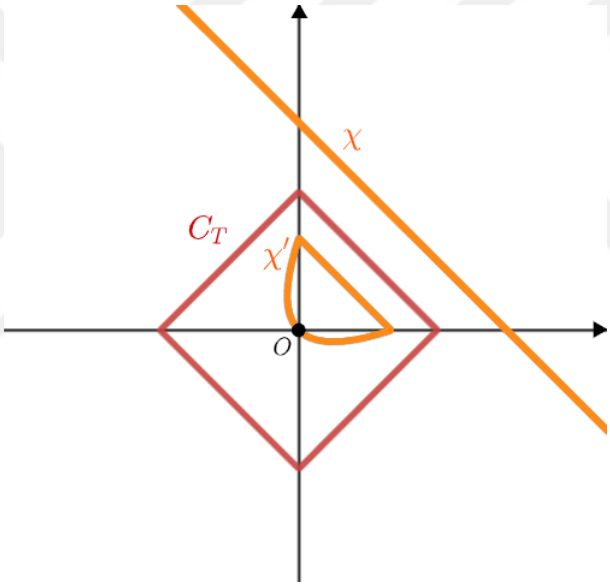
$iv)$ O *noktasından geçmeyen taksi çemberler* $T-$*inversiyon dönüşümü altında, herhangi bir taksi çemberine dönüşmez.*

Teorem 5.21 *(Bayar ve Ekmekçi, 2014, Theorem 5.3.) Herhangi bir taksi koniğin* $T-$*inversiyon dönüşümü altındaki görüntüsünün, taksi konik olması gerekmez.*

Sonraki kısımda Teorem 5.20 ve 5.21 deki ifadeler örnekler üzerinden incelenecek olup, $T-$inversiyon dönüşümü altında doğru, taksi çember ve taksi koniklerin görüntüleri verilecektir.

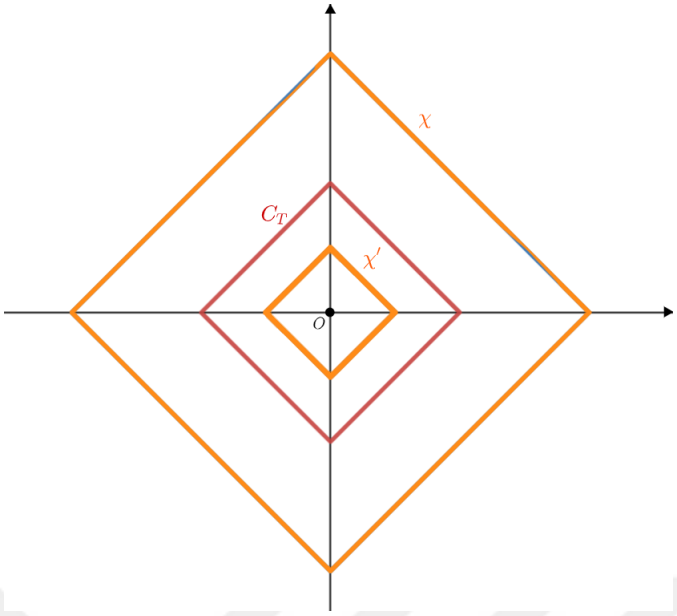
Örnek 5.1 *C_T, $\mathbb{R}^2_\infty$ merkezi $O=(x_0,y_0)$ noktası olan r_T yarıçaplı bir taksi çember ve ψ, C_T çemberine göre inversiyon dönüşümü olsun. χ ve χ' birbirinin invers görüntüleri olmak üzere;*

i) C_T, $\mathbb{R}^2_\infty$ de merkezi $O=(0,0)$ noktası olan $r_T=1$ yarıçaplı taksi çember iken $x+y=2$ doğrusunun, $T-$inversiyon dönüşümü altında $(|x|+|y|)^2=\frac{1}{2}(x+y)$ eğrisine dönüştüğü kolaylıkla görülür (Şekil 5.21).



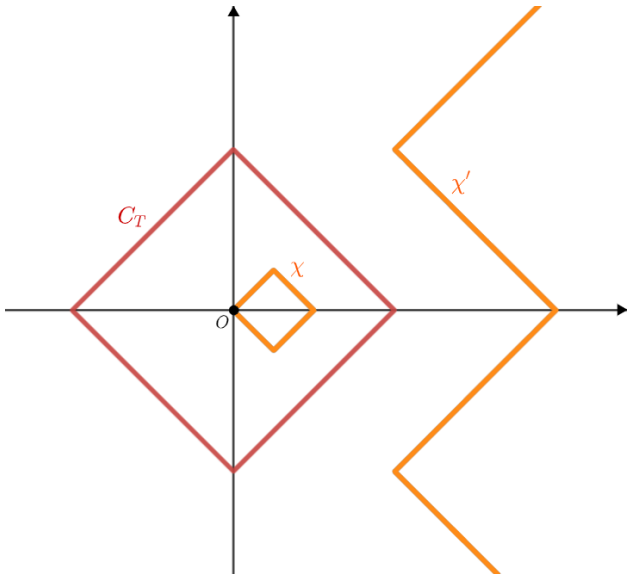
Şekil 5.21 O dan Geçmeyen Bir Doğrunun İnversi

ii) C_T, $\mathbb{R}^2_\infty$ de merkezi $O=(0,0)$ noktası olan $r_T=1$ yarıçaplı taksi çember iken $|x|+|y|=r_{T_1}$ taksi çemberinin, $T-$inversiyon dönüşümü altında $|x|+|y|=\frac{r_T^2}{r_{T_1}}$ taksi çemberine dönüştüğü kolaylıkla görülür (Şekil 5.22).



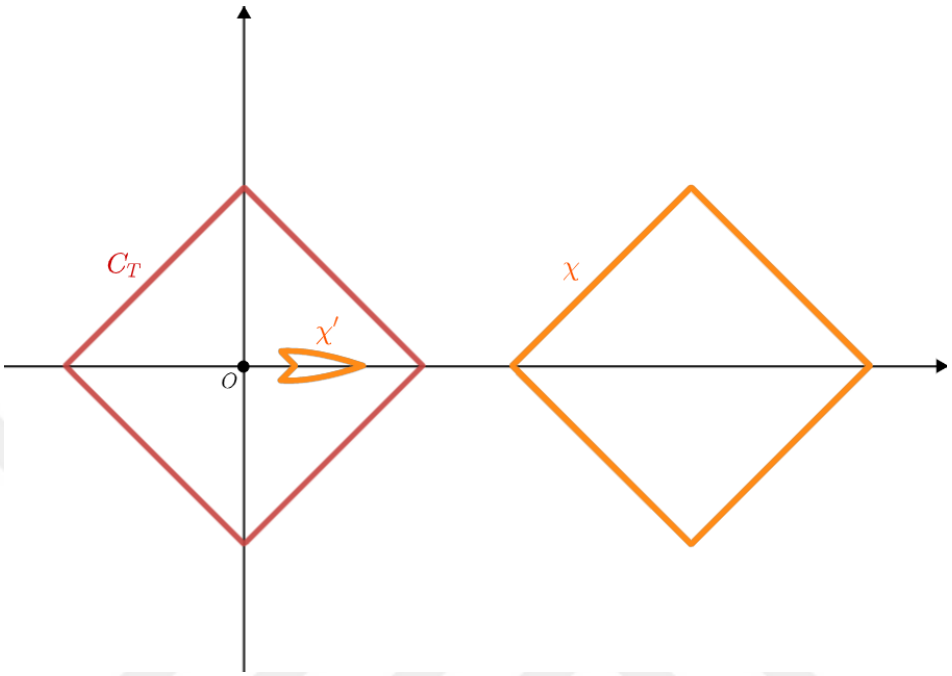
Şekil 5.22 O Merkezli Bir Taksi Çemberin İnversi

iii) C_T, $\mathbb{R}^2_\infty$ *de merkezi* $O = (0,0)$ *olan* $r_T = 2$ *yarıçaplı taksi çember iken denklemi* $|x-1| + |y| = 1$ *olan bir taksi çemberinin,* $T-$*inversiyon dönüşümü altında bir doğruya dönüşmediği açıktır (Şekil 5.23).*



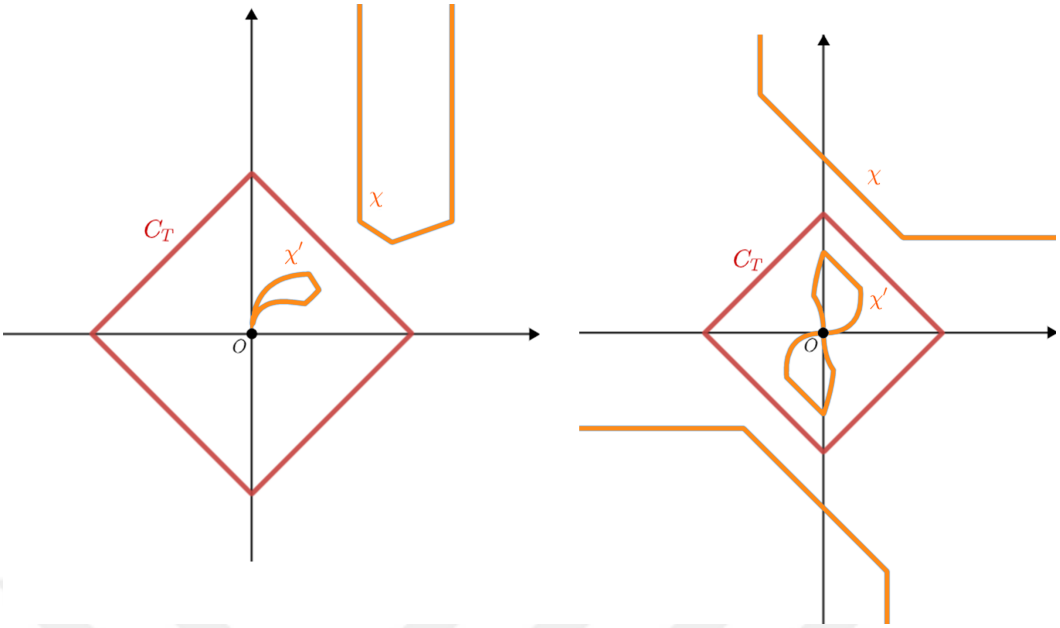
Şekil 5.23 O dan Geçen Bir Taksi Çemberin İnversi

iv) C_T, $\mathbb{R}^2_\infty$ *de merkezi* $O = (0,0)$ *olan* $r_T = 1$ *yarıçaplı taksi çember iken denklemi* $|x-3|+|y|=1$ *olan bir taksi çemberinin,* $T-$*inversiyon dönüşümü altında herhangi bir taksi çembere dönüşmediği açıktır (Şekil 5.24).*



Şekil 5.24 O dan Geçmeyen Bir Taksi Çemberin İnversi

Örnek 5.2 C_T, $\mathbb{R}^2_\infty$ *merkezi* $O = (x_0, y_0)$ *noktası olan* r_T *yarıçaplı bir taksi çember ve* ψ, C_T *çemberine göre inversiyon dönüşümü olsun. Taksi konikleri, farklı doğrular veya düzlemsel bölgelerden gelen parçaların veya ışınların birleşimidir.* χ *ve* χ' *birbirinin invers görüntüleri olmak üzere; taksi inversiyon çemberinin merkezini içermeyen doğrular* $T-$*inversiyon dönüşümü altında doğrulara dönüşmediğinden, herhangi bir taksi koniğin* $T-$*inversiyon dönüşümü altındaki görüntüsü taksi konik değildir (Şekil 5.25).*



Şekil 5.25 O dan Geçmeyen Taksi Koniklerin İnversleri

5.3 Öklidyen Çember Kullanılarak Taksi Çembere Göre İnversiyon Dönüşümünün Sentetik Ve Analitik İnşası

Bu çalışmanın özgün olan bu bölümünde taksi çembere göre bir noktanın inversiyon dönüşümü altındaki görüntüsü ile ilgili yeni bir sentetik inşa verilecektir. Bu inşa verilmeden önce ilk olarak Öklidyen uzaklık ile taksi uzaklık arasındaki ilişkiyi inceleyen bir yardımcı teoremden bahsedilecektir.

Yardımcı Teorem 5.5 *(Kaya, 2006)* $\mathbb{R}^2$ *de* $P_1 = (x_1, y_1)$ *ve* $P_2 = (x_2, y_2)$ *keyfi olarak verilen farklı iki nokta olsun.* P_1 *ve* P_2 *noktalarından geçen doğrunun eğimi* m *olmak üzere*

$i)$ $m \in \mathbb{R}$ *iken* $d_E(P_1, P_2) = \left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|}\right) \cdot d_T(P_1, P_2)$

$ii)$ $m \to \infty$ *iken* $d_E(P_1, P_2) = d_T(P_1, P_2)$

dir.

İspat *Keyfi olarak alınan* $P_1 = (x_1, y_1)$ *ve* $P_2 = (x_2, y_2)$ *noktalarından geçen doğrunun eğimi* $m = \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)$ *dir.*

$i)$ $m \in \mathbb{R}$ *iken* $x_1 \neq x_2$ *dir. Dolayısıyla*

$$\begin{aligned}
\frac{d_E(P_1,P_2)}{d_T(P_1,P_2)} &= \frac{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}{|x_1-x_2|+|y_1-y_2|} \\
&= \frac{\sqrt{(x_1-x_2)^2\cdot\left[1+\left(\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right)^2\right]}}{|x_1-x_2|\cdot\left(1+\left|\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right|\right)} \\
&= \frac{|x_1-x_2|\cdot\sqrt{\left[1+\left(\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right)^2\right]}}{|x_1-x_2|\cdot\left(1+\left|\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right|\right)} \\
&= \frac{\sqrt{\left[1+\left(\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right)^2\right]}}{\left(1+\left|\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right|\right)}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$d_E(P_1,P_2) = \left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|}\right)\cdot d_T(P_1,P_2)$$

olduğu görülür.

$ii)$ $m \in \mathbb{R}$ *iken* $x_1 = x_2$ *dir. Dolayısıyla*

$$\frac{d_E(P_1,P_2)}{d_T(P_1,P_2)} = \frac{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}{|x_1-x_2|+|y_1-y_2|} = \frac{\sqrt{(y_1-y_2)^2}}{|y_1-y_2|} = 1$$

olduğu görülür. O halde

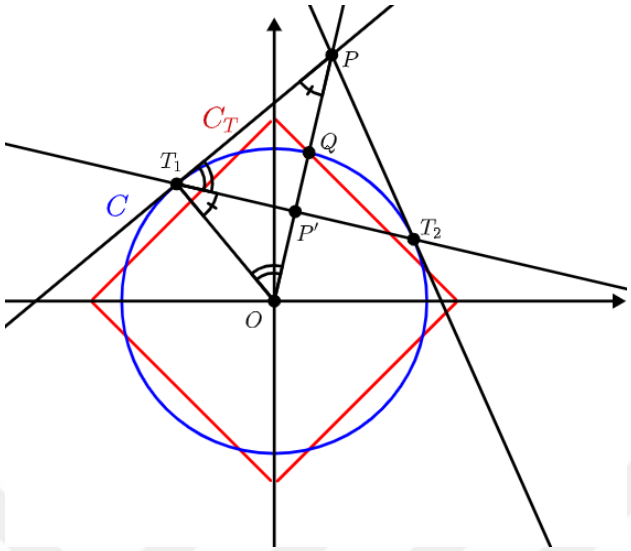
$$d_E(P_1,P_2) = d_T(P_1,P_2)$$

dir.

C_T, merkezi O noktası olan bir taksi çember olsun. C_T nin dışında verilen bir noktanın inversi, Öklid çemberi kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur.

P, C_T taksi çemberi dışında bir nokta ve $\overrightarrow{OP}$ ışınının C_T taksi çemberini kestiği nokta Q olsun. Merkezi O noktası olan $d_E(O,Q)$ yarıçaplı Öklid çemberi çizilir. Bu çember C olarak adlandırılsın. P noktasından C çemberine teğetler çizilir. Çizilen teğetlerin değme

noktaları sırasıyla T_1 ve T_2 olsun. O halde $\overleftrightarrow{T_1T_2}$ doğrusu ve $\overrightarrow{OP}$ ışınının kesişim noktası, P noktasının C_T taksi çemberine göre inversi olan P' noktasıdır (Şekil 5.26).



Şekil 5.26 C_T nin Dışında Olan Bir P Noktasının C ye Göre İnversinin İnşası

Burada Teorem 5.1 gereği $\triangle OPT_1 \sim \triangle OT_1P'$ dir. Dolayısıyla bu iki üçgen için

$$\frac{d_E(O,P)}{d_E(O,T_1)} = \frac{d_E(O,T_1)}{d_E(O,P')}$$

eşitliği verilebilir. $d_E(O,T_1) = d_E(O,Q)$ olduğu için gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$d_E(O,P) \cdot d_E(O,P') = (d_E(O,Q))^2 \tag{5.5}$$

olduğu görülür. Yardımcı Teorem 5.5 gereği (6.3) bağıntısı düzenlenirse

$$\left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|}\right) \cdot d_T(O,P) \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|}\right) \cdot d_T(O,P') = \left(\left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|}\right) \cdot d_T(O,Q)\right)^2$$

elde edilir. Böylelikle yukarıdaki ifadede gerekli sadeleştirlemeler yapıldığında

$$d_T(O,P) \cdot d_T(O,P') = (d_T(O,Q))^2$$

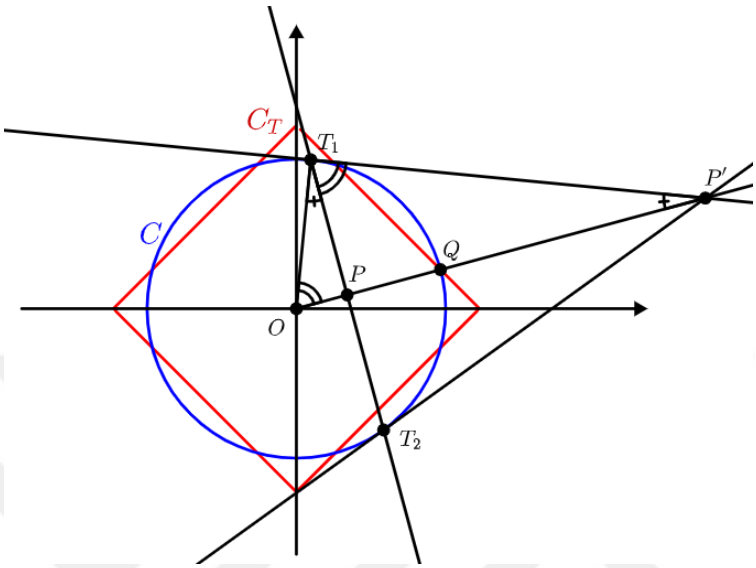
sonucuna ulaşılır. Ayrıca $(d_T(O,Q))^2 = r_T^2$ olduğundan

$$d_T(O,P) \cdot d_T(O,P') = r_T^2$$

olduğu açıktır.

P, C_T taksi çemberi içinde bir nokta ve $\overrightarrow{OP}$ ışınının C_T taksi çemberini kestiği nokta Q olsun. Merkezi O noktası olan $d_E(O,Q)$ yarıçaplı Öklid çemberi çizilir. Bu çember C

olarak adlandırılsın. P noktasından $\overrightarrow{OP}$ ışınına dik bir doğru çizilir. Bu doğrunun C çemberi ile kesiştiği noktalar T_1 ve T_2 olsun. C çemberine T_1 ve T_2 noktalarında teğetler çizilir. Çizilen teğetlerin $\overrightarrow{OP}$ ışını ile kesiştikleri nokta, P noktasının C_T taksi çemberine göre inversi olan P' noktasıdır (Şekil 5.27).



Şekil 5.27 C_T nin İçinde Olan Bir P Noktasının C ye Göre İnversinin İnşası

Benzer bir şekilde Teorem 5.1 gereği $\triangle OPT_1 \sim \triangle OT_1P'$ dir. Dolayısıyla bu iki üçgen için

$$\frac{d_E(O,P)}{d_E(O,T_1)} = \frac{d_E(O,T_1)}{d_E(O,P')}$$

eşitliği verilebilir. $d_E(O,T_1) = d_E(O,Q)$ olduğu için gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$d_E(O,P) \cdot d_E(O,P') = (d_E(O,Q))^2 \tag{5.6}$$

olduğu görülür. Yardımcı Teorem 5.5 gereği (5.6) bağıntısı düzenlenirse

$$\left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|}\right) \cdot d_T(O,P) \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|}\right) \cdot d_T(O,P') = \left(\left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|}\right) \cdot d_T(O,Q)\right)^2$$

elde edilir. Böylelikle yukarıdaki ifadede gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$d_T(O,P) \cdot d_T(O,P') = (d_T(O,Q))^2$$

sonucuna ulaşılır. Ayrıca $(d_T(O,Q))^2 = r_T^2$ olduğundan

$$d_T(O,P) \cdot d_T(O,P') = r_T^2$$

olduğu açıktır.

Dolayısıyla taksi çembere göre inversiyon dönüşümünün Öklidyen çember kullanarak tanımlanabileceği açıkça görülür. Buna göre aşağıdaki teorem kolaylıkla verilebilir.

Teorem 5.22 *C_T, $\mathbb{R}^2$ de merkezi O noktası olan r_T yarıçaplı bir taksi çember olsun. C_T çemberine göre inversiyon dönüşümü $\psi : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \longmapsto \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ olmak üzere $\psi(P) = P'$ olarak tanımlanır öyle ki P', $\overrightarrow{OP}$ ışını üzerindedir ve $d_E(O,P) \cdot d_E(O,P') = (d_E(O,Q))^2$ dir. Q burada C_T taksi çemberi ile $\overrightarrow{OP}$ ışınının kesişim noktasıdır ve sabit değildir.*

Benzer şekilde inversiyon dönüşümü O noktası için tanımlı değildir. Ancak O ya yakın noktalar O dan uzak noktalara ve O dan uzaktaki noktalar O ya yakın noktalara dönüşür. Nitekim, Öklid düzlemine düzlemin dışında olan bir O_∞ noktası (ideal nokta veya sonsuzdaki bir nokta) eklenerek, tanım kümesine O noktası dahil edilebilir. $\psi(O_\infty) = O$ ve $\psi(O) = O_\infty$ olarak alınırsa inversiyon dönüşümü genişletilmiş düzlemde bire bir dönüşüm olur ve bu düzlem $\mathbb{R}^2_\infty$ ile gösterilir. Bu durumda inversiyon dönüşümünü tekrar vermek gerekirse;

Teorem 5.23 *C_T, $\mathbb{R}^2_\infty$ de merkezi O noktası olan r_T yarıçaplı bir taksi çember olsun. C_T çemberine göre inversiyon dönüşümü $\psi : \mathbb{R}^2_\infty \longmapsto \mathbb{R}^2_\infty$ olmak üzere $P \neq O, O_\infty$ iken $\psi(P) = P'$ olarak tanımlanır öyle ki P', $\overrightarrow{OP}$ ışını üzerindedir ve $d_E(O,P) \cdot d_E(O,P') = (d_E(O,Q))^2$ dir. Q burada C_T taksi çemberi ile $\overrightarrow{OP}$ ışınının kesişim noktasıdır ve sabit değildir. Ayrıca $\psi(O_\infty) = O$ ve $\psi(O) = O_\infty$ dur.*

Taksi çembere göre inversiyon dönüşümü altında bir noktanın koordinatları analitik olarak Teorem 5.14 deki gibidir. Ancak taksi çemberde inversiyon dönüşümü Öklidyen çembere göre tanımlandığından aşağıdaki gibi verilir.

Teorem 5.24 *C_T, merkezi $O = (x_0, y_0)$ noktası olan r_T yarıçaplı bir taksi çember ve ψ, C_T çemberine göre inversiyon dönüşümü olsun. $P = (x_1, y_1)$ olmak üzere $\psi(P) = P' = (x_2, y_2)$ ise*

$$x_2 = \frac{(d_E(O,Q))^2 \cdot (x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} + x_0$$

$$y_2 = \frac{(d_E(O,Q))^2 \cdot (y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} + y_0$$

dir.

İspat *$O=(x_0,y_0)$, $P=(x_1,y_1)$ ve $P'=(x_2,y_2)$ noktaları $\overrightarrow{OP}$ ışını üzerinde olduğu için doğrudaştır. $\overrightarrow{OP}$ ve $\overrightarrow{OP'}$ ışınları aynı doğrultuda olduğundan $k\in\mathbb{R}^+$ olmak üzere*

$$\overrightarrow{OP'}=k\overrightarrow{OP}$$

olup, açıkça ifade edilirse

$$(x_2-x_0,y_2-y_0)=k\,(x_1-x_0,y_1-y_0) \tag{5.7}$$

olarak verilir. Buna göre inversiyon dönüşümünün tanımı (5.7) *bağıntısından elde edilen $x_2-x_0=k\,(x_1-x_0)$ ve $y_2-y_0=k\,(y_1-y_0)$ için tekrar düzenlenirse*

$$\begin{aligned}
\left(d_E\left(O,Q\right)\right)^2 &= d_E\left(O,P\right)\cdot d_E\left(O,P'\right)\\
&= \sqrt{\left(x_1-x_0\right)^2+\left(y_1-y_0\right)^2}\cdot\sqrt{\left(x_2-x_0\right)^2+\left(y_2-y_0\right)^2}\\
&= \sqrt{\left(x_1-x_0\right)^2+\left(y_1-y_0\right)^2}\cdot\sqrt{\left(k\left(x_1-x_0\right)\right)^2+\left(k\left(y_1-y_0\right)\right)^2}\\
&= \sqrt{\left(x_1-x_0\right)^2+\left(y_1-y_0\right)^2}\cdot k\sqrt{\left(x_1-x_0\right)^2+\left(y_1-y_0\right)^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$k=\frac{\left(d_E\left(O,Q\right)\right)^2}{\left(x_1-x_0\right)^2+\left(y_1-y_0\right)^2}$$

olarak bulunur ve (5.7) *için eşitlik düzenlenirse*

$$\begin{aligned}
\left(x_2-x_0,y_2-y_0\right) &= \frac{\left(d_E\left(O,Q\right)\right)^2}{\left(x_1-x_0\right)^2+\left(y_1-y_0\right)^2}\left(x_1-x_0,y_1-y_0\right)\\
&= \left(\frac{\left(d_E\left(O,Q\right)\right)^2\cdot\left(x_1-x_0\right)}{\left(x_1-x_0\right)^2+\left(y_1-y_0\right)^2},\frac{\left(d_E\left(O,Q\right)\right)^2\cdot\left(y_1-y_0\right)}{\left(x_1-x_0\right)^2+\left(y_1-y_0\right)^2}\right)
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla yukarıdaki son eşitlik düzenlenirse

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{\left(d_E\left(O,Q\right)\right)^2\cdot\left(x_1-x_0\right)}{\left(x_1-x_0\right)^2+\left(y_1-y_0\right)^2}+x_0\\
y_2 &= \frac{\left(d_E\left(O,Q\right)\right)^2\cdot\left(y_1-y_0\right)}{\left(x_1-x_0\right)^2+\left(y_1-y_0\right)^2}+y_0
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Burada $\left(d_E\left(O,Q\right)\right)^2$ olarak tanımlanan inversiyon kuvvetini daha ayrıntılı incelemek gerekirse aşağıdaki gibi sonuçlar bulunur.

Teorem 5.25 *C_T, merkezi $O=(x_0,y_0)$ ve denklemi*

$$|x-x_0|+|y-y_0|=r_T$$

olan bir taksi çember ve ψ, C_T çemberine göre inversiyon dönüşümü olsun. $P=(x_1,y_1)$ ve $\psi(P)=P'=(x_2,y_2)$ noktaları verilsin. $\overrightarrow{OP}$ ışını ile C_T çemberinin kesişimi olan Q noktasının koordinatları

$$Q=\left(\mp\frac{r_T}{1+\left|\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\right|}+x_0,\mp\frac{r_T}{1+\left|\frac{x_1-x_0}{y_1-y_0}\right|}+y_0\right)$$

dir.

İspat *C_T, merkezi $O=(x_0,y_0)$ olan bir taksi çember olsun. $P=(x_1,y_1)$ noktası verilsin. Bu durumda $\overleftrightarrow{OP}$ doğrusunun eğimi*

$$m = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$$

ve denklemi

$$y-y_0 = \frac{(y_1-y_0)(x-x_0)}{x_1-x_0} \tag{5.8}$$

dir. Q noktası $\overleftrightarrow{OP}$ doğrusu ile C_T çemberinin kesişim noktası olduğundan (5.8) *eşitliği C_T çemberinin denkleminde yerine yazılırsa*

$$\begin{aligned} r_T &= |x-x_0|+|y-y_0| \\ &= |x-x_0|+\left|\frac{(y_1-y_0)(x-x_0)}{x_1-x_0}\right| \\ &= |x-x_0|+|x-x_0|\left|\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\right| \\ &= |x-x_0|\left(1+\left|\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\right|\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla eşitlikte gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$|x-x_0|=\frac{r_T}{1+\left|\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\right|}$$

olarak bulunur. Buradan gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$x=\mp\frac{r_T}{1+\left|\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\right|}+x_0$$

olur. Benzer bir şekilde y için çözülürse

$$y = \mp \frac{r_T}{1 + \left|\frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}\right|} + y_0$$

sonucuna ulaşılır.

Sonuç 5.6 *C_T, merkezi $O = (x_0, y_0)$ noktası olan r_T yarıçaplı bir taksi çember ve ψ, C_T çemberine göre inversiyon dönüşümü olsun. $P = (x_1, y_1)$ olmak üzere $\psi(P) = P' = (x_2, y_2)$ ise*

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{\left(\left(\frac{r_T}{1+\left|\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\right|}\right)^2 + \left(\frac{r_T}{1+\left|\frac{x_1-x_0}{y_1-y_0}\right|}\right)^2\right) \cdot (x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} + x_0 \\ y_2 &= \frac{\left(\left(\frac{r_T}{1+\left|\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\right|}\right)^2 + \left(\frac{r_T}{1+\left|\frac{x_1-x_0}{y_1-y_0}\right|}\right)^2\right) \cdot (y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} + y_0 \end{aligned}$$

dir.

Sonuç 5.7 *C_T, merkezi $O = (0, 0)$ noktası olan r_T yarıçaplı bir taksi çember ve ψ, C_T çemberine göre inversiyon dönüşümü olsun. $P = (x_1, y_1)$ olmak üzere $\psi(P) = P' = (x_2, y_2)$ ise*

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{\left(\left(\frac{r_T}{1+\left|\frac{y_1}{x_1}\right|}\right)^2 + \left(\frac{r_T}{1+\left|\frac{x_1}{y_1}\right|}\right)^2\right) \cdot x_1}{x_1^2 + y_1^2} \\ y_2 &= \frac{\left(\left(\frac{r_T}{1+\left|\frac{y_1}{x_1}\right|}\right)^2 + \left(\frac{r_T}{1+\left|\frac{x_1}{y_1}\right|}\right)^2\right) \cdot y_1}{x_1^2 + y_1^2} \end{aligned}$$

dir.

Örnek 5.3 *C_T, merkezi $O = (0, 0)$ olan $r_T = 2$ yarıçaplı bir taksi çember olsun. $P = (3, 2)$ noktası alınsın. O halde bu noktanın inversi olan $P' = (x_2, y_2)$ noktası Teorem 5.14 de verilen formülle*

$$\begin{aligned} P' = (x_2, y_2) &= \left(\frac{r_T^2 \cdot x_1}{(|x_1| + |y_1|)^2}, \frac{r_T^2 \cdot y_1}{(|x_1| + |y_1|)^2}\right) \\ &= \left(\frac{2^2 \cdot 3}{(|3| + |2|)^2}, \frac{2^2 \cdot 2}{(|3| + |2|)^2}\right) \\ &= \left(\frac{12}{25}, \frac{8}{25}\right) \end{aligned}$$

dir. Diğer bir taraftan $P = (3,2)$ *noktasının inversi olan* $P' = (x_2, y_2)$ *noktası Öklidyen çember kullanılarak bulunursa*

$$
\begin{aligned}
P' = (x_2, y_2) &= \left(\frac{\left(\left(\frac{r_T}{1+\left|\frac{y_1}{x_1}\right|} \right)^2 + \left(\frac{r_T}{1+\left|\frac{x_1}{y_1}\right|} \right)^2 \right) \cdot x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \frac{\left(\left(\frac{r_T}{1+\left|\frac{y_1}{x_1}\right|} \right)^2 + \left(\frac{r_T}{1+\left|\frac{x_1}{y_1}\right|} \right)^2 \right) \cdot y_1}{x_1^2 + y_1^2} \right) \\
&= \left(\frac{\left(\left(\frac{2}{1+\left|\frac{2}{3}\right|} \right)^2 + \left(\frac{2}{1+\left|\frac{3}{2}\right|} \right)^2 \right) \cdot 3}{3^2 + 2^2}, \frac{\left(\left(\frac{2}{1+\left|\frac{2}{3}\right|} \right)^2 + \left(\frac{2}{1+\left|\frac{3}{2}\right|} \right)^2 \right) \cdot 2}{3^2 + 2^2} \right) \\
&= \left(\frac{\left(\left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 \right) \cdot 3}{13}, \frac{\left(\left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 \right) \cdot 2}{13} \right) \\
&= \left(\frac{12}{25}, \frac{8}{25} \right)
\end{aligned}
$$

dir.

Buraya kadarki kısımda, inversiyon dönüşümü Öklidyen düzlemde ve taksi düzlemde çember üzerinden incelenmiştir. Bundan sonraki bölümde inversiyon dönüşümü elips için incelenecektir. Bu bölümdeki tanım ve teoremler (Ramírez, 2013), (Ramírez, 2014) ve (Ramírez ve Rubiano, 2014) kaynakları esas alınarak oluşturulmuştur.

6. ELİPSE GÖRE İNVERSİYON DÖNÜŞÜMÜ

Bu bölümde çemberin genelleştirilmiş hali olan elips eğrisi kullanılarak Öklidyen, taksi ve süper elipslere göre inversiyon kavramı tanımlanarak bu dönüşümlerin sentetik ve analitik inşaları verilecektir. Ayrıca tüm elipsler için tanımlanan inversiyon dönüşümünün özellikleri incelenecektir.

6.1 Öklidyen Elipse Göre İnversiyon Dönüşümünün Özellikleri

Tanım 6.1 *(Ramírez, 2013, Definition 1.) E, $\mathbb{R}^2$ de simetri merkezi O noktası olan F_1 ve F_2 odaklı bir elips olsun. E elipsine göre inversiyon dönüşümü ya da E ye göre eliptik inversiyon dönüşümü $\psi : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \longmapsto \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ olmak üzere $\psi(P) = P'$ olarak tanımlanır öyle ki P', $\overrightarrow{OP}$ ışını üzerindedir ve $d_E(O,P) \cdot d_E(O,P') = (d_E(O,Q))^2$ dir. Q burada $\overrightarrow{OP}$ ışını ve E elipsinin kesişim noktasıdır. P' noktasına P nin eliptik inversi, E ye inversiyon elipsi, O ya inversiyon merkezi, $d_E(O,Q) = w$ ya inversiyon yarıçapı, $(d_E(O,Q))^2 = w^2$ ye inversiyon kuvveti denir ve klasik durumun aksine burada yarıçap sabit değildir.*

Eliptik inversiyon involutif bir dönüşümdür yani $\psi(\psi(P)) = P$ dir. Ayrıca bir P noktası E elipsinin içinde olması durumunda $d_E(O,P) < d_E(O,Q)$ dur ve $d_E(O,P) \cdot d_E(O,P') = (d_E(O,Q))^2$ bağıntısının sağlanması için $d_E(O,P') > d_E(O,Q)$ olması gerekir. Yani E elipsinin içindeki noktaların inversi E elipsinin dışındaki noktalara ve E elipsinin dışındaki noktaların inversi de E elipsinin içinde noktalara dönüşür. E elipsinin üzerindeki bir noktanın inversi, o noktanın kendisidir. Yani bir P noktası E elipsinin üzerinde ise $d_E(O,P) = d_E(O,Q)$ dur. $d_E(O,P) \cdot d_E(O,P') = (d_E(O,Q))^2$ bağıntısının sağlanması için $d_E(O,P') = d_E(O,Q)$ olmalıdır. Bu durumda $P = P'$ olur. Bu önermenin tersi de geçerlidir.

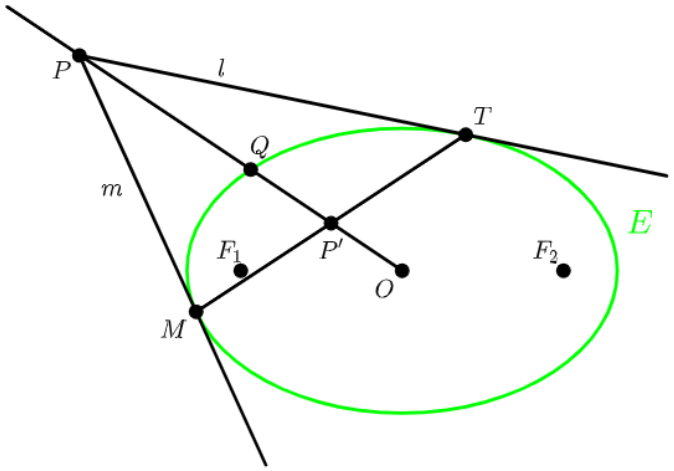
Bir elips üzerindeki inversiyon dönüşümü de olağan tanımda olduğu gibi inversiyon merkezi O için tanımlı değildir. Nitekim, Öklid düzlemine düzlemin dışında olan bir O_∞ noktası (ideal nokta veya sonsuzdaki bir nokta) eklenerek, tanım kümesine O noktası dahil edilebilir. $\psi(O_\infty) = O$ ve $\psi(O) = O_\infty$ olarak alınırsa inversiyon dönüşümü genişletilmiş düzlemde bire bir dönüşüm olur ve bu düzlem $\mathbb{R}^2_\infty$ ile gösterilir. Bu durumda inversiyon dönüşümünü tekrar tanımlamak gerekirse;

Tanım 6.2 *(Ramírez, 2013, Definition 2.) E, $\mathbb{R}^2_\infty$ de simetri merkezi O noktası olan F_1 ve F_2 odaklı bir elips olsun. E elipsine göre inversiyon dönüşümü $\psi : \mathbb{R}^2_\infty \longmapsto \mathbb{R}^2_\infty$ olmak üzere $P \neq O, O_\infty$ iken $\psi(P) = P'$ olarak tanımlanır öyle ki P', $\overrightarrow{OP}$ ışını üzerindedir ve $d_E(O,P) \cdot d_E(O,P') = (d_E(O,Q))^2$ dir. Q burada $\overrightarrow{OP}$ ışını ve E elipsinin kesişim noktasıdır. Ayrıca $\psi(O_\infty) = O$ ve $\psi(O) = O_\infty$ dur.*

Bir noktanın eliptik inversiyon dönüşümü altındaki görüntüsü, Öklidyen çemberdeki inşaya benzer şekilde sentetik olarak verilebilir (Ramírez ve Rubiano, 2014).

Elipsin Dışındaki Bir Noktanın Eliptik İnversi

Simetri merkezi O noktası olan E elipsi verilsin. P, E nin dışında bir nokta ise P den E elipsine l ve m teğet doğruları çizilir. Çizilen teğetlerin E elipsinin kestiği noktalar T ve M olarak adlandırılsın. O halde P nin eliptik inversiyon dönüşümü altındaki görüntüsü olan P', $\overrightarrow{OP}$ ışını ve $\overline{TM}$ doğru parçasının kesişim noktasıdır (Şekil 6.1).



Şekil 6.1 E nin Dışındaki Bir P Noktasının İnversi

Buradaki durumu daha ayrıntılı ifade etmek gerekirse, $\overrightarrow{OP}$ ışını ile E elipsinin kesiştiği nokta Q olsun. Q noktasından geçen $\overline{TM}$ doğru parçasına paralel bir x doğrusu çizilir. x doğrusu ile l doğrusunun kesiştiği nokta S olsun. Daha sonra Q noktasından geçen l doğrusuna paralel bir y doğrusu çizilir. y doğrusu ile $\overline{TM}$ doğru parçasının kesiştiği nokta N olsun. O halde $NQST$ bir paralelkenardır. Bu nedenle $\overline{NS}$ ve $\overline{QT}$ köşegenleri birbirlerini ikiye böler. Bir elipsin herhangi bir kirişinin uçlarındaki teğetler kirişi ikiye bölen çapla kesiştiği için $\overleftrightarrow{NS}$ doğrusu O noktasından geçer.

Diğer bir taraftan $\overleftrightarrow{P'N}$ doğrusu $\triangle OQS$ üçgeninin $\overline{QS}$ kenarına paraleldir. O halde

$$\frac{d_E(O,P')}{d_E(O,Q)} = \frac{d_E(O,N)}{d_E(O,S)} \tag{6.1}$$

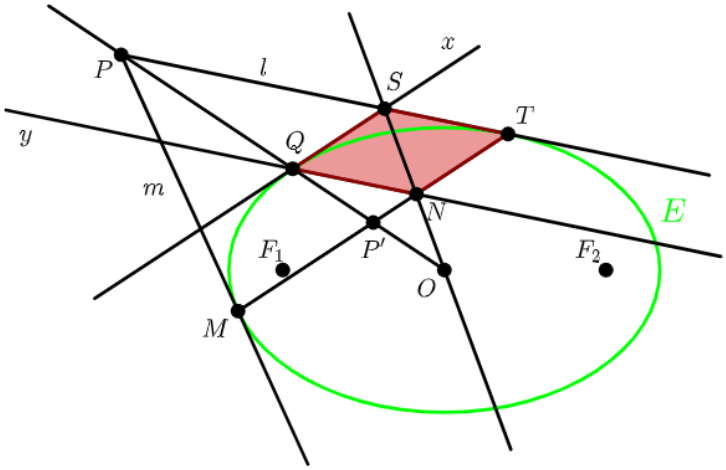
eşitliği vardır. Benzer şekilde $\overleftrightarrow{QN}$ doğrusu $\triangle OSP$ üçgeninin $\overline{SP}$ kenarına paraleldir. O halde

$$\frac{d_E(O,N)}{d_E(O,S)} = \frac{d_E(O,Q)}{d_E(O,P)} \tag{6.2}$$

dir. Denklem (6.1) ve (6.2) den açıkça görüldüğü üzere

$$\frac{d_E(O,P')}{d_E(O,Q)} = \frac{d_E(O,Q)}{d_E(O,P)}$$

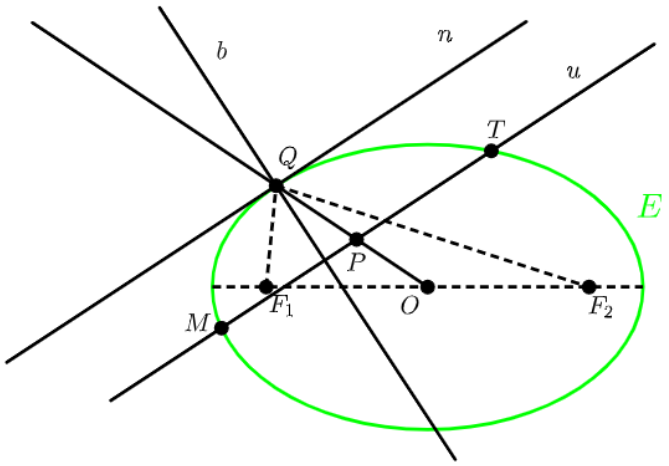
dir. Dolayısıyla $d_E(O,P) \cdot d_E(O,P') = (d_E(O,Q))^2$ bağıntısı sağlanır. Bu nedenle E elipsinde $d_E(O,Q) = w$ olmak üzere P nin eliptik inversi P' noktasıdır (Şekil 6.2).



Şekil 6.2 E nin Dışındaki Bir P Noktasının İnversinin İnşası

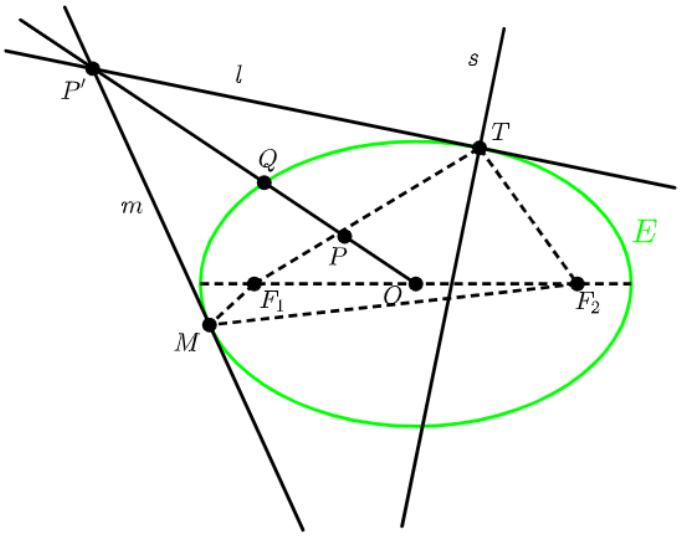
Elipsin İçindeki Bir Noktanın Eliptik İnversi

P, E elipsinin içinde bir nokta olsun. $\overrightarrow{OP}$ ışını ile E elipsin kesiştiği nokta Q olsun. $\angle F_1QF_2$ açısının açıortayı b olsun. Burada F_1 ve F_2, E elipsinin odaklarıdır. Q noktasından geçen b ye dik olan n doğrusu ve P noktasından geçen n ye paralel olan u doğrusu çizilir. u doğrusu ile E elipsinin kesiştikleri noktalar T ve M olarak adlandırılsın (Şekil 6.3).



Şekil 6.3 E nin İçindeki Bir P Noktasının İnversinin İnşası

$\angle F_1TF_2$ açısının açıortayı s ve T noktasından geçen s ye dik olan doğru l olsun. Benzer şekilde M noktası ile m doğrusu elde edilir. O halde l ve m doğruları ile $\overrightarrow{OP}$ ışınının kesiştikleri nokta, P' noktasıdır. Bu nedenle E elipsinde $d_E(O,Q) = w$ olmak üzere P nin eliptik inversi P' noktasıdır. P noktası P' nün eliptik inversi olduğu için P' önceki inşanın koşullarını sağlar. Bu nedenle E elipsinde $d_E(O,Q) = w$ olmak üzere P nin eliptik inversi P' noktasıdır (Şekil 6.4).



Şekil 6.4 E nin İçindeki Bir P Noktasının İnversi

Teorem 6.1 *(Ramírez, 2013, Theorem 1.) E, $\mathbb{R}^2_\infty$ de simetri merkezi O noktası olan F_1 ve F_2 odaklı bir elips olsun. P ve T iki farklı nokta olmak üzere $d_E(O,Q) = w$ ve $d_E(O,S) = u$ inversiyon yarıçaplı E elipsine göre bu noktaların eliptik inversleri sırasıyla P' ve T' olsun. O halde;*

$i)$ *Eğer P, T ve O doğrudaş değil ise*

$$d_E(P',T') = \frac{\sqrt{(w^2-u^2)\left(w^2\cdot(d_E(O,T))^2 - u^2\cdot(d_E(O,P))^2\right) + w^2u^2\cdot(d_E(P,T))^2}}{d_E(O,P)\cdot d_E(O,T)}$$

dir.

$ii)$ *Eğer P, T ve O doğrudaş ise*

$$d_E(P',T') = \frac{w^2 d_E(P,T)}{d_E(O,P)\cdot d_E(O,T)}$$

dir.

İspat *Burada $d_E(X,Y)$ için gösterim olarak $|XY|$ kullanılacaktır.*

$i)$ *Eğer P, T ve O doğrudaş olmadığından P', T' ve O da doğrudaş değildir. $\angle P'OT'$ açısı α olarak adlandırılsın. Kosinüs teoremi gereği*

$$|P'T'|^2 = |OP'|^2 + |OT'|^2 - 2\cdot|OP'|\cdot|OT'|\cdot cos\alpha \tag{6.3}$$

dir. $\overrightarrow{OP}$ ve $\overrightarrow{OT}$ ışınları ile E elipsinin kesişim noktaları sırasıyla Q ve S olsun.

$$|OP|\cdot|OP'| = |OQ|^2 = w^2$$

ve

$$|OT|\cdot|OT'| = |OS|^2 = u^2$$

olduğu için $|OP'| = \dfrac{w^2}{|OP|}$ ve $|OT'| = \dfrac{u^2}{|OT|}$ dir.
O halde elde edilen son eşitlikler kullanılarak (6.3) *eşitliği*

$$|P'T'|^2 = \frac{w^4}{|OP|^2} + \frac{u^4}{|OP|^2} - 2\frac{w^2u^2}{|OP|\cdot|OT|}cos\alpha \tag{6.4}$$

olarak yazılabilir. α aynı zamanda $\angle POT$ açısının da ölçüsü olduğundan, kosinüs teoremi gereği

$$|PT|^2 = |OP|^2 + |OT|^2 - 2\cdot|OP|\cdot|OT|\cdot cos\alpha$$

dir. Dolayısıyla buradan da

$$2cos\alpha = \frac{|OP|^2 + |OT|^2 - |PT|^2}{|OP| \cdot |OT|}$$

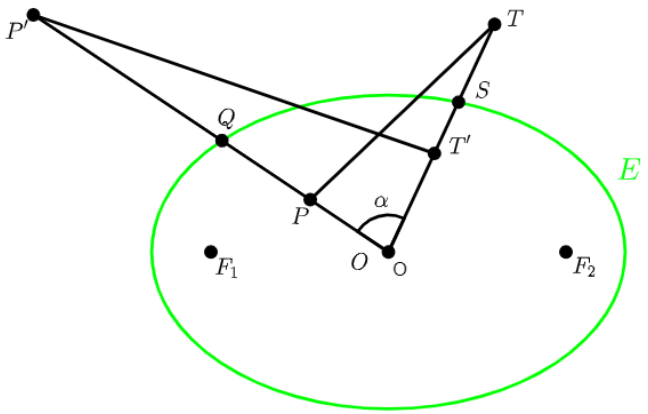
olur. Elde edilen son eşitlik kullanılarak (6.4) *eşitliği tekrar düzenlenirse*

$$\begin{aligned} |P'T'|^2 &= \frac{w^4}{|OP|^2} + \frac{u^4}{|OT|^2} - \frac{w^2u^2}{|OP| \cdot |OT|} \left(\frac{|OP|^2 + |OT|^2 - |PT|^2}{|OP| \cdot |OT|} \right) \\ &= \frac{w^2 \cdot |OT|^2 \cdot (w^2 - u^2) - u^2 \cdot |OP|^2 \cdot (w^2 - u^2) + w^2u^2 \cdot |PT|^2}{|OP|^2 \cdot |OT|^2} \\ &= \frac{(w^2 - u^2)\left(w^2 \cdot |OT|^2 - u^2 \cdot |OP|^2\right) + w^2u^2 \cdot |PT|^2}{|OP|^2 \cdot |OT|^2} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla buradan da

$$|P'T'| = \frac{\sqrt{(w^2 - u^2)\left(w^2 \cdot |OT|^2 - u^2 \cdot |OP|^2\right) + w^2u^2 \cdot |PT|^2}}{|OP| \cdot |OT|}$$

elde edilir (Şekil 6.5).



Şekil 6.5 P, T ve O Doğrudaş Olmaması Halinde $d_E(P', T')$ Arasındaki Uzaklık

ii) P, T *ve* O *doğrudaş ise* $|OQ| = w = u = |OS|$ *dir. Dolayısıyla*

$$\begin{aligned} |P'T'| &= \frac{\sqrt{(w^2 - u^2)\left(w^2 \cdot |OT|^2 - u^2 \cdot |OP|^2\right) + w^2u^2 \cdot |PT|^2}}{|OP| \cdot |OT|} \\ &= \frac{\sqrt{w^4 \cdot |PT|^2}}{|OP| \cdot |OT|} \\ &= \frac{w^2 \cdot |PT|}{|OP| \cdot |OT|} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Çifte Oran

Tanım 6.3 *(Ramírez, 2013, 2014)* M, N, P *ve* S *bir* l *doğrusu üzerinde dört farklı nokta olsun.* (MN, PS) *çifte oranı*

$$(MN, PS) = \frac{d_E(M,P) \cdot d_E(N,S)}{d_E(M,S) \cdot d_E(N,P)}$$

dir.

Burada $\overrightarrow{MN}$, M den N ye kadar olan yönlü uzaklığı gösterir. Çifte oran simetri merkezi M, N, P veya S noktalarında herhangi biri olmayan elipsde yönlendirilmiş doğru için simetri merkezi olan O noktasından geçiyor ise eliptik inversiyon dönüşümü altında korunur.

Teorem 6.2 $\mathbb{R}^2_\infty$ *de çifte oran simetri merkezi* M, N, P *veya* S *noktalarından herhangi biri olmayan elipsde yönlendirilmiş doğru için simetri merkezi olan* O *noktasından geçiyor ise eliptik inversiyon dönüşümü altında korunur.*

İspat E, $\mathbb{R}^2_\infty$ *de simetri merkezi* O *noktası olan bir elips ve* M, N, P, S *yönlendilmiş bir doğru üzerinde dört farklı nokta olsun.* M, N, P, S *noktalarının eliptik inversiyon dönüşümü altında görüntüleri* M', N', P', S' *olsun. Eliptik inversiyon dönüşümü,* $\mathbb{R}^2_\infty$ *de bir* l *doğrusu boyunca* M *noktasından* N *noktasına kadar olan yönlü uzaklığı* N' *noktasından* M' *noktasına kadar olan yönlü uzaklığına dönüştürür. Dolayısıyla*

$$[MN, PS] = [M'N', P'S']$$

eşitliğini göstermek yeterlidir. M, N, P, S *ve* O *doğrudaş olduğu için eliptik inversiyon tanımı gereği alınan tüm noktaların inversiyon kuvveti* $(d_E(O,Q))^2 = w^2$ *dir. Dolayısıyla*

$$\begin{aligned}
[M'N', P'S'] &= \frac{d_E(M',P') \cdot d_E(N',S')}{d_E(M',S') \cdot d_E(N',P')} \\
&= \frac{\dfrac{w^2 d_E(M,P)}{d_E(O,M)\, d_E(O,P)} \cdot \dfrac{w^2 d_E(N,S)}{d_E(O,N)\, d_E(O,S)}}{\dfrac{w^2 d_E(M,S)}{d_E(O,M)\, d_E(O,S)} \cdot \dfrac{w^2 d_E(N,P)}{d_E(O,N)\, d_E(O,P)}} \\
&= \frac{d_E(M,P)\, d_E(N,S)}{d_E(M,S)\, d_E(N,P)} \\
&= [MN, PS]
\end{aligned}$$

dir.

Sonuç olarak eliptik inversiyon dönüşümünün çifte oranı koruduğu görülür.

Harmonik Eşlenikler

Tanım 6.4 *(Ramírez, 2013, 2014) M ve N bir l doğrusu üzerinde iki nokta olsun. l üzerindeki herhangi bir P ve S nokta çifti için*

$$\frac{d_E[MP]}{d_E[PN]} = \frac{d_E[MS]}{d_E[SN]}$$

eşitliği mevcut ise $\overline{MN}$ yi harmonik olarak böler. P ve S noktaları, M ve N ye göre harmonik eşlenikler olarak adlandırılır. Farklı iki P ve S noktasının M ve N ye göre harmonik eşlenikler olması için gerek ve yeter koşul $(MN, PS) = -1$ olmasıdır.

Teorem 6.3 *(Ramírez, 2013, Theorem 2.) E, simetri merkezi O ve çapı $\overline{Q_1Q_2}$ olan bir elips olsun. P ve P', $\overline{Q_1Q_2}$ doğru parçasını içten ve dıştan bölen $\overrightarrow{OQ_1}$ ışını üzerinde farklı iki nokta olsun. O halde P ve P'noktalarının Q_1 ve Q_2 ye göre harmonik eşlenikler olması için gerek ve yeter koşul P ve P' noktalarının E ye göre birbirlerinin eliptik invers noktaları olmasıdır.*

İspat *P ve P', Q_1 ve Q_2 ye göre harmonik eşlenikler olsun. O halde*

$$(Q_1Q_2, PP') = -1$$

olup buradan da

$$\frac{d_E[Q_1P]}{d_E[Q_1P']} \cdot \frac{d_E[Q_2P']}{d_E[Q_2P]} = -1$$

olarak verilir. P, $\overline{Q_1Q_2}$ doğru parçasını içten böldüğü ve $\overrightarrow{OQ_2}$ ışını üzerinde olduğu için $d_E(P,Q_2) = d_E(O,Q_2) - d_E(O,P)$ ve $d_E(Q_1,P) = d_E(Q_1,O) + d_E(O,P)$ dir. Ayrıca P', $\overline{Q_1Q_2}$ doğru parçasını dıştan böldüğü ve $\overrightarrow{OQ_2}$ ışını üzerinde olduğu için $d_E(Q_1,P') = d_E(Q_1,O) + d_E(O,P')$ ve $d_E(Q_2,P') = d_E(O,P') - d_E(O,Q_2)$ dir. Dolayısıyla

$$\frac{d_E(Q_1,O) + d_E(O,P)}{d_E(Q_1,O) + d_E(O,P')} \cdot \frac{d_E(O,P') - d_E(O,Q_2)}{d_E(O,P) - d_E(O,Q_2)} = -1 \tag{6.5}$$

olarak bulunur. Burada $d_E(Q_1,O) = d_E(O,Q_2) = d_E(O,Q) = w$ dür. (6.5) *ifadesi düzenlenirse*

$$(w + d_E(O,P)) \cdot (d_E(O,P') - w) = (w + d_E(O,P')) \cdot (w - d_E(O,P)) \tag{6.6}$$

elde edilir. (6.6) *eşitliğinde gerekli sadeleştirmeler yapıldığında*

$$d_E(O,P) \cdot d_E(O,P') = w^2 = (d_E(O,Q))^2$$

olduğu açıkça görülür. Dolayısıyla P ve P', inversiyon elipsine göre birbirlerinin invers noktalarıdır.

Tersine P ve P', $E(O,w)$ ye göre eliptik invers noktalar olsun. O halde

$$d_E(O,P)\cdot d_E(O,P') = w^2 = (d_E(O,Q))^2$$

dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}(Q_1Q_2,PP') &= \frac{d_E[Q_1P]}{d_E[Q_1P']}\cdot\frac{d_E[Q_2P']}{d_E[Q_2P]} = \frac{d_E[Q_1P]}{d_E[Q_1P']}\cdot\frac{d_E[Q_2P']}{-d_E[PQ_2]}\\ &= \frac{d_E(Q_1,O)+d_E(O,P)}{d_E(Q_1,O)+d_E(O,P')}\cdot\frac{d_E(O,P')-d_E(O,Q_2)}{-d_E(O,Q_2)+d_E(O,P)}\end{aligned}$$

olup, $d_E(Q_1,O) = d_E(O,Q_2) = d_E(O,Q) = w$ dür. Buradan

$$(Q_1Q_2,PP') = \frac{w+d_E(O,P)}{w+d_E(O,P')}\cdot\frac{d_E(O,P')-w}{-w+d_E(O,P)}$$

olarak bulunur. Son eşitlikte gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$(Q_1Q_2,PP') = \frac{w\cdot d_E(O,P')-w^2+d_E(O,P)\cdot d_E(O,P')-w\cdot d_E(O,P)}{w\cdot d_E(O,P)-w^2+d_E(O,P)\cdot d_E(O,P')-w\cdot d_E(O,P')}$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler ve düzenlemeler ile

$$\begin{aligned}(Q_1Q_2,PP') &= \frac{w\cdot(d_E(O,P')-d_E(O,P))}{w\cdot(d_E(O,P)-d_E(O,P'))}\\ &= -1\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Böylelikle P ve P' nün Q_1 ve Q_2 ye göre harmonik eşlenikler olduğu görülür.

İnversiyon Dönüşümünün Analitik Olarak İncelenmesi

Bu kısımda Öklidyen düzlemde bir elipse göre inversiyon dönüşümünün analitik ifadesi verilecektir.

Teorem 6.4 *(Ramírez, 2013, Theorem 3.) E, simetri merkezi O ve kartezyen denklemi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ olan bir elips, a ve b sırasıyla yarı büyük eksen uzunluğu ve yarı küçük eksen uzunluğu olsun. $P=(u,v)$ ve $P'=(x,y)$, E ye göre eliptik invers nokta çifti olsun. O halde*

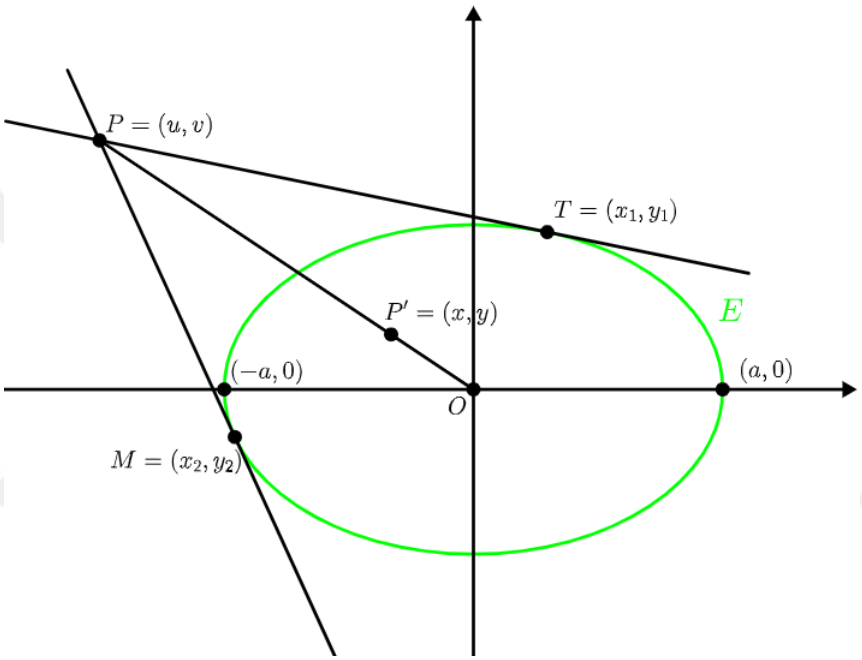
$$\begin{aligned}x &= \frac{a^2b^2u}{b^2u^2+a^2v^2}\\ y &= \frac{a^2b^2v}{b^2u^2+a^2v^2}\end{aligned}$$

dir.

İspat *E, kartezyen denklemi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ olan bir elips olsun. $P=(u,v)$, E nin dışında bir nokta iken P den E ye çizilen teğet doğrularının değme noktaları sırasıyla $T=(x_1,y_1)$ ve $M=(x_2,y_2)$ olarak verilsin. O halde $\overleftrightarrow{PT}$ ve $\overleftrightarrow{PM}$ teğet doğrularının denklemleri aşağıdaki gibidir (Şekil 6.6).*

$$b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2 \tag{6.7}$$

$$b^2x_2x + a^2y_2y = a^2b^2 \tag{6.8}$$



Şekil 6.6 Düzlemde Keyfi Alınan Bir P Noktasının İnversinin Koordinatları

$P=(u,v)$ noktası için (6.7) *ve* (6.8) *denklemleri tekrar düzenlenirse*

$$b^2x_1u + a^2y_1v = a^2b^2 \tag{6.9}$$

$$b^2x_2u + a^2y_2v = a^2b^2 \tag{6.10}$$

olarak bulunur. (6.9) *ve* (6.10) *denklemleri birbirlerine eşitlendiğinde*

$$b^2x_1u + a^2y_1v = b^2x_2u + a^2y_2v$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\frac{-b^2u}{a^2v} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

elde edilir. O halde $\overleftrightarrow{TM}$ *doğrusunun eğimi* $\dfrac{-b^2u}{a^2v}$ *dir. Bu nedenle* $\overleftrightarrow{TM}$ *doğrusunun denklemi*

$$y - y_1 = \frac{-b^2u}{a^2v}(x - x_1) \tag{6.11}$$

dir. (6.11) *ifadesinde gerekli düzenlemeler yapıldığında*

$$a^2vy + b^2ux = b^2ux_1 + a^2vy_1 \tag{6.12}$$

sonucuna ulaşılır. (6.12) *ve* (6.9) *denklemlerine göre*

$$a^2vy + b^2ux = a^2b^2 \tag{6.13}$$

olarak bulunur. Yani (6.13)*,* $\overleftrightarrow{TM}$ *doğrusunun denklemidir. Ayrıca* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun eğimi* $\dfrac{v}{u}$ *olduğu için denklemi* $y = \dfrac{v}{u}x$ *tir.* P'*,* $\overleftrightarrow{TM}$ *ve* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrularının kesişme noktası olduğundan*

$$\begin{aligned} a^2b^2 &= a^2vy + b^2ux \\ &= a^2v\left(\frac{v}{u}x\right) + b^2ux \end{aligned}$$

dir. Yukardaki eşitlikte gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$x = \frac{ua^2b^2}{a^2v^2 + b^2u^2}$$

ve benzer bir şekilde denklem y *için çözülürse*

$$y = \frac{va^2b^2}{a^2v^2 + b^2u^2}$$

olarak bulunur. P*,* E *nin bir içinde bir nokta olduğunda ispat benzerdir.*

Özel olarak $a = b = 1$ *olarak alınırsa, yani* E *bir çember olduğunda*

$$\psi : (u, v) \longmapsto \left(\frac{u}{v^2 + u^2}, \frac{v}{v^2 + u^2}\right)$$

elde edilir.

Öklidyen Eğrilerin Eliptik İnversi

Bu bölümde doğrular, elipsler ve bazı eğrilerin bir elipse göre inversiyon dönüşümü altındaki görüntüleri incelenecektir. Bir P noktası bir C eğrisi üzerinde hareket ederken E ye göre P nin eliptik inversi olan P' de bir C' eğrisi üzerinde hareket ederse C' eğrisine C nin eliptik inversi denir. C eğrisinin, E elipsinde C' nün eliptik inversi olduğu açıktır.

Teorem 6.5 *(Ramírez, 2013, 2014) E, simetri merkezi O noktası olan bir elips ve ψ, E elipsine göre inversiyon dönüşümü olsun. Bu taktirde*

$i)$ *Eliptik inversiyon merkezinden geçen bir doğrunun eliptik inversi, doğrunun kendisidir.*

$ii)$ *Eliptik inversiyon merkezinden geçmeyen bir doğrunun eliptik inversi, inversiyon merkezinden geçen bir elipstir.*

İspat $i)$ *E, kartezyen denklemi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ olan bir elips iken l, kartezyen denklemi $Mx+Ny=0$ olan bir doğru ve ψ, E elipsine göre inversiyon dönüşümü olsun. $Mx+Ny=0$ denklemi ile ifade edilen l doğrusuna ψ dönüşümü uygulanırsa*

$$\begin{aligned} 0 &= Mx+Ny \\ &= M\left(\frac{a^2b^2x}{b^2x^2+a^2y^2}\right)+N\left(\frac{a^2b^2y}{b^2x^2+a^2y^2}\right) \\ &= M\left(a^2b^2x\right)+N\left(a^2b^2y\right) \\ &= Mx+Ny \end{aligned}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla $\psi(l)=l$ olduğu görülür. Yani E nin simetri merkezi olan O noktasından geçen doğrular ψ dönüşümü altında invaryanttır.

$ii)$ *E, kartezyen denklemi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ olan bir elips iken l, denklemi $Mx+Ny+P=0$ $(P\neq 0)$ olan bir doğru ve ψ, E elipsine göre inversiyon dönüşümü olsun. $Mx+Ny+P=0$ denklemi ile ifade edilen l doğrusuna ψ dönüşümü uygulanırsa*

$$\begin{aligned} 0 &= Mx+Ny+P \\ &= M\left(\frac{a^2b^2x}{b^2x^2+a^2y^2}\right)+N\left(\frac{a^2b^2y}{b^2x^2+a^2y^2}\right)+P \\ &= M\left(a^2b^2x\right)+N\left(a^2b^2y\right)+\left(b^2x^2+a^2y^2\right)P \\ &= \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{M}{P}x+\frac{N}{P}y \end{aligned}$$

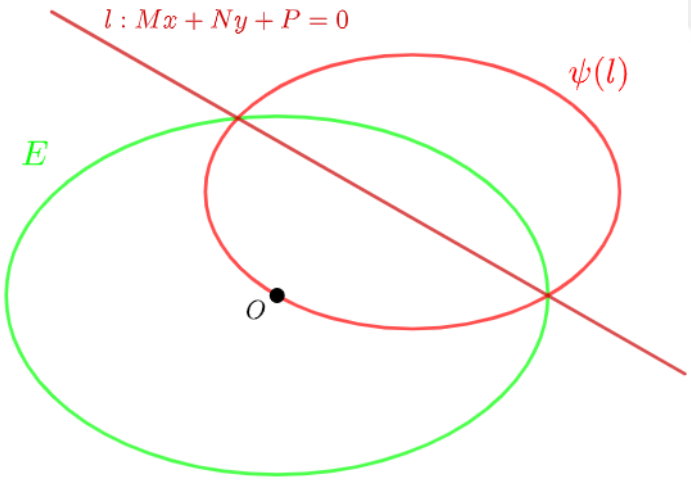
sonucuna ulaşılır. Burada elde edilen denklem incelendiğinde bu ifadenin $O=(0,0)$ *noktasını içeren bir elips olduğu görülür. Nitekim denklem aşağıdaki gibi yeniden düzenlenirse*

$$\begin{aligned} 0 &= M\left(a^2b^2x\right)+N\left(a^2b^2y\right)+\left(b^2x^2+a^2y^2\right)P \\ &= a^2b^2\left(Mx+Ny\right)+\left(b^2x^2+a^2y^2\right)P \end{aligned} \tag{6.14}$$

ifadesi bulunur. Buna göre (6.14) *ifadesinde gerekli düzenlemeler yapılırsa*

$$\frac{\left(x+\frac{a^2M}{2P}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(y+\frac{b^2N}{2P}\right)^2}{b^2}=\frac{a^2M^2+b^2N^2}{4P^2}$$

denklemi bulunur. Açıkça elde edilen bu denkleme göre bulunan ifade simetri merkezi $\left(-\frac{a^2M}{2P},-\frac{b^2N}{2P}\right)$ *noktası olan ve* E *ye* $\frac{2P}{\sqrt{a^2M^2+b^2N^2}}$ *oranında homotetik (benzeşik) bir elipstir (Şekil 6.7). Dolayısıyla* E *nin simetri merkezinden geçmeyen bir doğrunun* E *ye göre inversiyon dönüşümü altında görüntüsü* E *nin simetri merkezi olan* O *noktasından geçen* E *ye homotetik bir elipstir.*



Şekil 6.7 O dan Geçmeyen Bir l Doğrusunun İnversi

Sonuç 6.1 *(Ramírez, 2013, Corollary 1.)* E*, simetri merkezi* O *noktası olan bir elips ve* ψ*,* E *elipsine göre inversiyon dönüşümü iken* l_1 *ve* l_2*,* P *noktasında kesişen birbirine dik doğrular olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler doğrudur.*

i) $P\neq O$ *ise* $\psi\left(l_1\right)$ *ve* $\psi\left(l_2\right)$*,* P' *ve* O *dan geçen* O *noktasında birbirine dik elipslerdir.*

ii) $P = O$ *ise* $\psi(l_1)$ *ve* $\psi(l_2)$ *birbirine dik doğrulardır.*

iii) l_1, *O dan geçmiyor fakat* l_2, *O dan geçiyor ise* $\psi(l_1)$, *O dan geçen bir elips ve* $\psi(l_2)$, *O dan geçen bir doğrudur. Ayrıca* $\psi(l_2)$, *O noktasında* $\psi(l_1)$ *e diktir.*

İspat *i) E, kartezyen denklemi* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *olan bir elips ve* ψ, *E elipsine göre inversiyon dönüşümü iken* l_1, l_2 *kartezyen denklemleri sırasıyla* $Mx + Ny + P = 0$ $(P \neq 0)$, $My - Nx + D = 0$ $(D \neq 0)$ *olan ve* P $(P \neq O)$ *noktasında kesişen iki dik doğru olsun.*

Bu taktirde Teorem 6.5 gereğince $\psi(l_1) = l_1'$ *ve* $\psi(l_2) = l_2'$, *O dan geçen elipslerdir. Ayrıca denklemleri*

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{M}{P}x + \frac{N}{P}y &= 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{N}{D}x + \frac{M}{D}y &= 0 \end{aligned}$$

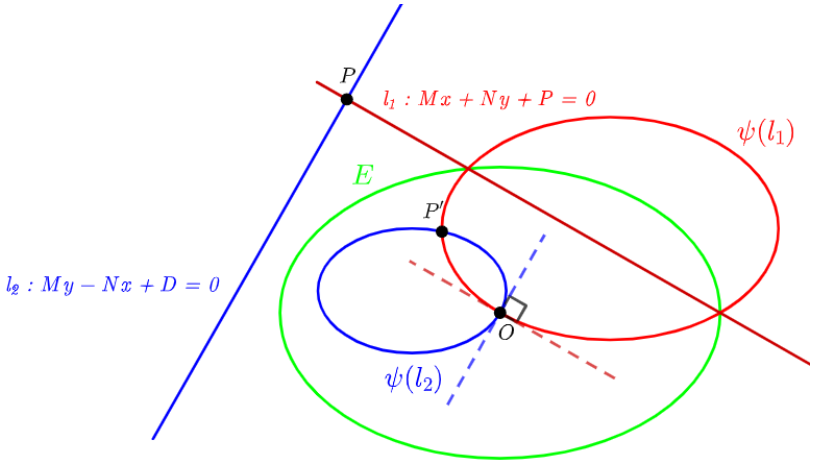
şeklindedir. O noktasında bu elipslere teğet doğruların denklemleri

$$\begin{aligned} \frac{Ma^2b^2}{2}x + \frac{Na^2b^2}{2}y &= 0 \\ -\frac{Na^2b^2}{2}x + \frac{Ma^2b^2}{2}y &= 0 \end{aligned}$$

dir. Bu denklemler daha basit bir şekide verilecek olursa

$$\begin{aligned} Mx + Ny &= 0 \\ -Nx + My &= 0 \end{aligned}$$

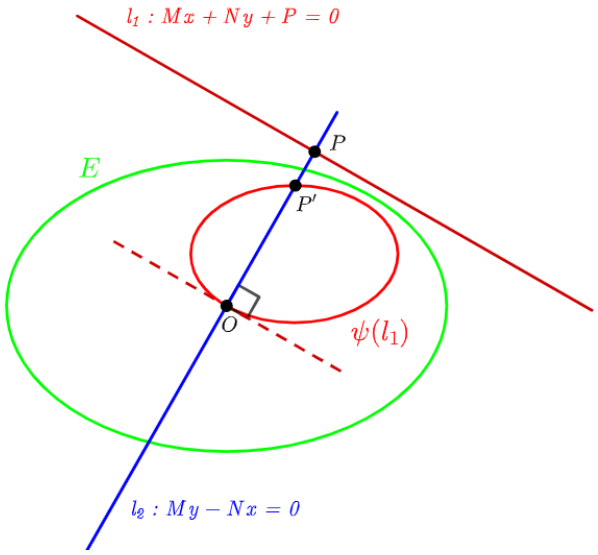
olarak bulunur. Bu nedenle açıkça görüldüğü üzere doğrular birbirine diktir. Dolayısıyla elipsler de birbirine O noktasında diktir (Şekil 6.8). Ancak elipsde inversiyon dönüşümü konformal olmadığından P' *noktasında elipsler dik olmak zorunda değildir.*



Şekil 6.8 Birbirine Dik Olan l_1 ve l_2 Doğrularının İnversleri

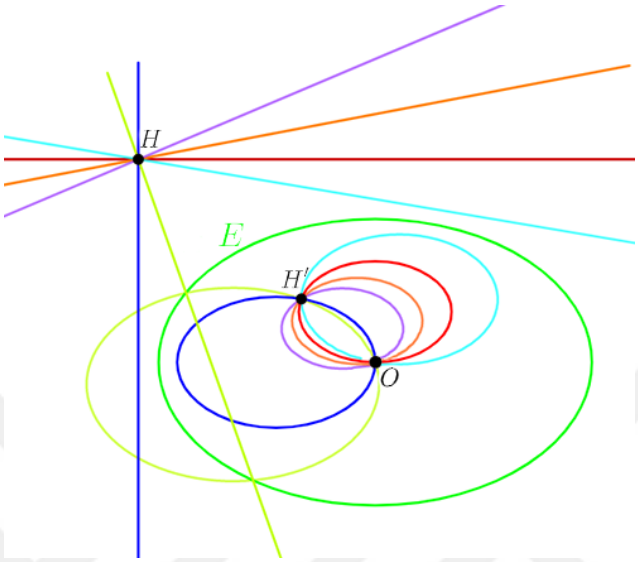
ii) *Teorem 6.5 gereğince* l_1 *ve* l_2 *doğruları* ψ *dönüşümü altında invaryant olduğundan dolayı* $\psi(l_1)$ *ve* $\psi(l_2)$ *doğrularının birbirine dik olacağı açıktır.*

iii) *E, kartezyen denklemi* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *olan bir elips ve* ψ, *E elipsine göre inversiyon dönüşümü iken* l_1, l_2 *kartezyen denklemleri sırasıyla* $Mx + Ny + P = 0$ $(P \neq 0)$, $My - Nx = 0$ *olan ve* P $(P \neq O)$ *noktasında kesişen iki dik doğru olsun. Bu taktirde Teorem 6.5 gereğince,* $\psi(l_1) = l_1'$ O *dan geçen elips iken* $\psi(l_2) = l_2'$ *invaryant kalır. Dolayısıyla* $\psi(l_1) = l_1'$ *elipsine* O *noktasında teğet olan doğrunun denklemi* $Mx + Ny = 0$ *olarak bulunur ve* $\psi(l_2) = l_2'$ *doğrusunun denklemi* $My - Nx = 0$ *olduğundan* $\psi(l_2)$, O *noktasında* $\psi(l_1)$ *e diktir (Şekil 6.9).*



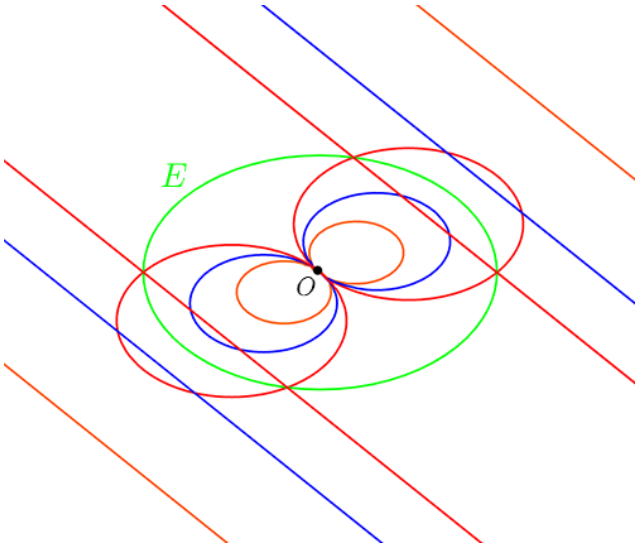
Şekil 6.9 Birbirine Dik Olan l_1 ve l_2 Doğrularının İnversleri

Sonuç 6.2 *(Ramírez, 2013, Corollary 2.) E, simetri merkezi O noktası olan bir elips ve H, O dan farklı bir nokta olsun. H noktasında noktadaş olan doğruların E elipsine göre inversiyon dönüşümü altındaki görüntüleri H nin E ye göre inversi olan H' noktasından ve O noktasından geçen ortak eksenli elipslerdir (Şekil 6.10).*



Şekil 6.10 E de O dan Farklı Bir H Noktasından Geçen Doğruların İnversleri

Sonuç 6.3 *(Ramírez, 2013, Corollary 3.) E simetri merkezi O noktası olan bir elips olmak üzere O noktasından geçmeyen paralel doğruların E ye göre inversiyon dönüşümü altındaki görüntüleri O noktasında birbirlerine teğet elipslerdir (Şekil 6.11).*



Şekil 6.11 E de O dan Geçmeyen Birbirine Paralel Doğruların İnversleri

Elipslerin Eliptik İnversi

Tanım 6.5 *(Ramírez, 2013, Definition 3.) E_1 ve E_2 paralel eksenlere ve eşit dış merkezliklere sahip iki elips ise E_1 ve E_2 aynı yarı formdadır denir. Ayrıca asal eksenler paralel ise E_1 ve E_2 elipsi homotetik (benzeşik) olarak adlandırılır ve $E_1 \sim E_2$ ile gösterilir.*

Teorem 6.6 *(Ramírez, 2013, 2014) E, simetri merkezi O noktası olan bir elips olmak üzere χ bir elips ve χ', χ elipsinin E ye göre inversiyon dönüşümü altındaki görüntü eğrisi olsun. Ayrıca χ ile E homotetik eğriler yani $\chi \sim E$ olsun. Bu taktirde*

i) χ, inversiyon merkezinden geçmiyor ise χ' inversiyon merkezinden geçmeyen bir elipstir ve $\chi' \sim E$ dir.

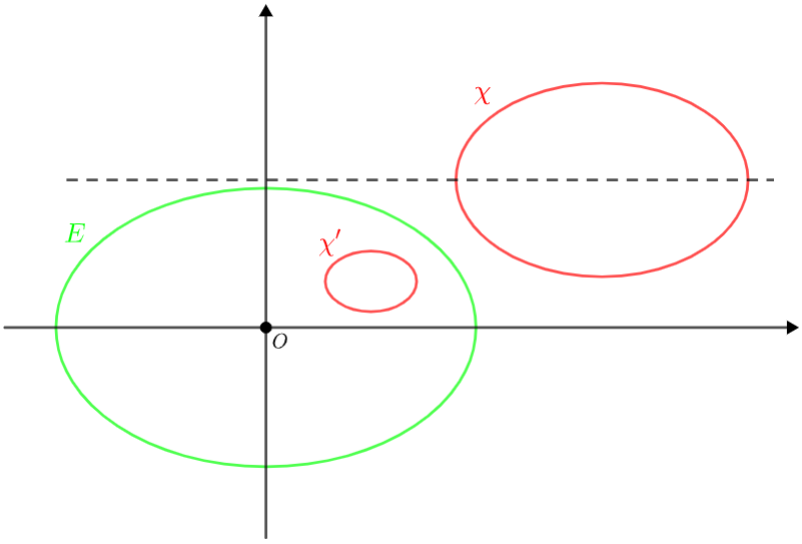
ii) χ, inversiyon merkezinden geçiyor ise χ' bir doğrudur.

İspat *E, simetri merkezi O noktası olan bir elips ve ψ, E elipsine göre inversiyon dönüşümü olsun. E ile homotetik olan bir χ elipsinin kartezyen denklemi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+Dx+Ey+F=0$ şeklinde olmalıdır ve χ nın O dan geçmesi için gerek ve yeter koşul $F=0$ olmasıdır.*

i) χ, kartezyen denklemi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+Dx+Ey+F=0$ $(F\neq 0)$ olan bir elips olsun. χ ile ifade edilen E elipsine homotetik olan elipse ψ dönüşümü uygulanırsa

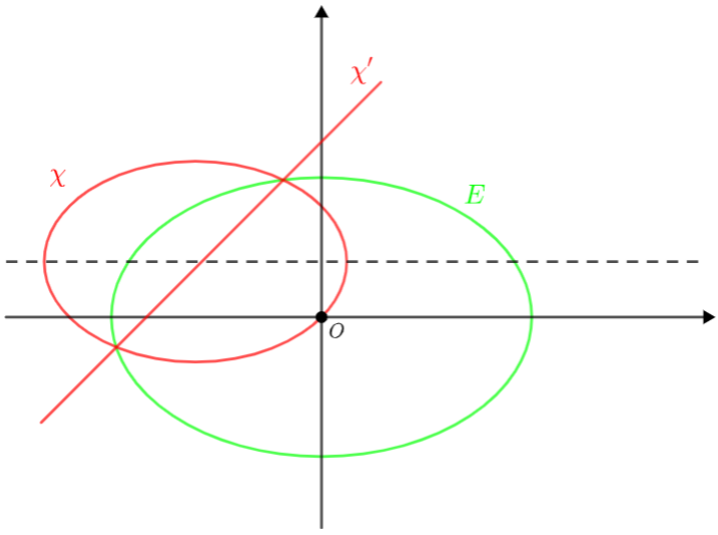
$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+Dx+Ey+F \\
&= \frac{\left(\frac{a^2b^2x}{b^2x^2+a^2y^2}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{a^2b^2y}{b^2x^2+a^2y^2}\right)^2}{b^2}+D\left(\frac{a^2b^2x}{b^2x^2+a^2y^2}\right)+E\left(\frac{a^2b^2y}{b^2x^2+a^2y^2}\right)+F \qquad (6.15)\\
&= a^2b^4x^2+a^4b^2y^2+\left(Da^2b^2x+Ea^2b^2y\right)\left(b^2x^2+a^2y^2\right)+F\left(b^2x^2+a^2y^2\right)^2 \\
&= \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+Dx\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)+Ey\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)+F\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\left(1+Dx+Ey+F\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\right) \\
&= \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{D}{F}x+\frac{E}{F}y+\frac{1}{F}
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır. Bu durumda χ' açık bir şekilde E ye homotetik olan bir elipstir (Şekil 6.12).



Şekil 6.12 O dan Geçmeyen E ye Homotetik Olan Bir χ Elipsinin İnversi

$ii)$ *E ye homotetik olan bir χ elipsi O dan geçiyor ise $F = 0$ olmalıdır. O halde* (6.15) *denklemi $Dx + Ey + 1 = 0$ formuna dönüşür. Bu ise bir doğru belirtir (Şekil 6.13).*



Şekil 6.13 O dan Geçen E ye Homotetik Olan Bir χ Elipsinin İnversi

Sonuç 6.4 *(Ramírez, 2014, Corollary 8.)* χ, O *simetri merkezli* E *elipsine homotetik olan* O' *simetri merkezli elips olsun.* χ, E *ye göre inversiyon dönüşümü altında invaryant ve* P *elipslerin ortak noktası ise* $O'P$ *ve* OP *sırasıyla* E *ve* χ *elipslerine teğettir.*

İspat χ *elipsinin* E *ye göre inversiyon dönüşümü altında invaryant olması için gerek ve yeter koşul kartezyen denkleminin* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+Dx+Ey+1=0$ *olmasıdır.* χ *nın simetri merkezi olan* O' *nün koordinatları* $\left(-\frac{Da^2}{2},-\frac{Eb^2}{2}\right)$ *dir. Bu iki elipsin ortak noktası* $P=(x_0,y_0)$ *olsun. O halde*

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2} = 1 \tag{6.16}$$

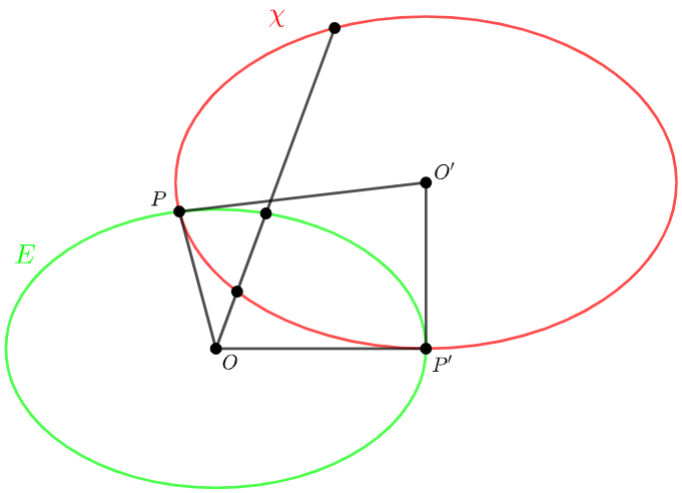
$$Dx_0+Ey_0+2 = 0 \tag{6.17}$$

olduğu açıktır. E *ve* χ *elipslerine* (x_0,y_0) *noktasındaki teğet olan doğruların denklemleri*

$$(t) \;:\; \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-1=0$$

$$(t') \;:\; \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{1}{2}D\left(x+x_0\right)+\frac{1}{2}E\left(y+y_0\right)+1=0$$

dir. (x,y) *koordinatları* (t) *ve* (t') *teğet doğruları için sırasıyla* O' *ve* $(0,0)$ *ın kordinatlarına göre düzenlenirse* $\mp\left(\frac{Dx_0}{2}+\frac{Ey_0}{2}+1\right)$ *elde edilir.* (6.17) *gereğince her iki durumda da sıfır bulunur. Buradan açıkça görülür ki* $O'P$, E *ye teğet ve* OP *de* χ *ya teğettir (Şekil 6.14).*



Şekil 6.14 E ye Homotetik Olan Bir χ Elipsinin İnvaryantlığı

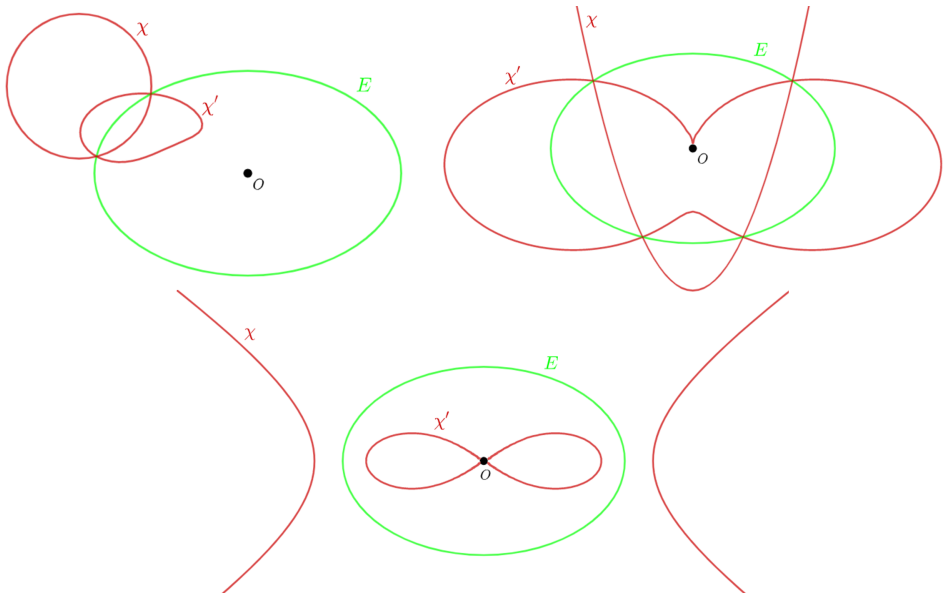
Bazı Eğrilerin Eliptik İnversi

Teorem 6.7 *(Ramírez, 2013, Theorem 6.) E, simetri merkezi O noktası olan bir elips ve ψ, E elipsine göre inversiyon dönüşümü iken merkezi inversiyon koniği ile aynı yarı forma sahip olmayan ve inversiyon merkezinden geçen herhangi bir koniğin inversi kübik bir eğridir.*

İspat *$A = \frac{1}{a^2}$, $B = 0$ ve $C = \frac{1}{b^2}$ aynı anda geçerli olmamak üzere χ, kartezyen denklemi $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = 0$ olan bir konik olsun. χ ile ifade edilen koniğe ψ dönüşümü uygulanırsa $Aa^4b^4x^2 + Ba^4b^4xy + Ca^4b^4y^2 + Db^2x^3 + Da^2xy^2 + Eb^2x^2y + Ea^2y^3 = 0$ elde edilir. Açıkça görüldüğü üzere χ koniğinin inversiyon dönüşümü altındaki görüntüsü kübik bir eğridir.*

Teorem 6.8 *(Ramírez, 2013, 2014) E, simetri merkezi O noktası olan bir elips ve ψ, E elipsine göre inversiyon dönüşümü iken merkezi inversiyon koniği ile aynı yarı forma sahip olmayan ve inversiyon merkezinden geçmeyen herhangi bir koniğin inversi dördüncü derece bir eğridir.*

Örnek 6.1 *χ ve χ' birbirinin invers görüntüleri olmak üzere; inversiyon merkezinden geçmeyen konikler, eliptik inversiyon dönüşümü altında dördüncü derece eğrilere dönüşür (Şekil 6.15).*



Şekil 6.15 O dan Geçmeyen Koniklerin İnversleri

6.2 Taksi Elipslere Göre İnversiyon Dönüşümünün Sentetik Ve Analitik Özellikleri

Tanım 6.6 *E_T, $\mathbb{R}^2$ de simetri merkezi O noktası olan F_1 ve F_2 odaklı altıgen, sekizgen ya da dikdörtgensel bölge biçiminde bir taksi elips olsun. E_T taksi elipsine göre inversiyon dönüşümü ya da E_T ye göre taksi eliptik inversiyon dönüşümü $\psi : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \longmapsto \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ olmak üzere $\psi(P) = P'$ olarak tanımlanır öyle ki P', $\overrightarrow{OP}$ ışını üzerindedir ve $d_T(O,P) \cdot d_T(O,P') = (d_T(O,Q))^2$ dir. Q burada $\overrightarrow{OP}$ ışını ve E_T taksi elipsinin kesişim noktasıdır. P' noktasına P nin taksi eliptik inversi ya da kısaca $T-$eliptik inversi, E_T ye $T-$eliptik inversiyon elipsi, O ya $T-$eliptik inversiyon merkezi, $d_T(O,Q) = w$ ya $T-$eliptik inversiyon yarıçapı, $(d_T(O,Q))^2 = w^2$ ye $T-$eliptik inversiyon kuvveti denir. Taksi çembere göre inversiyon dönüşümünün aksine burada yarıçap sabit değildir.*

$T-$eliptik inversiyon involutif bir dönüşümdür yani $\psi(\psi(P)) = P$ dir. Ayrıca bir P noktasının E_T taksi elipsinin içinde olması durumunda $d_T(O,P) < d_T(O,Q)$ dur ve $d_T(O,P) \cdot d_T(O,P') = (d_T(O,Q))^2$ bağıntısının sağlanması için $d_T(O,P') > d_T(O,Q)$ olması gerekir. Yani E_T taksi elipsinin içindeki noktaların inversleri E_T taksi elipsinin dışındaki noktalara ve E_T taksi elipsinin dışındaki noktaların inversleri de E_T taksi elipsinin içinde noktalara dönüşür. E_T taksi elipsinin üzerindeki bir noktanın inversi, o noktanın kendisidir. Yani bir P noktası E_T taksi elipsinin üzerinde ise $d_T(O,P) = d_T(O,Q)$ dur. $d_T(O,P) \cdot d_T(O,P') = (d_T(O,Q))^2$ bağıntısının sağlanması için $d_T(O,P') = d_T(O,Q)$ olmalıdır. Bu durumda $P = P'$ olur. Bu önermenin tersi de geçerlidir.

Bir taksi elips üzerindeki inversiyon dönüşümü, olağan tanımda olduğu gibi inversiyon merkezi O için tanımlı değildir. Nitekim, taksi düzlemine düzlemin dışında olan bir O_∞ noktası (ideal nokta veya sonsuzdaki bir nokta) eklenerek, tanım kümesine O noktası dahil edilebilir. $\psi(O_\infty) = O$ ve $\psi(O) = O_\infty$ olarak alınırsa inversiyon dönüşümü genişletilmiş düzlemde bire bir dönüşüm olur ve bu düzlem $\mathbb{R}^2_\infty$ ile gösterilir. Bu durumda inversiyon dönüşümünü tekrar tanımlamak gerekirse;

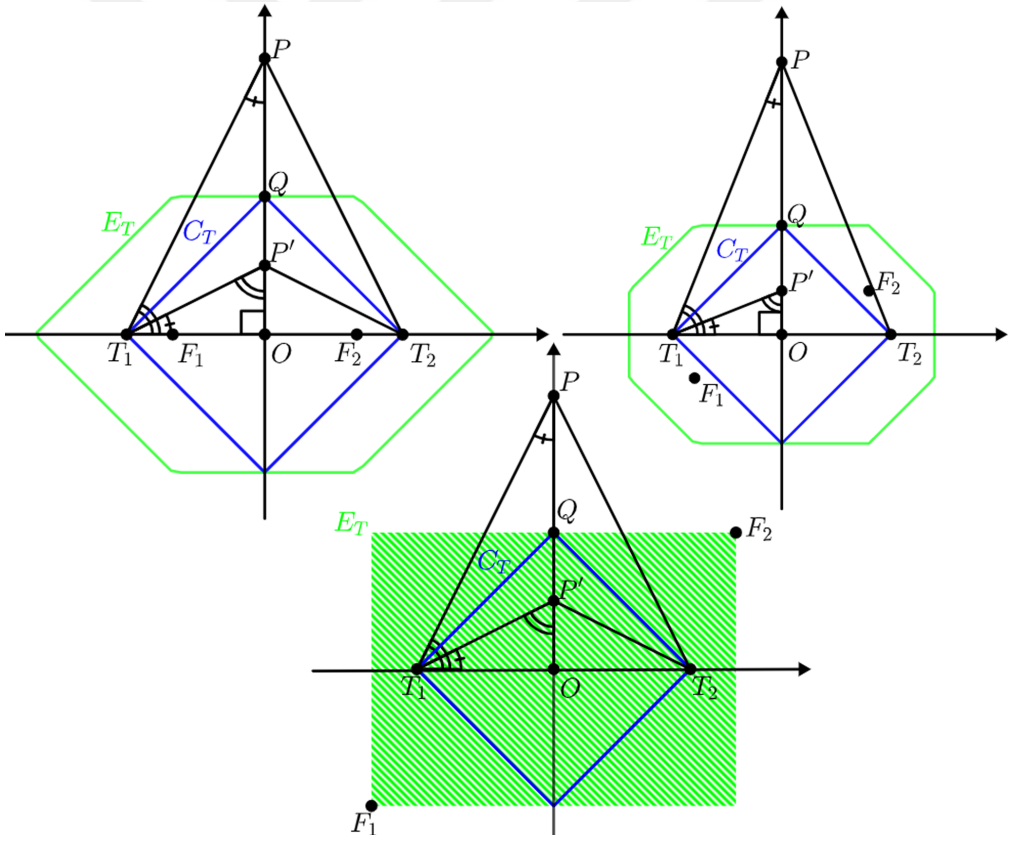
Tanım 6.7 *E_T, $\mathbb{R}^2_\infty$ de simetri merkezi O noktası olan F_1 ve F_2 odaklı altıgen, sekizgen ya da dikdörtgensel bölge biçiminde bir taksi elips olsun. E_T taksi elipsine göre inversiyon dönüşümü ya da E_T ye göre taksi eliptik inversiyon dönüşümü $\psi : \mathbb{R}^2_\infty \longmapsto \mathbb{R}^2_\infty$ olmak üzere $P \neq O, O_\infty$ iken $\psi(P) = P'$ olarak tanımlanır öyle ki P', $\overrightarrow{OP}$ ışını üzerindedir ve $d_T(O,P) \cdot d_T(O,P') = (d_T(O,Q))^2$ dir. Ayrıca $\psi(O_\infty) = O$ ve $\psi(O) = O_\infty$ dur.*

Taksi Elipsin Dışındaki Bir Noktanın İnversi

Simetri merkezi O noktası olan E_T taksi elipsi verilsin. P, E_T nin dışında O dan geçen yatay ya da dikey doğru üzerinde bir nokta olsun. Merkezi O noktası olan Q yarıçaplı C_T taksi çemberi oluşturulur. P noktasından C_T ye teğetler çizilir. Teğetlerden herhangi birinin C_T ye değme noktası T_1 olsun. Daha sonra $\angle OPT_1 \cong \angle OT_1P'$ olacak şekilde $\overrightarrow{OP}$ ışını üzerindeki P' noktası alınsın. Ardından $\overline{T_1P'}$ doğru parçası oluşturulur. O halde Yardımcı Teorem 5.4 gereği $\triangle OPT_1 \sim \triangle OT_1P'$ benzerliği vardır. Bu durumda bu iki üçgen arasında

$$\frac{d_T(O,P')}{d_T(O,T_1)} = \frac{d_T(O,T_1)}{d_T(O,P)}$$

eşitliği verilebilir. Dolayısıyla $d_T(O,T_1) = d_T(O,Q)$ olduğu için eşitlikte gerekli düzenlemeler yapıldığında $d_T(O,P) \cdot d_T(O,P') = (d_T(O,Q))^2$ olduğu görülür. O halde P' noktasının P nin $T-$eliptik inversiyon dönüşümü altındaki görüntüsü olduğu açıktır (Şekil 6.16).



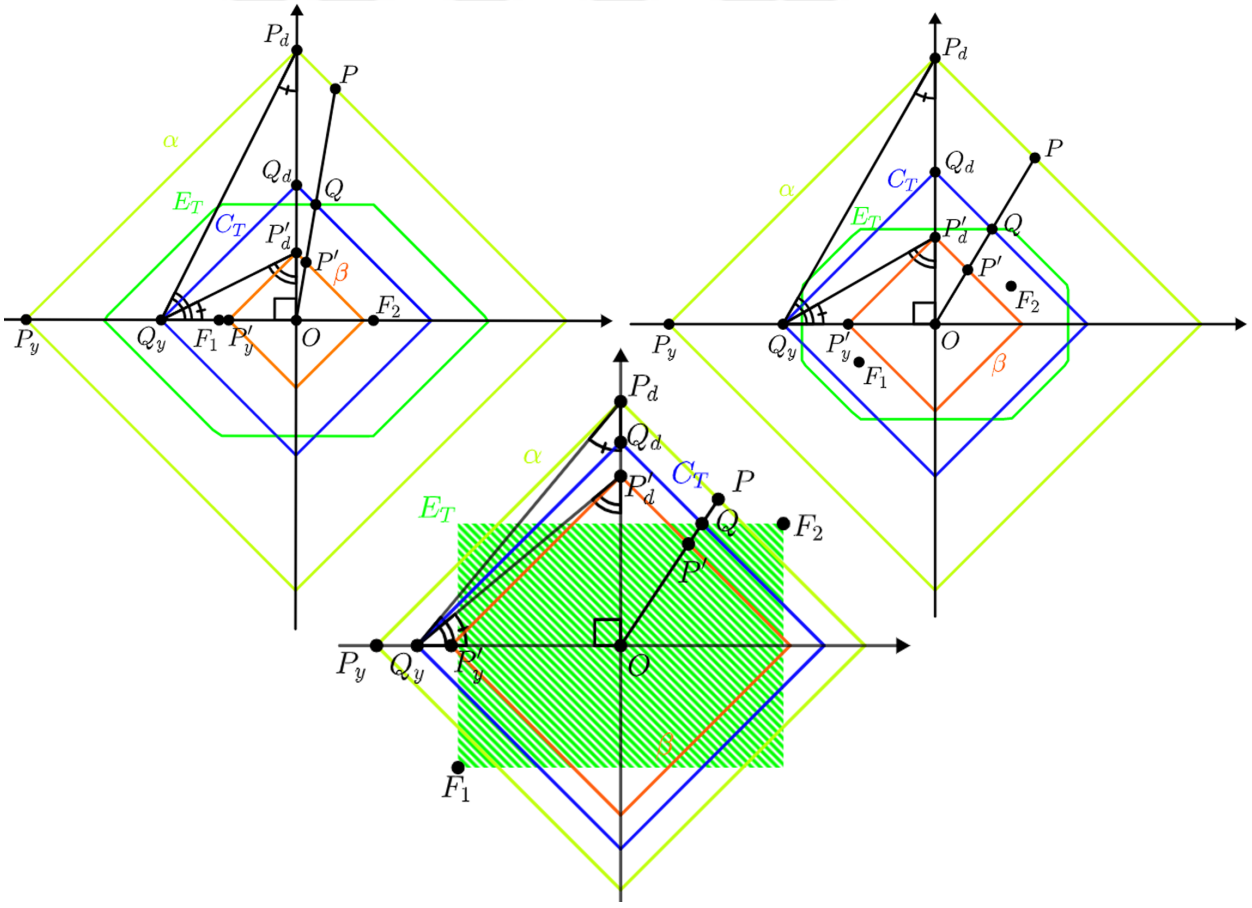
Şekil 6.16 E_T nin Dışında x Veya y Ekseninde Olan Bir P Noktasının İnversi

Simetri merkezi O noktası olan E_T taksi elipsi verilsin. P noktası E_T nin dışında O dan geçen yatay ya da dikey doğru üzerinde bulunmayan bir nokta olsun. Merkezi O noktası

olan Q yarıçaplı C_T taksi çemberi oluşturulur. Oluşturulan C_T taksi çemberinin dikey ve yatay doğrultuda kestiği noktalar sırasıyla Q_d ve Q_y olarak adlandırılsın. Q, Q_d ve Q_y aynı taksi çemberi üzerinde olduğundan $d_T(O,Q) = d_T(O,Q_d) = d_T(O,Q_y)$ dir. Merkezi O noktası olan P yarıçaplı α taksi çemberi oluşturulur. Oluşturulan α taksi çemberinin dikey ve yatay doğrultuda kestiği noktalar sırasıyla P_d ve P_y olarak adlandırılsın. P, P_d ve P_y aynı taksi çemberi üzerinde olduğundan $d_T(O,P) = d_T(O,P_d) = d_T(O,P_y)$ dir. Dolayısıyla P_d ya da P_y noktalarından biri seçilip Q yarıçaplı C_T taksi çemberine göre inversi bulunabilir. Seçilen nokta P_d ise bu noktanın inversi P'_d dir. Merkezi O noktası olan P'_d yarıçaplı β taksi çemberi oluşturulsun. Bu durumda

$$\frac{d_T(O,P'_d)}{d_T(O,Q_y)} = \frac{d_T(O,Q_y)}{d_T(O,P_d)}$$

eşitliği verilebilir. Dolayısıyla $d_T(O,P_d) = d_T(O,P)$, $d_T(O,P'_d) = d_T(O,P')$ ve $d_T(O,Q_y) = d_T(O,Q)$ olduğu için eşitlikte gerekli düzenlemeler yapıldığında $d_T(O,P) \cdot d_T(O,P') = (d_T(O,Q))^2$ olduğu görülür. O halde P' noktasının P nin $T-$eliptik inversiyon dönüşümü altındaki görüntüsü olduğu açıktır (Şekil 6.17).



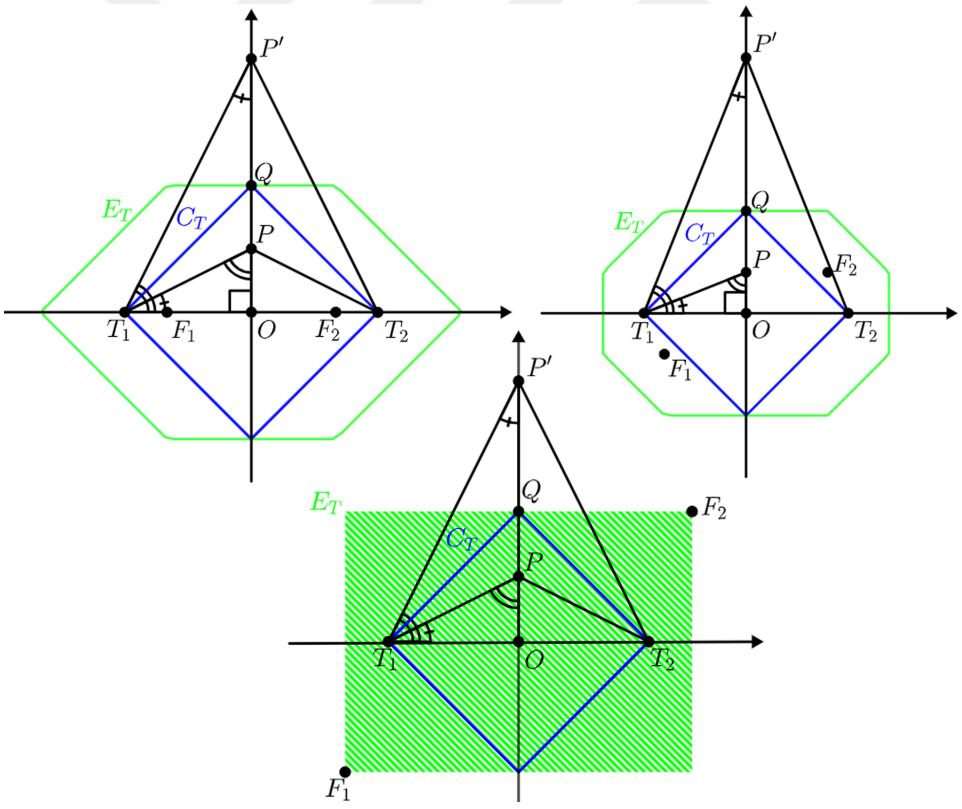
Şekil 6.17 E_T nin Dışında x Veya y Ekseninde Olmayan Bir P Noktasının İnversi

Taksi Elipsin İçindeki Bir Noktanın İnversi

Simetri merkezi O noktası olan E_T taksi elipsi verilsin. P noktası E_T nin içinde O dan geçen yatay ya da dikey doğru üzerinde bir nokta olsun. Merkezi O noktası olan Q yarıçaplı C_T taksi çemberi oluşturulur. P dikey doğru üzerinde ise C_T nin O dan geçen yatay doğru üzerindeki köşeleri ile birleştirilsin (P yatay doğru üzerinde ise dikey doğru üzerindeki köşeleri ile birleştirilir). Bu köşelerden herhangi biri T_1 olsun.Daha sonra $\angle OPT_1 \cong \angle OT_1P'$ olacak şekilde $\overrightarrow{OP}$ ışını üzerindeki P' noktası alınsın. O halde Yardımcı Teorem 5.4 gereği $\triangle OPT_1 \sim \triangle OT_1P'$ benzerliği vardır. Dolayısıyla bu iki üçgen arasında

$$\frac{d_T(O,P)}{d_T(O,T_1)} = \frac{d_T(O,T_1)}{d_T(O,P')}$$

eşitliği verilebilir. Dolayısıyla $d_T(O,T_1) = d_T(O,Q)$ olduğu için eşitlikte gerekli düzenlemeler yapıldığında $d_T(O,P) \cdot d_T(O,P') = (d_T(O,Q))^2$ olduğu görülür. O halde P' noktasının P nin $T-$eliptik inversiyon dönüşümü altındaki görüntüsü olduğu açıktır (Şekil 6.18).



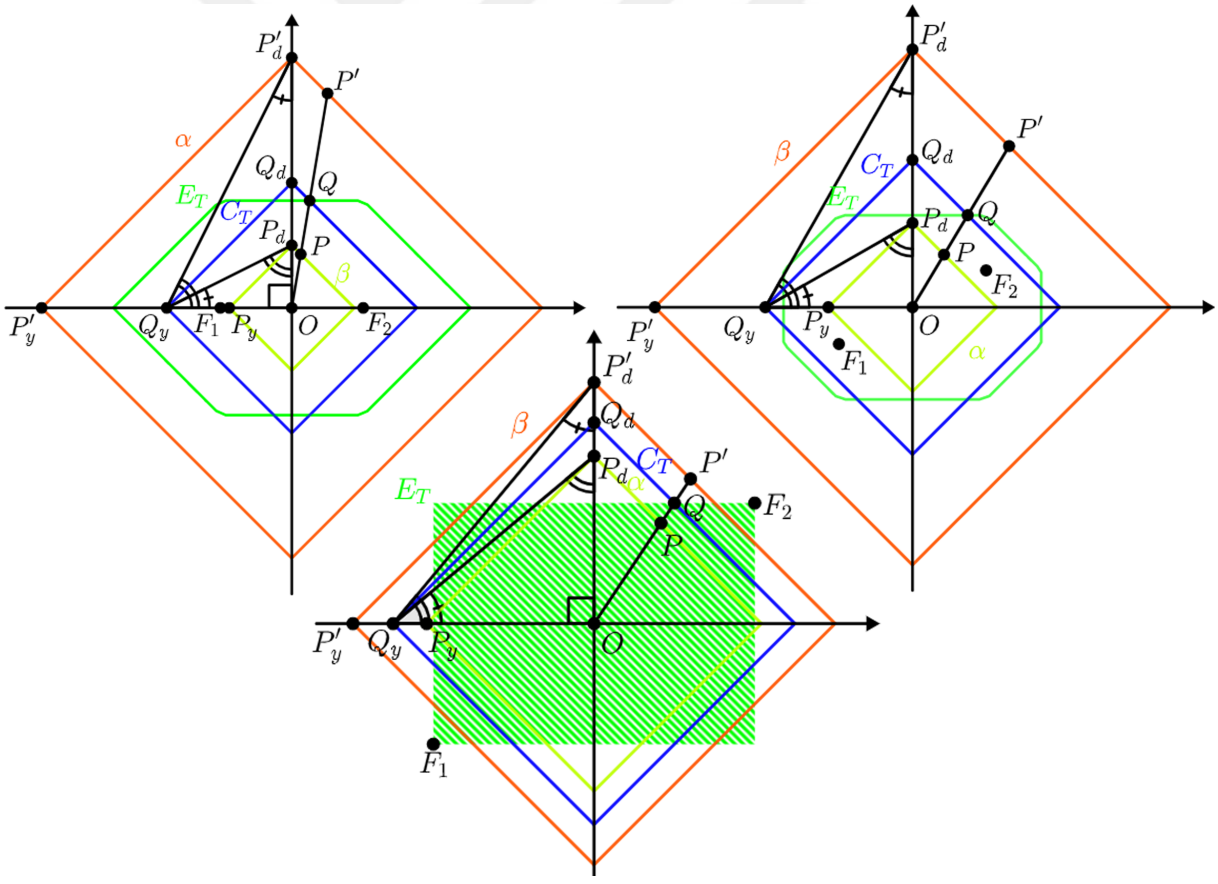
Şekil 6.18 E_T nin İçinde x Veya y Ekseninde Olan Bir P Noktasının İnversi

Simetri merkezi O noktası olan E_T taksi elipsi verilsin. P noktası E_T nin içinde O dan geçen yatay ya da dikey doğru üzerinde bulunmayan bir nokta olsun. Merkezi O noktası

olan Q yarıçaplı C_T taksi çemberi çizilir. Çizilen taksi çemberinin dikey ve yatay doğrultuda kestiği noktalara sırasıyla Q_d ve Q_y olarak adlandırılsın. Q, Q_d ve Q_y aynı taksi çemberi üzerinde olduğundan $d_T(O,P) = d_T(O,Q_d) = d_T(O,Q_y)$ dir. Merkezi O noktası olan P yarıçaplı α taksi çemberi çizilir. Çizilen taksi çemberin dikey ve yatay doğrultuda kestiği noktalara sırasıyla P_d ve P_y olarak adlandırılsın. P, P_d ve P_y aynı taksi çemberi üzerinde olduğundan $d_T(O,P) = d_T(O,P_d) = d_T(O,P_y)$ dir. Dolayısıyla P_d ya da P_y noktalarından biri seçilip Q yarıçaplı C_T taksi çemberine göre inversi bulunabilir. Seçilen nokta P_d ise bu noktanın inversi P'_d dir. Merkezi O noktası olan P'_d yarıçaplı β taksi çemberi oluşturulsun. Bu durumda

$$\frac{d_T(O,P'_d)}{d_T(O,Q_d)} = \frac{d_T(O,Q_d)}{d_T(O,P_d)}$$

dir. O halde $d_T(O,P_d) = d_T(O,P)$, $d_T(O,P'_d) = d_T(O,P')$ ve $d_T(O,Q_d) = d_T(O,Q)$ olduğu için eşitlikte gerekli düzenlemeler yapıldığında $d_T(O,P)\cdot d_T(O,P') = (d_T(O,Q))^2$ olduğu görülür. Dolayısıyla P' noktasının P nin $T-$eliptik inversiyon dönüşümü altındaki görüntüsü olduğu açıktır (Şekil 6.19).



Şekil 6.19 E_T nin İçinde x Veya y Ekseninde Olmayan Bir P Noktasının İnversi

İnversiyon Dönüşümünün Analitik Olarak İncelenmesi

Bu kısımda taksi düzlemde elipse göre inversiyon dönüşümünün analitik ifadesi verilecektir.

Teorem 6.9 *E_T, simetri merkezi $O=(x_0,y_0)$ noktası olan bir taksi elips ve ψ, E_T elipsine göre inversiyon dönüşümü olsun. $P=(x_1,y_1)$ olmak üzere $\psi(P)=P'=(x_2,y_2)$ ise*

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{(d_T(O,Q))^2\cdot(x_1-x_0)}{(|x_1-x_0|+|y_1-y_0|)^2}+x_0 \\ y_2 &= \frac{(d_T(O,Q))^2\cdot(y_1-y_0)}{(|x_1-x_0|+|y_1-y_0|)^2}+y_0 \end{aligned}$$

dir.

İspat *$O=(x_0,y_0)$, $P=(x_1,y_1)$ ve $P'=(x_2,y_2)$ noktaları $\overrightarrow{OP}$ ışını üzerinde olduğu için doğrudaştır. $\overrightarrow{OP}$ ve $\overrightarrow{OP'}$ ışınları aynı doğrultuda olduğundan $k\in\mathbb{R}^+$ olmak üzere*

$$\overrightarrow{OP'}=k\overrightarrow{OP}$$

olup, açıkça ifade edilirse

$$(x_2-x_0,y_2-y_0)=k(x_1-x_0,y_1-y_0) \tag{6.18}$$

olarak verilir. Buna göre inversiyon dönüşümünün tanımı (6.18) *bağıntısından elde edilen $x_2-x_0=k(x_1-x_0)$ ve $y_2-y_0=k(y_1-y_0)$ için tekrar düzenlenirse*

$$\begin{aligned} (d_T(O,Q))^2 &= d_T(O,P)\cdot d_T(O,P') \\ &= (|x_1-x_0|+|y_1-y_0|)\cdot(|x_2-x_0|+|y_2-y_0|) \\ &= (|x_1-x_0|+|y_1-y_0|)\cdot(k|x_1-x_0|+k|y_1-y_0|) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$k=\frac{(d_T(O,Q))^2}{(|x_1-x_0|+|y_1-y_0|)^2}$$

olarak bulunur ve (6.18) *için eşitlik düzenlenirse*

$$\begin{aligned} (x_2-x_0,y_2-y_0) &= \frac{(d_T(O,Q))^2}{(|x_1-x_0|+|y_1-y_0|)^2}(x_1-x_0,y_1-y_0) \\ &= \left(\frac{(d_T(O,Q))^2\cdot(x_1-x_0)}{(|x_1-x_0|+|y_1-y_0|)^2},\frac{(d_T(O,Q))^2\cdot(y_1-y_0)}{(|x_1-x_0|+|y_1-y_0|)^2}\right) \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla elde edilen son eşitlikten kolaylıkla

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{\left(d_T\left(O,Q\right)\right)^2 \cdot \left(x_1 - x_0\right)}{\left(\left|x_1 - x_0\right| + \left|y_1 - y_0\right|\right)^2} + x_0 \\ y_2 &= \frac{\left(d_T\left(O,Q\right)\right)^2 \cdot \left(y_1 - y_0\right)}{\left(\left|x_1 - x_0\right| + \left|y_1 - y_0\right|\right)^2} + y_0 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Sonuç 6.5 *E_T, simetri merkezi $O = (0,0)$ noktası olan bir taksi elips ve ψ, E_T elipsine göre inversiyon dönüşümü olsun. $P = (x_1, y_1)$ olmak üzere $\psi(P) = P' = (x_2, y_2)$ ise*

$$P' = (x_2, y_2) = \left(\frac{\left(d_T\left(O,Q\right)\right)^2 \cdot x_1}{\left(\left|x_1\right| + \left|y_1\right|\right)^2}, \frac{\left(d_T\left(O,Q\right)\right)^2 \cdot y_1}{\left(\left|x_1\right| + \left|y_1\right|\right)^2} \right)$$

dir.

Burada $\left(d_T\left(O,Q\right)\right)^2$ olarak tanımlanan $T-$eliptik inversiyon kuvvetini daha ayrıntılı incelemek gerekirse aşağıdaki gibi sonuçlar bulunur.

E_T, simetri merkezi $O = (0,0)$; odak noktaları $F_1 = (c_1, d_1)$, $F_2 = (c_2, d_2) \in \mathbb{R}^2$ iken $\lambda, \delta \geq 0$ olmak üzere $\{X \mid d_T(X, F_1) + d_T(X, F_2) = \lambda\}$ şeklinde tanımlı bir taksi elips ve $d_T(F_1, F_2) = \delta$ olsun. $P = (x_1, y_1)$ ve $\psi(P) = P' = (x_2, y_2)$ noktaları verilsin.

Sonuç 6.6 *$\lambda > \delta$ iken $c_1 = c_2$ ya da $d_1 = d_2$ ise altıgen biçimde bir taksi elipsdir. Simetri merkezi $O = (0,0)$ olduğundan $F_1 = (c, 0)$, $F_2 = (-c, 0)$ ve $\lambda = 2a$ olarak alınabilir. O halde taksi elipsi,*

$$|x - c| + |y| + |x + c| + |y| = 2a$$

denklemini sağlayan noktaların kümesidir. Burada açıkça $x = -c, c$ ve $y = 0$ denklemin kökleridir. Buna göre 6 durum meydana gelir. Bu durumlarda

$$\begin{aligned} x < -c \text{ ve } y < 0 \text{ için} &\implies x + y + a = 0 \\ x < -c \text{ ve } y \geq 0 \text{ için} &\implies x - y + a = 0 \\ -c \leq x \leq c \text{ ve } y < 0 \text{ için} &\implies y + a - c = 0 \\ -c \leq x \leq c \text{ ve } y \geq 0 \text{ için} &\implies y - a + c = 0 \\ x > c \text{ ve } y < 0 \text{ için} &\implies x - y - a = 0 \\ x > c \text{ ve } y \geq 0 \text{ için} &\implies x + y - a = 0 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Buna göre bulunan tüm doğru denklemleri ayrı ayrı incelenirse;

Durum 1: $x+y-a=0$ *doğrusu verilsin.* $P=(x_1,y_1)$ *noktası için* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemi* $y=\dfrac{y_1}{x_1}x$ *dir.* $\overrightarrow{OP}$ *ışınının* E_T *elipsini kestiği nokta Q olsun. Bu durumda Q noktası,* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusu ve* $x+y-a=0$ *doğrusunun arakesitidir. Dolayısıyla* $x+y-a=0$ *doğrusu ve* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemleri ortak çözülürse*

$$\begin{aligned} 0 &= x+y-a \\ &= x+\frac{y_1}{x_1}x-a \\ &= x\left(\frac{y_1}{x_1}+1\right)-a \end{aligned}$$

olacağından buradan basitçe

$$x=\frac{ax_1}{x_1+y_1}$$

sonucuna ulaşılır ve aynı şekilde denklem y *için çözülürse*

$$y=\frac{ay_1}{x_1+y_1}$$

olarak bulunur. O halde $Q=\left(\dfrac{ax_1}{x_1+y_1},\dfrac{ay_1}{x_1+y_1}\right)$ *olarak verilebilir. Dolayısıyla*

$$P'=(x_2,y_2)=\left(\frac{\left(d_T\left(O,Q\right)\right)^2\cdot x_1}{\left(|x_1|+|y_1|\right)^2},\frac{\left(d_T\left(O,Q\right)\right)^2\cdot y_1}{\left(|x_1|+|y_1|\right)^2}\right)$$

eşitliği tekrar düzenlenirse

$$P'=(x_2,y_2)=\left(\frac{\left(\left|\dfrac{ax_1}{x_1+y_1}\right|+\left|\dfrac{ay_1}{x_1+y_1}\right|\right)^2\cdot x_1}{\left(|x_1|+|y_1|\right)^2},\frac{\left(\left|\dfrac{ax_1}{x_1+y_1}\right|+\left|\dfrac{ay_1}{x_1+y_1}\right|\right)^2\cdot y_1}{\left(|x_1|+|y_1|\right)^2}\right)$$

olarak bulunur.

Durum 2: $x-y-a=0$ *doğrusu verilsin.* $P=(x_1,y_1)$ *noktası için* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemi* $y=\dfrac{y_1}{x_1}x$ *dir.* $\overrightarrow{OP}$ *ışınının* E_T *elipsini kestiği nokta Q olsun. Bu durumda Q noktası,* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusu ve* $x-y-a=0$ *doğrusunun arakesitidir. Dolayısıyla* $x-y-a=0$ *doğrusu ve* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemleri ortak çözülürse* $Q=\left(\dfrac{ax_1}{x_1-y_1},\dfrac{ay_1}{x_1-y_1}\right)$ *olarak bulunur. Eşitlikte yerine yazılırsa*

$$P'=(x_2,y_2)=\left(\frac{\left(\left|\dfrac{ax_1}{x_1-y_1}\right|+\left|\dfrac{ay_1}{x_1-y_1}\right|\right)^2\cdot x_1}{\left(|x_1|+|y_1|\right)^2},\frac{\left(\left|\dfrac{ax_1}{x_1-y_1}\right|+\left|\dfrac{ay_1}{x_1-y_1}\right|\right)^2\cdot y_1}{\left(|x_1|+|y_1|\right)^2}\right)$$

sonucuna ulaşılır.

Durum 3: $y-a+c=0$ *doğrusu verilsin.* $P=(x_1,y_1)$ *noktası için* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemi* $y=\dfrac{y_1}{x_1}x$ *dir.* $\overrightarrow{OP}$ *ışınının* E_T *elipsini kestiği nokta* Q *olsun. Bu durumda* Q *noktası,* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusu ve* $y-a+c=0$ *doğrusunun arakesitidir. Dolayısıyla* $y-a+c=0$ *doğrusu ve* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemleri ortak çözülürse* $Q=\left(\dfrac{(a-c)\,x_1}{y_1},a-c\right)$ *olarak bulunur. Eşitlikte yerine yazılırsa*

$$P'=(x_2,y_2)=\left(\frac{\left(\left|\dfrac{(a-c)\,x_1}{y_1}\right|+|a-c|\right)^2\cdot x_1}{(|x_1|+|y_1|)^2},\frac{\left(\left|\dfrac{(a-c)\,x_1}{y_1}\right|+|a-c|\right)^2\cdot y_1}{(|x_1|+|y_1|)^2}\right)$$

elde edilir.

Durum 4: $y+a-c=0$ *doğrusu verilsin.* $P=(x_1,y_1)$ *noktası için* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemi* $y=\dfrac{y_1}{x_1}x$ *dir.* $\overrightarrow{OP}$ *ışınının* E_T *elipsini kestiği nokta* Q *olsun. Bu durumda* Q *noktası,* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusu ve* $y+a-c=0$ *doğrusunun arakesitidir. Dolayısıyla* $y-a+c=0$ *doğrusu ve* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemleri ortak çözülürse* $Q=\left(\dfrac{(c-a)\,x_1}{y_1},c-a\right)$ *olarak bulunur. Eşitlikte yerine yazılırsa*

$$P'=(x_2,y_2)=\left(\frac{\left(\left|\dfrac{(c-a)\,x_1}{y_1}\right|+|c-a|\right)^2\cdot x_1}{(|x_1|+|y_1|)^2},\frac{\left(\left|\dfrac{(c-a)\,x_1}{y_1}\right|+|c-a|\right)^2\cdot y_1}{(|x_1|+|y_1|)^2}\right)$$

olur.

Durum 5: $x-y+a=0$ *doğrusu verilsin.* $P=(x_1,y_1)$ *noktası için* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemi* $y=\dfrac{y_1}{x_1}x$ *dir.* $\overrightarrow{OP}$ *ışınının* E_T *elipsini kestiği nokta* Q *olsun. Bu durumda* Q *noktası,* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusu ve* $x-y+a=0$ *doğrusunun arakesitidir. Dolayısıyla* $x-y+a=0$ *doğrusu ve* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemleri ortak çözülürse* $Q=\left(-\dfrac{ax_1}{x_1-y_1},-\dfrac{ay_1}{x_1-y_1}\right)$ *olarak bulunur. Eşitlikte yerine yazılırsa*

$$P'=(x_2,y_2)=\left(\frac{\left(\left|-\dfrac{ax_1}{x_1-y_1}\right|+\left|\dfrac{ay_1}{x_1-y_1}\right|\right)^2\cdot x_1}{(|x_1|+|y_1|)^2},\frac{\left(\left|-\dfrac{ax_1}{x_1-y_1}\right|+\left|\dfrac{ay_1}{x_1-y_1}\right|\right)^2\cdot y_1}{(|x_1|+|y_1|)^2}\right)$$

bulunur.

Durum 6: $x+y+a=0$ *doğrusu verilsin.* $P=(x_1,y_1)$ *noktası için* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemi* $y=\dfrac{y_1}{x_1}x$ *dir.* $\overrightarrow{OP}$ *ışınının* E_T *elipsini kestiği nokta* Q *olsun. Bu durumda* Q *noktası,*

$\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusu ve* $x+y+a=0$ *doğrusunun arakesitidir. Dolayısıyla* $x+y+a=0$ *doğrusu ve* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemleri ortak çözülürse* $Q=\left(-\dfrac{ax_1}{x_1+y_1},-\dfrac{ay_1}{x_1+y_1}\right)$ *olarak bulunur. Eşitlikte yerine yazılırsa*

$$P'=(x_2,y_2)=\left(\frac{\left(\left|-\dfrac{ax_1}{x_1+y_1}\right|+\left|-\dfrac{ay_1}{x_1+y_1}\right|\right)^2\cdot x_1}{\left(|x_1|+|y_1|\right)^2},\frac{\left(\left|-\dfrac{ax_1}{x_1+y_1}\right|+\left|-\dfrac{ay_1}{x_1+y_1}\right|\right)^2\cdot y_1}{\left(|x_1|+|y_1|\right)^2}\right)$$

elde edilir.

Sonuç 6.7 $\lambda>\delta$ *iken* $c_1\neq c_2$ *ve* $d_1\neq d_2$ *ise sekizgen biçimde bir taksi elipsdir. Simetri merkezi* $O=(0,0)$ *olduğundan* $F_1=(c,d)$, $F_2=(-c,-d)$ *ve* $\lambda=2a$ *olarak alınabilir. O halde taksi elipsi*

$$|x-c|+|y-d|+|x+c|+|y+d|=2a$$

denklemini sağlayan noktaların kümesidir. Burada açıkça $x=-c,c$ *ve* $y=-d,d$ *denklemin kökleridir. Buna göre 9 durum meydana gelir. Bu durumlarda*

$$\begin{array}{rcl}
x<-c \text{ ve } y<-d \text{ için} & \Longrightarrow & x+y+a=0\\
x<-c \text{ ve } -d\leq y\leq d \text{ için} & \Longrightarrow & x+a-d=0\\
x<-c \text{ ve } y>d \text{ için} & \Longrightarrow & x-y+a=0\\
-c\leq x\leq c \text{ ve } y<-d \text{ için} & \Longrightarrow & y+a-c=0\\
-c\leq x\leq c \text{ ve } -d\leq y\leq d \text{ için} & \Longrightarrow & 2c+2d\neq 2a\\
-c\leq x\leq c \text{ ve } y>d \text{ için} & \Longrightarrow & y-a+c=0\\
x>c \text{ ve } y<-d \text{ için} & \Longrightarrow & x-y-a=0\\
x>c \text{ ve } -d\leq y\leq d \text{ için} & \Longrightarrow & x+d-a=0\\
x>c \text{ ve } y>d \text{ için} & \Longrightarrow & x+y-a=0
\end{array}$$

denklemleri elde edilir. Buna göre bulunan tüm doğru denklemleri ayrı ayrı incelenirse;

Durum 1: $x+y-a=0$ *doğrusu verilsin.* $P=(x_1,y_1)$ *noktası için* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemi* $y=\dfrac{y_1}{x_1}x$ *dir.* $\overrightarrow{OP}$ *ışınının* E_T *elipsini kestiği nokta* Q *olsun. Bu durumda* Q *noktası,* $\overrightarrow{OP}$ *doğrusu ve* $x+y-a=0$ *doğrusunun arakesitidir. Dolayısıyla* $x+y-a=0$ *doğrusu ve* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemleri ortak çözülürse* $Q=\left(\dfrac{ax_1}{x_1+y_1},\dfrac{ay_1}{x_1+y_1}\right)$ *olarak bulunur. Eşitlikte yerine yazılırsa*

$$P'=(x_2,y_2)=\left(\frac{\left(\left|\dfrac{ax_1}{x_1+y_1}\right|+\left|\dfrac{ay_1}{x_1+y_1}\right|\right)^2\cdot x_1}{\left(|x_1|+|y_1|\right)^2},\frac{\left(\left|\dfrac{ax_1}{x_1+y_1}\right|+\left|\dfrac{ay_1}{x_1+y_1}\right|\right)^2\cdot y_1}{\left(|x_1|+|y_1|\right)^2}\right)$$

sonucuna ulaşılır.

Durum 2: $x+d-a=0$ *doğrusu verilsin.* $P=(x_1,y_1)$ *noktası için* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemi* $y=\dfrac{y_1}{x_1}x$ *dir.* $\overrightarrow{OP}$ *ışınının* E_T *elipsini kestiği nokta* Q *olsun. Bu durumda* Q *noktası,* $\overleftrightarrow{OP}$ *ışını ve* $x+d-a=0$ *doğrusunun arakesitidir. Dolayısıyla* $x+d-a=0$ *doğrusu ve* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemleri ortak çözülürse* $Q=\left(a-d,\dfrac{(a-d)\,y_1}{x_1}\right)$ *olarak bulunur. Eşitlikte yerine yazılırsa*

$$P'=(x_2,y_2)=\left(\frac{\left(|a-d|+\left|\dfrac{(a-d)\,y_1}{x_1}\right|\right)^2\cdot x_1}{(|x_1|+|y_1|)^2},\frac{\left(|a-d|+\left|\dfrac{(a-d)\,y_1}{x_1}\right|\right)^2\cdot y_1}{(|x_1|+|y_1|)^2}\right)$$

olur.

Durum 3: $x-y-a=0$ *doğrusu verilsin.* $P=(x_1,y_1)$ *noktası için* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemi* $y=\dfrac{y_1}{x_1}x$ *dir.* $\overrightarrow{OP}$ *ışınının* E_T *elipsini kestiği nokta* Q *olsun. Bu durumda* Q *noktası,* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusu ve* $x-y-a=0$ *doğrusunun arakesitidir. Dolayısıyla* $x-y-a=0$ *doğrusu ve* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemleri ortak çözülürse* $Q=\left(\dfrac{ax_1}{x_1-y_1},\dfrac{ay_1}{x_1-y_1}\right)$ *olarak bulunur. Eşitlikte yerine yazılırsa*

$$P'=(x_2,y_2)=\left(\frac{\left(\left|\dfrac{ax_1}{x_1-y_1}\right|+\left|\dfrac{ay_1}{x_1-y_1}\right|\right)^2\cdot x_1}{(|x_1|+|y_1|)^2},\frac{\left(\left|\dfrac{ax_1}{x_1-y_1}\right|+\left|\dfrac{ay_1}{x_1-y_1}\right|\right)^2\cdot y_1}{(|x_1|+|y_1|)^2}\right)$$

elde edilir.

Durum 4: $y-a+c=0$ *doğrusu verilsin.* $P=(x_1,y_1)$ *noktası için* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemi* $y=\dfrac{y_1}{x_1}x$ *dir.* $\overrightarrow{OP}$ *ışınının* E_T *elipsini kestiği nokta* Q *olsun. Bu durumda* Q *noktası,* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusu ve* $y-a+c=0$ *doğrusunun arakesitidir. Dolayısıyla* $y-a+c=0$ *doğrusu ve* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemleri ortak çözülürse* $Q=\left(\dfrac{(a-c)\,x_1}{y_1},a-c\right)$ *olarak bulunur. Eşitlikte yerine yazılırsa*

$$P'=(x_2,y_2)=\left(\frac{\left(\left|\dfrac{(a-c)\,x_1}{y_1}\right|+|a-c|\right)^2\cdot x_1}{(|x_1|+|y_1|)^2},\frac{\left(\left|\dfrac{(a-c)\,x_1}{y_1}\right|+|a-c|\right)^2\cdot y_1}{(|x_1|+|y_1|)^2}\right)$$

bulunur.

Durum 5: $y+a-c=0$ *doğrusu verilsin.* $P=(x_1,y_1)$ *noktası için* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemli* $y=\dfrac{y_1}{x_1}x$ *dir.* $\overrightarrow{OP}$ *ışınının* E_T *elipsini kestiği nokta* Q *olsun. Bu durumda* Q *noktası,*

$\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusu ve* $y+a-c=0$ *doğrusunun arakesitidir. Dolayısıyla* $y+a-c=0$ *doğrusu ve* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemleri ortak çözülürse* $Q=\left(\dfrac{(c-a)\,x_1}{y_1}, c-a\right)$ *olarak bulunur. Eşitlikte yerine yazılırsa*

$$P'=(x_2,y_2)=\left(\frac{\left(\left|\dfrac{(c-a)\,x_1}{y_1}\right|+|c-a|\right)^2\cdot x_1}{(|x_1|+|y_1|)^2}, \frac{\left(\left|\dfrac{(c-a)\,x_1}{y_1}\right|+|c-a|\right)^2\cdot y_1}{(|x_1|+|y_1|)^2}\right)$$

sonucuna ulaşılır.

Durum 6: $x-y+a=0$ *doğrusu verilsin.* $P=(x_1,y_1)$ *noktası için* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemi* $y=\dfrac{y_1}{x_1}x$ *dir.* $\overrightarrow{OP}$ *ışınının* E_T *elipsini kestiği nokta* Q *olsun. Bu durumda* Q *noktası,* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusu ve* $x-y+a=0$ *doğrusunun arakesitidir. Dolayısıyla* $x-y+a=0$ *doğrusu ve* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemleri ortak çözülürse* $Q=\left(-\dfrac{ax_1}{x_1-y_1}, -\dfrac{ay_1}{x_1-y_1}\right)$ *olarak bulunur. Eşitlikte yerine yazılırsa*

$$P'=(x_2,y_2)=\left(\frac{\left(\left|-\dfrac{ax_1}{x_1-y_1}\right|+\left|-\dfrac{ay_1}{x_1-y_1}\right|\right)^2\cdot x_1}{(|x_1|+|y_1|)^2}, \frac{\left(\left|-\dfrac{ax_1}{x_1-y_1}\right|+\left|-\dfrac{ay_1}{x_1-y_1}\right|\right)^2\cdot y_1}{(|x_1|+|y_1|)^2}\right)$$

bulunur.

Durum 7: $x+a-d=0$ *doğrusu verilsin.* $P=(x_1,y_1)$ *noktası için* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemi* $y=\dfrac{y_1}{x_1}x$ *dir.* $\overrightarrow{OP}$ *ışınının* E_T *elipsini kestiği nokta* Q *olsun. Bu durumda* Q *noktası,* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusu ve* $x+d-a=0$ *doğrusunun arakesitidir. Dolayısıyla* $x+d-a=0$ *doğrusu ve* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemleri ortak çözülürse* $Q=\left(d-a, \dfrac{(d-a)\,y_1}{x_1}\right)$ *olarak bulunur. Eşitlikte yerine yazılırsa*

$$P'=(x_2,y_2)=\left(\frac{\left(|d-a|+\left|\dfrac{(d-a)\,y_1}{x_1}\right|\right)^2\cdot x_1}{(|x_1|+|y_1|)^2}, \frac{\left(|d-a|+\left|\dfrac{(d-a)\,y_1}{x_1}\right|\right)^2\cdot y_1}{(|x_1|+|y_1|)^2}\right)$$

elde edilir.

Durum 8: $x+y+a=0$ *doğrusu verilsin.* $P=(x_1,y_1)$ *noktası için* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemi* $y=\dfrac{y_1}{x_1}x$ *dir.* $\overrightarrow{OP}$ *ışınının* E_T *elipsini kestiği nokta* Q *olsun. Bu durumda* Q *noktası,* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusu ve* $x+y+a=0$ *doğrusunun arakesitidir. Dolayısıyla* $x+y+a=0$ *doğrusu ve* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemleri ortak çözülürse* $Q=\left(-\dfrac{ax_1}{x_1+y_1}, -\dfrac{ay_1}{x_1+y_1}\right)$ *olarak bulunur.*

Eşitlikte yerine yazılırsa

$$P' = (x_2, y_2) = \left(\frac{\left(\left| -\frac{ax_1}{x_1+y_1} \right| + \left| -\frac{ay_1}{x_1+y_1} \right| \right)^2 \cdot x_1}{(|x_1|+|y_1|)^2}, \frac{\left(\left| -\frac{ax_1}{x_1+y_1} \right| + \left| -\frac{ay_1}{x_1+y_1} \right| \right)^2 \cdot y_1}{(|x_1|+|y_1|)^2} \right)$$

sonucuna ulaşılır.

Sonuç 6.8 *$\lambda = \delta$ iken dikdörtgensel bir bölge olan taksi elipsdir. Simetri merkezi $O = (0,0)$ olduğundan $F_1 = (c,d)$, $F_2 = (-c,-d)$ ve $\lambda = 2a$ olarak alınabilir. O halde taksi elipsi,*

$$|x-c| + |y-d| + |x+c| + |y+d| = 2a$$

denklemini sağlayan noktaların kümesidir. Burada açıkça $x = -c, c$ ve $y = -d, d$ denklemin kökleridir. Buna göre 9 durum meydana gelir. Bu durumlarda

$$\begin{aligned}
x < -c \text{ ve } y < -d \text{ için} &\implies x+y+a = 0 \\
x < -c \text{ ve } -d \le y \le d \text{ için} &\implies x+a-d = 0 \\
x < -c \text{ ve } y > d \text{ için} &\implies x-y+a = 0 \\
-c \le x \le c \text{ ve } y < -d \text{ için} &\implies y+a-c = 0 \\
-c \le x \le c \text{ ve } -d \le y \le d \text{ için} &\implies 2c+2d = 2a \\
-c \le x \le c \text{ ve } y > d \text{ için} &\implies y-a+c = 0 \\
x > c \text{ ve } y < -d \text{ için} &\implies x-y-a = 0 \\
x > c \text{ ve } -d \le y \le d \text{ için} &\implies x+d-a = 0 \\
x > c \text{ ve } y > d \text{ için} &\implies x+y-a = 0
\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Buna göre bulunan tüm doğru denklemleri ayrı ayrı incelenirse;

Durum 1: $x+y-a=0$ doğrusu verilsin. $P = (x_1, y_1)$ noktası için $\overleftrightarrow{OP}$ doğrusunun denklemi $y = \frac{y_1}{x_1}x$ dir. $\overrightarrow{OP}$ ışınının E_T elipsini kestiği nokta Q olsun. Bu durumda Q noktası, $\overleftrightarrow{OP}$ doğrusu ve $x+y-a=0$ doğrusunun arakesitidir. Dolayısıyla $x+y-a=0$ doğrusu ve $\overleftrightarrow{OP}$ doğrusunun denklemleri ortak çözülürse $Q = \left(\frac{ax_1}{x_1+y_1}, \frac{ay_1}{x_1+y_1} \right)$ olarak bulunur. Eşitlikte yerine yazılırsa

$$P' = (x_2, y_2) = \left(\frac{\left(\left| \frac{ax_1}{x_1+y_1} \right| + \left| \frac{ay_1}{x_1+y_1} \right| \right)^2 \cdot x_1}{(|x_1|+|y_1|)^2}, \frac{\left(\left| \frac{ax_1}{x_1+y_1} \right| + \left| \frac{ay_1}{x_1+y_1} \right| \right)^2 \cdot y_1}{(|x_1|+|y_1|)^2} \right)$$

elde edilir.

Durum 2: $x+d-a=0$ *doğrusu verilsin.* $P=(x_1,y_1)$ *noktası için* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemi* $y=\dfrac{y_1}{x_1}x$ *dir.* $\overrightarrow{OP}$ *ışınının* E_T *elipsini kestiği nokta Q olsun. Bu durumda Q noktası,* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusu ve* $x+d-a=0$ *doğrusunun arakesitidir. Dolayısıyla* $x+d-a=0$ *doğrusu ve* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemleri ortak çözülürse* $Q=\left(a-d,\dfrac{(a-d)\,y_1}{x_1}\right)$ *olarak bulunur. Eşitlikte yerine yazılırsa*

$$P'=(x_2,y_2)=\left(\frac{\left(|a-d|+\left|\dfrac{(a-d)\,y_1}{x_1}\right|\right)^2\cdot x_1}{(|x_1|+|y_1|)^2},\frac{\left(|a-d|+\left|\dfrac{(a-d)\,y_1}{x_1}\right|\right)^2\cdot y_1}{(|x_1|+|y_1|)^2}\right)$$

olur.

Durum 3: $x-y-a=0$ *doğrusu verilsin.* $P=(x_1,y_1)$ *noktası için* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemi* $y=\dfrac{y_1}{x_1}x$ *dir.* $\overrightarrow{OP}$ *ışınının* E_T *elipsini kestiği nokta Q olsun. Bu durumda Q noktası,* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusu ve* $x-y-a=0$ *doğrusunun arakesitidir. Dolayısıyla* $x-y-a=0$ *doğrusu ve* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemleri ortak çözülürse* $Q=\left(\dfrac{ax_1}{x_1-y_1},\dfrac{ay_1}{x_1-y_1}\right)$ *olarak bulunur. Eşitlikte yerine yazılırsa*

$$P'=(x_2,y_2)=\left(\frac{\left(\left|\dfrac{ax_1}{x_1-y_1}\right|+\left|\dfrac{ay_1}{x_1-y_1}\right|\right)^2\cdot x_1}{(|x_1|+|y_1|)^2},\frac{\left(\left|\dfrac{ax_1}{x_1-y_1}\right|+\left|\dfrac{ay_1}{x_1-y_1}\right|\right)^2\cdot y_1}{(|x_1|+|y_1|)^2}\right)$$

sonucuna ulaşılır.

Durum 4: $y-a+c=0$ *doğrusu verilsin.* $P=(x_1,y_1)$ *noktası için* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemi* $y=\dfrac{y_1}{x_1}x$ *dir.* $\overrightarrow{OP}$ *ışınının* E_T *elipsini kestiği nokta Q olsun. Bu durumda Q noktası,* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusu ve* $y-a+c=0$ *doğrusunun arakesitidir. Dolayısıyla* $y-a+c=0$ *doğrusu ve* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemleri ortak çözülürse* $Q=\left(\dfrac{(a-c)\,x_1}{y_1},a-c\right)$ *olarak bulunur. Eşitlikte yerine yazılırsa*

$$P'=(x_2,y_2)=\left(\frac{\left(\left|\dfrac{(a-c)\,x_1}{y_1}\right|+|a-c|\right)^2\cdot x_1}{(|x_1|+|y_1|)^2},\frac{\left(\left|\dfrac{(a-c)\,x_1}{y_1}\right|+|a-c|\right)^2\cdot y_1}{(|x_1|+|y_1|)^2}\right)$$

bulunur.

Durum 5: $y+a-c=0$ *doğrusu verilsin.* $P=(x_1,y_1)$ *noktası için* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemli* $y=\dfrac{y_1}{x_1}x$ *dir.* $\overrightarrow{OP}$ *ışınının* E_T *elipsini kestiği nokta Q olsun. Bu durumda Q noktası,*

$\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusu ve* $y+a-c=0$ *doğrusunun arakesitidir. Dolayısıyla* $y+a-c=0$ *doğrusu ve* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemleri ortak çözülürse* $Q=\left(\dfrac{(c-a)\,x_1}{y_1}, c-a\right)$ *olarak bulunur. Eşitlikte yerine yazılırsa*

$$P'=(x_2,y_2)=\left(\frac{\left(\left|\dfrac{(c-a)\,x_1}{y_1}\right|+|c-a|\right)^2\cdot x_1}{(|x_1|+|y_1|)^2}, \frac{\left(\left|\dfrac{(c-a)\,x_1}{y_1}\right|+|c-a|\right)^2\cdot y_1}{(|x_1|+|y_1|)^2}\right)$$

elde edilir.

Durum 6: $x-y+a=0$ *doğrusu verilsin.* $P=(x_1,y_1)$ *noktası için* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemi* $y=\dfrac{y_1}{x_1}x$ *dir.* $\overrightarrow{OP}$ *ışınının* E_T *elipsini kestiği nokta* Q *olsun. Bu durumda* Q *noktası,* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusu ve* $x-y+a=0$ *doğrusunun arakesitidir. Dolayısıyla* $x-y+a=0$ *doğrusu ve* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemleri ortak çözülürse* $Q=\left(-\dfrac{ax_1}{x_1-y_1}, -\dfrac{ay_1}{x_1-y_1}\right)$ *olarak bulunur. Eşitlikte yerine yazılırsa*

$$P'=(x_2,y_2)=\left(\frac{\left(\left|-\dfrac{ax_1}{x_1-y_1}\right|+\left|-\dfrac{ay_1}{x_1-y_1}\right|\right)^2\cdot x_1}{(|x_1|+|y_1|)^2}, \frac{\left(\left|-\dfrac{ax_1}{x_1-y_1}\right|+\left|-\dfrac{ay_1}{x_1-y_1}\right|\right)^2\cdot y_1}{(|x_1|+|y_1|)^2}\right)$$

olur.

Durum 7: $x+a-d=0$ *doğrusu verilsin.* $P=(x_1,y_1)$ *noktası için* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemi* $y=\dfrac{y_1}{x_1}x$ *dir.* $\overrightarrow{OP}$ *ışınının* E_T *elipsini kestiği nokta* Q *olsun. Bu durumda* Q *noktası,* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusu ve* $x+d-a=0$ *doğrusunun arakesitidir. Dolayısıyla* $x+d-a=0$ *doğrusu ve* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemleri ortak çözülürse* $Q=\left(d-a, \dfrac{(d-a)\,y_1}{x_1}\right)$ *olarak bulunur. Eşitlikte yerine yazılırsa*

$$P'=(x_2,y_2)=\left(\frac{\left(|d-a|+\left|\dfrac{(d-a)\,y_1}{x_1}\right|\right)^2\cdot x_1}{(|x_1|+|y_1|)^2}, \frac{\left(|d-a|+\left|\dfrac{(d-a)\,y_1}{x_1}\right|\right)^2\cdot y_1}{(|x_1|+|y_1|)^2}\right)$$

sonucuna ulaşılır.

Durum 8: $x+y+a=0$ *doğrusu verilsin.* $P=(x_1,y_1)$ *noktası için* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemi* $y=\dfrac{y_1}{x_1}x$ *dir.* $\overrightarrow{OP}$ *ışınının* E_T *elipsini kestiği nokta* Q *olsun. Bu durumda* Q *noktası,* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusu ve* $x+y+a=0$ *doğrusunun arakesitidir. Dolayısıyla* $x+y+a=0$ *doğrusu ve* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusunun denklemleri ortak çözülürse* $Q=\left(-\dfrac{ax_1}{x_1+y_1}, -\dfrac{ay_1}{x_1+y_1}\right)$ *olarak bulunur.*

Eşitlikte yerine yazılırsa

$$P' = (x_2, y_2) = \left(\frac{\left(\left| -\frac{ax_1}{x_1 + y_1} \right| + \left| -\frac{ay_1}{x_1 + y_1} \right| \right)^2 \cdot x_1}{(|x_1| + |y_1|)^2}, \frac{\left(\left| -\frac{ax_1}{x_1 + y_1} \right| + \left| -\frac{ay_1}{x_1 + y_1} \right| \right)^2 \cdot y_1}{(|x_1| + |y_1|)^2} \right)$$

elde edilir.

Teorem 6.10 *$\mathbb{R}^2_\infty$ de M, N ve O birbirinden farklı herhangi üç doğrudaş nokta olsun. M ve N noktalarının $T-$eliptik inversiyon dönüşümü altındaki görüntüleri sırasıyla M' ve N' ise*

$$d_T(M', N') = \frac{(d_T(O, Q))^2 \cdot d_T(M, N)}{d_T(O, M) \cdot d_T(O, N)}$$

dir.

İspat *M, N ve O noktaları doğrudaş olduğundan $T-$eliptik inversiyon tanımı gereği $d_T(O, M) \cdot d_T(O, M') = (d_T(O, Q))^2 = d_T(O, N) \cdot d_T(O, N')$ dür. Bir doğru boyunca Öklidyen ve taksi uzaklıklarının oranı aynı olduğundan*

$$\begin{aligned} d_T(M', N') &= |d_T(O, M') - d_T(O, N')| \\ &= \left| \frac{(d_T(O, Q))^2}{d_T(O, M)} - \frac{(d_T(O, Q))^2}{d_T(O, N)} \right| \\ &= \frac{(d_T(O, Q))^2 \cdot d_T(M, N)}{d_T(O, M) \cdot d_T(O, N)} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Taksi düzlemde bir elips için M, N ve O noktaları doğrudaş değil ise bu eşitlik geçerli değildir.

Teorem 6.11 *$\mathbb{R}^2_\infty$ de M, N ve O doğrudaş olmayan birbirinden farklı üç nokta olsun. M ve N noktalarının $T-$eliptik inversiyon dönüşümü altındaki görüntüleri sırasıyla M' ve N' olsun. M ve N noktaları O dan geçen $\{-1, 1\}$ eğimli doğrular üzerinde ise*

$$d_T(M', N') = \frac{(d_T(O, Q))^2 \cdot d_T(M, N)}{d_T(O, M) \cdot d_T(O, N)}$$

dir.

İspat *M ve N noktaları $\mathbb{R}^2_\infty$ de $y=x$ ya da $y=-x$ doğruları üzerinde ise $M=(m,m)$ ve $N=(n,-n)$ olarak alınabilir. Bu noktaların $T-$eliptik inversleri sırasıyla $M'=\left(\frac{(d_T(O,Q))^2}{4m},\frac{(d_T(O,Q))^2}{4m}\right)$ ve $N'=\left(\frac{(d_T(O,Q))^2}{4n},-\frac{(d_T(O,Q))^2}{4n}\right)$ dir. Sonuç olarak gerekli hesaplamalar yapıldığında*

$$\begin{aligned} d_T(M',N') &= \frac{(d_T(O,Q))^2}{4}\cdot\frac{|m-n|+|m+n|}{|m|\,|n|} \\ &= \frac{(d_T(O,Q))^2\cdot d_T(M,N)}{d_T(O,M)\cdot d_T(O,N)} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Çifte Oran

Tanım 6.8 *$\mathbb{R}^2_\infty$ de M, N, P ve S yönlendilmiş bir doğru üzerinde dört farklı nokta olsun. $(MN,PS)_T$ taksi çifte oranı*

$$(MN,PS)_T=\frac{d_T[MP]}{d_T[MS]}\cdot\frac{d_T[NS]}{d_T[NP]}$$

dir.

P ve S noktalarının her ikisi de M ve N arasında ise çifte oran pozitiftir. Benzer bir şekilde P ve S noktalarının M ve N arasında olmaması durumunda da çifte oran pozitiftir. $\{M,N\}$ ve $\{P,S\}$ çiftleri birbirinden ayrı ise çifte oran negatiftir. Ayrıca taksi düzlemde çifte oran, bir taksi çembere göre inversiyon dönüşümü altında M, N, P ve S noktalarının herhangi birinin merkez olmaması durumunda invaryanttır. Benzer şekilde bu özellik taksi elipsler için de geçerlidir.

Teorem 6.12 *$\mathbb{R}^2_\infty$ de taksi elipsde inversiyon dönüşümü taksi çifte oranı korur.*

İspat *E_T, $\mathbb{R}^2_\infty$ de simetri merkezi O noktası olan bir elips olsun. M, N, P, S doğrudaş noktalar ve M, N, P, S noktalarının $T-$eliptik inversiyon dönüşümü altındaki görüntüleri sırasıyla M', N', P',S' olsun. $T-$eliptik inversiyon dönüşümü, $\mathbb{R}^2_\infty$ de bir l doğrusu boyunca M noktasından N noktasına kadar olan yönlü taksi uzaklığını N' noktasından M' noktasına kadar olan yönlü taksi uzaklığına dönüştürür. Ayrıca M, N ve P, S çiftlerinin ayrık olma ve olmama durumlarını korur. Dolayısıyla $\left|(M'N',P'S')_T\right|=\left|(MN,PS)_T\right|$*

eşitliğinin olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned}(M'N', P'S')_T &= \frac{d_T(M', P')}{d_T(M', S')} \cdot \frac{d_T(N', S')}{d_T(N', P')} \\ &= \frac{\frac{(d_T(O,Q))^2 \cdot d_T(M,P)}{d_T(O,M) \cdot d_T(O,P)} \cdot \frac{(d_T(O,Q))^2 \cdot d_T(N,S)}{d_T(O,N) \cdot d_T(O,S)}}{\frac{(d_T(O,Q))^2 \cdot d_T(M,S)}{d_T(O,M) \cdot d_T(O,S)} \cdot \frac{(d_T(O,Q))^2 \cdot d_T(N,P)}{d_T(O,N) \cdot d_T(O,P)}} \\ &= \frac{d_T(M,P) \cdot d_T(N,S)}{d_T(M,S) \cdot d_T(N,P)} \\ &= (MN, PS)_T\end{aligned}$$

dir.

Harmonik Eşlenikler

Tanım 6.9 *$\mathbb{R}^2_\infty$ de M ve N bir l doğrusu üzerinde iki nokta olsun. l doğrusu üzerinde herhangi iki P ve S çifti için*

$$\frac{d_T[MP]}{d_T[PN]} = \frac{d_T[MS]}{d_T[SN]}$$

eşitliği mevcut ise M ve N yi harmonik olarak böler. P ve S noktaları, M ve N noktalarına göre harmonik eşlenikler olarak adlandırılır. Taksi harmonik noktalar kümesi $H(MN, PS)_T$ olarak gösterilir. Farklı iki P ve S noktasının M ve N noktalarına göre harmonik eşlenikler olması için gerek ve yeter koşulun $(MN, PS)_T = -1$ olması gerektiği açıktır.

Teorem 6.13 *E_T, $\mathbb{R}^2_\infty$ de simetri merkezi O ve çapı $\overline{Q_1Q_2}$ olan bir taksi elips olsun. P ve P', $\overline{Q_1Q_2}$ doğru parçasını içten ve dıştan bölen $\overrightarrow{OQ_1}$ ışını üzerinde farklı iki nokta olsun. O halde P ve P'noktalarının Q_1 ve Q_2 ye göre taksi harmonik eşlenikler olması için gerek ve yeter koşul P ve P' noktalarının $T-$eliptik inversiyon elipsine göre birbirlerinin invers noktaları olmasıdır.*

İspat *P ve P' noktaları Q_1 ve Q_2 noktalarına göre taksi harmonik eşlenikler olsun. O halde*

$$(Q_1Q_2, PP')_T = -1$$

olup açıkca ifade edilirse

$$\frac{d_T[Q_1P]}{d_T[Q_1P']} \cdot \frac{d_T[Q_2P']}{d_T[Q_2P]} = -1$$

olarak verilir. P, $\overline{Q_1Q_2}$ doğru parçasını içten böldüğü ve $\overrightarrow{OQ_2}$ ışını üzerinde olduğu için $d_T(P,Q_2) = d_T(O,Q_2) - d_T(O,P)$ *ve* $d_T(Q_1,P) = d_T(Q_1,O) + d_T(O,P)$ *dir. Ayrıca P', $\overline{Q_1Q_2}$ doğru parçasını dıştan böldüğü ve $\overrightarrow{OQ_2}$ ışını üzerinde olduğu için* $d_T(Q_1,P') = d_T(Q_1,O) + d_T(O,P')$ *ve* $d_T(Q_2,P') = d_T(O,P') - d_T(O,Q_2)$ *dir. Dolayısıyla*

$$\frac{d_T(Q_1,O) + d_T(O,P)}{d_T(Q_1,O) + d_T(O,P')} \cdot \frac{d_T(O,P') - d_T(O,Q_2)}{d_T(O,P) - d_T(O,Q_2)} = -1 \tag{6.19}$$

dir. Burada $d_T(Q_1,O) = d_T(O,Q_2) = d_T(O,Q) = w$ *olduğundan* (6.19) *ifadesi düzenlenirse*

$$(w + d_T(O,P)) \cdot (d_T(O,P') - w) = (w + d_T(O,P')) \cdot (w - d_T(O,P)) \tag{6.20}$$

elde edilir. Buna göre (6.20) *ifadesi için gerekli sadeleştirmeler yapıldığında*

$$d_T(O,P) \cdot d_T(O,P') = w^2 = (d_T(O,Q))^2$$

olarak bulunur. Dolayısıyla P ve P', $T-$eliptik inversiyon elipsine göre birbirlerinin invers noktalarıdır.

Tersine P ve P', $T-$eliptik inversiyon elipsine göre invers noktalar olsun. O halde

$$d_T(O,P) \cdot d_T(O,P') = w^2 = (d_T(O,Q))^2$$

dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}(Q_1Q_2, PP')_T &= \frac{d_T[Q_1P]}{d_T[Q_1P']} \cdot \frac{d_T[Q_2P']}{d_T[Q_2P]} = \frac{d_T[Q_1P]}{d_T[Q_1P']} \cdot \frac{d_T[Q_2P']}{-d_T[PQ_2]} \\ &= \frac{d_T(Q_1,O) + d_T(O,P)}{d_T(Q_1,O) + d_T(O,P')} \cdot \frac{d_T(O,P') - d_T(O,Q_2)}{-d_T(O,Q_2) + d_T(O,P)}\end{aligned}$$

olup, $d_T(Q_1,O) = d_T(O,Q_2) = d_T(O,Q) = w$ *dür. Buradan*

$$(Q_1Q_2, PP')_T = \frac{w + d_T(O,P)}{w + d_T(O,P')} \cdot \frac{d_T(O,P') - w}{-w + d_T(O,P)}$$

olarak bulunur. Son eşitlikte gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$(Q_1Q_2, PP')_T = \frac{w \cdot d_T(O,P') - w^2 + d_T(O,P) \cdot d_T(O,P') - w \cdot d_T(O,P)}{w \cdot d_T(O,P) - w^2 + d_T(O,P) \cdot d_T(O,P') - w \cdot d_T(O,P')}$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler ve düzenlemeler ile

$$\begin{aligned}(Q_1Q_2, PP')_T &= \frac{w \cdot (d_T(O,P') - d_T(O,P))}{w \cdot (d_T(O,P) - d_T(O,P'))} \\ &= -1\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Böylelikle P ve P' nün Q_1 ve Q_2 ye göre harmonik eşlenikler olduğu görülür.

Taksi Elipslerde Doğruların Ve Elipslerin Eliptik İnversi

Bu kısımda doğru ve taksi elipslerin $T-$eliptik inversiyon dönüşümü altında görüntüleri incelenecektir.

Teorem 6.14 *E_T elipsinin simetri merkezinden geçen bir doğrunun inversi, o doğrunun kendisidir.*

İspat *E_T, denklemi $\{X \mid d_T(X,F_1)+d_T(X,F_2)=\lambda,\ \lambda \geq 0\}$ olan taksi elips ve l, denklemi $Mx+Ny=0$ olan bir doğru olsun. ψ, E_T elipsine göre inversiyon dönüşümü olmak üzere ψ dönüşümü $Mx+Ny=0$ denklemine uygulanırsa*

$$\begin{aligned} 0 &= Mx+Ny \\ &= M\cdot\left(\frac{(d_T(O,Q))^2\cdot x}{(|x|+|y|)^2}\right)+N\cdot\left(\frac{(d_T(O,Q))^2\cdot y}{(|x|+|y|)^2}\right) \\ &= M\cdot\left((d_T(O,Q))^2\cdot x\right)+N\cdot\left((d_T(O,Q))^2\cdot y\right) \\ &= Mx+Ny=0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle açıkça simetri merkezinden geçen bir l doğrusunun $T-$eliptik inversiyon dönüşümü altında invaryant kaldığı sonucuna ulaşılır.

Teorem 6.15 *O simetri merkezli altıgen E_T elipsine homotetik olan taksi elipsler, $T-$eliptik inversiyon dönüşümü altında simetri merkezi O olan altıgen taksi elipslere dönüşür.*

İspat *Ötelemeler taksi uzaklığı koruduğu için simetri merkezi orijin olarak alınabilir. O halde odak noktaları $F_1=(c,0)$ ve $F_2=(-c,0)$ olmak üzere E_T, denklemi $\{X \mid d_T(X,F_1)+d_T(X,F_2)=2a,\ a\geq 0\}$ olan altıgen taksi elips; $K_1=(kc,0)$ ve $K_2=(-kc,0)$ olmak üzere χ, denklemi $\{Y \mid d_T(Y,K_1)+d_T(Y,K_2)=2ka,\ k,a\geq 0\}$ olan E_T elipsine homotetik bir altıgen elips olsun. ψ, E_T elipsine göre inversiyon*

dönüşümü olmak üzere ψ dönüşümü χ elipsinin denklemine uygulanırsa

$$\begin{aligned} 2ka &= d_T(Y,K_1)+d_T(Y,K_2) \\ &= |x-kc|+|y|+|x+kc|+|y| \\ &= \left|\frac{(d_T(O,Q))^2\cdot x}{(|x|+|y|)^2}-kc\right|+\left|\frac{(d_T(O,Q))^2\cdot x}{(|x|+|y|)^2}+kc\right|+2\left|\frac{(d_T(O,Q))^2\cdot y}{(|x|+|y|)^2}\right| \end{aligned}$$

olur. Burada yukarıdaki durumu daha ayrıntılı incelemek gerekirse χ elipsi

$$|x-kc|+|y|+|x+kc|+|y|$$

denklemini sağlayan noktaların kümesidir. Burada açıkça $x=-kc, kc$ ve $y=0$ denklemin kökleridir. Buna göre 6 durum meydana gelir. Bu durumlarda

$$\begin{aligned} x<-kc \text{ ve } y<0 \text{ için} &\implies x+y+ka=0 \\ x<-kc \text{ ve } y\geq 0 \text{ için} &\implies x-y+ka=0 \\ -kc\leq x\leq kc \text{ ve } y<0 \text{ için} &\implies y+ka-kc=0 \\ -kc\leq x\leq kc \text{ ve } y\geq 0 \text{ için} &\implies y-ka+kc=0 \\ x>kc \text{ ve } y<0 \text{ için} &\implies x-y-ka=0 \\ x>kc \text{ ve } y\geq 0 \text{ için} &\implies x+y-ka=0 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Buna göre bulunan tüm doğru denklemleri ayrı ayrı incelenirse;

Durum 1: $x+y-ka=0$ doğrusu verilsin. Bu doğru üzerindeki $P=(x,y)$ noktalarının $T-$eliptik inversiyon dönüşümü altındaki görüntüleri

$$\psi(P)=P'=\left(\frac{\left(\left|\frac{ax}{x+y}\right|+\left|\frac{ay}{x+y}\right|\right)^2\cdot x}{(|x|+|y|)^2},\frac{\left(\left|\frac{ax}{x+y}\right|+\left|\frac{ay}{x+y}\right|\right)^2\cdot y}{(|x|+|y|)^2}\right)$$

dir. Dolayısıyla ψ dönüşümü $x+y-ka=0$ doğrusuna uygulanırsa

$$\begin{aligned} 0 &= x+y-ka \\ &= \frac{\left(\left|\frac{ax}{x+y}\right|+\left|\frac{ay}{x+y}\right|\right)^2\cdot x}{(|x|+|y|)^2}+\frac{\left(\left|\frac{ax}{x+y}\right|+\left|\frac{ay}{x+y}\right|\right)^2\cdot y}{(|x|+|y|)^2}-ka \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu ise $x+y-ka=0$ doğrusuna paralel olan bir doğrudur.

Durum 2: $x-y-ka=0$ *doğrusu verilsin. Bu doğru üzerindeki* $P=(x,y)$ *noktalarının* $T-$*eliptik inversiyon dönüşümü altındaki görüntüleri*

$$\psi(P)=P'=\left(\frac{\left(\left|\frac{ax}{x-y}\right|+\left|\frac{ay}{x-y}\right|\right)^2\cdot x}{(|x|+|y|)^2},\frac{\left(\left|\frac{ax}{x-y}\right|+\left|\frac{ay}{x-y}\right|\right)^2\cdot y}{(|x|+|y|)^2}\right)$$

dir. Dolayısıyla ψ *dönüşümü* $x-y-ka=0$ *doğrusuna uygulanırsa*

$$\begin{aligned}0 &= x-y-ka=0\\ &= \frac{\left(\left|\frac{ax}{x-y}\right|+\left|\frac{ay}{x-y}\right|\right)^2\cdot x}{(|x|+|y|)^2}-\frac{\left(\left|\frac{ax}{x-y}\right|+\left|\frac{ay}{x-y}\right|\right)^2\cdot y}{(|x|+|y|)^2}-ka\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu ise $x-y-ka=0$ *doğrusuna paralel olan bir doğrudur.*

Durum 3: $y-ka+kc=0$ *doğrusu verilsin. Bu doğru üzerindeki* $P=(x,y)$ *noktalarının* $T-$*eliptik inversiyon dönüşümü altındaki görüntüleri*

$$\psi(P)=P'=\left(\frac{\left(\left|\frac{(a-c)\,x}{y}\right|+|a-c|\right)^2\cdot x}{(|x|+|y|)^2},\frac{\left(\left|\frac{(a-c)\,x}{y}\right|+|a-c|\right)^2\cdot y}{(|x|+|y|)^2}\right)$$

dir. Dolayısıyla ψ *dönüşümü* $y-ka+kc=0$ *doğrusuna uygulanırsa*

$$\begin{aligned}0 &= y-ka+kc\\ &= \frac{\left(\left|\frac{(a-c)\,x}{y}\right|+|a-c|\right)^2\cdot y}{(|x|+|y|)^2}-ka+kc\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu ise $y-ka+kc=0$ *doğrusuna paralel olan bir doğrudur.*

Durum 4: $y+ka-kc=0$ *doğrusu verilsin.Bu doğru üzerindeki* $P=(x,y)$ *noktalarının* $T-$*eliptik inversiyon dönüşümü altındaki görüntüleri*

$$\psi(P)=P'=\left(\frac{\left(\left|\frac{(c-a)\,x}{y}\right|+|c-a|\right)^2\cdot x}{(|x|+|y|)^2},\frac{\left(\left|\frac{(c-a)\,x}{y}\right|+|c-a|\right)^2\cdot y}{(|x|+|y|)^2}\right)$$

dir. Dolayısıyla ψ dönüşümü $y+ka-kc=0$ doğrusuna uygulanırsa

$$\begin{aligned} 0 &= y+ka-kc=0 \\ &= \frac{\left(\left|\frac{(c-a)\,x}{y}\right|+|c-a|\right)^2\cdot y}{(|x|+|y|)^2}+ka-kc \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu ise $y+ka-kc=0$ doğrusuna paralel olan bir doğrudur.

Durum 5: $x-y+ka=0$ doğrusu verilsin. Bu doğru üzerindeki $P=(x,y)$ noktalarının $T-$eliptik inversiyon dönüşümü altındaki görüntüleri

$$\psi(P)=P'=\left(\frac{\left(\left|-\frac{ax}{x-y}\right|+\left|-\frac{ay}{x-y}\right|\right)^2\cdot x}{(|x|+|y|)^2},\frac{\left(\left|-\frac{ax}{x-y}\right|+\left|-\frac{ay}{x-y}\right|\right)^2\cdot y}{(|x|+|y|)^2}\right)$$

dir. Dolayısıyla ψ dönüşümü $x-y+ka=0$ doğrusuna uygulanırsa

$$\begin{aligned} 0 &= x-y+ka \\ &= \frac{\left(\left|-\frac{ax}{x-y}\right|+\left|-\frac{ay}{x-y}\right|\right)^2\cdot x}{(|x|+|y|)^2}-\frac{\left(\left|-\frac{ax}{x-y}\right|+\left|-\frac{ay}{x-y}\right|\right)^2\cdot y}{(|x|+|y|)^2}+ka \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu ise $x-y+ka=0$ doğrusuna paralel olan bir doğrudur.

Durum 6: $x+y+ka=0$ doğrusu verilsin. Bu doğru üzerindeki $P=(x,y)$ noktalarının $T-$eliptik inversiyon dönüşümü altındaki görüntüleri

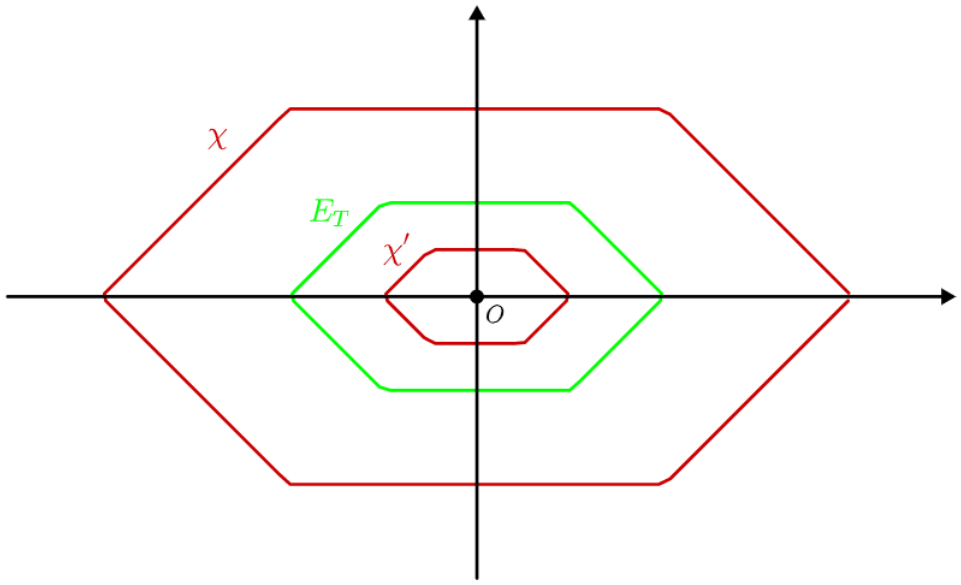
$$\psi(P)=P'=\left(\frac{\left(\left|-\frac{ax}{x+y}\right|+\left|-\frac{ay}{x+y}\right|\right)^2\cdot x}{(|x|+|y|)^2},\frac{\left(\left|-\frac{ax}{x+y}\right|+\left|-\frac{ay}{x+y}\right|\right)^2\cdot y}{(|x|+|y|)^2}\right)$$

dir. Dolayısıyla ψ dönüşümü $x+y+ka=0$ doğrusuna uygulanırsa

$$\begin{aligned} 0 &= x+y+ka \\ &= \frac{\left(\left|-\frac{ax}{x+y}\right|+\left|-\frac{ay}{x+y}\right|\right)^2\cdot x}{(|x|+|y|)^2}+\frac{\left(\left|-\frac{ax}{x+y}\right|+\left|-\frac{ay}{x+y}\right|\right)^2\cdot y}{(|x|+|y|)^2}+ka \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu ise $x+y+ka=0$ doğrusuna paralel olan bir doğrudur.

Bulunan doğru denklemleri kesiştirilirse oluşan şekil E_T elipsine homotetik olan χ' taksi elipsidir (Şekil 6.20).



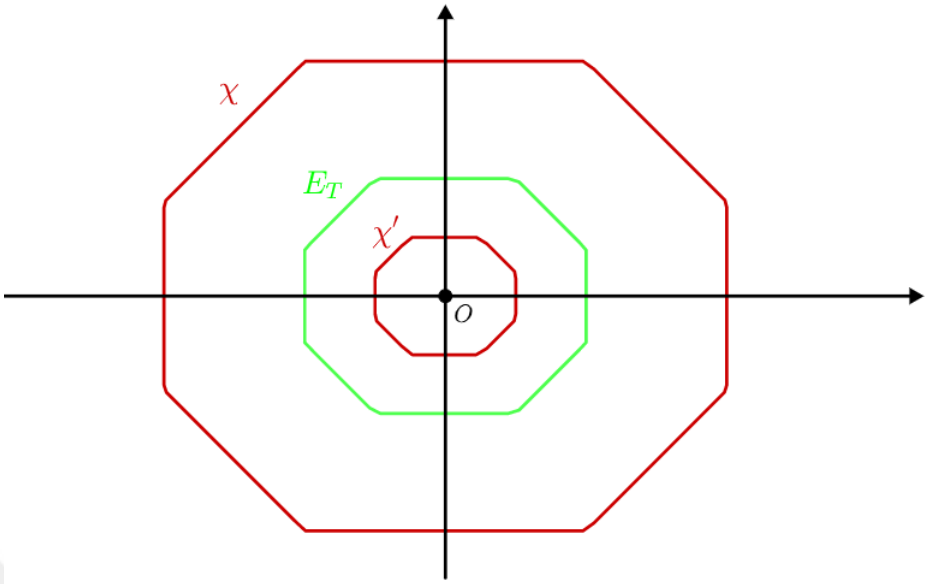
Şekil 6.20 E_T ye Homotetik Olan Altıgen χ Elipsinin İnversi

Teorem 6.16 *O simetri merkezli sekizgen E_T elipsine homotetik olan taksi elipsler, $T-$eliptik inversiyon dönüşümü altında simetri merkezi O olan sekizgen taksi elipslere dönüşür.*

İspat *Odak noktaları $F_1 = (c,d)$ ve $F_2 = (-c,-d)$ olmak üzere E_T, denklemi $\{X \mid d_T(X,F_1) + d_T(X,F_2) = 2a,\ a \geq 0\}$ olan sekizgen taksi elips; $K_1 = (kc,kd)$ ve $K_2 = (-kc,-kd)$ olmak üzere χ, denklemi $\{Y \mid d_T(Y,K_1) + d_T(Y,K_2) = 2ka,\ k,a \geq 0\}$ olan E_T elipsine homotetik bir sekizgen taksi elips olsun. O halde ψ, E_T elipsine göre inversiyon dönüşümü olmak üzere ψ dönüşümü χ elipsinin denklemine uygulanırsa*

$$\begin{aligned} 2ka &= d_T(Y,K_1) + d_T(Y,K_2) \\ &= |x-kc| + |y-kd| + |x+kc| + |y+kd| \\ &= \left|\frac{(d_T(O,Q))^2 \cdot x}{(|x|+|y|)^2} - kc\right| + \left|\frac{(d_T(O,Q))^2 \cdot y}{(|x|+|y|)^2} - kd\right| + \left|\frac{(d_T(O,Q))^2 \cdot x}{(|x|+|y|)^2} + kc\right| + \left|\frac{(d_T(O,Q))^2 \cdot y}{(|x|+|y|)^2} + kd\right| \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Altıgen taksi elipse benzer şekilde durumlar incelendiğinde oluşan şeklin E_T elipsine homotetik olan sekizgen χ' taksi elipsi olduğu görülür (Şekil 6.21).



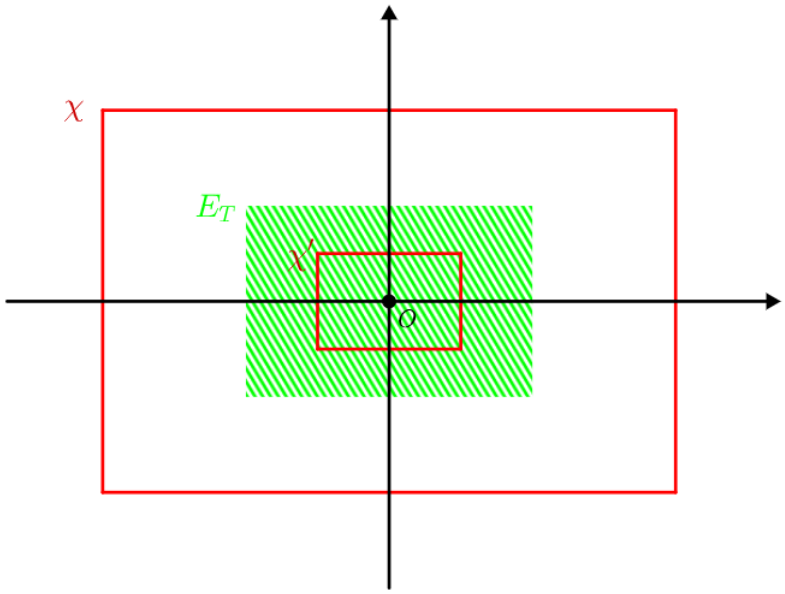
Şekil 6.21 E_T ye Homotetik Olan Sekizgen χ Elipsinin İnversi

Teorem 6.17 *O simetri merkezli dikdörtgensel E_T elipsine homotetik olan taksi elipsler, $T-$eliptik inversiyon dönüşümü altında simetri merkezi O olan dikdörtgensel taksi elipslere dönüşür.*

İspat *Odak noktaları $F_1 = (c,d)$ ve $F_2 = (-c,-d)$ olmak üzere E_T, denklemi $\{X \mid d_T(X,F_1) + d_T(X,F_2) = 2a,\ a \geq 0\}$ dikdörtgensel taksi elips; $K_1 = (kc,kd)$ ve $K_2 = (-kc,-kd)$ olmak üzere χ, denklemi $\{Y \mid d_T(Y,K_1) + d_T(Y,K_2) = 2ka,\ k,a \geq 0\}$ olan E_T elipsine homotetik bir dikdörtgensel taksi elips olsun. O halde ψ, E_T elipsine göre inversiyon dönüşümü olmak üzere ψ dönüşümü χ elipsinin denklemine uygulanırsa*

$$\begin{aligned} 2ka &= d_T(Y,K_1) + d_T(Y,K_2) \\ &= |x-kc| + |y-kd| + |x+kc| + |y+kd| \\ &= \left|\frac{(d_T(O,Q))^2 \cdot x}{(|x|+|y|)^2} - kc\right| + \left|\frac{(d_T(O,Q))^2 \cdot y}{(|x|+|y|)^2} - kd\right| + \left|\frac{(d_T(O,Q))^2 \cdot x}{(|x|+|y|)^2} + kc\right| + \left|\frac{(d_T(O,Q))^2 \cdot y}{(|x|+|y|)^2} + kd\right| \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Altıgen taksi elipse benzer şekilde durumlar incelendiğinde oluşan şeklin E_T elipsine homotetik olan dikdörgensel χ' taksi elipsi olduğu görülür (Şekil 6.22).



Şekil 6.22 E_T ye Homotetik Olan Dikdörtgensel χ Elipsinin İnversi

Öklidyen düzlemde elipse göre inversiyon dönüşümü altında doğrular ve elipslerin yine doğru ya da elipslere dönüştüğü bilinmektedir. Ayrıca inversiyon merkezinden geçmeyen doğrular, inversiyon merkezinden geçen elipslere dönüşür. Ancak $T-$eliptik inversiyon dönüşümü altında O noktasını içermeyen doğrular, O noktasından geçen taksi elipslere dönüşmez.

Teorem 6.18 *E_T, $\mathbb{R}^2_\infty$ de simetri merkezi O noktası olan bir taksi elips ve ψ, E_T elipsine göre inversiyon dönüşümü olsun.*

$i)$ *Simetri merkezini içermeyen doğrular $T-$eliptik inversiyon dönüşümü altında, O simetri merkezini içeren taksi elipslere dönüşmez.*

$ii)$ *Simetri merkezini içeren taksi elipsler $T-$eliptik inversiyon dönüşümü altında, O simetri merkezini içermeyen doğrulara dönüşmez.*

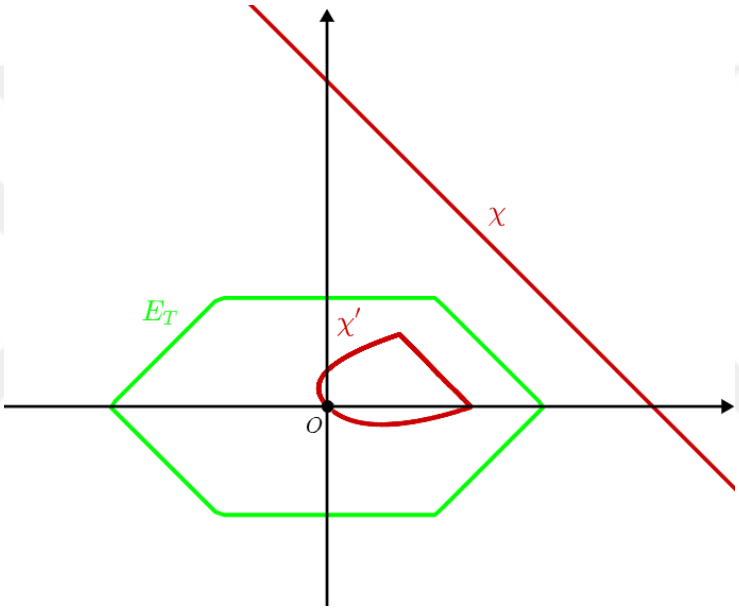
$iii)$ *Simetri merkezinden geçmeyen taksi elipsler $T-$eliptik inversiyon dönüşümü altında, herhangi bir taksi elipse dönüşmez.*

Teorem 6.19 *Herhangi bir taksi koniğin $T-$eliptik inversiyon dönüşümü altındaki görüntüsünün, taksi konik olması gerekmez.*

Teorem 6.18 ve 6.19 daki ifadeler örnekler üzerinden incelenecek olup, $T-$eliptik inversiyon dönüşümü altında doğru, taksi elips ve taksi koniklerin görüntüleri verilecektir.

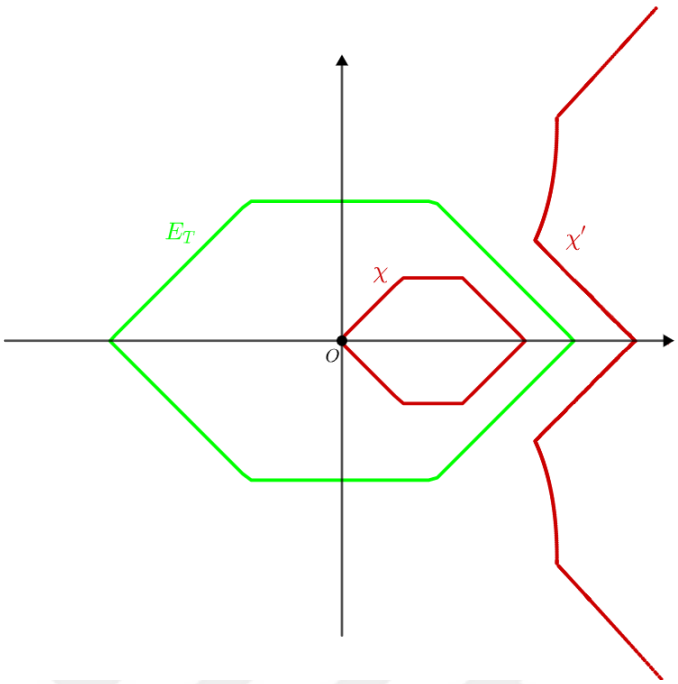
Örnek 6.2 *E_T, $\mathbb{R}^2_\infty$ de simetri merkezi O noktası olan bir taksi elips ve ψ, E_T elipsine göre inversiyon dönüşümü olsun. χ ve χ' birbirinin invers görüntüleri olmak üzere;*

i) E_T, $\mathbb{R}^2_\infty$ de simetri merkezi O noktası olan altıgen taksi elips iken $x+y=2$ doğrusunun, $T-$eliptik inversiyon dönüşümü altında $\frac{(d_T(O,Q))^2\cdot(x+y)}{2} = (|x|+|y|)^2$ eğrisine dönüştüğü kolaylıkla görülür (Şekil 6.23).



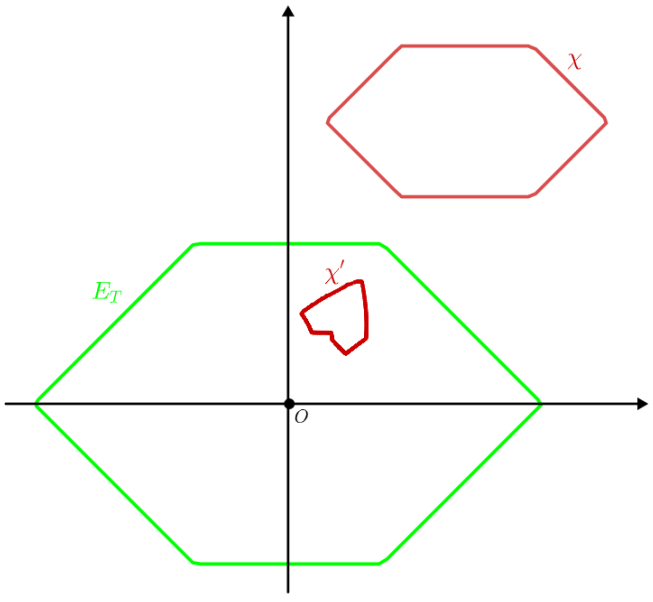
Şekil 6.23 O dan Geçmeyen Bir Doğrunun İnversi

ii) E_T, $\mathbb{R}^2_\infty$ de simetri merkezi O olan altıgen taksi elips iken simetri merkezinden geçen bir başka altıgen taksi elipsin, $T-$inversiyon dönüşümü altında bir doğruya dönüşmediği açıktır (Şekil 6.24).



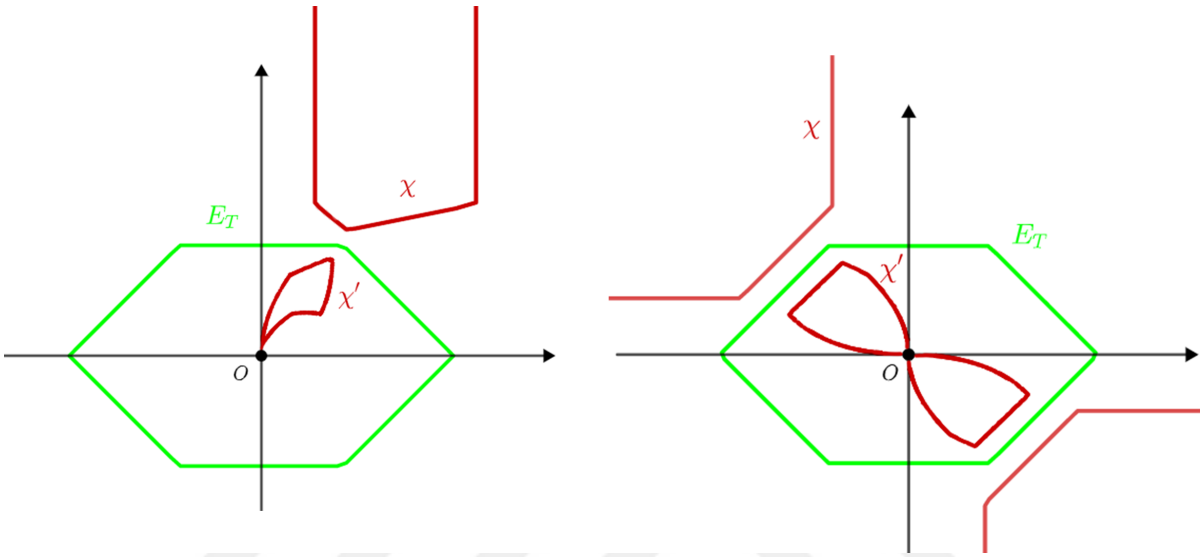
Şekil 6.24 O dan Geçen Bir Taksi Elipsin İnversi

iii) E_T, $\mathbb{R}^2_\infty$ *de simetri merkezi* O *olan altıgen taksi elips iken simetri merkezinden geçmeyen bir başka altıgen taksi elipsin,* $T-$*eliptik inversiyon dönüşümü altında herhangi bir taksi elipse dönüşmediği açıktır (Şekil 6.25).*



Şekil 6.25 O dan Geçmeyen Bir Taksi Elipsin İnversi

Örnek 6.3 *E_T, $\mathbb{R}^2_\infty$ de simetri merkezi O noktası olan bir taksi elips ve ψ, E_T elipsine göre inversiyon dönüşümü olsun. Taksi konikleri, farklı doğrular veya düzlemsel bölgelerden gelen parçaların veya ışınların birleşimidir. χ ve χ' birbirinin invers görüntüleri olmak üzere; taksi elipsin simetri merkezini içermeyen doğrular $T-$eliptik inversiyon dönüşümü altında doğrulara dönüşmediğinden, herhangi bir taksi koniğin $T-$eliptik inversiyon dönüşümü altındaki görüntüsü taksi konik değildir (Şekil 6.26).*



Şekil 6.26 O dan Geçmeyen Taksi Koniklerin İnversleri

Yukarıdaki Teorem 6.18 ve 6.19 da verilen durumlar benzer bir şekilde sekizgen ve diktörtgensel bölge biçiminde olan taksi elipsler için incelendiğinde sonuçların aynı olduğu açıktır. Sonraki bölümde inversiyon dönüşümü süper elipslere göre incelenecektir.

6.3 Süper Elipslere Göre İnversiyon Dönüşümünün Sentetik Ve Analitik Özellikleri

Bu kısımda süper elips kavramı ele alınarak süper elipse göre inversiyon kavramı tanımlanacaktır. Tanımlanan bu kavramın sentetik ve analitik inşası verilecektir. Sonrasında süper elipse göre inversiyon kavramının bir takım özellikleri ve çifte oran ile harmonik eşlenik kavramlarındaki rolleri incelenecektir.

Tanım 6.10 *S, $\mathbb{R}^2$ de simetri merkezi O noktası olan bir $S-$elips olsun. $S-$elipsine göre inversiyon dönüşümü ya da S ye göre $S-$eliptik inversiyon dönüşümü $\psi : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \longmapsto \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ olmak üzere $\psi(P) = P'$ olarak tanımlanır öyle ki P', $\overrightarrow{OP}$ ışını üzerindedir ve $d_E(O,P) \cdot d_E(O,P') = (d_E(O,Q))^2$ dir. Q burada $\overrightarrow{OP}$ ışını ve $S-$elipsinin kesişim noktasıdır. P' noktasına P nin $S-$eliptik inversi, S ye inversiyon elipsi, O ya inversiyon merkezi, $d_E(O,Q) = w$ ya inversiyon yarıçapı, $(d_E(O,Q))^2 = w^2$ ye ise inversiyon kuvveti denir. Öklidyen çembere göre inversiyon dönüşümünün aksine burada yarıçap sabit değildir.*

$S-$eliptik inversiyon involutif bir dönüşümdür yani $\psi(\psi(P)) = P$ dir. Bir P noktasının $S-$elipsinin içinde olması durumunda $d_E(O,P) < d_E(O,Q)$ dur ve $d_E(O,P) \cdot d_E(O,P') = (d_E(O,Q))^2$ bağıntısının sağlanması için $d_E(O,P') > d_E(O,Q)$ olması gerekir. Yani $S-$elipsin içindeki noktaların inversi $S-$elipsin dışındaki noktalara ve $S-$elipsin dışındaki noktaların inversi de $S-$elipsin içinde noktalara dönüşür. $S-$elipsinin üzerindeki bir noktanın inversi, o noktanın kendisidir. Yani bir P noktası $S-$elipsinin üzerinde ise $d_E(O,P) = d_E(O,Q)$ dur. Dolayısıyla $d_E(O,P) \cdot d_E(O,P') = (d_E(O,Q))^2$ bağıntısının sağlanması için $d_E(O,P') = d_E(O,Q)$ olmalıdır. Bu durumda $P = P'$ olur. Bu önermenin tersi de geçerlidir.

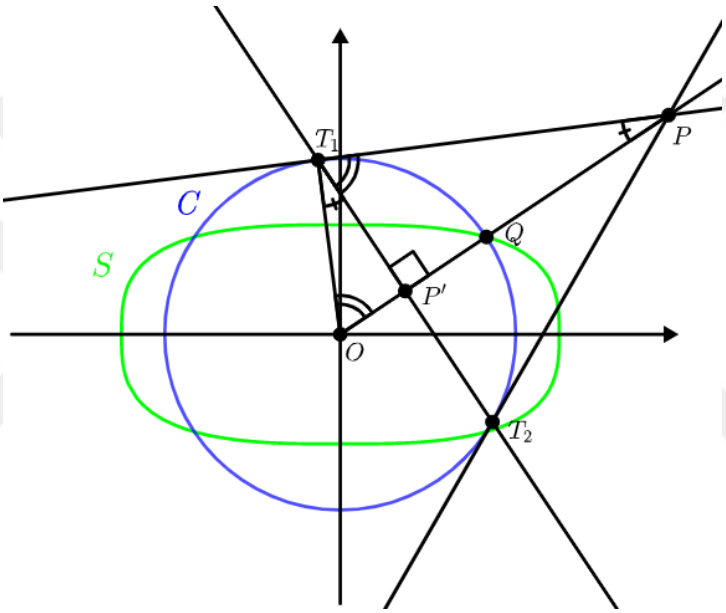
Bir $S-$elipse göre inversiyon dönüşümü inversiyon merkezi O için tanımlı değildir. Nitekim, Öklid düzlemine düzlemin dışında olan bir O_∞ noktası (ideal nokta veya sonsuzdaki bir nokta) eklenerek, tanım kümesine O noktası dahil edilebilir. $\psi(O_\infty) = O$ ve $\psi(O) = O_\infty$ olarak alınırsa inversiyon dönüşümü genişletilmiş düzlemde bire bir dönüşüm olur ve bu düzlem $\mathbb{R}^2_\infty$ ile gösterilir. Bu durumda inversiyon dönüşümünü tekrar tanımlamak gerekirse;

Tanım 6.11 *S, $\mathbb{R}^2_\infty$ de simetri merkezi O noktası olan $S-$elips olsun. $S-$elipsine göre inversiyon dönüşümü ya da $S-$eliptik inversiyon dönüşümü $\psi : \mathbb{R}^2_\infty \longmapsto \mathbb{R}^2_\infty$ olmak üzere $P \neq O, O_\infty$ iken $\psi(P) = P'$ olarak tanımlanır öyle ki P', $\overrightarrow{OP}$ ışını üzerindedir ve*

$d_E(O,P) \cdot d_E(O,P') = (d_E(O,Q))^2$ *dir.* Q *burada* $\overrightarrow{OP}$ *ışını ve* $S-$*elipsinin kesişim noktasıdır. Ayrıca* $\psi(O_\infty) = O$ *ve* $\psi(O) = O_\infty$ *dur.*

$S-$elipsin Dışındaki Bir Noktanın Eliptik İnversi

Simetri merkezi O noktası olan $S-$elipsi verilsin. P, S nin dışında bir nokta ise $\overrightarrow{OP}$ ışını ile $S-$elipsinin kesişimi olan Q noktası belirlenir. Merkezi O noktası olan Q yarıçaplı C çemberi oluşturulur ve P noktasından C çemberine teğetler çizilir. Bu teğetlerin C çemberi ile keşistiği noktalar T_1 ve T_2 olsun. $\overleftrightarrow{T_1T_2}$ doğrusu ve $\overrightarrow{OP}$ ışınının kesiştikleri nokta, P nin $S-$eliptik inversiyon dönüşümü altındaki görüntüsü olan P' noktasıdır (Şekil 6.27).



Şekil 6.27 S nin Dışındaki Bir P Noktasının İnversi

Burada Teorem 5.1 gereği $\triangle OPT_1 \sim \triangle OT_1P'$ dir. Dolayısıyla bu iki üçgen için

$$\frac{d_E(O,P)}{d_E(O,T_1)} = \frac{d_E(O,T_1)}{d_E(O,P')}$$

eşitliği verilebilir. $d_E(O,T_1) = d_E(O,Q)$ olduğu için gerekli düzenlemeler yapıldığında

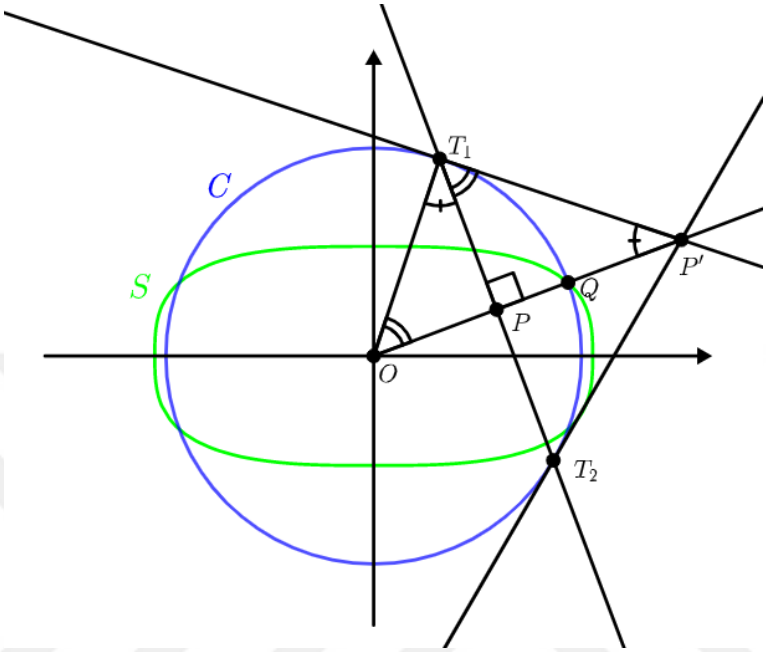
$$d_E(O,P) \cdot d_E(O,P') = (d_E(O,Q))^2$$

olduğu görülür.

$S-$elipsin İçindeki Bir Noktanın Eliptik İnversi

Simetri merkezi O noktası olan $S-$elipsi verilsin. P, S nin içinde bir nokta ise $\overrightarrow{OP}$ ışını ile $S-$elipsinin kesişimi olan Q noktası belirlenir. Merkezi O noktası olan Q yarıçaplı

C çemberi oluşturulur ve P noktasından $\overrightarrow{OP}$ ışınına dik bir doğru çizilir. Bu doğrunun C çemberi ile kesiştiği noktalar T_1 ve T_2 olsun. C çemberine T_1 ve T_2 noktlarında teğetler çizilir. Çizilen teğetlerin $\overrightarrow{OP}$ ışını ile kesiştikleri nokta, P nin $S-$eliptik inversiyon dönüşümü altındaki görüntüsü olan P' noktasıdır (Şekil 6.28).



Şekil 6.28 S nin İçindeki Bir P Noktasının İnversi

Benzer şekilde Teorem 5.1 gereği $\triangle OPT_1 \sim \triangle OT_1P'$ dir. Dolayısıyla bu iki üçgen için

$$\frac{d_E(O,P)}{d_E(O,T_1)} = \frac{d_E(O,T_1)}{d_E(O,P')}$$

eşitliği verilebilir. $d_E(O,T_1) = d_E(O,Q)$ olduğu için gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$d_E(O,P) \cdot d_E(O,P') = (d_E(O,Q))^2$$

olduğu görülür.

İnversiyon Dönüşümünün Analitik Olarak İncelenmesi

Bu kısımda $S-$elipsine göre inversiyon dönüşümünün analitik ifadesi verilecektir.

Teorem 6.20 *S, simetri merkezi $O=(x_0,y_0)$ noktası olan bir $S-$elips ve ψ, $S-$elipsine göre inversiyon dönüşümü olsun. $P=(x_1,y_1)$ olmak üzere $\psi(P)=P'=(x_2,y_2)$ ise*

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{(d_E(O,Q))^2\cdot(x_1-x_0)}{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}+x_0 \\ y_2 &= \frac{(d_E(O,Q))^2\cdot(y_1-y_0)}{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}+y_0 \end{aligned}$$

dir.

İspat *$O=(x_0,y_0)$, $P=(x_1,y_1)$ ve $P'=(x_2,y_2)$ noktaları $\overrightarrow{OP}$ ışını üzerinde olduğu için doğrudaştır. $\overrightarrow{OP}$ ve $\overrightarrow{OP'}$ ışınları aynı doğrultuda olduğundan $k\in\mathbb{R}^+$ olmak üzere*

$$\overrightarrow{OP'}=k\overrightarrow{OP}$$

olup, açıkça ifade edilirse

$$(x_2-x_0,y_2-y_0)=k(x_1-x_0,y_1-y_0) \tag{6.21}$$

olarak verilir. Buna göre inversiyon dönüşümünün tanımı (6.21) *bağıntısından elde edilen $x_2-x_0=k(x_1-x_0)$ ve $y_2-y_0=k(y_1-y_0)$ için tekrar düzenlenirse*

$$\begin{aligned} (d_E(O,Q))^2 &= d_E(O,P)\cdot d_E(O,P') \\ &= \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}\cdot\sqrt{(x_2-x_0)^2+(y_2-y_0)^2} \\ &= \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}\cdot\sqrt{(k(x_1-x_0))^2+(k(y_1-y_0))^2} \\ &= \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}\cdot k\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeler yapılarak

$$k=\frac{(d_E(O,Q))^2}{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$$

olarak bulunur ve (6.21) *için eşitlik düzenlenirse*

$$\begin{aligned} (x_2-x_0,y_2-y_0) &= \frac{(d_E(O,Q))^2}{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}(x_1-x_0,y_1-y_0) \\ &= \left(\frac{(d_E(O,Q))^2\cdot(x_1-x_0)}{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2},\frac{(d_E(O,Q))^2\cdot(y_1-y_0)}{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}\right) \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla son eşitlikten faydalanarak

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{\left(d_E\left(O,Q\right)\right)^2 \cdot \left(x_1 - x_0\right)}{\left(x_1 - x_0\right)^2 + \left(y_1 - y_0\right)^2} + x_0 \\ y_2 &= \frac{\left(d_E\left(O,Q\right)\right)^2 \cdot \left(y_1 - y_0\right)}{\left(x_1 - x_0\right)^2 + \left(y_1 - y_0\right)^2} + y_0 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Sonuç 6.9 *S, simetri merkezi $O = (0,0)$ noktası olan bir $S-$elips ve ψ, $S-$elipsine göre inversiyon dönüşümü olsun. $P = (x_1, y_1)$ olmak üzere $\psi(P) = P' = (x_2, y_2)$ ise*

$$P' = (x_2, y_2) = \left(\frac{\left(d_E\left(O,Q\right)\right)^2 \cdot x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \frac{\left(d_E\left(O,Q\right)\right)^2 \cdot y_1}{x_1^2 + y_1^2} \right)$$

dir.

Burada $\left(d_E\left(O,Q\right)\right)^2$ olarak tanımlanan $S-$eliptik inversiyon kuvvetini daha ayrıntılı incelemek gerekirse aşağıdaki gibi sonuçlar bulunur.

Teorem 6.21 *S, simetri merkezi $O = (x_0, y_0)$ ve denklemi*

$$\left| \frac{x - x_0}{a} \right|^n + \left| \frac{y - y_0}{b} \right|^n = 1$$

olan bir $S-$elips ve ψ, $S-$elipsine göre inversiyon dönüşümü olsun. $P = (x_1, y_1)$ ve $\psi(P) = P' = (x_2, y_2)$ noktaları verilsin. $\overrightarrow{OP}$ ışını ile $S-$elipsinin kesişimi olan Q noktasının koordinatları

$$Q = \left(\mp \left(\frac{1}{\left|\frac{1}{a}\right|^n + \left|\frac{y_1 - y_0}{(x_1 - x_0)b}\right|^n} \right)^{\frac{1}{n}} + x_0, \mp \left(\frac{1}{\left|\frac{1}{b}\right|^n + \left|\frac{x_1 - x_0}{(y_1 - y_0)a}\right|^n} \right)^{\frac{1}{n}} + y_0 \right)$$

dir.

İspat *S, simetri merkezi $O = (x_0, y_0)$ olan bir $S-$elips olsun. $P = (x_1, y_1)$ noktası verilsin. Bu durumda $\overleftrightarrow{OP}$ doğrusunun eğimi*

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

olup doğrunun denklemi

$$y - y_0 = \frac{\left(y_1 - y_0\right)\left(x - x_0\right)}{x_1 - x_0} \tag{6.22}$$

dir. Q *noktası* $\overleftrightarrow{OP}$ *doğrusu ile* $S-$*elipsinin kesişim noktası olduğundan* $S-$*elips denklemi* (6.22) *eşitliği için tekrar düzenlenirse*

$$\begin{aligned} 1 &= \left|\frac{x-x_0}{a}\right|^n + \left|\frac{y-y_0}{b}\right|^n \\ &= \left|\frac{x-x_0}{a}\right|^n + \left|\frac{\frac{(y_1-y_0)(x-x_0)}{x_1-x_0}}{b}\right|^n \\ &= \left|\frac{x-x_0}{a}\right|^n + \left|\frac{(y_1-y_0)(x-x_0)}{(x_1-x_0)b}\right|^n \\ &= |x-x_0|^n \left(\left|\frac{1}{a}\right|^n + \left|\frac{y_1-y_0}{(x_1-x_0)b}\right|^n\right) \end{aligned}$$

dır. Buradan gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$|x-x_0|^n = \frac{1}{\left|\frac{1}{a}\right|^n + \left|\frac{y_1-y_0}{(x_1-x_0)b}\right|^n}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafının $n.$ *dereceden kuvveti alınırsa*

$$|x-x_0| = \left(\frac{1}{\left|\frac{1}{a}\right|^n + \left|\frac{y_1-y_0}{(x_1-x_0)b}\right|^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

olup basitçe

$$x = \mp\left(\frac{1}{\left|\frac{1}{a}\right|^n + \left|\frac{y_1-y_0}{(x_1-x_0)b}\right|^n}\right)^{\frac{1}{n}} + x_0$$

bulunur. Benzer şekilde denklem y *için çözülürse*

$$y = \mp\left(\frac{1}{\left|\frac{1}{b}\right|^n + \left|\frac{x_1-x_0}{(y_1-y_0)a}\right|^n}\right)^{\frac{1}{n}} + y_0$$

olarak bulunur.

Sonuç 6.10 S*, simetri merkezi* $O=(x_0,y_0)$ *noktası olan bir* $S-$*elips ve* ψ*,* $S-$*elipsine göre inversiyon dönüşümü olsun. olsun.* $P=(x_1,y_1)$ *olmak üzere* $\psi(P)=P'=(x_2,y_2)$ *ise*

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{\left(\left(\frac{1}{\left|\frac{1}{a}\right|^n+\left|\frac{y_1-y_0}{(x_1-x_0)b}\right|^n}\right)^{\frac{2}{n}} + \left(\frac{1}{\left|\frac{1}{b}\right|^n+\left|\frac{x_1-x_0}{(y_1-y_0)a}\right|^n}\right)^{\frac{2}{n}}\right)\cdot(x_1-x_0)}{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2} + x_0 \\ y_2 &= \frac{\left(\left(\frac{1}{\left|\frac{1}{a}\right|^n+\left|\frac{y_1-y_0}{(x_1-x_0)b}\right|^n}\right)^{\frac{2}{n}} + \left(\frac{1}{\left|\frac{1}{b}\right|^n+\left|\frac{x_1-x_0}{(y_1-y_0)a}\right|^n}\right)^{\frac{2}{n}}\right)\cdot(y_1-y_0)}{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2} + y_0 \end{aligned}$$

dir.

Sonuç 6.11 *S, simetri merkezi $O=(0,0)$ noktası olan bir $S-$elips ve ψ, $S-$elipsine göre inversiyon dönüşümü olsun. $P=(x_1,y_1)$ olmak üzere $\psi(P)=P'=(x_2,y_2)$ ise*

$$x_2 = \frac{\left(\left(\frac{1}{\left|\frac{1}{a}\right|^n+\left|\frac{y_1}{x_1 b}\right|^n}\right)^{\frac{2}{n}}+\left(\frac{1}{\left|\frac{1}{b}\right|^n+\left|\frac{x_1}{y_1 a}\right|^n}\right)^{\frac{2}{n}}\right)\cdot x_1}{x_1^2+y_1^2}$$

$$y_2 = \frac{\left(\left(\frac{1}{\left|\frac{1}{a}\right|^n+\left|\frac{y_1}{x_1 b}\right|^n}\right)^{\frac{2}{n}}+\left(\frac{1}{\left|\frac{1}{b}\right|^n+\left|\frac{x_1}{y_1 a}\right|^n}\right)^{\frac{2}{n}}\right)\cdot y_1}{x_1^2+y_1^2}$$

dir.

Teorem 6.22 *S, $\mathbb{R}^2_\infty$ de simetri merkezi O noktası olan bir $S-$elips olsun. P ve T iki farklı nokta olmak üzere $d_E(O,Q_1)=w$ ve $d_E(O,Q_2)=u$ inversiyon yarıçaplı $S-$elipsine göre bu noktaların inversleri P' ve T' olsun. O halde;*

i) Eğer P,T ve O doğrudaş değil ise

$$d_E(P',T')=\frac{\sqrt{(w^2-u^2)\left(w^2\cdot(d_E(O,T))^2-u^2\cdot(d_E(O,P))^2\right)+w^2u^2\cdot(d_E(P,T))^2}}{d_E(O,P)\cdot d_E(O,T)}$$

dir.

ii) Eğer P,T ve O doğrudaş ise

$$d_E(P',T')=\frac{w^2 d_E(P,T)}{d_E(O,P)\cdot d_E(O,T)}$$

dir.

İspat *Burada $d_E(X,Y)$ için gösterim olarak $|XY|$ kullanılacaktır.*

i) Eğer P,T ve O doğrudaş olmadığından P', T' ve O da doğrudaş değildir. $\angle P'OT'$ açısı α olarak adlandırılsın. Kosinüs teoremi gereği

$$|P'T'|^2=|OP'|^2+|OT'|^2-2\cdot|OP'|\cdot|OT'|\cdot cos\alpha \tag{6.23}$$

dir. $\overrightarrow{OP}$ ve $\overrightarrow{OT}$ ışınları ile $S-$elipsinin kesişim noktaları sırasıyla w ve u olsun.

$$|OP|\cdot|OP'|=|OQ_1|^2=w^2$$

ve

$$|OT|\cdot|OT'|=|OQ_2|^2=u^2$$

olduğu için $|OP'| = \dfrac{w^2}{|OP|}$ *ve* $|OT'| = \dfrac{u^2}{|OT|}$ *dir.*

O halde yukarıda elde edilen son eşitlikler kullanılarak (6.23) *eşitliği*

$$|P'T'|^2 = \frac{w^4}{|OP|^2} + \frac{u^4}{|OP|^2} - 2\frac{w^2u^2}{|OP| \cdot |OT|}cos\alpha \tag{6.24}$$

olarak yazılabilir. α *aynı zamanda* $\angle POT$ *açısının da ölçüsü olduğundan, kosinüs teoremi gereği*

$$|PT|^2 = |OP|^2 + |OT|^2 - 2 \cdot |OP| \cdot |OT| \cdot cos\alpha$$

dir. Dolayısıyla buradan da

$$2cos\alpha = \frac{|OP|^2 + |OT|^2 - |PT|^2}{|OP| \cdot |OT|}$$

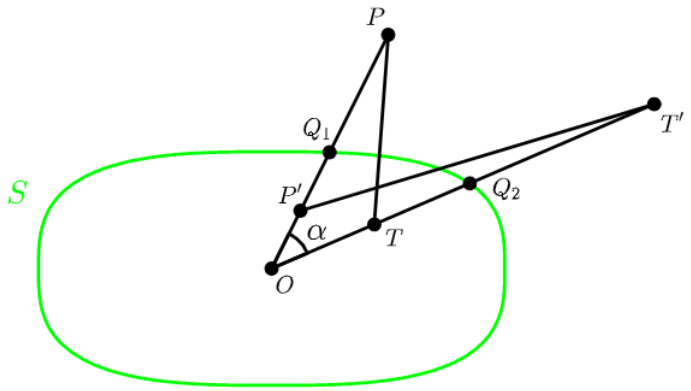
olur. Elde edilen bu eşitlik kullanılarak (6.24) *eşitliği tekrar düzenlenirse*

$$\begin{aligned} |P'T'|^2 &= \frac{w^4}{|OP|^2} + \frac{u^4}{|OT|^2} - \frac{w^2u^2}{|OP| \cdot |OT|}\left(\frac{|OP|^2 + |OT|^2 - |PT|^2}{|OP| \cdot |OT|}\right) \\ &= \frac{w^2 \cdot |OT|^2 \cdot (w^2 - u^2) - u^2 \cdot |OP|^2 \cdot (w^2 - u^2) + w^2u^2 \cdot |PT|^2}{|OP|^2 \cdot |OT|^2} \\ &= \frac{(w^2 - u^2)\left(w^2 \cdot |OT|^2 - u^2 \cdot |OP|^2\right) + w^2u^2 \cdot |PT|^2}{|OP|^2 \cdot |OT|^2} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla

$$|P'T'| = \frac{\sqrt{(w^2 - u^2)\left(w^2 \cdot |OT|^2 - u^2 \cdot |OP|^2\right) + w^2u^2 \cdot |PT|^2}}{|OP| \cdot |OT|}$$

elde edilir (Şekil 6.29).



Şekil 6.29 P, T ve O Doğrudaş Olmaması Halinde $d_E\left(P', T'\right)$ Arasındaki Uzaklık

ii) P, T *ve* O *doğrudaş ise* $|OQ_1| = w = u = |OQ_2|$ *dir. Dolayısıyla*

$$\begin{aligned} |P'T'| &= \frac{\sqrt{(w^2-u^2)\left(w^2\cdot|OT|^2-u^2\cdot|OP|^2\right)+w^2u^2\cdot|PT|^2}}{|OP|\cdot|OT|} \\ &= \frac{\sqrt{w^4\cdot|PT|^2}}{|OP|\cdot|OT|} \\ &= \frac{w^2\cdot|PT|}{|OP|\cdot|OT|} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Çifte Oran

Tanım 6.12 M, N, P *ve* Q *bir* l *doğrusu üzerinde dört farklı nokta olsun.* $[MN, PQ]$ *çifte oranı*

$$[MN, PQ] = \frac{d_E(M,P)\cdot d_E(N,Q)}{d_E(M,Q)\cdot d_E(N,P)}$$

dir.

Burada $\overrightarrow{MN}$, M den N ye kadar olan yönlü uzaklığı gösterir. Çifte oran simetri merkezi M, N, P veya Q noktalarından herhangi biri olmayan $S-$elipsde yönlendirilmiş doğru için simetri merkezi olan O noktasından geçiyor ise $S-$eliptik inversiyon dönüşümü altında korunur.

Teorem 6.23 $\mathbb{R}^2_\infty$ *de çifte oran simetri merkezi* M, N, P *veya* Q *noktalarından herhangi biri olmayan* $S-$*elipsde yönlendirilmiş doğru için simetri merkezi olan* O *noktasından geçiyor ise* $S-$*eliptik inversiyon dönüşümü altında korunur.*

İspat S, $\mathbb{R}^2_\infty$ *de simetri merkezi* O *noktası olan bir* $S-$*elips olsun.* M, N, P, Q *doğrudaş noktalar ve* M, N, P, Q *noktalarının* $S-$*eliptik inversiyon dönüşümü altındaki görüntüleri sırasıyla* M', N', P', Q' *olsun.* $S-$*eliptik inversiyon dönüşümü,* $\mathbb{R}^2_\infty$ *de bir* l *doğrusu boyunca* M *noktasından* N *noktasına kadar olan yönlü uzaklığı* N' *noktasından* M' *noktasına kadar olan yönlü uzaklığa dönüştürür. Dolayısıyla*

$$[MN, PQ] = [M'N', P'Q']$$

eşitliğinin olduğunu göstermek yeterlidir. M, N, P, Q ve O doğrudaş olduğundan $S-$eliptik inversiyon tanımı gereği alınan tüm noktaların inversiyon kuvveti $(d_E(O,Q))^2 = w^2$ dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
[M'N', P'Q'] &= \frac{d_E(M',P')}{d_E(M',Q')} \cdot \frac{d_E(N',Q')}{d_E(N',P')} \\
&= \frac{\dfrac{w^2 \cdot d_E(M,P)}{d_E(O,M)\cdot d_E(O,P)} \cdot \dfrac{w^2 \cdot d_E(N,Q)}{d_E(O,N)\cdot d_E(O,Q)}}{\dfrac{w^2 \cdot d_E(M,Q)}{d_E(O,M)\cdot d_E(O,Q)} \cdot \dfrac{w^2 \cdot d_E(N,P)}{d_E(O,N)\cdot d_E(O,P)}} \\
&= \frac{d_E(M,P)\cdot d_E(N,Q)}{d_E(M,Q)\cdot d_E(N,P)} \\
&= (MN, PQ)
\end{aligned}$$

dir.

Harmonik Eşlenikler

Tanım 6.13 *M ve N bir l doğrusu üzerinde iki nokta olsun. l üzerindeki herhangi bir P ve Q nokta çifti için*

$$\frac{d_E[MP]}{d_E[PN]} = \frac{d_E[MQ]}{d_E[QN]}$$

eşitliği mevcut ise $\overline{MN}$ yi harmonik olarak böler denir. P ve Q noktaları, M ve N ye göre harmonik eşlenikler olarak adlandırılır. Farklı iki P ve Q noktasının M ve N ye göre harmonik eşlenikler olması için gerek ve yeter koşul $(MN, PQ) = -1$ olmasıdır.

Teorem 6.24 *S, simetri merkezi O ve çapı $\overline{Q_1Q_2}$ olan bir $S-$elips olsun. P ve P', $\overline{Q_1Q_2}$ doğru parçasını içten ve dıştan bölen $\overrightarrow{OQ_1}$ ışını üzerinde farklı iki nokta olsun. O halde P ve P'noktalarının Q_1 ve Q_2 ye göre harmonik eşlenikler olması için gerek ve yeter koşul P ve P' noktalarının S ye göre birbirlerinin invers noktaları olmasıdır.*

İspat *P ve P', Q_1 ve Q_2 ye göre harmonik eşlenikler olsun. O halde*

$$(Q_1Q_2, PP') = -1$$

olup buradan da

$$\frac{d_E[Q_1P]}{d_E[Q_1P']} \cdot \frac{d_E[Q_2P']}{d_E[Q_2P]} = -1$$

dir. P, $\overline{Q_1Q_2}$ doğru parçasını içten böldüğü ve $\overrightarrow{OQ_2}$ ışını üzerinde olduğu için $d_E(P,Q_2) = d_E(O,Q_2) - d_E(O,P)$ ve $d_E(Q_1,P) = d_E(Q_1,O) + d_E(O,P)$dir. Ayrıca P', $\overline{Q_1Q_2}$ doğru parçasını dıştan böldüğü ve $\overrightarrow{OQ_2}$ ışını üzerinde olduğu için $d_E(Q_1,P') = d_E(Q_1,O) + d_E(O,P')$ ve $d_E(Q_2,P') = d_E(O,P') - d_E(O,Q_2)$ dir. Dolayısıyla

$$\frac{d_E(Q_1,O) + d_E(O,P)}{d_E(Q_1,O) + d_E(O,P')} \cdot \frac{d_E(O,P') - d_E(O,Q_2)}{d_E(O,P) - d_E(O,Q_2)} = -1 \tag{6.25}$$

dir. Burada $d_E(Q_1,O) = d_E(O,Q_2) = d_E(O,Q) = w$ olduğundan (6.25) *eşitliği düzenlenirse*

$$(w + d_E(O,P)) \cdot (d_E(O,P') - w) = (w + d_E(O,P')) \cdot (w - d_E(O,P)) \tag{6.26}$$

elde edilir. Buna göre (6.26) *ifadesinde gerekli sadeleştirilirmeler yapıldığında*

$$d_E(O,P) \cdot d_E(O,P') = w^2 = (d_E(O,Q))^2$$

olarak bulunur. Dolayısıyla P ve P', $S-$inversiyon elipsine göre birbirlerinin invers noktalarıdır.

Tersine P ve P', $S(O,w)$ ye göre eliptik invers noktalar olsun. O halde

$$d_E(O,P) \cdot d_E(O,P') = w^2 = (d_E(O,Q))^2$$

dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}(Q_1Q_2, PP') &= \frac{d_E[Q_1P]}{d_E[Q_1P']} \cdot \frac{d_E[Q_2P']}{d_E[Q_2P]} = \frac{d_E[Q_1P]}{d_E[Q_1P']} \cdot \frac{d_E[Q_2P']}{-d_E[PQ_2]} \\ &= \frac{d_E(Q_1,O) + d_E(O,P)}{d_E(Q_1,O) + d_E(O,P')} \cdot \frac{d_E(O,P') - d_E(O,Q_2)}{-d_E(O,Q_2) + d_E(O,P)}\end{aligned}$$

olup, $d_E(Q_1,O) = d_E(O,Q_2) = d_E(O,Q) = w$ dür. Buradan

$$(Q_1Q_2, PP') = \frac{w + d_E(O,P)}{w + d_E(O,P')} \cdot \frac{d_E(O,P') - w}{-w + d_E(O,P)}$$

olarak bulunur. Son eşitlikte gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$(Q_1Q_2, PP') = \frac{w \cdot d_E(O,P') - w^2 + d_E(O,P) \cdot d_E(O,P') - w \cdot d_E(O,P)}{w \cdot d_E(O,P) - w^2 + d_E(O,P) \cdot d_E(O,P') - w \cdot d_E(O,P')}$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler ve düzenlemeler ile

$$\begin{aligned}(Q_1Q_2, PP') &= \frac{w \cdot (d_E(O,P') - d_E(O,P))}{w \cdot (d_E(O,P) - d_E(O,P'))} \\ &= -1\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Böylelikle P ve P' nün Q_1 ve Q_2 ye göre harmonik eşlenikler olduğu görülür.

$S-$elipsde Doğruların Ve $S-$elipslerin Eliptik İnversi

Bu kısımda $S-$eliptik inversiyon dönüşümü altında doğru ve $S-$elipslerin görüntüleri incelenecektir.

Teorem 6.25 *S, simetri merkezi $O=(0,0)$ noktası olan bir $S-$elips ve ψ, $S-$elipsine göre inversiyon dönüşümü olsun. Bu taktirde*

i) $S-$elipsin simetri merkezinden geçen bir doğrunun inversi, o doğrunun kendisidir.

ii) O simetri merkezli $S-$elipsine homotetik olan $S-$elipsler, $S-$eliptik inversiyon dönüşümü altında simetri merkezi O olan $S-$elipslere dönüşür.

İspat *Burada*

$$x' = \frac{\left(\left(\frac{1}{\left|\frac{1}{a}\right|^n+\left|\frac{y}{xb}\right|^n}\right)^{\frac{2}{n}}+\left(\frac{1}{\left|\frac{1}{b}\right|^n+\left|\frac{x}{ya}\right|^n}\right)^{\frac{2}{n}}\right)\cdot x}{x^2+y^2}$$

$$y' = \frac{\left(\left(\frac{1}{\left|\frac{1}{a}\right|^n+\left|\frac{y}{xb}\right|^n}\right)^{\frac{2}{n}}+\left(\frac{1}{\left|\frac{1}{b}\right|^n+\left|\frac{x}{ya}\right|^n}\right)^{\frac{2}{n}}\right)\cdot y}{x^2+y^2}$$

için $\left(\frac{1}{\left|\frac{1}{a}\right|^n+\left|\frac{y}{xb}\right|^n}\right)^{\frac{2}{n}}+\left(\frac{1}{\left|\frac{1}{b}\right|^n+\left|\frac{x}{ya}\right|^n}\right)^{\frac{2}{n}}$ *ifadesi kısaca A ile gösterilecektir. Dolayısıyla*

$$x' = \frac{A\cdot x}{x^2+y^2}$$

$$y' = \frac{A\cdot y}{x^2+y^2}$$

olacaktır. Buna göre;

i) S, kartezyen denklemi $\left|\frac{x}{a}\right|^n+\left|\frac{y}{b}\right|^n=1$ olan bir $S-$elips iken l, kartezyen denklemi $Mx+Ny=0$ olan bir doğru ve ψ, $S-$elipsine göre inversiyon dönüşümü olsun. $Mx+Ny=0$ ile ifade edilen l denklemine ψ dönüşümü uygulanırsa

$$0 = Mx+Ny$$

$$= M\frac{A\cdot x}{x^2+y^2}+N\frac{A\cdot y}{x^2+y^2}$$

$$= Mx+Ny$$

elde edilir. Böylelikle açıkça simetri merkezinden geçen bir l doğrusunun $S-$eliptik inversiyon dönüşümü altında invaryant kaldığı sonucuna ulaşılır.

ii) *S, kartezyen denklemi $\left|\frac{x}{a}\right|^n + \left|\frac{y}{b}\right|^n = 1$ olan bir $S-$elips ve χ, $k \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere kartezyen denklemi $\left|\frac{x}{ka}\right|^n + \left|\frac{y}{kb}\right|^n = 1$ olan $S-$elipsine homotetik bir elips olsun.*
χ elipsine ψ dönüşümü uygulanırsa

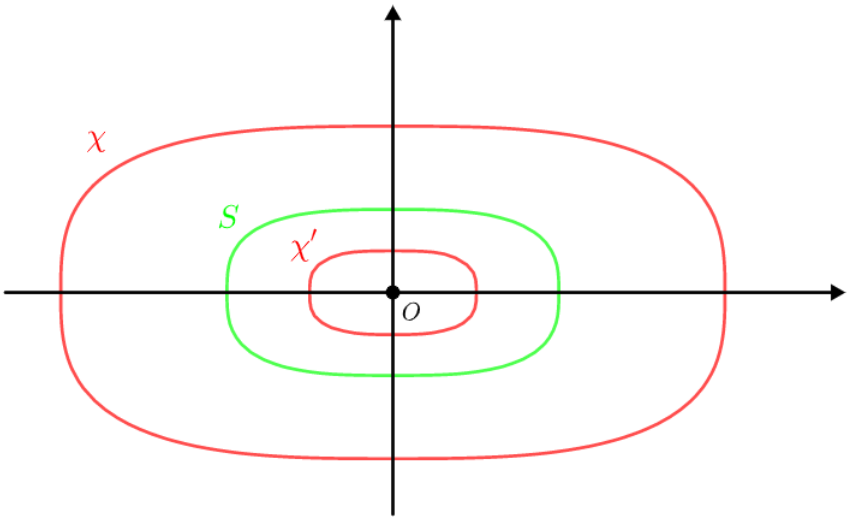
$$\begin{aligned} 1 &= \left|\frac{x}{ka}\right|^n + \left|\frac{y}{kb}\right|^n \\ &= \left|\frac{\frac{A\cdot x}{x^2+y^2}}{ka}\right|^n + \left|\frac{\frac{A\cdot x}{x^2+y^2}}{kb}\right|^n \\ &= \left|\frac{A\cdot x}{ka\left(x^2+y^2\right)}\right|^n + \left|\frac{A\cdot y}{kb\left(x^2+y^2\right)}\right|^n \end{aligned} \tag{6.27}$$

elde edilir. Buna göre (6.27) *ifadesinde gerekli düzenlemeler yapıldığında*

$$\left|\frac{x}{a}\right|^n + \left|\frac{y}{b}\right|^n = \left|\frac{k\left(x^2+y^2\right)}{A}\right|^n$$

olarak bulunur. Bu ise simetri merkezi O olan ve $S-$elipsine $\left|\frac{A}{k\left(x^2+y^2\right)}\right|^n$ oranında homotetik bir elipstir. (Şekil 6.30).

Dolayısıyla açıkça O simetri merkezli $S-$elipsine homotetik $S-$elipsler, $S-$eliptik inversiyon dönüşümü altında simetri merkezi O olan $S-$elipslere dönüştüğü sonucuna ulaşılır.



Şekil 6.30 S ye Homotetik Olan χ Elipsinin İnversi

Öklidyen düzlemde elipse göre inversiyon dönüşümü altında doğrular ve elipslerin yine doğru ya da elipslere dönüştüğü bilinmektedir. Ayrıca inversiyon merkezinden geçmeyen doğrular, inversiyon merkezinden geçen elipslere dönüşür. Ancak $S-$eliptik inversiyon dönüşümü altında O noktasını içermeyen doğrular, O noktasından geçen $S-$elipslere dönüşmez.

Teorem 6.26 *S, $\mathbb{R}^2_\infty$ de simertri merkezi O noktası olan bir $S-$elips ve ψ, $S-$elipsine göre inversiyon dönüşümü olsun. Bu taktirde*

$i)$ *Simetri merkezini içermeyen doğrular, $S-$eliptik inversiyon dönüşümü altında O simetri merkezini içeren $S-$elipslere dönüşmez.*

$ii)$ *Simetri merkezini içeren $S-$elipsler, $S-$eliptik inversiyon dönüşümü altında O simetri merkezini içermeyen doğrulara dönüşmez.*

$iii)$ *Simetri merkezinden geçmeyen $S-$elipsler, $S-$eliptik inversiyon dönüşümü altında herhangi bir $S-$elipse dönüşmez.*

Teorem 6.27 *Herhangi bir koniğin $S-$eliptik inversiyon dönüşümü altındaki görüntüsünün konik olması gerekmez.*

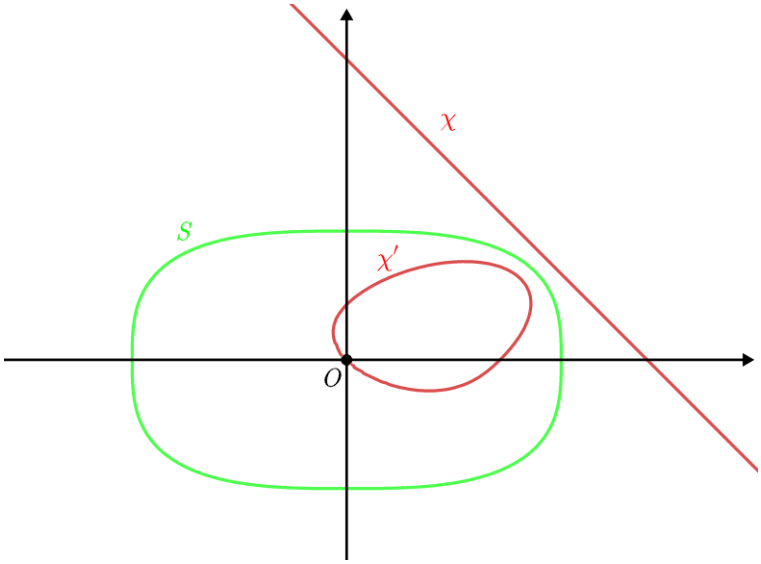
Sonraki kısımda Teorem 6.26 ve 6.27 deki ifadeler örnekler üzerinden incelenecek olup, $S-$eliptik inversiyon dönüşümü altında doğru, $S-$elips ve koniklerin görüntüleri verilecektir.

Örnek 6.4 *S, $\mathbb{R}^2_\infty$ de simertri merkezi O noktası olan bir $S-$elips ve ψ, $S-$elipsine göre inversiyon dönüşümü olsun. χ ve χ' birbirinin invers görüntüleri olmak üzere;*

$i)$ *S, $\mathbb{R}^2_\infty$ de simetri merkezi O noktası olan bir $S-$elips iken $x+y=8$ doğrusunun, $S-$eliptik inversiyon dönüşümü altında*

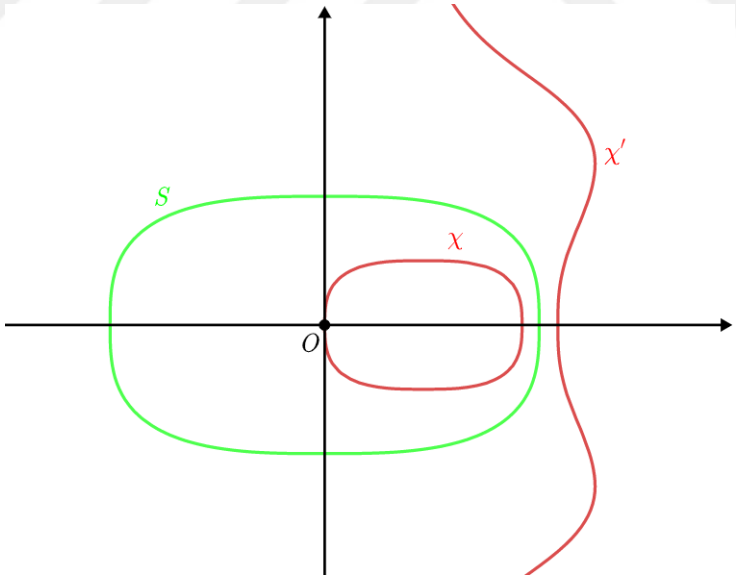
$$\frac{\left(\left(\frac{1}{\left|\frac{1}{a}\right|^n+\left|\frac{y}{xb}\right|^n}\right)^{\frac{2}{n}}+\left(\frac{1}{\left|\frac{1}{b}\right|^n+\left|\frac{x}{ya}\right|^n}\right)^{\frac{2}{n}}\right)\cdot(x+y)}{8}=x^2+y^2$$

eğrisine dönüştüğü kolaylıkla görülür.



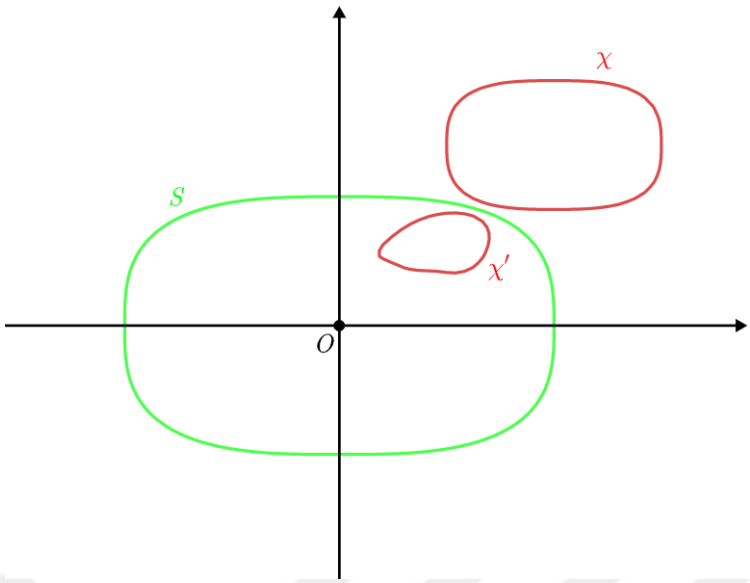
Şekil 6.31 O dan Geçmeyen Bir Doğrunun İnversi

$ii)$ *S, $\mathbb{R}^2_\infty$ de simetri merkezi O olan bir $S-$elips iken simetri merkezinden geçen başka bir $S-$elipsin, $S-$eliptik inversiyon dönüşümü altında bir doğruya dönüşmediği açıktır.*



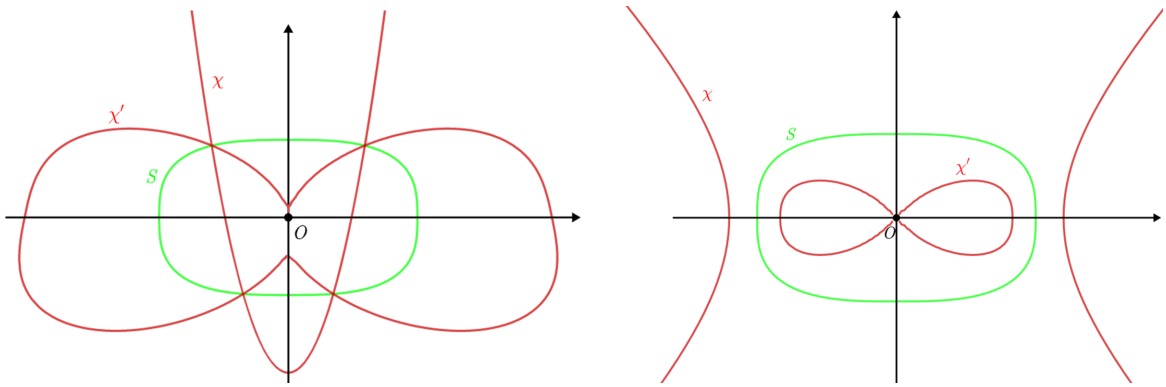
Şekil 6.32 O dan Geçen Bir $S-$elipsin İnversi

$iii)$ *S, $\mathbb{R}^2_\infty$ de simetri merkezi O olan bir $S-$elips iken simetri merkezinden geçmeyen bir $S-$elipsin, $S-$eliptik inversiyon dönüşümü altında herhangi bir $S-$elipse dönüşmediği açıktır.*



Şekil 6.33 O dan Geçmeyen Bir $S-$elipsin İnversi

Örnek 6.5 *S, $\mathbb{R}^2_\infty$ de simertri merkezi O noktası olan bir $S-$elips ve ψ, $S-$elipsine göre inversiyon dönüşümü olsun. χ ve χ' birbirinin invers görüntüleri olmak üzere; $S-$elipsin simetri merkezini içermeyen doğrular $S-$eliptik inversiyon dönüşümü altında doğrulara dönüşmediğinden, herhangi bir koniğin $S-$eliptik inversiyon dönüşümü altındaki görüntüsü konik değildir.*



Şekil 6.34 O dan Geçmeyen Koniklerin İnversleri

7. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu tez kapsamında kökeni M.Ö. 3. yüzyıla kadar uzanan inversiyon kavramı ele alınmıştır. İnversiyon kavramı muhtemelen ilk olarak Pergalı Apollonius tarafından tanımlanmış olup, çemberin içindeki noktalar ile dışındaki noktaları yer değiştiren ve çember üzerindeki noktaları sabit bırakan uzaklık kavramına bağlı bir dönüşümdür. Günümüzde çembere göre yansıma olarak da isimlendirilmektedir. İlk tanımlanmasından günümüze kadar inversiyon kavramına dair birçok çalışma yapılmıştır. Ancak inversiyon dönüşümünün temel argümanlarından biri olan çemberin değiştirilmesi fikri çok yenilerde 2013 yılında Ramírez tarafından ele alınmış ve çember kavramı yerine çemberin genel bir hali olan elips eğrisi kullanılmıştır. Ramírez gerçekleştirdiği çalışmalarda eliptik inversiyonun birçok özelliğini ortaya koymuştur. Daha sonra Minkowski geometriler için inversiyon kavramı yine günümüze oldukça yakın olarak 2014 yılında Bayar ve Ekmekçi' nin çalışmasında taksi düzleme, 2019 yılında Gelişgen ve Ermiş' in çalışması ile taksi, çin dama, maksimum düzlem gibi yapıları özel hal olarak barındıran $\alpha-$düzleme uygulanmıştır.

Bu tez çalışmasında inversiyon kavramı Minkowski metriğinin en meşhur hallerinden biri olan l_1-normda (taksi düzlem) elipsler için ele alınmıştır. Taksi düzlemde elipslere göre inversiyon kavramı tanımlanmış ve inversiyon dönüşümünün temel özellikleri araştırılmıştır. Ayrıca taksi elipse göre inversiyon kavramının ne zaman çifte oranı koruduğu ve harmonik eşleniklerin ne zaman ortaya çıkacağı soruları yanıtlanmıştır. Buna göre taksi düzlemde elipse göre inversiyon dönüşümünün çifte oranı koruması için simetri merkezinden geçen doğrular üzerindeki dört noktanın alınması gerektiği gösterilmiştir. Ayrıca elipsin simetri merkezinden geçen, elipsin çapının iki uç noktası ile harmonik eşlenik olan nokta çiftinin elipse göre inversiyon dönüşümü altında invers olmak zorunda olduğu gösterilmiştir. Bunların yanı sıra elipsin simetri merkezinden geçen doğruların invaryant oldukları ve simetri merkezleri ortak olan inversiyon elipsine homotetik elipslerin inversiyon dönüşümü altındaki görüntülerinin bunlara homotetik başka bir elips olduğu gösterilmiştir. Üstelik simetri merkezinden geçmeyen doğrular ve aynı simetri merkezini paylaşmayan elipslerin inversiyon dönüşümü altında doğru veya elipslere dönüşmedikleri ifade edilmiştir. Ayrıca yukarıda anlatınlara benzer olarak, süper elipsler için de inversiyon dönüşümü tanımlanmış ve aynı sonuçlar elde edilmiştir.

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, l_1-normlu taksi düzlemde çembere göre bir noktanın inversiyon dönüşümü altında görüntüsünün, Öklidyen çember kullanılarak bulunabileceği gösterilmiştir. Daha sonra taksi düzlemde elipslere göre inversiyon dönüşümü tanımlanmış ve geometrik özellikleri verilmiştir. Bu taksi eliptik inversiyon dönüşümü altında keyfi bir noktanın görüntüsünün taksi çember yardımıyla kolaylıkla sentetik olarak bulunabileceği ispatlanmıştır. Benzer olarak, Öklidyen düzlemde süper elipslere göre inversiyon dönüşümü tanımlanmış, geometrik özellikleri verilmiş ve bu eliptik inversiyon dönüşümü altında keyfi bir noktanın görüntüsünün Öklidyen çember yardımıyla da bulunabileceği ispatlanmıştır. Bu sonuçlara göre, bu iki eliptik inversiyon dönüşümü için elde edilen bulgular Minkowski geometri (sonlu boyutlu Banach uzayları) için genellenip-genellenemeyeceği açık bir problemdir. Ayrıca bundan sonra inversiyon dönüşümü ile ilgili çalışmalarda inversiyon kavramı farklı geometrik düzlemlerde ve bu düzlemlerdeki farklı eğrilere göre incelenebilir. Bunların yanı sıra benzer sorular önce $3-$boyutlu uzaya ve sonrasında $n-$boyutlu uzaya taşınabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Bayar, A., Ekmekçi, S., 2014, On circular inversions in taxicab plane, Journal of Advanced Research in Pure Mathematics, 6(4), 33-39.

Blair, D. E., 2000, Inversion Theory and Conformal Mapping, Student Mathematical Library, American Mathematical Society, 9, p.1-13.

Brannan, D. A., Esplen, M. F., Gray, J. J., 2011, Geometry 2nd Edition, Cambridge University Press, p.261-276.

Euzet, M., 1853, Sur les courbes planes à équations trinômes et les surfaces à équations tétranômes, Nouvelles Annales de Mathématiques, 13, 193-200.

Gardner, M., 1975, Mathematical Carnival, The Mathematical Association of America, Inc., New York, p.240-254.

Geilis, J., 2017, The Geometrical Beauty of Plants, Atlantis Press, Paris, p.56-64.

Geilis, J., 2021, Climbing mount improbable, doi:10.13140/RG.2.2.36269.82406.

Gelişgen, Ö., Ermiş, T., 2019, Some properties of inversions in alpha plane, Forum Geometricorum, 19, 1-9.

Hoyrup, J. E., 2018, Mesopotamian Mathematics - The Cambridge History of Science, Cambridge University Press, 1, p.58-72.

Huang, W., Li, Y., Niklas, K. J., Gielis, J., Ding, Y. vd., 2020, A superellipse with deformation and its application in describing the cross-sectional shapes of a square bamboo, Symmetry, 12(12), 2073.

Kaya, R., 2006, Area formula for taxicab triangles, Pi Mu Epsilon Journal, 12(4), 219–220.

Kozai, K., Libeskind, S., 2009, Circle inversions and applications to Euclidean geometry, University of Georgia, http://jwilson.coe.uga.edu/MATH7200/InversionCompanion/inversion/inversionSupplement.pdf.

Krause, E. F., 1975, Taxicab Geometry, Addison-Weley, Menlo Park, California.

Lamé, G., 1818, Examen de differentes méthodes employées pour résoudre les problémes de géometrie, Paris.

Maor, E., 2019, The Pythagorean Theorem: A 4,000-Year History, Princeton University Press.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Menger, K., 1952, You Will Like Geometry, Guildbook of Illinois Institute of Technology Geometry Exhibit, Museum of Science & Industry, Chicago, Illinois.

Ni, B. Y., Elishakoff, I., Jiang, C., Fu, C. M., Han, X., 2016, Generalization of the super ellipsoid concept and its application in mechanics, Applied Mathematical Modelling, 40(21–22), 9427-9444.

Petrović, M., Malešević, B., Banjac, B., Obradović, R., 2014, Geometry of some taxicab curves, arXiv:1405.7579.

Ramírez, J. L., 2013, An introduction to inversion in an ellipse, arXiv:1309.6378v1.

Ramírez, J. L., Rubiano, G. N., 2014, A geometrical construction of inverse points with respect to an ellipse, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45(8), 1254-1259.

Ramírez, J. L., 2014, Inversions in an ellipse, Forum Geometricorum, 14, 107-115.

Sezgin, N., 2014, Öklidyen Düzlemde ve Taksi Düzlemde Evritim Üzerine, Yüksek lisans tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 71s.

Venema, G. A., 2012, The Foundations of Geometry 2nd Edition, Pearson Education, Boston, p.275-284.

Yates, R. C., 1974, Curves and Their Properties, National Council of Teachers of Mathematics, Inc., Virginia, p.127-134.