Bazı Katalan Çokyüzlülerle İlgili Metrik Geometriler Üzerine

Zeynep ÇOLAK

**DOKTORA TEZİ**

Matematik Anabilim Dalı

Mart 2016

# On The Metric Geometries Related Some Catalan Polyhedra

Zeynep ÇOLAK

**DOCTORAL DISSERTATION**

Mathematics Department

March 2016

# Bazı Katalan Çokyüzlülerle İlgili Metrik Geometriler Üzerine

Zeynep ÇOLAK

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. Özcan GELİŞGEN

”Bu tez ESOGÜ BAP tarafından 2014/19A217 no’lu proje çerçevesinde desteklenmiştir.”

Mart 2016

# ONAY

Matematik Anabilim Dalı DOKTORA öğrencisi Zeynep ÇOLAK'ın DOKTORA tezi olarak hazırladığı "**Bazı Katalan Çokyüzlülerle İlgili Metrik Geometriler Üzerine**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

**Danışman** : Doç. Dr. Özcan GELİŞGEN

**İkinci Danışman** : -

**Doktora Tez Savunma Jürisi:**

**Üye :** Prof. Dr. Rüstem KAYA

**Üye :** Prof. Dr. Süleyman ÇİFTÇİ

**Üye :** Prof. Dr. Ziya AKÇA

**Üye :** Doç. Dr. Ali DENİZ

**Üye :** Doç. Dr. Özcan GELİŞGEN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

# ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Doç. Dr. Özcan GELİŞGEN danışmanlığında hazırlamış olduğum "**Bazı Katalan Çokyüzlülerle İlgili Metrik Geometriler Üzerine**" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. …/…/20…

Zeynep ÇOLAK

# ÖZET

Bu tezde, 3- boyutlu analitik uzayda bazı Katalan cisimler olarak adlandırılan çokyüzlüler ile ilgili metrikler belirlenmiş; bu metriklerin belirlediği geometrilerin izometri grupları ile $\mathbb{R}^3$ ün izometri grubu arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Birinci ve ikinci bölümde, **Katalan Cisimler** olarak adlandırılan düzgün olmayan konveks çokyüzlüler hakkında bilgiler verilerek, bu cisimlerin bulunuşundan günümüze kadar olan süreçte ki uygulamalarından bahsedilmiş, minkowski geometrisi ve $\mathbb{R}^3$ ün izometri grubu hakkında temel kavramlar verilerek tanımları hatırlatılmıştır.

Üçüncü, dördüncü, beşinci, altıncı ve yedinci bölümlerde, birim küreleri sırasıyla **tetrakis hexahedron, disdyakis dodecahedron, deltoidal hexacontahedron, pentakis dodecahedron** ve **triakis icosahedron** çokyüzlüleri olacak şekilde uzaklık fonksiyonları belirlenerek, bu uzaklık fonksiyonlarının metrik oldukları ispat edilmiştir. Elde edilen metrikler ile donatılmış uzayların izometri grupları araştırılmıştır.

Sekizinci bölümde, ele alınmayan diğer katalan cisimler hakkında daha önce yapılan çalışmalardan yararlanılarak bilgiler verilmiş, uzaklık fonksiyonları tanıtılmış ve izometri grupları hakkında bilgi verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Metrik, Metrik Geometri, İzometri, İzometri Grup, Uzaklık Fonksiyonu, Katalan Cisimler, Tetrakis Hexahedron, Disdyakis Dodecahedron, Deltoidal Hexacontahedron, Pentakis Dodecahedron ve Triakis İcosahedron.

# SUMMARY

In this thesis, we determine some special metrics related with some of convex polyhedra which are not regular are given in $3-$dimensional real space $\mathbb{R}^3$; and study the metric geometries defined by these metrics.

In the first and second chapter, information about not regular convex polyhedra called **Catalan solids** are given. Then, the applications of Catalan solids are explained from discovery to nowadays, and information about Minkowski geometry and ısometry group of $\mathbb{R}^3$ are given.

In the third, forth, fifth, sixth and seventh chapters, the distance functions of which unit spheres are **tetrakis hexahedron, disdyakis dodecahedron, deltoidal hexacontahedron, pentakis dodecahedron** and **triakis icosahedron** are defined, respectively. It is proved that distance functions are metrics. Isometry groups of $\mathbb{R}^3$ furnished by obtained metrics are researched.

In the last chapter, the other Catalan solids which is not mentioned up to this section are given information benefiting from work done earlier. Their distance functions are given and information is given about their ısometry groups.

**Keywords:** Metric, Metric Geometry, Metric Geometry, Isometry, Isometry Group, Distance function, Catalan Solids, Tetrakis hexahedron, Disdyakis dodecahedron, Deltoidal hexacontahedron, Pentakis dodecahedron, Triakis icosahedron.

# TEŞEKKÜR

Doktoraya ilk başladığım andan itibaren bütün eğitimim boyunca özveriyle bilgisini, sabrını ve insani ilgisini esirgemeyen danışman hocam

Doç.Dr. Özcan GELİŞGEN'e

tez çalışmam sırasında bana bilimsel katkısını ve desteğini esirgemeyen değerli hocam

Prof. Dr. Rüstem KAYA'ya

bugünlere gelmemde en büyük emek sahibi olan annem ve babama, maddi ve manevi her türlü desteğini yanımda hissettiğim eşime, çalışmama izin verdikleri için çocuklarım Yaşar Kenan, Melike ve Melek'e ve sevgili arkadaşım Zeynep Can'a teşekkürlerimi sunarım.

ÇANAKKALE, 2016
Zeynep ÇOLAK

# İÇİNDEKİLER

**Sayfa**

**ÖZET** . . . . . **vi**

**SUMMARY** . . . . . **vii**

**TEŞEKKÜR** . . . . . **viii**

**İÇİNDEKİLER** . . . . . **ix**

**ŞEKİLLER DİZİNİ** . . . . . **xi**

**1. GİRİŞ** . . . . . **1**

**2. TEMEL KAVRAMLAR** . . . . . **8**

2.1. Euler Formülü . . . . . 8

2.2. Minkowski Geometrisi ve Katalan Cisimler . . . . . 9

2.3. $\mathbb{R}^3$ ün İzometri Grubu . . . . . 11

**3. TETRAKİS HEXAHEDRON UZAYI** . . . . . **14**

3.1. Tetrakis Hexahedron Metriği ve Özellikleri . . . . . 14

3.2. Tetrakis Hexahedron İzometri Grubu . . . . . 20

**4. DİSDYAKİS DODECAHEDRON UZAYI** . . . . . **39**

4.1. Disdyakis Dodecahedron Metriği ve Özellikleri . . . . . 39

4.2. Disdyakis Dodecahedron İzometri Grubu . . . . . 46

**5. DELTOİDAL HEXACONTAHEDRON UZAYI** . . . . . **64**

5.1. Deltoidal Hexacontahedron Metriği ve Özellikleri . . . . . 64

5.2. Deltoidal Hexacontahedron İzometri Grubu . . . . . 71

**6. PENTAKİS DODECAHEDRON UZAYI** . . . . . **102**

6.1. Pentakis Dodecahedron Metriği ve Özellikleri . . . . . 102

6.2. Pentakis Dodecahedron İzometri Grubu . . . . . 108

**7. TRİAKİS İCOSAHEDRON UZAYI** . . . . . **139**

7.1. Triakis İcosahedron Metriği ve Özellikleri . . . . . 139

7.2. Triakis Icosahedron İzometri Grubu . . . . . 145

**8. DİĞER KATALAN CİSİMLER** . . . . . **174**

# İÇİNDEKİLER (devam)

8.1. Rhombic Dodecahedron . . . . . 174
8.2. Triakis Octahedron . . . . . 176
8.3. Deltoidal Icositetrahedron . . . . . 178
8.4. Rhombic Triacontahedron . . . . . 180
8.5. Disdyakis Triacontahedron . . . . . 182

**9. SONUÇLAR VE ÖNERİLER . . . . . 186**

**KAYNAKLAR DİZİNİ . . . . . 187**

# ŞEKİLLER DİZİNİ


| Şekil | | Sayfa |
|---|---|---|
| 1.1 | Rotterdam'da kübe benzer yapılar | 2 |
| 1.2 | Büyük paskalya yumurtası | 2 |
| 1.3 | Elmas | 3 |
| 1.4 | Karbon allotropu | 4 |
| 1.5 | $C_{60}$ yapısı | 4 |
| 1.6 | Metal atomu | 5 |
| 1.7 | Wenninger modelleri | 6 |
| 3.1 | Tetrakis Hexahedron ve Kübün kleetopu | 14 |
| 3.2 | Tetrakis hexahedronun koordinat sistemine yerleştirilmesi | 18 |
| 3.3 | Tetrakis hexahedron yolu | 18 |
| 3.4 | $\mathbb{R}^3_{TH}$ de Yansıma Düzlemlerine Göre Köşe Noktaların Görüntüleri | 23 |
| 3.5 | $\mathbb{R}^3_{TH}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri | 26 |
| 3.6 | $\mathbb{R}^3_{TH}$ de $\sigma_O$ İnversiyonu Altında Köşe Noktaların Görüntüleri | 27 |
| 3.7 | $\mathbb{R}^3_{TH}$ de Dönme Yansıma Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri | 29 |
| 3.8 | $\mathbb{R}^3_{TH}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri | 31 |
| 3.9 | $\mathbb{R}^3_{TH}$ da Minimum Uzaklık Kümesi | 32 |
| 3.10 | $\mathbb{R}^3_{TO}$ da Birim Küre Ve Minimum Uzaklık Kümesi | 33 |
| 4.1 | Disdyakis Dodecahedron ve Rhombic dodecahedronun kleetopu | 39 |
| 4.2 | Disdyakis dodecahedronun koordinat sistemine yerleştirilmesi | 43 |
| 4.3 | Disdyakis dodecahedron yolu | 43 |
| 4.4 | $\mathbb{R}^3_{DD}$ de Yansıma Düzlemlerine Göre Köşe Noktaların Görüntüleri | 48 |
| 4.5 | $\mathbb{R}^3_{DD}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri | 52 |
| 4.6 | $\mathbb{R}^3_{DD}$ de $\sigma_O$ İnversiyonu Altında Köşe Noktaların Görüntüleri | 52 |
| 4.7 | $\mathbb{R}^3_{DD}$ de Dönme Yansıma Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri | 54 |
| 4.8 | $\mathbb{R}^3_{DD}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri | 57 |
| 4.9 | $\mathbb{R}^3_{DD}$ de Minimum Uzaklık Kümesi | 58 |
| 4.10 | $\mathbb{R}^3_{DD}$ de Birim Küre Ve Minimum Uzaklık Kümesi | 59 |
| 5.1 | Deltoidal Hexacontahedron ve Dodecahedron veya Icosahedronun kleetopu | 64 |
| 5.2 | Deltoidal hexacontahedronun koordinat sistemine yerleştirilmesi | 67 |
| 5.3 | Deltoidal hexacontahedron yolu | 68 |
| 5.4 | $\mathbb{R}^3_{DH}$ de Yansıma Düzlemlerine Göre Köşe Noktaların Görüntüleri | 75 |
| 5.5 | $\mathbb{R}^3_{DH}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri | 80 |

# ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

5.6 $\mathbb{R}^3_{DH}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri . . . . . 81
5.7 $\mathbb{R}^3_{DH}$ de $\sigma_O$ İnversiyonu Altında Köşe Noktaların Görüntüleri . . . . . 82
5.8 $\mathbb{R}^3_{DH}$ de Dönme Yansıma Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri . . . . 83
5.9 $\mathbb{R}^3_{DH}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri . . . 87
5.10 $\mathbb{R}^3_{DH}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri . . . 88
5.11 $\mathbb{R}^3_{DH}$ da Minimum Uzaklık Kümesi . . . . . 89
5.12 $\mathbb{R}^3_{DH}$ de Birim Küre Ve Minimum Uzaklık Kümesi . . . . . 90

6.1 Pentakis Dodecahedron ve Docahedronun kleetopu . . . . . 102
6.2 Pentakis dodecahedronun koordinat sistemine yerleştirilmesi . . . . . 105
6.3 Pentakis dodecahedron yolu . . . . . 106
6.4 $\mathbb{R}^3_{PD}$ de Yansıma Düzlemlerine Göre Köşe Noktaların Görüntüleri . . . . . 113
6.5 $\mathbb{R}^3_{PD}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri . . . . . 118
6.6 $\mathbb{R}^3_{PD}$ de $\sigma_O$ İnversiyonu Altında Köşe Noktaların Görüntüleri . . . . . 119
6.7 $\mathbb{R}^3_{PD}$ de Dönme Yansıma Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri . . . . 120
6.8 $\mathbb{R}^3_{PD}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri . . . 125
6.9 $\mathbb{R}^3_{PD}$ de Minimum Uzaklık Kümesi . . . . . 126
6.10 $\mathbb{R}^3_{PD}$ de Birim Küre Ve Minimum Uzaklık Kümesi . . . . . 127

7.1 Triakis Icosahedron ve Icosahedronun kleetopu . . . . . 139
7.2 Triakis icosahedronun koordinat sistemine yerleştirilmesi . . . . . 142
7.3 Triakis icosahedron yolu . . . . . 143
7.4 $\mathbb{R}^3_{TI}$ de Yansıma Düzlemlerine Göre Köşe Noktaların Görüntüleri . . . . . 150
7.5 $\mathbb{R}^3_{TI}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri . . . . . 154
7.6 $\mathbb{R}^3_{TI}$ de $\sigma_O$ İnversiyonu Altında Köşe Noktaların Görüntüleri . . . . . 155
7.7 $\mathbb{R}^3_{TI}$ de Dönme Yansıma Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri . . . . . 156
7.8 $\mathbb{R}^3_{TI}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri . . . . 160
7.9 $\mathbb{R}^3_{TI}$ da Minimum Uzaklık Kümesi . . . . . 161
7.10 $\mathbb{R}^3_{TI}$ da Birim Küre Ve Minimum Uzaklık Kümesi . . . . . 162

8.1 Rhombic Dodecahedron . . . . . 174
8.2 Triakis Octahedron . . . . . 176
8.3 Deltoidal İcositetrahedron . . . . . 178
8.4 Rhombic triacontahedron . . . . . 180
8.5 Disdyakis triacontahedron . . . . . 183

# 1. GİRİŞ

Sonlu sayıda doğru parçalarının bir zinciri ile sınırlandırılmış düzlemsel şekile çokgen denilmektedir. Ortak kenarlara sahip çokgenlerden oluşan cisme bir çokyüzlü ve çokgenler ele alındığında her bir çokgene çokyüzlünün bir yüzü denir. Çokgenlerin kenar ve köşeleri bu çokyüzlünün kenar ve köşelerini oluşturur. Kısaca her bir yüzü düzlemsel çokgenler ile sınırlanan, ayrıt ve köşeleri de bu çokgenlerin kenar ve köşeleri olan cisimlere **çokyüzlü (Polyhedron)** denilmektedir. Çokyüzlüyü bir bütün olarak ele aldığımızda yani çokyüzlünün içindeki bir noktadan veya içindeki başka bir çokgenden bahsettiğimizde bu çokyüzlüyü aynı zamanda bir katı cisim olarak da adlandırabiliriz. Ayrıca herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasının tamamı, çokyüzlünün yüzeyinde veya içinde kalıyorsa bu çokyüzlüye dış bükey (konveks), aksi halde **iç bükey** (konkav) denilmektedir.

Eski zamanlardan beri çokyüzlüler insanların odak noktasında olmuştur. Simetri çokyüzlülerin en önemli özelliklerinden biridir. Çokyüzlüler birden fazla simetri özelliğine sahiptirler ve belki onları bu derece güzel yapan bu özellikleridir. Ne de olsa simetri insanoğlunun estetik anlayışının en önemli noktalarından biridir. Estetik anlayışının en önemli unsuru olması sebebiyle simetri matematik, fizik, kimya gibi birçok alanda üzerinde durulan bir olgu olmuştur.

Mimaride çokyüzlülerin örneklerini bulmak oldukça kolaydır. 4500 yıl önce yapılan Mısır Giza'daki antik zaman piramitlerinin, çokyüzlülerden yararlanılarak dizayn edildiğini görebiliriz. İtalya Floransa'daki vaftizhane de sekiz köşeli bir çokyüzlü şeklinde yapılmıştır. Dünyanın çeşitli yerlerindeki alışılmamış çokyüzlülere benzer olarak yapılan yapılara en güzel örnek; Hollanda Rotterdam da cisim köşegeni yere dik olacak şekilde konumlanmış karmaşık bir kübe benzer yapılardır (Şekil 1.1) (Peter R. Cromwell, 1997, Cambridge University Press,1-2p.).



Şekil 1.1 Rotterdam'da kübe benzer yapılar

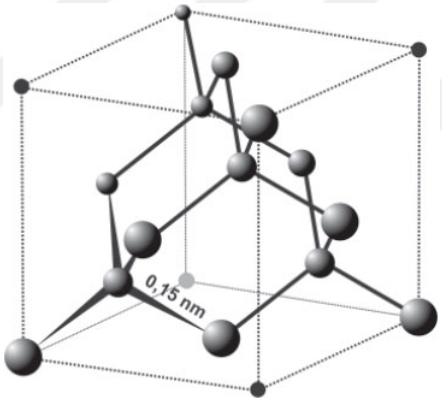
Özellikle 20. yüzyılda ki sanatsal faaliyetlerde çokyüzlüler daha çok ortaya çıkmaktadır. Örneğin, Salvador Dali'nin ünlü eserlerinden biri olan son akşam yemeği ayini adlı tabloda platonik cisimlerden olan düzgün oniki yüzlünün bir parçası görülmektedir. Alman grafiker M.C. Escher, çalışmalarında genellikle yıldız çokyüzlüleri kullanmaktadır. Modern soyut yapılarda da çokyüzlüleri görmek mümkündür. En büyük çokyüzlü, Kanada'nın Alberta ili Vereville kasabasında bulunan ve Ronald Dale Resch tarafından yapılan yapıdır. Ronald Dale Resch tarafından yapılan büyük paskalya yumurtası, yedi metrenin üzerinde yüksek bir yapıdır. Bu yapının yüzeyinin % 80'ni bronz, gümüş ve altın renkli eşkenar üçgenlerden oluşmuştur. Geri kalan kısmı ise, üç köşeli yıldız formundaki konveks olmayan eşkenar altıgenlerden oluşmaktadır (Şekil 1.2) (Peter R. Cromwell, 1997, Cambridge University Press,2-3p.).



Şekil 1.2 Büyük paskalya yumurtası

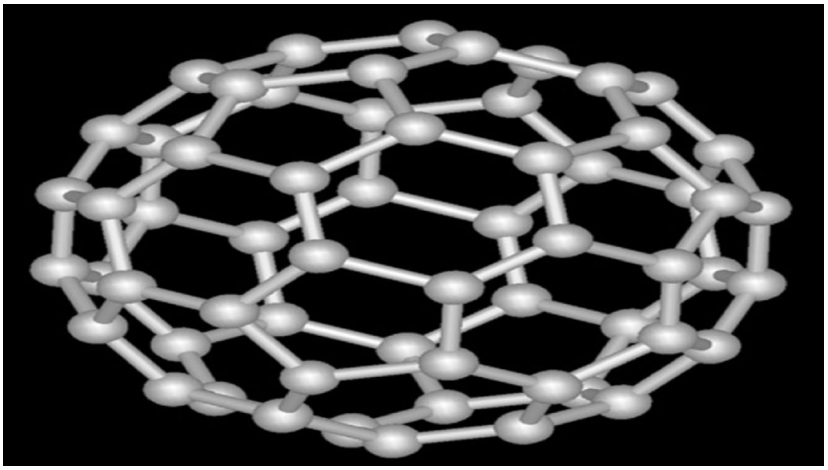
Çokyüzlüleri süsleme sanatında da görmek mümkündür. Birçok aksesuar çokyüzlü formda yapılmıştır. Bu aksesuarlar yapımı daha kolay olduğu için cub-octahedron şeklinde yapılmıştır. Yapılan kazılarda, Almanya ’da M.Ö. 450 yılına ait çokyüzlü şeklinde bir küp bulunmuştur. Cub-octahedra, Japon tapınaklarının dekorasyonunda oldukça sık görülmektedir. Kore’liler de ölüleri anma törenide rhomb-cub-octahedral şekline benzeyen kutsal fenerler kullanmaktadırlar (Peter R. Cromwell, 1997, Cambridge University Press,3-4p.).

Doğada çokyüzlüler daha çok kristal yapılar olarak bulunmaktadır. 19. yüzyılda ki çalışmalarda, çokyüzlüler ve kristal yapıların simetrilerinin geometrik analizi yapılmıştır. Simetri teorisi, tekrarlayan atomik yapılardan oluşan kristaller varsayımını içerir. Burada bahsedilen kristal yapılar sınırlıdır ve daha çok, iki, üç, dört veya altı katlı dönme simetrileri işaret ederler. Bu sebeple, 1984 yılında bulunan 5 katlı kristal görünümlü madde büyük heyecana sebep olmuştur. Bu obje, şuanda quaricrystal olarak adlandırılmaktadır. Çokyüzlüleri en iyi şekilde elmasta görebiliriz. (Şekil 1.3)



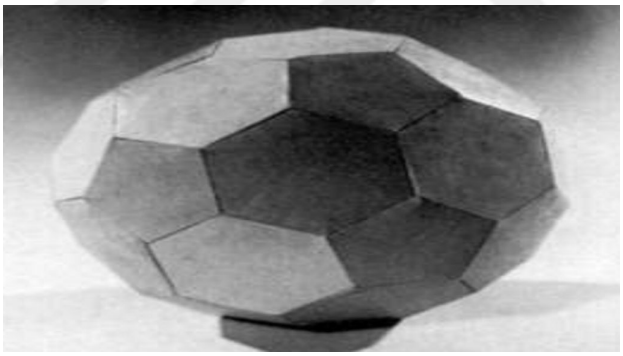

Şekil 1.3 Elmas

Bakır ve florit sistemler gibi kimyasal yapılarda da, doğal yollarla oluşan tetrakis hexahedrona benzer kristal yapılar gözlenmektedir. Çocuk felcine neden olan virüslerin küresel kafes yapısı da çokyüzlülere benzemektedir . Bu virüsler, protein sentezini yapan hayati bir hücrede kendi kendini tekrar üretmektedir. Tekrar üretilen bu virüsler beşli(pentamer) ve altılı(hexamer)gruplar halinde bir kafes içerisinde yapılanmaktadırlar. Son zamanlarda keşfedilen karbon allotropun yapısıda, beşgenlerden oluşmuş bir küreye benzemektedir (şekil 1.4).



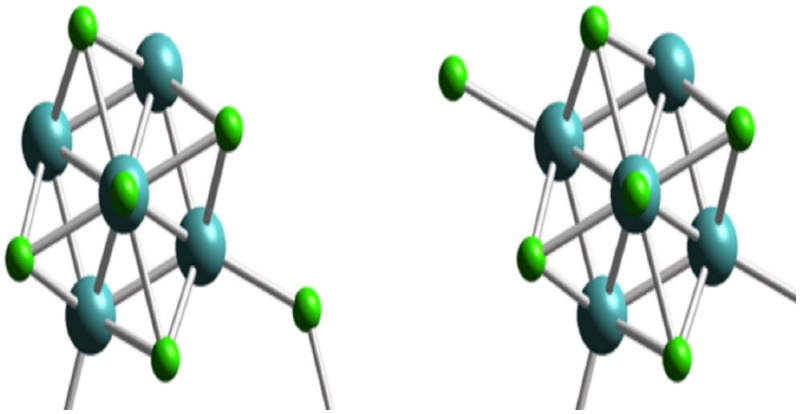
Şekil 1.4 Karbon allotropu

En küçük örnek ise, Truncated Icosahedronun köşelerine benzer bir şekilden elde edilmiş, 60 atomdan oluşan $C_{60}$ yapısıdır (Şekil 1.5).



Şekil 1.5 $C_{60}$ yapısı

Organik veya inorganik kimyadan da çokyüzlülere benzer yapılarla ilgili birçok örnek verilebilir. $C_8H_8$ in yapısı bir kübe benzer iken $Mo_6Cl_8^{4+}$ metal atomunun yapısı ise bir octahedrona benzemektedir (Şekil 1.6) (Peter R. Cromwell, 1997, Cambridge University Press,4-7p.).



Şekil 1.6 Metal atomu

Çokyüzlüler sahip oldukları simetrilerden dolayı matematiksel açıdan insanların ilgisini çekmiştir. Çokyüzlüler, tüm bu güzelliklerinin ve ilginç özelliklerinin yanında anlaşılması güç şekillerdir. Bu da onların matematiksel yapılarından değil, insanların hayal edebilme güçlüklerinden kaynaklanmaktadır. Bir çokyüzlüyü göz önüne getirip ona herhangi bir açıdan bakabilmek oldukça güçtür. Hele de onikiyüzlü ya da yirmiyüzlü için bu iş daha da zordur. Düzgün olmayan, yıldız çokyüzlüleri söylemeye dahi gerek yoktur. Çokyüzlülerin sırlarının düzlem geometriye oranla daha sonraları keşfedilmiş olmasının nedeni belki de bu özellikleridir.

İnsanlar çokyüzlülerle akıldan uğraşmanın çok zor olduğunun farkına varmış ve onların birer modelini yapıp, bu modeller üzerinde çalışmaya karar vermişlerdir. Böylelikle bundan daha binlerce yıl önce beş düzgün çokyüzlünün modellerini yapmayı başarmışlardır. Britanya Adaları'nda yapılan arkeolojik kazılarda Platon'dan bin yıl öncesine ait taştan yapılmış beş düzgün çokyüzlü bulunmuştur (Bu tarza erişilebilecek çevirim içi adres http://anlamak.com/platon'un-beş-katı-cismi.html).

Günümüzde de bir çok kişi çokyüzlü modelleriyle uğraşmaktadır. Hatta Amerika'da bir çok öğretmen, öğrencilerinin el becerilerini geliştirmelerini sağlamak için onlardan kendi başlarına düzgün onikiyüzlü ya da yirmiyüzlü modelleri yapmalarını istemektedir.

Bir de çokyüzlü modelleri yapma işini bir hobi hatta bunun da ötesinde bir sanat olarak görenler vardır. Bu insanlardan biri olan M.J. Wenninger, Polyhedron Models (Çokyüzlü Modelleri) adlı kitabın da yazarıdır.Yazar bu kitabında, kendi yapımı olan çokyüzlü modellerin birer resimlerini ve her biri hakkında verdiği çeşitli bilgileri

toplamıştır. Wenninger, kartondan yaptığı modellerin her biri için ortalama sekiz saat harcadığını söylemiştir (Bu tarza erişilebilecek çevirim içi adres http://anlamak.com/eski/anasayfa) (şekil 1.7).



Şekil 1.7 Wenninger modelleri

Tüm ayrıt ve yüzleri eş ve her köşeden aynı sayıda yüz geçen çokyüzlülere ise düzgün çokyüzlü denir. Bazı arkeolojik kazılarda, İskoçya da, cilalı taş devri insanları tarafından binlerce yıl öncesine ait oyulmuş taştan yapılmış düzgün çokyüzlüler bulunmuştur. Bunlar Oxford Üniversitesi'ndeki Ashmolean Müzesi'nde yer almaktadır. Uzun yıllar üzerine çalışılmış olmasına rağmen sadece beş tane düzgün çokyüzlü bulunabilmiştir. Euclid'in "Elemanlar" adlı kitabında yeni çokyüzlülerin bulunamayacağının ispatı ile bu yöndeki çalışmalar son bulmuştur. Her ne kadar Platon başka düzgün çokyüzlü elde edilemeyeceğini ispatlayamamış olsa da, M.Ö. yaklaşık 360 lı yıllarda "Timaus" adlı eserinde düzgün çokyüzlülerden bahsederek onlardan haberdar olduğunu ispatlamıştı. Platon'a göre doğa beş öğeden oluşuyordu, her bir doğal öğe bu düzgün çokyüzlüler ile simgelenebilirdi. Ona göre dört yüzlü (tetrahedron) ateşi, altı yüzlü (hexahedron) toprağı, sekiz yüzlü (octahedron) havayı, on iki yüzlü (dodecahedron) evreni ve yirmi yüzlü (icosahedron) ise suyu simgeliyordu. Plato'nun "Timaus" adlı eserindeki bu düşüncesinden dolayı bu şekillere Platonik Cisimler adı verilir.

Günümüzde atom ve atom altı dünya ile ilgili yapılan birçok moleküler teori ve kristal yapı ile ilgili yapılan çalışmalarda Platon'un görüşünün tamamen geçerli olmadığı

görülse de, Platon'un tamamen yanlış bir bir çıkarsamada bulunmadığı da görülmektedir. Atomlar kristal yapı oluştururken Plato'nun tanımladığı düzgün çokyüzlüler (Dodecahedron-on iki yüzlü hariç) formunda dizilmekte olduğu bir çok kimyasal ve fiziksel çalışmada yerini almıştır (Atiyah M., Sutcliffe P., Polyhedra in Physics, Chemistry and Geometry, Milan Journal of Mathematics, 71, 33-58, 2003). 2006 yılında Meksika'daki San Louis Patosi Teknoloji Araştırma Enstitüsünden Josa Luis Rodriguez Lopez ile Austin'deki Texas Üniversitesi'nden Miguel Jose Yacaman altın-paladyum atomlarının kristal yapı diziliminde on iki yüzlünün (dodecahedron) varlığını göstermişlerdir (Carrizales J. M. M., Lopez J. L. R., Pal U., Yoshida M. M. ve Yacaman M. J., The Completion of the Platonic Polyhedra: The Dodecahedron, Small Volume 2, Issue 3, pages 351-355, 2006.).

Ayrıt ve yüzleri eş olmayan çokyüzlülere düzgün olmayan çokyüzlü denilmektedir. Bunlara en güzel örnek Arşimedyan cisimlerin duali olan Katalan cisimlerdir. Katalan cisimler 1865 yılında Belçikalı matematikçi Eugene Catalan tarafından tanımlanmıştır (Catalan Eugène,1865). Eugène Charles Catalan (30 Mayıs 1814-14 Şubat 1894, Liège, Belçika) sürekli kesirler, betimleyici geometri, sayılar teorisi ve kombinatorik üzerinde çalışmış bir bilim adamıdır. 1855'te keşfettiği bir benzersiz yüzeye kendi adını vermiş, bunun öncesinde de ünlü Catalan varsayımını açıklamıştır. Varsayım 1844'te basılmış ve 2002'de matematikçi Preda Mihăilescu tarafından kanıtlanmıştır. Kombinatorik problemleri çözmek için Katalan sayılarını ortaya koymuştur. 1865 yılında keşfettiği Katalan cisimler Eugène Charles Catalan'a Fransa Bilimler Akademisi ödülünü kazandırmıştır (Bu tarza erişilebilecek çevirim içi adres http://tr.wikipedia.org/wiki/Eugene_Charles_Catalan).

Katalan cisimleri, Platonik cisimler ve Arşimedyan cisimlerden ayıran en önemli özellik, düzgün olmayan konveks yapılar olmasıdır. Katalan cisimlerin yüzlerinin oluşturan şekillerin kenar uzunlukları farklıdır. Örneğin Disdyakis Dodecahedron 48 tane çeşit kenar üçgenden oluşmaktadır veya Tetrakis Hexahedron 24 tane ikiz kenar üçgenden oluşmaktadır.

# 2. TEMEL KAVRAMLAR

## 2.1 Euler Formülü

Bu kısımda düzgün olmayan çokyüzlüleri matematiksel açıdan daha iyi tanımlayabilmek için, tüm konveks çokyüzlüler için geçerli olan " *Euler Formülü* " verilecektir. Tüm konveks çokyüzlülerde geçerli olan yüz, ayrıt ve köşe sayıları arasında *Euler Formülü* olarak bilinen bağıntı aşağıdaki teoremde verilmektedir.

**Teorem 2.1** *Köşe sayısı $K$, ayrıt sayısı $A$, yüz sayısı $Y$ olmak üzere, bir konveks çokyüzlü için*

$$K + Y - A = 2$$

*olur.*

**İspat** *Köşe sayısı üzerinden tümvarımla ispat verilebilir. Çokyüzlünün köşe sayısı $K$ olsun. Bu taktirde Euler formülünün $K$ tane köşe için doğru olduğu kabul edilip, $K+1$ köşe içinde doğruluğu gösterilmelidir. Çokyüzlü için $K \geq 4$ olması gerektiği açıktır.*

*$K = 4$ için, $Y = 4$ ve $A = 6$ olup $K + Y - A = 2$ dir. Şimdi keyfi bir çokyüzlü için köşe sayısı $K$ olması durumunda Euler formülünün doğru olduğu kabul edilsin.*

*$K$ köşeli konveks çokyüzlünün dışında $(K + 1)$ inci köşe olacak şekilde bir $L$ noktası alınsın. Böylece yeni köşe sayısı $K_y = K + 1$ olur. $L$ noktası çokyüzlünün bir yüzünü oluşturan $k$-kenarlı çokgenin tüm köşelerine birleştirilirse, $L$ noktası ile birleştirilen çokgen yeni çokyüzlü için artık bir yüz olmayacaktır. Dolayısıyla yeni oluşan çokyüzlünün ayrıt sayısı $A_y = A + k$ olurken, yüz sayısı $Y_y = Y + k - 1$ olur. Bu değerler için Euler formülü yazılırsa*

$$\begin{aligned} K_y + Y_y + A_y &= (K + 1) + (Y + k - 1) - (A + k) \\ &= K + Y - A \\ &= 2 \end{aligned}$$

*bulunur. Sonuç olarak yeni çokyüzlü için de Euler formülünün geçerliliği görülmüş olur.*

## 2.2 Minkowski Geometrisi ve Katalan Cisimler

Minkowski geometrilerini tanıtan ve inceleyen bir çok çalışmalar vardır. Bu bölümde tezi diğer kaynaklara başvurmadan anlaşılır kılmak amacı ile Minkowski geometrileri adına bilinen bazı kavram ve özelikler (Kaya, 2002), (Özcan ve Kaya, 2003), (Kaya ve Çolakoğlu, 2006), (Krause, 1975), (Martin, 1998), (Millmann and Parker, 1991), (Thompson, 1996) ve (Coxeter, 1961) kaynaklarından esas alınarak özetlendi.

(Thompson, 1996) da ifade edildiği gibi, Minkowski geometrisi, eliptik ve hiperbolik geometriden farklı sonlu boyutlu bir Öklidyen olmayan geometridir. Ayrıca Space-time Minkowskian geometrisinden de farklıdır. Minkowski geometrisindeki lineer yapı Öklidyen geometrideki ile hemen hemen aynıdır. Noktalar, doğrular ve düzlemler Öklidyen geometrinin noktaları, doğruları ve düzlemleri iken, açı ölçümü Ökliyen geometrideki ile aynı yolla yapılmaktadır. Yalnızca bir fark vardır. Bu fark ise uzaklığın tüm yönlerde aynı olmamasıdır. Bu farklılık da alınan metrikle ilgili kavramları değiştirmektedir. Dolayısıyla Minkowski geometrilerinde uzaklıkla ilgili kavramların incelenmesi oldukça ilgi çekici konular ortaya çıkarmaktadır. Örneğin Öklidyen uzaydaki alışılmış kürenin yerine alınan ”yeni birim küre” değişebilen bir genel simetrik konveks kümedir, ve paralellik aksiyomu geçerli olmasına rağmen, Pisagor teoremi geçerli değildir. Bu tip geometrilerin temeli Herman Minkowski tarafından atılmasına rağmen Bernhard Riemann da böylesi bir geometriyi 30 yıl öncesinden önermiştir. Günümüzde sıklıkla kullanılan Minkowski geometri terimini Thompson da kullanmıştır. Dikkat edilirse bu teori Minkowskian space-time geometrisinden tamamen farklıdır. Bu tip geometrilerle ilgili çok sayıda bilimsel araştırma, makale ve kitaplar üretilmiştir.

Minkowski geometrilerin birim kürelerinin genel simetrik konveks kümeler olması gerçeği bu genel simetrik konveks kümeler ile metrikler arasında ilgi kurulabileceğini göstermektedir. Burada birim küreleri Plato şekilleri verecek şekilde metriklerin varlığından bahsedebiliriz. Örneğin $X = (x_1, x_2, x_3)$ ve $Y = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere
$d_M : \mathbb{R}^3 x\, \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ ise

$$d_M(X, Y) = \max \{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, |x_3 - y_3|\}$$

uzaklık fonksiyonu kullanılarak oluşturulan Minkowski geometrisinin birim küresi küptür. Benzer şekilde Taksi 3-uzayda birim küre bir düzgün sekizyüzlüdür. Son yıllarda yapılan çalışmalarda da birim küresi dodecahedron ve icosahedron olacak şekilde metriklerin dolayısıyla Minkowski geometrilerin varlığı görülmüştür.

Ayrıca çin dama metriği ile döşenmiş uzayın birim küresi bir katalan cisim olan deltoidal icositetrahedron olduğu görülmektedir. $n$- boyutlu $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında verilen konveks yapılar için, birim küreleri bu konveks yapılar olan normların varlığı bilinmektedir. Fakat daha önce yapılan çalışmalar incelendiğinde varlığı bilinen bu normların nasıl tanımlı oldukları bilinmemektedir. Bu durumda akla önemli iki soru gelmektedir;

"Birim küreleri Katalan cisimler olacak şekilde metrikler bulunabilir mi? "

"Eğer bulunabilirse, bu metrikler analitik olarak nasıl ifade edilirler? "

Bu metrikler koordinatlar yardımıyla ifade edilebilirse, yeni metrikler kolaylıkla inşa edilebilecektir. Bu metrikler sayesinde Katalan cisimler için matematiksel formüller verilerek, bu yapılar üzerinde matematik ve diğer bilim dalları açısından daha kolay bir şekilde çalışma imkanı da sağlanır.

2-6. bölümlerde birim küreleri tetrakis hexahedron, disdyakis dodecahedron, deltoidal hexacontahedron, pentakis dodecahedron ve triakis icosahedron olan uzaklık fonksiyonları tanımlanacak ve bu fonksiyonların metrik oldukları ispatlanacaktır. Bu metrikler sırasıyla $d_{TH}, d_{DD}, d_{DH}, d_{PD}, d_{TI}$ olarak gösterilecektir. Aynı zamanda tezin bundan sonraki kısmında kısalığın hatrına $d_{TH}$ ile donatılmış $\mathbb{R}^3$ uzayı $\mathbb{R}^3_{TH}$, $d_{DD}$ ile donatılmış $\mathbb{R}^3$ uzayı $\mathbb{R}^3_{DD}$, $d_{DH}$ ile donatılmış $\mathbb{R}^3$ uzayı $\mathbb{R}^3_{DH}$, $d_{PD}$ ile donatılmış $\mathbb{R}^3$ uzayı $\mathbb{R}^3_{PD}$, $d_{TI}$ ile donatılmış $\mathbb{R}^3$ uzayı $\mathbb{R}^3_{TI}$ ile gösterilecektir.

$\mathbb{R}^3_{TH}, \mathbb{R}^3_{DD}, \mathbb{R}^3_{DH}, \mathbb{R}^3_{PD}, \mathbb{R}^3_{TI}$ uzaylarının noktaları, doğruları ve düzlemleri, 3- boyutlu Öklidyen uzayın noktaları, doğruları ve düzlemleri ile aynıdır. Açı ölçümü de 3- boyutlu Öklid uzayındaki gibi aynı yolla yapılır. Yani lineer yapıları hemen hemen aynıdır. Tek fark iki nokta arasındaki uzaklığı $d_E$ metriği ile ölçmek yerine sırasıyla $d_{TH}$, $d_{DD}$, $d_{DH}$, $d_{PD}$, $d_{TI}$ metrikleri ile ölçmektir. 2-6. bölümlerde temel geometrik problemlerden biri olan bir $d$ metriği ile verilmiş bir $S$ uzayının $G$ izometri grubunun bulunması problemini ele alarak $d_{TH}$, $d_{DD}$, $d_{DH}$, $d_{PD}$, $d_{TI}$ metrikleriyle döşenmiş uzayın izometri grubu bulunacak ve $d_E$ metriğine göre $\mathbb{R}^3$ ün bilinen izometri grubuyla karşılaştırılacaktır. Ayrıca ilgili uzayın birim küresinin Öklidyen simetri grubu ile izometri grubunun ilişkileri Gelişgen Ö. ve Kaya R., 2009 ve Ermiş T. ve Kaya R. 2015 referanslarındaki yöntem kullanılarak araştırılacaktır. Bu bağlamda analitik 3-uzayda izometri ve simetri grupları ile ilgili bilgiler hatırlatılarak bu bölüm bitirilecektir. Yani bu metrikler yardımıyla Minkowski geometriler inşa edilecektir. Bu metrikleri verebilmek için aşağıdaki adımlar takip edilerek bir yöntem geliştirilecek ve bu yöntem metrikleri bulmak için kullanılacaktır.

*Adım 1:* Tetrakis hexahedron, disdyakis dodecahedron, deltoidal hexacontahedron, pentakis dodecahedron ve triakis icosahedron için verilecek uzaklık fonksiyonunun, ifadesini en basit şekilde verecek ifadeye sahip olabilmesi için söz konusu çokyüzlü koordinat sistemine en uygun biçimde yerleştirilmelidir; çünkü bu yerleştirme ve elde edilecek en basit ifade tüm çalışmaları olumlu etkileyecektir. Ayrıca bu adım, verilen şekillerin sadece sekizde birlik kısmın üzerinde çalışılarak tamamı üzerine bir genelleme yapma imkanı da sağlayacaktır.

*Adım2:* Koordinat sistemine uygun olarak yerleştirilme işlemi çokyüzlünün simetrilerini kolay göstermeli ve köşeleri en basit şekilde vermelidir.

*Adım 3:* Bu katalan cisimlerin yüzlerini oluşturan çokgenleri içine alan düzlemler, köşe noktaları yardımıyla bulunmalıdır. Bu şekiller koordinat sistemine simetrik olacak şekilde yerleştirildiğinden, yüzey düzlem denklemleri arasında bir ilişki olacaktır. Bu düzlemlerin denklemlerinin genel halleri bulunarak, bu genel halleri içeren kümenin maksimumu alındığında bu cisimler sınırlandırılacaklardır.

## 2.3 $\mathbb{R}^3$ ün İzometri Grubu

Geometrik çalışmalar genellikle çeşitli uzaylardaki geometrik objelerin dönüşümleri üzerinedir. Bu dönüşümler ile grup yapısı oluşturulabilir. Bu grupların çoğu ise ilgili uzaydaki simetriler veya izometrilerden oluşur. Üzerinde bulunma, arada olma, eş olma, açı ölçümü veya uzaklıklar gibi geometrik özellikleri koruyor olmalarından dolayı izometri grupları ayrı bir önem teşkil eder(Martin, G.E., 2008). İlerleyen bölümlerde bahsedilecek olan Katalan Cisimlerin metrikleri ile döşenmiş analitik 3- uzayın izometri grupları, katalan cisimlerin simetrilerinden yararlanarak, analitik olarak bulunacak ve alışılmış Öklid metriğine göre olan izometri grubuyla karşılaştırılacaktır. Bu bağlamda analitik 3-uzayda izometri ve simetri grupları ile ilgili bilgiler hatırlatılarak bu bölüm bitirilecektir.

$\mathbb{P}$ noktalar kümesi, $\mathbb{L}$ doğrular kümesi $d$ herhangi uzaklık fonksiyonu olmak üzere $\mathcal{M} = [\mathbb{P}, \mathbb{L}, d]$ metrik geometrisi verilsin. $f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$ dönüşümü

$$\forall A, B \in \mathbb{P}, d(A, B) = d(f(A), f(B))$$

özelliğini sağlıyorsa $f$ dönüşümüne izometri denir. Yani izometriler uzaklığı koruyan dönüşümlerdir. Grup teoride, izometri grubu, genellikle o uzayda ki matematiksel objelerin simetrilerinden ve öteleme dönüşümlerinden oluşan küme ile temsil edilir. $\mathcal{M}$ metrik geometrisinde bir $F$ şeklinin simetrisi, $f(F) = F$ özelliğini sağlayan $f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$ izometri dönüşümüdür.

Martin, 1997 kaynağındaki tanımlara sadık kalınarak $\mathbb{R}^3$ deki izometriler aşağıdaki gibi özetlenebilir.

◦ Her$X$ noktası için $i(X) = X$ ise $i$ özdeşlik dönüşümüdür.

◦ Her $\alpha$ izometrisi bir nokta kümesini sabit bırakıyorsa, $\alpha$ izometrisine ilgili nokta kümesinin bir simetrisi denir.

◦ $\sigma_\triangle$ dönüşümü $\Delta$ bir düzlemi üzerindeki noktalar için $\sigma_\triangle(X) = X$ olarak ve $\Delta$ düzlemi üzerinde olmayan noktalar içinse $XY$ doğru parçasının orta dikmesi $\Delta$ düzlemi olmak üzere $\sigma_\triangle(X) = Y$ olarak tanımlanırsa bu dönüşüme yansıma denir.

◦ $\Gamma$ ve $\Delta$ düzlemlerinin arakesit doğrusu $l$ olmak üzere $\sigma_\Gamma\sigma_\Delta$ dönüşümüne $l$ ekseninde dönme adı verilir.

◦ $\Gamma$ ve $\Delta$ kesişen iki düzlem ve bunlara dik olan düzlem $\Pi$ olmak üzere $\sigma_\Pi\sigma_\Gamma\sigma_\Delta$ dönüşümüne $\Gamma$, $\Delta$, $\Pi$ düzlemlerinin ortak noktasına ilişkin dönme yansıması denir.

◦ $M$, $XY$ nin ortak noktası olmak üzere tüm $X$ noktaları için $\sigma_M(X) = Y$ şeklinde tanımlı $\sigma_M$ dönüşümüne $M$ noktasına göre inversiyon denir. Ayrıca $\sigma_M$ ye nokta yansıması da denir.

◦ $\Gamma$, $\Delta$ kesişen iki düzlem ve $M$ düzlemlerin ortak noktalarından biri olmak üzere $\sigma_M\sigma_\Gamma\sigma_\Delta$ dönüşümüne dönme inversiyonu adı verilir. $\Gamma$, $\Delta$ düzlemleri paralel ise $\sigma_\Gamma\sigma_\Delta$ dönüşümüne $\Gamma$, $\Delta$ nın ortak dik doğruları boyunca bir öteleme denir.

$\mathbb{R}^3$ de bu dönüşümlerin oluşturduğu küme, fonksiyonlarda bileşke işlemi ile birlikte izometri grubunu oluşturur.

Octahedral simetri grubu dönme, yansıma (düzleme ve noktaya göre) ve dönme ve yansımanın bileşkesi olan 48 dönüşüm içermektedir. Küp, octahedron, cuboctahedron çokyüzlüleri octahedral simetriye sahip çokyüzlülerden bazılarıdır. Octahedral grup $O_h$ ile gösterilir ve sahip olduğu dönüşümler aşağıda özetlenmiştir.

◦ Birim

◦ 90° derecelik 6 dönme

- 120° derecelik 8 dönme
- 180° derecelik 9 dönme
- 90° derecelik 6 dönme yansıma
- 60° derecelik 8 dönme yansıma
- 9 yansıma
- inversiyon

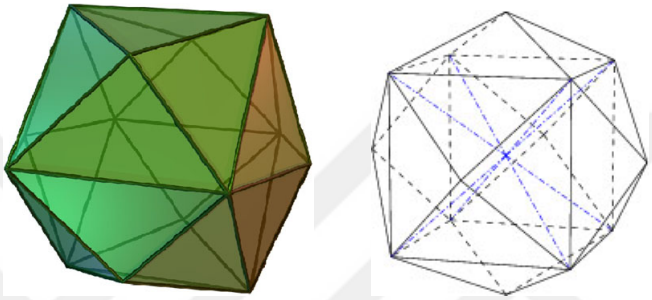
Icosahedral simetri grubu dönme, yansıma (düzleme ve noktaya göre) ve dönme ve yansımanın bileşkesi olan 120 dönüşüm içermektedir. Dodecahedron ve icosahedron icosahedral simetri grubuna sahip çokyüzlülerden bazılarıdır. Icosahedral grup $I_h$ ile gösterilir ve sahip olduğu dönüşümler aşağıda özetlenmiştir.

- Birim
- 72° derecelik 12 dönme
- 144° derecelik 12 dönme
- 120° derecelik 20 dönme
- 180° derecelik 15 dönme
- 108° derecelik 12 dönme yansıma
- 36° derecelik 12 dönme yansıma
- 60° derecelik 20 dönme yansıma
- 15 yansıma
- inversiyon

# 3. TETRAKİS HEXAHEDRON UZAYI

## 3.1 Tetrakis Hexahedron Metriği ve Özellikleri

Tetrakis Hexahedron, ikiz kenar üçgenlerin birleşmesinden oluşan 24 yüzlü, truncated octahedronun duali olan bir şekildir. Toplamda 14 köşe ve 36 ayrıta sahiptir (Şekil 3.1).



Şekil 3.1 Tetrakis Hexahedron ve Kübün kleetopu

Ayrıca tetrakis hexahedron 48 tane simetriye sahip olup, simetri grubu $O_h$ ile gösterilir. En küçük kenar uzunluğu 1 birim olup, yüzey alanı $S = \frac{16}{3}\sqrt{5}br^2$ hacmi ise $V = \frac{32}{9}\ br^3$dür. Tetrakis hexahedron, kübün yüzeyi üzerine bir nokta eklenerek oluşmuş kübün kleetopu olan bir yapıdır (Şekil 3.1).

Birim küresi tetrakis hexahedron olan uzaklık fonksiyonu $d_{TH}$ ile gösterilir ve bu uzaklık fonksiyonunun metrik aksiyomlarını sağladığı ve bazı özellikleri (Gelişgen ve Çolak, 2015) kaynağından verilmektedir.

**Tanım 3.1** *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\mathbb{R}^3$de iki farklı nokta olsun.*

$$d_{TH}(P_1, P_2) = \left(\sqrt{3} - 1\right) \max \left\{ \begin{array}{c} |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, \\ |x_1 - x_2| + |z_1 - z_2|, \\ |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| \end{array} \right\} + \left(2 - \sqrt{3}\right) \max \left\{ \begin{array}{c} |x_1 - x_2|, \\ |y_1 - y_2|, \\ |z_1 - z_2| \end{array} \right\}$$

*şeklinde tanımlanan $d_{TH} : \mathbb{R}^3 x\ \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonuna analitik 3-uzayda $P_1$ ve $P_2$ noktaları arasındaki Tetrakis Hexahedron uzaklık fonksiyonu denir.*

Ayrıca $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\text{mid}(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha + \beta + \gamma - \max\{\alpha, \beta, \gamma\} - \min\{\alpha, \beta, \gamma\}$$

şeklinde tanımlanan mid : $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna orta değer fonksiyonu adı verilsin.

Buna göre $P_1 = (x_1, y_{1,} z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere $P_1$ ve $P_2$ noktaları arasındaki tetrakis hexahedron uzaklığı

$d_{TH}(P_1, P_2)$=max $\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}$+$\left(\sqrt{3} - 1\right)$ mid $\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}$

şeklinde de verilebilir

**Yardımcı Teorem 3.1** *$P_1 = (x_1, y_{1,} z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\mathbb{R}^3$de iki farklı nokta olsun. Bu takdirde*

$$\begin{aligned}
d_{TH}(P_1, P_2) &\geq \left(\sqrt{3} - 1\right)(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) + \left(2 - \sqrt{3}\right)|x_1 - x_2| \\
&= |x_1 - x_2| + \left(\sqrt{3} - 1\right)|y_1 - y_2| \\
d_{TH}(P_1, P_2) &\geq \left(\sqrt{3} - 1\right)(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) + \left(2 - \sqrt{3}\right)|y_1 - y_2| \\
&= |y_1 - y_2| + \left(\sqrt{3} - 1\right)|x_1 - x_2| \\
d_{TH}(P_1, P_2) &\geq \left(\sqrt{3} - 1\right)(|x_1 - x_2| + |z_1 - z_2|) + \left(2 - \sqrt{3}\right)|x_1 - x_2| \\
&= |x_1 - x_2| + \left(\sqrt{3} - 1\right)|z_1 - z_2| \\
d_{TH}(P_1, P_2) &\geq \left(\sqrt{3} - 1\right)(|x_1 - x_2| + |z_1 - z_2|) + \left(2 - \sqrt{3}\right)|z_1 - z_2| \\
&= |z_1 - z_2| + \left(\sqrt{3} - 1\right)|x_1 - x_2| \\
d_{TH}(P_1, P_2) &\geq \left(\sqrt{3} - 1\right)(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|) + \left(2 - \sqrt{3}\right)|y_1 - y_2| \\
&= |y_1 - y_2| + \left(\sqrt{3} - 1\right)|z_1 - z_2| \\
d_{TH}(P_1, P_2) &\geq \left(\sqrt{3} - 1\right)(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|) + \left(2 - \sqrt{3}\right)|z_1 - z_2| \\
&= |z_1 - z_2| + \left(\sqrt{3} - 1\right)|y_1 - y_2|
\end{aligned}$$

*olur.*

**İspat** *$P_1 = (x_1, y_{1,} z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ analitik 3-uzayda iki nokta olsun. $a = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}, b = \text{mid}\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}$ ve $c = \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}$ olmak üzere $a \geq b \geq c$ ve $1 \geq \left(\sqrt{3} - 1\right)$ dir. O halde yardımcı teoremin ifadesinin ispatı açıktır. Açıkça,*

$$\begin{aligned}
a + \left(\sqrt{3} - 1\right) b &\geq a + \left(\sqrt{3} - 1\right) b \\
a + \left(\sqrt{3} - 1\right) b &\geq b + \left(\sqrt{3} - 1\right) a \\
a + \left(\sqrt{3} - 1\right) b &\geq a + \left(\sqrt{3} - 1\right) c \\
a + \left(\sqrt{3} - 1\right) b &\geq b + \left(\sqrt{3} - 1\right) c \\
a + \left(\sqrt{3} - 1\right) b &\geq c + \left(\sqrt{3} - 1\right) a \\
a + \left(\sqrt{3} - 1\right) b &\geq c + \left(\sqrt{3} - 1\right) b
\end{aligned}$$

*olur.*

**Önerme 3.1** *Analitik 3-uzayda $d_{TH}$ uzaklık fonksiyonu metriktir ve bu metrikle donatılmış uzayın birim küresi tetrakis hexahedrondur.*

**İspat** *$d_{TH}$:$\mathbb{R}^3\times\ \mathbb{R}^3\ \rightarrow\ \mathbb{R}$ tetrakis hexahedron uzaklık fonksiyonu ve $P_1$=$(x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ve $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ $\mathbb{R}^3$de üç farklı nokta olsun. $d_{TH}$ uzaklık fonksiyonu her $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^3$ için aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa $\mathbb{R}^3$de bir metriktir.*

$$\begin{aligned}
&\textbf{\textit{M1)}} \quad d_{TH}(P_1, P_2) \geq 0 \text{ ve } d_{TH}(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2\\
&\textbf{\textit{M2)}} \quad d_{TH}(P_1, P_2) = d_{TH}(P_2, P_1)\\
&\textbf{\textit{M3)}} \quad d_{TH}(P_1, P_3) \leq d_{TH}(P_1, P_2) + d_{TH}(P_2, P_3).
\end{aligned}$$

***M1)*** *Mutlak değer daima pozitif veya sıfır olacağından dolayı mutlak değerlerin toplamının maksimumu ve minimumu da pozitiftir veya sıfırdır. Böylece,*

$$\begin{aligned}
d_{TH}(P_1, P_2) = \quad & \left(\sqrt{3}-1\right) \max \left\{ \begin{array}{r} |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, |x_1 - x_2| + |z_1 - z_2|, \\ |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| \end{array} \right\} \\
& + \left(2-\sqrt{3}\right) \max \{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\} \geq 0
\end{aligned}$$

*olur. Yani $d_{TH}$ pozitif tanımlıdır. Eğer,*

$$\begin{aligned}
d_{TH}(P_1, P_2) \ &= \left(\sqrt{3}-1\right) \max \left\{ \begin{array}{c} |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, |x_1 - x_2| + |z_1 - z_2|, \\ |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| \end{array} \right\} \\
&\quad + \left(2-\sqrt{3}\right) \max \{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\} = 0 \\
&\Longrightarrow |x_1 - x_2| = 0, |y_1 - y_2| = 0, |z_1 - z_2| = 0 \\
&\Longrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2 \Longrightarrow P_1 = P_2
\end{aligned}$$

*olur.*

*Tersine $P_1 = P_2 \Longrightarrow |x_1 - x_2| = 0, |y_1 - y_2| = 0, |z_1 - z_2| = 0 \Longrightarrow d_{TH}(P_1, P_2) = 0$ olur.*

***M2)*** *Mutlak değerden dolayı $d_{TH}(P_1, P_2) = d_{TH}(P_2, P_1)$ olcağından dolayı açıkça $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|, |y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|, |z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$ olur. Yani $d_{TH}$ simetriktir.*

***M3)*** *$P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ve $P_3 = (x_3, y_3, z_3) \in \mathbb{R}^3$ olsun.*

$$d_{TH}(P_1, P_3) \leq d_{TH}(P_1, P_2) + d_{TH}(P_2, P_3)$$

*olduğunu göstermeliyiz.*

$$
\begin{aligned}
& d_{TH}(P_1,P_3) \\
= \;& \left(\sqrt{3}-1\right)\max\{|x_3-x_1|+|y_3-y_1|\,,|x_3-x_1|+|z_3-z_1|\,,|y_3-y_1|+|z_3-z_1|\} \\
& +\left(2-\sqrt{3}\right)\max\{|x_3-x_1|\,,|y_3-y_1|\,,|z_3-z_1|\} \\
= \;& \left(\sqrt{3}-1\right)\max\{|x_3-x_2+x_2-x_1|+|y_3-y_2+y_2-y_1|\,, \\
& |x_3-x_2+x_2-x_1|+|z_3-z_2+z_2-z_1|\,,|y_3-y_2+y_2-y_1|+|z_3-z_2+z_2-z_1|\} \\
& +\left(2-\sqrt{3}\right)\max\{|x_3-x_2+x_2-x_1|\,,|y_3-y_2+y_2-y_1|\,,|z_3-z_2+z_2-z_1|\} \\
\leq \;& \left(\sqrt{3}-1\right)\max\{|x_3-x_2|+|x_2-x_1|+|y_3-y_2|+|y_2-y_1|\,, \\
& |x_3-x_2|+|x_2-x_1|+|z_3-z_2|+|z_2-z_1|\,,|y_3-y_2|+|y_2-y_1|+|z_3-z_2|+|z_2-z_1|\} \\
& +\left(2-\sqrt{3}\right)\max\{|x_3-x_2|+|x_2-x_1|\,,|y_3-y_2|+|y_2-y_1|\,,|z_3-z_2|+|z_2-z_1|\} \\
\leq \;& \left(\sqrt{3}-1\right)\max\{|x_1-x_2|+|y_1-y_2|\,,|x_1-x_2|+|z_1-z_2|\,,|y_1-y_2|+|z_1-z_2|\} \\
& +\left(2-\sqrt{3}\right)\max\{|x_1-x_2|\,,|y_1-y_2|\,,|z_1-z_2|\}+ \\
& \left(\sqrt{3}-1\right)\max\{|x_2-x_3|+|y_2-y_3|\,,|x_2-x_3|+|z_2-z_3|\,,|y_2-y_3|+|z_2-z_3|\} \\
& +\left(2-\sqrt{3}\right)\max\{|x_2-x_3|\,,|y_2-y_3|\,,|z_2-z_3|\} \\
= \;& X
\end{aligned}
$$

*dir. Burada yardımcı teorem 2.1 den dolayı*

$$
\begin{aligned}
d_{TH}(P_1,P_2) \geq \;& \left(\sqrt{3}-1\right)\max\{|x_1-x_2|+|y_1-y_2|\,,|x_1-x_2|+|z_1-z_2|\,,|y_1-y_2|+|z_1-z_2|\} \\
& +\left(2-\sqrt{3}\right)\max\{|x_1-x_2|\,,|y_1-y_2|\,,|z_1-z_2|\} \\
d_{TH}(P_2,P_3) \geq \;& \left(\sqrt{3}-1\right)\max\{|x_2-x_3|+|y_2-y_3|\,,|x_2-x_3|+|z_2-z_3|\,,|y_2-y_3|+|z_2-z_3|\} \\
& +\left(2-\sqrt{3}\right)\max\{|x_2-x_3|\,,|y_2-y_3|\,,|z_2-z_3|\}
\end{aligned}
$$

*olur. O halde* $X \leq d_{TH}(P_1,P_2)+d_{TH}(P_2,P_3)$ *bulunur. Buna göre*

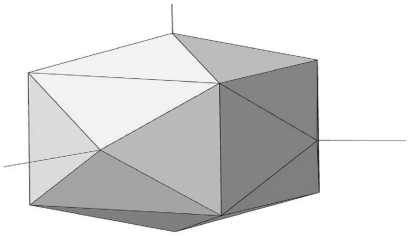
$$d_{TH}(P_1,P_3) \leq d_{TH}(P_1,P_2)+d_{TH}(P_2,P_3)$$

*elde edilir. Yani tetrakis hexahedron uzaklık fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar.*

*Sonuç olarak, tetrakis hexahedron uzaklık fonksiyonu metriktir. Ayrıca bu metrikle döşenmiş analitik 3-uzayda orijinden 1 birim tetrakis hexahedron uzaklığındaki noktaların kümesi*

$$S_{TH}=\{(x,y,z):\left(\sqrt{3}-1\right)\max\{|x|+|y|\,,|x|+|z|\,,|y|+|z|\}+\left(2-\sqrt{3}\right)\max\{|x|\,,|y|\,,|z|\}=1\}$$

*olup, bu noktaların geometrik yeri şekil3.2 de görüldüğü üzere tetrakis hexahedron bulunur.*

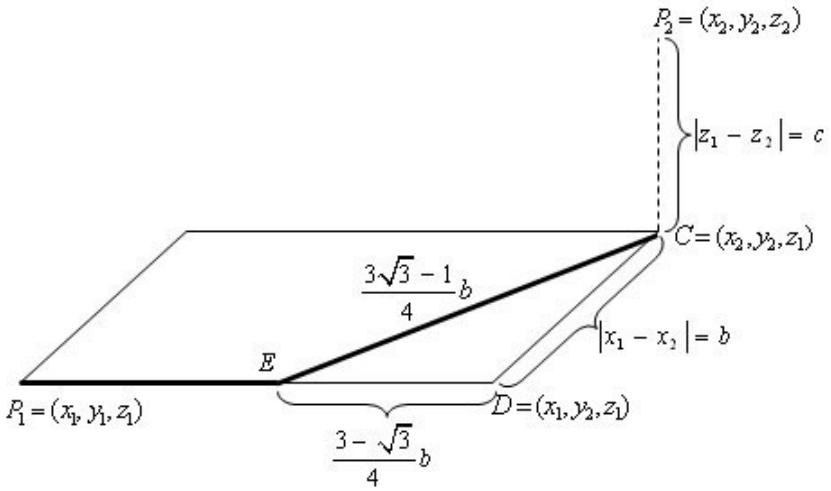


Şekil 3.2 Tetrakis hexahedronun koordinat sistemine yerleştirilmesi

Tetrakis hexahedron uzaklık fonksiyonu

$$d_{TH}(P_1,P_2) = \max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|,|z_1-z_2|\} + \left(\sqrt{3}-1\right) \mid \{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|,|z_1-z_2|\}$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre $P_1$ ve $P_2$ noktaları arasındaki uzaklık $\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|,|z_1-z_2|\}$ nin maksimum olanı ile orta değerin $\left(\sqrt{3}-1\right)$ katının toplamıdır. $P_1$ noktasından geçen ve $\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|,|z_1-z_2|\}$ nin maksimum olanına ilişkin koordinat eksenine paralel olan doğru $l_1$ olsun. $\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|,|z_1-z_2|\}$ büyüklüklerinin orta değeri ve minimum olanına ilişkin eksenlere paralel doğrularda $l_2$ ve $l_3$ ile gösterilsin. Geometrik olarak $P_1$ noktasından $P_2$ noktasına olan yol, biri $l_1$ doğrusuna paralel diğeri ise $l_2$ doğrusu ile $arctan(\frac{3-\sqrt{3}}{4})$ açı yapan iki doğru parçasının birleşimidir. Böylece $P_1$ ve $P_2$ noktaları arasındaki tetrakis hexahedron uzaklığı bu iki doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamıdır (Şekil3.3).




Şekil 3.3 Tetrakis hexahedron yolu

**Sonuç 3.1** *$\mathbb{R}^3_{TH}$ de $(x_0, y_0, z_0)$ merkezli $r$ yarıçaplı küre*

$$\left(\sqrt{3}-1\right)\max\left\{|x-x_0|+|y-y_0|, |x-x_0|+|z-z_0|, |y-y_0|+|z-z_0|\right\} + \left(2-\sqrt{3}\right)\max\left\{|x-x_0|, |y-y_0|, |z-z_0|\right\} = r$$

*veya*

$$\max\left\{|x-x_0|, |y-y_0|, |z-z_0|\right\} + \left(\sqrt{3}-1\right)\text{mid}\left\{|x-x_0|, |y-y_0|, |z-z_0|\right\} = r$$

*denklemi ile ifade edilen köşe noktaları $(0,0,r)$ ve $(\frac{r}{\sqrt{3}}, \frac{r}{\sqrt{3}}, \frac{r}{\sqrt{3}})$ noktalarının herbir bileşenin tüm muhtemel $+/-$ işaret değişiklikleri ve üç bileşenin tüm muhtemel permütasyonlarının $(x_0, y_0, z_0)$ ötelenmişlerinden oluşan 24 yüzlü bir çokyüzlü olan tetrakis hexahedrondur.*

Bu bölümün diğer kısmında sıkça kullanılacağından dolayı merkezil birim kürenin köşe noktaları aşağıdaki şekilde isimlendirilmiştir.
$A_0 = (0,0,r)$ , $A_1 = (0,0,-r)$ , $A_2 = (r,0,0)$ , $A_3 = (-r,0,0)$ , $A_4 = (0,r,0)$ , $A_5 = (0,-r,0)$ , $A_6 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}r, \frac{\sqrt{3}}{3}r, \frac{\sqrt{3}}{3}r\right)$ , $A_7 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}r, \frac{\sqrt{3}}{3}r, -\frac{\sqrt{3}}{3}r\right)$, $A_8 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}r, -\frac{\sqrt{3}}{3}r, \frac{\sqrt{3}}{3}r\right)$ , $A_9 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}r, -\frac{\sqrt{3}}{3}r, -\frac{\sqrt{3}}{3}r\right)$, $A_{10} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}r, \frac{\sqrt{3}}{3}r, \frac{\sqrt{3}}{3}r\right)$ , $A_{11} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}r, \frac{\sqrt{3}}{3}r, -\frac{\sqrt{3}}{3}r\right)$ , $A_{12} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}r, -\frac{\sqrt{3}}{3}r, \frac{\sqrt{3}}{3}r\right)$ , $A_{13} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}r, -\frac{\sqrt{3}}{3}r, -\frac{\sqrt{3}}{3}r\right)$.

Aşağıdaki önerme $\mathbb{R}^3_{TH}$ deki noktalar arasındaki Öklidyen ve tetrakis hexahedron uzaklıkları arasındaki geçiş bağıntısını ifade etmektedir.

**Önerme 3.2** *3 boyutlu analitik uzayda $P_1$ ve $P_2$ noktalarından geçen doğru $l$ olsun. Eğer $l$ doğrusunun doğrultu vektörü $(p,q,r)$ ve*

$$\mu_{P_1P_2} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\max\left\{|p|+|q|, |p|+|r|, |q|+|r|\right\} + \left(2-\sqrt{3}\right)\max\left\{|p|, |q|, |r|\right\}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

*ise $d_{TH}(P_1,P_2) = \mu_{P_1P_2} d_E(P_1,P_2)$ dir.*

**İspat** *$P_1 = (x_1,y_1,z_1)$ ve $P_2 = (x_2,y_2,z_2)$, $\mathbb{R}^3$ deki herhangi iki nokta olsun. $P_1$ ve $P_2$ den geçen doğru $l$ ise*

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} = \lambda$$

*olur. $l$ doğrusunun doğrultu vektörü $(p,q,r)$ olduğundan $(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1) = \lambda(p,q,r)$ dir. Buna göre*

$$d_{TH}(P_1,P_2) = \lambda\left(\left(\sqrt{3}-1\right)\max\left\{|p|+|q|, |p|+|r|, |q|+|r|\right\} + \left(2-\sqrt{3}\right)\max\left\{|p|, |q|, |r|\right\}\right)$$

*ve*

$$d_E(P_1, P_2) = \lambda\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$$

*olduğundan dolayı*

$$\frac{d_{TH}(P_1, P_2)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\max\left\{|p|+|q|, |p|+|r|, |q|+|r|\right\} + \left(2-\sqrt{3}\right)\max\left\{|p|, |q|, |r|\right\}} = \frac{d_E(P_1, P_2)}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

*bulunur. Bu ise önermenin ifadesindeki sonucu verir.*

Yukarıdaki önerme herhangi bir doğru boyunca $d_{TH}(P_1, P_2)$ uzaklığının aynı doğru boyunca olan Öklidyen uzaklığın pozitif katı olduğu gösterir. Buna göre aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

**Sonuç 3.2** $\mathbb{R}^3$ *de A,B,X doğrudaş üç farklı nokta ise*

$$d_E(A, X) = d_E(B, X) \iff d_{TH}(A, X) = d_{TH}(B, X)$$

*olur.*

**Sonuç 3.3** *3 boyutlu analitik uzayda A, B, X doğrudaş üç farklı nokta ise*

$$d_{TH}(A, X)/d_{TH}(B, X) = d_E(A, X)/d_E(B, X)$$

*olur.*

Bu sonuca göre bir doğru boyunca olan $d_E$, $d_{TH}$ uzaklıklarının oranı aynıdır.

## 3.2 Tetrakis Hexahedron İzometri Grubu

Tetrakis hexahedron 48 tane simetriye sahip olup, simetri grubu $O_h$ ile gösterilir. Bu bölümde $d_{TH}$ metriği ile donatılmış analitik 3-uzayın $(\mathbb{R}^3_{TH})$ izometri grubu araştırılacaktır. Bunun için öncelikle hangi Öklidyen izometrilerin tetrakis hexahedron uzaklığını koruduğu tespit edilecek, daha sonra ise bu izometriler dışında başka izometrilerin olmadığı gösterilecektir.

$\alpha : \mathbb{R}^3_{TH} \longrightarrow \mathbb{R}^3_{TH}$ dönüşüm olmak üzere her $X, Y \in \mathbb{R}^3_{TH}$ için

$$d_{TH}(X, Y) = d_{TH}(\alpha(X), \alpha(Y))$$

ise $\alpha$ dönüşümü $\mathbb{R}^3_{TH}$ de bir izometridir.

Aşağıda ifade edilen önermeler ile hangi Öklidyen izometrilerin tetrakis hexahedron uzayında da izometri oldukları verilmektedir.

**Önerme 3.3** *$\mathbb{R}^3$de her Öklidyen öteleme $\mathbb{R}^3_{TH}$ ün bir izometrisidir.*

**İspat** *$A=(a_1,a_2,a_3)$, $X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ olmak üzere $T_A:\mathbb{R}^3_{TH}\to\mathbb{R}^3_{TH}$, $T_A(X)=A+X$ olacak şekilde reel uzayda bir öteleme olsun. $P_1=(x_1,y_1,z_1),P_2=(x_2,y_2,z_2)\in\mathbb{R}^3_{TH}$ için*

$$\begin{aligned} d_{TH}(T_A(P_1),T_A(P_2)) &= (\sqrt{3}-1)\max\left\{\begin{array}{c}|a_1+x_1-a_1-x_2|+|a_2+y_1-a_2-y_2|,\\ |a_1+x_1-a_1-x_2|+|a_3+z_1-a_3-z_2|,\\ |a_2+y_1-a_2-y_2|+\ |a_3+z_1-a_3-z_2|\end{array}\right\}\\ &\quad+(2-\sqrt{3})max\left\{\begin{array}{r}|a_1+x_1-a_1-x_2|,\ |a_2+y_1-a_2-y_2|,\\ |a_3+z_1-a_3-z_2|\end{array}\right\}\\ &= (\sqrt{3}-1)\max\left\{\begin{array}{r}|x_1-x_2|+|y_1-y_2|,|x_1-x_2|+|z_1-z_2|,\\ |y_1-y_2|+|z_1-z_2|\end{array}\right\}\\ &\quad+(2-\sqrt{3})\max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|,|z_1-z_2|\}\\ &= d_{TH}(P_1,P_2)\end{aligned}$$

*olur. Bundan dolayı $T_A$ bir izometridir.*

Yukarıdaki önermeden dolayı $\mathbb{R}^3_{TH}$ uzayında dönme ve yansımaları bulmak için orijinden geçen düzlemleri düşünmek yeterli olacaktır.

**Önerme 3.4** *$\mathbb{R}^3_{TH}$ de $\Delta=ax+by+cz=0$ düzlemine göre yansımanın izometri olması için gerek ve yeter koşul düzlemin doğrultu vektörü $(a,b,c)$ nin*

$D=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,0),(-1,1,0),(1,0,1),(1,0,-1),(0,1,1),(0,1,-1)\}$

*elemanlarına paralel olmasıdır.*

**İspat** *$\Delta:ax+by+cz=0$ birim normali $(a,b,c)$ olan düzlem olmak ü zere $\sigma_\Delta:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ Öklidyen yansıma*

$$\sigma_\Delta(x,y,z)=((1-2a^2)x-2aby-2acz,-2abx+(1-2b^2)y-2bcz,-2acx-2bcy+(1-2c^2)z)$$

*biçiminde tanımlanır.*

*Tetrakis hexahedronun köşe noktaları* $A_2 = (1,0,0), A_4 = (0,1,0), A_0 = (0,0,1)$ *konum vektörü olarak alındığında* $\mathbb{R}_{TH}$ *ün bir tabanı ve taban vektörlerini koruyan bir yansıma izometri olacağından bu tabanı koruyan yansımaları tespit etmek izometrileri bulmak için yeterli olacaktır. Öklidyen yansımada taban vektörleri*

$$\sigma_\Delta(1,0,0) = (1-2a^2, -2ab, -2ac)$$
$$\sigma_\Delta(0,1,0) = (-2ab, 1-2b^2, -2bc)$$
$$\sigma_\Delta(0,0,1) = (-2ac, -2bc, 1-2c^2)$$

*olur. Açıkça* $d_{TH}(O,A_2) = d_{TH}(O,A_4) = d_{TH}(O,A_0) = 1$ *dir. Eğer yansıma* $d_{TH}$ *uzaklığını koruyor ise taban vektörlerinin yansıma altındaki görüntüleri için uzaklık korunmalıdır. Yani*

$$d_{TH}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(A_2)) = d_{TH}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(A_4)) = d_{TH}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(A_0)) = 1$$

*olmalıdır. Böylece*

$$\begin{aligned} d_{TH}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(A_2)) = {} & \left(\sqrt{3}-1\right)\max\left\{|1-2a^2|+|2ab|, |1-2a^2|+|2ac|, |2ab|+|2ac|\right\} \\ & + \left(2-\sqrt{3}\right)\max\left\{|1-2a^2|, |2ab|, |2ac|\right\} = 1 \\ d_{TH}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(A_4)) = {} & \left(\sqrt{3}-1\right)\max\left\{|2ab|+|1-2b^2|, |2ab|+|2bc|, |1-2b^2|+|2bc|\right\} \\ & + \left(2-\sqrt{3}\right)\max\left\{|2ab|, |1-2b^2|, |2bc|\right\} = 1 \\ d_{TH}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(A_0)) = {} & \left(\sqrt{3}-1\right)\max\left\{|2ac|+|2bc|, |2ac|+|1-2c^2|, |2bc|+|1-2c^2|\right\} \\ & + \left(2-\sqrt{3}\right)\max\left\{|2ac|, |2bc|, |1-2c^2|\right\} = 1 \end{aligned}$$

*denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözülürse;*

$$(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0),(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0),(1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2}),$$
$$(1/\sqrt{2},0,-1/\sqrt{2}),(0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}),(0,1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$$

*sonuçları bulunur.*

*Tersine* $\sigma_\Delta(X) = Y$ *iken* $OX$ *ve* $OY$ *vektörlerinin doğrultu vektörleri sırasıyla* $(p_1,q_1,r_1)$ *ve* $(p_2,q_2,r_2)$ *ise önerme 2.2 den dolayı* $d_{TH}(O,X) = d_{TH}(O,Y)$ *olması için* $\mu_{OX} = \mu_{OY}$ *olduğunu göstermek yeterlidir.*

*Buna göre aşağıdaki liste* $(p_2,q_2,r_2)$ *doğrultusunun ilgili yansımaya göre* $(p_1,q_1,r_1)$ *cinsinden karşılığını vermektedir.*

| $\Delta$ | $(p_2,q_2,r_2)$ | $\Delta$ | $(p_2,q_2,r_2)$ |
|---|---|---|---|
| $x=0$ | $(-p_1,q_1,r_1)$ | $x+z=0$ | $(-2r_1,2q_1,-2p_1)$ |
| $y=0$ | $(p_1,-q_1,r_1)$ | $x-z=0$ | $(2r_1,2q_1,2p_1)$ |
| $z=0$ | $(p_1,q_1,-r_1)$ | $y+z=0$ | $(2p_1,-2r_1,-2q_1)$ |
| $x+y=0$ | $(-2q_1,-2p_1,2r_1)$ | $y-z=0$ | $(2p_1,2r_1,2q_1)$ |
| $x-z=0$ | $(2q_1,2p_1,2r_1)$ | | |

*Böylelikle* $\mu_{OX} = \mu_{OY}$ *olduğu kolaylıkla görülebilir.*

**Sonuç 3.4** *Orijinden geçen düzlemlere göre izometrik yansımalarının kümesi $S_{TH}$ aşağıda denklemleri verilen 9 tane Öklidyen yansımadan oluşur. Bunlar*

$$\{x=0, y=0, z=0, x+y=0, x-y=0, x+z=0, x-z=0, y+z=0, y-z=0\}.$$

Şekil3.4 deki tablo birim kürenin köşe noktalarının ilgili yansıma dönüşümleri altındaki görüntülerini vermektedir.

| Yansıma Düzlemleri | (1,0,0) | (0,1,0) | (0,0,1) | (1/√2,1/√2,0) | (1/√2,0,1/√2) | (0,1/√2,1/√2) | (1/√2,-1/√2,0) | (1/√2,0,-1/√2) | (0,1/√2,-1/√2) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A0 | A0 | A0 | A1 | A0 | A3 | A5 | A0 | A2 | A4 |
| A1 | A1 | A1 | A0 | A1 | A2 | A4 | A1 | A3 | A5 |
| A2 | A3 | A2 | A2 | A5 | A1 | A2 | A4 | A0 | A2 |
| A3 | A2 | A13 | A3 | A4 | A0 | A3 | A5 | A1 | A3 |
| A4 | A4 | A5 | A4 | A3 | A4 | A1 | A2 | A4 | A0 |
| A5 | A5 | A4 | A5 | A2 | A5 | A0 | A3 | A5 | A1 |
| A6 | A10 | A8 | A7 | A12 | A11 | A9 | A6 | A6 | A6 |
| A7 | A11 | A9 | A6 | A13 | A7 | A7 | A7 | A10 | A8 |
| A8 | A12 | A6 | A9 | A8 | A13 | A8 | A10 | A8 | A7 |
| A9 | A13 | A7 | A8 | A9 | A9 | A6 | A11 | A12 | A9 |
| A10 | A6 | A12 | A11 | A10 | A10 | A13 | A8 | A7 | A10 |
| A11 | A7 | A13 | A10 | A11 | A6 | A11 | A9 | A11 | A12 |
| A12 | A8 | A10 | A13 | A6 | A12 | A12 | A12 | A9 | A11 |
| A13 | A9 | A11 | A12 | A7 | A8 | A10 | A13 | A13 | A13 |

Şekil 3.4 $\mathbb{R}^3_{TH}$ de Yansıma Düzlemlerine Göre Köşe Noktaların Görüntüleri

**Önerme 3.5** *Orijinden geçen bir $l$ doğrusuna göre bir $r_\theta$ d önmesinin izometri olması için gerek ve yeter koşul*

$$D_1 = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$$
$$D_2 = \{(1,1,1),\ (-1,1,1),(1,-1,1),\ (1,1,-1)\}$$
$$D_3 = \{(1,1,0),\ (1,0,1),(0,1,1),\ (1,-1,0),\ (1,0,-1),\ (0,1,-1)\}$$

*ve*

$$R_1 = \{r_\theta \mid \theta \in \{\pi/2\,,\,\pi,3\pi/2\},\ dönme\ ekseninin\ doğrultu\ vektörü\ D_1\ in\ elemanı\}$$
$$R_2 = \{r_\theta \mid \theta \in \{2\pi/3\,,\,4\pi/3\},\ dönme\ ekseninin\ doğrultu\ vektörü\ D_2\ nin\ elemanı\}$$
$$R_3 = \{r_\theta \mid \theta = \pi,\ dönme\ ekseninin\ doğrultu\ vektörü\ D_3\ ün\ elemanı\}$$

*olmak üzere $r_\theta \in R_{TH} = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ olmasıdır.*

**İspat** *Bir $l$ doğrusunun birim doğrultusu $(p,q,r)$ olmak üzere, $l$ etrafında $r_\theta$ Öklidyen dönmenin matris formu;*

$$\begin{bmatrix} \cos\theta + p^2(1-\cos\theta) & pq(1-\cos\theta) - r\sin\theta & pr(1-\cos\theta) + q\sin\theta \\ pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta & \cos\theta + q^2(1-\cos\theta) & qr(1-\cos\theta) - p\sin\theta \\ pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta & qr(1-\cos\theta) + p\sin\theta & \cos\theta - r^2(1-\cos\theta) \end{bmatrix}$$

*şeklindedir. $l$ eksenindeki bir dönme , $l$ doğrusu boyunca kesişen iki düzlemin yansımalarının birleşimi olduğundan önerme 2.4 den $l$ doğrusunun doğrultu vektörleri* $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,1)$, $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,-1,0)$, $(1,0,-1)$, $(0,1,-1)$ *olarak alınabilir.*

$\mathbb{R}^3_{TH}$ *deki izometrik dönmelerin bulunması için , $d_{TH}$ birim küresinin kenarlarının uzunluklarını koruyan dönmelerin bulunması yeterlidir.*

$A_2=(1,0,0)$ $A_6=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $A_{10}=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olan $d_{TH}$ birim küresinin köşe noktaları ele alınsın. Buna göre*

$$
\begin{aligned}
r_\theta(A_2) &= (\cos\theta + p^2(1-\cos\theta), pq(1-\cos\theta)+r\sin\theta, pr(1-\cos\theta)-q\sin\theta)\\
r_\theta(A_6) &= [\tfrac{1}{\sqrt{3}}(\cos\theta + p^2(1-\cos\theta)+pq(1-\cos\theta)-r\sin\theta+pr(1-\cos\theta)+q\sin\theta),\\
&\quad \tfrac{1}{\sqrt{3}}[pq(1-\cos\theta)+r\sin\theta+\cos\theta+q^2(1-\cos\theta)+qr(1-\cos\theta)-p\sin\theta,\\
&\quad pr(1-\cos\theta)-q\sin\theta+qr(1-\cos\theta)+p\sin\theta+\cos\theta-r^2(1-\cos\theta)]\\
r_\theta(A_{10}) &= -\tfrac{1}{\sqrt{3}}(\cos\theta + p^2(1-\cos\theta)+pq(1-\cos\theta)-r\sin\theta+pr(1-\cos\theta)+q\sin\theta),\\
&\quad \tfrac{1}{\sqrt{3}}[pq(1-\cos\theta)+r\sin\theta+\cos\theta+q^2(1-\cos\theta)+qr(1-\cos\theta)-p\sin\theta,\\
&\quad pr(1-\cos\theta)-q\sin\theta+qr(1-\cos\theta)+p\sin\theta+\cos\theta-r^2(1-\cos\theta)]
\end{aligned}
$$

*bulunur. O halde $\theta\neq 0$ olmak üzere $d_{TH}(r_\theta(A_2),r_\theta(A_6))=1$ $ve$ $d_{TH}(r_\theta(A_6),r_\theta(A_{10}))=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ olmalıdır. Böylece,*

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \left|(pq(1-\cos\theta)+r\sin\theta)(1-\tfrac{\sqrt{3}}{3})-\tfrac{\left(\cos\theta+q^2(1-\cos\theta)\right)\sqrt{3}}{3}-\tfrac{(qr(1-\cos\theta)-p\sin\theta)\sqrt{3}}{3}\right|,\\
L_1 &= \left|(pr(1-\cos\theta)-q\sin\theta)(1-\tfrac{\sqrt{3}}{3})-\tfrac{(qr(1-\cos\theta)+p\sin\theta)\sqrt{3}}{3}-\tfrac{\left(\cos\theta-r^2(1-\cos\theta)\right)\sqrt{3}}{3}\right|,\\
M_1 &= \left|(\cos\theta+p^2(1-\cos\theta))(1-\tfrac{\sqrt{3}}{3})-\tfrac{(pq(1-\cos\theta)-r\sin\theta)\sqrt{3}}{3}-\tfrac{(pr(1-\cos\theta)+q\sin\theta)\sqrt{3}}{3}\right|,\\
K_2 &= \tfrac{2\sqrt{3}}{3}\left|pq(1-\cos\theta)+r\sin\theta\right|, L_2=\tfrac{2\sqrt{3}}{3}\left|(pr(1-\cos\theta)-q\sin\theta)\right|,\\
M_2 &= \tfrac{2\sqrt{3}}{3}\left|(\cos\theta+p^2(1-\cos\theta))\right|
\end{aligned}
$$

*olmak üzere;*

$$
\begin{aligned}
&d_{TH}(r_\theta(A_2),r_\theta(A_6))\\
&\quad=(\sqrt{3}-1)\max\{K_1+L_1,K_1+M_1,L_1+M_1\}+(2-\sqrt{3})\max\{K_1,L_1,M_1\}=1\\
&d_{TH}(r_\theta(A_6),r_\theta(A_{10}))\\
&\quad=(\sqrt{3}-1)\max\{K_{21}+L_2,K_2+M_2,L_2+M_2\}+(2-\sqrt{3})\max\{K_2,L_2,M_2\}=\tfrac{2\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}
$$

*elde edilir.*

*$l$ doğrusunun doğrultu vektörü (0,0,1) ise* $(p,q,r)$*= (0,0,1) olur.* $p,q,r$ *değerlerini* $d_{TH}(r_\theta(A_2),r_\theta(A_6))=1$ *ve* $d_{TH}(r_\theta(A_6),r_\theta(A_{10}))=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ *de yerine yazılırsa*

$$(\sqrt{3}-1)\max\left\{\begin{array}{c}\left|\cos\theta(1-\frac{\sqrt{3}}{3})+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right|+\left|\sin\theta(1-\frac{\sqrt{3}}{3})-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta\right| \\ \left|\sin\theta(1-\frac{\sqrt{3}}{3})-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta\right|+\frac{\sqrt{3}}{3},\left|\cos\theta(1-\frac{\sqrt{3}}{3})+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right|+\frac{\sqrt{3}}{3}\end{array}\right\}$$
$$+(2-\sqrt{3})\max\left\{\left|\sin\theta(1-\tfrac{\sqrt{3}}{3})-\tfrac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta\right|,\tfrac{\sqrt{3}}{3},\left|\cos\theta(1-\tfrac{\sqrt{3}}{3})+\tfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right|\right\}=1$$
$$(\sqrt{3}-1)\max\left\{\left|\tfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right|,\tfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(|\cos\theta|+|\sin\theta|\right),\tfrac{2\sqrt{3}}{3}|\cos\theta|\right\}$$
$$+(2-\sqrt{3})\max\left\{\left|\tfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right|,0,\tfrac{2\sqrt{3}}{3}|\cos\theta|\right\}=\tfrac{2\sqrt{3}}{3}$$

*elde edilir. Bu iki denklem çözülürse* $\theta=\pi/2,\ \theta=\pi,\ \theta=3\pi/2$ *olur.Buradan* $z$ *ekseni etrafındaki* $\theta=\pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2$ *radyanlık dönmeler* $\mathbb{R}^3_{TH}$ *ün bir izometrisidir. Benzer şekilde* $l$ *nin yön vektörü* $(0,1,0)$ *veya* $(1,0,0)$ *ise* $\theta=\pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2$ *olarak bulunur.*

*$l$ doğrusunun yön vektörü* $(1,1,1)$ *ise* $(p,q,r)=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$ *olur.* $p,q,r$ *değerleri* $d_{TH}(r_\theta(A_2),r_\theta(A_6))=1$ *ve* $d_{TH}(r_\theta(A_6),r_\theta(A_{10}))=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ *de yerine yazılırsa,*

$$K_1=\left|\tfrac{1}{\sqrt{3}}+\tfrac{2}{3}(1-\cos\theta)]-\cos\theta\right|,L_1=\left|\tfrac{1}{\sqrt{3}}-\tfrac{1}{3}(1-\cos\theta)+\tfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\right|$$
$$M_1=\left|\tfrac{1}{\sqrt{3}}[\tfrac{1}{3}(1-2\cos\theta)]-(\tfrac{1}{3}(1-\cos\theta)-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta)\right|,K_2=\tfrac{2\sqrt{3}}{3}\left|\tfrac{1}{3}(-1+\cos\theta)-\tfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right|$$
$$L_2=\tfrac{2\sqrt{3}}{3}\left|\tfrac{1}{3}(-1+\cos\theta)+\tfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right|,M_2=\tfrac{2\sqrt{3}}{3}\left|\tfrac{1}{3}(1+2\cos\theta)\right|$$

*olmak üzere*

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}-1\right)\max\{K_1+L_1,K_1+M_1,L_1+M_1\}+\left(2-\sqrt{3}\right)\max\{K_1,L_1,M_1\} &= 1\\ \left(\sqrt{3}-1\right)\max\{K_2+L_2,K_2+M_2,L_2+M_2\}+\left(2-\sqrt{3}\right)\max\{K_2,L_2,M_2\} &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

*elde edilir. Bu denklemler çözülürse* $\theta=2\pi/3,\ \theta=4\pi/3$ *bulunur. Buradan* $l$ *etrafındaki* $\theta=2\pi/3,\ 4\pi/3$ *radyanlık dönmeler* $\mathbb{R}^3_{TH}$ *ün bir izometrisidir. Benzer şekilde* $l$ *nin yön vektörü (-1,1,1), (1,1,-1) veya (1,-1,1) ise* $\theta=2\pi/3,\ 4\pi/3$ *olarak bulunur.*

*$l$ doğrusunun yön vektörü (1,1,0) ise* $(p,q,r)=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)$*olur.* $p,q,r$ *değerlerini* $d_{TH}(r_\theta(A_2),r_\theta(A_6))=1$ *ve* $d_{TH}(r_\theta(A_6),r_\theta(A_{10}))=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ *de yerine yazılırsa;* $K_1=\left|\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{3\sqrt{2}}-\frac{(1+\cos\theta)}{2})\right|$, $L_1=\left|\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{3\sqrt{2}}-\frac{(1-\cos\theta)}{2}\right|$, $M_1=\left|\frac{(\sqrt{3}-3)+\left(\sqrt{3}+3\right)\cos\theta}{6}-\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{2}\right|$, $K_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left|\frac{1}{2}(\cos\theta-1)\right|$, $L_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left|\frac{1}{2}(1+\cos\theta)\right|$ *ve* $M_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left|\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{2}\right|$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}-1\right)\max\{K_1+L_1,K_1+M_1,L_1+M_1\}+\left(2-\sqrt{3}\right)\max\{K_1,L_1,M_1\} &= 1\\ \left(\sqrt{3}-1\right)\max\{K_2+L_2,K_2+M_2,L_2+M_2\}+\left(2-\sqrt{3}\right)\max\{K_2,L_2,M_2\} &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

*elde edilir. Bu denklemler çözülürse $\theta = \pi$ elde edilir. Buradan $l$ etrafındaki , $\theta = \pi$ radyanlık dönmeler $\mathbb{R}^3_{TH}$ ün bir izometrisidir. Benzer şekilde $l$ nin yön vektörü (1,0,1), (0,1,1) , (1,-1,0), (1,0,-1), (0,1,-1) ise $\theta = \pi$ olur.*

*Tersine $r_\theta(X) = Y$ olacak şekilde $X$ ve $Y$ noktalarıyla oluşturulan $OX$ ve $OY$ doğrularının doğrultuları sırasıyla $(p_1, q_1, r_1)$ ve $(p_2, q_2, r_2)$ olmak üzere $d_{TH}(O, X) = d_{TH}(O, Y)$ olduğunu göstermek için önerme 2.2 den $\mu_{OX} = \mu_{OY}$ olduğu gösterilmelidir. Bu ise $(p_1, q_1, r_1)$ vektörünün tüm durumlar için görüntüleri bulunarak kolaylıkla gösterilebilir. Örneğin dönme ekseninin doğrultu vektörü (1,0,0) olmak üzere bu eksende $\theta = \frac{\pi}{2}$ radyanlık dönme dönüşümü yapılınca $(p_2, q_2, r_2) = (p_1, -r_1, q_1)$ bulunur. Buradan da $\mu_{OX} = \mu_{OY}$ olduğu görülür. benzer şekilde diğer dönme eksenleri ve dönme açıları için eşitlik gösterilebilir. Buda ispatı tamamlar.*

Şekil3.5 deki tablo birim kürenin köşe noktalarının ilgili dönme dönüşümleri altındaki görüntülerini vermektedir.

| Dönme Ekseni Doğrultu Vektörleri | Açılar | A0 | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 | A10 | A11 | A12 | A13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1,0,0) | π/2 | A4 | A5 | A3 | A2 | A1 | A0 | A11 | A13 | A10 | A12 | A7 | A9 | A6 | A8 |
| | π | A0 | A1 | A3 | A2 | A4 | A5 | A10 | A11 | A12 | A13 | A6 | A7 | A8 | A9 |
| | 3π/2 | A5 | A4 | A3 | A2 | A0 | A1 | A12 | A10 | A13 | A11 | A8 | A6 | A9 | A7 |
| (0,1,0) | π/2 | A3 | A2 | A0 | A1 | A5 | A4 | A12 | A8 | A10 | A6 | A13 | A9 | A11 | A7 |
| | π | A0 | A1 | A2 | A3 | A5 | A4 | A8 | A9 | A6 | A7 | A12 | A13 | A10 | A11 |
| | 3π/2 | A2 | A3 | A1 | A0 | A5 | A4 | A9 | A13 | A7 | A11 | A8 | A12 | A6 | A10 |
| (0,0,1) | π/2 | A1 | A0 | A5 | A4 | A2 | A3 | A9 | A8 | A13 | A12 | A7 | A6 | A11 | A10 |
| | π | A1 | A0 | A2 | A3 | A4 | A5 | A7 | A6 | A9 | A8 | A11 | A10 | A13 | A12 |
| | 3π/2 | A1 | A0 | A4 | A5 | A3 | A2 | A11 | A10 | A7 | A6 | A13 | A12 | A9 | A8 |
| (1/√2,1/√2,0) | π | A0 | A1 | A5 | A4 | A3 | A2 | A12 | A13 | A8 | A9 | A10 | A11 | A6 | A7 |
| (1/√2,0,1/√2) | π | A3 | A2 | A1 | A0 | A4 | A5 | A11 | A7 | A13 | A9 | A10 | A6 | A12 | A8 |
| (0,1/√2,1/√2) | π | A5 | A4 | A2 | A3 | A1 | A0 | A9 | A7 | A8 | A6 | A13 | A11 | A12 | A10 |
| (1/√2,-1/√2,0) | π | A0 | A1 | A4 | A5 | A2 | A3 | A6 | A7 | A10 | A11 | A8 | A9 | A12 | A13 |
| (1/√2,0,-1/√2) | π | A2 | A3 | A0 | A1 | A4 | A5 | A6 | A10 | A8 | A12 | A7 | A11 | A9 | A13 |
| (0,1/√2,-1/√2) | π | A4 | A5 | A2 | A3 | A0 | A1 | A6 | A8 | A7 | A9 | A10 | A12 | A11 | A13 |
| (1/√3,1/√3,1/√3) | 2π/3 | A3 | A2 | A5 | A4 | A1 | A0 | A13 | A9 | A12 | A8 | A11 | A7 | A10 | A6 |
| | 4π/3 | A5 | A4 | A1 | A0 | A3 | A2 | A13 | A11 | A9 | A7 | A12 | A10 | A8 | A6 |
| (-1/√3,1/√3,1/√3) | 2π/3 | A5 | A4 | A0 | A1 | A2 | A3 | A8 | A6 | A12 | A10 | A9 | A7 | A13 | A11 |
| | 4π/3 | A2 | A3 | A4 | A5 | A1 | A0 | A7 | A11 | A6 | A10 | A9 | A13 | A8 | A12 |
| (1/√3,-1/√3,1/√3) | 2π/3 | A4 | A5 | A1 | A0 | A2 | A3 | A7 | A9 | A11 | A13 | A6 | A8 | A10 | A12 |
| | 4π/3 | A3 | A2 | A4 | A5 | A0 | A1 | A10 | A6 | A11 | A7 | A12 | A8 | A13 | A9 |
| (1/√3,1/√3,-1/√3) | 2π/3 | A4 | A5 | A0 | A1 | A3 | A2 | A10 | A12 | A6 | A8 | A11 | A13 | A7 | A9 |
| | 4π/3 | A2 | A3 | A5 | A4 | A0 | A1 | A8 | A12 | A9 | A13 | A6 | A10 | A7 | A11 |

Şekil 3.5 $\mathbb{R}^3_{TH}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

**Sonuç 3.5** *Orijinden geçen doğrulara göre izometrik dönmelerin $R_{TH}$ kümesi tam olarak 23 Öklidyen dönme içerir.*

**Yardımcı Teorem 3.2** *$(x, y, z)$ noktasını $(-x, -y, -z)$ noktasına eşleyen dönüşüm olan orijine göre $\sigma_O$ inversiyonu (noktaya göre yansıma) $\mathbb{R}^3_{TH}$ ün bir izometrisidir.*

Şekil3.6 daki tabloda inverisyon dönüşümü altında birim kürenin köşe noktalarının görüntüleri verilmektedir.

| İnversiyonAltında Nokta Görüntüleri | A0 | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 | A10 | A11 | A12 | A13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $O$=(O,O,O) | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A13 | A12 | A11 | A10 | A9 | A8 | A7 | A6 |

Şekil 3.6 $\mathbb{R}^3_{TH}$ de $\sigma_O$ İnversiyonu Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

**Önerme 3.6** *$d_{TH}$ uzaklığını invaryant bırakan orijine göre altı tane dönme yansıması vardır.*

**İspat** *$r_\theta \in R_{TH}$ , $\Gamma$ ve $\Delta$ düzlemleri, $\Pi$ düzlemine dik olmak üzere dönme yansıma $\rho$ : $\sigma_\Pi \sigma_\Delta \sigma_\Gamma = \sigma_\Pi r_\theta$ şeklinde ifade edilebilir.O halde dönme ekseni yansıma düzlemine dik olmak zorundadır. Bu nedenle önerme 2.5 deki dönme eksenlerinden 9 tanesi incelenmelidir. Çünkü $D_2$ de verilen dönme eksenlerinin hiçbiri önerme 2.4 de verilen yansıma düzlemlerne dik değildir. $\Pi$ düzlemi olarak $z = 0$ düzlemi alınırsa $r_\theta$ nın birim doğrultusu (0,0,1) olup*

$$\rho : \sigma_\Pi r_\theta(x, y, z) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, -z)$$

*bulunur.*

$$\rho(A_2) = \rho(1, 0, 0) = (\cos\theta, \sin\theta, , 0)$$
$$\rho(A_6) = \rho(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = (\tfrac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta - \tfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta, \tfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta + \tfrac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta, -\tfrac{\sqrt{3}}{3})$$
$$\rho(A_{10}) = \rho(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = (-\tfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta - \tfrac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta, \tfrac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta - \tfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta, -\tfrac{\sqrt{3}}{3})$$

*elde edilir. $d_{TH}(\rho(A_2), \rho(A_6))$=1 ve $d_{TH}(\rho(A_6), \rho(A_{10}))$=$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ olmak zorunda olduğundan*

$$\left(\sqrt{3}-1\right)\max\left\{\begin{array}{l}\left|(1-\frac{\sqrt{3}}{3})\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right|+\left|(1-\frac{\sqrt{3}}{3})\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta\right|, \\ \left|(1-\frac{\sqrt{3}}{3})\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right|+\left|\frac{\sqrt{3}}{3}\right|, \left|(1-\frac{\sqrt{3}}{3})\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta\right|+\left|\frac{\sqrt{3}}{3}\right|\end{array}\right\}$$
$$+\left(2-\sqrt{3}\right)\max\{\left|(1-\tfrac{\sqrt{3}}{3})\cos\theta+\tfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right|, \left|(1-\tfrac{\sqrt{3}}{3})\sin\theta-\tfrac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta\right|, \left|\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right|\} = 1$$

*ve*

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{3}-1\right)\max\{\left|\tfrac{2\sqrt{3}}{3}\cos\theta\right|+\left|\tfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right|,\left|\tfrac{2\sqrt{3}}{3}\cos\theta\right|,\left|\tfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right|\}\\&\quad+\left(2-\sqrt{3}\right)\max\left\{\left|\tfrac{2\sqrt{3}}{3}\cos\theta\right|+\left|\tfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right|,\left|\tfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right|,0\right\}=\tfrac{2\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

*denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülürse* $\theta=\pi/2$, $\pi$,$3\pi/2$ *bulunur. Burada elde edilen sonuçlardan kolaylıkla* $\sigma_\Pi r_\pi=\sigma_O$ *olduğu gösterilebilir. O halde* $z=0$ *düzlemine göre 2 tane dönme yansıma elde edilir.Benzer şekilde* $\Pi$ *olarak* $x=0$ *ve* $y=0$ *düzlemlerine göre 2 şer tane dönme yansıma elde edilir.*

*Eğer* $\Pi$ *düzlemi olarak* $x+y=0$ *düzlemi alınırsa için* $\Pi$ *tanımlı ise* $r_\theta$ *dönmesinin birim doğrultusu* $(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)$ *olup,*

$$\rho:\sigma_\Pi r_\theta(x,y,z)=\begin{pmatrix}(\frac{cos\theta-1}{2})x-(\frac{1+\cos\theta}{2})y+(\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})z,(\frac{-cos\theta-1}{2})x-(\frac{-1+\cos\theta}{2})y+(\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})z,\\(-\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})x+(\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})y+\cos\theta z)\end{pmatrix}$$

*olur. Ayrıca*

$$\begin{aligned}\rho(A_2)&=\rho(1,0,0)=(\frac{cos\theta-1}{2},\ \frac{-cos\theta-1}{2},\ -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})\\\rho(A_6)&=(1/\sqrt{3}(-1+\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}),1/\sqrt{3}(-1-\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}),1/\sqrt{3}\cos\theta)\\\rho(A_{10})&=(-1/\sqrt{3}(-1+\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}),1/\sqrt{3}(-1-\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}),1/\sqrt{3}\cos\theta)\end{aligned}$$

*bulunur. Buradan* $d_{TH}(\rho(A_2),\rho(A_6))$=1 *ve* $d_{TH}(\rho(A_6),\rho(A_{10}))=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ *olması gerektiğinden* $K_1=\left|\frac{\sqrt{3}}{3}(-1+\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})-(\frac{cos\theta-1}{2})\right|$, $L_1=\left|\frac{\sqrt{3}}{3}(-1-\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})-(\frac{-cos\theta-1}{2})\right|$, $M_1=\left|\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta-\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}\right|$, $K_2=\left|\frac{2\sqrt{3}}{3}(\frac{\cos\theta-1}{2})\right|$, $L_2=\left|\frac{2\sqrt{3}}{3}(\frac{\cos\theta+1}{2})\right|$ *ve* $M_2=\left|\frac{\sqrt{6}}{3}\sin\theta\right|$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}-1\right)\max\{K_1+L_1,K_1+M_1,L_1+M_1\}+\left(2-\sqrt{3}\right)\max\{K_1,L_1,M_1\}&=1\\\left(\sqrt{3}-1\right)\max\{K_2+L_2,K_2+M_2,L_2+M_2\}+\left(2-\sqrt{3}\right)\max\{K_2,L_2,M_2\}&=\frac{2\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

*elde edilir. Bu denklemler çözülürse* $\theta=\pi$ *sonucu elde edilir. Buradan elde olunan sonuca göre* $\sigma_\Pi r_\pi=\sigma_O$ *dönüşümü O =(0,0,0) göre bir inversiyon olduğundan bu durumda yeni bir dönme yansıması yoktur. Benzer şekilde* $\Pi$ *düzlemi,* $x-y=0, x+z=0, x-z=0, y+z=0, y-z=0$ *düzlemlerinden herhangi biri ise dönme ekseninin doğrultusu (1,-1,0), (1,0,1), (1,0,-1), (0,1,1), (0,1,-1) olup bu durumların her birinde* $\theta=\pi$ *sonucuna ulaşılır. Bu sonuç ise orijine göre inversiyon olduğundan bu durumların hiçbirinde bir dönme yansıma yoktur.*

Şekil3.7 deki tablo birim kürenin köşe noktalarının ilgili dönme yansıma dönüşümleri altındaki görüntülerini vermektedir.

| Yansıma Düzlemi Normali Olan Dönme Ekseni Doğrultu Vektörleri | Açılar | A0 | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 | A10 | A11 | A12 | A13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1,0,0) | π/2 | A5 | A4 | A3 | A2 | A0 | A1 | A12 | A10 | A13 | A11 | A8 | A6 | A9 | A7 |
| | π | A2 | A3 | A1 | A0 | A5 | A4 | A9 | A13 | A7 | A11 | A8 | A12 | A6 | A10 |
| | 3π/2 | A1 | A0 | A4 | A5 | A3 | A2 | A11 | A10 | A7 | A6 | A13 | A12 | A9 | A8 |
| (0,1,0) | π/2 | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A13 | A12 | A11 | A10 | A9 | A8 | A7 | A6 |
| | π | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A13 | A12 | A11 | A10 | A9 | A8 | A7 | A6 |
| | 3π/2 | A4 | A5 | A3 | A2 | A1 | A0 | A11 | A13 | A10 | A12 | A7 | A9 | A6 | A8 |
| (0,0,1) | π/2 | A3 | A2 | A0 | A1 | A5 | A4 | A12 | A8 | A10 | A6 | A13 | A9 | A11 | A7 |
| | π | A5 | A4 | A3 | A2 | A0 | A1 | A12 | A10 | A13 | A11 | A8 | A6 | A9 | A7 |
| | 3π/2 | A1 | A0 | A5 | A4 | A2 | A3 | A9 | A8 | A13 | A12 | A7 | A6 | A11 | A10 |
| (1/√2,1/√2,0) | π | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A13 | A12 | A11 | A10 | A9 | A8 | A7 | A6 |
| (1/√2,0,1/√2) | π | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A13 | A12 | A11 | A10 | A9 | A8 | A7 | A6 |
| (0,1/√2,1/√2) | π | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A13 | A12 | A11 | A10 | A9 | A8 | A7 | A6 |
| (1/√2,-1/√2,0) | π | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A13 | A12 | A11 | A10 | A9 | A8 | A7 | A6 |
| (1/√2,0,-1/√2) | π | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A13 | A12 | A11 | A10 | A9 | A8 | A7 | A6 |
| (0,1/√2,-1/√2) | π | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A13 | A12 | A11 | A10 | A9 | A8 | A7 | A6 |

Şekil 3.7 $\mathbb{R}^3_{TH}$ de Dönme Yansıma Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

**Önerme 3.7** *$d_{TH}$ uzaklığını değişmez bırakan orijine göre sekiz tane dönme inversiyonu vardır.*

**İspat** *Bir dönme inversiyon, $r_\theta \in R_{TH}$ olmak üzere $\rho : \sigma_O\sigma_\Delta\sigma_\Gamma = \sigma_O r_\theta$ şeklinde ifade edilir. Buna göre önerme 2.5 deki dönme eksenleri için 13 durum göz önüne alınmalıdır. $r_\theta$, $z$ ekseni etrafında dönme olarak ele alınırsa, $r_\theta$ nın birim vektörü (0,0,1) olur ve*

$$\rho : \sigma_O r_\theta(x,y,z) = (-xcos\theta + ysin\theta, -xsin\theta - ycos\theta, -z)$$

*bulunur. Ayrıca*

$$\rho(A_2) = \rho(1,0,0) = (-cos\theta, -sin\theta, 0)$$
$$\rho(A_6) = \rho(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = (-\tfrac{\sqrt{3}}{3}cos\theta + \tfrac{\sqrt{3}}{3}sin\theta, -\tfrac{\sqrt{3}}{3}sin\theta - \tfrac{\sqrt{3}}{3}cos\theta, -\tfrac{\sqrt{3}}{3})$$
$$\rho(A_{10}) = \rho(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = (\tfrac{\sqrt{3}}{3}cos\theta + \tfrac{\sqrt{3}}{3}sin\theta, -\tfrac{\sqrt{3}}{3}cos\theta + \tfrac{\sqrt{3}}{3}sin\theta, -\tfrac{\sqrt{3}}{3})$$

*olup $d_{TH}(\rho(A_2), \rho(A_6)) = 1$ ve $d_{TH}(\rho(A_6), \rho(A_{10})) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ olmak zorunda olduğundan,*

$$\left(\sqrt{3}-1\right)\max\left\{\begin{array}{r}\left|(\tfrac{\sqrt{3}}{3}-1)cos\theta - \tfrac{\sqrt{3}}{3}sin\theta\right| + \left|\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right|, \left|(\tfrac{\sqrt{3}}{3}-1)sin\theta + \tfrac{\sqrt{3}}{3}cos\theta\right| + \left|\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right|, \\ \left|(\tfrac{\sqrt{3}}{3}-1)cos\theta - \tfrac{\sqrt{3}}{3}sin\theta\right| + \left|(\tfrac{\sqrt{3}}{3}-1)sin\theta + \tfrac{\sqrt{3}}{3}cos\theta\right|\end{array}\right\}$$
$$+\left(2-\sqrt{3}\right)\max\left\{\left|(\tfrac{\sqrt{3}}{3}-1)cos\theta - \tfrac{\sqrt{3}}{3}sin\theta\right|, \left|(\tfrac{\sqrt{3}}{3}-1)sin\theta + \tfrac{\sqrt{3}}{3}cos\theta\right|, \tfrac{\sqrt{3}}{3}\right\} = 1$$

*ve*

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}-1\right)\max\{&\left|\tfrac{2\sqrt{3}}{3}cos\theta\right|+\left|\tfrac{2\sqrt{3}}{3}sin\theta\right|,\left|\tfrac{2\sqrt{3}}{3}cos\theta\right|,\left|\tfrac{2\sqrt{3}}{3}sin\theta\right|\}\\&+\left(2-\sqrt{3}\right)\max\left\{\left|\tfrac{2\sqrt{3}}{3}cos\theta\right|+\left|\tfrac{2\sqrt{3}}{3}sin\theta\right|,\left|\tfrac{2\sqrt{3}}{3}sin\theta\right|,0\right\}=\tfrac{2\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

*denklemleri bulunur. Bu denklemler çözülürse* $\theta = \pi/2,\ \pi, 3\pi/2$ *sonuçları elde edilir. Buradan* $\sigma_O r_\theta$ *bir dönme yansıması veya yansıma olduğundan yeni bir dönme inversiyonu yoktur.Benzer şekilde* $x$ *ve* $y$ *eksenleri için de yeni bir dönme inversiyonu yoktur.*$r_\theta$*, doğrultu vektörü (1,1,0) olan* $l$ *doğrusu etrafındaki dönme olmak üzere* $r_\theta$ *nın birim vektörü* $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ *olur ve*

$$\rho : \sigma_O r_\theta(x,y,z) = \begin{pmatrix} (\frac{-\cos\theta-1}{2})x + (\frac{-1+\cos\theta}{2})y - (\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})z, (\frac{cos\theta-1}{2})x + (\frac{-1-\cos\theta}{2})y + (\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})z, \\ (\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})x - (\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})y - \cos\theta z \end{pmatrix}$$

*bulunur. Buna göre*

$$\begin{aligned}\rho(A_2) &= \rho(1,0,0) = (\frac{-cos\theta-1}{2}, \frac{cos\theta-1}{2}, \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})\\ \rho(A_6) &= (\frac{1}{\sqrt{3}}(-1-\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}), \frac{1}{\sqrt{3}}(-1+\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}), -\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta)\\ \rho(A_{10}) &= (-\frac{1}{\sqrt{3}}(-1-\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}), \frac{1}{\sqrt{3}}(-1+\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}), -\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta)\end{aligned}$$

*bulunur. O halde* $d_{TH}(\rho(A_2), \rho(A_6)) = 1$ *ve* $d_{TH}(\rho(A_6), \rho(A_{10})) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ *olduğundan* $K_1 = \left|\frac{1}{\sqrt{3}}(-1-\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}) - (\frac{-cos\theta-1}{2})\right|$, $L_1 = \left|\frac{1}{\sqrt{3}}(-1+\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}) - (\frac{cos\theta-1}{2})\right|$, $M_1 = \left|-\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta - \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}\right|$, $K_2 = \left|\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{cos\theta-1}{2}\right)\right|$, $L_2 = \left|\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{cos\theta-1}{2}\right)\right|$ *ve* $M_2 = \left|\frac{\sqrt{6}}{3}\sin\theta\right|$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}-1\right)\max\{K_1+L_1, K_1+M_1, L_1+M_1\} + \left(2-\sqrt{3}\right)\max\{K_1, L_1, M_1\} &= 1\\ \left(\sqrt{3}-1\right)\max\{K_2+L_2, K_2+M_2, L_2+M_2\} + \left(2-\sqrt{3}\right)\max\{K_2, L_2, M_2\} &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

*denklemleri bulunur. Bu denklemler çözülürse* $\theta = \pi$ *sonucuna ulaşılır. Buradan* $\sigma_O r_\theta$ *bir dönme yansıması veya yansıma olduğundan yeni bir dönme inversiyonu yoktur.Benzer şekilde* $r_\theta$*, (1,-1,0), (1,0,1), (1,0,-1), (0,1,1), (0,1,-1) e paralel dönme eksenlerinden herhangi biri ise yeni bir dönme inversiyonu yoktur.*

$r_\theta$ *doğrultu vektörü (1,1,1) olan* $l$ *doğrusu etrafında ki dönme ise* $r_\theta$ *nın birim vektörü* $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ *olacağından,*

$$\begin{aligned}\rho : \sigma_O r_\theta(x,y,z) = ((&\tfrac{-2\cos\theta-1}{3})x + (\tfrac{\cos\theta+\sqrt{3}sin\theta\text{-}1}{3})y + (\tfrac{\cos\theta-\sqrt{3}sin\theta-1}{3})z\\ &(\tfrac{\cos\theta-\sqrt{3}sin\theta-1}{3})x + (\tfrac{-1-2\cos\theta}{3})y + (\tfrac{\cos\theta+\sqrt{3}sin\theta-1}{3})z\\ &(\tfrac{\cos\theta+\sqrt{3}sin\theta-1}{3})x + (\tfrac{\cos\theta-\sqrt{3}sin\theta-1}{3})y + (\tfrac{-1-2\cos\theta}{3})z))\end{aligned}$$

*olup*

$$\begin{aligned}\rho(A_2) &= ((\tfrac{-2\cos\theta-1}{3}),\ (\tfrac{\cos\theta-\sqrt{3}sin\theta-1}{3}),\ (\tfrac{\cos\theta+\sqrt{3}sin\theta-1}{3}))\\ \rho(A_6) &= (-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})\\ \rho(A_{10}) &= ((\tfrac{4\sqrt{3}\cos\theta-\sqrt{3}}{9}),\ (\tfrac{-\sqrt{3}-2\sqrt{3}\cos\theta+6sin\theta}{9}),\ (\tfrac{-\sqrt{3}-2\sqrt{3}\cos\theta-6sin\theta}{9}))\end{aligned}$$

*bulunur. O halde* $d_{TH}(\rho(A_2),\rho(A_6))=1$ *ve* $d_{TH}(\rho(A_6),\rho(A_{10}))=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ *olması gerektiğinden* $K_1=\left|(-\frac{1}{\sqrt{3}}-(\frac{-2\cos\theta-1}{3})\right|$, $L_1=\left|-\frac{1}{\sqrt{3}}-(\frac{\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta-1}{3})\right|$, $M_1=\left|-\frac{1}{\sqrt{3}}-(\frac{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta-1}{3})\right|$, $K_2=\left|\frac{4\sqrt{3}\cos\theta-2\sqrt{3}}{9}\right|$, $L_2=\left|\frac{2\sqrt{3}\cos\theta-6\sin\theta-2\sqrt{3}}{9}\right|$ *ve* $M_2=\left|\frac{2\sqrt{3}\cos\theta+6\sin\theta-2\sqrt{3}}{9}\right|$ *olmak üzere*

$$\left(\sqrt{3}-1\right)\max\{K_1+L_1,K_1+M_1,L_1+M_1\}+\left(2-\sqrt{3}\right)\max\{K_1,L_1,M_1\} = 1$$

$$\left(\sqrt{3}-1\right)\max\{K_2+L_2,K_2+M_2,L_2+M_2\}+\left(2-\sqrt{3}\right)\max\{K_2,L_2,M_2\} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

*denklemleri bulunur. Bu denklemler çözülürse* $\theta = 2\pi/3,\ 4\pi/3$ *sonuçlarına ulaşılır. Bu durumda (1,1,1) vektörünü doğrultu vektörü alan* $l$ *doğrusu etrafındaki dönme kullanılarak 2 tane dönme inversiyonu elde edilir. Benzer şekilde (-1,1,1), (1,-1,1), (1,1,-1) doğrultulu eksen etrafındaki dönme kullanılarak herbiri için iki yeni dönme inversiyon elde edilir. O halde* $d_{TH}$ *uzaklığını koruyan tam olarak sekiz dönme inversiyonu vardır.*

Şekil3.8 deki tabloda birim kürenin köşe noktalarının ilgili dönme inversiyon dönüşümü altındaki görüntülerini vermektedir.

| Dönme Ekseni Doğrultu Vektörleri | Açılar | A0 | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 | A10 | A11 | A12 | A13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1,0,0) | π/2 | A4 | A5 | A3 | A2 | A1 | A0 | A11 | A13 | A10 | A12 | A7 | A9 | A6 | A8 |
| | π | A0 | A1 | A3 | A2 | A4 | A5 | A10 | A11 | A12 | A13 | A6 | A7 | A8 | A9 |
| | 3π/2 | A5 | A4 | A3 | A2 | A0 | A1 | A12 | A10 | A13 | A11 | A8 | A6 | A9 | A7 |
| (0,1,0) | π/2 | A3 | A2 | A0 | A1 | A5 | A4 | A12 | A8 | A10 | A6 | A13 | A9 | A11 | A7 |
| | π | A0 | A1 | A2 | A3 | A5 | A4 | A8 | A9 | A6 | A7 | A12 | A13 | A10 | A11 |
| | 3π/2 | A2 | A3 | A1 | A0 | A5 | A4 | A9 | A13 | A7 | A11 | A8 | A12 | A6 | A10 |
| (0,0,1) | π/2 | A1 | A0 | A5 | A4 | A2 | A3 | A9 | A8 | A13 | A12 | A7 | A6 | A11 | A10 |
| | π | A1 | A0 | A2 | A3 | A4 | A5 | A7 | A6 | A9 | A8 | A11 | A10 | A13 | A12 |
| | 3π/2 | A1 | A0 | A4 | A5 | A3 | A2 | A11 | A10 | A7 | A6 | A13 | A12 | A9 | A8 |
| (1/√2,1/√2,0) | π | A0 | A1 | A5 | A4 | A3 | A2 | A12 | A13 | A8 | A9 | A10 | A11 | A6 | A7 |
| (1/√2,0,1/√2) | π | A3 | A2 | A1 | A0 | A4 | A5 | A11 | A7 | A13 | A9 | A10 | A6 | A12 | A8 |
| (0,1/√2,1/√2) | π | A5 | A4 | A2 | A3 | A1 | A0 | A9 | A7 | A8 | A6 | A13 | A11 | A12 | A10 |
| (1/√2,-1/√2,0) | π | A0 | A1 | A4 | A5 | A2 | A3 | A6 | A7 | A10 | A11 | A8 | A9 | A12 | A13 |
| (1/√2,0,-1/√2) | π | A2 | A3 | A0 | A1 | A4 | A5 | A6 | A10 | A8 | A12 | A7 | A11 | A9 | A13 |
| (0,1/√2,-1/√2) | π | A4 | A5 | A2 | A3 | A0 | A1 | A6 | A8 | A7 | A9 | A10 | A12 | A11 | A13 |
| (1/√3,1/√3,1/√3) | 2π/3 | A3 | A2 | A5 | A4 | A1 | A0 | A13 | A9 | A12 | A8 | A11 | A7 | A10 | A6 |
| | 4π/3 | A5 | A4 | A1 | A0 | A3 | A2 | A13 | A11 | A9 | A7 | A12 | A10 | A8 | A6 |
| (-1/√3,1/√3,1/√3) | 2π/3 | A5 | A4 | A0 | A1 | A2 | A3 | A8 | A6 | A12 | A10 | A9 | A7 | A13 | A11 |
| | 4π/3 | A2 | A3 | A4 | A5 | A1 | A0 | A7 | A11 | A6 | A10 | A9 | A13 | A8 | A12 |
| (1/√3,-1/√3,1/√3) | 2π/3 | A4 | A5 | A1 | A0 | A2 | A3 | A7 | A9 | A11 | A13 | A6 | A8 | A10 | A12 |
| | 4π/3 | A3 | A2 | A4 | A5 | A0 | A1 | A10 | A6 | A11 | A7 | A12 | A8 | A13 | A9 |
| (1/√3,1/√3,-1/√3) | 2π/3 | A4 | A5 | A0 | A1 | A3 | A2 | A10 | A12 | A6 | A8 | A11 | A13 | A7 | A9 |
| | 4π/3 | A2 | A3 | A5 | A4 | A0 | A1 | A8 | A12 | A9 | A13 | A6 | A10 | A7 | A11 |

Şekil 3.8 $\mathbb{R}^3_{TH}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

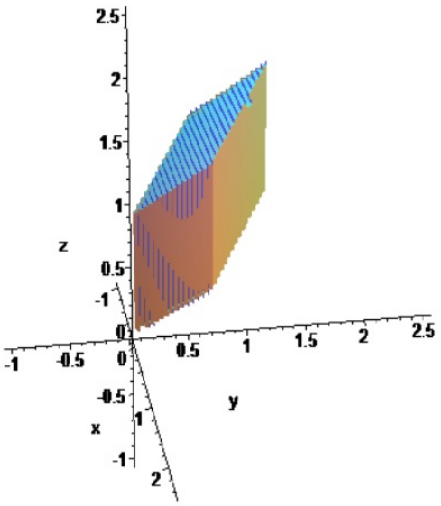
Buraya kadar olan kısımda Öklidyen 3-uzayın izometrilerinden hangilerinin $d_{TH}$ metriğini koruduğu bulunmuştur. Daha açıkça Öklidyen 3-uzayın izometrilerinden dokuz yansıma, yirmi dört dönme, altı dönme-yansıma, sekiz dönme-inversiyon ve bir inversiyonun $d_{TH}$ metriğini koruduğu gösterilmiştir. Bu tespit edilen elemanlar tetrakis hexahedronun Öklidyen simetri grubu olan $O_h$ (Octahedral grup) elemanlarıdır. Bu gruba tetrakis hexahedron grup denilsin ve $G(TH)$ ile gösterilsin. Açıkça $G(TH)$, $O_h$ grubuna izomorftur. Bundan sonraki kısımda bu dönüşümlerden başka $d_{TH}$ metriğini koruyan izometrinin olmadığı gösterilecektir. Yani $\mathbb{R}^3_{TH}$ nin tüm izometrilerinin $T(3).G(TH)$ olduğu gösterilecektir.

**Tanım 3.2** *$A = (a_1, a_2, a_3)$ ve $B = (b_1, b_2, b_3)$ $\mathbb{R}^3_{TH}$ uzayında farklı iki nokta olsun. Bu taktirde*

$$\{X \mid d_{TH}(A, X) + d_{TH}(B, X) = d_{TH}(A, B)\}$$

*kümesine $A$, $B$ noktalarının minimum uzaklık kümesi denir ve $[AB]$ ile gösterilir.*

Genel olarak, $[AB]$ kümesi $AB$ köşegenli bir paralelyüz oluşturur. Şekil3.9 da $A = (0, 0, 0)$ ve $B = (0, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}+1)$ olmak üzere minimum uzaklık kümesi $x+y = 0, x-y = 0,$ $y-z = 0$ ve bu düzlemlere paralel olup $B$ noktasından geçen düzlemlerin sınırladığı bölgedir.




Şekil 3.9 $\mathbb{R}^3_{TH}$ da Minimum Uzaklık Kümesi

**Önerme 3.8** *$\phi : \mathbb{R}^3_{TH} \to \mathbb{R}^3_{TH}$ bir izometri ve $[AB]$ paralelyüz olsun. O halde*

$$\phi([AB]) = [\phi(A)\phi(B)]$$

*olur.*

**İspat** *$Y \in \phi([AB])$ olsun.*

$$\begin{aligned} Y \in \phi([AB]) &\iff \exists X \in [AB] \ni Y = \phi(X) \\ &\iff d_{TH}(A,X) + d_{TH}(B,X) = d_{TH}(A,B) \\ &\iff d_{TH}(\phi(A),\phi(X)) + d_{TH}(\phi(B),\phi(X)) = d_{TH}(\phi(A),\phi(B)) \\ &\Leftrightarrow \quad Y = \phi(X) \in [\phi(A)\phi(B)]\,. \end{aligned}$$

**Sonuç 3.6** *$\phi : \mathbb{R}^3_{TH} \to \mathbb{R}^3_{TH}$ bir izometri ve $[AB]$ paralelyüz olsun. Bu durumda $\phi$, $[AB]$ nin köşelerini köşelere dönüştürür ve kenar uzunluklarını korur.*

**Önerme 3.9** *$f : \mathbb{R}^3_{TH} \to \mathbb{R}^3_{TH}$ dönüşümü $f(O) = O$ olacak şekilde bir izometri olsun. Bu taktirde $f \in G(TH)$ olur.*

**İspat** *$O = (0,0,0)$ ve $D = (0, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3} + 1)$ olmak üzere $[OD]$ paralelyüzünü gözönüne alalım. Bu paralelyüzün köşe noktalarından üçü $A_0 = (0,0,1)$, $A_6 = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$, $A_{10} = (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ olup bu noktalar aynı zamanda merkezil birim tetrakis hexahedron birim küresinin köşe noktalarıdır. Dahası bu üç nokta tetrakis hexahedronun her biri aynı ikizkenar üçgen olan bir yüzünün köşe noktalarıdır (Şekil 3.10).*



Şekil 3.10 $\mathbb{R}^3_{TO}$ da Birim Küre Ve Minimum Uzaklık Kümesi

*$f$ izometrisi $[OD]$ paralelyüzününün köşe noktalarını köşe noktalara dönüştürüp, kenar uzaklıklarını korduğundan ve $f(O) = O$ olduğundan dolayı $A_0$, $A_6$ ve $A_{10}$ noktalarını tetrakis hexahedronun yine bir yüzünün köşe noktalarına dönüştürür. Ayrıca bu dönüştürme işlemi gerçekleşirken kenar uzunlukları korunacağından dolayı $i \in \{0,1,2,3,4,5\}$ olmak üzere $f(A_0) = A_i$ ve de $j,k \in \{6,7,8,9,10,11,12\ ,13\}$ ve $A_jA_k$ tetrakis hexahedronun bir kenarı olmak üzere $f(A_6) = A_j$ , $f(A_{10}) = A_k$ olur.Açıkça ifade edilirse $f$ izometrisi, tetrakis hexahedronun bir yüzünün köşe noktalarını yine bir yüzünün köşe noktalarına dönüştürür. O halde tetrakis hexahedron 24 yüze sahip olduğundan bir yüzün dönüşebileceği 24 yüz ihtimali vardır. Ayrıca kenar uzunlukları korunmak zorunda olduğundan $A_0$ noktası bu yüz üzerinde dönüşebileceği nokta tek olarak belli iken diğer iki köşe noktaları olan $A_6$ ve $A_{10}$ için iki farklı ihtimal vardır. Bu taktirde tetrakis hexahedronun her bir yüzü için 2 ihtimal olduğundan dolayı bu noktaların dönüşebileceği 48 ihtimal vardır. Bu ihtimaller ise aşağıda tek tek sıralanmış ve her bir dönüşümün önceden tespit edilen hareketlerden hangisine karşılık geldiği ifade edilmiştir.*

*1. $f(A_0) = A_0$, $f(A_6) = A_{10}$ ve $f(A_{10}) = A_6$ ise $\Delta : x = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ yansımasıdır.*

*2.$f(A_0) = A_0$, $f(A_6) = A_8$ ve $f(A_{10}) = A_{12}$ ise $\Delta : y = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ yansımasıdır.*

*3.$f(A_0) = A_1$, $f(A_6) = A_7$ ve $f(A_{10}) = A_{11}$ ise $\Delta : z = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ yansımasıdır.*

*4.$f(A_0) = A_0$, $f(A_6) = A_{12}$ ve $f(A_{10}) = A_{10}$ ise $\Delta : \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ yansımasıdır.*

*5.$f(A_0) = A_3$, $f(A_6) = A_{11}$ ve $f(A_{10}) = A_{10}$ ise $\Delta : \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ yansımasıdır.*

*6.$f(A_0) = A_5$, $f(A_6) = A_9$ ve $f(A_{10}) = A_{13}$ ise $\Delta : \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ yansımasıdır.*

*7.$f(A_0) = A_0$, $f(A_6) = A_6$ ve $f(A_{10}) = A_8$ ise $\Delta : \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ yansımasıdır.*

*8.$f(A_0) = A_2$, $f(A_6) = A_6$ ve $f(A_{10}) = A_7$ ise $\Delta : \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}z = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ yansımasıdır.*

*9.* $f(A_0) = A_4$, $f(A_6) = A_6$ *ve* $f(A_{10}) = A_{10}$ *ise* $\Delta : \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

*10.* $f(A_0) = A_5$, $f(A_6) = A_8$ *ve* $f(A_{10}) = A_{12}$ *ise dönme ekseni* $(1, 0, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{\pi}{2}}$ *dönmesidir.*

*11.* $f(A_0) = A_1$, $f(A_6) = A_9$ *ve* $f(A_{10}) = A_{13}$ *ise dönme ekseni* $(1, 0, 0)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmesidir.*

*12.* $f(A_0) = A_4$ *ise* $f(A_6) = A_7$ *ve* $f(A_{10}) = A_{11}$ *ise dönme ekseni* $(1, 0, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{3\pi}{2}}$ *dönmesidir.*

*13.* $f(A_0) = A_2$ *ise* $f(A_6) = A_7$ *ve* $f(A_{10}) = A_6$ *ise dönme ekseni* $(0, 1, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{\pi}{2}}$ *dönmesidir.*

*14.* $f(A_0) = A_1$ *ise* $f(A_6) = A_{11}$ *ve* $f(A_{10}) = A_7$ *ise dönme ekseni* $(0, 1, 0)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmesidir.*

*15.* $f(A_0) = A_3$ *ise* $f(A_6) = A_{10}$ *ve* $f(A_{10}) = A_{11}$ *ise dönme ekseni* $(0, 1, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{3\pi}{2}}$ *dönmesidir.*

*16.* $f(A_0) = A_0$ *ise* $f(A_6) = A_{10}$ *ve* $f(A_{10}) = A_{12}$; *ise dönme ekseni* $(0, 0, 1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{\pi}{2}}$ *dönmesidir.*

*17.* $f(A_0) = A_0$ *ise* $f(A_6) = A_{12}$ *ve* $f(A_{10}) = A_8$ *ise dönme ekseni* $(0, 0, 1)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmesidir.*

*18.* $f(A_0) = A_0$ *ise* $f(A_6) = A_8$ *ve* $f(A_{10}) = A_6$ *ise dönme ekseni* $(0, 0, 1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{3\pi}{2}}$ *dönmesidir.*

*19.* $f(A_0) = A_1$ *ise* $f(A_6) = A_7$ *ve* $f(A_{10}) = A_9$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmesidir.*

*20.* $f(A_0) = A_2$ *ise* $f(A_6) = A_8$ *ve* $f(A_{10}) = A_9$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmesidir.*

*21.* $f(A_0) = A_4$ *ise* $f(A_6) = A_{10}$ *ve* $f(A_{10}) = A_6$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmesidir.*

*22.* $f(A_0) = A_1$ *ise* $f(A_6) = A_{13}$ *ve* $f(A_{10}) = A_{11}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmesidir.*

*23.* $f(A_0) = A_3$ *ise* $f(A_6) = A_{13}$ *ve* $f(A_{10}) = A_{12}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmesidir.*

*24.* $f(A_0) = A_5$ *ise* $f(A_6) = A_{13}$ *ve* $f(A_{10}) = A_9$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmesidir.*

*25.* $f(A_0) = A_2$ *ise* $f(A_6) = A_6$ *ve* $f(A_{10}) = A_8$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

*26.* $f(A_0) = A_4$ *ise* $f(A_6) = A_6$ *ve* $f(A_{10}) = A_7$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

*27.* $f(A_0) = A_4$ *ise* $f(A_6) = A_{11}$ *ve* $f(A_{10}) = A_{10}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olamk üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

*28.* $f(A_0) = A_3$ *ise* $f(A_6) = A_{12}$ *ve* $f(A_{10}) = A_{10}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$*olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

*29.* $f(A_0) = A_5$ *ise* $f(A_6) = A_{12}$ *ve* $f(A_{10}) = A_{13}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

*30.* $f(A_0) = A_2$ *ise* $f(A_6) = A_9$ *ve* $f(A_{10}) = A_7$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

*31.* $f(A_0) = A_5$ *ise* $f(A_6) = A_9$ *ve* $f(A_{10}) = A_8$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

*32.* $f(A_0) = A_3$ *ise* $f(A_6) = A_{11}$ *ve* $f(A_{10}) = A_{13}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

*33* $f(A_0) = A_3$*,* $f(A_6) = A_{13}$ *ve* $f(A_{10}) = A_{11}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*34.* $f(A_0) = A_5$ *ise* $f(A_6) = A_{13}$ *ve* $f(A_{10}) = A_{12}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inverisyonudur.*

*35.* $f(A_0) = A_5$ *ise* $f(A_6) = A_8$ *ve* $f(A_{10}) = A_9$ ; *ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*36.* $f(A_0) = A_2$ *ise* $f(A_6) = A_7$ *ve* $f(A_{10}) = A_9$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*37.* $f(A_0) = A_4$ *ise* $f(A_6) = A_7$ *ve* $f(A_{10}) = A_6$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*38.* $f(A_0) = A_3$ *ise* $f(A_6) = A_{10}$ *ve* $f(A_{10}) = A_{12}$ ; *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*39.* $f(A_0) = A_4$ *ise* $f(A_6) = A_{10}$ *ve* $f(A_{10}) = A_{11}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{-}\frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*40.* $f(A_0) = A_2$ *ise* $f(A_6) = A_8$ *ve* $f(A_{10}) = A_6$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{-}\frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*41.* $f(A_0) = A_5$, $f(A_6) = A_{12}$ *ve* $f(A_{10}) = A_8$ *ise* $\Delta : x = 0$ *ve dönme ekseni* $(1, 0, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_\Delta r_{\frac{\pi}{2}}$ *dönme yansımasıdır.*

*42.* $f(A_0) = A_1$ *ise* $f(A_6) = A_{11}$ *ve* $f(A_{10}) = A_{13}$ *ise* $\Delta : x = 0$ *ve dönme ekseni* $(1, 0, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_\Delta r_{\frac{3\pi}{2}}$ *dönme yansımasıdır.*

*43.* $f(A_0) = A_1$ *ise* $f(A_6) = A_{13}$ *ve* $f(A_{10}) = A_9$ *ise* $\Delta : y = 0$ *ve dönme ekseni* $(0, 1, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_\Delta r_{\frac{\pi}{2}}$ *dönme yansımasıdır.*

*44.* $f(A_0) = A_4$ *ise* $f(A_6) = A_{11}$ *ve* $f(A_{10}) = A_7$ *ise* $\Delta : y = 0$ *ve dönme ekseni* $(0, 1, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_\Delta r_{\frac{3\pi}{2}}$ *dönme yansımasıdır.*

*45.* $f(A_0) = A_3$ *ise* $f(A_6) = A_{12}$ *ve* $f(A_{10}) = A_{13}$ *ise* $\Delta : z = 0$ *ve dönme ekseni* $(0, 0, 1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_\Delta r_{\frac{\pi}{2}}$ *dönme yansımasıdır.*

*46.* $f(A_0) = A_1$ *ise* $f(A_6) = A_9$ *ve* $f(A_{10}) = A_7$ *ise* $\Delta : z = 0$ *ve dönme ekseni* $(0, 0, 1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_\Delta r_{\frac{3\pi}{2}}$ *dönme yansımasıdır.*

*47.* $f(A_0) = A_0$, $f(A_6) = A_6$ *ve* $f(A_{10}) = A_{10}$ *ise* $f$ *birim dönüşümdür.*

*48.* $f(A_0) = A_1$, $f(A_6) = A_{13}$ *ve* $f(A_{10}) = A_9$ *ise* $f$ *inversiyondur.*

*Buna göre orijini koruyan $f$ izometrisi $G(TH)$ nin bir elemanıdır. Bir başka deyişle tetrakis hexahedron uzaklığını koruyan Öklidyen izometriler dışında bir izometri yoktur.*

**Teorem 3.1** *$f : \mathbb{R}^3_{TH} \to \mathbb{R}^3_{TH}$ dönüşümü bir izometri olsun. $f = T_A \circ g$ olacak şekilde bir tek $T_A \in T(3)$ ve $g \in G(TH)$ vardır.*

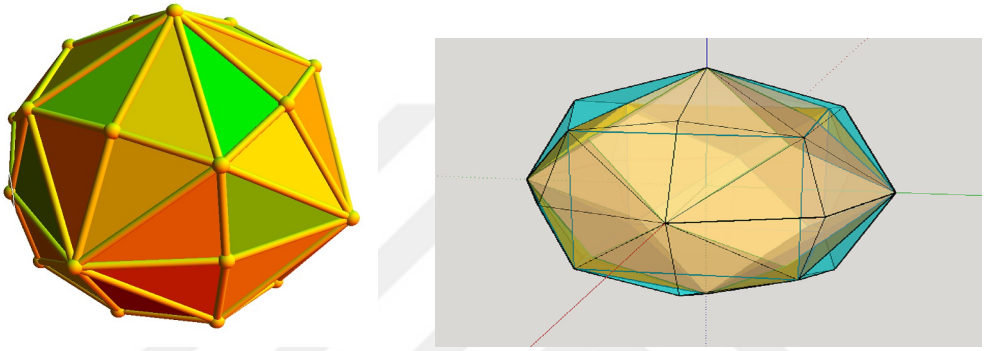
**İspat** *$A = (a_1, a_2, a_3)$ olmak üzere $f(O) = A$ olsun. Bu taktirde $g = T_{-A} \circ f$ olacak şekilde tanımlı $g$ dönüşümü bir izometridir ve $g(O) = O$ olur. Böylece önerme 2.9 dan dolayı $g \in G(TH)$ ve $f = T_A \circ g$ olur. İspatın tekliği aşikardır.*

Buna göre tetrakis hexahedron metriği ile donatılmış analitik 3-uzayın izometrilerinin grubu tetrakis hexahedronun (Öklidyen) simetri grubu olan $O_h$ ile 3-boyutlu analitik uzayın tüm ötelemelerinin grubu olan $T(3)$ ün yarı-direkt çarpımıdır. Yani $\mathbb{R}^3_{TH}$ nın tüm izometrilerinin kümesi $T(3).G(TH)$ dır.

# 4. DİSDYAKİS DODECAHEDRON UZAYI

## 4.1 Disdyakis Dodecahedron Metriği ve Özellikleri

Disdyakis dodecahedron, çeşit kenar üçgenlerin birleşmesinden oluşan 48 yüzlü bir şekildir. Toplamda 26 köşe ve 72 ayrıta sahiptir (Şekil 4.1).



Şekil 4.1 Disdyakis Dodecahedron ve Rhombic dodecahedronun kleetopu

Ayrıca disdyakis dodecahedron 48 tane simetriye sahip olup, simetri grubu $O_h$ ile gösterilir. Geometride didyakis dodecahedron, hexakis octahedron veya kisrhombic dodecahedron olarak da adlandırılır. Arşimedyan cisimlerden truncated cuboctahedronun dualidir. Yüzeysel olarak, rhombic dodecahedronun yüzeyden genişletilmiş haline benzeyen disyakis dodecahedron, rhombic dodecahedronun yüzeyine bir nokta eklenerek piramide dönüştülmüş halidir.Yani Rhombic dodecahedronun bir kleetopudur (Şekil 4.1)

Disdyakis dodecahedron küp ve düzgün octahedron ile ilişkili çokyüzlüler ile aynı yapıda olan dual ailesinin bir üyesidir. En küçük kenar uzunluğu 1 birim olduğunda yüzey alanı $S = \frac{6}{7}\sqrt{783 + 436\sqrt{2}}br^2$ ve hacmi $V = \frac{1}{7}\sqrt{3(2194 + 1513\sqrt{2})}\ br^3$dür.

Birim küresi disdyakis dodecahedron olan uzaklık fonksiyonu $d_{DD}$ ile gösterilir bu uzaklık fonksiyonunun metrik aksiyomlarını sağladığı ve bazı özellikleri (Gelişgen ve Çolak, 2015) kaynağından verilmektedir.

**Tanım 4.1** *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\mathbb{R}^3$de iki farklı nokta olsun.*

$$\begin{aligned} d_{DD}(P_1, P_2) = \; & \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\} + \\ & \left(\sqrt{2} - 1\right) \min\{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, |x_1 - x_2| + |z_1 - z_2|, |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|\} + \\ & (\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1) \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\} \end{aligned}$$

*şeklinde tanımlanan $d_{DD} : \mathbb{R}^3 x\ \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$ fonksiyonuna analitik 3-uzayda $P_1$ve $P_2$ noktaları arasındaki Disdyakis Dodecahedron uzaklık fonksiyonu denir.*

mid, 2. bölümde tanımlandığı gibi orta değer fonksiyonu olmak üzere $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ noktaları arasındaki disdyakis dodecahedron uzaklığı

$$\begin{aligned} d_{DD}(P_1, P_2) = \; & \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\} + \left(\sqrt{2} - 1\right) \text{mid}\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\} \\ & + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\} \end{aligned}$$

şeklinde de verilebilir.

**Yardımcı Teorem 4.1** *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\mathbb{R}^3$ de iki farklı nokta olsun.Bu takdirde,*

$$\begin{aligned} d_{DD}(P_1, P_2) &\geq |x_1 - x_2| + \left(\sqrt{2} - 1\right)(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|) + (\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1)|y_1 - y_2| \\ &= |x_1 - x_2| + \left(\sqrt{2} - 1\right)|z_1 - z_2| + (\sqrt{3} - \sqrt{2})|y_1 - y_2| \\ d_{DD}(P_1, P_2) &\geq |x_1 - x_2| + \left(\sqrt{2} - 1\right)(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|) + (\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1)|z_1 - z_2| \\ &= |x_1 - x_2| + \left(\sqrt{2} - 1\right)|y_1 - y_2| + (\sqrt{3} - \sqrt{2})|z_1 - z_2| \\ d_{DD}(P_1, P_2) &\geq |y_1 - y_2| + \left(\sqrt{2} - 1\right)(|x_1 - x_2| + |z_1 - z_2|) + (\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1)|z_1 - z_2| \\ &= |y_1 - y_2| + \left(\sqrt{2} - 1\right)|x_1 - x_2| + (\sqrt{3} - \sqrt{2})|z_1 - z_2| \\ d_{DD}(P_1, P_2) &\geq |y_1 - y_2| + \left(\sqrt{2} - 1\right)(|x_1 - x_2| + |z_1 - z_2|) + (\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1)|x_1 - x_2| \\ &= |y_1 - y_2| + \left(\sqrt{2} - 1\right)|z_1 - z_2| + (\sqrt{3} - \sqrt{2})|x_1 - x_2| \\ d_{DD}(P_1, P_2) &\geq |z_1 - z_2| + \left(\sqrt{2} - 1\right)(|y_1 - y_2| + |x_1 - x_2|) + (\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1)|x_1 - x_2| \\ &= |z_1 - z_2| + \left(\sqrt{2} - 1\right)|y_1 - y_2| + (\sqrt{3} - \sqrt{2})|x_1 - x_2| \\ d_{DD}(P_1, P_2) &\geq |z_1 - z_2| + \left(\sqrt{2} - 1\right)(|y_1 - y_2| + |x_1 - x_2|) + (\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1)|y_1 - y_2| \\ &= |z_1 - z_2| + \left(\sqrt{2} - 1\right)|x_1 - x_2| + (\sqrt{3} - \sqrt{2})|y_1 - y_2| \end{aligned}$$

*olur.*

**İspat** *$P_1$=$(x_1, y_1, z_1)$,$P_2$=$(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ olsun. $a$=max$\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}$, $b$=mid$\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}$ ve $c = \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}$ olmak üzere $a \geq b \geq c$ ve $1 \geq \left(\sqrt{2} - 1\right) \geq \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$ dir. O halde kolaylıkla*

$$
\begin{aligned}
a+\left(\sqrt{2}-1\right)b+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)c \geq\ & a+\left(\sqrt{2}-1\right)b+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)c \\
a+\left(\sqrt{2}-1\right)b+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)c \geq\ & a+\left(\sqrt{2}-1\right)c+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)b \\
a+\left(\sqrt{2}-1\right)b+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)c \geq\ & b+\left(\sqrt{2}-1\right)a+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)c \\
a+\left(\sqrt{2}-1\right)b+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)c \geq\ & b+\left(\sqrt{2}-1\right)c+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)a \\
a+\left(\sqrt{2}-1\right)b+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)c \geq\ & c+\left(\sqrt{2}-1\right)a+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)b \\
a+\left(\sqrt{2}-1\right)b+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)c \geq\ & c+\left(\sqrt{2}-1\right)b+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)a
\end{aligned}
$$

*olduğu ifade edilir. Buna göre yardımcı teoremin ifadesinin ispatı açıktır.*

**Önerme 4.1** *Analitik 3-uzayda $d_{DD}$ uzaklık fonksiyonu metriktir ve bu metrikle donatılmış uzayın birim küresi disdyakis dodecahedrondur.*

**İspat** *$d_{DD}$: $\mathbb{R}^3 x\, \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ disdyakis dodecahedron uzaklık fonksiyonu ve $P_1$=$(x_1, y_1, z_1)$, $P_2$=$(x_2, y_2, z_2)$ ve $P_3$=$(x_3, y_3, z_3)$ $\mathbb{R}^3$de üç farklı nokta olsun. $d_{DD}$ uzaklık fonksiyonu her $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^3$ için aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa $\mathbb{R}^3$de bir metriktir.*

$$
\begin{aligned}
&\textbf{\textit{M1)}} \quad d_{DD}\left(P_1, P_2\right) \geq 0 \text{ ve } d_{DD}\left(P_1, P_2\right) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2 \\
&\textbf{\textit{M2)}} \quad d_{DD}\left(P_1, P_2\right) = d_{DD}\left(P_2, P_1\right) \\
&\textbf{\textit{M3)}} \quad d_{DD}\left(P_1, P_3\right) \leq d_{DD}\left(P_1, P_2\right) + d_{DD}\left(P_2, P_3\right).
\end{aligned}
$$

***M1)** Mutlak değer daima negatif olmayan değerler taşıdığından mutlak değerli ifadelerin pozitif ifadelerle çarpılıp toplanması sonucu negatif olmayan değerler elde edilir. Böylece ,*

$$
\begin{aligned}
d_{DD}(P_1, P_2) = \ & \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\} + \left(\sqrt{2} - 1\right) \\
& \min\{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, |x_1 - x_2| + |z_1 - z_2|, |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|\} \\
& + \left(\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1\right) \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\} \geq 0
\end{aligned}
$$

*olur. Yani $d_{DD}$ pozitif tanımlıdır. Eğer*

$$
\begin{aligned}
d_{DD}(P_1, P_2) = \ & \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\} + \left(\sqrt{2} - 1\right) \\
& \min\{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, |x_1 - x_2| + |z_1 - z_2|, |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|\} \\
& + \left(\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1\right) \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\} = 0
\end{aligned}
$$

*ise $|x_1 - x_2|$=0, $|y_1 - y_2|$=0, $|z_1 - z_2|$=0 $\Longrightarrow$ $x_1$=$x_2$, $y_1$=$y_2$, $z_1$=$z_2$ $\Longrightarrow$ $P_1$=$P_2$ olur. Tersine $P_1 = P_2 \Longrightarrow |x_1 - x_2| = 0, |y_1 - y_2| = 0, |z_1 - z_2| = 0 \Longrightarrow d_{DD}(P_1, P_2) = 0$ bulunur.*
***M2)** Mutlak değerden dolayı $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|, |y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|, |z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$ olduğundan açıkça $d_{DD}(P_1, P_2) = d_{DD}(P_2, P_1)$ dir. Yani $d_{DD}$ simetriktir.*
***M3)** $P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ve $P_3 = (x_3, y_3, z_3) \in \mathbb{R}^3$ olsun.*

$$d_{DD}(P_1, P_3) \leq d_{DD}(P_1, P_2) + d_{DD}(P_2, P_3)$$

*olduğunu göstermeliyiz.*

$$
\begin{aligned}
& d_{DD}(P_1,P_3) \\
= \;& \max\{|x_3-x_1|,|y_3-y_1|,|z_3-z_1|\}+ \\
& \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{|x_3-x_1|+|y_3-y_1|,|x_3-x_1|+|z_3-z_1|,|y_3-y_1|+|z_3-z_1|\} \\
& +\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1\right)\min\{|x_3-x_1|,|y_3-y_2|,|z_3-z_1|\} \\
= \;& \max\{|x_3-x_2+x_2-x_1|,|y_3-y_2+y_2-y_1|,z_3-z_2+z_2-z_1)+ \\
& \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{|x_3-x_2+x_2-x_1|+|y_3-y_2+y_2-y_1|, \\
& |x_3-x_2+x_2-x_1|+|z_3-z_2+z_2-z_1|,|y_3-y_2+y_2-y_1|+|z_3-z_2+z_2-z_1|\} \\
& +\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1\right)\min\{|x_3-x_2+x_2-x_1|,|y_3-y_2+y_2-y_1|,|z_3-z_2+z_2-z_1|\} \\
\leq \;& \max\{|x_3-x_2|+|x_2-x_1|,|y_3-y_2|+|y_2-y_1|,|z_3-z_2|+|z_2-z_1|\} \\
& +\left(\sqrt{2}-1\right)\min\{|x_3-x_2|+|x_2-x_1|+|y_3-y_2|+|y_2-y_1|, \\
& |x_3-x_2|+|x_2-x_1|+|z_3-z_2|+|z_2-z_1|,|y_3-y_2|+|y_2-y_1|+|z_3-z_2|+|z_2-z_1|\} \\
& +\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1\right)\min\{|x_3-x_2|+|x_2-x_1|,|y_3-y_2|+|y_2-y_1|,|z_3-z_2|+|z_2-z_1|\} \\
\leq \;& \max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|,|z_1-z_2|\}+\left(\sqrt{2}-1\right) \\
& \min\{|x_1-x_2|+|y_1-y_2|,|x_1-x_2|+|z_1-z_2|,|y_1-y_2|+|z_1-z_2|\}+ \\
& \left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1\right)\min\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|,|z_1-z_2|\}+ \\
& \max\{|x_3-x_2|,|y_3-y_2|,|z_3-z_2|\}+\left(\sqrt{2}-1\right) \\
& \min\{|x_3-x_2|+|y_3-y_2|,|x_3-x_2|+|z_3-z_2|,|y_3-y_2|+|z_3-z_2|\} \\
& +\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1\right)\min\{|x_3-x_2|,|y_3-y_2|,|z_3-z_2|\} \\
= \;& X
\end{aligned}
$$

*dir. Buradan yardımcı teorem 3.1 den dolayı*

$$
\begin{aligned}
d_{DD}(P_1,P_2) \geq \;& \max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|,|z_1-z_2|\}+ \\
& \left(\sqrt{2}-1\right)\{\min|x_1-x_2|+|y_1-y_2|,|x_1-x_2|+|z_1-z_2|,|y_1-y_2|+|z_1-z_2|\} \\
& +\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1\right)\min\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|,|z_1-z_2|\} \\
d_{DD}(P_2,P_3) \geq \;& \max\{|x_3-x_2|,|y_3-y_2|,|z_3-z_2|\}+ \\
& \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{|x_3-x_2|+|y_3-y_2|,|x_3-x_2|+|z_3-z_2|,|y_3-y_2|+|z_3-z_2|\} \\
& +\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1\right)\min\{|x_3-x_2|,|y_3-y_2|,|z_3-z_2|\}
\end{aligned}
$$

*olur. O halde* $X \leq d_{DD}(P_1,P_2)+d_{DD}(P_2,P_3)$ *bulunur. Buna göre*

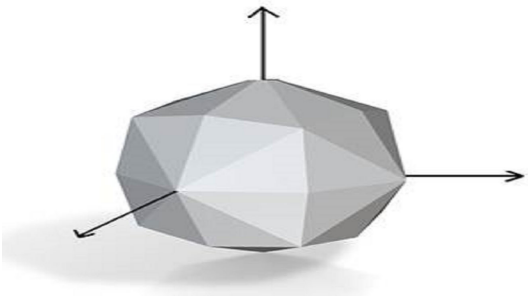
$$d_{DD}(P_1,P_3) \leq d_{DD}(P_1,P_2)+d_{DD}(P_2,P_3)$$

*elde edilir. Yani disdyakis dodecahedron uzaklık fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar.*

*Sonuç olarak disdyakis dodecahedron uzaklık fonksiyonu metriktir. Ayrıca bu metrikle döşenmiş analitik 3-uzayda orijinden 1 birim disdyakis dodecahedron uzaklığındaki noktaların kümesi;*

$$
S_{DD}=\left\{(x,y,z):\ \begin{array}{r}\max\{|x|,|y|,|z|\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\{|x|+|y|,|x|+|z|,|y|+|z|\} \\ +(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)\min\{|x|,|y|,|z|\}=1\end{array}\right\}
$$

*olup bu noktaların geometrik yeri şekil4.2 de görüldüğü üzere disdyakis dodecahedron bulunur.*

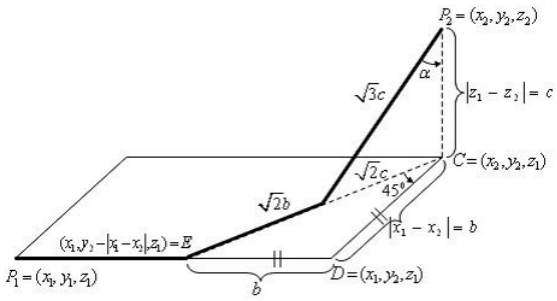


Şekil 4.2 Disdyakis dodecahedronun koordinat sistemine yerleştirilmesi

Disdyakis dodecahedron uzaklık fonksiyonu

$$\begin{aligned} d_{DD}(P_1,P_2) = \quad & \max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|,|z_1-z_2|\} \\ & + \left(\sqrt{2}-1\right)\text{mid}\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|,|z_1-z_2|\} \\ & + (\sqrt{3}-\sqrt{2})\min\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|,|z_1-z_2|\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre $P_1$ ve $P_2$ noktaları arasındaki uzaklık $\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|,|z_1-z_2|\}$ nin maksimum olanı, orta değerin $\left(\sqrt{2}-1\right)$ katı ile minimum olanın $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$ katının toplamıdır. $P_1$ noktasından geçen ve $\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|,|z_1-z_2|\}$ nin maksimum olanına ilişkin koordinat eksenine paralel olan doğru $l_1$ olsun. $\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|,|z_1-z_2|\}$ büyüklüklerinin orta değeri ve minimum olanına ilişkin eksenlere paralel doğrular sırasıyla $l_2$ ve $l_3$ ile gösterilsin. Geometrik olarak, $P_1$ noktasından $P_2$ noktasına olan yol biri $l_1$ doğrusuna paralel, diğerleri sırasıyla $l_2$ doğrusu ile $\frac{\pi}{4}$ radyanlık açı yapan ve $l_3$ doğrusu ile arctan$(\sqrt{2})$ açı yapan üç doğru parçasının birleşimidir. Böylece $P_1$ ve $P_2$ noktaları arasındaki disdyakis dodecahedron uzaklığı bu üç doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamıdır (Şekil4.3).




Şekil 4.3 Disdyakis dodecahedron yolu

**Sonuç 4.1** $\mathbb{R}^3_{DD}$ *de* $(x_0, y_0, z_0)$ *merkezli ve* $r$ *yarıçaplı küre*

$$\begin{aligned}\max\{|x-x_0|, |y-y_0|, |z-z_0|\} + \\ \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{|x-x_0|+|y-y_0|, |x-x_0|\,|z-z_0|, |y-y_0|+|z-z_0|\} + \\ (\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)\min\{|x-x_0|, |y-y_0|, |z-z_0|\} = r\end{aligned}$$

*veya*

$$\begin{aligned}\max\{|x-x_0|, |y-y_0|, |z-z_0|\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\text{mid}\{|x-x_0|, |y-y_0|, |z-z_0|\} \\ +(\sqrt{3}-\sqrt{2})\min\{|x-x_0|, |y-y_0|, |z-z_0|\} = r\end{aligned}$$

*denklemi ile ifade edilen köşe noktaları* $(0,0,r)$, $(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}, 0)$ *ve* $(\frac{r}{\sqrt{3}}, \frac{r}{\sqrt{3}}, \frac{r}{\sqrt{3}})$ *noktalarının herbir bileşeninin* $+/-$ *işaret değişiklikleri ve üç bileşenin tüm muhtemel permütasyonlarının* $(x_0, y_0, z_0)$ *kadar ötelenmişlerinden oluşan 48 yüzlü bir çokyüzlü olan disdyakis dodecahedrondur.*

Bu bölümün geri kalan kısmında sıkça kullanılacağından dolayı merkezil birim kürenin köşe noktaları aşağıdaki şekilde isimlendirilmiştir.

$$\begin{aligned}&A_0 = (0,0,r),\ A_1 = (0,0,-r),\ A_2 = (r,0,0),\ A_3 = (-r,0,0),\ A_4 = (0,r,0),\\ &A_5 = (0,-r,0),\ A_6 = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}r, 0, \tfrac{\sqrt{2}}{2}r\right),\ A_7 = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}r, 0, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}r\right),\ A_8 = \left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}r, 0, \tfrac{\sqrt{2}}{2}r\right),\\ &A_9 = \left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}r, 0, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}r\right),\ A_{10} = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}r, \tfrac{\sqrt{2}}{2}r, 0\right),\ A_{11} = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}r, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}r, 0\right),\\ &A_{12} = \left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}r, \tfrac{\sqrt{2}}{2}r, 0\right),\ A_{13} = \left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}r, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}r, 0\right),\ A_{14} = \left(0, \tfrac{\sqrt{2}}{2}r, \tfrac{\sqrt{2}}{2}r\right),\\ &A_{15} = \left(0, \tfrac{\sqrt{2}}{2}r, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}r\right),\ A_{16} = \left(0, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}r, \tfrac{\sqrt{2}}{2}r\right),\ A_{17} = \left(0, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}r, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}r\right),\\ &A_{18} = \left(\tfrac{\sqrt{3}}{3}r, \tfrac{\sqrt{3}}{3}r, \tfrac{\sqrt{3}}{3}r\right),\ A_{19} = \left(\tfrac{\sqrt{3}}{3}r, \tfrac{\sqrt{3}}{3}r, -\tfrac{\sqrt{3}}{3}r\right),\ A_{20} = \left(\tfrac{\sqrt{3}}{3}r, -\tfrac{\sqrt{3}}{3}r, \tfrac{\sqrt{3}}{3}r\right),\\ &A_{21} = \left(\tfrac{\sqrt{3}}{3}r, -\tfrac{\sqrt{3}}{3}r, -\tfrac{\sqrt{3}}{3}r\right),\ A_{22} = \left(-\tfrac{\sqrt{3}}{3}r, \tfrac{\sqrt{3}}{3}r, \tfrac{\sqrt{3}}{3}r\right),\ A_{23} = \left(-\tfrac{\sqrt{3}}{3}r, \tfrac{\sqrt{3}}{3}r, -\tfrac{\sqrt{3}}{3}r\right),\\ &A_{24} = \left(-\tfrac{\sqrt{3}}{3}r, -\tfrac{\sqrt{3}}{3}r, \tfrac{\sqrt{3}}{3}r\right),\ A_{25} = \left(-\tfrac{\sqrt{3}}{3}r, -\tfrac{\sqrt{3}}{3}r, -\tfrac{\sqrt{3}}{3}r\right).\end{aligned}$$

Aşağıdaki önermede $\mathbb{R}^3$ deki noktalar arasındaki Öklidyen ve disdyakis dodecahedron uzaklıkları arasındaki geçiş bağıntısını ifade eder.

**Önerme 4.2** $\mathbb{R}^3$ *de* $P_1$ *ve* $P_2$ *noktalarından geçen doğru* $l$ *olsun. Eğer* $l$ *doğrusunun doğrultu vektörü* $(p,q,r)$*,*

$$\begin{aligned}K = \max\{|p|, |q|, |r|\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{|p|+|q|, |p|+|r|, |q|+|r|\} \\ +\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1\right)\min\{|p|, |q|, |r|\}\end{aligned}$$

*ve*

$$\mu_{P_1P_2} = \frac{K}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

*ise*

$$d_{DD}(P_1, P_2) = \mu_{P_1P_2} d_E(P_1, P_2)$$

*olur.*

**İspat** $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ *ve* $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\mathbb{R}^3$ *deki herhangi iki nokta olsun.* $P_1$ *ve* $P_2$ *den geçen doğru* $l$ *ise*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \lambda$$

*dır.* $l$ *doğrusunun doğrultu vektörü* $(p, q, r)$ *olduğundan* $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = \lambda (p, q, r)$ *dır. Buna göre*

$$\begin{aligned} d_{DD}(P_1, P_2) = \lambda(&\max\{|p|, |q|, |r|\} + \left(\sqrt{2} - 1\right) \min\{|p| + |q|, |p| + |r|, |q| + |r|\} \\ &+ \left(\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1\right) \min\{|p|, |q|, |r|\}) \end{aligned}$$

*ve*

$$d_E(P_1, P_2) = \lambda\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$$

*olduğundan dolayı*

$$\frac{d_{DD}(P_1, P_2)}{K} = \frac{d_E(P_1, P_2)}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

*bulunur. Bu ise önermenin ifadesindeki sonucu verir.*

Yukarıdaki önerme herhangi bir doğru boyunca $d_{DD}(P_1, P_2)$ uzaklığının aynı doğru boyunca olan Öklidyen uzaklığın pozitif katı olduğu gösterir.Buna göre aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

**Sonuç 4.2** $\mathbb{R}^3$ *de A,B,X doğrudaş üç farklı nokta ise*

$$d_E(A, X) = d_E(B, X) \iff d_{DD}(A, X) = d_{DD}(B, X)$$

*olur.*

**Sonuç 4.3** *3-boyutlu analitik uzayda A, B, X doğrudaş üç farklı nokta ise*

$$d_{DD}(A, X)/d_{DD}(B, X) = d_E(A, X)/d_E(B, X)$$

*olur.*

Yani bir doğru boyunca olan $d_E$, $d_{DD}$ uzaklıklarının oranı aynıdır.

## 4.2 Disdyakis Dodecahedron İzometri Grubu

Disdyakis dodecahedron 48 tane simetriye sahip olup, simetri grubu $O_h$ ile gösterilir. Bu bölümde $d_{DD}$ metriği ile donatılmış analitik 3-uzayın $(\mathbb{R}^3_{DD})$ izometri grubu araştırılacaktır. Bunun için öncelikle hangi Öklidyen izometrilerin disdyakis dodecahedron uzaklığını koruduğu tespit edilecek daha sonra ise bu izometrilerden başka izometrilerin olmadığı gösterilecektir. $\alpha : \mathbb{R}^3_{DD} \to \mathbb{R}^3_{DD}$ dönüşüm olmak üzere her $X, Y \in \mathbb{R}^3_{DD}$ noktaları için

$$d_{DD}(X,Y) = d_{DD}(\alpha(X), \alpha(Y))$$

ise $\alpha$ dönüşümü $\mathbb{R}^3_{DD}$ de bir izometridir.

Aşağıda ifade edilen önermeler ile hangi Öklidyen izometrilerin disdyakis dodecahedron uzayında da izometri oldukları verilmektedir.

**Önerme 4.3** *$\mathbb{R}^3$de her Öklidyen öteleme $\mathbb{R}^3_{DD}$ ün bir izometrisidir.*

**İspat** *$A=(a_1,a_2,a_3)$, $X=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere $T_A : \mathbb{R}^3_{DD} \to \mathbb{R}^3_{DD}$, $T_A(X)=A+X$ olacak şekilde reel uzayda bir öteleme olsun. $P_1=(x_1,y_1,z_1)$, $P_2=(x_2,y_2,z_2) \in \mathbb{R}^3_{DD}$ için*

$$\begin{aligned} d_{DD}(T_A(P_1),T_A(P_2)) &= \max\{|a_1+x_1-a_1-x_2|,\ |a_2+y_1-a_2-y_2|,\ |a_3+z_1-a_3-z_2|\} \\ &\quad +(\sqrt{2}-1)\min\{|a_1+x_1-a_1-x_2|+|a_2+y_1-a_2-y_2|, \\ &\quad |a_1+x_1-a_1-x_2|+|a_3+z_1-a_3-z_2| \\ &\quad ,|a_2+y_1-a_2-y_2|+|a_3+z_1-a_3-z_2|\}+\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1\right)\min \\ &\quad \{|a_1+x_1-a_1-x_2|,\ |a_2+y_1-a_2-y_2|,\ |a_3+z_1-a_3-z_2|\} \\ &= \max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|,|z_1-z_2|\}+ \\ &\quad (\sqrt{2}-1)\min\{|x_1-x_2|+|y_1-y_2|,|x_1-x_2|+|z_1-z_2|,|y_1-y_2|+|z_1-z_2|\} \\ &\quad +\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1\right)\min\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|,|z_1-z_2|\} \\ &= d_{DD}(P_1,P_2) \end{aligned}$$

*dir. Bundan dolayı $T_A$ bir izometridir.*

Yukarıdaki önermeden dolayı $\mathbb{R}^3_{DD}$ uzayında dönme ve yansımaları bulmak için orijinden geçen düzlemleri düşünmek yeterli olacaktır.

**Önerme 4.4** *$\mathbb{R}^3_{DD}$ de $\Delta = ax+by+cz=0$ düzlemine göre yansımanın izometri olması için gerek ve yeter koşul düzlemin doğrultu vektörü $(a,b,c)$ nin*

$$D=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,0),(-1,1,0),(1,0,1),(1,0,-1),(0,1,1),(0,1,-1)\}$$

*elemanlarına paralel olmasıdır.*

**İspat** $\Delta : ax+by+cz=0$ *birim normali* $(a,b,c)$ *olan düzlem olmak üzere* $\sigma_\Delta : \mathbb{R}^3_{DD} \to \mathbb{R}^3_{DD}$ *Öklidyen yansıma*

$$\sigma_\Delta(x,y,z) = ((1-2a^2)x-2aby-2acz, -2abx+(1-2b^2)y-2bcz, -2acx-2bcy+(1-2c^2)z)$$

*biçiminde tanımlanır. Disdyakis dodecahedronun köşe noktaları* $A_2=(1,0,0)$, $A_4=(0,1,0)$, $A_0=(0,0,1)$ *konum vektörü olarak ele alındığında* $\mathbb{R}^3_{DD}$ *ün bir tabanı ve taban vektörlerini koruyan bir yansıma izometri olacağından bu tabanı koruyan yansımaları tespit etmek, izometrileri bulmak için yeterli olacaktır.Öklidyen yansımada taban vektörlerin yansıma altındaki görüntüleri*

$$\begin{aligned}\sigma_\Delta(1,0,0) &= (1-2a^2, -2ab, -2ac)\\ \sigma_\Delta(0,1,0) &= (-2ab, 1-2b^2, -2bc)\\ \sigma_\Delta(0,0,1) &= (-2ac, -2bc, 1-2c^2)\end{aligned}$$

*olur. Açıkça* $d_{DD}(O,A_2) = d_{DD}(O,A_4) = d_{DD}(O,A_0) = 1$ *dır.*

*Eğer yansıma* $d_{DD}$ *uzaklığını koruyor ise taban vektörlerinin yansıma altındaki görüntüleri için uzaklık korunmalıdır. Yani*

$$d_{DD}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(A_2)) = d_{DD}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(A_4)) = d_{DD}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(A_0)) = 1$$

*olmalıdır. Böylece*

$$\begin{aligned}
d_{DD}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(A_2)) = \;& \max\{|1-2a^2|, |2ab|, |2ac|\} +\\
& \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{|1-2a^2|+|2ab|, |1-2a^2|+|2ac|, |2ab|+|2ac|\}\\
& +\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1\right)\min\{|1-2a^2|, |2ab|, |2ac|\} = 1\\
d_{DD}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(A_4)) = \;& \max\{|2ab|, |1-2b^2|, |2bc|\} +\\
& (\sqrt{2}-1)\min\{|2ab|+|1-2b^2|, |2ab|+|2bc|, |1-2b^2|+|2bc|\}\\
& +\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1\right)\min\{|2ab|, |1-2b^2|, |2bc|\} = 1\\
d_{DD}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(A_0)) = \;& \max\{|2ac|, |2bc|, |1-2c^2|\} + (\sqrt{2}-1)\\
& \min\{|2ac|+|2bc|, |2ac|+|1-2c^2|, |2bc|+|1-2c^2|\}\\
& +\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1\right)\min\{|2ac|, |2bc|, |1-2c^2|\} = 1
\end{aligned}$$

*denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözülürse*

$$\begin{aligned}&(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0),(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0),(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}),\\ &(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}),(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}),(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})\end{aligned}$$

*sonuçları bulunur.*

*Tersine* $\sigma_\Delta(X) = Y$ *iken* $(p_1,q_1,r_1)$ *ve* $(p_2,q_2,r_2)$ $OX$ *ve* $OY$ *vektörlerinin doğrultu vektörleri sırasıyla* $(p_1,q_1,r_1)$ *ve* $(p_2,q_2,r_2)$ *ise önerme 3.2 den dolayı*

*$d_{DD}(O,X) = d_{DD}(O,Y)$ olması için $\mu_{OX} = \mu_{OY}$ olduğunu göstermek yeterlidir. Buna göre aşağıdaki liste $(p_2, q_2, r_2)$ doğrultusunun ilgili yansımaya göre $(p_1, q_1, r_1)$ cinsinden karşılığını vermektedir.*

| $\Delta$ | $(p_2, q_2, r_2)$ | $\Delta$ | $(p_2, q_2, r_2)$ |
|---|---|---|---|
| $x = 0$ | $(-p_1, q_1, r_1)$ | $x + z = 0$ | $(-2r_1, 2q_1, -2p_1)$ |
| $y = 0$ | $(p_1, -q_1, r_1)$ | $x - z = 0$ | $(2r_1, 2q_1, 2p_1)$ |
| $z = 0$ | $(p_1, q_1, -r_1)$ | $y + z = 0$ | $(2p_1, -2r_1, -2q_1)$ |
| $x + y = 0$ | $(-2q_1, -2p_1, 2r_1)$ | $y - z = 0$ | $(2p_1, 2r_1, 2q_1)$ |
| $x - z = 0$ | $(2q_1, 2p_1, 2r_1)$ | | |

*Böylelikle $\mu_{OX} = \mu_{OY}$ olduğu kolaylıkla görülebilir.*

**Sonuç 4.4** *Orijinden geçen düzlemlere göre izometrik yansımalarının kümesi $S_{DD}$ aşağıda denklemleri verilen 9 tane Öklidyen yansımadan oluşur.*

$$\{x = 0, y = 0, z = 0, x + y = 0, x - y = 0, x + z = 0, x - z = 0, y + z = 0, y - z = 0\}$$

Şekil4.4 deki tablo birim kürenin köşe noktalarının ilgili yansıma dönüşümü altındaki görüntülerini vermektedir.

| Yansıma Düzlemleri | x=0 | y=0 | z=0 | (1/√2,1/√2,0) | (1/√2,0,1/√2) | (0,1/√2,1/√2) | (1/√2,-1/√2,0) | (1/√2,0,-1/√2) | (0,1/√2,-1/√2) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A0 | A0 | A0 | A1 | A0 | A3 | A5 | A0 | A2 | A4 |
| A1 | A1 | A1 | A0 | A1 | A2 | A4 | A1 | A3 | A5 |
| A2 | A3 | A2 | A2 | A5 | A1 | A2 | A4 | A0 | A2 |
| A3 | A2 | A3 | A3 | A4 | A0 | A3 | A5 | A1 | A3 |
| A4 | A4 | A5 | A4 | A3 | A4 | A1 | A2 | A4 | A0 |
| A5 | A5 | A4 | A5 | A2 | A5 | A0 | A3 | A5 | A1 |
| A6 | A8 | A6 | A7 | A16 | A9 | A11 | A14 | A6 | A10 |
| A7 | A9 | A7 | A6 | A17 | A7 | A10 | A15 | A8 | A11 |
| A8 | A6 | A8 | A9 | A14 | A8 | A13 | A16 | A7 | A12 |
| A9 | A7 | A9 | A8 | A15 | A6 | A12 | A17 | A9 | A13 |
| A10 | A12 | A11 | A10 | A13 | A15 | A7 | A10 | A14 | A6 |
| A11 | A13 | A10 | A11 | A11 | A17 | A6 | A12 | A16 | A7 |
| A12 | A10 | A13 | A12 | A12 | A14 | A9 | A11 | A15 | A8 |
| A13 | A11 | A12 | A13 | A10 | A16 | A8 | A13 | A17 | A9 |
| A14 | A14 | A16 | A15 | A8 | A12 | A17 | A6 | A10 | A14 |
| A15 | A15 | A17 | A14 | A9 | A10 | A15 | A7 | A12 | A16 |
| A16 | A16 | A14 | A17 | A6 | A13 | A16 | A8 | A11 | A15 |
| A17 | A17 | A15 | A16 | A7 | A11 | A14 | A9 | A13 | A17 |
| A18 | A22 | A20 | A19 | A24 | A23 | A21 | A18 | A18 | A18 |
| A19 | A23 | A21 | A18 | A25 | A19 | A19 | A19 | A22 | A20 |
| A20 | A24 | A18 | A21 | A20 | A25 | A20 | A22 | A20 | A19 |
| A21 | A25 | A19 | A20 | A21 | A21 | A18 | A23 | A24 | A21 |
| A22 | A18 | A24 | A23 | A22 | A22 | A25 | A20 | A19 | A22 |
| A23 | A19 | A25 | A22 | A23 | A18 | A23 | A21 | A23 | A24 |
| A24 | A20 | A22 | A25 | A18 | A24 | A24 | A24 | A21 | A23 |
| A25 | A21 | A23 | A24 | A19 | A20 | A22 | A25 | A25 | A25 |

Şekil 4.4 $\mathbb{R}^3_{DD}$ de Yansıma Düzlemlerine Göre Köşe Noktaların Görüntüleri

**Önerme 4.5** *Orijinden geçen bir l doğrusuna göre $r_\theta$ dönmesinin izometri olması için gerek ve yeter koşul*

$$D_1 = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$$
$$D_2 = \{(1,1,1),\ (-1,1,1),(1,-1,1),\ (1,1,-1)\}$$
$$D_3 = \{(1,1,0),\ (1,0,1),(0,1,1),\ (1,-1,0),\ (1,0,-1),\ (0,1,-1)\}$$

*ve*

$$R_1 = \{r_\theta \mid \theta \in \{\pi/2\,,\,\pi,3\pi/2\},\ dönme\ ekseninin\ doğrultu\ vektörü\ D_1\ in\ elemanı\}$$
$$R_2 = \{r_\theta \mid \theta \in \{2\pi/3\,,\,4\pi/3\},\ dönme\ ekseninin\ doğrultu\ vektörü\ D_2\ nin\ elemanı\}$$
$$R_3 = \{r_\theta \mid \theta = \pi,\ dönme\ ekseninin\ doğrultu\ vektörü\ D_3\ ün\ elemanı\}$$

*olmak üzere $r_\theta \in R_{DD} = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ olmasıdır*

**İspat** *Bir $l$ doğrusunun birim doğrultusu $(p,q,r)$ olmak üzere, $l$ etrafında $r_\theta$ Öklidyen dönmenin matris formu;*

$$\begin{bmatrix} \cos\theta + p^2(1-\cos\theta) & pq(1-\cos\theta) - r\sin\theta & pr(1-\cos\theta) + q\sin\theta \\ pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta & \cos\theta + q^2(1-\cos\theta) & qr(1-\cos\theta) - p\sin\theta \\ pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta & qr(1-\cos\theta) + p\sin\theta & \cos\theta - r^2(1-\cos\theta) \end{bmatrix}$$

*şeklindedir. $l$ eksenindeki bir dönme , $l$ doğrusu boyunca kesişen iki düzlemin yansımalarının birleşimi olduğundan önerme 3.4 den $l$ doğrusunun doğrultu vektörleri $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,1)$, $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,-1,0)$, $(1,0,-1)$, $(0,1,-1)$ olarak alınabilir..*

*$\mathbb{R}^3_{DD}$ deki izometrik dönmelern bulunması için , $d_{DD}$ birim küresinin kenarlarının uzunluklarını koruyan dönmelerin bulunması yeterlidir.*

*$A_2 = (1,0,0)$ $A_{18} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $A_6 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $d_{DD}$ birim küresinin köşe noktaları ele alınsın. Buna göre*

$$r_\theta(A_2) = (\cos\theta + p^2(1-\cos\theta), pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta, pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta)$$
$$r_\theta(A_{18}) = (\tfrac{\sqrt{3}}{3}(\cos\theta + p^2(1-\cos\theta) + pq(1-\cos\theta) - r\sin\theta + pr(1-\cos\theta) + q\sin\theta),$$
$$\tfrac{\sqrt{3}}{3}[pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta + \cos\theta + q^2(1-\cos\theta) + qr(1-\cos\theta) - p\sin\theta,$$
$$pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta + qr(1-\cos\theta) + p\sin\theta + \cos\theta - r^2(1-\cos\theta)])$$
$$r_\theta(A_6) = ((\tfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta + p^2(1-\cos\theta) + \tfrac{\sqrt{2}}{2}(pr(1-\cos\theta) + q\sin\theta),$$
$$\tfrac{\sqrt{2}}{2}(pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta + \tfrac{\sqrt{2}}{2}(qr(1-\cos\theta) - p\sin\theta),$$
$$\tfrac{\sqrt{2}}{2}(pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta + \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta - r^2(1-\cos\theta)))$$

*bulunur. Açıkça $d_{DD}(A_2, A_{18}) = \frac{2\sqrt{6}}{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 1$ ve $d_{DD}(A_2, A_6) = 2\sqrt{2} - 2$ dir. O halde $\theta \neq 0$ olmak üzere eğer $r_\theta, d_{DD}$ uzaklığını koruması için*

$$d_{DD}(r_\theta(A_2), r_\theta(A_{18})) = \frac{2\sqrt{6}}{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 1 \quad ve \quad d_{DD}(r_\theta(A_2), r_\theta(A_6)) = 2\sqrt{2} - 2$$

*olmalıdır. Böylece*

$$K_1 = \left|(1-\tfrac{\sqrt{3}}{3})(\cos\theta + p^2(1-\cos\theta)) - \tfrac{\sqrt{3}}{3}(pq(1-\cos\theta) - r\sin\theta) - \tfrac{\sqrt{3}}{3}(pr(1-\cos\theta) + q\sin\theta)\right|,$$
$$L_1 = \left|(1-\tfrac{\sqrt{3}}{3})(pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta) - \tfrac{\sqrt{3}}{3}(\cos\theta + q^2(1-\cos\theta)) - \tfrac{\sqrt{3}}{3}(qr(1-\cos\theta) - p\sin\theta)\right|,$$
$$M_1 = \left|(1-\tfrac{\sqrt{3}}{3})(pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta) - \tfrac{\sqrt{3}}{3}(qr(1-\cos\theta) + p\sin\theta) - \tfrac{\sqrt{3}}{3}(\cos\theta + r^2(1-\cos\theta))\right|,$$
$$K_2 = \left|(1-\tfrac{\sqrt{2}}{2})(\cos\theta + p^2(1-\cos\theta)) - \tfrac{\sqrt{2}}{2}(pq(1-\cos\theta) - r\sin\theta)\right|,$$
$$L_2 = \left|(1-\tfrac{\sqrt{2}}{2})(pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta) - \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta + q^2(1-\cos\theta))\right| \quad \textit{ve}$$
$$M_2 = \left|(1-\tfrac{\sqrt{2}}{2})(pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta) - \tfrac{\sqrt{2}}{2}(qr(1-\cos\theta) + p\sin\theta)\right|$$

*olmak üzere*

$$\begin{aligned} d_{DD}(r_\theta(A_2), r_\theta(A_{18})) = {} & \max\{K_1, L_1, M_1\} + (\sqrt{2}-1)\min\{K_1+L_1, K_1+M_1, L_1+M_1\} \\ & +(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)\min\{K_1, L_1, M_1\} = \tfrac{2\sqrt{6}}{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 1 \\ d_{DD}(r_\theta(A_2), r_\theta(A_6)) = {} & \max\{K_2, L_2, M_2\} + (\sqrt{2}-1)\min\{K_2+L_2, K_2+M_2, L_2+M_2\} \\ & +(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)\min\{K_2, L_2, M_2\} = 2\sqrt{2} - 2 \end{aligned}$$

*elde edilir.*

*$l$ doğrusunun doğrultu vektörü (1,0,0) ise $(p,q,r)$= (1,0,0) olur. $p,q,r$ değerlerini $d_{DD}(r_\theta(A_2), r_\theta(A_{18})) = \frac{2\sqrt{6}}{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 1$ ve $d_{DD}(r_\theta(A_2), r_\theta(A_6)) = 2\sqrt{2} - 2$ de yerine yazılırsa, $K_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left|\cos\theta - \sin\theta\right|$, $L_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left|\cos\theta + \sin\theta\right|$, $M_1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$, $K_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left|\sin\theta\right|$, $L_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left|\cos\theta\right|$ ve $M_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ olmak üzere*

$$\begin{aligned} & \max\{K_1, L_1, M_1\} + (\sqrt{2}-1)\min\{K_1+L_1, K_1+M_1, L_1+M_1\} \\ & +(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)\min\{K_1, L_1, M_1\} = \tfrac{2\sqrt{6}}{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

*ve*

$$\begin{aligned} & \max\{K_2, L_2, M_2\} + (\sqrt{2}-1)\min\{K_2+L_2, K_2+M_2, L_2+M_2\} \\ & +(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)\min\{K_2, L_2, M_2\} = 2\sqrt{2} - 2 \end{aligned}$$

*denklemleri bulunur. Bu denklemler çözülürse $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi$, $\theta = 3\pi/2$ olur.Buradan $x$ ekseni etrafındaki $\theta = \pi/2$, $\pi$, $3\pi/2$ radyanlık dönmeler $\mathbb{R}^3_{DD}$ ün bir izometrisidir. Benzer şekilde $l$ nin yön vektörü (0,1,0) veya (0,0,1) ise $\theta = \pi/2$, $\pi$, $3\pi/2$ olarak bulunur.*

*$l$ doğrusunun yön vektörü (1,1,1) ise $(p,q,r) = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ olur. $p,q,r$ değerleri $d_{DD}(r_\theta(A_2), r_\theta(A_{18})) = \frac{2\sqrt{6}}{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 1$ ve $d_{DD}(r_\theta(A_2), r_\theta(A_6)) = 2\sqrt{2} - 2$ de yerine yazılırsa, $K_1 = \left|\frac{2\cos\theta + 1 - \sqrt{3}}{3}\right|$, $L_1 = \left|\frac{\cos\theta - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{3}\sin\theta}{3}\right|$, $M_1 = \left|\frac{\cos\theta - 1 + \sqrt{3} + \sqrt{3}\sin\theta}{3}\right|$, $K_2 = \left|\frac{(\sqrt{2}-1)(\cos -1) + \sqrt{3}\sin\theta}{3}\right|$, $L_2 = \left|\frac{(4-\sqrt{2})\cos\theta - \sqrt{6}\sin\theta + 2 - \sqrt{2}}{6}\right|$ ve $M_2 = \left|\frac{(\sqrt{6}-2\sqrt{3})\sin\theta - (2+\sqrt{2})\cos\theta + 2 - 2\sqrt{2}}{6}\right|$ olmak üzere*

$$\begin{aligned} & \max\{K_1, L_1, M_1\} + (\sqrt{2}-1)\min\{K_1+L_1, K_1+M_1, L_1+M_1\} \\ & +(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)\min\{K_1, L_1, M_1\} = \tfrac{2\sqrt{6}}{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

*ve*

$$\max\{K_2, L_2, M_2\} + (\sqrt{2}-1)\min\{K_2+L_2, K_2+M_2, L_2+M_2\} \\ +(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)\min\{K_2, L_2, M_2\} = 2\sqrt{2}-2$$

*elde edilir. Bu denklemler çözülürse* $\theta = 2\pi/3, , \theta = 4\pi/3$ *sonuçlarına ulaşılır.Buradan,* $l$ *etrafındaki* $\theta = 2\pi/3$, *4*$\pi/3$ *radyanlık dönmeler* $\mathbb{R}^3_{DD}$ *ün bir izometrisidir. Benzer şekilde* $l$ *nin yön vektörü* $(-1,1,1),(1,1,-1)$ *veya* $(1,-1,1)$ *ise* $\theta = 2\pi/3, 4\pi/3$ *olarak bulunur.*

$l$ *yön vektörü (1,1,0) ise*$(p,q,r)$=$(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$ *olur.* $p,q,r$ *değerleri değerleri* $d_{DD}(r_\theta(A_2), r_\theta(A_{18})) = \frac{2\sqrt{6}}{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 1$ *ve* $d_{DD}(r_\theta(A_2), r_\theta(A_6)) = 2\sqrt{2} - 2$ *de yerine yazılırsa,* $K_1 = \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta\right|$ , $L_1 = \left|\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{6}}{6}\sin\theta - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right|$ , $M_1 = \left|\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{6}}{6}\sin\theta + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right|$ , $K_2 = \left|\frac{(\sqrt{2}-1)\sin\theta + \sqrt{2}\cos\theta}{2}\right|$ , $L_2 = \left|\frac{(2-\sqrt{2})(1-\cos\theta)+2\sin\theta}{4}\right|$ *ve* $M_2 = \left|\frac{(2-\sqrt{2})(1+\cos\theta)-2\sin\theta}{4}\right|$ *olmak üzere*

$$\max\{K_1, L_1, M_1\} + (\sqrt{2}-1)\min\{K_1+L_1, K_1+M_1, L_1+M_1\} \\ +(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)\min\{K_1, L_1, M_1\} = \frac{2\sqrt{6}}{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 1$$

*ve*

$$\max\{K_2, L_2, M_2\} + (\sqrt{2}-1)\min\{K_2+L_2, K_2+M_2, L_2+M_2\} \\ +(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)\min\{K_2, L_2, M_2\} = 2\sqrt{2}-2$$

*denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülürse* $\theta = \pi$ *olur.Buradan* $l$ *etrafındaki* $\theta = \pi$ *radyanlık dönmeler* $\mathbb{R}^3_{DD}$ *ün bir izometrisidir. Benzer şekilde, eğer l'nin yön vektörü*

$$(1,0,1),(0,1,1),(1,-1,0),(1,0,-1),(0,1,-1)$$

*ise* $\theta = \pi$ *olur.*

*Tersine* $r_\theta(X) = Y$ *olacak şekilde* $X$ *ve* $Y$ *noktalarıyla oluşturulan* $OX$ *ve* $OY$ *doğrularının doğrultuları sırasıyla* $(p_1,q_1,r_1)$ *ve* $(p_2,q_2,r_2)$ *olmak üzere* $d_{DD}(O,X) = d_{DD}(O,Y)$ *olduğunu göstermek için önerme 3.2 den* $\mu_{OX} = \mu_{OY}$ *olduğu gösterilmelidir. Bu ise* $(p_1,q_1,r_1)$ *vektörünün tüm durumlar için görüntüleri bulunarak kolaylıkla gösterilebilir. Örneğin dönme ekseninin doğrultu vektörü (1,0,0) olmak üzere bu eksende* $\theta = \frac{\pi}{2}$ *radyanlık dönme dönüşümü yapılınca* $(p_2,q_2,r_2) = (p_1,-r_1,q_1)$ *bulunur. Buradan da* $\mu_{OX} = \mu_{OY}$ *olduğu görülür. benzer şekilde diğer dönme eksenleri ve dönme açıları için eşitlik gösterilebilir. Bu da ispatı tamamlar.*

**Sonuç 4.5** *Orijinden geçen doğrulara göre izometrik dönmelerin* $R_{DD}$ *kümesi tam olarak 23 Öklidyen dönme içerir.*

Şekil4.5 deki tablo birim kürenin köşe noktalarının ilgili dönme dönüşümleri altındaki görüntülerini vermektedir.

| Dönme Ekseni Doğrultu Vektörleri | Açılar | A0 | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 | A10 | A11 | A12 | A13 | A14 | A15 | A16 | A17 | A18 | A19 | A20 | A21 | A22 | A23 | A24 | A25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1,0,0) | π/2 | A5 | A4 | A2 | A3 | A0 | A1 | A11 | A10 | A13 | A12 | A6 | A7 | A8 | A9 | A16 | A14 | A17 | A15 | A20 | A18 | A21 | A19 | A24 | A22 | A25 | A23 |
| | π | A1 | A0 | A2 | A3 | A5 | A4 | A7 | A6 | A9 | A8 | A11 | A10 | A13 | A12 | A17 | A16 | A15 | A14 | A21 | A20 | A19 | A18 | A25 | A24 | A23 | A22 |
| | 3π/2 | A4 | A5 | A2 | A3 | A1 | A0 | A10 | A11 | A12 | A13 | A7 | A6 | A9 | A8 | A15 | A17 | A14 | A16 | A19 | A21 | A18 | A20 | A23 | A25 | A22 | A24 |
| (0,1,0) | π/2 | A2 | A3 | A1 | A0 | A4 | A5 | A7 | A9 | A6 | A8 | A15 | A17 | A14 | A16 | A10 | A12 | A11 | A13 | A19 | A23 | A21 | A25 | A18 | A22 | A20 | A24 |
| | π | A1 | A0 | A3 | A2 | A4 | A5 | A9 | A8 | A7 | A6 | A12 | A13 | A10 | A11 | A15 | A14 | A17 | A16 | A23 | A22 | A25 | A24 | A19 | A18 | A21 | A20 |
| | 3π/2 | A3 | A2 | A0 | A1 | A4 | A5 | A8 | A6 | A9 | A7 | A14 | A16 | A15 | A17 | A12 | A10 | A13 | A11 | A22 | A18 | A24 | A20 | A23 | A19 | A25 | A21 |
| (0,0,1) | π/2 | A0 | A1 | A4 | A5 | A3 | A2 | A14 | A15 | A16 | A17 | A12 | A10 | A13 | A11 | A8 | A9 | A6 | A7 | A22 | A23 | A18 | A19 | A24 | A25 | A20 | A21 |
| | π | A0 | A1 | A3 | A2 | A5 | A4 | A8 | A9 | A6 | A7 | A13 | A12 | A11 | A10 | A16 | A17 | A14 | A15 | A24 | A25 | A22 | A23 | A20 | A21 | A18 | A19 |
| | 3π/2 | A0 | A1 | A5 | A4 | A2 | A3 | A16 | A17 | A14 | A15 | A11 | A13 | A10 | A12 | A6 | A7 | A8 | A9 | A20 | A21 | A24 | A25 | A18 | A19 | A22 | A23 |
| (1/√2,1/√2,0) | π | A1 | A0 | A4 | A5 | A2 | A3 | A15 | A14 | A17 | A16 | A10 | A12 | A11 | A13 | A7 | A6 | A9 | A8 | A19 | A18 | A23 | A22 | A21 | A20 | A25 | A24 |
| (1/√2,0,1/√2) | π | A2 | A3 | A0 | A1 | A5 | A4 | A6 | A8 | A7 | A9 | A16 | A14 | A17 | A15 | A11 | A13 | A10 | A12 | A20 | A24 | A18 | A22 | A21 | A25 | A19 | A23 |
| (0,1/√2,1/√2) | π | A4 | A5 | A3 | A2 | A0 | A1 | A12 | A13 | A10 | A11 | A8 | A9 | A6 | A7 | A14 | A16 | A15 | A17 | A22 | A24 | A23 | A25 | A18 | A20 | A19 | A21 |
| (1/√2,-1/√2,0) | π | A1 | A0 | A5 | A4 | A3 | A2 | A17 | A16 | A15 | A14 | A13 | A11 | A12 | A10 | A9 | A8 | A7 | A6 | A25 | A24 | A21 | A20 | A23 | A22 | A19 | A18 |
| (1/√2,0,-1/√2) | π | A3 | A2 | A1 | A0 | A5 | A4 | A9 | A7 | A8 | A6 | A17 | A15 | A16 | A14 | A13 | A11 | A12 | A10 | A25 | A21 | A23 | A19 | A24 | A20 | A22 | A18 |
| (0,1/√2,-1/√2) | π | A5 | A4 | A3 | A2 | A1 | A0 | A13 | A12 | A11 | A10 | A9 | A8 | A7 | A6 | A17 | A15 | A16 | A14 | A25 | A23 | A24 | A22 | A21 | A19 | A20 | A18 |
| (1/√3,1/√3,1/√3) | 2π/3 | A2 | A3 | A4 | A5 | A0 | A1 | A10 | A12 | A11 | A13 | A14 | A15 | A16 | A17 | A6 | A8 | A7 | A9 | A18 | A22 | A19 | A23 | A20 | A24 | A21 | A25 |
| | 4π/3 | A4 | A5 | A0 | A1 | A2 | A3 | A14 | A16 | A15 | A17 | A6 | A8 | A7 | A9 | A10 | A11 | A12 | A13 | A18 | A20 | A22 | A24 | A19 | A21 | A23 | A25 |
| (-1/√3,1/√3,1/√3) | 2π/3 | A4 | A5 | A1 | A0 | A3 | A2 | A15 | A17 | A14 | A16 | A9 | A7 | A8 | A6 | A12 | A13 | A10 | A11 | A23 | A25 | A19 | A21 | A22 | A24 | A18 | A20 |
| | 4π/3 | A3 | A2 | A5 | A4 | A0 | A1 | A13 | A11 | A12 | A10 | A16 | A17 | A14 | A15 | A8 | A6 | A9 | A7 | A24 | A20 | A25 | A21 | A22 | A18 | A23 | A19 |
| (1/√3,-1/√3,1/√3) | 2π/3 | A5 | A4 | A0 | A1 | A3 | A2 | A16 | A14 | A17 | A15 | A8 | A6 | A9 | A7 | A13 | A12 | A11 | A10 | A24 | A22 | A20 | A18 | A25 | A23 | A21 | A19 |
| | 4π/3 | A2 | A3 | A5 | A4 | A1 | A0 | A11 | A13 | A10 | A12 | A17 | A16 | A15 | A14 | A7 | A9 | A6 | A8 | A21 | A25 | A20 | A24 | A19 | A23 | A18 | A22 |
| (1/√3,1/√3,-1/√3) | 2π/3 | A5 | A4 | A1 | A0 | A2 | A3 | A17 | A15 | A16 | A14 | A7 | A9 | A6 | A8 | A11 | A10 | A13 | A12 | A21 | A19 | A25 | A23 | A20 | A18 | A24 | A22 |
| | 4π/3 | A3 | A2 | A4 | A5 | A1 | A0 | A12 | A10 | A13 | A11 | A15 | A14 | A17 | A16 | A9 | A7 | A8 | A6 | A23 | A19 | A22 | A18 | A25 | A21 | A24 | A20 |

Şekil 4.5 $\mathbb{R}^3_{DD}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

**Yardımcı Teorem 4.2** *$(x, y, z)$ noktasını $(-x, -y, -z)$ noktasına eşleyen dönüşüm olan orijine göre $\sigma_O$ inversiyonu (noktaya göre yansıma) $\mathbb{R}^3_{DD}$ nin bir izometrisidir.*

Şekil4.6 daki tabloda inversiyon dönüşümü altında birim kürenin köşe noktalarının görüntüleri verilmektedir.

| İnversiyonAltında Nokta Görüntüleri | A0 | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 | A10 | A11 | A12 | A13 | A14 | A15 | A16 | A17 | A18 | A19 | A20 | A21 | A22 | A23 | A24 | A25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $O$=(O,O,O) | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A9 | A8 | A7 | A6 | A13 | A12 | A11 | A10 | A17 | A16 | A15 | A14 | A25 | A24 | A23 | A22 | A21 | A20 | A19 | A18 |

Şekil 4.6 $\mathbb{R}^3_{DD}$ de $\sigma_O$ İnversiyonu Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

**Önerme 4.6** *$d_{DD}$ uzaklığını invaryant bırakan orijine göre altı tane dönme yansıması vardır.*

**İspat** *$r_\theta \in R_{DD}$, $\Gamma$ ve $\Delta$ düzlemleri, $\Pi$ düzlemine dik olmak üzere dönme yansıma $\rho$ : $\sigma_\Pi \sigma_\Delta \sigma_\Gamma = \sigma_\Pi r_\theta$ şeklinde ifade edilebilir. O halde dönme ekseni yansıma düzlemine dik olmak zorundadır. Bu nedenle önerme 3.5 deki dönme eksenlerinden 9 tanesi incelenmelidir. Çünkü $D_2$ de verilen dönme eksenlerinin hiçbiri önerme 3.4 de verilen yansıma düzlemlerne dik değildir. $\Pi$ düzlemi olarak $x = 0$ düzlemi alınırsa $r_\theta$ nın birim doğrultusu (1,0,0) olup*

$$\rho : \sigma_{\Pi} r_{\theta}(x,y,z) = (-x, y\cos\theta - z\sin\theta, y\sin\theta + z\cos\theta)$$

*bulunur.*

$$\begin{aligned}
&\rho(A_2) = \rho(1,0,0) = (-1,0,0)\\
&\rho(A_{18}) = \rho(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}) = (-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}cos\theta - \tfrac{1}{\sqrt{3}}sin\theta, \tfrac{1}{\sqrt{3}}sin\theta + \tfrac{1}{\sqrt{3}}cos\theta)\\
&\rho(A_6) = \rho(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) = (-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}sin\theta, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}cos\theta)
\end{aligned}$$

*elde edilir.* $d_{DD}(\rho(A_2), \rho(A_{18})) = d_{DD}(A_2, A_{18})$ *ve* $d_{DD}(\rho(A_2), \rho(A_6)) = d_{DD}(A_2, A_6)$ *olmak zorunda olduğundan* $K_1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ , $L_1 = \left|\frac{\sqrt{3}}{3}(cos\theta - sin\theta)\right|$ , $M_1 = \left|\frac{\sqrt{3}}{3}(cos\theta + sin\theta)\right|$ , $K_2 = \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right|$ , $L_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ *ve* $M_2 = \left|\frac{(2-\sqrt{2})(1+\cos\theta) - 2\sin\theta}{4}\right|$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned}
\max\{K_1, L_1, M_1\} + (\sqrt{2}-1)\min\{K_1 + L_1, K_1 + M_1, L_1 + M_1\}\\
+(\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1)\min\{K_1, L_1, M_1\} = \tfrac{2\sqrt{6}}{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 1
\end{aligned}$$

*ve*

$$\begin{aligned}
\max\{K_2, L_2, M_2\} + (\sqrt{2}-1)\min\{K_2 + L_2, K_2 + M_2, L_2 + M_2\}\\
+(\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1)\min\{K_2, L_2, M_2\} = 2\sqrt{2} - 2
\end{aligned}$$

*denklemlerine ulaşılır. Bu denklemler çözülürse* $\theta = \pi/2$, $\pi$,$3\pi/2$ *bulunur. Burada elde edilen sonuçlardan kolaylıkla* $\sigma_{\Pi} r_{\pi} = \sigma_0$ *olduğu gösterilebilir. O halde* $x = 0$ *düzlemine göre 2 dönme yansıması elde edilir. Benzer şekilde* $\Pi$ *olarak* $y = 0$ *ve* $z = 0$ *düzlemlerine göre 2 şer tane dönme yansıma elde edilir.*

*Eğer* $\Pi$ *düzlemi olarak* $x + y = 0$ *düzlemi alınırsa* $r_{\theta}$ *dönmesinin birim doğrultusu* $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ *olup*

$$\begin{aligned}
\rho : \sigma_{\Pi} r_{\theta}(x,y,z) = (\tfrac{cos\theta - 1}{2})x - (\tfrac{1+\cos\theta}{2})y + (\tfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}})z\\
(\tfrac{-cos\theta - 1}{2})x - (\tfrac{-1+\cos\theta}{2})y + (\tfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}})z\\
(-\tfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}})x + (\tfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}})y + cos\theta z)
\end{aligned}$$

*olur. Ayrıca*

$$\begin{aligned}
\rho(A_2) = &\quad (\tfrac{cos\theta - 1}{2},\ \tfrac{-cos\theta - 1}{2},\ -\tfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}})\\
\rho(A_{18}) = &\quad (\tfrac{1}{\sqrt{3}}(-1 + \tfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}}), \tfrac{1}{\sqrt{3}}(-1 - \tfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}}), \tfrac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta)\\
\rho(A_6) = &\quad (-\tfrac{\sqrt{2}}{2}(\tfrac{1-\cos\theta}{2}) + \tfrac{\sin\theta}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}(\tfrac{1+\cos\theta}{2}) - \tfrac{\sin\theta}{2}, -\tfrac{\sin\theta}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta)
\end{aligned}$$

*bulunur. Buradan* $d_{DD}(\rho(A_2), \rho(A_{18})) = \frac{2\sqrt{6}}{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 1$ *ve* $d_{DD}(\rho(A_2), \rho(A_6)) = 2\sqrt{2} - 2$ *olması gerektiğinden,* $K_1 = \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta\right|$ , $L_1 = \left|\frac{\cos\theta - 1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{6}\sin\theta}{6}\right|$ , $M_1 = \left|\frac{\cos\theta + 1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{6}\sin\theta}{6}\right|$ , $K_2 = \left|\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\sin\theta + \sqrt{2}\cos\theta}{2}\right|$ , $L_2 = \left|(\sqrt{2}-1)\frac{\cos\theta - 1}{2} - \frac{\sin\theta}{2}\right|$ *ve* $M_2 = \left|(\sqrt{2}-1)\frac{\cos\theta - +1}{2} + \frac{\sin\theta}{2}\right|$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned}
\max\{K_1, L_1, M_1\} + (\sqrt{2}-1)\min\{K_1 + L_1, K_1 + M_1, L_1 + M_1\}\\
+(\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1)\min\{K_1, L_1, M_1\} = \tfrac{2\sqrt{6}}{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 1
\end{aligned}$$

*ve*

$$\max\{K_2, L_2, M_2\} + (\sqrt{2}-1)\min\{K_2+L_2, K_2+M_2, L_2+M_2\}$$
$$+(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)\min\{K_2, L_2, M_2\} = 2\sqrt{2}-2$$

*denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülürse* $\theta = \pi$ *sonucu elde edilir. Burada elde olunan sonuca göre* $\sigma_\Pi r_\pi = \sigma_O$ *dönüşümü O =(0,0,0) göre inversiyon olduğundan bu durumda yeni bir dönme yansıması yoktur.* $\Pi$, $x-y=0, x+z=0, x-z=0, y+z=0, y-z=0$ *düzlemlerinden herhangi biri ise dönme ekseninin doğrultusu (1,-1,0), (1,0,1), (1,0,-1), (0,1,1), (0,1,-1) olup bu durumların herbirinde* $\theta = \pi$ *sonucuna ulaşılır. Bu sonuç ise orijine göre inversiyon olduğundan bu durumların hiçbirinde bir dönme yansıması yoktur.*

Şekil4.7 deki tablo birim kürenin köşe noktalarının ilgili dönme-yansıma dönüşümleri altındaki görüntülerini vermektedir.

| Yansıma Düzlemi Normali Olan Dönme Ekseni Doğrultu Vektörleri | Açılar | A0 | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 | A10 | A11 | A12 | A13 | A14 | A15 | A16 | A17 | A18 | A19 | A20 | A21 | A22 | A23 | A24 | A25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1,0,0) | π/2 | A5 | A4 | A3 | A2 | A0 | A1 | A13 | A12 | A11 | A10 | A8 | A9 | A6 | A7 | A16 | A14 | A17 | A15 | A24 | A22 | A25 | A23 | A20 | A18 | A21 | A19 |
| | π | A2 | A3 | A1 | A0 | A5 | A4 | A7 | A9 | A6 | A8 | A17 | A15 | A16 | A14 | A11 | A13 | A10 | A12 | A21 | A25 | A19 | A23 | A20 | A24 | A18 | A22 |
| | 3π/2 | A1 | A0 | A4 | A5 | A3 | A2 | A15 | A14 | A17 | A16 | A12 | A10 | A13 | A11 | A9 | A8 | A7 | A6 | A23 | A22 | A19 | A18 | A25 | A24 | A21 | A20 |
| (0,1,0) | π/2 | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A9 | A8 | A7 | A6 | A13 | A12 | A11 | A10 | A17 | A16 | A15 | A14 | A25 | A24 | A23 | A22 | A21 | A20 | A19 | A18 |
| | π | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A9 | A8 | A7 | A6 | A13 | A12 | A11 | A10 | A17 | A16 | A15 | A14 | A25 | A24 | A23 | A22 | A21 | A20 | A19 | A18 |
| | 3π/2 | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A9 | A8 | A7 | A6 | A13 | A12 | A11 | A10 | A17 | A16 | A15 | A14 | A25 | A24 | A23 | A22 | A21 | A20 | A19 | A18 |
| (0,0,1) | π/2 | A4 | A5 | A3 | A2 | A1 | A0 | A12 | A13 | A10 | A11 | A9 | A8 | A7 | A6 | A15 | A17 | A14 | A16 | A23 | A25 | A22 | A24 | A19 | A21 | A18 | A20 |
| | π | A3 | A2 | A0 | A1 | A5 | A4 | A8 | A6 | A9 | A7 | A16 | A14 | A17 | A15 | A13 | A11 | A12 | A10 | A24 | A20 | A22 | A18 | A25 | A21 | A23 | A19 |
| | 3π/2 | A1 | A0 | A5 | A4 | A2 | A3 | A17 | A16 | A15 | A14 | A11 | A13 | A10 | A12 | A7 | A6 | A9 | A8 | A21 | A20 | A25 | A24 | A19 | A18 | A23 | A22 |
| (1/√2,1/√2,0) | π | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A9 | A8 | A7 | A6 | A13 | A12 | A11 | A10 | A17 | A16 | A15 | A14 | A25 | A24 | A23 | A22 | A21 | A20 | A19 | A18 |
| (1/√2,0,1/√2) | π | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A9 | A8 | A7 | A6 | A13 | A12 | A11 | A10 | A17 | A16 | A15 | A14 | A25 | A24 | A23 | A22 | A21 | A20 | A19 | A18 |
| (0,1/√2,1/√2) | π | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A9 | A8 | A7 | A6 | A13 | A12 | A11 | A10 | A17 | A16 | A15 | A14 | A25 | A24 | A23 | A22 | A21 | A20 | A19 | A18 |
| (1/√2,-1/√2,0) | π | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A9 | A8 | A7 | A6 | A13 | A12 | A11 | A10 | A17 | A16 | A15 | A14 | A25 | A24 | A23 | A22 | A21 | A20 | A19 | A18 |
| (1/√2,0,-1/√2) | π | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A9 | A8 | A7 | A6 | A13 | A12 | A11 | A10 | A17 | A16 | A15 | A14 | A25 | A24 | A23 | A22 | A21 | A20 | A19 | A18 |
| (0,1/√2,-1/√2) | π | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A9 | A8 | A7 | A6 | A13 | A12 | A11 | A10 | A17 | A16 | A15 | A14 | A25 | A24 | A23 | A22 | A21 | A20 | A19 | A18 |

Şekil 4.7 $\mathbb{R}^3_{DD}$ de Dönme Yansıma Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

**Önerme 4.7** *$d_{DD}$ uzaklığını değişmez bırakan orijine göre sekiz tane dönme inversiyonu vardır.*

**İspat** *Bir dönme inversiyon* $r_\theta \in \mathbb{R}_{TH}$ *olmak üzere,*$\rho : \sigma_O\sigma_\Delta\sigma_\Gamma = \sigma_O r_\theta$ *şeklinde ifade edilir. Buna göre önerme 3.5 deki dönme eksenleri için 13 durum gözönüne alınmalıdır.* $r_\theta$, $x$ *ekseni etrafında dönme olarak tanımlanırsa,* $r_\theta$ *nın birim vektörü (1,0,0) olur ve* $\rho : \sigma_O r_\theta$ $(x,y,z) = (-x, -ycos\theta + zsin\theta, -ysin\theta - zcos\theta)$ *bulunur. Ayrıca*

$$\rho(A_2) = \rho(1,0,0) = (-1,0,0)$$
$$\rho(A_{18}) = \rho(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}) = (-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}cos\theta + \tfrac{1}{\sqrt{3}}sin\theta, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}sin\theta - \tfrac{1}{\sqrt{3}}cos\theta)$$
$$\rho(A_6) = \rho(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) = (-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}sin\theta, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}cos\theta)$$

*olup* $d_{DD}(\rho(A_2),\rho(A_{18})) = \frac{2\sqrt{6}}{3}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-1$ *ve* $d_{DD}(\rho(A_2),\rho(A_6)) = 2\sqrt{2}-2$ *olmak zorunda olduğundan* $K_1 = 1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ , $L_1 = \left|\frac{\sqrt{3}}{3}(cos\theta - sin\theta)\right|$ , $M_1 = \left|\frac{\sqrt{3}}{3}(cos\theta + sin\theta)\right|$ , $K_2 = \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right|$ , $L_2 = \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right|$ *ve* $M_2 = \left|\frac{\sqrt{3}}{3}(\cos\theta+\sin\theta\right|$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned}\max\{K_1,L_1,M_1\}+(\sqrt{2}-1)\min\{K_1+L_1,K_1+M_1,L_1+M_1\}\\ +(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)\min\{K_1,L_1,M_1\} = \tfrac{2\sqrt{6}}{3}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-1\end{aligned}$$

*ve*

$$\begin{aligned}\max\{K_2,L_2,M_2\}+(\sqrt{2}-1)\min\{K_2+L_2,K_2+M_2,L_2+M_2\}\\ +(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)\min\{K_2,L_2,M_2\} = 2\sqrt{2}-2\end{aligned}$$

*denklemlerine ulaşılır. Bu denklemler çözülürse* $\theta = \pi/2, \pi, 3\pi/2$ *sonuçları bulunur. Burada* $\sigma_O r_\theta$ *bir dönme yansıması veya yansıma olduğundan yeni bir dönme inversiyonu yoktur. Benzer şekilde* $y$ *ve* $z$ *eksenleri için de yeni bir dönme inversiyonu yoktur.*

$r_\theta$,*doğrultu vektörü* $(1,1,0)$ *olan* $l$ *doğrusu etrafında ki dönme olmak üzere* $r_\theta$ *nın birim vektörü* $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ *olur ve*

$$\begin{aligned}\rho : \sigma_O r_\theta(x,y,z) = ((\tfrac{-cos\theta-1}{2})x + (\tfrac{-1+\cos\theta}{2})y - (\tfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}})z\\ (\tfrac{cos\theta-1}{2})x + (\tfrac{-1-\cos\theta}{2})y + (\tfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}})z\\ (\tfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}})x - (\tfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}})y - cos\theta z)\end{aligned}$$

*bulunur. Buna göre*

$$\begin{aligned}\rho(A_2) = &\quad (\tfrac{-cos\theta-1}{2},\ \tfrac{cos\theta-1}{2},\ \tfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}})\\ \rho(A_{18}) = &\quad (\tfrac{1}{\sqrt{3}}(-1-\tfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}}), \tfrac{1}{\sqrt{3}}(-1+\tfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}}), -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta)\\ \rho(A_6) = &\quad (-\tfrac{\sqrt{2}}{2}(\tfrac{\cos\theta+1}{2}) - \tfrac{\sin\theta}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}(\tfrac{1-\cos\theta}{2}) + \tfrac{\sin\theta}{2}, \tfrac{\sin\theta}{2} - \tfrac{\sqrt{2}cos\theta}{2})\end{aligned}$$

*olur. O halde* $d_{DD}(\rho(A_2),\rho(A_{18})) = \frac{2\sqrt{6}}{3}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-1$ *ve* $d_{DD}(\rho(A_2),\rho(A_6)) = 2\sqrt{2}-2$ *olması gerektiğinden* $K_1 = \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta\right|$ , $L_1 = \left|\frac{\cos\theta-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{6}\sin\theta}{6}\right|$ , $M_1 = \left|\frac{\cos\theta+1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{6}\sin\theta}{6}\right|$ , $K_2 = \left|\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta}{2}\right|$ , $L_2 = \left|\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)\left(\frac{\cos\theta-1}{2}\right)-\frac{\sin\theta}{2}\right|$ *ve* $M_2 = \left|\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)\left(\frac{\cos\theta+1}{2}\right)+\frac{\sin\theta}{2}\right|$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned}\max\{K_1,L_1,M_1\}+(\sqrt{2}-1)\min\{K_1+L_1,K_1+M_1,L_1+M_1\}\\ +(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)\min\{K_1,L_1,M_1\} = \tfrac{2\sqrt{6}}{3}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-1\end{aligned}$$

*ve*

$$\begin{aligned}\max\{K_2,L_2,M_2\}+(\sqrt{2}-1)\min\{K_2+L_2,K_2+M_2,L_2+M_2\}\\ +(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)\min\{K_2,L_2,M_2\} = 2\sqrt{2}-2\end{aligned}$$

*denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülürse* $\theta = \pi$ *sonucuna ulaşılır. Buradan* $\sigma_O r_\theta$ *bir dönme yansıması veya yansıma olduğundan yeni bir dönme inversiyonu yoktur.Benzer şekilde*

*$r_\theta$ , (1,-1,0), (1,0,1), (1,0,-1), (0,1,1), (0,1,-1) e paralel dönme eksenlerinden herhangi biri ise yeni bir dönme inversiyonu yoktur.*

*$r_\theta$ doğrultu vektörü (1,1,1) olan $l$ doğrusu etrafında ki dönme ise $r_\theta$ nın birim vektörü $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ olacağından*

$$\begin{aligned}\rho : \sigma_O r_\theta(x,y,z) = ((\tfrac{-2\cos\theta-1}{3})x + (\tfrac{\cos\theta+\sqrt{3}sin\theta-1}{3})y + (\tfrac{\cos\theta-\sqrt{3}sin\theta-1}{3})z \\ (\tfrac{\cos\theta-\sqrt{3}sin\theta-1}{3})x + (\tfrac{-1-2\cos\theta}{3})y + (\tfrac{\cos\theta+\sqrt{3}sin\theta-1}{3})z \\ (\tfrac{\cos\theta+\sqrt{3}sin\theta-1}{3})x + (\tfrac{\cos\theta-\sqrt{3}sin\theta-1}{3})y + (\tfrac{-1-2\cos\theta}{3}z))\end{aligned}$$

*şeklinde bulunur. Bu taktirde*

$$\begin{aligned}&\rho(A_2) = ((\tfrac{-2\cos\theta-1}{3}),\ (\tfrac{\cos\theta-\sqrt{3}sin\theta-1}{3}),\ (\tfrac{\cos\theta+\sqrt{3}sin\theta-1}{3})) \\ &\rho(A_{18}) = (-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}) \\ &\rho(A_6) = (-\tfrac{\sqrt{2}}{6}(\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta + 2), \tfrac{\sqrt{3}}{2}(-1+\cos\theta), \tfrac{\sqrt{2}}{6}(-2-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta))\end{aligned}$$

*olup, $d_{DD}(\rho(A_2), \rho(A_{18})) = \frac{2\sqrt{6}}{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 1$ ve $d_{DD}(\rho(A_2), \rho(A_6)) = 2\sqrt{2} - 2$ olmak zorunda olduğundan, $K_1 = \left|\frac{2\cos\theta+1-\sqrt{3}}{3}\right|$ , $L_1 = \left|\frac{\cos\theta-1-\sqrt{3}\sin\theta+\sqrt{3}}{3}\right|$ , $M_1 = \left|\frac{-1+\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta+\sqrt{3}}{3}\right|$ , $K_2 = \left|\frac{(\sqrt{2}-4)\cos\theta+\sqrt{6}\sin\theta+2\sqrt{2}-2}{6}\right|$ , $L_2 = \left|(\sqrt{2}+1)\left(\frac{\cos\theta-1}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right|$ ve $M_2 = \left|\frac{(2+\sqrt{2})\cos\theta+(2\sqrt{3}-\sqrt{6})\sin\theta-2+2\sqrt{2}}{6}\right|$ olmak üzere*

$$\begin{aligned}\max\{K_1, L_1, M_1\} + (\sqrt{2}-1)\min\{K_1+L_1, K_1+M_1, L_1+M_1\} \\ +(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)\min\{K_1, L_1, M_1\} = \tfrac{2\sqrt{6}}{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 1\end{aligned}$$

*ve*

$$\begin{aligned}\max\{K_2, L_2, M_2\} + (\sqrt{2}-1)\min\{K_2+L_2, K_2+M_2, L_2+M_2\} \\ +(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)\min\{K_2, L_2, M_2\} = 2\sqrt{2} - 2\end{aligned}$$

*elde edilir. Bu denklemler çözülürse $\theta = 2\pi/3, 4\pi/3$ sonuçları bulunur. Bu durumda (1,1,1) doğrultu vektörünü alan $l$ doğrusu etrafındaki dönme kullanılarak 2 tane dönme inversiyonu elde edilir. Benzer şekilde (-1,1,1), (1,-1,1), (1,1,-1)doğrultu etrafındaki dönme kullanılarak herbiri için iki yeni dönme inversiyon elde edilir. O halde $d_{DD}$ uzaklığını koruyan tam olarak sekiz dönme inversiyonu vardır.*

Şekil4.8 deki tablo birim kürenin köşe noktalarının ilgili dönme-inversiyon dönüşümü altındaki görüntülerini vermektedir.

| Dönme Ekseni Doğrultu Vektörleri | Açılar | A0 | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 | A10 | A11 | A12 | A13 | A14 | A15 | A16 | A17 | A18 | A19 | A20 | A21 | A22 | A23 | A24 | A25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1,0,0) | π/2 | A4 | A5 | A3 | A2 | A1 | A0 | A12 | A13 | A10 | A11 | A9 | A8 | A7 | A6 | A15 | A17 | A14 | A16 | A23 | A25 | A22 | A24 | A19 | A21 | A18 | A20 |
| | π | A0 | A1 | A3 | A2 | A4 | A5 | A8 | A9 | A6 | A7 | A12 | A13 | A10 | A11 | A14 | A15 | A16 | A17 | A22 | A23 | A24 | A25 | A18 | A19 | A20 | A21 |
| | 3π/2 | A5 | A4 | A3 | A2 | A0 | A1 | A13 | A12 | A11 | A10 | A8 | A9 | A6 | A7 | A16 | A14 | A17 | A15 | A24 | A22 | A25 | A23 | A20 | A18 | A21 | A19 |
| **(0,1,0)** | π/2 | A3 | A2 | A0 | A1 | A5 | A4 | A8 | A6 | A9 | A7 | A16 | A14 | A17 | A15 | A13 | A11 | A12 | A10 | A24 | A20 | A22 | A18 | A25 | A21 | A23 | A19 |
| | π | A0 | A1 | A2 | A3 | A5 | A4 | A6 | A7 | A8 | A9 | A11 | A10 | A13 | A12 | A16 | A17 | A14 | A15 | A20 | A21 | A18 | A19 | A24 | A25 | A22 | A23 |
| | 3π/2 | A2 | A3 | A1 | A0 | A5 | A4 | A7 | A9 | A6 | A8 | A17 | A15 | A16 | A14 | A11 | A13 | A10 | A12 | A21 | A25 | A19 | A23 | A20 | A24 | A18 | A22 |
| (0,0,1) | π/2 | A1 | A0 | A5 | A4 | A2 | A3 | A17 | A16 | A15 | A14 | A11 | A13 | A10 | A12 | A7 | A6 | A9 | A8 | A21 | A20 | A25 | A24 | A19 | A18 | A23 | A22 |
| | π | A1 | A0 | A2 | A3 | A4 | A5 | A7 | A6 | A9 | A8 | A10 | A11 | A12 | A13 | A15 | A14 | A17 | A16 | A19 | A18 | A21 | A20 | A23 | A22 | A25 | A24 |
| | 3π/2 | A1 | A0 | A4 | A5 | A3 | A2 | A15 | A14 | A17 | A16 | A12 | A10 | A13 | A11 | A9 | A8 | A7 | A6 | A23 | A22 | A19 | A18 | A25 | A24 | A21 | A20 |
| (1/√2,1/√2,0) | π | A0 | A1 | A5 | A4 | A3 | A2 | A16 | A17 | A14 | A15 | A13 | A11 | A12 | A10 | A8 | A9 | A6 | A7 | A24 | A25 | A20 | A21 | A22 | A23 | A18 | A19 |
| (1/√2,0,1/√2) | π | A3 | A2 | A1 | A0 | A4 | A5 | A9 | A7 | A8 | A6 | A15 | A17 | A14 | A16 | A12 | A10 | A13 | A11 | A23 | A19 | A25 | A21 | A22 | A18 | A24 | A20 |
| (0,1/√2,1/√2) | π | A5 | A4 | A2 | A3 | A1 | A0 | A11 | A10 | A13 | A12 | A7 | A6 | A9 | A8 | A17 | A15 | A16 | A14 | A21 | A19 | A20 | A18 | A25 | A23 | A24 | A22 |
| (1/√2,-1/√2,0) | π | A0 | A1 | A4 | A5 | A2 | A3 | A14 | A15 | A16 | A17 | A10 | A12 | A11 | A13 | A6 | A7 | A8 | A9 | A18 | A19 | A22 | A23 | A20 | A21 | A24 | A25 |
| (1/√2,0,-1/√2) | π | A2 | A3 | A0 | A1 | A4 | A5 | A6 | A8 | A7 | A9 | A14 | A16 | A15 | A17 | A10 | A12 | A11 | A13 | A18 | A22 | A20 | A24 | A19 | A23 | A21 | A25 |
| (0,1/√2,-1/√2) | π | A4 | A5 | A2 | A3 | A0 | A1 | A10 | A11 | A12 | A13 | A6 | A7 | A8 | A9 | A14 | A16 | A15 | A17 | A18 | A20 | A19 | A21 | A22 | A24 | A23 | A25 |
| (1/√3,1/√3,1/√3) | 2π/3 | A3 | A2 | A5 | A4 | A1 | A0 | A13 | A11 | A12 | A10 | A17 | A16 | A15 | A14 | A9 | A7 | A8 | A6 | A25 | A21 | A24 | A20 | A23 | A19 | A22 | A18 |
| | 4π/3 | A5 | A4 | A1 | A0 | A3 | A2 | A17 | A15 | A16 | A14 | A9 | A7 | A8 | A6 | A13 | A12 | A11 | A10 | A25 | A23 | A21 | A19 | A24 | A22 | A20 | A18 |
| (-1/√3,1/√3,1/√3) | 2π/3 | A5 | A4 | A0 | A1 | A2 | A3 | A16 | A14 | A17 | A15 | A6 | A8 | A7 | A9 | A11 | A10 | A13 | A12 | A20 | A18 | A24 | A22 | A21 | A19 | A25 | A23 |
| | 4π/3 | A2 | A3 | A4 | A5 | A1 | A0 | A10 | A12 | A11 | A13 | A15 | A14 | A17 | A16 | A7 | A9 | A6 | A8 | A19 | A23 | A18 | A22 | A21 | A25 | A20 | A24 |
| (1/√3,-1/√3,1/√3) | 2π/3 | A4 | A5 | A1 | A0 | A2 | A3 | A15 | A17 | A14 | A16 | A7 | A9 | A6 | A8 | A10 | A11 | A12 | A13 | A19 | A21 | A23 | A25 | A18 | A20 | A22 | A24 |
| | 4π/3 | A3 | A2 | A4 | A5 | A0 | A1 | A12 | A10 | A13 | A11 | A14 | A15 | A16 | A17 | A8 | A6 | A9 | A7 | A22 | A18 | A23 | A19 | A24 | A20 | A25 | A21 |
| (1/√3,1/√3,-1/√3) | 2π/3 | A4 | A5 | A0 | A1 | A3 | A2 | A14 | A16 | A15 | A17 | A8 | A6 | A9 | A7 | A12 | A13 | A10 | A11 | A22 | A24 | A18 | A20 | A23 | A25 | A19 | A21 |
| | 4π/3 | A2 | A3 | A5 | A4 | A0 | A1 | A11 | A13 | A10 | A12 | A16 | A17 | A14 | A15 | A6 | A8 | A7 | A9 | A20 | A24 | A21 | A25 | A18 | A22 | A19 | A23 |

Şekil 4.8 $\mathbb{R}^3_{DD}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

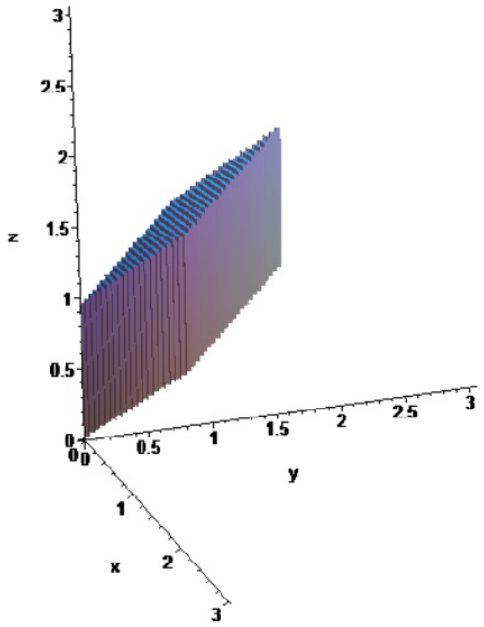
Buraya kadar olan kısımda Öklidyen 3-uzayın izometrilerinden hangilerinin $d_{DD}$ metriğini koruduğu bulunmuştur. Daha açıkça Öklidyen 3-uzayın izometrilerinden dokuz yansıma, yirmi dört dönme, altı dönme-yansıma, sekiz dönme-inversiyon ve bir inversiyonun $d_{DD}$ metriğini koruduğu gösterilmiştir. Bu tespit edilen elemanlar disdyakis dodecahedron Öklidyen simetri grubu olan $O_h$ (Octahedral grup) elemanlarıdır. Bu gruba disdyakis dodecahedron grup denilsin ve $G(DD)$ ile gösterilsin. Açıkça $G(DD)$, $O_h$ grubuna izomorftur. Bundan sonraki kısımda bu dönüşümlerden başka $d_{DD}$ metriğini koruyan izometrinin olmadığı gösterilecektir. Yani $\mathbb{R}^3_{DD}$ nin tüm izometrilerinin $T(3).G(DD)$ olduğu gösterilecektir.

**Tanım 4.2** *$A = (a_1, a_2, a_3)$ ve $B = (b_1, b_2, b_3)$ $\mathbb{R}^3_{TH}$ uzayında farklı iki nokta olsun. Bu taktirde*

$$\{X \mid d_{DD}(A, X) + d_{DD}(B, X) = d_{DD}(A, B)\}$$

*kümesine $A$, $B$ noktalarının minimum uzaklık kümesi denir ve $[AB]$ ile gösterilir.*

Genel olarak, $[AB]$ kümesi $AB$ köşegenli bir paralelyüz oluşturur. Şekil4.9 da $A = (0, 0, 0)$ ve $B = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1)$ minimum uzaklık kümesi $x = 0$, $x - y = 0$, $y - z = 0$ ve bu düzlemlere paralel olup $B$ noktasından geçen düzlemlerin sınırladığı bölgedir.




Şekil 4.9 $\mathbb{R}^3_{DD}$ de Minimum Uzaklık Kümesi

**Önerme 4.8** *$\phi : \mathbb{R}^3_{DD} \to \mathbb{R}^3_{DD}$ bir izometri ve $[AB]$ paralelyüz olsun. O halde*

$$\phi([AB]) = [\phi(A)\phi(B)]$$

*olur.*

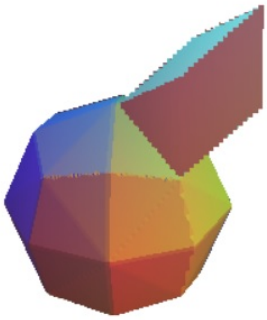
**İspat** *$Y \in \phi([AB])$ olsun.*

$$\begin{aligned} Y \in \phi([AB]) &\iff \exists X \in [AB] \ni Y = \phi(X) \\ &\iff d_{DD}(A,X) + d_{DD}(B,X) = d_{DD}(A,B) \\ &\iff d_{DD}(\phi(A),\phi(X)) + d_{DD}(\phi(B),\phi(X)) = d_{DD}(\phi(A),\phi(B)) \\ &\Leftrightarrow \quad Y = \phi(X) \in [\phi(A)\phi(B)]\,. \end{aligned}$$

**Sonuç 4.6** *$\phi : \mathbb{R}^3_{DD} \to \mathbb{R}^3_{DD}$ bir izometri ve $[AB]$ paralelyüz olsun. Bu durumda $\phi$, $[AB]$ nin köşelerini köşelere dönüştürür ve kenar uzunluklarını korur.*

**Önerme 4.9** *$f : \mathbb{R}^3_{DD} \to \mathbb{R}^3_{DD}$ dönüşümü $f(O) = O$ olacak şekilde bir izometri olsun. Bu taktirde $f \in G(DD)$ olur.*

**İspat** *$O = (0,0,0)$ ve $D = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1)$ olmak üzere $[OD]$ paralelyüzünü gözönüne alalım. Bu paralelyüzün köşe noktalarından üçü $A_0 = (0,0,1)$, $A_{14} = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $A_{18} = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$, olup bu noktalar aynı zamanda merkezil birim disdyakis dodecahedron birim küresinin köşe noktalarıdır. Dahası bu üç nokta disdyakis dodecahedronun her biri aynı çeşit kenar üçgen olan bir yüzünün köşe noktalarıdır.*



Şekil 4.10 $\mathbb{R}^3_{DD}$ de Birim Küre Ve Minimum Uzaklık Kümesi

*$f$ izometrisi $[OD]$ paralelyüzününün köşe noktalarını köşe noktalara dönüştürüp, kenar uzaklıklarını korduğundan ve $f(O) = O$ olduğundan dolayı $A_0$, $A_{14}$ ve $A_{18}$ noktalarını tetrakis hexahedronun yine bir yüzünün köşe noktalarına dönüştürür. Ayrıca bu dönüştürme işlemi gerçekleşirken kenar uzunlukları korunacağından dolayı ve $A_iA_j, A_jA_k, A_kA_i$ disdyakis dodecahedronun bir kenarı olacağından $i \in \{0,1,2,3,4,5\}$ olmak üzere $f(A_0) = A_i$, $j \in \{6,7,8,9,...,17\}$ olmak üzere $f(A_{14}) = A_j$ ve $k \in \{18,19,...,25\}$ olmak üzere $f(A_{10}) = A_k$ olur.Açıkça ifade edilirse $f$ izometrisi, disdyakis dodecahedronun bir yüzünün köşe noktalarını yine bir yüzünün köşe noktalarına dönüştürür. O halde disdyakis dodecahedron 48 yüze sahip olduğundan bir yüzün dönüşebileceği 48 yüz ihtimali vardır. Ayrıca kenar uzunlukları korunmak zorunda olduğundan $A_0, A_{14}, A_{18}$ noktaları bu yüz üzerinde dönüşebileceği noktalar için tek ihtimal vardır. Bu taktirde disdyakis dodecahedronun her bir yüzü için 1 ihtimal olduğundan dolayı bu noktaların dönüşebileceği 48 ihtimal vardır. Bu ihtimaller ise aşağıda tek tek sıralanmış ve her bir dönüşümün önceden tespit edilen hareketlerden hangisine karşılık geldiği ifade edilmiştir.*

*1. $f(A_0) = A_0$, $f(A_{14}) = A_{14}$ ve $f(A_{18}) = A_{22}$ ise $\Delta : x = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ yansımasıdır.*

*2. $f(A_0) = A_0$, $f(A_{14}) = A_{16}$ ve $f(A_{18}) = A_{20}$ ise $\Delta : y = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ yansımasıdır.*

*3.* $f(A_0) = A_1$, $f(A_{14}) = A_{15}$ *ve* $f(A_{18}) = A_{19}$ *ise* $\Delta : z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

*4.* $f(A_0) = A_0$, $f(A_{14}) = A_8$ *ve* $f(A_{18}) = A_{24}$ *ise* $\Delta : \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

*5.* $f(A_0) = A_3$, $f(A_{14}) = A_{12}$ *ve* $f(A_{18}) = A_{23}$ *ise* $\Delta : \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

*6.* $f(A_0) = A_5$, $f(A_{14}) = A_{17}$ *ve* $f(A_{18}) = A_{21}$ *ise* $\Delta : \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

*7.* $f(A_0) = A_0$, $f(A_{14}) = A_6$ *ve* $f(A_{18}) = A_{18}$ *ise* $\Delta : \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

*8.*$f(A_0) = A_2$, $f(A_{14}) = A_{10}$ *ve* $f(A_{18}) = A_{18}$ *ise* $\Delta : \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

*9.* $f(A_0) = A_4$, $f(A_{14}) = A_{14}$ *ve* $f(A_{18}) = A_{18}$ *ise* $\Delta : \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

*10.* $f(A_0) = A_5$, $f(A_{14}) = A_{16}$ *ve* $f(A_{18}) = A_{20}$ *ise dönme ekseni* $(1, 0, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{\pi}{2}}$ *dönmesidir.*

*11.* $f(A_0) = A_1$, $f(A_{14}) = A_{17}$ *ve* $f(A_{18}) = A_{21}$ *ise dönme ekseni* $(1, 0, 0)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmesidir.*

*12.* $f(A_0) = A_4$, $f(A_{14}) = A_{15}$ *ve* $f(A_{18}) = A_{19}$; *ise dönme ekseni* $(1, 0, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{3\pi}{2}}$ *dönmesidir.*

*13.*$f(A_0) = A_2$ *ise* $f(A_{14}) = A_{10}$ *ve* $f(A_{18}) = A_{19}$ *ise dönme ekseni* $(0, 1, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{\pi}{2}}$ *dönmesidir.*

*14.*$f(A_0) = A_1$ *ise* $f(A_{14}) = A_{15}$ *ve* $f(A_{18}) = A_{23}$*ise dönme ekseni* $(0, 1, 0)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmesidir.*

*15.*$f(A_0) = A_3$ *ise* $f(A_6) = A_{12}$ *ve* $f(A_{18}) = A_{22}$ *ise dönme ekseni* $(0, 1, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{3\pi}{2}}$ *dönmesidir.*

*16.* $f(A_0) = A_0$ *ise* $f(A_{14}) = A_8$ *ve* $f(A_{18}) = A_{22}$ *ise dönme ekseni* $(0,0,1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{\pi}{2}}$ *dönmesidir.*

*17.* $f(A_0) = A_0$ *ise* $f(A_{14}) = A_{16}$ *ve* $f(A_{18}) = A_{24}$ *ise dönme ekseni* $(0,0,1)$ *olmak üzere* $f = r_{\pi}$ *dönmesidir.*

*18.* $f(A_0) = A_0$ *ise* $f(A_{14}) = A_6$ *ve* $f(A_{18}) = A_{20}$ *ise dönme ekseni* $(0,0,1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{3\pi}{2}}$ *dönmesidir.*

*19.* $f(A_0) = A_1$ *ise* $f(A_{14}) = A_7$ *ve* $f(A_{18}) = A_{19}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\pi}$ *dönmesidir.*

*20.* $f(A_0) = A_2$ *ise* $f(A_{14}) = A_{11}$ *ve* $f(A_{18}) = A_{20}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ *olmak üzere* $f = r_{\pi}$ *dönmesidir.*

*21.* $f(A_0) = A_4$ *ise* $f(A_{14}) = A_{14}$ *ve* $f(A_{18}) = A_{22}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ *olmak üzere* $f = r_{\pi}$ *dönmesidir.*

*22.* $f(A_0) = A_1$ *ise* $f(A_{14}) = A_9$ *ve* $f(A_{18}) = A_{25}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\pi}$ *dönmesidir.*

*23.* $f(A_0) = A_3$ *ise* $f(A_{14}) = A_{13}$ *ve* $f(A_{18}) = A_{25}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ *olmak üzere* $f = r_{\pi}$ *dönmesidir.*

*24.* $f(A_0) = A_5$ *ise* $f(A_{14}) = A_{17}$ *ve* $f(A_{18}) = A_{25}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ *olmak üzere* $f = r_{\pi}$ *dönmesidir.*

*25.* $f(A_0) = A_2$ *ise* $f(A_{14}) = A_6$ *ve* $f(A_{18}) = A_{18}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

*26.* $f(A_0) = A_4$ *ise* $f(A_{14}) = A_{10}$ *ve* $f(A_{18}) = A_{18}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

*27.* $f(A_0) = A_4$ *ise* $f(A_{14}) = A_{12}$ *ve* $f(A_{18}) = A_{23}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

*28.* $f(A_0) = A_3$ *ise* $f(A_{14}) = A_8$ *ve* $f(A_{18}) = A_{24}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

*29.* $f(A_0) = A_5$ *ise* $f(A_{14}) = A_{13}$ *ve* $f(A_{18}) = A_{24}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

*30.* $f(A_0) = A_2$ *ise* $f(A_{14}) = A_7$ *ve* $f(A_{18}) = A_{21}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

*31.* $f(A_0) = A_5$ *ise* $f(A_{14}) = A_{11}$ *ve* $f(A_{18}) = A_{21}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

*32.* $f(A_0) = A_3$ *ise* $f(A_{14}) = A_9$ *ve* $f(A_{18}) = A_{23}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

*33.* $f(A_0) = A_3$*,* $f(A_{14}) = A_9$ *ve* $f(A_{18}) = A_{25}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*34.* $f(A_0) = A_5$ *ise* $f(A_{14}) = A_{13}$ *ve* $f(A_{18}) = A_{25}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inverisyonudur.*

*35.* $f(A_0) = A_5$ *ise* $f(A_{14}) = A_{11}$ *ve* $f(A_{18}) = A_{20}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*36.* $f(A_0) = A_2$ *ise* $f(A_{14}) = A_7$ *ve* $f(A_{18}) = A_{19}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*37.* $f(A_0) = A_4$ *ise* $f(A_{14}) = A_{10}$ *ve* $f(A_{18}) = A_{19}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*38.* $f(A_0) = A_3$ *ise* $f(A_{14}) = A_8$ *ve* $f(A_{18}) = A_{22}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*39.* $f(A_0) = A_4$ *ise* $f(A_{14}) = A_{12}$ *ve* $f(A_{18}) = A_{22}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{-}\frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*40.* $f(A_0) = A_2$ *ise* $f(A_{14}) = A_6$ *ve* $f(A_{18}) = A_{20}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{-}\frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*41.* $f(A_0) = A_5$*,* $f(A_{14}) = A_{16}$ *ve* $f(A_{18}) = A_{24}$ *ise* $\Delta : x = 0$ *ve dönme ekseni* $(1, 0, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_\Delta r_{\frac{\pi}{2}}$ *dönme yansımasıdır.*

*42.* $f(A_0) = A_1$ *ise* $f(A_{14}) = A_9$ *ve* $f(A_{18}) = A_{23}$ *ise* $\Delta : x = 0$ *ve dönme ekseni* $(1, 0, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_\Delta r_{\frac{3\pi}{2}}$ *dönme yansımasıdır.*

*43.* $f(A_0) = A_1$ *ise* $f(A_{14}) = A_{17}$ *ve* $f(A_{18}) = A_{25}$ *ise* $\Delta : y = 0$ *ve dönme ekseni* $(0, 1, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_\Delta r_{\frac{\pi}{2}}$ *dönme yansımasıdır.*

*44.* $f(A_0) = A_1$ *ise* $f(A_{14}) = A_{17}$ *ve* $f(A_{18}) = A_{25}$ *ise* $\Delta : y = 0$ *ve dönme ekseni* $(0, 1, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_\Delta r_{\frac{3\Pi}{2}}$ *dönme yansımasıdır.*

*45.* $f(A_0) = A_4$ *ise* $f(A_{14}) = A_{15}$ *ve* $f(A_{18}) = A_{23}$ *ise* $\Delta : z = 0$ *ve dönme ekseni* $(0, 0, 1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_\Delta r_{\frac{\pi}{2}}$ *dönme yansımasıdır.*

*46.* $f(A_0) = A_1$ *ise* $f(A_{14}) = A_7$ *ve* $f(A_{18}) = A_{21}$ *ise* $\Delta : z = 0$ *ve dönme ekseni* $(0, 0, 1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_\Delta r_{\frac{3\pi}{2}}$ *dönme yansımasıdır.*

*47.* $f(A_0) = A_0$, $f(A_{14}) = A_{14}$ *ve* $f(A_{18}) = A_{18}$ *ise* $f$ *birim dönüşümdür.*

*48.* $f(A_0) = A_1$, $f(A_{14}) = A_{17}$ *ve* $f(A_{18}) = A_{25}$ *ise* $f$ *inversiyondur.*

*Buna göre orijini koruyan* $f$ *izometrisi* $G(DD)$ *nin bir elemanıdır. Bir başka deyişle disdyakis dodecahedron uzaklığını koruyan Öklidyen izometriler dışında bir izometri yoktur.*

**Teorem 4.1** $f : \mathbb{R}^3_{DD} \to \mathbb{R}^3_{DD}$ *dönüşümü bir izometri olsun.* $f = T_A \circ g$ *olacak şekilde bir tek* $T_A \in T(3)$ *ve* $g \in G(DD)$ *vardır.*

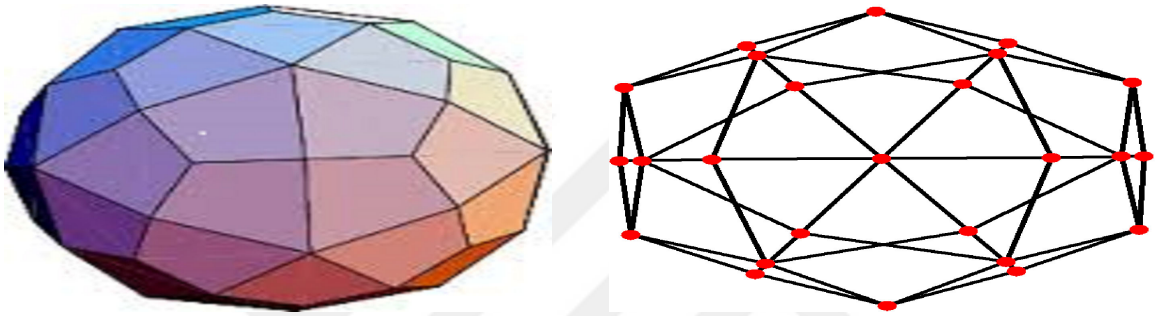
**İspat** $A = (a_1, a_2, a_3)$ *olmak üzere* $f(O) = A$ *olsun. Bu taktirde* $g = T_{-A} \circ f$ *olacak şekilde tanımlı* $g$ *dönüşümü bir izometridir ve* $g(O) = O$ *olur. Böylece önerme 3.9 dan dolayı* $g \in G(DD)$ *ve* $f = T_A \circ g$ *olur. İspatın tekliği aşikardır.*

Buna göre disdyakis dodecahedron metriği ile donatılmış analitik 3-uzayın izometrilerinin grubu disdyakis dodecahedronun (Öklidyen) simetri grubu olan $O_h$ ile 3-boyutlu analitik uzayın tüm ötelemelerinin grubu olan $T(3)$ ün yarı-direkt çarpımıdır. Yani $\mathbb{R}^3_{DD}$ nın tüm izometrilerinin kümesi $T(3).G(DD)$ dır.

# 5. DELTOİDAL HEXACONTAHEDRON UZAYI

## 5.1 Deltoidal Hexacontahedron Metriği ve Özellikleri

Deltoidal hexacontahedron 60 tane deltoitin birleşmesinden oluşan konveks bir çokyüzlüdür. Toplamda 62 köşe ve 120 ayrıta sahiptir (Şekil5.1).



Şekil 5.1 Deltoidal Hexacontahedron ve Dodecahedron veya Icosahedronun kleetopu

Geometrik olarak trapezoidal hexacontahedron, strombic hexecontahedron veya tetragonal hexacontahedron olarak da adlandılrılan bir katalan cisimdir. Arşimedyan cisimlerden rhombicosidodecahedronun dualidir. Deltoidal hexacontahedron, dodecahedron veya icosahedronun yüzey ve kenarlarının orta yerlerinden dışa doğru belirli bir oranda genişletilmesinden oluşan bir cisimdir (Şekil5.1).

Kısa kenarı ile uzun kenarı arasındaki oran $\frac{6}{7+\sqrt{5}} \cong \frac{1}{1{,}539344...}$, iki kısa kenar arasındaki açı $118,22°$, iki uzun kenar arasındaki açı $67,76$, kısa ve uzun kenar arasındaki açı ise $87,01°$ dır. Ayrıca deltoidal hexacontahedron 120 tane simetriye sahip olup, simetri grubu $I_h$ ile gösterilir.

Birim küresi deltoidal hexacontahdron olan uzaklık fonksiyonu $d_{DH}$ ile gösterilir ve bu uzaklık fonksiyonunun metrik aksiyomlarını sağladığı ve bazı özellikleri (Çolak ve Gelişgen, 2015) kaynağından verilmektedir.

**Tanım 5.1** *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\mathbb{R}^3$de iki farklı nokta olsun. $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ altın oran olmak üzere,*

$$d_{DH}(P_1, P_2) =$$
$$\max \left\{ \begin{array}{l} |x_1 - x_2| + (2\varphi - 3) \max \left\{ \begin{array}{l} (1-\varphi)\,|x_1 - x_2| + (1+\varphi)\,|z_1 - z_2|\,, \\ |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|\,, \\ \varphi\,|z_1 - z_2| + (1+\varphi)\,|y_1 - y_2| - |x_1 - x_2| \end{array} \right\}, \\ |y_1 - y_2| + (2\varphi - 3) \max \left\{ \begin{array}{l} (1-\varphi)\,|y_1 - y_2| + (1+\varphi)\,|x_1 - x_2|\,, \\ |x_1 - x_2| + |z_1 - z_2|\,, \\ \varphi\,|x_1 - x_2| + (1+\varphi)\,|z_1 - z_2| - |y_1 - y_2| \end{array} \right\}, \\ |z_1 - z_2| + (2\varphi - 3) \max \left\{ \begin{array}{l} (1-\varphi)\,|z_1 - z_2| + (1+\varphi)\,|y_1 - y_2|\,, \\ |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|\,, \\ \varphi\,|y_1 - y_2| + (1+\varphi)\,|x_1 - x_2| - |z_1 - z_2| \end{array} \right\}. \end{array} \right\}$$

*şeklinde tanımlanan $d_{DH} : \mathbb{R}^3 x\, \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$ fonksiyonuna $P_1$ ve $P_2$ noktaları arasındaki deltoidal hexacontahedron uzaklık fonksiyonu denir.*

**Yardımcı Teorem 5.1** *$P_1$=$(x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2$=$(x_2, y_2, z_2)$ $\mathbb{R}^3$de iki farklı nokta olsun. Bu takdirde,*

$$d_{DH}(P_1, P_2) \geq |x_1 - x_2| + (2\varphi - 3) \max \left\{ \begin{array}{l} (\frac{1-\sqrt{5}}{2})\,|x_1 - x_2| + (\frac{3+\sqrt{5}}{2})\,|z_1 - z_2|\,, \\ |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|\,, \\ (\frac{1+\sqrt{5}}{2})\,|z_1 - z_2| + (\frac{3+\sqrt{5}}{2})(|y_1 - y_2| - |x_1 - x_2|) \end{array} \right\}$$
$$d_{DH}(P_1, P_2) \geq |y_1 - y_2| + (2\varphi - 3) \max \left\{ \begin{array}{l} (\frac{1-\sqrt{5}}{2})\,|y_1 - y_2| + (\frac{3+\sqrt{5}}{2})\,|x_1 - x_2|\,, \\ |x_1 - x_2| + |z_1 - z_2|\,, \\ (\frac{1+\sqrt{5}}{2})\,|x_1 - x_2| + (\frac{3+\sqrt{5}}{2})(|z_1 - z_2| - |y_1 - y_2|) \end{array} \right\}$$
$$d_{DH}(P_1, P_2) \geq |z_1 - z_2| + (2\varphi - 3) \max \left\{ \begin{array}{l} (\frac{1-\sqrt{5}}{2})\,|z_1 - z_2| + (\frac{3+\sqrt{5}}{2})\,|y_1 - y_2|\,, \\ |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|\,, \\ (\frac{1+\sqrt{5}}{2})\,|y_1 - y_2| + (\frac{3+\sqrt{5}}{2})(|x_1 - x_2| - |z_1 - z_2|) \end{array} \right\}$$

*olur.*

**İspat** *Maksimum fonksiyonun tanımından ispat aşikardır.*

**Önerme 5.1** *$\mathbb{R}^3$ de $d_{DH}$ uzaklık fonksiyonu metriktir ve bu metrikle donatılmış uzayın birim küresi deltoidal hexacontahedrondur.*

**İspat** *$d_{DH} : \mathbb{R}^3 x \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uzaklık fonksiyonu ve $P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ve $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ $\mathbb{R}^3$de üç farklı nokta olsun. Bütün $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^3$ için $d_{DH}$ aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa $\mathbb{R}^3$ de bir metriktir.*

***M1)*** $d_{DH}(P_1, P_2) \geq 0$ *ve* $d_{DH}(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$
***M2)*** $d_{DH}(P_1, P_2) = d_{DH}(P_2, P_1)$
***M3)*** $d_{DH}(P_1, P_3) \leq d_{DH}(P_1, P_2) + d_{DH}(P_2, P_3)$.

***M1)*** *Mutlak değer daima negatif olmayan değerler ürettiğinden mutlak değerli ifadelerin pozitif ifadelerle çarpılıp toplanması sonucu negatif olmayan değerler elde edilir. Açıkça* $d_{DH}(P_1,P_2) \geq 0$. *Yani* $d_{DH}$ *pozitif tanımlıdır. Eğer,* $d_{DH}(P_1,P_2)=0$ *ise* $|x_1-x_2|=0, |y_1-y_2|=0, |z_1-z_2|=0 \Longrightarrow x_1=x_2, y_1=y_2, z_1=z_2 \Longrightarrow P_1=P_2$ *olur.Tersine* $P_1=P_2 \Longrightarrow |x_1-x_2|=0, |y_1-y_2|=0, |z_1-z_2|=0 \Longrightarrow d_{DH}(P_1,P_2)=0$ *bulunur.*

***M2)*** *Mutlak değerden dolayı* $|x_1-x_2|=|x_2-x_1|$, $|y_1-y_2|=|y_2-y_1|$, $|z_1-z_2|=|z_2-z_1|$ *olduğundan açıkça,* $d_{DH}(P_1,P_2)=d_{DH}(P_2,P_1)$ *dir. Yani* $d_{DH}$ *simetriktir.*

***M3)*** $P_1=(x_1,y_1,z_1), P_2=(x_2,y_2,z_2)$ *ve* $P_3=(x_3,y_3,z_3) \in \mathbb{R}^3$ *olsun.* $u_1=|x_1-x_3|$, $v_1=|y_1-y_3|$, $w_1=|z_1-z_3|$, $u_2=|x_1-x_2|$, $v_2=|y_1-y_2|$, $w_2=|z_1-z_2|$, $u_3=|x_3-x_2|$, $v_3=|y_3-y_2|$, $w_3=|z_3-z_2|$ *olmak üzere,*

$$
\begin{aligned}
d_{DH}(P_1,P_3) &= \max\left\{
\begin{array}{l}
u_1+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)u_1+(1+\varphi)w_1,\\ v_1+w_1,\varphi w_1+(1+\varphi)v_1-u_1\end{array}\right\},\\
v_1+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)v_1+(1+\varphi)u_1,\\ u_1+w_1,\varphi u_1+(1+\varphi)w_1-v_1\end{array}\right\},\\
w_1+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)w_1+(1+\varphi)v_1,\\ u_1+v_1,\varphi v_1+(1+\varphi)u_1-w_1\end{array}\right\}.
\end{array}
\right\}\\
&\leq \max\left\{
\begin{array}{l}
(u_2+u_3)+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)(u_2+u_3)+(1+\varphi)(w_2+w_3),\\ v_2+v_3+w_2+w_3,\varphi(w_2+w_3)+\\ (1+\varphi)v_2+v_3-(u_2+u_3)\end{array}\right\},\\
(v_2+v_3)+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)(v_2+v_3)+(1+\varphi)(u_2+u_3),\\ (u_2+u_3)+(w_2+w_3),\varphi(u_2+u_3)+\\ (1+\varphi)(w_2+w_3)-(v_2+v_3)\end{array}\right\},\\
(w_2+w_3)+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)(w_2+w_3)+(1+\varphi)(v_2+v_3),\\ (u_2+u_3)+(v_2+v_3),\varphi(v_2+v_3)+\\ (1+\varphi)(u_2+u_3)-(w_2+w_3)\end{array}\right\}.
\end{array}
\right\}\\
&\leq \max\left\{
\begin{array}{l}
u_2+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)u_2+(1+\varphi)w_2,\\ v_2+w_2,\varphi w_2+(1+\varphi)v_2-u_2\end{array}\right\},\\
v_2+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)v_2+(1+\varphi)u_2,\\ u_2+w_2,\varphi u_2+(1+\varphi)w_2-v_2\end{array}\right\},\\
w_2+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)w_2+(1+\varphi)v_2,\\ u_2+v_2,\varphi v_2+(1+\varphi)u_2-w_2\end{array}\right\}.
\end{array}
\right\}\\
&+\max\left\{
\begin{array}{l}
u_3+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)u_3+(1+\varphi)w_3,\\ v_3+w_3,\varphi w_3+(1+\varphi)v_3-u_3\end{array}\right\},\\
v_3+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)v_3+(1+\varphi)u_3,\\ u_3+w_3,\varphi u_3+(1+\varphi)w_3-v_3\end{array}\right\},\\
w_3+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)w_3+(1+\varphi)v_3,\\ u_3+v_3,\varphi v_3+(1+\varphi)u_3-w_3\end{array}\right\}.
\end{array}
\right\} = X
\end{aligned}
$$

*dir. Burada yardımcı teorem 4.1 den dolayı*

$$d_{DH}(P_1,P_2)\geq \max\left\{\begin{array}{l} u_2+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{c}(1-\varphi)u_2+(1+\varphi)w_2,\\ v_2+w_2,\varphi w_2+(1+\varphi)v_2-u_2\end{array}\right\},\\ v_2+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{c}(1-\varphi)v_2+(1+\varphi)u_2,u_2+w_2,\\ \varphi u_2+(1+\varphi)w_2-v_2\end{array}\right\},\\ w_2+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{c}(1-\varphi)w_2+(1+\varphi)v_2,u_2+v_2,\\ \varphi v_2+(1+\varphi)u_2-w_2\end{array}\right\}.\end{array}\right\}$$

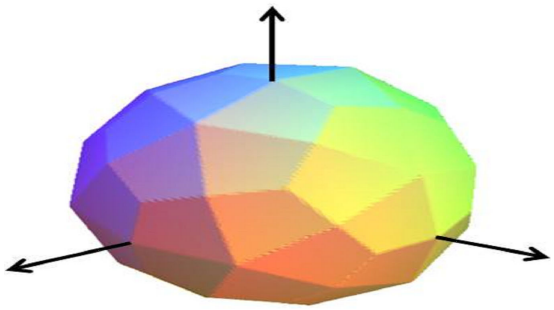
$$d_{DH}(P_2,P_3)\geq \max\left\{\begin{array}{l} u_3+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{c}(1-\varphi)u_3+(1+\varphi)w_3,v_3+w_3,\\ \varphi w_3+(1+\varphi)v_3-u_3\end{array}\right\},\\ v_3+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{c}(1-\varphi)v_3+(1+\varphi)u_3,u_3+w_3,\\ \varphi u_3+(1+\varphi)w_3-v_3\end{array}\right\},\\ w_3+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{c}(1-\varphi)w_3+(1+\varphi)v_3,u_3+v_3,\\ \varphi v_3+(1+\varphi)u_3-w_3\end{array}\right\}.\end{array}\right\}$$

*olur. O halde* $X \leq d_{DH}(P_1,P_2)+d_{DH}(P_2,P_3)$ *bulunur. Buna göre* $d_{DH}(P_1,P_3)\leq d_{DH}(P_1,P_2)+d_{DH}(P_2,P_3)$ *elde edilir. Yani deltoidal hexacontahedron uzaklık fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar.*

*Sonuç olarak deltoidal hexacontahedron uzaklık fonksiyonu metriktir. Ayrıca bu metrikle döşenmiş analitik 3-uzayda orijinden 1 birim deltoidal hexacontahedron uzaklığındaki noktaların kümesi;*

$$S_{DH}=\left\{(x,y,z):\max\left\{\begin{array}{l} |x|+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{c}|y|+|z|,(1-\varphi)|x|+(1+\varphi)|z|,\\ \varphi|z|+(1+\varphi)|y|-|x|\end{array}\right\},\\ |y|+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{c}|x|+|z|,(1-\varphi)|y|+(1+\varphi)|x|,\\ \varphi|x|+(1+\varphi)|z|-|y|\end{array}\right\},\\ |z|+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{c}|y|+|x|,(1-\varphi)|z|+(1+\varphi)|y|,\\ \varphi|y|+(1+\varphi)|x|-|z|\end{array}\right\}\end{array}\right\}=1\right\}$$

*olup bu noktaların geometrik yeri şekil5.2 de görüldüğü gibi deltoidal hexacontahedrondur.*



Şekil 5.2 Deltoidal hexacontahedronun koordinat sistemine yerleştirilmesi

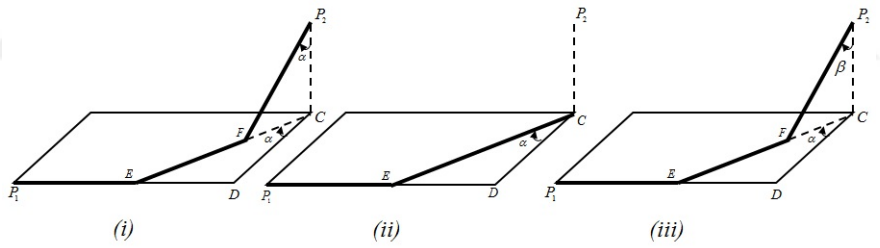
Deltoidal hexacontahedron uzaklık fonksiyonu bir hayli karmaşık görünmesine rağmen, apsis, ordinat ve kotlar farkı arasında bir yönlendirme vardır. Bu yönlendirme $|x_1 - x_2| - |y_1 - y_2| - |z_1 - z_2| - |x_1 - x_2|$ şeklindedir. Buna göre $d_{DH}$ fonksiyonunda yer alan 3 ifadeden birinde $|x_1 - x_2|$ yerine $|y_1 - y_2|$, $|y_1 - y_2|$ yerine $|z_1 - z_2|$ yerine, $|z_1 - z_2|$ yerine $|x_1 - x_2|$ yazıldığında diğer bir ifadeye ulaşılır. Geometrik olarak $P_1$ noktasından $P_2$ noktasına olan yol için 3 farklı ihtimal vardır. Buna göre, bu yollar aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$(i)$ Biri koordinat eksenlerinden birine paralel diğerleri diğer koordinat eksenleri ile arctan $(2)$ radyanlık açı yapan üç doğru parçasının birleşimidir.

$(ii)$ Biri koordinat eksenlerinden birine paralel diğeri bir diğer koordinat ekseni ile arctan $\left(\frac{10-3\sqrt{5}}{10}\right)$ radyanlık açı yapan iki doğru parçasının birleşimidir.

$(iii)$ Biri koordinat eksenlerinden birine paralel diğerleri diğer koordinat eksenleri ile arctan $\left(\frac{3\sqrt{5}-5}{8}\right)$ ve arctan $\left(\frac{3}{4}\right)$ radyanlık açı yapan üç doğru parçasının birleşimidir.

Böylece $P_1$ ve $P_2$ noktaları arasındaki deltoidal hexacontahedron uzaklığı $(i)$ deki yol için bahsedilen üç doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamı, $(ii)$ deki yol için bahsedilen iki doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamının $\frac{3\sqrt{5}-5}{2}$ katı, $(iii)$ deki yol için bahsedilen üç doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamının $3 - \sqrt{5}$ katıdır (Şekil5.3)




Şekil 5.3 Deltoidal hexacontahedron yolu

**Sonuç 5.1** $\mathbb{R}^3_{DH}$ *de* $(x_0, y_0, z_0)$ *merkezli ve* $r$ *yarıçaplı küre*

$$\max\left\{\begin{array}{l} |x-x_0| + (2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)|x-x_0| + (1+\varphi)|z-z_0|,\\ |y-y_0| + |z-z_0|,\\ \varphi|z-z_0| + (1+\varphi)|y-y_0| - |x-x_0|\end{array}\right\},\\ |y-y_0| + (2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)|y-y_0| + (1+\varphi)|x-x_0|,\\ |x-x_0| + |z-z_0|,\\ \varphi|x-x_0| + (1+\varphi)|z-z_0| - |y-y_0|\end{array}\right\},\\ |z-z_0| + (2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)|z-z_0| + (1+\varphi)|y-y_0|,\\ |x-x_0| + |y-y_0|,\\ \varphi|y-y_0| + (1+\varphi)|x-x_0| - |z-z_0|\end{array}\right\}.\end{array}\right\} = r$$

*denklemi ile ifade edilen köşe noktaları* $(0,0,r)$, $(r,0,0)$, $(0,r,0)$, $\left(0, \frac{3\sqrt{5}+1}{22}r, \frac{5\sqrt{5}+9}{22}r\right)$, $\left(\frac{5\sqrt{5}+9}{22}r, 0, \frac{3\sqrt{5}+1}{22}r\right)$, $\left(\frac{\sqrt{5}+3}{6}r, \frac{\sqrt{5}+1}{6}r, 0\right)$, $\left(0, \frac{\sqrt{5}+3}{6}r, \frac{\sqrt{5}+1}{6}r\right)$, $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}r, \frac{1}{2}r, \frac{\sqrt{5}+1}{4}r\right)$, $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}r, \frac{\sqrt{5}-1}{4}r, \frac{1}{2}r\right)$, $\left(\frac{1}{2}r, \frac{\sqrt{5}+1}{4}r, \frac{\sqrt{5}-1}{4}r\right)$ *ve* $\left(\frac{\sqrt{5}+4}{11}r, \frac{\sqrt{5}+4}{11}r, \frac{\sqrt{5}+4}{11}r\right)$ *noktalarının herbir bileşeninin* $+/-$ *işaret değişiklikleri ve üç bileşenin tüm muhtemel permütasyonlarının* $(x_0, y_0, z_0)$ *kadar ötelenmişlerinden oluşan 60 yüzlü bir çokyüzlü olan deltoidal hexacontahedrondur.*

Bu bölümün geri kalan kısmında sıkça kullanılacağından dolayı merkezil birim kürenin köşe noktaları aşağıdaki şekilde isimlendirilmiştir.

$$A_0 = (0,0,r), A_1 = (0,0,-r), A_2 = (r,0,0), A_3 = (-r,0,0), A_4 = (0,r,0),$$
$$A_5 = (0,-r,0), A_6 = \left(0, \frac{3\sqrt{5}+1}{22}r, \frac{5\sqrt{5}+9}{22}r\right), A_7 = \left(0, \frac{3\sqrt{5}+1}{22}r, -\frac{5\sqrt{5}+9}{22}r\right),$$
$$A_8 = \left(0, -\frac{3\sqrt{5}+1}{22}r, \frac{5\sqrt{5}+9}{22}r\right), A_9 = \left(0, -\frac{3\sqrt{5}+1}{22}r, -\frac{5\sqrt{5}+9}{22}r\right), A_{10} = \left(\frac{5\sqrt{5}+9}{22}r, 0, \frac{3\sqrt{5}+1}{22}r\right),$$
$$A_{11} = \left(\frac{5\sqrt{5}+9}{22}r, 0, -\frac{3\sqrt{5}+1}{22}r\right), A_{12} = \left(-\frac{5\sqrt{5}+9}{22}r, 0, \frac{3\sqrt{5}+1}{22}r\right), A_{13} = \left(-\frac{5\sqrt{5}+9}{22}r, 0, -\frac{3\sqrt{5}+1}{22}r\right),$$
$$A_{14} = \left(\frac{3\sqrt{5}+1}{22}r, \frac{5\sqrt{5}+9}{22}r, 0\right), A_{15} = \left(\frac{3\sqrt{5}+1}{22}r, -\frac{5\sqrt{5}+9}{22}r, 0\right), A_{16} = \left(-\frac{3\sqrt{5}+1}{22}r, \frac{5\sqrt{5}+9}{22}r, 0\right),$$
$$A_{17} = \left(-\frac{3\sqrt{5}+1}{22}r, -\frac{5\sqrt{5}+9}{22}r, 0\right), A_{18} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{6}r, 0, \frac{\sqrt{5}+3}{6}r\right), A_{19} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{6}r, 0, -\frac{\sqrt{5}+3}{6}r\right),$$
$$A_{20} = \left(-\frac{\sqrt{5}+1}{6}r, 0, \frac{\sqrt{5}+3}{6}r\right), A_{21} = \left(-\frac{\sqrt{5}+1}{6}r, 0, -\frac{\sqrt{5}+3}{6}r\right), A_{22} = \left(\frac{\sqrt{5}+3}{6}r, \frac{\sqrt{5}+1}{6}r, 0\right),$$
$$A_{23} = \left(\frac{\sqrt{5}+3}{6}r, -\frac{\sqrt{5}+1}{6}r, 0\right), A_{24} = \left(-\frac{\sqrt{5}+3}{6}r, \frac{\sqrt{5}+1}{6}r, 0\right), A_{25} = \left(-\frac{\sqrt{5}+3}{6}r, -\frac{\sqrt{5}+1}{6}r, 0\right),$$
$$A_{26} = \left(0, \frac{\sqrt{5}+3}{6}r, \frac{\sqrt{5}+1}{6}r\right), A_{27} = \left(0, \frac{\sqrt{5}+3}{6}r, -\frac{\sqrt{5}+1}{6}r\right), A_{28} = \left(0, -\frac{\sqrt{5}+3}{6}r, \frac{\sqrt{5}+1}{6}r\right),$$
$$A_{29} = \left(0, -\frac{\sqrt{5}+3}{6}r, -\frac{\sqrt{5}+1}{6}r\right), A_{30} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}r, \frac{1}{2}r, \frac{\sqrt{5}+1}{4}\right), A_{31} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}r, \frac{1}{2}r, -\frac{\sqrt{5}+1}{4}r\right),$$
$$A_{32} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}r, -\frac{1}{2}r, \frac{\sqrt{5}+1}{4}r\right), A_{33} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}r, -\frac{1}{2}r, -\frac{\sqrt{5}+1}{4}r\right), A_{34} = \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{4}r, \frac{1}{2}r, \frac{\sqrt{5}+1}{4}r\right),$$
$$A_{35} = \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{4}r, \frac{1}{2}r, -\frac{\sqrt{5}+1}{4}r\right), A_{36} = \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{4}r, -\frac{1}{2}r, \frac{\sqrt{5}+1}{4}r\right), A_{37} = \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{4}r, -\frac{1}{2}r, -\frac{\sqrt{5}+1}{4}r\right),$$
$$A_{38} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}r, \frac{\sqrt{5}-1}{4}r, \frac{1}{2}r\right), A_{39} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}r, \frac{\sqrt{5}-1}{4}r, -\frac{1}{2}r\right), A_{40} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}r, -\frac{\sqrt{5}-1}{4}r, \frac{1}{2}r\right),$$
$$A_{41} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}r, -\frac{\sqrt{5}-1}{4}r, -\frac{1}{2}r\right), A_{42} = \left(-\frac{\sqrt{5}+1}{4}r, \frac{\sqrt{5}-1}{4}r, \frac{1}{2}r\right), A_{43} = \left(-\frac{\sqrt{5}+1}{4}r, \frac{\sqrt{5}-1}{4}r, -\frac{1}{2}r\right),$$
$$A_{44} = \left(-\frac{\sqrt{5}+1}{4}r, -\frac{\sqrt{5}-1}{4}r, \frac{1}{2}r\right), A_{45} = \left(-\frac{\sqrt{5}+1}{4}r, -\frac{\sqrt{5}-1}{4}r, -\frac{1}{2}r\right), A_{46} = \left(\frac{1}{2}r, \frac{\sqrt{5}+1}{4}r, \frac{\sqrt{5}-1}{4}r\right),$$
$$A_{47} = \left(\frac{1}{2}r, \frac{\sqrt{5}+1}{4}r, -\frac{\sqrt{5}-1}{4}r\right), A_{48} = \left(\frac{1}{2}r, -\frac{\sqrt{5}+1}{4}r, \frac{\sqrt{5}-1}{4}r\right), A_{49} = \left(\frac{1}{2}r, -\frac{\sqrt{5}+1}{4}r, -\frac{\sqrt{5}-1}{4}r\right),$$
$$A_{50} = \left(-\frac{1}{2}r, \frac{\sqrt{5}+1}{4}r, \frac{\sqrt{5}-1}{4}r\right), A_{51} = \left(-\frac{1}{2}r, \frac{\sqrt{5}+1}{4}r, -\frac{\sqrt{5}-1}{4}r\right), A_{52} = \left(-\frac{1}{2}r, -\frac{\sqrt{5}+1}{4}r, \frac{\sqrt{5}-1}{4}r\right),$$
$$A_{53} = \left(-\frac{1}{2}r, -\frac{\sqrt{5}+1}{4}r, -\frac{\sqrt{5}-1}{4}r\right), A_{54} = \left(\frac{\sqrt{5}+4}{11}r, \frac{\sqrt{5}+4}{11}r, \frac{\sqrt{5}+4}{11}r\right), A_{55} = \left(\frac{\sqrt{5}+4}{11}r, \frac{\sqrt{5}+4}{11}r, -\frac{\sqrt{5}+4}{11}r\right),$$
$$A_{56} = \left(\frac{\sqrt{5}+4}{11}r, -\frac{\sqrt{5}+4}{11}r, -\frac{\sqrt{5}+4}{11}r\right), A_{57} = \left(\frac{\sqrt{5}+4}{11}r, -\frac{\sqrt{5}+4}{11}r, -\frac{\sqrt{5}+4}{11}r\right), A_{58} = \left(-\frac{\sqrt{5}+4}{11}r, \frac{\sqrt{5}+4}{11}r, \frac{\sqrt{5}+4}{11}r\right),$$
$$A_{59} = \left(-\frac{\sqrt{5}+4}{11}r, \frac{\sqrt{5}+4}{11}r, -\frac{\sqrt{5}+4}{11}r\right), A_{60} = \left(-\frac{\sqrt{5}+4}{11}r, -\frac{\sqrt{5}+4}{11}r, \frac{\sqrt{5}+4}{11}r\right), A_{61} = \left(-\frac{\sqrt{5}+4}{11}r, -\frac{\sqrt{5}+4}{11}r, -\frac{\sqrt{5}+4}{11}r\right).$$

Aşağıdaki önermede $\mathbb{R}^3$ deki noktalar arasındaki Öklidyen ve deltoidal hexacontahedron uzaklıkları arasındaki geçiş bağıntısını ifade etmektedir.

**Önerme 5.2** *$\mathbb{R}^3$ de $P_1$ ve $P_2$ noktalarından geçen doğru $l$ olsun. Eğer $l$ doğrusunun doğrultu vektörü $(p,q,r)$,*

$$K=\max\left\{\begin{array}{l} |p|+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)\,|p|+(1+\varphi)\,|r|\,,|q|+|r|\,,\\ \varphi\,|r|+(1+\varphi)\,|q|-|p|\end{array}\right\},\\ |q|+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)\,|q|+(1+\varphi)\,|p|\,,|p|+|r|\,,\\ \varphi\,|p|+(1+\varphi)\,|r|-|r|\end{array}\right\},\\ |r|+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)\,|r|+(1+\varphi)\,|q|\,,|p|+|q|\,,\\ \varphi\,|q|+(1+\varphi)\,|p|-|r|\end{array}\right\}.\end{array}\right\}$$

*ve $\mu_{P_1P_2}=\frac{K}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$ ise $d_{DH}(P_1,P_2)=\mu_{P_1P_2}d_E(P_1,P_2)$ olur.*

**İspat** *$P_1=(x_1,y_1,z_1)$ ve $P_2=(x_2,y_2,z_2)$, $\mathbb{R}^3$ deki herhangi iki nokta olsun. $P_1$ ve $P_2$ den geçen doğru $l$ ise*

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}=\lambda$$

*olur. $l$ doğrusunun doğrultu vektörü $(p,q,r)$ olduğundan $(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)=\lambda\,(p,q,r)$ dir. Buna göre $d_{DH}(P_1,P_2)=\lambda K$ ve $d_E(P_1,P_2)=\lambda\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ olduğundan dolayı $\frac{d_{DH}(P_1,P_2)}{K}=\frac{d_E(P_1,P_2)}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$ bulunur. Bu ise önermenin ifadesindeki sonucu verir.*

Yukarıdaki önerme herhangi bir doğru boyunca $d_{DH}(P_1,P_2)$ uzaklığının aynı doğru boyunca olan Öklidyen uzaklığın pozitif katı olduğu gösterir. Buna göre aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

**Sonuç 5.2** *$\mathbb{R}^3$de $A,B,X$ doğrudaş üç farklı nokta ise*

$$d_E(A,X)=d_E(B,X)\iff d_{DH}(A,X)=d_{DH}(B,X)$$

**Sonuç 5.3** *3-boyutlu uzayda $A,B,X$ doğrudaş üç farklı nokta ise*

$$d_{DH}(A,X)/d_{DH}(B,X)=d_E(A,X)/d_E(B,X)$$

*olur.*

Yani doğru boyunca olan $d_E$, $d_{DH}$ uzaklıklarının oranı aynıdır.

## 5.2 Deltoidal Hexacontahedron İzometri Grubu

Deltoidal hexacontahedron 120 tane simetriye sahip olup, simetri grubu $I_h$ ile gösterilir. Bu kısımda $d_{DH}$ metriği ile donatılmış $\mathbb{R}^3$ ün izometri grubu araştırılacatır. Bunun için öncelikle hangi Öklidyen izometrilerin Deltoidal Hexacontahedron uzaklığını koruduğu tespit edilecek daha sonra ise bu izometrilerden başka izometrilerin olmadığı gösterilecektir. $\alpha : \mathbb{R}^3_{DH} \to \mathbb{R}^3_{DH}$ dönüşüm olmak üzere her $X, Y \in \mathbb{R}^3_{DH}$ için

$$d_{DH}(X,Y) = d_{DH}(\alpha(X), \alpha(Y))$$

ise $\alpha$ dönüşümü $\mathbb{R}^3_{DH}$ de bir izometridir.

Aşağıda ifade edilen önermeler ile hangi Öklidyen izometrilerin deltoidal hexacontahedron uzayında da izometri oldukları verilmektedir.

**Önerme 5.3** *$\mathbb{R}^3$de her Öklidyen öteleme $\mathbb{R}^3_{DH}$ ün bir izometrisidir.*

**İspat** *$\alpha$=$(a_1, a_2, a_3)$, $X$=$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere $T_\alpha : \mathbb{R}^3_{DH} \to \mathbb{R}^3_{DH}$, $T_\alpha(X)$=$\alpha + X$ olacak şekilde reel uzayda bir öteleme olsun. $P_1$=$(x_1, y_1, z_1)$ , $P_2$=$(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3_{DH}$ için $A = |a_1 + x_1 - a_1 - x_2|$ , $B = |a_2 + y_1 - a_2 - y_2|$ , $C = |a_3 + z_1 - a_3 - z_2|$ olmak üzere*

$$\begin{aligned}
&d_{DH}(T_A(P_1), T_A(P_2)) \\
&= \max\left\{ \begin{array}{l} A + (2\varphi - 3)\max\left\{ \begin{array}{l} (1-\varphi)A + (1+\varphi)C, \\ B + C, \varphi C + (1+\varphi)B - A \end{array} \right\} \\ B + (2\varphi - 3)\max\left\{ \begin{array}{l} (1-\varphi)B + (1+\varphi)A, \\ A + C, \varphi A + (1+\varphi)C - B \end{array} \right\}, \\ C + (2\varphi - 3)\max\left\{ \begin{array}{l} (1-\varphi)C + (1+\varphi)B, \\ A + B, \varphi B + (1+\varphi)A - C \end{array} \right\}. \end{array} \right\} \\
&= \max\left\{ \begin{array}{l} |x_1 - x_2| + (2\varphi - 3)\max\left\{ \begin{array}{l} (1-\varphi)|x_1 - x_2| + (1+\varphi)|z_1 - z_2|, \\ |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|, \\ \varphi|z_1 - z_2| + (1+\varphi)|y_1 - y_2| - |x_1 - x_2| \end{array} \right\}, \\ |y_1 - y_2| + (2\varphi - 3)\max\left\{ \begin{array}{l} (1-\varphi)|y_1 - y_2| + (1+\varphi)|x_1 - x_2|, \\ |x_1 - x_2| + |z_1 - z_2|, \\ \varphi|x_1 - x_2| + (1+\varphi)|z_1 - z_2| - |y_1 - y_2| \end{array} \right\}, \\ |z_1 - z_2| + (2\varphi - 3)\max\left\{ \begin{array}{l} (1-\varphi)|z_1 - z_2| + (1+\varphi)|y_1 - y_2|, \\ |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, \\ \varphi|y_1 - y_2| + (1+\varphi)|x_1 - x_2| - |z_1 - z_2| \end{array} \right\}. \end{array} \right\} \\
&= d_{DH}(P_1, P_2)
\end{aligned}$$

*olur. Bundan dolayı $T_\alpha$ bir izometridir.*

Yukarıdaki önerme gereğince $\mathbb{R}^3_{DH}$ uzayında dönme ve yansımaları bulmak için orijinden geçen düzlemleri düşünmek yeterli olacaktır. Aşağıdaki önermede $\mathbb{R}^3_{DH}$ de uzaklığı koruyan yansımalar ifade edilecektir.

**Önerme 5.4** *$\mathbb{R}^3_{DH}$ de $\Delta = ax + by + cz = 0$ düzlemine göre yansımanın izometri olması için gerek ve yeter koşul düzlemin doğrultu vektörü $(a, b, c)$ nin*

$$D = \{(\pm 1, \varphi, \pm(1-\varphi)), (\pm(1-\varphi), \pm 1, \varphi), (\varphi, \pm(1-\varphi), \pm 1), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

*elemanlarına paralel olmasıdır.*

**İspat** *$\Delta : ax+by+cz=0$ birim normali $(a, b, c)$ olan düzlem olmak üzere $\sigma_\Delta : \mathbb{R}^3_{DH} \to \mathbb{R}^3_{DH}$ Öklidyen yansıma,*

$$\sigma_\Delta(x,y,z) = ((1-2a^2)x-2aby-2acz, -2abx+(1-2b^2)y-2bcz, -2acx-2bcy+(1-2c^2)z)$$

*şeklinde tanımlanır. $\mathbb{R}^3_{DH}$ ün taban vektörlerini koruyan yansıma izometri olacağından, deltoidal hexacontahedronun köşe noktalarıda olan, $\mathbb{R}^3_{DH}$ ün $A_2 = (1,0,0), A_{26} = (0, \frac{\sqrt{5}+3}{6}, \frac{\sqrt{5}+1}{6}), A_{38} = (\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{1}{2})$ tabanını koruyan yansımaları tespit etmek izometrileri bulmak için yeterli olacaktır. Taban vektörlerinin Öklidyen yansımalar altında görüntüleri*

$$\begin{aligned}
\sigma_\Delta(1,0,0) = &\quad (1-2a^2, -2ab, -2ac)\\
\sigma_\Delta(0, \tfrac{\sqrt{5}+3}{6}, \tfrac{\sqrt{5}+1}{6}) = &\quad (-2ab(\tfrac{\sqrt{5}+3}{6}) - 2ac(\tfrac{\sqrt{5}+1}{6}), (1-2b^2)\tfrac{\sqrt{5}+3}{6} - 2bc\tfrac{\sqrt{5}+1}{6},\\
&\qquad -2bc\tfrac{\sqrt{5}+3}{6} + (1-2c^2)\tfrac{\sqrt{5}+1}{6})\\
\sigma_\Delta(\tfrac{\sqrt{5}+1}{4}, \tfrac{\sqrt{5}-1}{4}, \tfrac{1}{2}) = &\quad ((1-2a^2)\tfrac{\sqrt{5}+1}{4} - 2ab\tfrac{\sqrt{5}-1}{4} - ac, -2ab\tfrac{\sqrt{5}+1}{4} + (1-2b^2)\tfrac{\sqrt{5}-1}{4} - bc,\\
&\qquad -2ac\tfrac{\sqrt{5}+1}{4} - 2bc\tfrac{\sqrt{5}-1}{4} + (1-2c^2)\tfrac{1}{2}))
\end{aligned}$$

*dır. Açıkça $d_{DH}(O, A_2)$=$d_{DH}(O, A_{26})$=$d_{DH}(O, A_{38})$=1 olmalıdır. Eğer yansıma $d_{DH}$ uzaklığını koruyor ise taban vektörlerinin yansıma altındaki görüntüleri için uzaklık korunmalıdır. Yani $d_{DH}(\sigma_\Delta(O), \sigma_\Delta(A_2))$=$d_{DH}(\sigma_\Delta(O), \sigma_\Delta(A_{26}))$=$d_{DH}(\sigma_\Delta(O), \sigma_\Delta(A_{38}))$=1 olmalıdır. Böylece,*

$$K = |x_1 - x_2| = |1-2a|, L = |y_1 - y_2| = |-2ab|$$

$$M = |z_1 - z_2| = |-2ac|, N = |x_1 - x_2| = \left|-2ab(\tfrac{\sqrt{5}+3}{6}) - 2ac(\tfrac{\sqrt{5}+1}{6})\right|$$

$$O = |y_1 - y_2| = \left|(1-2b^2)\tfrac{\sqrt{5}+3}{6} - 2bc\tfrac{\sqrt{5}+1}{6}\right|,$$

$$P = |z_1 - z_2| = \left|(1-2a^2)\tfrac{\sqrt{5}+1}{4} - 2ab\tfrac{\sqrt{5}-1}{4} - 2ac\tfrac{1}{2}\right|$$

$$R = |x_1 - x_2| = \left|(1-2a^2)\tfrac{\sqrt{5}+1}{4} - 2ab\tfrac{\sqrt{5}-1}{4} - 2ac\tfrac{1}{2}\right|,$$

$$S = |y_1 - y_2| = \left|-2ab\tfrac{\sqrt{5}+1}{4} + (1-2b^2)\tfrac{\sqrt{5}-1}{4} - 2bc\tfrac{1}{2}\right|$$

$$T = |z_1 - z_2| = \left|-2ac\tfrac{\sqrt{5}+1}{4} - 2bc\tfrac{\sqrt{5}-1}{4} + (1-2c^2)\tfrac{1}{2})\right| \textit{ olmak üzere}$$

$$d_{DH}(\sigma_\Delta(O), \sigma_\Delta(A_2)) =$$
$$\max\left\{\begin{array}{l} K + (2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)K + (1+\varphi)M,\\ L+M, \varphi M + (1+\varphi)L - K\end{array}\right\},\\ L + (2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)L + (1+\varphi)K,\\ K+M, \varphi K + (1+\varphi)M - L\end{array}\right\},\\ M\,(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)M + (1+\varphi)L,\\ K+L, \varphi L + (1+\varphi)K - M\end{array}\right\}.\end{array}\right\} = 1$$

$$d_{DH}(\sigma_\Delta(O), \sigma_\Delta(A_{26})) =$$
$$\max\left\{\begin{array}{l} N + (2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)N + (1+\varphi)P,\\ O+P, \varphi P + (1+\varphi)O - N\end{array}\right\},\\ O + (2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)O + (1+\varphi)N,\\ N+P, \varphi N + (1+\varphi)P - O\end{array}\right\},\\ P + (2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)P + (1+\varphi)O,\\ N+O, \varphi O + (1+\varphi)N - P\end{array}\right\}.\end{array}\right\} = 1$$

$$d_{DH}(\sigma_\Delta(O), \sigma_\Delta(A_{38})) =$$
$$\max\left\{\begin{array}{l} R + (2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)R + (1+\varphi)T,\\ S+T, \varphi T + (1+\varphi)S - R\end{array}\right\},\\ S + (2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)S + (1+\varphi)R,\\ R+T, \varphi R + (1+\varphi)T - S\end{array}\right\},\\ T + (2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)T + (1+\varphi)S,\\ R+S, \varphi S + (1+\varphi)R - T\end{array}\right\}.\end{array}\right\} = 1$$

*denklem sistemleri elde edilir. Denklem sistemi çözülürse,* $(\pm 1, \varphi, \pm(1-\varphi))$, $(\pm(1-\varphi), \pm 1, \varphi)$, $(\varphi, \pm(1-\varphi), \pm 1)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ *çözümleri elde edilir.*

*Tersine normal vektörleri $D$ kümesindeki vektörlere paralel olacak şekildeki düzlemlere göre yansımaların uzaklığı koruduğu gösterilmelidir. $\sigma_\Delta(X) = Y$ olacak şekilde $X$ ve $Y$ noktaları için $(p_1, q_1, r_1)$ ve $(p_2, q_2, r_2)$, $OX$ ve $OY$ vektörlerinin yön vektörleri olsun. $d_{DH}(O, X) = d_{DH}(O, Y)$ olduğunu göstermek için önerme 4.2 den $\mu_{OX} = \mu_{OY}$ olduğunu göstermek yeterlidir. $(p_1, q_1, r_1)$ vektörünün düzleme göre yansıma altındaki görüntüleri bulunursa;*

*1. Durum:* $1x + \varphi y + (1-\varphi)z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1, q_1, r_1) = (\tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 - \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}r_1, \tfrac{-1-\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1}{2}r_1, \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1}{2}q_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1),$$

*2. Durum:* $1x + \varphi y + -(1-\varphi)z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{-1-\sqrt{5}}{4}q_1 - \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1 - \tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1 - \tfrac{1}{2}q_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1),$$

*3.Durum:* -$1x + \varphi y + (1-\varphi)z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1}{2}q_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1),$$

*4.Durum:* -$1x + \varphi y + -(1-\varphi)z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1 - \tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1 - \tfrac{1}{2}q_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1),$$

*5.Durum:* (1-$\varphi)x + 1y + \varphi z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 - \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1}{2}q_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{-1-\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1),$$

*6.Durum:* -(1-$\varphi)x + 1y + \varphi z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1 - \tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1}{2}q_1 + \tfrac{-1-\sqrt{5}}{4}r_1,\ -\tfrac{1}{2}p_1 - \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1),$$

*7.Durum:* $(1-\varphi)x - 1y + \varphi z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1}{2}q_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1),$$

*8.Durum:* $-(1-\varphi)x - 1y + \varphi z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}q_1 - \tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1}{2}q_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ -\tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1),$$

*9.Durum:* $\varphi x + (1-\varphi)y + 1z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1}{2}q_1 - \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ -\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1}{2}r_1),$$

*10.Durum:* $\varphi x + -(1-\varphi)y + 1z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1 - \tfrac{1}{2}q_1 - \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ -\tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1,\ -\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1}{2}r_1),$$

*11.Durum:* $\varphi x + (1-\varphi)y - 1z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1}{2}q_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1}{2}r_1),$$

*12.Durum:* $\varphi x + -(1-\varphi)y - 1z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1 - \tfrac{1}{2}q_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ -\tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1}{2}r_1),$$

*13.Durum:* $1x = 0$ *yansıma düzlemi için,*$\sigma_{\Delta}\ (p_1, q_1, r_1) = (-p_1, q_1, r_1)$ ,

*14.Durum:* $1y = 0$ *yansıma düzlemi için,*$\sigma_{\Delta}\ (p_1, q_1, r_1) = (p_1, -q_1, r_1)$ ,

*15.Durum:* $1z = 0$ *yansıma düzlemi için,*$\sigma_{\Delta}\ (p_1, q_1, r_1) = (p_1, q_1, -r_1)$ .

*sonuçları elde edilir. Çıkan bu sonuçlara ve önerme 4.2 ye göre de* $\mu(OX) = \mu(OY)$ *olduğu görülmektedir. Böylece ispat tamamlanmış olur.*

**Sonuç 5.4** $S_{DH}$ *izometrik yansımalarının kümesi orijinden geçen düzlemlere göre on beş Öklidyen yansımadan oluşur. Orijinden geçen düzlemler;*

$$
\begin{array}{ccc}
x = 0 & y = 0 & z = 0 \\
x + \varphi y + (1-\varphi)z = 0 & (1-\varphi)x + y + \varphi z = 0 & \varphi x + (1-\varphi)y + z = 0 \\
x + \varphi y - (1-\varphi)z = 0 & -(1-\varphi)x + y + \varphi z = 0 & \varphi x - (1-\varphi)y + z = 0 \\
-x + \varphi y + (1-\varphi)z = 0 & (1-\varphi)x - y + \varphi z = 0 & \varphi x + (1-\varphi)y - z = 0 \\
-x + \varphi y - (1-\varphi)z = 0 & -(1-\varphi)x - y + \varphi z = 0 & \varphi x + -(1-\varphi)y - z = 0
\end{array}
$$

Şekil5.4 deki tablolar birim kürenin köşe noktalarının ilgili yansıma dönüşümleri altındaki görüntülerini vermektedir.

| Yansıma Düzlemleri | A0 | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 | A10 | A11 | A12 | A13 | A14 | A15 | A16 | A17 | A18 | A19 | A20 | A21 | A22 | A23 | A24 | A25 | A26 | A27 | A28 | A29 | A30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x=0 | A0 | A1 | A3 | A2 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 | A12 | A13 | A10 | A11 | A16 | A17 | A14 | A15 | A20 | A21 | A18 | A19 | A24 | A25 | A22 | A23 | A26 | A27 | A28 | A29 | A34 |
| y=0 | A0 | A1 | A2 | A3 | A5 | A4 | A8 | A9 | A6 | A7 | A10 | A11 | A12 | A13 | A15 | A14 | A17 | A16 | A18 | A19 | A20 | A21 | A23 | A22 | A25 | A24 | A28 | A29 | A26 | A27 | A32 |
| z=0 | A1 | A0 | A2 | A3 | A4 | A5 | A7 | A6 | A9 | A8 | A11 | A10 | A13 | A12 | A14 | A15 | A16 | A17 | A19 | A18 | A21 | A20 | A22 | A23 | A24 | A25 | A27 | A26 | A29 | A28 | A31 |
| 1x+φy+(1-φ)z=0 | A53 | A46 | A41 | A42 | A35 | A32 | A61 | A14 | A17 | A54 | A57 | A11 | A12 | A58 | A7 | A56 | A59 | A8 | A29 | A22 | A25 | A26 | A19 | A23 | A24 | A20 | A21 | A27 | A28 | A18 | A37 |
| 1x+φy-(1-φ)z=0 | A47 | A52 | A40 | A43 | A34 | A33 | A14 | A60 | A55 | A17 | A10 | A56 | A59 | A13 | A6 | A57 | A58 | A9 | A22 | A28 | A27 | A25 | A18 | A23 | A24 | A21 | A26 | A20 | A19 | A29 | A46 |
| -1x+φy+(1-φ)z=0 | A51 | A48 | A39 | A44 | A30 | A37 | A16 | A56 | A59 | A15 | A55 | A11 | A12 | A60 | A54 | A9 | A6 | A61 | A27 | A23 | A24 | A28 | A22 | A19 | A20 | A25 | A26 | A18 | A21 | A29 | A4 |
| -1x+φy-(1-φ)z=0 | A49 | A50 | A38 | A45 | A31 | A36 | A57 | A16 | A15 | A58 | A10 | A54 | A61 | A13 | A55 | A8 | A7 | A60 | A23 | A26 | A29 | A24 | A22 | A18 | A21 | A25 | A19 | A27 | A28 | A20 | A41 |
| (1-φ)x+1y+φz=0 | A36 | A31 | A49 | A50 | A45 | A38 | A60 | A7 | A8 | A55 | A15 | A57 | A58 | A16 | A61 | A10 | A13 | A54 | A28 | A19 | A20 | A27 | A29 | A23 | A24 | A26 | A25 | A21 | A18 | A22 | A52 |
| -(1-φ)x+1y+φz=0 | A34 | A33 | A47 | A52 | A40 | A43 | A6 | A57 | A58 | A9 | A14 | A55 | A60 | A17 | A10 | A59 | A56 | A13 | A26 | A19 | A20 | A29 | A22 | A27 | A28 | A25 | A18 | A23 | A24 | A21 | A30 |
| (1-φ)x-1y+φz=0 | A32 | A35 | A46 | A53 | A41 | A42 | A56 | A7 | A8 | A59 | A54 | A14 | A17 | A61 | A11 | A58 | A57 | A12 | A18 | A27 | A28 | A21 | A22 | A26 | A29 | A25 | A23 | A19 | A20 | A24 | A40 |
| -(1-φ)x-1y+φz=0 | A30 | A37 | A48 | A51 | A44 | A39 | A6 | A61 | A54 | A9 | A56 | A15 | A16 | A59 | A60 | A11 | A12 | A55 | A18 | A29 | A26 | A21 | A28 | A23 | A24 | A27 | A20 | A25 | A22 | A19 | A0 |
| φx+(1-φ)y+1z=0 | A44 | A39 | A37 | A30 | A51 | A48 | A12 | A55 | A60 | A11 | A61 | A9 | A6 | A54 | A59 | A15 | A16 | A56 | A25 | A19 | A20 | A22 | A21 | A29 | A26 | A18 | A24 | A27 | A28 | A23 | A3 |
| φx-(1-φ)y+1z=0 | A38 | A45 | A36 | A31 | A50 | A49 | A54 | A13 | A10 | A61 | A8 | A60 | A55 | A7 | A58 | A15 | A16 | A57 | A18 | A25 | A22 | A21 | A20 | A28 | A27 | A19 | A26 | A24 | A23 | A29 | A30 |
| φx+(1-φ)y-1z=0 | A40 | A43 | A34 | A33 | A47 | A52 | A10 | A59 | A56 | A13 | A61 | A58 | A57 | A9 | A14 | A60 | A55 | A17 | A18 | A24 | A23 | A21 | A26 | A20 | A19 | A29 | A22 | A27 | A28 | A25 | A38 |
| φx+(1-φ)y-1z=0 | A42 | A41 | A35 | A32 | A46 | A53 | A58 | A11 | A12 | A57 | A59 | A7 | A8 | A56 | A14 | A61 | A54 | A17 | A24 | A19 | A20 | A23 | A27 | A21 | A18 | A28 | A26 | A22 | A25 | A29 | A50 |

| Yansıma Düzlemleri | A31 | A32 | A33 | A34 | A35 | A36 | A37 | A38 | A39 | A40 | A41 | A42 | A43 | A44 | A45 | A46 | A47 | A48 | A49 | A50 | A51 | A52 | A53 | A54 | A55 | A56 | A57 | A58 | A59 | A60 | A61 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x=0 | A35 | A36 | A37 | A30 | A31 | A32 | A33 | A42 | A43 | A44 | A45 | A38 | A39 | A40 | A41 | A50 | A51 | A52 | A53 | A46 | A47 | A48 | A49 | A58 | A59 | A60 | A61 | A54 | A55 | A56 | A57 |
| y=0 | A33 | A30 | A31 | A36 | A37 | A34 | A35 | A40 | A41 | A38 | A39 | A44 | A45 | A42 | A43 | A48 | A49 | A46 | A47 | A52 | A53 | A50 | A51 | A56 | A57 | A54 | A55 | A60 | A61 | A58 | A59 |
| z=0 | A30 | A33 | A32 | A35 | A34 | A37 | A36 | A39 | A38 | A41 | A40 | A43 | A42 | A45 | A44 | A47 | A46 | A49 | A48 | A51 | A50 | A53 | A52 | A55 | A54 | A57 | A56 | A59 | A58 | A61 | A60 |
| 1x+φy+(1-φ)z=0 | A47 | A5 | A38 | A45 | A4 | A52 | A30 | A33 | A39 | A49 | A2 | A38 | A50 | A44 | A34 | A1 | A31 | A48 | A40 | A43 | A51 | A36 | A0 | A9 | A55 | A15 | A10 | A13 | A16 | A60 | A6 |
| 1x+φy-(1-φ)z=0 | A36 | A39 | A5 | A4 | A44 | A31 | A53 | A38 | A32 | A2 | A48 | A51 | A3 | A35 | A45 | A30 | A0 | A41 | A49 | A50 | A42 | A1 | A37 | A54 | A8 | A11 | A15 | A16 | A12 | A7 | A61 |
| -1x+φy+(1-φ)z=0 | A40 | A35 | A49 | A50 | A32 | A43 | A5 | A47 | A2 | A31 | A41 | A42 | A36 | A3 | A52 | A46 | A38 | A1 | A33 | A34 | A0 | A45 | A53 | A14 | A10 | A7 | A57 | A58 | A8 | A13 | A17 |
| -1x+φy-(1-φ)z=0 | A4 | A48 | A34 | A33 | A51 | A52 | A42 | A2 | A46 | A40 | A30 | A37 | A43 | A53 | A3 | A39 | A47 | A32 | A0 | A1 | A35 | A52 | A44 | A11 | A14 | A56 | A6 | A9 | A59 | A17 | A12 |
| (1-φ)x+1y+φz=0 | A1 | A32 | A39 | A44 | A35 | A0 | A47 | A5 | A33 | A48 | A41 | A42 | A51 | A34 | A4 | A53 | A37 | A40 | A2 | A3 | A43 | A30 | A46 | A17 | A9 | A56 | A11 | A12 | A59 | A6 | A14 |
| -(1-φ)x+1y+φz=0 | A41 | A50 | A1 | A0 | A49 | A42 | A37 | A46 | A39 | A4 | A31 | A36 | A5 | A44 | A53 | A38 | A2 | A51 | A35 | A32 | A48 | A3 | A45 | A54 | A11 | A16 | A7 | A8 | A15 | A12 | A61 |
| (1-φ)x-1y+φz=0 | A31 | A0 | A51 | A48 | A1 | A36 | A43 | A38 | A47 | A30 | A4 | A5 | A37 | A52 | A45 | A2 | A39 | A34 | A50 | A49 | A33 | A44 | A3 | A10 | A55 | A6 | A16 | A15 | A9 | A60 | A13 |
| -(1-φ)x-1y+φz=0 | A53 | A38 | A33 | A34 | A45 | A46 | A1 | A32 | A5 | A40 | A49 | A50 | A43 | A4 | A35 | A36 | A52 | A2 | A41 | A42 | A3 | A47 | A31 | A8 | A17 | A10 | A57 | A58 | A13 | A14 | A7 |
| φx+(1-φ)y+1z=0 | A31 | A52 | A41 | A42 | A47 | A36 | A2 | A45 | A1 | A53 | A33 | A34 | A46 | A0 | A38 | A43 | A35 | A5 | A49 | A50 | A4 | A32 | A40 | A13 | A7 | A17 | A57 | A58 | A14 | A8 | A10 |
| φx-(1-φ)y+1z=0 | A3 | A40 | A53 | A46 | A43 | A2 | A37 | A0 | A44 | A32 | A52 | A47 | A35 | A39 | A1 | A34 | A42 | A48 | A5 | A4 | A51 | A41 | A33 | A6 | A12 | A56 | A17 | A14 | A59 | A11 | A9 |
| φx+(1-φ)y-1z=0 | A51 | A32 | A3 | A2 | A35 | A48 | A45 | A30 | A50 | A0 | A42 | A41 | A1 | A49 | A37 | A46 | A4 | A36 | A44 | A39 | A31 | A5 | A53 | A54 | A16 | A8 | A12 | A11 | A7 | A15 | A61 |
| φx+(1-φ)y-1z=0 | A39 | A3 | A33 | A34 | A2 | A44 | A49 | A51 | A31 | A43 | A1 | A0 | A40 | A36 | A48 | A4 | A47 | A45 | A37 | A30 | A38 | A52 | A5 | A16 | A55 | A13 | A9 | A6 | A10 | A60 | A15 |

Şekil 5.4 $\mathbb{R}^3_{DH}$ de Yansıma Düzlemlerine Göre Köşe Noktaların Görüntüleri

**Önerme 5.5** *$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve*

$$D_1 = \{1, (\pm(1-\varphi), 0),\ (0, 1, \pm(1-\varphi)),\ (\pm(1-\varphi), 0, 1)\}$$
$$D_2 = \left\{ \begin{array}{l} (1,0,0),\ (0,1,0), (0,0,1),\ (1, \pm\varphi, \pm(1-\varphi)), (\pm(1-\varphi), 1, \pm\varphi) \\ (\pm\varphi, \pm(1-\varphi), 1) \end{array} \right\}$$
$$D_3 = \left\{ \begin{array}{l} (1,1,1),\ (-1,1,1),\ (1,-1,1),\ (1,1,-1),\ (\pm(2-\varphi), 1, 0),\ \\ (0, \pm(2-\varphi), 1), (1, 0 \pm (2-\varphi)) \end{array} \right\}$$

*olmak üzere*

$$R_1 = \{r_\theta \mid \theta \in \{2\pi/5,\ 4\pi/5,\ 6\pi/5, 8\pi/5\},\ dönme\ ekseninin\ doğrultu\ vektörü\ D_1\ in\ elemanı\}$$
$$R_2 = \{r_\theta \mid \theta \in \{\pi\},\ dönme\ ekseninin\ doğrultu\ vektörü\ D_2\ in\ elemanı\}$$
$$R_3 = \{r_\theta \mid \theta = \{2\pi/3, 4\pi/3\},\ dönme\ ekseninin\ doğrultu\ vektörü\ D_3\ in\ elemanı\}$$

*kümeleri verilsin. Dönme ekseni orijinden geçen bir $l$ doğrusu olan $r_\theta$ dönmesinin bir izometri olması için gerek ve yeter koşul $r_\theta \in R_{DD} = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ olmasıdır.*

**İspat** *Birl doğrusunun birim doğrultusu $(p, q, r)$ olmak üzere $l$ etrafında $r_\theta$ Öklidyen dönmenin matris formu;*

$$\begin{bmatrix} \cos\theta + p^2(1-\cos\theta) & pq(1-\cos\theta) - r\sin\theta & pr(1-\cos\theta) + q\sin\theta \\ pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta & \cos\theta + q^2(1-\cos\theta) & qr(1-\cos\theta) - p\sin\theta \\ pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta & qr(1-\cos\theta) + p\sin\theta & \cos\theta - r^2(1-\cos\theta) \end{bmatrix}$$

*şeklindedir. $l$ eksenindeki bir dönme, $l$ doğrusu boyunca kesişen iki düzlemin yansımalarının birleşimi olduğundan önerme 4.4 den dolayı $l$ doğrusunun doğrultu vektörleri $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(0,-1,\pm(1-\varphi))$, $((1-\varphi), 0, \pm 1)$, $(-1, \pm(1-\varphi), 0)$, $(1, \pm\varphi, \pm(1-\varphi))$, $(\pm(1-\varphi), \pm 1, \varphi)$, $(\pm\varphi, -(1-\varphi), \pm 1)$, $(1,1,1)$, $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$, $(\pm(2-\varphi), 1, 0)$, $(0, \pm(2-\varphi), 1)$, $(1, 0, \pm(2-\varphi))$ olarak alınabilir.*

*$\mathbb{R}^3_{DH}$ de izometrik dönmelerin bulunması için, $d_{DH}$ birim küresinin kenarlarının uzunluklarını koruyan dönmelerin bulunması yeterlidir.*

*$A_0 = (0,0,1)$, $A_6 = \left(0, \frac{(3\sqrt{5}+1)}{22}, \frac{(5\sqrt{5}+9)}{22}, 0\right)$, $A_{18} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{6}, 0, \frac{\sqrt{5}+1}{6}\right)$ $d_{DH}$ birim küresinin köşe noktalarını ele alalım. Buna göre açıkça $d_{DH}(A_0,\ A_{18}) = \sqrt{5} - \frac{5}{3}$ ve $d_{DH}(A_0,\ A_6) = \frac{13\sqrt{5}-25}{11}$ dir. O halde $\theta \neq 0$ olmak üzere $r_\theta, d_{DH}$ uzaklığını koruması için*

$$d_{DH}(r_\theta(A_0), r_\theta(A_{18})) = \frac{3\sqrt{5}-5}{3}\ ve\ d_{DH}(r_\theta(A_0), r_\theta(A_6)) = \frac{13\sqrt{5}-25}{11}$$

*olmalıdır. Bu taktirde,*

$$K_1 = \left| (\tfrac{1}{3})(pr(1-\cos\theta) + q\sin\theta) + \tfrac{\sqrt{5}+1}{6}(p^2(1-\cos\theta) + \cos\theta) \right|,$$

$$L_1 = \left|(\tfrac{1}{3})(qr(1-\cos\theta) - p\sin\theta) + \tfrac{\sqrt{5}+1}{6}(pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta)\right|,$$

$$M_1 = \left|(\tfrac{1}{3})(\cos\theta + r^2(1-\cos\theta) + \tfrac{\sqrt{5}+1}{6}(pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta)\right|,$$

$$K_2 = \left|\tfrac{2\sqrt{5}+8}{22}(pr(1-\cos\theta) + q\sin\theta) + \tfrac{3\sqrt{5}+1}{22}(pq(1-\cos\theta) - r\sin\theta)\right|,$$

$$L_2 = \left|\tfrac{2\sqrt{5}+8}{22}(qr(1-\cos\theta) - p\sin\theta) + \tfrac{3\sqrt{5}+1}{22}(\cos\theta + q^2(1-\cos\theta))\right| \textit{ ve}$$

$$M_2 = \left|\tfrac{2\sqrt{5}+8}{22}(\cos\theta + r^2(1-\cos\theta) + \tfrac{3\sqrt{5}+1}{22}(qr(1-\cos\theta) + p\sin\theta)\right| \textit{ olmak üzere}$$

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_1 + (2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)K_1 + (1+\varphi)M_1, L_1 + M_1,\\ \varphi M_1 + (1+\varphi)L_1 - K_1\end{array}\right\},\\ L_1 + (2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)L_1 + (1+\varphi)K_1, K_1 + M_1,\\ \varphi K_1 + (1+\varphi)M_1 - L_1\end{array}\right\},\\ M_1\,(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)M_1 + (1+\varphi)L_1, K_1 + L_1,\\ \varphi L_1 + (1+\varphi)K_1 - M_1\end{array}\right\}. \end{array}\right\} = \frac{3\sqrt{5}-5}{3}$$

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_2 + (2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)K_2 + (1+\varphi)M_2, L_2 + M_2,\\ \varphi M_2 + (1+\varphi)L_2 - K_2\end{array}\right\},\\ L_2 + (2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)L_2 + (1+\varphi)K_2, K_2 + M_2,\\ \varphi K_2 + (1+\varphi)M_2 - L_2\end{array}\right\},\\ M_2\,(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)M_2 + (1+\varphi)L_2, K_2 + L_2,\\ \varphi L_2 + (1+\varphi)K_2 - M_2\end{array}\right\}. \end{array}\right\} = \frac{13\sqrt{5}-25}{11}$$

*denklemleri elde edilir.*

*$l$ doğrusunun doğrultu vektörü* $(0,1,(1-\varphi))$ *olarak alınırsa* $(p,q,r) = (0, \frac{1}{\sqrt{2-2\varphi+\varphi^2}}, \frac{1-\varphi}{\sqrt{2-2\varphi+\varphi^2}})$ *olur.* $p,q,r$ *değerleri* $d_{DH}(r_\theta(A_0), r_\theta(A_{18})) = \sqrt{5} - \frac{5}{3}$ $ve$ $d_{DH}(r_\theta(A_0), r_\theta(A_6)) = \frac{13\sqrt{5}-25}{11}$ *te yerine yazılırsa;*

$K_1 = \left|\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\frac{3-\sqrt{5}}{6}\sin\theta - \frac{\sqrt{5}+1}{6}\cos\theta)\right|,$

$L_1 = \left|\frac{\sqrt{5}}{5}\frac{3-\sqrt{5}}{6}(1-\cos\theta) - \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\frac{\sqrt{5}+1}{6}\sin\theta)\right|,$

$M_1 = \left|\frac{3-\sqrt{5}}{6}(\cos\theta + \frac{50-10\sqrt{5}}{100}(1-\cos\theta)) + \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\frac{\sqrt{5}+1}{6}\sin\theta\right|,$

$K_2 = \left|\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\frac{13-5\sqrt{5}}{22} + \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\frac{3\sqrt{5}+1}{22}\sin\theta\right|,$

$L_2 = \left|\frac{\sqrt{5}}{5}\frac{13-5\sqrt{5}}{22}(1-\cos\theta) - (\cos\theta + \frac{\left(50+10\sqrt{5}\right)(1-\cos\theta)}{100})\right|$ *ve*

$M_2 = \left|\frac{13-5\sqrt{5}}{22}(\cos\theta + \frac{50-10\sqrt{5}}{100}(1-\cos\theta) - \frac{\sqrt{5}}{5}\frac{3\sqrt{5}+1}{22}(1-\cos\theta)\right|$ *olmak üzere*

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_1+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)K_1+(1+\varphi)M_1,\\ L_1+M_1,\varphi M_1+(1+\varphi)L_1-K_1\end{array}\right\},\\ L_1+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)L_1+(1+\varphi)K_1,\\ K_1+M_1,\varphi K_1+(1+\varphi)M_1-L_1\end{array}\right\},\\ M_1\,(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)M_1+(1+\varphi)L_1,\\ K_1+L_1,\varphi L_1+(1+\varphi)K_1-M_1\end{array}\right\}.\end{array}\right\} = \frac{3\sqrt{5}-5}{3}$$

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_2+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)K_2+(1+\varphi)M_2,\\ L_2+M_2,\varphi M_2+(1+\varphi)L_2-K_2\end{array}\right\},\\ L_2+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)L_2+(1+\varphi)K_2,\\ K_2+M_2,\varphi K_2+(1+\varphi)M_2-L_2\end{array}\right\},\\ M_2\,(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)M_2+(1+\varphi)L_2,\\ K_2+L_2,\varphi L_2+(1+\varphi)K_2-M_2\end{array}\right\}.\end{array}\right\} = \frac{13\sqrt{5}-25}{11}$$

*denklemlerine ulaşılır. Bu denklemler çözülürse* $\theta = 2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5$ *sonuçları bulunur. Benzer şekilde, eğer* $l$ *doğrusunun yön vektörü;* $(1, \pm(1-\varphi), 0)$*,* $(0, 1, \pm(1-\varphi))$*,* $(\pm(1-\varphi), 0, 1)$ *olarak alınır ise* $\theta = 2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5$ *olur.*

$l$ *doğrusunun yön vektörü (1,0,0) ise* $(p, q, r) = (1, 0, 0)$ *olur.* $p, q, r$ *değerleri* $d_{DH}(r_\theta(A_0), r_\theta(A_{18})) = \sqrt{5} - \frac{5}{3}$ *ve* $d_{DH}(r_\theta(A_0), r_\theta(A_6)) = \frac{13\sqrt{5}-25}{11}$ *te yerine yazılırsa;* $K_1 = \left|\frac{3-\sqrt{5}}{6}\cos\theta\right|, L_1 = \left|\frac{3-\sqrt{5}}{6}\sin\theta)\right|, M_1 = \left|\frac{\sqrt{5}+1}{6}\right|, K_2 = 0, L_2 = \left|\frac{13-5\sqrt{5}}{22}\cos\theta - \frac{3\sqrt{5}+1}{22}\sin\theta\right|$ *ve* $M_2 = \left|\frac{3\sqrt{5}+1}{22}\cos\theta + \frac{13-5\sqrt{5}}{22}\sin\theta)\right|$*olmak üzere*

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_1+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)K_1+(1+\varphi)M_1, L_1+M_1,\\ \varphi M_1+(1+\varphi)L_1-K_1\end{array}\right\},\\ L_1+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)L_1+(1+\varphi)K_1, K_1+M_1,\\ \varphi K_1+(1+\varphi)M_1-L_1\end{array}\right\},\\ M_1\,(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)M_1+(1+\varphi)L_1, K_1+L_1,\\ \varphi L_1+(1+\varphi)K_1-M_1\end{array}\right\}.\end{array}\right\} = \frac{3\sqrt{5}-5}{3}$$

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_2+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)K_2+(1+\varphi)M_2, L_2+M_2,\\ \varphi M_2+(1+\varphi)L_2-K_2\end{array}\right\},\\ L_2+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)L_2+(1+\varphi)K_2, K_2+M_2,\\ \varphi K_2+(1+\varphi)M_2-L_2\end{array}\right\},\\ M_2\,(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)M_2+(1+\varphi)L_2, K_2+L_2,\\ \varphi L_2+(1+\varphi)K_2-M_2\end{array}\right\}.\end{array}\right\} = \frac{13\sqrt{5}-25}{11}$$

*elde edilir. Bu denklemler çözülürse* $\theta = \pi$ *sonucu bulunur.Buradan* $l$ *doğrusunun etrafındaki* $\theta = \pi$ *radyanlık dönme* $\mathbb{R}^3_{DH}$ *ün bir izometrisidir. Benzer şekilde, eğer* $l$ *doğrusunun doğrultu vektörü* $(0, 1, 0)$*,* $(0, 0, 1)$*,* $(1, \pm\varphi, \pm(1-\varphi))$*,* $(\pm(1-\varphi), 1, \pm\varphi)$*,* $(\pm\varphi, \pm(1-\varphi), 1)$ *ise* $\theta = \pi$ *sonucu bulunur.*

*$l$ doğrusunun doğrultu vektörü $(1,1,1)$ ise $(p,q,r)$=$(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$ olur. $p$, $q$, $r$ değerleri $d_{DH}(r_\theta(A_0),r_\theta(A_{18}))$=$\sqrt{5}-\frac{5}{3}$ ve $d_{DH}(r_\theta(A_0),r_\theta(A_6))$=$\frac{13\sqrt{5}-25}{11}$ de yerine yazılırsa;*

$K_1=\left|\frac{3-\sqrt{5}}{6}\frac{2\cos\theta+1}{3}-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{6}\left(\frac{1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)\right)\right|$,

$L_1=\left|\frac{3-\sqrt{5}}{6}\left(\frac{1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)-\frac{\sqrt{5}+1}{6}\left(\frac{1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)\right|$,

$M_1=\left|\frac{3-\sqrt{5}}{6}\left(\frac{1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)-\frac{\sqrt{5}+1}{6}\frac{2\cos\theta+1}{3}\right|$,

$K_2=\left|\frac{13-5\sqrt{5}}{22}\frac{2\cos\theta+1}{3}-\left(\frac{3\sqrt{5}+1}{22}\left(\frac{1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)\right)\right|$,

$L_2=\left|\frac{13-5\sqrt{5}}{22}\left(\frac{1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)-\left(\frac{3\sqrt{5}+1}{22}\frac{2\cos\theta+1}{3}\right)\right|$ *ve*

$M_2=\left|\frac{13-5\sqrt{5}}{22}\left(\frac{1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)-\left(\frac{3\sqrt{5}+1}{22}\left(\frac{1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)\right)\right|$*olmak üzere*

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_1+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)K_1+(1+\varphi)M_1,L_1+M_1,\\ \varphi M_1+(1+\varphi)L_1-K_1\end{array}\right\},\\ L_1+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)L_1+(1+\varphi)K_1,K_1+M_1,\\ \varphi K_1+(1+\varphi)M_1-L_1\end{array}\right\},\\ M_1\,(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)M_1+(1+\varphi)L_1,K_1+L_1,\\ \varphi L_1+(1+\varphi)K_1-M_1\end{array}\right\}.\end{array}\right\} = \frac{3\sqrt{5}-5}{3}$$

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_2+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)K_2+(1+\varphi)M_2,L_2+M_2,\\ \varphi M_2+(1+\varphi)L_2-K_2\end{array}\right\},\\ L_2+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)L_2+(1+\varphi)K_2,K_2+M_2,\\ \varphi K_2+(1+\varphi)M_2-L_2\end{array}\right\},\\ M_2\,(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)M_2+(1+\varphi)L_2,K_2+L_2,\\ \varphi L_2+(1+\varphi)K_2-M_2\end{array}\right\}.\end{array}\right\} = \frac{13\sqrt{5}-25}{11}$$

*denklemleri elde edilir. Bu denklem sistemi çözülürse $\theta=\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}$ sonuçlarına ulaşılır. Buradan $l$ etrafındaki $\theta=\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}$ radyanlık dönmeler $\mathbb{R}^3_{DH}$ ün bir izometrisidir. Benzer şekilde, eğer $l$'nin yön vektörü $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$, $(\pm(2-\varphi),1,0)$, $(0,\pm(2-\varphi),1)$, $(1,0,\pm(2-\varphi))$ ise $\theta=\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}$ olur.*

*Tersine $r_\theta(X)=Y$ olacak şekilde $X$ ve $Y$ noktalarıyla oluşturulan $OX$ ve $OY$ doğrularının doğrultuları sırasıyla $(p_1,q_1,r_1)$ ve $(p_2,q_2,r_2)$ olmak üzere $d_{DH}(OX)=d_{DH}(OY)$ olduğunu göstermek için önerme 4.2 den $\mu_{OX}=\mu_{OY}$ olduğu gösterilmelidir. Bu ise $(p_1,q_1,r_1)$ vektörünün tüm durumları için görüntüleri bulunarak kolaylıkla gösterilebilir. Öreneğin doğrultu vektörü $(1,1,1)$ olmak üzere, bu eksende $\frac{2\pi}{3}$ radyanlık dönme dönüşümü yapılınca$(p_2,q_2,r_2)=(r_1,p,_1,q_1)$ bulunur. Buradan da açıkça $\mu(OX)=\mu(OY)$ olduğu görülür. Benzer şekilde diğer dönme eksenleri ve dönme açıları için eşitlik gösterilebilir. Buda ispatı tamamlar.*

**Sonuç 5.5** *Orijinden geçen doğrulara göre izometrik dönmelerin $R_{DH}$ kümesi tam olarak 59 Öklidyen dönme içerir.*

Şekil5.5 ve Şekil5.6 deki tablolar birim kürenin köşe noktalarının ilgili dönme dönüşümleri altındaki görüntülerini vermektedir.

| Dönme Ekseni Doğrultu Vektörleri | | A0 | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 | A10 | A11 | A12 | A13 | A14 | A15 | A16 | A17 | A18 | A19 | A20 | A21 | A22 | A23 | A24 | A25 | A26 | A27 | A28 | A29 | A30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1,0,0) | θ=π | A1 | A0 | A2 | A3 | A5 | A4 | A9 | A8 | A7 | A6 | A11 | A10 | A13 | A12 | A15 | A14 | A17 | A16 | A19 | A18 | A21 | A20 | A23 | A22 | A25 | A24 | A29 | A28 | A27 | A26 | A33 |
| (0,1,0) | θ=π | A1 | A0 | A3 | A2 | A4 | A5 | A7 | A6 | A9 | A8 | A13 | A12 | A11 | A10 | A16 | A17 | A14 | A15 | A21 | A20 | A19 | A18 | A24 | A25 | A22 | A23 | A27 | A26 | A29 | A28 | A35 |
| (0,0,1) | θ=π | A0 | A1 | A3 | A2 | A5 | A4 | A8 | A9 | A6 | A7 | A12 | A13 | A10 | A11 | A17 | A16 | A15 | A14 | A20 | A21 | A18 | A19 | A25 | A24 | A23 | A22 | A28 | A29 | A26 | A27 | A36 |
| (1,1,1) | θ=2π/3 | A2 | A3 | A4 | A5 | A0 | A1 | A10 | A12 | A11 | A13 | A14 | A16 | A15 | A17 | A6 | A7 | A8 | A9 | A22 | A24 | A23 | A25 | A26 | A27 | A28 | A29 | A18 | A20 | A19 | A21 | A38 |
| | θ=4π/3 | A4 | A5 | A0 | A1 | A2 | A3 | A14 | A15 | A16 | A17 | A6 | A8 | A7 | A9 | A10 | A12 | A11 | A13 | A26 | A28 | A27 | A29 | A18 | A20 | A19 | A21 | A22 | A23 | A24 | A25 | A46 |
| (-1,1,1) | θ=2π/3 | A4 | A5 | A1 | A0 | A3 | A2 | A16 | A17 | A14 | A15 | A7 | A9 | A6 | A8 | A13 | A11 | A12 | A10 | A27 | A29 | A26 | A28 | A21 | A19 | A20 | A18 | A24 | A25 | A22 | A23 | A51 |
| | θ=4π/3 | A3 | A2 | A5 | A4 | A0 | A1 | A12 | A10 | A13 | A11 | A17 | A15 | A16 | A14 | A8 | A9 | A6 | A7 | A25 | A23 | A24 | A22 | A28 | A29 | A26 | A27 | A20 | A18 | A21 | A19 | A44 |
| (1,-1,1) | θ=2π/3 | A5 | A4 | A0 | A1 | A3 | A2 | A17 | A16 | A15 | A14 | A8 | A6 | A9 | A7 | A12 | A10 | A13 | A11 | A28 | A26 | A29 | A27 | A20 | A18 | A21 | A19 | A25 | A24 | A23 | A22 | A52 |
| | θ=4π/3 | A2 | A3 | A5 | A4 | A1 | A0 | A11 | A13 | A10 | A12 | A15 | A17 | A14 | A16 | A9 | A8 | A7 | A6 | A23 | A25 | A22 | A24 | A29 | A28 | A27 | A26 | A19 | A21 | A18 | A20 | A41 |
| (1,1,-1) | θ=2π/3 | A5 | A4 | A1 | A0 | A2 | A3 | A15 | A14 | A17 | A16 | A9 | A7 | A8 | A6 | A11 | A13 | A10 | A12 | A29 | A27 | A28 | A26 | A19 | A21 | A18 | A20 | A23 | A22 | A25 | A24 | A49 |
| | θ=4π/3 | A3 | A2 | A4 | A5 | A1 | A0 | A13 | A11 | A12 | A10 | A16 | A14 | A17 | A15 | A7 | A6 | A9 | A8 | A24 | A22 | A25 | A23 | A27 | A26 | A29 | A28 | A21 | A19 | A20 | A18 | A43 |
| (0,(2-φ),1) | θ=2π/3 | A30 | A37 | A51 | A48 | A44 | A39 | A6 | A61 | A54 | A9 | A16 | A59 | A56 | A15 | A12 | A55 | A60 | A11 | A26 | A21 | A18 | A29 | A24 | A27 | A28 | A23 | A20 | A25 | A22 | A19 | A34 |
| | θ=4π/3 | A34 | A33 | A52 | A47 | A40 | A43 | A6 | A57 | A58 | A9 | A60 | A17 | A14 | A55 | A56 | A13 | A10 | A59 | A20 | A29 | A26 | A19 | A28 | A25 | A22 | A27 | A18 | A23 | A24 | A21 | A0 |
| (0,-(2-φ),1) | θ=2π/3 | A32 | A35 | A53 | A46 | A41 | A42 | A56 | A7 | A8 | A59 | A17 | A61 | A54 | A14 | A57 | A12 | A11 | A58 | A28 | A21 | A18 | A27 | A29 | A25 | A22 | A26 | A23 | A19 | A20 | A24 | A48 |
| | θ=4π/3 | A36 | A31 | A50 | A49 | A45 | A38 | A60 | A7 | A8 | A55 | A58 | A16 | A15 | A57 | A13 | A54 | A61 | A10 | A20 | A27 | A28 | A19 | A24 | A26 | A29 | A23 | A25 | A21 | A18 | A22 | A44 |
| ((2-φ),1,0) | θ=2π/3 | A41 | A42 | A35 | A32 | A46 | A53 | A11 | A58 | A57 | A12 | A7 | A59 | A56 | A8 | A14 | A61 | A54 | A17 | A19 | A24 | A23 | A20 | A27 | A21 | A18 | A28 | A22 | A26 | A29 | A25 | A39 |
| | θ=4π/3 | A43 | A40 | A34 | A33 | A47 | A52 | A59 | A10 | A13 | A56 | A58 | A6 | A9 | A57 | A14 | A60 | A55 | A17 | A24 | A18 | A21 | A23 | A26 | A20 | A19 | A29 | A27 | A22 | A25 | A28 | A51 |
| (-(2-φ),1,0) | θ=2π/3 | A45 | A38 | A36 | A31 | A50 | A49 | A13 | A54 | A61 | A10 | A60 | A8 | A7 | A55 | A58 | A15 | A16 | A57 | A25 | A18 | A21 | A22 | A20 | A28 | A27 | A19 | A24 | A26 | A29 | A23 | A3 |
| | θ=4π/3 | A39 | A44 | A37 | A30 | A51 | A48 | A55 | A12 | A11 | A60 | A9 | A61 | A54 | A6 | A59 | A15 | A16 | A56 | A19 | A25 | A22 | A20 | A21 | A29 | A26 | A18 | A27 | A24 | A23 | A28 | A31 |
| (1,0,(2-φ)) | θ=2π/3 | A49 | A50 | A38 | A45 | A36 | A31 | A15 | A58 | A57 | A16 | A10 | A54 | A61 | A13 | A8 | A55 | A60 | A7 | A23 | A26 | A29 | A24 | A18 | A22 | A25 | A21 | A28 | A20 | A19 | A27 | A48 |
| | θ=4π/3 | A47 | A52 | A40 | A43 | A33 | A34 | A55 | A17 | A14 | A60 | A10 | A56 | A59 | A13 | A57 | A6 | A9 | A58 | A22 | A28 | A27 | A25 | A23 | A18 | A21 | A24 | A19 | A29 | A26 | A20 | A39 |
| (1,0,-(2-φ)) | θ=2π/3 | A51 | A48 | A39 | A44 | A37 | A30 | A59 | A15 | A16 | A56 | A55 | A11 | A12 | A60 | A9 | A54 | A61 | A6 | A27 | A23 | A24 | A28 | A19 | A22 | A25 | A20 | A21 | A29 | A26 | A18 | A35 |
| | θ=4π/3 | A53 | A46 | A41 | A42 | A32 | A35 | A17 | A54 | A61 | A14 | A57 | A11 | A12 | A58 | A56 | A7 | A8 | A59 | A29 | A22 | A25 | A26 | A23 | A19 | A20 | A24 | A28 | A18 | A21 | A27 | A5 |
| (0,1,(1-φ)) | θ=2π/5 | A38 | A45 | A31 | A36 | A50 | A49 | A54 | A13 | A10 | A61 | A55 | A7 | A8 | A60 | A16 | A57 | A58 | A15 | A22 | A21 | A18 | A25 | A23 | A19 | A20 | A28 | A26 | A24 | A23 | A29 | A46 |
| | θ=4π/5 | A47 | A52 | A43 | A40 | A34 | A37 | A14 | A60 | A55 | A17 | A59 | A13 | A10 | A56 | A58 | A9 | A6 | A57 | A27 | A25 | A22 | A28 | A24 | A21 | A18 | A23 | A26 | A20 | A19 | A29 | A4 |
| | θ=6π/5 | A51 | A48 | A44 | A39 | A30 | A37 | A16 | A56 | A59 | A15 | A12 | A60 | A55 | A11 | A6 | A61 | A54 | A9 | A24 | A28 | A27 | A23 | A20 | A25 | A22 | A19 | A26 | A18 | A21 | A29 | A50 |
| | θ=8π/5 | A42 | A41 | A32 | A35 | A46 | A53 | A58 | A11 | A12 | A57 | A8 | A56 | A59 | A7 | A54 | A17 | A14 | A61 | A20 | A23 | A24 | A19 | A18 | A28 | A27 | A21 | A26 | A22 | A25 | A29 | A34 |
| (0,1,-(1-φ)) | θ=2π/5 | A40 | A43 | A33 | A34 | A47 | A52 | A10 | A59 | A56 | A13 | A57 | A9 | A6 | A58 | A55 | A17 | A14 | A60 | A23 | A21 | A18 | A24 | A19 | A29 | A26 | A20 | A22 | A27 | A28 | A25 | A2 |
| | θ=4π/5 | A49 | A50 | A45 | A38 | A31 | A36 | A57 | A16 | A15 | A58 | A61 | A13 | A10 | A54 | A7 | A60 | A55 | A8 | A29 | A24 | A23 | A26 | A21 | A25 | A22 | A18 | A19 | A27 | A28 | A20 | A33 |
| | θ=6π/5 | A53 | A46 | A42 | A41 | A35 | A32 | A61 | A14 | A17 | A54 | A12 | A58 | A57 | A11 | A59 | A8 | A7 | A56 | A25 | A26 | A29 | A22 | A24 | A20 | A19 | A23 | A21 | A27 | A28 | A18 | A45 |
| | θ=8π/5 | A44 | A39 | A30 | A37 | A51 | A48 | A12 | A55 | A60 | A11 | A6 | A54 | A61 | A9 | A16 | A56 | A59 | A15 | A20 | A22 | A25 | A19 | A26 | A18 | A21 | A29 | A24 | A27 | A28 | A23 | A42 |
| ((1-φ),0,1) | θ=2π/5 | A32 | A35 | A46 | A49 | A42 | A41 | A8 | A59 | A56 | A7 | A54 | A14 | A17 | A61 | A58 | A11 | A12 | A57 | A18 | A27 | A28 | A21 | A26 | A22 | A25 | A29 | A20 | A24 | A23 | A19 | A0 |
| | θ=4π/5 | A40 | A43 | A34 | A33 | A52 | A47 | A56 | A13 | A10 | A59 | A6 | A58 | A57 | A9 | A60 | A14 | A17 | A55 | A18 | A25 | A23 | A21 | A20 | A26 | A29 | A19 | A28 | A25 | A22 | A27 | A32 |
| | θ=6π/5 | A38 | A45 | A36 | A31 | A49 | A50 | A10 | A61 | A54 | A13 | A8 | A60 | A55 | A7 | A15 | A58 | A57 | A16 | A18 | A25 | A22 | A21 | A28 | A20 | A19 | A27 | A23 | A29 | A26 | A24 | A40 |
| | θ=8π/5 | A30 | A37 | A48 | A51 | A39 | A44 | A54 | A9 | A6 | A61 | A56 | A15 | A16 | A59 | A11 | A60 | A55 | A12 | A18 | A29 | A26 | A21 | A23 | A28 | A27 | A24 | A22 | A19 | A20 | A25 | A38 |
| (-(1-φ),0,1) | θ=2π/5 | A36 | A31 | A49 | A50 | A38 | A45 | A8 | A55 | A60 | A7 | A15 | A57 | A58 | A16 | A10 | A61 | A54 | A13 | A28 | A19 | A20 | A27 | A23 | A29 | A26 | A24 | A18 | A22 | A25 | A21 | A32 |
| | θ=4π/5 | A44 | A39 | A37 | A30 | A48 | A51 | A60 | A11 | A12 | A55 | A61 | A9 | A6 | A54 | A15 | A59 | A56 | A16 | A25 | A19 | A20 | A22 | A29 | A21 | A18 | A26 | A28 | A23 | A24 | A27 | A52 |
| | θ=6π/5 | A42 | A41 | A35 | A32 | A53 | A46 | A12 | A57 | A58 | A11 | A59 | A7 | A8 | A56 | A61 | A14 | A17 | A54 | A24 | A19 | A20 | A23 | A21 | A27 | A28 | A18 | A25 | A29 | A26 | A22 | A3 |
| | θ=8π/5 | A34 | A33 | A47 | A52 | A43 | A40 | A58 | A9 | A6 | A57 | A14 | A55 | A60 | A17 | A59 | A10 | A13 | A56 | A26 | A19 | A20 | A29 | A27 | A22 | A25 | A28 | A24 | A21 | A18 | A23 | A50 |
| ((1-φ),1,0) | θ=2π/5 | A48 | A51 | A39 | A44 | A30 | A37 | A56 | A16 | A15 | A59 | A11 | A55 | A60 | A12 | A54 | A9 | A6 | A61 | A23 | A27 | A28 | A24 | A22 | A19 | A20 | A25 | A18 | A26 | A29 | A21 | A40 |
| | θ=4π/5 | A33 | A34 | A47 | A52 | A40 | A43 | A57 | A6 | A9 | A58 | A55 | A14 | A17 | A60 | A10 | A59 | A56 | A13 | A19 | A26 | A29 | A21 | A22 | A27 | A28 | A25 | A23 | A18 | A21 | A24 | A41 |
| | θ=6π/5 | A35 | A32 | A46 | A53 | A41 | A42 | A7 | A56 | A59 | A8 | A14 | A54 | A61 | A17 | A11 | A58 | A57 | A12 | A27 | A18 | A21 | A28 | A22 | A26 | A29 | A25 | A19 | A23 | A24 | A20 | A31 |
| | θ=8π/5 | A50 | A49 | A38 | A45 | A31 | A36 | A16 | A57 | A58 | A15 | A54 | A10 | A13 | A61 | A55 | A8 | A7 | A60 | A26 | A23 | A24 | A29 | A22 | A18 | A21 | A25 | A27 | A19 | A20 | A28 | A4 |
| (-(1-φ),1,0) | θ=2π/5 | A52 | A47 | A40 | A43 | A34 | A33 | A60 | A14 | A17 | A55 | A56 | A10 | A13 | A59 | A6 | A57 | A58 | A9 | A28 | A22 | A25 | A27 | A18 | A23 | A24 | A21 | A20 | A26 | A29 | A19 | A36 |
| | θ=4π/5 | A37 | A30 | A48 | A51 | A44 | A39 | A61 | A6 | A9 | A54 | A15 | A56 | A59 | A16 | A60 | A11 | A12 | A55 | A29 | A18 | A21 | A26 | A28 | A23 | A24 | A27 | A25 | A20 | A19 | A22 | A53 |
| | θ=6π/5 | A31 | A36 | A49 | A50 | A45 | A38 | A7 | A60 | A55 | A8 | A57 | A15 | A16 | A58 | A61 | A10 | A13 | A54 | A19 | A28 | A27 | A20 | A29 | A23 | A24 | A26 | A21 | A25 | A22 | A18 | A1 |
| | θ=8π/5 | A46 | A53 | A41 | A42 | A35 | A32 | A14 | A61 | A54 | A17 | A11 | A57 | A58 | A12 | A7 | A56 | A59 | A8 | A22 | A29 | A26 | A25 | A19 | A23 | A24 | A20 | A27 | A21 | A18 | A28 | A47 |
| (1,φ,(1-φ)) | θ=π | A46 | A53 | A42 | A41 | A32 | A35 | A54 | A17 | A14 | A61 | A58 | A12 | A11 | A57 | A8 | A59 | A56 | A7 | A26 | A25 | A22 | A29 | A20 | A24 | A23 | A19 | A18 | A28 | A27 | A21 | A30 |
| (1,φ,-(1-φ)) | θ=π | A52 | A47 | A43 | A40 | A33 | A34 | A17 | A55 | A60 | A14 | A13 | A59 | A56 | A10 | A9 | A58 | A57 | A6 | A25 | A27 | A28 | A22 | A21 | A24 | A23 | A18 | A29 | A19 | A20 | A26 | A53 |
| (1,-φ,(1-φ)) | θ=π | A48 | A51 | A44 | A39 | A37 | A30 | A15 | A59 | A56 | A16 | A60 | A12 | A11 | A55 | A61 | A6 | A9 | A54 | A28 | A24 | A23 | A27 | A25 | A20 | A19 | A22 | A29 | A21 | A18 | A26 | A5 |
| (1,-φ,-(1-φ)) | θ=π | A50 | A49 | A45 | A38 | A36 | A31 | A58 | A15 | A16 | A57 | A13 | A61 | A54 | A10 | A60 | A7 | A8 | A55 | A24 | A29 | A26 | A23 | A25 | A21 | A18 | A22 | A20 | A28 | A27 | A19 | A42 |
| (φ,(1-φ),1) | θ=π | A31 | A36 | A50 | A49 | A38 | A45 | A55 | A8 | A7 | A60 | A16 | A58 | A57 | A15 | A54 | A13 | A10 | A61 | A27 | A20 | A19 | A28 | A26 | A24 | A23 | A29 | A22 | A18 | A21 | A25 | A47 |
| (φ,-(1-φ),1) | θ=π | A33 | A34 | A52 | A47 | A43 | A40 | A9 | A58 | A57 | A6 | A17 | A60 | A55 | A14 | A13 | A56 | A59 | A10 | A29 | A20 | A19 | A26 | A25 | A28 | A27 | A22 | A21 | A24 | A23 | A18 | A37 |
| (-φ,(1-φ),1) | θ=π | A35 | A32 | A53 | A46 | A42 | A41 | A59 | A8 | A7 | A56 | A61 | A17 | A14 | A54 | A12 | A57 | A58 | A11 | A21 | A28 | A27 | A18 | A25 | A29 | A26 | A22 | A24 | A20 | A19 | A23 | A43 |
| (-φ,-(1-φ),1) | θ=π | A37 | A30 | A51 | A48 | A39 | A44 | A9 | A54 | A61 | A6 | A59 | A16 | A15 | A56 | A55 | A12 | A11 | A60 | A21 | A26 | A29 | A18 | A27 | A24 | A23 | A28 | A19 | A22 | A25 | A20 | A1 |
| ((1-φ),1,φ) | θ=π | A39 | A44 | A30 | A37 | A48 | A51 | A11 | A60 | A55 | A12 | A54 | A6 | A9 | A61 | A56 | A16 | A15 | A59 | A22 | A20 | A19 | A25 | A18 | A26 | A29 | A21 | A23 | A28 | A27 | A24 | A2 |
| ((1-φ),1,-φ) | θ=π | A45 | A38 | A31 | A36 | A49 | A50 | A61 | A10 | A13 | A54 | A7 | A55 | A60 | A8 | A57 | A16 | A15 | A58 | A21 | A22 | A25 | A18 | A19 | A27 | A28 | A20 | A29 | A23 | A24 | A26 | A37 |
| (-(1-φ),1,φ) | θ=π | A43 | A40 | A33 | A34 | A52 | A47 | A13 | A56 | A59 | A10 | A9 | A57 | A58 | A6 | A17 | A55 | A60 | A14 | A21 | A23 | A24 | A18 | A29 | A19 | A20 | A26 | A25 | A28 | A27 | A22 | A45 |
| (-(1-φ),1,-φ) | θ=π | A41 | A42 | A32 | A35 | A53 | A46 | A57 | A12 | A11 | A58 | A56 | A8 | A7 | A59 | A17 | A54 | A61 | A14 | A23 | A20 | A19 | A24 | A28 | A18 | A21 | A27 | A29 | A25 | A22 | A26 | A49 |

Şekil 5.5 $\mathbb{R}^3_{DH}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

| Dönme Ekseni Doğrultu Vektörleri | | A31 | A32 | A33 | A34 | A35 | A36 | A37 | A38 | A39 | A40 | A41 | A42 | A43 | A44 | A45 | A46 | A47 | A48 | A49 | A50 | A51 | A52 | A53 | A54 | A55 | A56 | A57 | A58 | A59 | A60 | A61 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1,0,0) | θ=π | A32 | A31 | A30 | A37 | A36 | A35 | A34 | A41 | A40 | A39 | A38 | A45 | A44 | A43 | A42 | A49 | A48 | A47 | A46 | A53 | A52 | A51 | A50 | A57 | A56 | A55 | A54 | A61 | A60 | A59 | A58 |
| (0,1,0) | θ=π | A34 | A37 | A36 | A31 | A30 | A33 | A32 | A43 | A42 | A45 | A44 | A39 | A38 | A41 | A40 | A51 | A50 | A53 | A52 | A47 | A46 | A49 | A48 | A59 | A58 | A61 | A60 | A55 | A54 | A57 | A56 |
| (0,0,1) | θ=π | A37 | A34 | A35 | A32 | A33 | A30 | A31 | A44 | A45 | A42 | A43 | A40 | A41 | A38 | A39 | A52 | A53 | A50 | A51 | A48 | A49 | A46 | A47 | A60 | A61 | A58 | A59 | A56 | A57 | A54 | A55 |
| (1,1,1) | θ=2π/3 | A42 | A39 | A43 | A40 | A44 | A41 | A45 | A46 | A50 | A47 | A51 | A48 | A52 | A49 | A53 | A30 | A34 | A31 | A35 | A32 | A36 | A33 | A37 | A54 | A58 | A55 | A59 | A56 | A60 | A57 | A61 |
| | θ=4π/3 | A48 | A50 | A52 | A47 | A49 | A51 | A53 | A30 | A32 | A34 | A36 | A31 | A33 | A35 | A37 | A38 | A40 | A42 | A44 | A39 | A41 | A43 | A45 | A54 | A56 | A58 | A60 | A55 | A57 | A59 | A61 |
| (-1,1,1) | θ=2π/3 | A53 | A47 | A49 | A50 | A52 | A46 | A48 | A35 | A37 | A31 | A33 | A34 | A36 | A30 | A32 | A43 | A45 | A39 | A41 | A42 | A44 | A38 | A40 | A59 | A61 | A55 | A57 | A58 | A60 | A54 | A56 |
| | θ=4π/3 | A40 | A45 | A41 | A42 | A38 | A43 | A39 | A52 | A48 | A53 | A49 | A50 | A46 | A51 | A47 | A36 | A32 | A37 | A33 | A34 | A30 | A35 | A31 | A60 | A56 | A61 | A57 | A58 | A54 | A59 | A55 |
| (1,-1,1) | θ=2π/3 | A50 | A48 | A46 | A53 | A51 | A49 | A47 | A36 | A34 | A32 | A30 | A37 | A35 | A33 | A31 | A44 | A42 | A40 | A38 | A45 | A43 | A41 | A39 | A60 | A58 | A56 | A54 | A61 | A59 | A57 | A55 |
| | θ=4π/3 | A45 | A40 | A44 | A39 | A43 | A38 | A42 | A49 | A53 | A48 | A52 | A47 | A51 | A46 | A50 | A33 | A37 | A32 | A36 | A31 | A35 | A30 | A34 | A57 | A61 | A56 | A60 | A55 | A59 | A54 | A58 |
| (1,1,-1) | θ=2π/3 | A47 | A53 | A51 | A48 | A46 | A52 | A50 | A33 | A31 | A37 | A35 | A32 | A30 | A36 | A34 | A41 | A39 | A45 | A43 | A40 | A38 | A44 | A42 | A57 | A55 | A61 | A59 | A56 | A54 | A60 | A58 |
| | θ=4π/3 | A39 | A42 | A38 | A45 | A41 | A44 | A40 | A51 | A47 | A50 | A46 | A53 | A49 | A52 | A48 | A35 | A31 | A34 | A30 | A37 | A33 | A36 | A32 | A59 | A55 | A58 | A54 | A61 | A57 | A60 | A56 |
| (0,(2-φ),1) | θ=2π/3 | A45 | A46 | A1 | A0 | A53 | A38 | A33 | A50 | A43 | A4 | A35 | A32 | A5 | A40 | A49 | A42 | A3 | A47 | A31 | A36 | A52 | A2 | A41 | A58 | A13 | A14 | A7 | A8 | A17 | A10 | A57 |
| | θ=4π/3 | A49 | A42 | A37 | A30 | A41 | A50 | A1 | A36 | A5 | A44 | A53 | A46 | A39 | A4 | A31 | A32 | A48 | A3 | A45 | A38 | A2 | A51 | A35 | A8 | A15 | A12 | A61 | A54 | A11 | A16 | A7 |
| (0,-(2-φ),1) | θ=2π/3 | A1 | A36 | A43 | A40 | A31 | A0 | A51 | A5 | A37 | A52 | A45 | A38 | A47 | A30 | A4 | A49 | A33 | A44 | A3 | A2 | A39 | A34 | A50 | A15 | A9 | A60 | A13 | A10 | A55 | A60 | A16 |
| | θ=4π/3 | A35 | A0 | A47 | A52 | A1 | A32 | A39 | A42 | A51 | A34 | A4 | A5 | A33 | A48 | A41 | A3 | A43 | A30 | A46 | A53 | A37 | A40 | A2 | A12 | A59 | A6 | A14 | A17 | A9 | A56 | A11 |
| ((2-φ),1,0) | θ=2π/3 | A50 | A33 | A3 | A2 | A34 | A49 | A44 | A31 | A51 | A1 | A43 | A40 | A0 | A48 | A36 | A47 | A4 | A37 | A45 | A38 | A30 | A5 | A52 | A55 | A16 | A9 | A13 | A10 | A6 | A15 | A60 |
| | θ=4π/3 | A38 | A3 | A32 | A35 | A2 | A45 | A48 | A50 | A30 | A42 | A0 | A1 | A41 | A37 | A49 | A4 | A46 | A44 | A36 | A31 | A39 | A53 | A5 | A16 | A54 | A12 | A8 | A7 | A11 | A61 | A15 |
| (-(2-φ),1,0) | θ=2π/3 | A30 | A53 | A40 | A43 | A46 | A37 | A2 | A44 | A0 | A52 | A32 | A35 | A47 | A1 | A39 | A42 | A34 | A5 | A48 | A51 | A4 | A33 | A41 | A12 | A6 | A17 | A56 | A59 | A14 | A9 | A11 |
| | θ=4π/3 | A3 | A41 | A52 | A47 | A42 | A2 | A36 | A1 | A45 | A33 | A53 | A46 | A34 | A38 | A0 | A35 | A43 | A49 | A5 | A4 | A50 | A40 | A32 | A7 | A13 | A57 | A17 | A14 | A58 | A10 | A8 |
| (1,0,(2-φ)) | θ=2π/3 | A34 | A41 | A4 | A5 | A42 | A33 | A51 | A40 | A30 | A2 | A46 | A53 | A3 | A37 | A43 | A32 | A0 | A39 | A47 | A52 | A44 | A1 | A35 | A56 | A6 | A11 | A14 | A17 | A12 | A9 | A59 |
| | θ=4π/3 | A5 | A46 | A36 | A31 | A53 | A4 | A44 | A2 | A48 | A38 | A32 | A35 | A45 | A51 | A3 | A41 | A49 | A30 | A0 | A1 | A37 | A50 | A42 | A11 | A15 | A54 | A8 | A7 | A61 | A16 | A12 |
| (1,0,-(2-φ)) | θ=2π/3 | A49 | A4 | A40 | A43 | A5 | A50 | A32 | A31 | A41 | A47 | A2 | A3 | A52 | A42 | A36 | A1 | A33 | A46 | A38 | A45 | A53 | A34 | A0 | A7 | A57 | A14 | A10 | A13 | A17 | A58 | A8 |
| | θ=4π/3 | A38 | A37 | A47 | A52 | A30 | A45 | A4 | A49 | A2 | A33 | A39 | A44 | A34 | A3 | A50 | A48 | A40 | A1 | A31 | A36 | A0 | A43 | A51 | A15 | A10 | A9 | A55 | A60 | A6 | A13 | A16 |
| (0,1,(1-φ)) | θ=2π/5 | A43 | A2 | A37 | A30 | A3 | A40 | A53 | A47 | A35 | A39 | A1 | A0 | A44 | A32 | A52 | A4 | A51 | A41 | A33 | A34 | A42 | A48 | A5 | A14 | A59 | A11 | A9 | A6 | A12 | A56 | A17 |
| | θ=4π/5 | A44 | A31 | A53 | A46 | A36 | A39 | A5 | A51 | A3 | A35 | A45 | A38 | A32 | A2 | A48 | A50 | A42 | A1 | A37 | A30 | A0 | A41 | A19 | A16 | A12 | A7 | A61 | A54 | A8 | A11 | A15 |
| | θ=6π/5 | A32 | A43 | A5 | A4 | A40 | A35 | A49 | A42 | A36 | A3 | A52 | A47 | A2 | A31 | A41 | A34 | A0 | A45 | A53 | A46 | A38 | A1 | A33 | A58 | A8 | A13 | A17 | A14 | A10 | A7 | A57 |
| | θ=8π/5 | A2 | A44 | A49 | A50 | A39 | A3 | A33 | A0 | A40 | A36 | A48 | A51 | A31 | A43 | A1 | A30 | A38 | A52 | A5 | A4 | A47 | A45 | A37 | A6 | A10 | A60 | A15 | A16 | A55 | A13 | A9 |
| (0,1,-(1-φ)) | θ=2π/5 | A35 | A48 | A45 | A38 | A51 | A32 | A3 | A41 | A1 | A49 | A37 | A30 | A50 | A0 | A42 | A39 | A31 | A5 | A53 | A46 | A4 | A36 | A44 | A11 | A7 | A15 | A61 | A54 | A16 | A8 | A12 |
| | θ=4π/5 | A51 | A5 | A42 | A41 | A4 | A48 | A34 | A37 | A43 | A53 | A3 | A2 | A46 | A40 | A30 | A1 | A35 | A52 | A44 | A39 | A47 | A32 | A0 | A9 | A59 | A17 | A12 | A11 | A14 | A56 | A6 |
| | θ=6π/5 | A4 | A52 | A30 | A37 | A47 | A5 | A38 | A3 | A50 | A44 | A34 | A33 | A39 | A49 | A2 | A43 | A51 | A36 | A0 | A1 | A31 | A48 | A40 | A13 | A16 | A60 | A6 | A9 | A55 | A15 | A10 |
| | θ=8π/5 | A47 | A36 | A2 | A3 | A31 | A52 | A41 | A34 | A46 | A0 | A38 | A45 | A1 | A53 | A33 | A50 | A4 | A32 | A40 | A43 | A35 | A5 | A49 | A58 | A14 | A8 | A10 | A13 | A7 | A17 | A57 |
| ((1-φ),0,1) | θ=2π/5 | A51 | A40 | A31 | A36 | A43 | A48 | A1 | A30 | A40 | A38 | A47 | A52 | A45 | A5 | A37 | A34 | A50 | A2 | A39 | A44 | A3 | A49 | A33 | A6 | A16 | A10 | A55 | A60 | A13 | A15 | A9 |
| | θ=4π/5 | A3 | A38 | A51 | A48 | A45 | A2 | A35 | A0 | A42 | A30 | A50 | A49 | A37 | A41 | A1 | A36 | A44 | A46 | A4 | A5 | A53 | A39 | A31 | A8 | A11 | A54 | A16 | A15 | A61 | A11 | A7 |
| | θ=6π/5 | A53 | A30 | A3 | A2 | A37 | A46 | A43 | A32 | A52 | A0 | A44 | A39 | A1 | A47 | A35 | A48 | A5 | A34 | A42 | A41 | A33 | A4 | A51 | A56 | A17 | A6 | A12 | A11 | A9 | A14 | A59 |
| | θ=8π/5 | A33 | A0 | A53 | A50 | A1 | A34 | A45 | A40 | A49 | A32 | A50 | A4 | A35 | A50 | A43 | A2 | A41 | A36 | A52 | A47 | A31 | A42 | A3 | A10 | A57 | A8 | A17 | A14 | A7 | A58 | A13 |
| (-(1-φ),0,1) | θ=2π/5 | A39 | A53 | A1 | A0 | A47 | A44 | A35 | A48 | A41 | A5 | A33 | A34 | A4 | A42 | A51 | A40 | A2 | A53 | A37 | A30 | A46 | A3 | A43 | A56 | A11 | A17 | A9 | A60 | A14 | A12 | A59 |
| | θ=4π/5 | A41 | A3 | A31 | A36 | A2 | A42 | A47 | A53 | A33 | A45 | A1 | A0 | A38 | A34 | A46 | A5 | A49 | A43 | A35 | A32 | A40 | A50 | A4 | A17 | A57 | A13 | A7 | A8 | A10 | A58 | A14 |
| | θ=6π/5 | A33 | A50 | A39 | A44 | A49 | A34 | A2 | A43 | A1 | A47 | A31 | A36 | A48 | A0 | A40 | A45 | A37 | A4 | A47 | A52 | A5 | A30 | A38 | A13 | A9 | A16 | A55 | A60 | A15 | A60 | A10 |
| | θ=8π/5 | A1 | A30 | A41 | A42 | A37 | A0 | A49 | A4 | A31 | A46 | A39 | A44 | A53 | A36 | A5 | A43 | A35 | A38 | A2 | A3 | A45 | A32 | A48 | A16 | A7 | A54 | A11 | A12 | A61 | A8 | A15 |
| ((1-φ),1,0) | θ=2π/5 | A41 | A49 | A35 | A32 | A50 | A5 | A43 | A2 | A47 | A41 | A31 | A36 | A42 | A52 | A3 | A38 | A46 | A33 | A1 | A0 | A34 | A53 | A45 | A10 | A14 | A57 | A7 | A8 | A58 | A17 | A13 |
| | θ=4π/5 | A30 | A1 | A50 | A49 | A0 | A37 | A42 | A39 | A46 | A31 | A4 | A5 | A36 | A53 | A44 | A2 | A38 | A35 | A51 | A48 | A32 | A45 | A3 | A11 | A54 | A7 | A16 | A15 | A8 | A61 | A12 |
| | θ=6π/5 | A40 | A51 | A0 | A1 | A48 | A43 | A36 | A47 | A38 | A4 | A30 | A37 | A5 | A45 | A53 | A39 | A2 | A50 | A34 | A33 | A49 | A3 | A44 | A55 | A10 | A16 | A6 | A9 | A15 | A13 | A60 |
| | θ=8π/5 | A41 | A34 | A48 | A49 | A33 | A42 | A5 | A46 | A2 | A30 | A40 | A43 | A37 | A3 | A53 | A47 | A39 | A0 | A32 | A35 | A1 | A44 | A53 | A14 | A11 | A6 | A56 | A59 | A9 | A12 | A17 |
| (-(1-φ),1,0) | θ=2π/5 | A46 | A5 | A39 | A44 | A4 | A53 | A31 | A32 | A38 | A48 | A2 | A3 | A51 | A45 | A35 | A0 | A30 | A49 | A41 | A42 | A50 | A37 | A1 | A8 | A54 | A15 | A11 | A12 | A16 | A61 | A7 |
| | θ=4π/5 | A0 | A33 | A38 | A45 | A34 | A1 | A46 | A5 | A32 | A49 | A40 | A43 | A50 | A35 | A45 | A52 | A36 | A41 | A2 | A3 | A42 | A31 | A47 | A17 | A8 | A57 | A10 | A13 | A58 | A7 | A14 |
| | θ=6π/5 | A52 | A39 | A32 | A35 | A44 | A47 | A0 | A33 | A5 | A40 | A48 | A51 | A42 | A4 | A34 | A37 | A53 | A2 | A40 | A43 | A3 | A46 | A30 | A9 | A17 | A11 | A56 | A59 | A12 | A14 | A6 |
| | θ=8π/5 | A37 | A38 | A5 | A4 | A45 | A30 | A52 | A39 | A33 | A2 | A49 | A50 | A3 | A34 | A44 | A31 | A1 | A40 | A48 | A51 | A43 | A0 | A36 | A55 | A9 | A10 | A15 | A16 | A13 | A6 | A60 |
| (1,φ,(1-φ)) | θ=π | A52 | A4 | A45 | A38 | A5 | A47 | A37 | A34 | A44 | A50 | A3 | A2 | A49 | A39 | A33 | A0 | A36 | A51 | A43 | A40 | A48 | A31 | A1 | A6 | A60 | A16 | A13 | A10 | A15 | A55 | A9 |
| (1,φ,-(1-φ)) | θ=π | A31 | A44 | A4 | A5 | A39 | A36 | A46 | A45 | A35 | A3 | A51 | A48 | A2 | A32 | A38 | A37 | A1 | A42 | A50 | A49 | A41 | A0 | A30 | A61 | A7 | A12 | A16 | A15 | A11 | A8 | A54 |
| (1,-φ,(1-φ)) | θ=π | A43 | A32 | A50 | A49 | A35 | A40 | A4 | A52 | A3 | A36 | A42 | A41 | A31 | A2 | A47 | A53 | A45 | A0 | A34 | A33 | A1 | A38 | A46 | A17 | A13 | A8 | A58 | A57 | A7 | A10 | A14 |
| (1,-φ,-(1-φ)) | θ=π | A5 | A51 | A33 | A34 | A48 | A4 | A41 | A3 | A53 | A43 | A37 | A30 | A40 | A46 | A2 | A44 | A52 | A35 | A1 | A0 | A32 | A47 | A39 | A12 | A17 | A59 | A9 | A6 | A56 | A14 | A11 |
| (φ,(1-φ),1) | θ=π | A0 | A35 | A44 | A39 | A32 | A1 | A52 | A4 | A34 | A51 | A42 | A41 | A48 | A33 | A5 | A46 | A30 | A43 | A3 | A2 | A40 | A37 | A53 | A14 | A6 | A59 | A12 | A11 | A56 | A9 | A17 |
| (φ,-(1-φ),1) | θ=π | A42 | A49 | A0 | A1 | A50 | A41 | A30 | A53 | A44 | A5 | A36 | A31 | A4 | A39 | A46 | A45 | A3 | A48 | A32 | A35 | A51 | A2 | A38 | A61 | A12 | A15 | A8 | A7 | A16 | A11 | A54 |
| (-φ,(1-φ),1) | θ=π | A36 | A1 | A48 | A51 | A0 | A31 | A40 | A45 | A52 | A37 | A5 | A4 | A30 | A47 | A38 | A3 | A44 | A33 | A49 | A50 | A34 | A39 | A2 | A13 | A60 | A9 | A15 | A16 | A6 | A55 | A10 |
| (-φ,-(1-φ),1) | θ=π | A46 | A45 | A34 | A33 | A38 | A53 | A0 | A35 | A4 | A43 | A50 | A49 | A40 | A5 | A32 | A31 | A47 | A3 | A42 | A41 | A2 | A52 | A36 | A7 | A14 | A13 | A58 | A57 | A10 | A17 | A8 |
| ((1-φ),1,φ) | θ=π | A36 | A47 | A42 | A41 | A52 | A31 | A3 | A38 | A0 | A46 | A34 | A33 | A53 | A1 | A45 | A40 | A32 | A4 | A50 | A49 | A5 | A35 | A43 | A10 | A8 | A14 | A58 | A57 | A17 | A7 | A13 |
| ((1-φ),1,-φ) | θ=π | A2 | A43 | A46 | A53 | A40 | A3 | A30 | A1 | A39 | A35 | A47 | A52 | A32 | A44 | A0 | A33 | A41 | A51 | A4 | A5 | A48 | A42 | A34 | A9 | A11 | A59 | A14 | A17 | A56 | A12 | A6 |
| (-(1-φ),1,φ) | θ=π | A48 | A35 | A2 | A3 | A32 | A51 | A38 | A37 | A49 | A1 | A41 | A42 | A0 | A50 | A30 | A53 | A5 | A31 | A39 | A44 | A36 | A4 | A46 | A61 | A15 | A7 | A11 | A12 | A8 | A16 | A54 |
| (-(1-φ),1,-φ) | θ=π | A44 | A2 | A34 | A33 | A3 | A39 | A50 | A48 | A36 | A40 | A0 | A1 | A43 | A31 | A51 | A5 | A52 | A38 | A30 | A37 | A45 | A47 | A4 | A15 | A60 | A10 | A6 | A9 | A13 | A55 | A16 |

Şekil 5.6 $\mathbb{R}^3_{DH}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

**Yardımcı Teorem 5.2** *$(x, y, z)$ noktasını $(-x, -y, -z)$ eşleyen dönüşüm olan orijine göre $\sigma_0$ inversiyonu(noktaya göre yansıma) $\mathbb{R}^3_{DH}$ ün bir izometrisidir.*

Şekil5.7 deki tablolarda inversiyon dönüşümü altında birim kürenin köşe noktalarının görüntüleri verilmektedir.

| İnversiyonAltında Nokta Görüntüleri | A0 | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 | A10 | A11 | A12 | A13 | A14 | A15 | A16 | A17 | A18 | A19 | A20 | A21 | A22 | A23 | A24 | A25 | A26 | A27 | A28 | A29 | A30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $O$=(0,0,0) | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A9 | A8 | A7 | A6 | A13 | A12 | A11 | A10 | A17 | A16 | A15 | A14 | A21 | A20 | A19 | A18 | A25 | A24 | A23 | A22 | A29 | A28 | A27 | A26 | A37 |
| İnversiyonAltında Nokta Görüntüleri | A31 | A32 | A33 | A34 | A35 | A36 | A37 | A38 | A39 | A40 | A41 | A42 | A43 | A44 | A45 | A46 | A47 | A48 | A49 | A50 | A51 | A52 | A53 | A54 | A55 | A56 | A57 | A58 | A59 | A60 | A61 |
| $O$=(0,0,0) | A36 | A35 | A34 | A33 | A32 | A31 | A30 | A15 | A14 | A13 | A12 | A11 | A10 | A39 | A38 | A53 | A52 | A51 | A50 | A19 | A18 | A17 | A16 | A51 | A50 | A59 | A58 | A57 | A56 | A55 | A54 |

Şekil 5.7 $\mathbb{R}^3_{DH}$ de $\sigma_O$ İnversiyonu Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

**Önerme 5.6** *$d_{DH}$ uzaklığını invaryant bırakan orijine göre dönme yansımaların hepsi orijine göre inversiyon dönüşümüne eşittir.*

**İspat** *$r_\theta \in R_{DH}$, $\Gamma$, $\Delta$ ve $\Pi$ düzlemine dik olan düzlemler olmak üzere bir dönme yansıma $\rho = \sigma_\Pi \sigma_\Delta \sigma_\Gamma = \sigma_\Pi r_\theta$ bileşkesi olarak yazılabilir. O halde dönme ekseni yansıma düzlemine dik olmak zorundadır. $D_1$ ve $D_3$ de verilen dönme eksenlerinden hiçbiri sonuç 4.4 de verilen yansıma düzlemlerine dik olmadığından dolayı önerme 4.5 den $\Pi$ düzlemi için otuz bir dönme ekseninden on beş durum incelenmelidir. $\Pi$ düzlemi olarak $x = 0$ düzlemini alalım. Bu durumda $r_\theta$ nın birim doğrultu vektörü $(1,0,0)$ olmak üzere*

$$\rho : \sigma_\Pi r_\theta(x,y,z) = (-x, ycos\theta - zsin\theta, ysin\theta + zcos\theta)$$

*olarak tanımlıdır. Buradan $A_0 = (0,0,1)$, $A_{18} = \left(0, \frac{(3\sqrt{5}+1)}{22}, \frac{(5\sqrt{5}+9)}{22}, 0\right)$, $A_6 = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{6}, 0, \frac{\sqrt{5}+1}{6}\right)$ noktaları için,*

$$\begin{aligned}
&\rho(A_0) = (0, -sin\theta, cos\theta)\\
&\rho(A_{18}) = (0, \tfrac{(3\sqrt{5}+1)}{22}cos\theta - \tfrac{5\sqrt{5}+9}{22}sin\theta, \tfrac{(3\sqrt{5}+1)}{22}sin\theta + \tfrac{5\sqrt{5}+9}{22}cos\theta)\\
&\rho(A_6) = (-\tfrac{\sqrt{5}+1}{6}, -\tfrac{\sqrt{5}+3}{6}sin\theta, \tfrac{\sqrt{5}+3}{6}cos\theta)
\end{aligned}$$

*bulunur. $d_{DH}(\rho(A_0), \rho(A_{18}))$=$d_{DH}(A_0, A_{18})$ ve $d_{DH}(\rho(A_0), \rho(A_6))$=$d_{DH}(A_0, A_6)$ olmak zorunda olduğundan,*
$K_1 = 0$, $L_1 = \left|\frac{13-5\sqrt{5}}{22}\sin\theta + \frac{3\sqrt{5}+1}{22}\cos\theta\right|$, $M_1 = \left|\frac{13-5\sqrt{5}}{22}\cos\theta - \frac{3\sqrt{5}+1}{22}\sin\theta\right|$,
$K_2 = \left|\frac{\sqrt{5}+1}{6}\right|$, $L_2 = \left|\frac{3-\sqrt{5}}{6}\sin\theta\right|$ *ve* $M_2 = \left|\frac{3-\sqrt{5}}{6}\cos\theta\right|$ *olmak üzere*

$$\max\left\{\begin{array}{l}
K_1 + (2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{c}(1-\varphi)K_1 + (1+\varphi)M_1, L_1 + M_1,\\ \varphi M_1 + (1+\varphi)L_1 - K_1\end{array}\right\},\\
L_1 + (2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{c}(1-\varphi)L_1 + (1+\varphi)K_1, K_1 + M_1,\\ \varphi K_1 + (1+\varphi)M_1 - L_1\end{array}\right\},\\
M_1 + (2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{c}(1-\varphi)M_1 + (1+\varphi)L_1, K_1 + L_1,\\ \varphi L_1 + (1+\varphi)K_1 - M_1\end{array}\right\}.
\end{array}\right\} = \frac{3\sqrt{5}-5}{3}$$

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_2+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{c}(1-\varphi)K_2+(1+\varphi)M_2, L_2+M_2,\\ \varphi M_2+(1+\varphi)L_2-K_2\end{array}\right\},\\ L_2+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{c}(1-\varphi)L_2+(1+\varphi)K_2, K_2+M_2,\\ \varphi K_2+(1+\varphi)M_2-L_2\end{array}\right\},\\ M_2+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{c}(1-\varphi)M_2+(1+\varphi)L_2, K_2+L_2,\\ \varphi L_2+(1+\varphi)K_2-M_2\end{array}\right\}.\end{array}\right\} = \frac{13\sqrt{5}-25}{11}$$

*denklemleri ortaya çıkar. Bu denklemler çözülürse* $\theta=\{0,\pi\}$ *elde edilir. Buradan açıkça* $\sigma_\Pi r_\pi$ *dönüşümünün* $O$ *orijin etrafında* $\sigma_O$ *inversiyonuna karşılık geldiği görülebilir. Bu durumda yeni bir dönme-yansıma yoktur. Benzer şekilde dönme eksenleri bir yansıma düzlemi normali olan* $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,\pm\varphi,\pm(1-\varphi))$, $(\pm(1-\varphi),1,\pm\varphi)$, $(\pm\varphi,\pm(1-\varphi),1)$ *vektörleri içinde aynı sonuç elde edilir.*

Şekil5.8 deki tablolar birim kürenin köşe noktalarının ilgili dönme-yansıma dönüşümleri altındaki görüntülerini vermektedir.

| Yansıma Düzlemi Normali Olan Dönme Ekseni Doğrultu Vektörleri | Açılar | A0 | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 | A10 | A11 | A12 | A13 | A14 | A15 | A16 | A17 | A18 | A19 | A20 | A21 | A22 | A23 | A24 | A25 | A26 | A27 | A28 | A29 | A30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x=0 | θ=π | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A9 | A8 | A7 | A6 | A13 | A12 | A11 | A10 | A17 | A16 | A15 | A14 | A21 | A20 | A19 | A18 | A25 | A24 | A23 | A22 | A29 | A28 | A27 | A26 | A37 |
| y=0 | θ=π | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A9 | A8 | A7 | A6 | A13 | A12 | A11 | A10 | A17 | A16 | A15 | A14 | A21 | A20 | A19 | A18 | A25 | A24 | A23 | A22 | A29 | A28 | A27 | A26 | A37 |
| z=0 | θ=π | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A9 | A8 | A7 | A6 | A13 | A12 | A11 | A10 | A17 | A16 | A15 | A14 | A21 | A20 | A19 | A18 | A25 | A24 | A23 | A22 | A29 | A28 | A27 | A26 | A37 |
| 1x+φy+(1-φ)z=0 | θ=π | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A9 | A8 | A7 | A6 | A13 | A12 | A11 | A10 | A17 | A16 | A15 | A14 | A21 | A20 | A19 | A18 | A25 | A24 | A23 | A22 | A29 | A28 | A27 | A26 | A37 |
| 1x+φy-(1-φ)z=0 | θ=π | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A9 | A8 | A7 | A6 | A13 | A12 | A11 | A10 | A17 | A16 | A15 | A14 | A21 | A20 | A19 | A18 | A25 | A24 | A23 | A22 | A29 | A28 | A27 | A26 | A37 |
| -1x+φy+(1-φ)z=0 | θ=π | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A9 | A8 | A7 | A6 | A13 | A12 | A11 | A10 | A17 | A16 | A15 | A14 | A21 | A20 | A19 | A18 | A25 | A24 | A23 | A22 | A29 | A28 | A27 | A26 | A37 |
| -1x+φy-(1-φ)z=0 | θ=π | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A9 | A8 | A7 | A6 | A13 | A12 | A11 | A10 | A17 | A16 | A15 | A14 | A21 | A20 | A19 | A18 | A25 | A24 | A23 | A22 | A29 | A28 | A27 | A26 | A37 |
| (1-φ)x+1y+φz=0 | θ=π | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A9 | A8 | A7 | A6 | A13 | A12 | A11 | A10 | A17 | A16 | A15 | A14 | A21 | A20 | A19 | A18 | A25 | A24 | A23 | A22 | A29 | A28 | A27 | A26 | A37 |
| -(1-φ)x+1y+φz=0 | θ=π | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A9 | A8 | A7 | A6 | A13 | A12 | A11 | A10 | A17 | A16 | A15 | A14 | A21 | A20 | A19 | A18 | A25 | A24 | A23 | A22 | A29 | A28 | A27 | A26 | A37 |
| (1-φ)x-1y+φz=0 | θ=π | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A9 | A8 | A7 | A6 | A13 | A12 | A11 | A10 | A17 | A16 | A15 | A14 | A21 | A20 | A19 | A18 | A25 | A24 | A23 | A22 | A29 | A28 | A27 | A26 | A37 |
| -(1-φ)x-1y+φz=0 | θ=π | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A9 | A8 | A7 | A6 | A13 | A12 | A11 | A10 | A17 | A16 | A15 | A14 | A21 | A20 | A19 | A18 | A25 | A24 | A23 | A22 | A29 | A28 | A27 | A26 | A37 |
| φx+(1-φ)y+1z=0 | θ=π | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A9 | A8 | A7 | A6 | A13 | A12 | A11 | A10 | A17 | A16 | A15 | A14 | A21 | A20 | A19 | A18 | A25 | A24 | A23 | A22 | A29 | A28 | A27 | A26 | A37 |
| φx-(1-φ)y+1z=0 | θ=π | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A9 | A8 | A7 | A6 | A13 | A12 | A11 | A10 | A17 | A16 | A15 | A14 | A21 | A20 | A19 | A18 | A25 | A24 | A23 | A22 | A29 | A28 | A27 | A26 | A37 |
| φx+(1-φ)y-1z=0 | θ=π | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A9 | A8 | A7 | A6 | A13 | A12 | A11 | A10 | A17 | A16 | A15 | A14 | A21 | A20 | A19 | A18 | A25 | A24 | A23 | A22 | A29 | A28 | A27 | A26 | A37 |
| φx+(1-φ)y-1z=0 | θ=π | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A9 | A8 | A7 | A6 | A13 | A12 | A11 | A10 | A17 | A16 | A15 | A14 | A21 | A20 | A19 | A18 | A25 | A24 | A23 | A22 | A29 | A28 | A27 | A26 | A37 |

| Yansıma Düzlemi Normali Olan Dönme Ekseni Doğrultu Vektörleri | Açılar | A31 | A32 | A33 | A34 | A35 | A36 | A37 | A38 | A39 | A40 | A41 | A42 | A43 | A44 | A45 | A46 | A47 | A48 | A49 | A50 | A51 | A52 | A53 | A54 | A55 | A56 | A57 | A58 | A59 | A60 | A61 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x=0 | θ=π | A36 | A35 | A34 | A33 | A32 | A31 | A30 | A45 | A44 | A43 | A42 | A41 | A40 | A39 | A38 | A53 | A52 | A51 | A50 | A49 | A48 | A47 | A46 | A61 | A60 | A59 | A58 | A57 | A56 | A55 | A54 |
| y=0 | θ=π | A36 | A35 | A34 | A33 | A32 | A31 | A30 | A45 | A44 | A43 | A42 | A41 | A40 | A39 | A38 | A53 | A52 | A51 | A50 | A49 | A48 | A47 | A46 | A61 | A60 | A59 | A58 | A57 | A56 | A55 | A54 |
| z=0 | θ=π | A36 | A35 | A34 | A33 | A32 | A31 | A30 | A45 | A44 | A43 | A42 | A41 | A40 | A39 | A38 | A53 | A52 | A51 | A50 | A49 | A48 | A47 | A46 | A61 | A60 | A59 | A58 | A57 | A56 | A55 | A54 |
| 1x+φy+(1-φ)z=0 | θ=π | A36 | A35 | A34 | A33 | A32 | A31 | A30 | A45 | A44 | A43 | A42 | A41 | A40 | A39 | A38 | A53 | A52 | A51 | A50 | A49 | A48 | A47 | A46 | A61 | A60 | A59 | A58 | A57 | A56 | A55 | A54 |
| 1x+φy-(1-φ)z=0 | θ=π | A36 | A35 | A34 | A33 | A32 | A31 | A30 | A45 | A44 | A43 | A42 | A41 | A40 | A39 | A38 | A53 | A52 | A51 | A50 | A49 | A48 | A47 | A46 | A61 | A60 | A59 | A58 | A57 | A56 | A55 | A54 |
| -1x+φy+(1-φ)z=0 | θ=π | A36 | A35 | A34 | A33 | A32 | A31 | A30 | A45 | A44 | A43 | A42 | A41 | A40 | A39 | A38 | A53 | A52 | A51 | A50 | A49 | A48 | A47 | A46 | A61 | A60 | A59 | A58 | A57 | A56 | A55 | A54 |
| -1x+φy-(1-φ)z=0 | θ=π | A36 | A35 | A34 | A33 | A32 | A31 | A30 | A45 | A44 | A43 | A42 | A41 | A40 | A39 | A38 | A53 | A52 | A51 | A50 | A49 | A48 | A47 | A46 | A61 | A60 | A59 | A58 | A57 | A56 | A55 | A54 |
| (1-φ)x+1y+φz=0 | θ=π | A36 | A35 | A34 | A33 | A32 | A31 | A30 | A45 | A44 | A43 | A42 | A41 | A40 | A39 | A38 | A53 | A52 | A51 | A50 | A49 | A48 | A47 | A46 | A61 | A60 | A59 | A58 | A57 | A56 | A55 | A54 |
| -(1-φ)x+1y+φz=0 | θ=π | A36 | A35 | A34 | A33 | A32 | A31 | A30 | A45 | A44 | A43 | A42 | A41 | A40 | A39 | A38 | A53 | A52 | A51 | A50 | A49 | A48 | A47 | A46 | A61 | A60 | A59 | A58 | A57 | A56 | A55 | A54 |
| (1-φ)x-1y+φz=0 | θ=π | A36 | A35 | A34 | A33 | A32 | A31 | A30 | A45 | A44 | A43 | A42 | A41 | A40 | A39 | A38 | A53 | A52 | A51 | A50 | A49 | A48 | A47 | A46 | A61 | A60 | A59 | A58 | A57 | A56 | A55 | A54 |
| -(1-φ)x-1y+φz=0 | θ=π | A36 | A35 | A34 | A33 | A32 | A31 | A30 | A45 | A44 | A43 | A42 | A41 | A40 | A39 | A38 | A53 | A52 | A51 | A50 | A49 | A48 | A47 | A46 | A61 | A60 | A59 | A58 | A57 | A56 | A55 | A54 |
| φx+(1-φ)y+1z=0 | θ=π | A36 | A35 | A34 | A33 | A32 | A31 | A30 | A45 | A44 | A43 | A42 | A41 | A40 | A39 | A38 | A53 | A52 | A51 | A50 | A49 | A48 | A47 | A46 | A61 | A60 | A59 | A58 | A57 | A56 | A55 | A54 |
| φx-(1-φ)y+1z=0 | θ=π | A36 | A35 | A34 | A33 | A32 | A31 | A30 | A45 | A44 | A43 | A42 | A41 | A40 | A39 | A38 | A53 | A52 | A51 | A50 | A49 | A48 | A47 | A46 | A61 | A60 | A59 | A58 | A57 | A56 | A55 | A54 |
| φx+(1-φ)y-1z=0 | θ=π | A36 | A35 | A34 | A33 | A32 | A31 | A30 | A45 | A44 | A43 | A42 | A41 | A40 | A39 | A38 | A53 | A52 | A51 | A50 | A49 | A48 | A47 | A46 | A61 | A60 | A59 | A58 | A57 | A56 | A55 | A54 |
| φx+(1-φ)y-1z=0 | θ=π | A36 | A35 | A34 | A33 | A32 | A31 | A30 | A45 | A44 | A43 | A42 | A41 | A40 | A39 | A38 | A53 | A52 | A51 | A50 | A49 | A48 | A47 | A46 | A61 | A60 | A59 | A58 | A57 | A56 | A55 | A54 |

Şekil 5.8 $\mathbb{R}^3_{DH}$ de Dönme Yansıma Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

**Önerme 5.7** $d_{DH}$*- uzaklığını koruyan orijine göre kırk dört dönme inversiyon vardır.*

**İspat** *$r_\theta \in R_{DH}$ olmak üzere, bir dönme inversiyon $\rho = \sigma_O\sigma_\Delta\sigma_\Gamma = \sigma_O r_\theta$ bileşkesi olarak yazılabilir. Böylece önerme 4.5 deki otuz bir dönme ekseni için ispat verilmelidir.*

*$r_\theta$, dönme ekseni $(1,(1-\varphi),0)$ dönme eksenine paralel ise $\left(\frac{1}{\sqrt{2-2\varphi+\varphi^2}}, \frac{1-\varphi}{\sqrt{2-2\varphi+\varphi^2}}, 0\right)$ birim normal yön vektörü olur. Bu durumda*

$$\rho(x,y,z) = \sigma_O r_\theta = \begin{pmatrix} -\cos\theta x + \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\sin\theta y - \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\sin\theta z, \\ -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\sin\theta x - (\cos\theta + \frac{50+10\sqrt{5}}{100}(1-\cos\theta))y - \frac{\sqrt{5}}{5}(1-\cos\theta))z, \\ \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\sin\theta x - \frac{\sqrt{5}}{5}(1-\cos\theta)y - (\cos\theta + \frac{50-10\sqrt{5}}{100}(1-\cos\theta))z \end{pmatrix}$$

*$\rho(A_0), \rho(A_6)$ ve $\rho(A_{18})$ hesaplanıp $d_{DH}(\rho(A_0), \rho(A_{18})) = \frac{3\sqrt{5}-5}{3}$ ve $d_{DH}(\rho(A_0), \rho(A_6)) = \frac{13\sqrt{5}-25}{11}$ ifadelerinde yerine yazılırsa, $K_1 = \left|\frac{\sqrt{5}-1}{6}\sqrt{3}\sin\theta)\right|$, $L_1 = \left|\frac{\cos\theta-1}{3} + \frac{3\sqrt{5}+1}{22}\right|$, $M_1 = \left|-\cos\theta - \frac{(3+\sqrt{5})(1-\cos\theta)}{6} + \frac{5\sqrt{5}+9}{22}\right|$, $K_2 = \left|\left(\frac{1+\sqrt{5}}{36} - \frac{1}{3}\right)(1-\cos\theta) + \frac{6+\sqrt{5}}{36}\sqrt{3}\sin\theta\right|$, $L_2 = \left|\frac{3\sqrt{5}-7}{18}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{9}\sin\theta - \frac{1}{9}\right|$ ve $M_2 = \left|\frac{\sqrt{5}+1}{6}\cos\theta + \frac{4\sqrt{3}-2\sqrt{15}}{18}\sin\theta)\right|$ olmak üzere*

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_1 + (2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{c}(1-\varphi)K_1 + (1+\varphi)M_1, L_1 + M_1, \\ \varphi M_1 + (1+\varphi)L_1 - K_1\end{array}\right\}, \\ L_1 + (2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{c}(1-\varphi)L_1 + (1+\varphi)K_1, K_1 + M_1, \\ \varphi K_1 + (1+\varphi)M_1 - L_1\end{array}\right\}, \\ M_1\,(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{c}(1-\varphi)M_1 + (1+\varphi)L_1, K_1 + L_1, \\ \varphi L_1 + (1+\varphi)K_1 - M_1\end{array}\right\}. \end{array}\right\} = \frac{3\sqrt{5}-5}{3}$$

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_2 + (2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{c}(1-\varphi)K_2 + (1+\varphi)M_2, L_2 + M_2, \\ \varphi M_2 + (1+\varphi)L_2 - K_2\end{array}\right\}, \\ L_2 + (2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{c}(1-\varphi)L_2 + (1+\varphi)K_2, K_2 + M_2, \\ \varphi K_2 + (1+\varphi)M_2 - L_2\end{array}\right\}, \\ M_2\,(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{c}(1-\varphi)M_2 + (1+\varphi)L_2, K_2 + L_2, \\ \varphi L_2 + (1+\varphi)K_2 - M_2\end{array}\right\}. \end{array}\right\} = \frac{13\sqrt{5}-25}{11}$$

*denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülürse $\theta = 2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5$ sonuçları bulunur. Benzer şekilde, eğer $l$ doğrusunun yön vektörü;*

$$(\pm(1-\varphi), 0, 1), (1, \pm(1-\varphi), 0), (0, 1, \pm(1-\varphi))$$

*olarak alınır ise*

$$\theta = 2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5$$

*olur.*

*$r_\theta$, dönme ekseni $(1,1,1)$ dönme eksenine paralel ise $r_\theta$ nın birim normal yön vektörü $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ olur. Bu durumda*

$$\rho(x,y,z)=\sigma_O r_\theta=\begin{pmatrix} -x\left[\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\theta\right]-y\left[\frac{(1-\cos\theta)}{3}-\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right]-z\left[\frac{(1-\cos\theta)}{3}+\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right], \\ -x\left[\frac{(1-\cos\theta)}{3}+\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right]-y\left[\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\theta\right]-z\left[\frac{(1-\cos\theta)}{3}-\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right], \\ -x\left[\frac{(1-\cos\theta)}{3}-\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right]-y\left[\frac{(1-\cos\theta)}{3}+\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right]-z\left[\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\theta\right] \end{pmatrix}$$

*şeklinde tanımlanır. Buradan $\rho(A_0)$, $\rho(A_6)$ ve $\rho(A_{18})$ hesaplanıp $d_{DH}(\rho(A_0),\ \rho(A_{18}))=\frac{3\sqrt{5}-5}{3}$ ve $d_{DH}(\rho(A_0),\ \rho(A_6))=\frac{13\sqrt{5}-25}{11}$ bağıntılarında yerine yazılırsa,*

$$K_1=\left|\left(\tfrac{5\sqrt{5}-13}{22}\right)\left(\tfrac{1+2\cos\theta}{3}\right)+\left(\tfrac{3\sqrt{5}+1}{22}\right)\left(\tfrac{1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)\right|,$$

$$L_1=\left|\left(\tfrac{5\sqrt{5}-13}{22}\right)\left(\tfrac{1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)+\left(\tfrac{3\sqrt{5}+1}{22}\right)\left(\tfrac{1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)\right|,$$

$$M_1=\left|\left(\tfrac{5\sqrt{5}-13}{22}\right)\left(\tfrac{1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)+\left(\tfrac{3\sqrt{5}+1}{22}\right)\tfrac{1+2\cos\theta}{3}\right|,$$

$$K_2=\left(\tfrac{\sqrt{5}-3}{6}\right)\left(\tfrac{1+2\cos\theta}{3}\right)+\left(\tfrac{\sqrt{5}+1}{6}\right)\left(\tfrac{1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right),$$

$$L_2=\left|\left(\tfrac{\sqrt{5}-3}{3}\right)\left(\tfrac{1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)+\left(\tfrac{\sqrt{5}+1}{6}\right)\left(\tfrac{1+2\cos\theta}{3}\right)\right| \text{ ve}$$

$$M_2=\left|\left(\tfrac{\sqrt{5}-3}{6}\right)\left(\tfrac{1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)+\left(\tfrac{\sqrt{5}+1}{6}\right)\left(\tfrac{1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)\right| \text{olmak üzere}$$

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_1+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{c}(1-\varphi)K_1+(1+\varphi)M_1, L_1+M_1,\\ \varphi M_1+(1+\varphi)L_1-K_1\end{array}\right\}, \\ L_1+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{c}(1-\varphi)L_1+(1+\varphi)K_1, K_1+M_1,\\ \varphi K_1+(1+\varphi)M_1-L_1\end{array}\right\}, \\ M_1(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{c}(1-\varphi)M_1+(1+\varphi)L_1, K_1+L_1,\\ \varphi L_1+(1+\varphi)K_1-M_1\end{array}\right\}. \end{array}\right\} = \frac{3\sqrt{5}-5}{3}$$

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_2+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{c}(1-\varphi)K_2+(1+\varphi)M_2, L_2+M_2,\\ \varphi M_2+(1+\varphi)L_2-K_2\end{array}\right\}, \\ L_2+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{c}(1-\varphi)L_2+(1+\varphi)K_2, K_2+M_2,\\ \varphi K_2+(1+\varphi)M_2-L_2\end{array}\right\}, \\ M_2(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{c}(1-\varphi)M_2+(1+\varphi)L_2, K_2+L_2,\\ \varphi L_2+(1+\varphi)K_2-M_2\end{array}\right\}. \end{array}\right\} = \frac{13\sqrt{5}-25}{11}$$

*denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülür ise*

$$\theta=\{\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\}$$

*elde edilir. Benzer şekilde, eğer l nin yön vektörü*

$$(-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1),(\pm(2-\varphi),1,0),(0,\pm(2-\varphi),1),(1,0,\pm(2-\varphi))$$

*ise*

$$\theta=\{\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\}$$

*elde edilir.*

$r_\theta$, *dönme ekseni* $(1,0,0)$ *doğrultulu doğru ise birim normal yön vektörü* $(1,0,0)$ *olur. Bu durumda*

$$\rho(x,y,z)=\sigma_O r_\theta(x,y,z)=(-x,-y\cos\theta+z\sin\theta,-y\sin\theta-z\cos\theta)$$

*şeklinde tanımlanır. Buradan* $\rho(A_0),\rho(A_6)$ *ve* $\rho(A_{18})$ *hesaplanıp* $d_{DH}(\rho(A_0),\ \rho(A_{18}))=\frac{3\sqrt{5}-5}{3}$ *ve* $d_{DH}(\rho(A_0),\ \rho(A_6))=\frac{13\sqrt{5}-25}{11}$ *bağıntılarında yerine yazılırsa,* $K_1=0$, $L_1=\left|\left(\frac{5\sqrt{5}-13}{22}\right)\cos\theta+\left(\frac{3\sqrt{5}+1}{22}\right)\sin\theta\right|$, $M_1=\left|\left(\frac{13-5\sqrt{5}}{22}\right)\sin\theta+\left(\frac{3\sqrt{5}+1}{22}\right)\cos\theta\right|$, $K_2=\left|\left(\frac{\sqrt{5}-3}{6}\right)\cos\theta\right|$, $L_2=\left|\left(\frac{3-\sqrt{5}}{6}\right)\sin\theta\right|$ *ve* $M_2=\left|\frac{\sqrt{5}+1}{6}\right|$ *olmak üzere*

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_1+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{c}(1-\varphi)K_1+(1+\varphi)M_1,L_1+M_1,\\ \varphi M_1+(1+\varphi)L_1-K_1\end{array}\right\},\\ L_1+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{c}(1-\varphi)L_1+(1+\varphi)K_1,K_1+M_1,\\ \varphi K_1+(1+\varphi)M_1-L_1\end{array}\right\},\\ M_1\,(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{c}(1-\varphi)M_1+(1+\varphi)L_1,K_1+L_1,\\ \varphi L_1+(1+\varphi)K_1-M_1\end{array}\right\}.\end{array}\right\}=\frac{3\sqrt{5}-5}{3}$$

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_2+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{c}(1-\varphi)K_2+(1+\varphi)M_2,L_2+M_2,\\ \varphi M_2+(1+\varphi)L_2-K_2\end{array}\right\},\\ L_2+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{c}(1-\varphi)L_2+(1+\varphi)K_2,K_2+M_2,\\ \varphi K_2+(1+\varphi)M_2-L_2\end{array}\right\},\\ M_2\,(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{c}(1-\varphi)M_2+(1+\varphi)L_2,K_2+L_2,\\ \varphi L_2+(1+\varphi)K_2-M_2\end{array}\right\}.\end{array}\right\}=\frac{13\sqrt{5}-25}{11}$$

*denklemlerine ulaşılır. Bu denklemler çözülür ise* $\theta=\{0,\pi\}$ *elde edilir. Fakat* $\theta=\pi$ *için hesaplamalar yapıldığında* $\sigma_o r_\pi$ *dönüşümünün* $x=0$ *düzlemine göre yansıma hareketine karşılık geldiği görülmektedir. Benzer şekilde, eğer l doğrusunun yön vektörü*

$$(0,1,0),(0,0,1),(1,\pm\varphi,\pm(1-\varphi)),(\pm(1-\varphi),1,\pm\varphi),(\pm\varphi,\pm(1-\varphi),1)$$

*ise* $\theta=\{0,\pi\}$ *bulunur. Eğer* $\theta=\pi$ *için dönme ekseni doğrultu vektörü bu vektöre paralel olacak şekilde alınır ve dönme -inversiyon hareketi yapılırsa benzer şekilde önerme 4.4 de tespit edilen bir düzleme göre yansıma hareketleri bulunur. Yani bu durumlarda yeni bir hareket olacak şekilde dönme-inversiyon yoktur.*

Şekil5.9 ve Şekil5.10 daki tablolar birim kürenin köşe noktalarının ilgili dönme-inversiyon dönüşümü altındaki görüntülerini verir.

| Dönme Ekseni Doğrultu Vektörleri | Açılar | A0 | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 | A10 | A11 | A12 | A13 | A14 | A15 | A16 | A17 | A18 | A19 | A20 | A21 | A22 | A23 | A24 | A25 | A26 | A27 | A28 | A29 | A30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1,0,0) | θ=π | A0 | A1 | A3 | A2 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 | A12 | A13 | A10 | A11 | A16 | A17 | A14 | A15 | A20 | A21 | A18 | A19 | A24 | A25 | A22 | A23 | A26 | A27 | A28 | A29 | A34 |
| (0,1,0) | θ=π | A0 | A1 | A2 | A3 | A5 | A4 | A8 | A9 | A6 | A7 | A10 | A11 | A12 | A13 | A15 | A14 | A17 | A16 | A18 | A19 | A20 | A21 | A23 | A22 | A25 | A24 | A28 | A29 | A26 | A27 | A32 |
| (0,0,1) | θ=π | A1 | A0 | A2 | A3 | A4 | A5 | A7 | A6 | A9 | A8 | A11 | A10 | A13 | A12 | A14 | A15 | A16 | A17 | A19 | A18 | A21 | A20 | A22 | A23 | A24 | A25 | A27 | A26 | A29 | A28 | A31 |
| (1,1,1) | θ=2π/3 | A3 | A2 | A5 | A4 | A1 | A0 | A13 | A11 | A12 | A10 | A17 | A15 | A16 | A14 | A9 | A8 | A7 | A6 | A25 | A23 | A24 | A22 | A29 | A28 | A27 | A26 | A21 | A19 | A20 | A18 | A45 |
| | θ=4π/3 | A5 | A4 | A1 | A0 | A3 | A2 | A17 | A16 | A15 | A14 | A9 | A7 | A8 | A6 | A13 | A11 | A12 | A10 | A29 | A27 | A28 | A26 | A21 | A19 | A20 | A18 | A25 | A24 | A23 | A22 | A53 |
| (-1,1,1) | θ=2π/3 | A5 | A4 | A0 | A1 | A2 | A3 | A15 | A14 | A17 | A16 | A8 | A6 | A9 | A7 | A10 | A12 | A11 | A13 | A28 | A26 | A29 | A27 | A18 | A20 | A19 | A21 | A23 | A22 | A25 | A24 | A48 |
| | θ=4π/3 | A2 | A3 | A4 | A5 | A1 | A0 | A11 | A13 | A10 | A12 | A14 | A16 | A15 | A17 | A7 | A6 | A9 | A8 | A22 | A24 | A23 | A25 | A27 | A26 | A29 | A28 | A19 | A21 | A18 | A20 | A39 |
| (1,-1,1) | θ=2π/3 | A4 | A5 | A1 | A0 | A2 | A3 | A14 | A15 | A16 | A17 | A7 | A9 | A6 | A8 | A11 | A13 | A10 | A12 | A27 | A29 | A26 | A28 | A19 | A21 | A18 | A20 | A22 | A23 | A24 | A25 | A47 |
| | θ=4π/3 | A3 | A2 | A4 | A5 | A0 | A1 | A12 | A10 | A13 | A11 | A16 | A14 | A17 | A15 | A6 | A7 | A8 | A9 | A24 | A22 | A25 | A23 | A26 | A27 | A28 | A29 | A20 | A18 | A21 | A19 | A42 |
| (1,1,-1) | θ=2π/3 | A4 | A5 | A0 | A1 | A3 | A2 | A16 | A177 | A14 | A15 | A6 | A8 | A7 | A9 | A12 | A10 | A13 | A11 | A26 | A28 | A27 | A29 | A20 | A18 | A21 | A19 | A24 | A25 | A22 | A23 | A50 |
| | θ=4π/3 | A2 | A3 | A5 | A4 | A0 | A1 | A10 | A12 | A11 | A13 | A15 | A17 | A14 | A16 | A8 | A9 | A6 | A7 | A23 | A25 | A22 | A24 | A28 | A29 | A26 | A27 | A18 | A20 | A19 | A21 | A40 |
| (0,(2-φ),1) | θ=2π/3 | A37 | A30 | A48 | A51 | A39 | A44 | A9 | A54 | A61 | A6 | A15 | A56 | A59 | A16 | A11 | A60 | A55 | A12 | A29 | A18 | A21 | A26 | A23 | A28 | A27 | A24 | A19 | A22 | A25 | A20 | A33 |
| | θ=4π/3 | A33 | A34 | A47 | A52 | A43 | A40 | A9 | A58 | A57 | A6 | A55 | A14 | A17 | A60 | A59 | A10 | A13 | A56 | A19 | A26 | A29 | A20 | A27 | A22 | A25 | A28 | A21 | A24 | A23 | A18 | A1 |
| (0,-(2-φ),1) | θ=2π/3 | A35 | A32 | A46 | A53 | A42 | A41 | A59 | A8 | A7 | A56 | A14 | A54 | A61 | A17 | A58 | A11 | A12 | A57 | A27 | A18 | A21 | A28 | A26 | A22 | A25 | A29 | A24 | A20 | A19 | A23 | A51 |
| | θ=4π/3 | A31 | A36 | A49 | A50 | A38 | A45 | A55 | A8 | A7 | A60 | A57 | A15 | A16 | A58 | A10 | A61 | A54 | A13 | A19 | A28 | A27 | A20 | A23 | A29 | A26 | A24 | A22 | A18 | A21 | A25 | A39 |
| ((2-φ),1,0) | θ=2π/3 | A42 | A41 | A32 | A35 | A53 | A46 | A12 | A57 | A58 | A11 | A8 | A56 | A59 | A7 | A17 | A54 | A61 | A14 | A20 | A23 | A24 | A19 | A28 | A18 | A21 | A27 | A25 | A29 | A26 | A22 | A44 |
| | θ=4π/3 | A40 | A43 | A33 | A34 | A52 | A47 | A56 | A13 | A10 | A59 | A57 | A9 | A6 | A58 | A17 | A55 | A60 | A14 | A23 | A21 | A18 | A24 | A29 | A19 | A20 | A26 | A28 | A25 | A22 | A27 | A48 |
| (-(2-φ),1,0) | θ=2π/3 | A38 | A45 | A31 | A36 | A49 | A50 | A10 | A61 | A54 | A13 | A55 | A7 | A8 | A60 | A57 | A16 | A15 | A58 | A22 | A21 | A18 | A25 | A19 | A27 | A28 | A20 | A23 | A29 | A26 | A24 | A2 |
| | θ=4π/3 | A44 | A39 | A30 | A37 | A48 | A51 | A60 | A11 | A12 | A55 | A6 | A54 | A61 | A9 | A56 | A16 | A15 | A59 | A20 | A22 | A25 | A19 | A18 | A26 | A29 | A21 | A28 | A23 | A24 | A27 | A36 |
| (1,0,(2-φ)) | θ=2π/3 | A50 | A49 | A45 | A38 | A31 | A36 | A16 | A57 | A58 | A15 | A13 | A61 | A54 | A10 | A7 | A60 | A55 | A8 | A24 | A29 | A26 | A23 | A21 | A25 | A22 | A18 | A27 | A19 | A20 | A28 | A51 |
| | θ=4π/3 | A52 | A47 | A43 | A40 | A34 | A33 | A60 | A14 | A17 | A55 | A13 | A59 | A56 | A10 | A58 | A9 | A6 | A57 | A25 | A27 | A28 | A22 | A24 | A21 | A18 | A23 | A20 | A26 | A29 | A19 | A44 |
| (1,0,-(2-φ)) | θ=2π/3 | A48 | A51 | A44 | A39 | A30 | A37 | A56 | A16 | A15 | A59 | A60 | A12 | A11 | A55 | A6 | A61 | A54 | A9 | A28 | A24 | A23 | A27 | A20 | A25 | A22 | A19 | A18 | A26 | A29 | A21 | A32 |
| | θ=4π/3 | A46 | A53 | A42 | A41 | A35 | A32 | A14 | A61 | A54 | A17 | A58 | A12 | A11 | A57 | A59 | A8 | A7 | A56 | A26 | A25 | A22 | A29 | A24 | A20 | A19 | A23 | A27 | A21 | A18 | A28 | A4 |
| (0,1,(1-φ)) | θ=2π/5 | A45 | A38 | A36 | A31 | A49 | A50 | A61 | A10 | A13 | A54 | A60 | A8 | A7 | A55 | A15 | A58 | A57 | A16 | A25 | A18 | A21 | A22 | A28 | A20 | A19 | A27 | A29 | A23 | A24 | A26 | A53 |
| | θ=4π/5 | A52 | A47 | A40 | A43 | A33 | A34 | A17 | A55 | A60 | A14 | A56 | A10 | A13 | A59 | A57 | A6 | A9 | A58 | A28 | A22 | A25 | A27 | A23 | A18 | A21 | A24 | A29 | A19 | A20 | A26 | A5 |
| | θ=6π/5 | A48 | A51 | A39 | A44 | A37 | A30 | A15 | A59 | A56 | A16 | A11 | A55 | A60 | A12 | A9 | A54 | A61 | A6 | A23 | A27 | A28 | A24 | A19 | A22 | A25 | A20 | A29 | A21 | A18 | A26 | A49 |
| | θ=8π/5 | A41 | A42 | A35 | A32 | A53 | A46 | A57 | A12 | A11 | A58 | A7 | A59 | A56 | A8 | A61 | A14 | A17 | A54 | A19 | A24 | A23 | A20 | A21 | A27 | A28 | A18 | A29 | A25 | A22 | A26 | A33 |
| (0,1,-(1-φ)) | θ=2π/5 | A43 | A40 | A34 | A33 | A52 | A47 | A13 | A56 | A59 | A10 | A58 | A6 | A9 | A57 | A60 | A14 | A17 | A55 | A24 | A18 | A21 | A23 | A20 | A26 | A29 | A19 | A25 | A28 | A27 | A22 | A3 |
| | θ=4π/5 | A50 | A49 | A38 | A45 | A36 | A31 | A58 | A15 | A16 | A57 | A54 | A10 | A13 | A61 | A8 | A55 | A60 | A7 | A26 | A23 | A24 | A29 | A18 | A22 | A25 | A21 | A20 | A28 | A27 | A19 | A34 |
| | θ=6π/5 | A46 | A53 | A41 | A42 | A32 | A35 | A54 | A17 | A14 | A61 | A11 | A57 | A58 | A12 | A56 | A7 | A8 | A59 | A22 | A29 | A26 | A25 | A23 | A19 | A20 | A24 | A18 | A28 | A27 | A21 | A38 |
| | θ=8π/5 | A39 | A44 | A37 | A30 | A48 | A51 | A11 | A60 | A55 | A12 | A9 | A61 | A54 | A6 | A15 | A59 | A56 | A16 | A19 | A24 | A22 | A20 | A29 | A21 | A18 | A26 | A23 | A28 | A27 | A24 | A41 |
| ((1-φ),0,1) | θ=2π/5 | A35 | A32 | A53 | A46 | A41 | A42 | A7 | A56 | A59 | A8 | A61 | A17 | A14 | A54 | A57 | A12 | A11 | A58 | A21 | A28 | A27 | A18 | A29 | A25 | A22 | A26 | A19 | A23 | A24 | A20 | A1 |
| | θ=4π/5 | A43 | A40 | A33 | A34 | A47 | A52 | A59 | A10 | A13 | A56 | A9 | A57 | A58 | A6 | A55 | A17 | A14 | A60 | A21 | A23 | A24 | A18 | A19 | A29 | A26 | A20 | A27 | A22 | A25 | A28 | A35 |
| | θ=6π/5 | A45 | A38 | A31 | A36 | A50 | A49 | A13 | A54 | A61 | A10 | A7 | A55 | A60 | A8 | A16 | A57 | A58 | A15 | A21 | A22 | A25 | A18 | A27 | A19 | A20 | A28 | A24 | A26 | A29 | A23 | A43 |
| | θ=8π/5 | A37 | A30 | A51 | A48 | A44 | A39 | A61 | A6 | A9 | A54 | A59 | A16 | A15 | A56 | A12 | A55 | A60 | A11 | A21 | A26 | A29 | A18 | A24 | A27 | A28 | A23 | A25 | A20 | A19 | A22 | A45 |
| (-(1-φ),0,1) | θ=2π/5 | A31 | A36 | A50 | A49 | A45 | A38 | A7 | A60 | A55 | A8 | A16 | A58 | A57 | A15 | A13 | A54 | A61 | A10 | A27 | A20 | A19 | A28 | A24 | A26 | A29 | A23 | A21 | A25 | A22 | A18 | A35 |
| | θ=4π/5 | A39 | A44 | A30 | A37 | A51 | A48 | A55 | A12 | A11 | A60 | A54 | A6 | A9 | A61 | A16 | A56 | A59 | A15 | A22 | A20 | A19 | A25 | A26 | A18 | A21 | A29 | A27 | A24 | A23 | A28 | A47 |
| | θ=6π/5 | A41 | A42 | A32 | A35 | A46 | A53 | A11 | A58 | A57 | A12 | A56 | A8 | A7 | A59 | A54 | A17 | A14 | A61 | A23 | A20 | A19 | A24 | A18 | A28 | A27 | A21 | A22 | A26 | A29 | A25 | A2 |
| | θ=8π/5 | A33 | A34 | A52 | A47 | A40 | A43 | A57 | A6 | A9 | A58 | A17 | A60 | A55 | A14 | A56 | A13 | A10 | A59 | A29 | A20 | A19 | A26 | A28 | A25 | A22 | A27 | A23 | A18 | A21 | A24 | A49 |
| ((1-φ),1,0) | θ=2π/5 | A51 | A48 | A44 | A39 | A37 | A30 | A59 | A15 | A16 | A56 | A12 | A60 | A55 | A11 | A61 | A6 | A9 | A54 | A24 | A28 | A27 | A23 | A25 | A20 | A19 | A22 | A21 | A29 | A26 | A18 | A43 |
| | θ=4π/5 | A34 | A33 | A52 | A47 | A13 | A40 | A58 | A9 | A60 | A57 | A60 | A17 | A14 | A55 | A13 | A56 | A59 | A10 | A20 | A29 | A26 | A19 | A25 | A28 | A27 | A22 | A24 | A21 | A18 | A23 | A42 |
| | θ=6π/5 | A32 | A35 | A53 | A46 | A42 | A41 | A8 | A59 | A56 | A7 | A17 | A61 | A54 | A14 | A12 | A57 | A58 | A11 | A28 | A21 | A18 | A27 | A25 | A29 | A26 | A22 | A20 | A24 | A23 | A19 | A36 |
| | θ=8π/5 | A49 | A50 | A43 | A38 | A36 | A31 | A15 | A58 | A57 | A16 | A61 | A13 | A10 | A54 | A60 | A7 | A8 | A55 | A29 | A24 | A23 | A26 | A25 | A21 | A18 | A22 | A28 | A20 | A19 | A27 | A5 |
| (-(1-φ),1,0) | θ=2π/5 | A46 | A52 | A43 | A40 | A33 | A34 | A55 | A17 | A14 | A60 | A59 | A13 | A10 | A56 | A9 | A58 | A57 | A6 | A27 | A25 | A22 | A28 | A21 | A24 | A23 | A18 | A19 | A29 | A26 | A20 | A31 |
| | θ=4π/5 | A30 | A37 | A51 | A48 | A39 | A44 | A54 | A9 | A60 | A61 | A16 | A59 | A56 | A15 | A55 | A12 | A11 | A60 | A26 | A21 | A18 | A29 | A27 | A24 | A23 | A28 | A22 | A19 | A20 | A25 | A46 |
| | θ=6π/5 | A36 | A31 | A50 | A49 | A38 | A45 | A8 | A55 | A60 | A7 | A58 | A16 | A15 | A57 | A54 | A13 | A10 | A61 | A20 | A27 | A28 | A19 | A26 | A24 | A23 | A29 | A18 | A22 | A25 | A21 | A0 |
| | θ=8π/5 | A53 | A46 | A42 | A41 | A32 | A35 | A17 | A54 | A61 | A14 | A12 | A58 | A57 | A11 | A8 | A59 | A56 | A7 | A25 | A26 | A29 | A22 | A20 | A24 | A23 | A19 | A28 | A18 | A21 | A27 | A52 |
| (1,φ,(1-φ)) | θ=π | A53 | A46 | A41 | A42 | A35 | A32 | A61 | A14 | A17 | A54 | A57 | A11 | A12 | A58 | A7 | A56 | A59 | A8 | A29 | A22 | A25 | A26 | A19 | A23 | A24 | A20 | A21 | A27 | A28 | A18 | A37 |
| (1,φ,-(1-φ)) | θ=π | A47 | A52 | A40 | A43 | A34 | A33 | A14 | A60 | A55 | A17 | A10 | A56 | A59 | A13 | A6 | A57 | A58 | A9 | A22 | A28 | A27 | A25 | A18 | A23 | A24 | A21 | A26 | A20 | A19 | A29 | A46 |
| (1,-φ,(1-φ)) | θ=π | A51 | A48 | A39 | A44 | A30 | A37 | A16 | A56 | A59 | A15 | A55 | A11 | A12 | A60 | A54 | A9 | A6 | A61 | A27 | A23 | A24 | A28 | A22 | A19 | A20 | A25 | A26 | A18 | A21 | A29 | A4 |
| (1,-φ,-(1-φ)) | θ=π | A49 | A50 | A38 | A45 | A31 | A36 | A57 | A16 | A15 | A58 | A10 | A54 | A61 | A13 | A55 | A8 | A7 | A60 | A23 | A26 | A29 | A24 | A22 | A18 | A21 | A25 | A19 | A27 | A28 | A20 | A41 |
| (φ,(1-φ),1) | θ=π | A36 | A31 | A49 | A50 | A45 | A38 | A60 | A7 | A8 | A55 | A15 | A57 | A58 | A16 | A61 | A10 | A13 | A54 | A28 | A19 | A20 | A27 | A29 | A23 | A24 | A26 | A25 | A21 | A18 | A22 | A52 |
| (φ,-(1-φ),1) | θ=π | A34 | A33 | A47 | A52 | A40 | A43 | A6 | A57 | A58 | A9 | A14 | A55 | A60 | A17 | A10 | A59 | A56 | A13 | A26 | A19 | A20 | A29 | A22 | A27 | A28 | A25 | A18 | A23 | A24 | A21 | A30 |
| (-φ,(1-φ),1) | θ=π | A32 | A35 | A46 | A53 | A41 | A42 | A56 | A7 | A8 | A59 | A54 | A14 | A17 | A61 | A11 | A58 | A57 | A12 | A18 | A27 | A28 | A21 | A22 | A26 | A29 | A25 | A23 | A19 | A20 | A24 | A40 |
| (-φ,-(1-φ),1) | θ=π | A30 | A37 | A48 | A51 | A44 | A39 | A6 | A61 | A54 | A9 | A56 | A15 | A16 | A59 | A60 | A11 | A12 | A55 | A18 | A29 | A26 | A21 | A28 | A23 | A24 | A27 | A20 | A25 | A22 | A19 | A0 |
| ((1-φ),1,φ) | θ=π | A44 | A39 | A37 | A30 | A51 | A48 | A12 | A55 | A60 | A11 | A61 | A9 | A6 | A54 | A59 | A15 | A16 | A56 | A25 | A19 | A20 | A22 | A21 | A29 | A26 | A18 | A24 | A27 | A28 | A23 | A3 |
| ((1-φ),1,-φ) | θ=π | A38 | A45 | A36 | A31 | A50 | A49 | A54 | A13 | A10 | A61 | A8 | A60 | A55 | A7 | A58 | A15 | A16 | A57 | A18 | A25 | A22 | A21 | A20 | A28 | A27 | A19 | A26 | A24 | A23 | A29 | A30 |
| (-(1-φ),1,φ) | θ=π | A40 | A43 | A34 | A33 | A47 | A52 | A10 | A59 | A56 | A13 | A6 | A58 | A57 | A9 | A14 | A60 | A55 | A17 | A18 | A24 | A23 | A21 | A26 | A20 | A19 | A19 | A22 | A27 | A28 | A25 | A38 |
| (-(1-φ),1,-φ) | θ=π | A42 | A41 | A35 | A32 | A46 | A53 | A58 | A11 | A12 | A57 | A59 | A7 | A8 | A56 | A14 | A61 | A54 | A17 | A24 | A19 | A20 | A23 | A27 | A21 | A18 | A28 | A26 | A22 | A25 | A29 | A50 |

Şekil 5.9 $\mathbb{R}^3_{DH}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

| Dönme Ekseni Doğrultu Vektörleri | Açılar | A31 | A32 | A33 | A34 | A35 | A36 | A37 | A38 | A39 | A40 | A41 | A42 | A43 | A44 | A45 | A46 | A47 | A48 | A49 | A50 | A51 | A52 | A53 | A54 | A55 | A56 | A57 | A58 | A59 | A60 | A61 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1,0,0) | θ=π | A35 | A36 | A37 | A30 | A31 | A32 | A33 | A42 | A43 | A44 | A45 | A38 | A39 | A40 | A41 | A50 | A51 | A52 | A53 | A46 | A47 | A48 | A49 | A58 | A59 | A60 | A61 | A54 | A55 | A56 | A57 |
| (0,1,0) | θ=π | A33 | A30 | A31 | A36 | A37 | A34 | A35 | A40 | A41 | A38 | A39 | A44 | A45 | A42 | A43 | A48 | A49 | A46 | A47 | A52 | A53 | A50 | A51 | A56 | A57 | A54 | A55 | A60 | A61 | A58 | A59 |
| (0,0,1) | θ=π | A30 | A33 | A32 | A35 | A34 | A37 | A36 | A39 | A38 | A41 | A40 | A43 | A42 | A45 | A44 | A47 | A46 | A49 | A48 | A51 | A50 | A53 | A52 | A55 | A54 | A57 | A56 | A59 | A58 | A61 | A60 |
| (1,1,1) | θ=2π/3 | A41 | A44 | A40 | A43 | A39 | A42 | A38 | A53 | A49 | A52 | A48 | A51 | A47 | A50 | A46 | A37 | A33 | A36 | A32 | A35 | A31 | A34 | A30 | A61 | A57 | A60 | A56 | A59 | A55 | A58 | A54 |
| | θ=4π/3 | A51 | A49 | A47 | A52 | A50 | A48 | A46 | A37 | A35 | A33 | A31 | A36 | A34 | A32 | A30 | A45 | A43 | A41 | A39 | A44 | A42 | A40 | A38 | A61 | A59 | A57 | A55 | A60 | A58 | A56 | A54 |
| (-1,1,1) | θ=2π/3 | A46 | A52 | A50 | A49 | A47 | A53 | A51 | A32 | A30 | A36 | A34 | A33 | A31 | A37 | A35 | A40 | A38 | A44 | A42 | A41 | A39 | A45 | A43 | A56 | A54 | A60 | A58 | A57 | A55 | A61 | A59 |
| | θ=4π/3 | A43 | A38 | A42 | A41 | A45 | A40 | A44 | A47 | A51 | A46 | A50 | A49 | A53 | A48 | A52 | A31 | A35 | A30 | A34 | A33 | A37 | A32 | A36 | A55 | A59 | A54 | A58 | A57 | A61 | A56 | A60 |
| (1,-1,1) | θ=2π/3 | A49 | A51 | A53 | A46 | A48 | A50 | A52 | A31 | A33 | A35 | A37 | A30 | A32 | A34 | A36 | A39 | A41 | A43 | A45 | A35 | A40 | A42 | A44 | A55 | A57 | A59 | A61 | A54 | A56 | A58 | A60 |
| | θ=4π/3 | A38 | A43 | A39 | A44 | A40 | A45 | A41 | A50 | A46 | A51 | A47 | A52 | A48 | A53 | A49 | A34 | A30 | A35 | A31 | A36 | A32 | A37 | A33 | A58 | A54 | A59 | A55 | A60 | A56 | A61 | A57 |
| (1,1,-1) | θ=2π/3 | A52 | A46 | A48 | A51 | A53 | A47 | A49 | A34 | A36 | A30 | A32 | A35 | A37 | A31 | A33 | A42 | A44 | A38 | A40 | A43 | A45 | A39 | A41 | A58 | A60 | A54 | A56 | A59 | A61 | A55 | A57 |
| | θ=4π/3 | A44 | A41 | A45 | A38 | A42 | A39 | A43 | A48 | A52 | A49 | A53 | A46 | A50 | A47 | A51 | A32 | A36 | A33 | A37 | A30 | A34 | A31 | A35 | A56 | A60 | A57 | A61 | A54 | A58 | A55 | A59 |
| (0,(2-φ),1) | θ=2π/3 | A38 | A53 | A0 | A1 | A46 | A45 | A34 | A49 | A40 | A5 | A32 | A35 | A4 | A43 | A50 | A41 | A2 | A52 | A36 | A31 | A47 | A3 | A42 | A57 | A10 | A17 | A8 | A7 | A14 | A13 | A58 |
| | θ=4π/3 | A50 | A41 | A30 | A37 | A42 | A49 | A0 | A31 | A4 | A39 | A46 | A53 | A44 | A5 | A36 | A35 | A51 | A2 | A38 | A45 | A3 | A48 | A32 | A7 | A16 | A11 | A54 | A61 | A12 | A45 | A8 |
| (0,-(2-φ),1) | θ=2π/3 | A0 | A31 | A40 | A43 | A36 | A1 | A48 | A4 | A30 | A47 | A38 | A45 | A52 | A37 | A5 | A50 | A34 | A39 | A2 | A3 | A44 | A33 | A49 | A16 | A6 | A55 | A10 | A13 | A60 | A9 | A15 |
| | θ=4π/3 | A32 | A1 | A52 | A47 | A0 | A35 | A44 | A41 | A48 | A33 | A5 | A4 | A34 | A51 | A42 | A2 | A40 | A37 | A53 | A46 | A30 | A43 | A3 | A11 | A56 | A9 | A17 | A14 | A6 | A59 | A12 |
| ((2-φ),1,0) | θ=2π/3 | A49 | A34 | A2 | A3 | A33 | A50 | A39 | A36 | A48 | A0 | A40 | A43 | A1 | A51 | A31 | A52 | A5 | A30 | A38 | A45 | A37 | A4 | A47 | A60 | A15 | A6 | A10 | A13 | A9 | A16 | A55 |
| | θ=4π/3 | A45 | A2 | A35 | A32 | A3 | A38 | A51 | A49 | A37 | A41 | A1 | A0 | A42 | A30 | A50 | A5 | A53 | A39 | A31 | A36 | A44 | A46 | A4 | A15 | A61 | A11 | A7 | A8 | A12 | A54 | A16 |
| (-(2-φ),1,0) | θ=2π/3 | A37 | A46 | A43 | A40 | A53 | A30 | A3 | A39 | A1 | A47 | A35 | A32 | A52 | A0 | A44 | A41 | A33 | A4 | A51 | A58 | A5 | A34 | A42 | A11 | A9 | A14 | A59 | A56 | A17 | A6 | A12 |
| | θ=4π/3 | A2 | A42 | A47 | A52 | A41 | A3 | A31 | A0 | A38 | A34 | A46 | A53 | A33 | A45 | A1 | A32 | A40 | A50 | A4 | A5 | A49 | A43 | A35 | A8 | A10 | A58 | A14 | A17 | A57 | A13 | A7 |
| (1,0,(2-φ)) | θ=2π/3 | A33 | A42 | A5 | A4 | A41 | A34 | A48 | A43 | A37 | A3 | A53 | A46 | A2 | A30 | A40 | A35 | A1 | A44 | A52 | A47 | A39 | A0 | A32 | A59 | A9 | A12 | A17 | A14 | A11 | A6 | A56 |
| | θ=4π/3 | A4 | A53 | A31 | A36 | A46 | A5 | A39 | A3 | A51 | A45 | A35 | A32 | A38 | A48 | A2 | A42 | A50 | A37 | A1 | A0 | A30 | A49 | A41 | A12 | A16 | A61 | A7 | A8 | A54 | A15 | A11 |
| (1,0,-(2-φ)) | θ=2π/3 | A50 | A5 | A43 | A40 | A4 | A49 | A35 | A36 | A42 | A52 | A3 | A2 | A47 | A41 | A31 | A0 | A34 | A53 | A45 | A38 | A46 | A33 | A1 | A8 | A58 | A17 | A13 | A10 | A14 | A57 | A7 |
| | θ=4π/3 | A45 | A30 | A52 | A47 | A37 | A38 | A5 | A50 | A3 | A34 | A44 | A39 | A33 | A2 | A49 | A51 | A43 | A0 | A36 | A31 | A1 | A40 | A48 | A16 | A13 | A6 | A60 | A55 | A9 | A10 | A15 |
| (0,1,(1-φ)) | θ=2π/5 | A40 | A3 | A30 | A37 | A2 | A43 | A46 | A52 | A32 | A44 | A0 | A1 | A39 | A35 | A47 | A5 | A48 | A42 | A34 | A33 | A41 | A51 | A4 | A17 | A56 | A12 | A6 | A9 | A11 | A59 | A14 |
| | θ=4π/5 | A39 | A36 | A46 | A53 | A31 | A44 | A4 | A48 | A2 | A32 | A38 | A45 | A35 | A3 | A51 | A49 | A41 | A0 | A30 | A37 | A1 | A42 | A50 | A15 | A11 | A8 | A54 | A61 | A7 | A12 | A16 |
| | θ=6π/5 | A35 | A40 | A4 | A5 | A43 | A32 | A50 | A41 | A31 | A2 | A47 | A52 | A3 | A36 | A42 | A33 | A1 | A38 | A46 | A53 | A45 | A0 | A34 | A57 | A7 | A10 | A14 | A16 | A13 | A8 | A58 |
| | θ=8π/5 | A3 | A39 | A50 | A49 | A44 | A2 | A34 | A1 | A43 | A31 | A51 | A48 | A36 | A40 | A0 | A37 | A45 | A47 | A4 | A5 | A52 | A38 | A30 | A9 | A13 | A55 | A16 | A15 | A60 | A10 | A6 |
| (0,1,-(1-φ)) | θ=2π/5 | A32 | A51 | A38 | A45 | A48 | A35 | A2 | A42 | A0 | A50 | A30 | A37 | A49 | A1 | A41 | A44 | A36 | A4 | A46 | A53 | A5 | A31 | A39 | A12 | A8 | A16 | A54 | A61 | A15 | A7 | A11 |
| | θ=4π/5 | A48 | A4 | A41 | A42 | A5 | A51 | A33 | A30 | A40 | A46 | A2 | A3 | A53 | A43 | A37 | A0 | A32 | A47 | A39 | A44 | A52 | A35 | A1 | A6 | A56 | A14 | A11 | A12 | A17 | A59 | A9 |
| | θ=6π/5 | A5 | A47 | A37 | A30 | A52 | A4 | A45 | A2 | A49 | A39 | A33 | A34 | A44 | A50 | A3 | A40 | A48 | A31 | A1 | A0 | A36 | A51 | A43 | A10 | A15 | A55 | A9 | A61 | A60 | A16 | A13 |
| | θ=8π/5 | A52 | A31 | A3 | A2 | A36 | A47 | A42 | A33 | A53 | A1 | A45 | A38 | A0 | A46 | A34 | A49 | A5 | A35 | A43 | A40 | A32 | A42 | A50 | A57 | A17 | A7 | A13 | A10 | A8 | A14 | A58 |
| ((1-φ),0,1) | θ=2π/5 | A48 | A43 | A36 | A31 | A40 | A51 | A0 | A37 | A5 | A45 | A52 | A47 | A38 | A4 | A30 | A33 | A49 | A3 | A44 | A39 | A2 | A50 | A34 | A9 | A15 | A13 | A60 | A55 | A10 | A16 | A6 |
| | θ=4π/5 | A2 | A45 | A48 | A51 | A38 | A3 | A32 | A1 | A41 | A37 | A49 | A50 | A30 | A42 | A0 | A31 | A39 | A53 | A5 | A4 | A46 | A44 | A36 | A7 | A11 | A61 | A15 | A16 | A54 | A12 | A8 |
| | θ=6π/5 | A46 | A37 | A2 | A3 | A30 | A53 | A40 | A35 | A47 | A1 | A39 | A44 | A0 | A52 | A32 | A51 | A4 | A33 | A41 | A42 | A34 | A5 | A48 | A59 | A14 | A9 | A11 | A12 | A6 | A17 | A56 |
| | θ=8π/5 | A34 | A1 | A46 | A53 | A0 | A33 | A38 | A43 | A50 | A35 | A4 | A5 | A32 | A49 | A40 | A3 | A42 | A31 | A47 | A52 | A36 | A41 | A2 | A13 | A58 | A7 | A14 | A17 | A8 | A57 | A10 |
| (-(1-φ),0,1) | θ=2π/5 | A44 | A47 | A0 | A1 | A52 | A39 | A32 | A51 | A42 | A4 | A34 | A33 | A5 | A41 | A48 | A43 | A3 | A46 | A30 | A37 | A53 | A2 | A40 | A59 | A12 | A14 | A6 | A9 | A17 | A11 | A56 |
| | θ=4π/5 | A42 | A2 | A36 | A31 | A3 | A41 | A52 | A46 | A34 | A38 | A0 | A1 | A45 | A33 | A53 | A3 | A50 | A40 | A32 | A35 | A43 | A49 | A5 | A14 | A58 | A10 | A8 | A7 | A13 | A57 | A17 |
| | θ=6π/5 | A34 | A49 | A44 | A39 | A50 | A33 | A3 | A40 | A0 | A48 | A36 | A31 | A51 | A1 | A43 | A38 | A30 | A5 | A52 | A47 | A4 | A37 | A45 | A10 | A6 | A15 | A60 | A55 | A16 | A9 | A13 |
| | θ=8π/5 | A0 | A37 | A42 | A41 | A30 | A1 | A42 | A5 | A36 | A53 | A44 | A39 | A46 | A31 | A4 | A48 | A32 | A45 | A3 | A2 | A38 | A35 | A51 | A15 | A8 | A61 | A12 | A11 | A54 | A7 | A16 |
| ((1-φ),1,0) | θ=2π/5 | A5 | A50 | A32 | A35 | A49 | A4 | A40 | A3 | A52 | A42 | A36 | A31 | A41 | A47 | A2 | A45 | A53 | A34 | A0 | A1 | A33 | A46 | A38 | A13 | A17 | A58 | A8 | A7 | A57 | A14 | A10 |
| | θ=4π/5 | A37 | A0 | A49 | A50 | A1 | A30 | A41 | A44 | A53 | A36 | A5 | A4 | A31 | A46 | A39 | A3 | A45 | A32 | A48 | A51 | A35 | A38 | A2 | A12 | A61 | A8 | A15 | A16 | A7 | A54 | A11 |
| | θ=6π/5 | A43 | A48 | A1 | A0 | A51 | A40 | A31 | A52 | A45 | A50 | A37 | A30 | A4 | A38 | A47 | A44 | A3 | A47 | A33 | A34 | A50 | A2 | A39 | A60 | A13 | A15 | A9 | A6 | A16 | A10 | A55 |
| | θ=8π/5 | A42 | A33 | A51 | A48 | A34 | A41 | A4 | A53 | A3 | A37 | A43 | A40 | A30 | A2 | A46 | A52 | A44 | A1 | A35 | A32 | A0 | A39 | A47 | A17 | A12 | A9 | A59 | A56 | A60 | A11 | A14 |
| (-(1-φ),1,0) | θ=2π/5 | A53 | A4 | A44 | A39 | A5 | A46 | A36 | A35 | A45 | A51 | A3 | A2 | A48 | A38 | A32 | A1 | A37 | A50 | A42 | A41 | A49 | A30 | A0 | A7 | A61 | A16 | A12 | A11 | A15 | A54 | A8 |
| | θ=4π/5 | A1 | A34 | A45 | A38 | A33 | A0 | A53 | A4 | A35 | A50 | A43 | A40 | A49 | A32 | A5 | A47 | A31 | A42 | A3 | A2 | A41 | A36 | A52 | A14 | A7 | A58 | A13 | A10 | A57 | A8 | A17 |
| | θ=6π/5 | A47 | A44 | A35 | A32 | A39 | A52 | A1 | A34 | A4 | A42 | A51 | A48 | A41 | A50 | A33 | A30 | A46 | A3 | A43 | A40 | A2 | A53 | A37 | A6 | A14 | A12 | A59 | A56 | A11 | A17 | A9 |
| | θ=8π/5 | A30 | A45 | A4 | A5 | A38 | A37 | A47 | A44 | A34 | A3 | A50 | A49 | A2 | A33 | A39 | A36 | A0 | A43 | A51 | A48 | A40 | A1 | A31 | A60 | A61 | A13 | A16 | A15 | A10 | A9 | A55 |
| (1,φ,(1-φ)) | θ=π | A47 | A5 | A38 | A45 | A4 | A52 | A30 | A33 | A39 | A49 | A2 | A3 | A50 | A44 | A34 | A1 | A31 | A48 | A40 | A43 | A51 | A36 | A0 | A9 | A55 | A15 | A10 | A13 | A16 | A60 | A6 |
| (1,φ,-(1-φ)) | θ=π | A36 | A39 | A5 | A4 | A44 | A31 | A53 | A38 | A32 | A2 | A48 | A51 | A3 | A35 | A45 | A30 | A0 | A41 | A49 | A50 | A42 | A1 | A37 | A54 | A8 | A11 | A15 | A16 | A12 | A7 | A61 |
| (1,-φ,(1-φ)) | θ=π | A40 | A35 | A49 | A50 | A32 | A43 | A5 | A47 | A2 | A31 | A41 | A42 | A36 | A3 | A56 | A46 | A38 | A1 | A33 | A34 | A0 | A45 | A53 | A14 | A10 | A7 | A57 | A58 | A8 | A13 | A17 |
| (1,-φ,-(1-φ)) | θ=π | A4 | A48 | A34 | A33 | A51 | A5 | A42 | A2 | A46 | A40 | A30 | A37 | A43 | A53 | A3 | A39 | A47 | A32 | A0 | A1 | A35 | A52 | A44 | A11 | A14 | A56 | A6 | A9 | A59 | A17 | A12 |
| (φ,(1-φ),1) | θ=π | A1 | A32 | A39 | A44 | A35 | A0 | A47 | A5 | A33 | A48 | A41 | A42 | A51 | A34 | A4 | A53 | A37 | A40 | A2 | A3 | A43 | A30 | A46 | A17 | A9 | A56 | A11 | A12 | A59 | A6 | A14 |
| (φ,-(1-φ),1) | θ=π | A41 | A50 | A1 | A0 | A49 | A42 | A37 | A46 | A39 | A4 | A31 | A36 | A5 | A44 | A53 | A38 | A2 | A51 | A35 | A32 | A48 | A3 | A45 | A54 | A11 | A16 | A7 | A8 | A15 | A12 | A61 |
| (-φ,(1-φ),1) | θ=π | A31 | A0 | A51 | A48 | A1 | A36 | A43 | A38 | A47 | A30 | A4 | A5 | A37 | A52 | A45 | A2 | A39 | A34 | A50 | A49 | A33 | A44 | A3 | A10 | A55 | A6 | A16 | A15 | A9 | A60 | A13 |
| (-φ,-(1-φ),1) | θ=π | A53 | A38 | A33 | A34 | A45 | A46 | A1 | A32 | A5 | A40 | A49 | A50 | A43 | A4 | A35 | A36 | A52 | A2 | A41 | A42 | A3 | A47 | A31 | A8 | A17 | A10 | A57 | A58 | A13 | A14 | A7 |
| ((1-φ),1,φ) | θ=π | A31 | A52 | A41 | A42 | A47 | A36 | A2 | A45 | A1 | A53 | A33 | A34 | A46 | A0 | A38 | A43 | A35 | A5 | A49 | A50 | A4 | A32 | A40 | A13 | A7 | A17 | A57 | A58 | A14 | A8 | A10 |
| ((1-φ),1,-φ) | θ=π | A3 | A40 | A53 | A46 | A43 | A2 | A37 | A0 | A44 | A32 | A52 | A47 | A35 | A39 | A1 | A34 | A42 | A48 | A5 | A4 | A51 | A41 | A33 | A6 | A12 | A56 | A17 | A14 | A59 | A11 | A9 |
| (-(1-φ),1,φ) | θ=π | A51 | A32 | A3 | A2 | A35 | A48 | A45 | A30 | A50 | A0 | A42 | A41 | A1 | A49 | A37 | A46 | A4 | A36 | A44 | A39 | A31 | A5 | A53 | A54 | A16 | A8 | A12 | A11 | A7 | A15 | A61 |
| (-(1-φ),1,-φ) | θ=π | A39 | A3 | A33 | A34 | A2 | A44 | A49 | A51 | A31 | A43 | A1 | A0 | A40 | A36 | A48 | A4 | A47 | A45 | A37 | A30 | A38 | A52 | A5 | A16 | A55 | A13 | A9 | A6 | A10 | A60 | A15 |

Şekil 5.10 $\mathbb{R}^3_{DH}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

Buraya kadar olan kısımda Öklidyen 3-uzayın izometrilerinden hangilerinin $d_{DH}$ metriğini koruduğu bulunmuştur. Daha açıkça Öklidyen 3-uzayın izometrilerinden 15 yansıma, 60 dönme, 44 dönme-inversiyon ve bir inversiyonun $d_{DH}$ metriğini koruduğu gösterilmiştir. Bu tespit edilen elemanlar deltoidal hexacontahedronun Öklidyen simetri grubu olan $I_h$ (Icosahedral grup) elemanlarıdır. Bu gruba deltoidal hexacontahedron grup denilsin ve $G(DH)$ ile gösterilsin. Açıkça $G(DH)$, $I_h$ grubuna izomorftur. Bundan sonraki

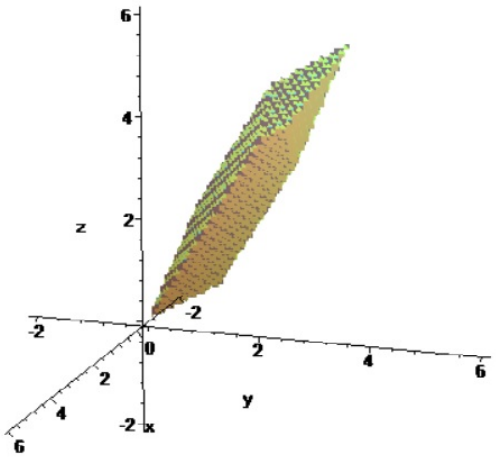
kısımda bu dönüşümlerden başka $d_{DH}$ metriğini koruyan izometrinin olmadığı gösterilecektir. Yani $\mathbb{R}^3_{DH}$ nin tüm izometrilerinin $T(3).G(DH)$ olduğu gösterilecektir.

**Tanım 5.2** *$A = (a_1, a_2, a_3)$ ve $B = (b_1, b_2, b_3)$ $\mathbb{R}^3_{DH}$ uzayında iki farklı nokta olsun. Bu taktirde*

$$\{X \mid d_{DH}(A, X) + d_{DH}(B, X) = d_{DH}(A, B)\}$$

*kümesine $A$, $B$ noktalarının minimum uzaklık kümesi denir ve $[AB]$ ile gösterilir.*

Genel olarak, $[AB]$ kümesi $AB$ köşegenli bir sekiz yüzlü oluşturur. Şekil5.11 da $A = (0, 0, 0)$ ve $B = (\frac{13\sqrt{5}-25}{44}, \frac{\sqrt{5}+6}{6}, \frac{73\sqrt{5}+61}{132})$ olmak üzere minimum uzaklık kümesi $x - \frac{\sqrt{5}+1}{2}y + \frac{\sqrt{5}-1}{2}z = 0$, $x + \frac{\sqrt{5}-3}{2}y + \frac{\sqrt{5}-1}{2}z = 0$, $x + \frac{\sqrt{5}+1}{2}y - \frac{\sqrt{5}-1}{2}z = 0$, $x - \frac{\sqrt{5}-3}{2}y - \frac{\sqrt{5}-1}{2}z = 0$ ve bu düzlemlere paralel olup $B$ noktasından geçen düzlemlerin sınırladığı bölgedir.




Şekil 5.11 $\mathbb{R}^3_{DH}$ da Minimum Uzaklık Kümesi

**Önerme 5.8** *$\phi : \mathbb{R}^3_{DH} \to \mathbb{R}^3_{DH}$ bir izometri ve $[AB]$ paralelyüz olsun. O halde*

$$\phi([AB]) = [\phi(A)\phi(B)]$$

*olur.*

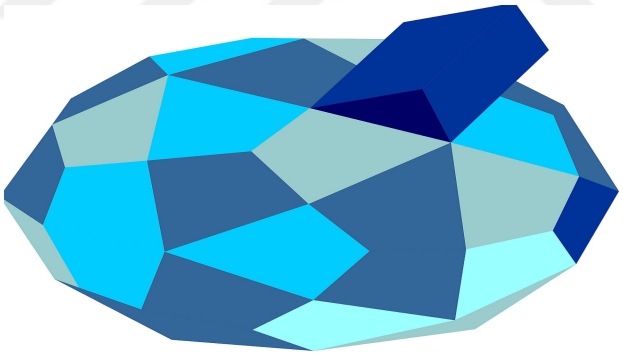
**İspat** *$Y \in \phi([AB])$ olsun.*

$$\begin{aligned} Y \in \phi([AB]) &\iff \exists X \in [AB] \ni Y = \phi(X) \\ &\iff d_{DH}(A,X) + d_{DH}(B,X) = d_{DH}(A,B) \\ &\iff d_{DH}(\phi(A),\phi(X)) + d_{DH}(\phi(B),\phi(X)) = d_{DH}(\phi(A),\phi(B)) \\ &\Leftrightarrow \quad Y = \phi(X) \in [\phi(A)\phi(B)]\,. \end{aligned}$$

**Sonuç 5.6** *$\phi : \mathbb{R}^3_{DH} \to \mathbb{R}^3_{DH}$ bir izometri ve $[AB]$ paralelyüz olsun. Bu durumda $\phi$, $[AB]$ nin köşelerini köşelere dönüştürür ve kenar uzunluklarını korur.*

**Önerme 5.9** *$f : \mathbb{R}^3_{DH} \to \mathbb{R}^3_{DH}$ dönüşümü $f(O) = O$ olacak şekilde bir izometri olsun. Bu taktirde $f \in G(D)$ olur.*

**İspat** *$O = (0,0,0)$ ve $D = (\frac{13\sqrt{5}-25}{44}, \frac{\sqrt{5}+6}{6}, \frac{73\sqrt{5}+61}{132})$ olmak üzere $[OD]$ paralelyüzünü gözönüne alalım. Bu paralelyüzün köşe noktalarından üçü $A_6 = (0, \frac{3\sqrt{5}+1}{22}, \frac{5\sqrt{5}+9}{22})$, $A_{26} = (0, \frac{\sqrt{5}+3}{6}, \frac{\sqrt{5}+1}{6})$, $A_{30} = (\frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{4})$ olup bu noktalar aynı zamanda merkezil birim deltoidal hexacontahedron birim küresinin köşe noktalarıdır. Dahası bu üç nokta deltoidal hexacontahedronun her biri aynı deltoidal olan bir yüzünün köşe noktalarıdır.*



Şekil 5.12 $\mathbb{R}^3_{DH}$ de Birim Küre Ve Minimum Uzaklık Kümesi

*$f$ izometrisi $[OD]$ paralelyüzününün köşe noktalarını köşe noktalara dönüştürüp, kenar uzaklıklarını korduğundan ve $f(O) = O$ olduğundan dolayı $A_6$, $A_{26}$ ve $A_{30}$ noktalarını deltoidal hexacontahedronun yine bir yüzünün köşe noktalarına dönüştürür. Ayrıca bu dönüştürme işlemi gerçekleşirken kenar uzunlukları korunacağından dolayı $i \in \{6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,54,55,56,57,58,59,60,61\}$ olmak üzere $f(A_6) = A_i$ ve de $j \in \{18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,\}$, $k \in \{0,1,2,3,4,5,30,31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,48,49,50,$*

$51, 52, 53\}$ *ve* $A_jA_k$ *deltoidal hexacontahedronun bir kenarı olmak üzere* $f(A_{26}) = A_j$ , $f(A_{30}) = A_k$ *olur.Açıkça ifade edilirse* $f$ *izometrisi, deltoidal hexacontahedron bir yüzünün köşe noktalarını yine bir yüzünün köşe noktalarına dönüştürür. O halde deltoidal hexacontahedron 60 yüze sahip olduğundan bir yüzün dönüşebileceği 60 yüz ihtimali vardır. Ayrıca kenar uzunlukları korunmak zorunda olduğundan* $A_6$*,* $A_{26}$ *ve* $A_{30}$ *noktaları için iki farklı ihtimal vardır. Bu taktirde deltoidal hexacontahedron her bir yüzü için 2 ihtimal olduğundan dolayı bu noktaların dönüşebileceği 120 ihtimal vardır. Bu ihtimaller ise aşağıda tek tek sıralanmış ve her bir dönüşümün önceden tespit edilen hareketlerden hangisine karşılık geldiği ifade edilmiştir.*

*1.* $f(A_6) = A_6$ *ise* $f(A_{26}) = A_{26}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{34}$ *ise* $\Delta : x = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

*2.* $f(A_6) = A_8$ *ise* $f(A_{26}) = A_{28}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{32}$ *ise* $\Delta : y = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

*3.* $f(A_6) = A_7$ *ise* $f(A_{26}) = A_{27}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{31}$ *ise* $\Delta : z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

*4.* $f(A_6) = A_{61}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{21}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{37}$ *ise* $\Delta : x + \varphi y + (1 - \varphi)z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

*5.* $f(A_6) = A_{14}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{26}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{46}$ *ise* $\Delta : -x + \varphi y + (1 - \varphi)z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

*6.* $f(A_6) = A_{16}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{26}$ *ve* $f(A_{30}) = A_4$ *ise* $\Delta : -x + \varphi y + (1 - \varphi)z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

*7.* $f(A_6) = A_{57}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{19}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{41}$ *ise* $\Delta : -x + \varphi y - (1 - \varphi)z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

*8.* $f(A_6) = A_{60}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{25}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{52}$ *ise* $\Delta : (1 - \varphi)x + y + \varphi z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

*9.* $f(A_6) = A_6$ *ise* $f(A_{26}) = A_{18}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{30}$ *ise* $\Delta : -(1 - \varphi)x + y + \varphi z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

*10.* $f(A_6) = A_{56}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{23}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{40}$ *ise* $\Delta : (1 - \varphi)x - y + \varphi z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

*11.* $f(A_6) = A_6$ *ise* $f(A_{26}) = A_{20}$ *ve* $f(A_{30}) = A_0$ *ise* $\Delta : -(1-\varphi)x - y + \varphi z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

*12.* $f(A_6) = A_{12}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{24}$ *ve* $f(A_{30}) = A_3$ *ise* $\Delta : \varphi x + (1-\varphi)y + z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

*13.* $f(A_6) = A_{54}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{26}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{30}$ *ise* $\Delta : \varphi x - (1-\varphi)y + z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

*14.* $f(A_6) = A_{10}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{22}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{38}$ *ise* $\Delta : \varphi x + (1-\varphi)y - z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

*15.* $f(A_6) = A_{58}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{26}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{50}$ *ise* $\Delta : \varphi x - (1-\varphi)y - z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

*16.* $f(A_6) = A_9$ *ise* $f(A_{26}) = A_{29}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{33}$ *ise dönme ekseni* $(1,0,0)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*17.* $f(A_6) = A_7$ *ise* $f(A_{26}) = A_{27}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{35}$ *ise dönme ekseni* $(0,1,0)$ *olmak üzere* $f_\pi$ *dönmedir.*

*18.* $f(A_6) = A_8$ *ise* $f(A_{26}) = A_{28}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{36}$ *ise dönme ekseni* $(0,0,1)$ *olmak üzere* $f_\pi$ *dönmedir.*

*19.* $f(A_6) = A_{10}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{18}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{38}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*20.* $f(A_6) = A_{14}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{22}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{46}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*21.* $f(A_6) = A_{16}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{24}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{51}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*22.* $f(A_6) = A_{12}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{20}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{44}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$*olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*23.* $f(A_6) = A_{17}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{25}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{52}$ *ise dönme eksen* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*24.* $f(A_6) = A_{11}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{19}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{41}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*25.* $f(A_6) = A_{15}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{23}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{49}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*26.* $f(A_6) = A_{13}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{21}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{43}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*27.* $f(A_6) = A_6$ *ise* $f(A_{26}) = A_{20}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{34}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*28.* $f(A_6) = A_6$ *ise* $f(A_{26}) = A_{18}$ *ve* $f(A_{30}) = A_0$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*29.* $f(A_6) = A_{56}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{23}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{48}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*30.* $f(A_6) = A_{60}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{25}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{44}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*31.* $f(A_6) = A_{11}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{22}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{39}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*32.* $f(A_6) = A_{59}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{27}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{51}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*33.* $f(A_6) = A_{13}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{24}$ *ve* $f(A_{30}) = A_3$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*34.* $f(A_6) = A_{55}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{27}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{31}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*35.* $f(A_6) = A_{15}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{28}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{48}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*36.* $f(A_6) = A_{55}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{19}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{39}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*37.* $f(A_6) = A_{59}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{21}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{35}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{\sqrt{5}+-1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*38.* $f(A_6) = A_{17}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{28}$ *ve* $f(A_{30}) = A_5$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*39.* $f(A_6) = A_{54}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{26}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{46}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*40.* $f(A_6) = A_{14}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{26}$ *ve* $f(A_{30}) = A_4$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*41.* $f(A_6) = A_{16}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{26}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{50}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*42.* $f(A_6) = A_{58}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{26}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{34}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*43.* $f(A_6) = A_{10}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{22}$ *ve* $f(A_{30}) = A_2$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*44.* $f(A_6) = A_{57}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{19}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{33}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*45.* $f(A_6) = A_{61}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{21}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{45}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*46.* $f(A_6) = A_{12}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{24}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{42}$ *ise dönme ekseni*$(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*47.* $f(A_6) = A_8$ *ise* $f(A_{26}) = A_{20}$ *ve* $f(A_{30}) = A_0$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*48.* $f(A_6) = A_{56}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{28}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{32}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*49.* $f(A_6) = A_{10}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{23}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{40}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*50.* $f(A_6) = A_{54}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{22}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{38}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*51.* $f(A_6) = A_8$ *ise* $f(A_{26}) = A_{18}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{32}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*52.* $f(A_6) = A_{60}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{28}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{52}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\Pi}{5}}$ *dönmedir.*

*53.* $f(A_6) = A_{12}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{25}$ *ve* $f(A_{30}) = A_3$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*54.* $f(A_6) = A_{58}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{24}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{50}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*55.* $f(A_6) = A_{56}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{18}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{40}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*56.* $f(A_6) = A_{57}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{23}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{41}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*57.* $f(A_6) = A_7$ *ise* $f(A_{26}) = A_{19}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{31}$ *ise dönme ekseni*$(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*58.* $f(A_6) = A_{16}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{27}$ *ve* $f(A_{30}) = A_4$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*59.* $f(A_6) = A_{60}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{20}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{36}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*60.* $f(A_6) = A_{61}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{25}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{53}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*61.* $f(A_6) = A_7$ *ise* $f(A_{26}) = A_{21}$ *ve* $f(A_{30}) = A_1$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*62..*$f(A_0) = A_{14}$ *ise* $f(A_8) = A_{27}$ *ve* $f(A_{12}) = A_{47}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*63.* $f(A_6) = A_{54}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{18}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{30}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*64.* $f(A_6) = A_{17}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{29}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{53}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}+1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*65.* $f(A_6) = A_{15}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{29}$ *ve* $f(A_{30}) = A_5$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*66.* $f(A_6) = A_{58}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{20}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{42}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}+1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*67.* $f(A_6) = A_{55}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{22}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{47}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*68.* $f(A_6) = A_9$ *ise* $f(A_{26}) = A_{21}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{37}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*69.* $f(A_6) = A_{59}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{24}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{43}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*70.* $f(A_6) = A_9$ *ise* $f(A_{26}) = A_{19}$ *ve* $f(A_{30}) = A_1$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*71.* $f(A_6) = A_{11}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{23}$ *ve* $f(A_{30}) = A_2$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{1}{2})$*olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*72.* $f(A_6) = A_{61}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{29}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{37}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4}, -\frac{1}{2})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*73.* $f(A_6) = A_{13}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{25}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{45}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{1}{2})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*74.* $f(A_6) = A_{57}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{29}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{49}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4}, -\frac{1}{2})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*75.* $f(A_6) = A_{13}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{21}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{45}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*76.* $f(A_6) = A_{17}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{25}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{53}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*77.* $f(A_6) = A_{15}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{23}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{48}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*78.* $f(A_6) = A_{11}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{19}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{39}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*79.* $f(A_6) = A_{14}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{22}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{47}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*80.* $f(A_6) = A_{12}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{20}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{42}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*81.* $f(A_6) = A_{16}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{24}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{50}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*82.* $f(A_6) = A_{10}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{18}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{40}$ *ise dönme ekseni*$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*83.* $f(A_6) = A_9$ *ise* $f(A_{26}) = A_{19}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{33}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*84.* $f(A_6) = A_9$ *ise* $f(A_{26}) = A_{21}$ *ve* $f(A_{30}) = A_1$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*85.* $f(A_6) = A_{59}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{24}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{51}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*86.* $f(A_6) = A_{55}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{22}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{39}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*87.* $f(A_6) = A_{12}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{25}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{44}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*88.* $f(A_6) = A_{56}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{28}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{48}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*89.* $f(A_6) = A_{10}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{23}$ *ve* $f(A_{30}) = A_2$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*90.* $f(A_6) = A_{60}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{28}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{36}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*91.* $f(A_6) = A_{16}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{27}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{51}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*92.* $f(A_6) = A_{60}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{20}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{44}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*93.* $f(A_6) = A_{56}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{18}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{32}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*94.* $f(A_6) = A_{14}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{27}$ *ve* $f(A_{30}) = A_4$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*95.* $f(A_6) = A_{61}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{29}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{53}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$*e olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*96.* $f(A_6) = A_{17}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{29}$ *ve* $f(A_{30}) = A_5$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*97.* $f(A_6) = A_{15}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{29}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{49}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*98.* $f(A_6) = A_{57}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{29}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{33}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmk üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*99.* $f(A_6) = A_{13}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{25}$ *ve* $f(A_{30}) = A_3$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*100.* $f(A_6) = A_{58}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{20}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{34}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*101.* $f(A_6) = A_{54}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{18}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{38}$ *ise dönme ekseni*$(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*102.* $f(A_6) = A_{11}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{23}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{41}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*103.* $f(A_6) = A_7$ *ise* $f(A_{26}) = A_{19}$ *ve* $f(A_{30}) = A_1$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*104.* $f(A_6) = A_{59}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{27}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{35}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*105.* $f(A_6) = A_{13}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{24}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{43}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*106.* $f(A_6) = A_{61}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{25}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{45}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*107.* $f(A_6) = A_7$ *ise* $f(A_{26}) = A_{21}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{35}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*108.* $f(A_6) = A_{55}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{27}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{47}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*109.* $f(A_6) = A_{11}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{22}$ *ve* $f(A_{30}) = A_2$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*110.* $f(A_6) = A_{57}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{23}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{49}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*111.* $f(A_6) = A_{59}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{21}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{43}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*112.* $f(A_6) = A_{58}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{24}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{42}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*113.* $f(A_6) = A_8$ *ise* $f(A_{26}) = A_{20}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{36}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*114.* $f(A_6) = A_{15}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{28}$ *ve* $f(A_{30}) = A_5$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*115.* $f(A_6) = A_{55}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{19}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{31}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*116.* $f(A_6) = A_{54}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{22}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{46}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*117.* $f(A_6) = A_8$ *ise* $f(A_{26}) = A_{18}$ *ve* $f(A_{30}) = A_0$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*118.* $f(A_6) = A_{17}$ *ise* $f(A_{26}) = A_{28}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{52}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*119.* $f(A_6) = A_6$ *ise* $f(A_{26}) = A_{26}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{30}$ *ise* $f$ *birim dönüşümdür.*

*120.* $f(A_6) = A_9$ *ise* $f(A_{26}) = A_{29}$ *ve* $f(A_{30}) = A_{37}$ *ise* $f$ *inversiyondur.*

*Buna göre orijini koruyan* $f$ *izometrisi* $G(D)$ *nin bir elemanıdır. Bir başka deyişle deltoiadl hexacontahedron uzaklığını koruyan Öklidyen izometriler dışında bir izometri yoktur.*

**Teorem 5.1** $f : \mathbb{R}^3_{DH} \to \mathbb{R}^3_{DH}$ *dönüşümü bir izometri olsun.* $f = T_A \circ g$ *olacak şekilde bir tek* $T_A \in T(3)$ *ve* $g \in G(D)$ *vardır.*

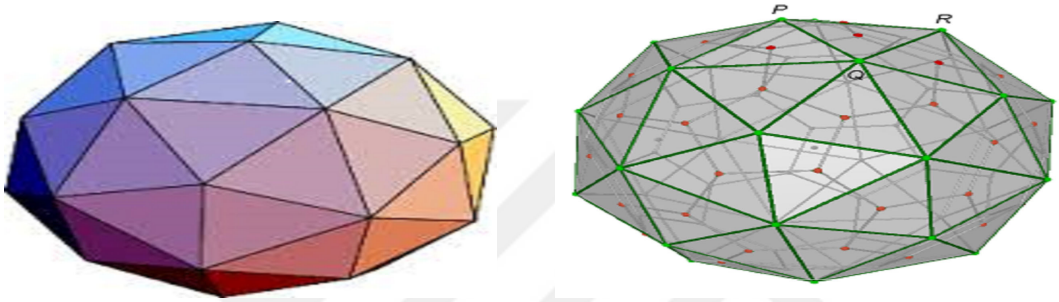
**İspat** $A = (a_1, a_2, a_3)$ *olmak üzere* $f(O) = A$ *olsun. Bu taktirde* $g = T_{-A} \circ f$ *olacak şekilde tanımlı* $g$ *dönüşümü bir izometridir ve* $g(O) = O$ *olur. Böylece önerme 4.9 dan dolayı* $g \in G(DH)$ *ve* $f = T_A \circ g$ *olur. İspatın tekliği aşikardır.*

Buna göre deltoidal hexacontahedron metriği ile donatılmış analitik 3-uzayın izometrilerinin grubu deltoidal hexacontahedronun (Öklidyen) simetri grubu olan $I_h$ ile 3-boyutlu analitik uzayın tüm ötelemelerinin grubu olan $T(3)$ ün yarı-direkt çarpımıdır. Yani $\mathbb{R}^3_{DH}$ nın tüm izometrilerinin kümesi $T(3).G(DH)$ dır.

# 6. PENTAKİS DODECAHEDRON UZAYI

## 6.1 Pentakis Dodecahedron Metriği ve Özellikleri

Pentakis Dodecahedron 60 tane ikiz kenar üçgenin birleşmesinden oluşan konveks bir çokyüzlüdür. Toplamda 32 köşe ve 90 ayrıta sahiptir (Şekil6.1).




Şekil 6.1 Pentakis Dodecahedron ve Docahedronun kleetopu

Geometrik olarak kisdodecahedron olarak da adlandırlır.Arşimedyan cisimlerden olan truncated icosahedronun dualidir. Dodecahedronun herbir yüzeyine pentogonal piramid eklenerek oluşan pentakis dodecahedron, dodecahedronun bir kleetopudur (Şekil6.1).

En kısa kenar uzunluğu 1 birim olup, yüzeye alanı $S = \frac{1}{19}(18\sqrt{5} - 9)\ br^2$ hacmi ise $V = \frac{5}{36}(\sqrt{5} - 1)\ br^3$ dür. Karbon atomunu herbir yüzey parçası pentakis dodecahedrona benzemektedir.Ayrıca pentakis dodecahedron 120 tane simetriye sahip olup, simetri grubu $I_h$ ile gösterilir.

Birim küresi Pentakis Dodecahedron olan uzaklık fonksiyonu $d_{PD}$ ile gösterilir ve bu uzaklık fonksiyonunun metrik aksiyomlarını sağladığı ve bazı özellikleri (Çolak ve Gelişgen, 2015) kaynağından verilmektedir.

**Tanım 6.1** *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\mathbb{R}^3$ de iki farklı nokta olsun. $d_{PD} : \mathbb{R}^3 x\, \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$ fonksiyonuna $\omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ olmak üzere,*

$$d_{PD}(P_1, P_2) = \max \left\{ \begin{array}{l} |x_1 - x_2| + \frac{\omega}{3} \max \left\{ \begin{array}{l} |y_1 - y_2|, \\ 2|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| + \omega(|z_1 - z_2| - |x_1 - x_2|), \\ |y_1 - y_2| + 2|z_1 - z_2| + 2\omega(|z_1 - z_2| - |x_1 - x_2|) \end{array} \right\}, \\ |y_1 - y_2| + \frac{\omega}{3} \max \left\{ \begin{array}{l} |z_1 - z_2|, \\ 2|z_1 - z_2| + |x_1 - x_2| + \omega(|x_1 - x_2| - |y_1 - y_2|), \\ |z_1 - z_2| + 2|x_1 - x_2| + 2\omega(|x_1 - x_2| - |y_1 - y_2|) \end{array} \right\}, \\ |z_1 - z_2| + \frac{\omega}{3} \max \left\{ \begin{array}{l} |x_1 - x_2|, \\ 2|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + \omega(|y_1 - y_2| - |z_1 - z_2|), \\ |x_1 - x_2| + 2|y_1 - y_2| + 2\omega(|y_1 - y_2| - |z_1 - z_2|) \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

*şeklinde tanımlanan analitik 3-uzayda $P_1$ ve $P_2$ noktaları arasındaki pentakis dodecahedron uzaklık fonksiyonu denir.*

**Yardımcı Teorem 6.1** *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\mathbb{R}^3$ de iki farklı nokta olsun.*

$$d_{PD}(P_1, P_2) \geq |x_1 - x_2| + \frac{\omega}{3} \max \left\{ \begin{array}{l} |y_1 - y_2|, \\ 2|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| + \omega(|z_1 - z_2| - |x_1 - x_2|), \\ |y_1 - y_2| + 2|z_1 - z_2| + 2\omega(|z_1 - z_2| - |x_1 - x_2|) \end{array} \right\}$$

$$d_{PD}(P_1, P_2) \geq |y_1 - y_2| + \frac{\omega}{3} \max \left\{ \begin{array}{l} |z_1 - z_2|, \\ 2|z_1 - z_2| + |x_1 - x_2| + \omega(|x_1 - x_2| - |y_1 - y_2|), \\ |z_1 - z_2| + 2|x_1 - x_2| + 2\omega(|x_1 - x_2| - |y_1 - y_2|) \end{array} \right\}$$

$$d_{PD}(P_1, P_2) \geq |z_1 - z_2| + \frac{\omega}{3} \max \left\{ \begin{array}{l} |x_1 - x_2|, \\ 2|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + \omega(|y_1 - y_2| - |z_1 - z_2|), \\ |x_1 - x_2| + 2|y_1 - y_2| + 2\omega(|y_1 - y_2| - |z_1 - z_2|) \end{array} \right\}$$

**İspat** *Maksimum fonksiyonun tanımından ispat aşikardır.*

**Önerme 6.1** *$\mathbb{R}^3$ de $d_{PD}$ uzaklık fonksiyonu metriktir ve bu metrikle donatılmış uzayın birim küresi pentakis dodecahedrondur.*

**İspat** *$d_{PD} : \mathbb{R}^3 x\, \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uaklık fonksiyonu ve $P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ve $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ $\mathbb{R}^3$de üç farklı nokta olsun.$d_{PD}$ uzaklık fonksiyonu her $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^3$ için*

*aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa $\mathbb{R}^3$de bir metriktir.*

$$\begin{aligned}
&\textbf{M1)} \quad d_{PD}(P_1,P_2) \geq 0 \text{ ve } d_{PD}(P_1,P_2)=0 \Leftrightarrow P_1=P_2\\
&\textbf{M2)} \quad d_{PD}(P_1,P_2)=d_{PD}(P_2,P_1)\\
&\textbf{M3)} \quad d_{PD}(P_1,P_3) \leq d_{PD}(P_1,P_2)+d_{PD}(P_2,P_3).
\end{aligned}$$

***M1)****Mutlak değer daima negatif olmayan değerler ürettiğinden mutlak değerli ifadelerin pozitif ifadelerle çarpılıp toplanması sonucu negatif olmayan değerler elde edilir. Açıkça* $d_{PD}(P_1,P_2) \geq 0$. *Yani* $d_{PD}$ *pozitif tanımlıdır. Eğer,* $d_{PD}(P_1,P_2)=0$ *ise*

$$|x_1-x_2|=0, |y_1-y_2|=0, |z_1-z_2|=0 \Longrightarrow x_1=x_2, y_1=y_2, z_1=z_2 \Longrightarrow P_1=P_2$$

*olur. Tersine* $P_1=P_2 \implies |x_1-x_2|=0, |y_1-y_2|=0, |z_1-z_2|=0 \implies d_{PD}(P_1,P_2)=0$ *bulunur.*

***M2)****Mutlak değerden dolayı* $|x_1-x_2|=|x_2-x_1|$, $|y_1-y_2|=|y_2-y_1|$, $|z_1-z_2|=|z_2-z_1|$ *olduğundan açıkça,* $d_{PD}(P_1,P_2)=d_{PD}(P_2,P_1)$ *dir. Yani* $d_{DH}$ *simetriktir.*

***M3)*** $P_1=(x_1,y_1,z_1), P_2=(x_2,y_2,z_2)$ *ve* $P_3=(x_3,y_3,z_3) \in \mathbb{R}^3$ *olsun.* $u_1=|x_1-x_3|$, $v_1=|y_1-y_3|$,$w_1=|z_1-z_3|$ , $u_2=|x_1-x_2|$, $v_2=|y_1-y_2|$, $w_2=|z_1-z_2|$, $u_3=|x_3-x_2|$, $v_3=|y_3-y_2|$, $w_3=|z_3-z_2|$ *olmak üzere,*

$$\begin{aligned}
&d_{PD}(P_1,P_3)\\
&= \max\left\{\begin{array}{l} u_1+\frac{\omega}{3}\max\{v_1, 2v_1+w_1+\omega(w_1-u_1), v_1+2w_1+2\omega(w_1-u_1)\},\\ v_1+\frac{\omega}{3}\max\{w_1, 2w_1+u_1+\omega(u_1-v_1), w_1+2u_1+2\omega(u_1-v_1)\},\\ w_1+\frac{\omega}{3}\max\{u_1, 2u_1+v_1+\omega(v_1-w_1), u_1+2v_1+2\omega(v_1-w_1)\}\end{array}\right\}\\
&\leq \max\left\{\begin{array}{l} u_2+u_3+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{l} v_2+v_3,\\ 2(v_2+v_3)+(w_2+w_3)+\omega((w_2+w_3)-(u_2+u_3)),\\ v_2+v_3+2(w_2+w_3)+2\omega((w_2+w_3)-(u_2+u_3))\end{array}\right\},\\ v_2+v_3+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{l} w_2+w_3,\\ 2(w_2+w_3)+(u_2+u_3)+\omega((u_2+u_3)-(v_2+v_3)),\\ w_2+w_3+2(u_2+u_3)+2\omega((u_2+u_3)-(v_2+v_3))\end{array}\right\},\\ w_2+w_3+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{l} u_2+u_3,\\ 2(u_2+u_3)+(v_2+v_3)+\omega((v_2+v_3)-(w_2+w_3)),\\ (u_2+u_3)+2(v_2+v_3)+2\omega((v_2+v_3)-(w_2+w_3))\end{array}\right\}\end{array}\right\}\\
&\leq \max\left\{\begin{array}{l} u_2+\frac{\omega}{3}\max\{v_2, 2v_2+w_2+\omega(w_2-u_2), v_2+2w_2+2\omega(w_2-u_2)\},\\ v_2+\frac{\omega}{3}\max\{w_2, 2w_2+u_2+\omega(u_2-v_2), w_2+2u_2+2\omega(u_2-v_2)\},\\ w_2+\frac{\omega}{3}\max\{u_2, 2u_2+v_2+\omega(v_2-w_2), u_2+2v_2+2\omega(v_2-w_2)\}\end{array}\right\}\\
&\leq \max\left\{\begin{array}{l} u_3+\frac{\omega}{3}\max\{v_3, 2v_3+w_3+\omega(w_3-u_3), v_3+2w_3+2\omega(w_3-u_3)\},\\ v_3+\frac{\omega}{3}\max\{w_3, 2w_3+u_3+\omega(u_3-v_3), w_3+2u_3+2\omega(u_3-v_3)\},\\ w_3+\frac{\omega}{3}\max\{u_3, 2u_3+v_3+\omega(v_3-w_3), u_3+2v_3+2\omega(v_3-w_3)\}\end{array}\right\}\\
&= X
\end{aligned}$$

*dir. Buradan Yardımcı teorem 5.1 den dolayı*

$$d_{PD}(P_1,P_2) \geq \max\left\{\begin{array}{c} u_2+\frac{\omega}{3}\max\left\{v_2,2v_2+w_2+\omega\left(w_2-u_2\right),v_2+2w_2+2\omega\left(w_2-u_2\right)\right\},\\ v_2+\frac{\omega}{3}\max\left\{w_2,2w_2+u_2+\omega\left(u_2-v_2\right),w_2+2u_2+2\omega\left(u_2-v_2\right)\right\},\\ w_2+\frac{\omega}{3}\max\left\{u_2,2u_2+v_2+\omega\left(v_2-w_2\right),u_2+2v_2+2\omega\left(v_2-w_2\right)\right\}\end{array}\right\}$$

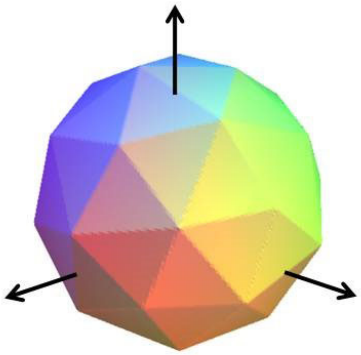
$$d_{PD}(P_2,P_3) \geq \max\left\{\begin{array}{c} u_3+\frac{\omega}{3}\max\left\{v_3,2v_3+w_3+\omega\left(w_3-u_3\right),v_3+2w_3+2\omega\left(w_3-u_3\right)\right\},\\ v_3+\frac{\omega}{3}\max\left\{w_3,2w_3+u_3+\omega\left(u_3-v_3\right),w_3+2u_3+2\omega\left(u_3-v_3\right)\right\},\\ w_3+\frac{\omega}{3}\max\left\{u_3,2u_3+v_3+\omega\left(v_3-w_3\right),u_3+2v_3+2\omega\left(v_3-w_3\right)\right\}\end{array}\right\}$$

*olur. Buna göre* $d_{PD}(P_1,P_3) \leq d_{PD}(P_1,P_2)+d_{PD}(P_2,P_3)$ *elde edilir. Yani pentakis dodecahedron uzaklık fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar.*

*Sonuç olarak pentakis dodecahedron uzaklık fonksiyonu metriktir Ayrıca bu metrikle döşenmiş analitik 3- uzayda orijinden 1 birim pentakis dodecahedron uzaklığındaki noktalar kümesi,*

$$S_{PD}=\{(x,y,z):\max\left\{\begin{array}{c} |x|+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c}|y|,2|y|+|z|+\omega\left(|z|-|x|\right),\\ |y|+2|z|+2\omega\left(|z|-|x|\right)\end{array}\right\},\\ |y|+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c}|z|,2|z|+|x|+\omega)\left(|x|-|y|\right),\\ |z|+2|x|+2\omega\left(|x|-|y|\right)\end{array}\right\},\\ |z|+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c}|x|,2|x|+|y|+\omega\left(|y|-|z|\right),\\ |x|+2|y|+2\omega\left(|y|-|z|\right)\end{array}\right\}\end{array}\right\}=1\}$$

*olup bu noktaların geometrik yeri şekil6.2 de görüldüğü gibi pentakis dodecahedrondur.*



Şekil 6.2 Pentakis dodecahedronun koordinat sistemine yerleştirilmesi

Pentakis doedecahedron uzaklık fonksiyonu oldukça karmaşık görünmesine rağmen, apsis, ordinat ve kotlar farkı arasında bir yönlendirme vardır. Bu yönlendirme $|x_1-x_2|-|y_1-y_2|-|z_1-z_2|-|x_1-x_2|$ şeklindedir. Buna göre $d_{PD}$ fonksiyonunda yer

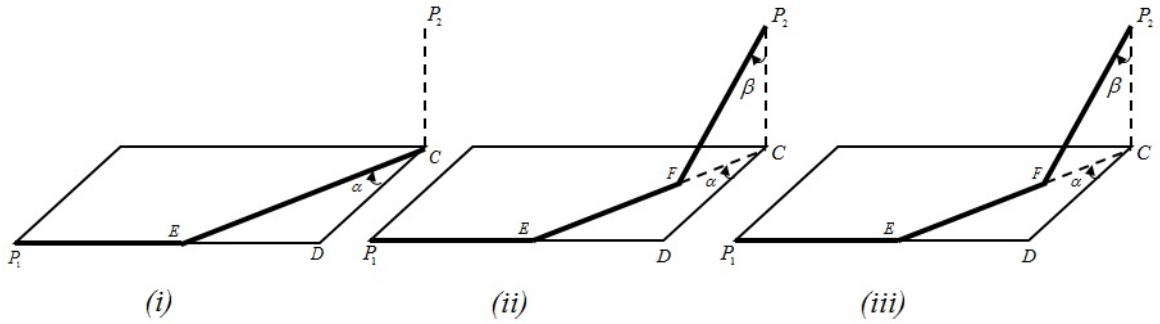
alan 3 ifadeden birinde $|x_1 - x_2|$ yerine $|y_1 - y_2|$, $|y_1 - y_2|$ yerine $|z_1 - z_2|$ yerine, $|z_1 - z_2|$ yerine $|x_1 - x_2|$ yazıldığında diğer bir ifadeye ulaşılır. Geometrik olarak $P_1$ noktasından $P_2$ noktasına olan yol için 3 farklı ihtimal vardır. Buan göre, bu yollar aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$(i)$ Biri koordinat eksenlerinden birine paralel diğeri bir diğer koordinat ekseni ile arctan $\left(\frac{4\sqrt{5}+5}{6}\right)$ radyanlık açı yapan iki doğru parçasının birleşimidir.

$(ii)$ Biri koordinat eksenlerinden birine paralel diğerleri ise diğer koordinat eksenleri ile arctan $\left(\frac{538\sqrt{5}-117}{76}\right)$ ve arctan $\left(\frac{3033+299\sqrt{5}}{19}\right)$ radyanlık açı yapan üç doğru parçasının birleşimidir.

$(iii)$ Biri koordinat eksenlerinden birine paralel diğerleri diğer koordinat eksenleri ile arctan $\left(\frac{2730+424\sqrt{5}}{31}\right)$ ve arctan $\left(\frac{4645\sqrt{5}+867}{31}\right)$ radyanlık açı yapan üç doğru parçasının birleşimidir.

Böylece $P_1$ ve $P_2$ noktaları arasındaki deltoidal hexacontahedron uzaklığı $(i)$ deki yol için bahsedilen iki doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamı, $(ii)$ deki yol için bahsedilen üç doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamının $\frac{9-\sqrt{5}}{6}$ katı, $(iii)$ deki yol için bahsedilen üç doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamının $\frac{6-\sqrt{5}}{3}$katıdır (Şekil6.3)




Şekil 6.3 Pentakis dodecahedron yolu

**Sonuç 6.1** $\mathbb{R}^3_{DH}$ *de* $(x_0, y_0, z_0)$ *merkezli ve* $r$ *yarıçaplı küre*

$$\max\left\{\begin{array}{l} |x-x_0|+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)|x-x_0|+(1+\varphi)|z-z_0|,\\ |y-y_0|+|z-z_0|,\\ \varphi|z-z_0|+(1+\varphi)|y-y_0|-|x-x_0|\end{array}\right\},\\ |y-y_0|+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)|y-y_0|+(1+\varphi)|x-x_0|,\\ |x-x_0|+|z-z_0|,\\ \varphi|x-x_0|+(1+\varphi)|z-z_0|-|y-y_0|\end{array}\right\},\\ |z-z_0|+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)|z-z_0|+(1+\varphi)|y-y_0|,\\ |x-x_0|+|y-y_0|,\\ \varphi|y-y_0|+(1+\varphi)|x-x_0|-|z-z_0|\end{array}\right\}.\end{array}\right\}=r$$

*denklemi ile ifade edilen köşe noktaları* $(0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}r, r)$, $(r, 0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}r)$, $(\frac{3-\sqrt{5}}{2}r, r, 0)$, $(\frac{6\sqrt{5}-3}{19}r, 0, \frac{3\sqrt{5}+27}{38}r)$, $(\frac{3\sqrt{5}+27}{38}r, \frac{6\sqrt{5}-3}{19}r, 0), (0, \frac{3\sqrt{5}+27}{38}r, \frac{6\sqrt{5}-3}{19}r), (\frac{\sqrt{5}-1}{2}r, \frac{\sqrt{5}-1}{2}r, \frac{\sqrt{5}-1}{2}r)$ *noktalarının herbir bileşeninin* $+/-$ *işaret değişiklikleri ve üç bileşenin tüm muhtemel permütasyonlarının* $(x_0, y_0, z_0)$ *kadar ötelenmişlerinden oluşan 60 yüzlü bir çokyüzlü olan pentakis dodecahedrondur.*

Bu bölümün geri kalan kısmında sıkça kullanılacağından dolayı merkezil birim kürenin köşe noktaları aşğıdaki şekilde isimlendirilmiştir.

$A_0 = \left(0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}r, r\right), A_1 = \left(0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}r, -r\right), A_2 = \left(0, -\frac{3-\sqrt{5}}{2}r, r\right), A_3 = \left(0, -\frac{3-\sqrt{5}}{2}r, -r\right),$
$A_4 = \left(r, 0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}r\right), A_5 = \left(r, 0, -\frac{3-\sqrt{5}}{2}r\right), A_6 = \left(-r, 0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}r\right), A_7 = \left(-r, 0, -\frac{3-\sqrt{5}}{2}r\right),$
$A_8 = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}r, r, 0\right), A_9 = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}r, -r, 0\right), A_{10} = \left(-\frac{3-\sqrt{5}}{2}r, r, 0\right), A_{11} = \left(-\frac{3-\sqrt{5}}{2}r, -r, 0\right),$
$A_{12} = \left(\frac{6\sqrt{5}-3}{19}r, 0, \frac{3\sqrt{5}+1}{22}r\right), A_{13} = \left(\frac{6\sqrt{5}-3}{19}r, 0, -\frac{3\sqrt{5}+1}{22}r\right), A_{14} = \left(-\frac{6\sqrt{5}-3}{19}r, 0, \frac{3\sqrt{5}+1}{22}r\right),$
$A_{15} = \left(-\frac{6\sqrt{5}-3}{19}r, 0, -\frac{3\sqrt{5}+1}{22}r\right), A_{16} = \left(\frac{3\sqrt{5}+27}{38}r, \frac{6\sqrt{5}-3}{19}r, 0\right), A_{17} = \left(\frac{3\sqrt{5}+27}{38}r, -\frac{6\sqrt{5}-3}{19}r, 0\right),$
$A_{18} = \left(-\frac{3\sqrt{5}+27}{38}r, \frac{6\sqrt{5}-3}{19}r, 0\right), A_{19} = \left(-\frac{3\sqrt{5}+27}{38}r, -\frac{6\sqrt{5}-3}{19}r, 0\right), A_{20} = \left(0, \frac{3\sqrt{5}+27}{38}r, \frac{6\sqrt{5}-3}{19}r\right),$
$A_{21} = \left(0, \frac{3\sqrt{5}+27}{38}r, -\frac{6\sqrt{5}-3}{19}r\right), A_{22} = \left(0, -\frac{3\sqrt{5}+27}{38}r, \frac{6\sqrt{5}-3}{19}r\right), A_{23} = \left(0, -\frac{3\sqrt{5}+27}{38}r, -\frac{6\sqrt{5}-3}{19}r\right),$
$A_{24} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}r, \frac{\sqrt{5}-1}{2}r, \frac{\sqrt{5}-1}{2}r\right), A_{25} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}r, \frac{\sqrt{5}-1}{2}r, -\frac{\sqrt{5}-1}{2}r\right), A_{26} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}r, -\frac{\sqrt{5}-1}{2}r, \frac{\sqrt{5}-1}{2}r\right),$
$A_{27} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}r, -\frac{\sqrt{5}-1}{2}r, -\frac{\sqrt{5}-1}{2}r\right), A_{28} = \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2}r, \frac{\sqrt{5}-1}{2}r, \frac{\sqrt{5}-1}{2}r\right), A_{29} = \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2}r, \frac{\sqrt{5}-1}{2}r, -\frac{\sqrt{5}-1}{2}r\right),$
$A_{30} = \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2}r, -\frac{\sqrt{5}-1}{2}r, \frac{\sqrt{5}-1}{2}r\right), A_{31} = \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2}r, -\frac{\sqrt{5}-1}{2}r, -\frac{\sqrt{5}-1}{2}r\right).$

Aşağıdaki önermede $\mathbb{R}^3$ deki noktalar arasındaki Öklidyen ve pentakis dodecahedron uzaklıkları arasındaki geçiş bağıntısını ifade etmektedir.

**Önerme 6.2** *$\mathbb{R}^3$ de $P_1$ ve $P_2$ noktalarından geçen doğru $l$ olsun. Eğer $l$ doğrusunun doğrultu vektörü $(p,q,r)$,*

$$K = \max \left\{ \begin{array}{c} p + \frac{\omega}{3} \max \left\{ q, 2q + r + \omega \left( r - p \right), q + 2r + 2\omega \left( r - p \right) \right\}, \\ q + \frac{\omega}{3} \max \left\{ r, 2r + p + \omega \left( p - q \right), r + 2p + 2\omega \left( p - q \right) \right\}, \\ r + \frac{\omega}{3} \max \left\{ p, 2p + q + \omega \left( q - r \right), p + 2q + 2\omega \left( q - r \right) \right\} \end{array} \right\}$$

*ve $\mu_{P_1P_2} = \frac{K}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$ ise $d_{PD}(P_1,P_2) = \mu_{P_1P_2} d_E(P_1,P_2)$ olur.*

**İspat** *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\mathbb{R}^3$ deki herhangi iki nokta olsun. $P_1$ ve $P_2$ den geçen doğru $l$ ise*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \lambda$$

*olur. $l$ doğrusunun doğrultu vektörü $(p,q,r)$ olduğundan $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = \lambda (p,q,r)$ dir. Buna göre $d_{PD}(P_1,P_2) = \lambda K$ ve $d_E(P_1,P_2) = \lambda\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ olduğundan dolayı $\frac{d_{PD}(P_1,P_2)}{K} = \frac{d_E(P_1,P_2)}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$ bulunur. Bu ise önermenin ifadesindeki sonucu verir.*

Yukarıdaki önerme herhangi bir doğru boyunca $d_{DH}(P_1,P_2)$ uzaklığının aynı doğru boyunca olan Öklidyen uzaklığın pozitif katı olduğu gösterir. Buna göre aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

**Sonuç 6.2** *$\mathbb{R}^3$de $A, B, X$ doğrudaş üç farklı nokta ise*

$$d_E(A,X) = d_E(B,X) \iff d_{PD}(A,X) = d_{PD}(B,X)$$

**Sonuç 6.3** *3-boyutlu uzayda $A, B, X$ doğrudaş üç farklı nokta ise*

$$d_{PD}(A,X)/d_{PD}(B,X) = d_E(A,X)/d_E(B,X)$$

*olur.*

Yani doğru boyunca olan $d_E$, $d_{PD}$ uzaklıklarının oranı aynıdır.

## 6.2 Pentakis Dodecahedron İzometri Grubu

Bu kısımda $d_{PD}$ metriği ile donatılmış $\mathbb{R}^3$ ün izometri grubu araştırılacaktır. Bunu gerçekleştirmek için öncelikle hangi Öklidyen izometrilerin pentakis dodecahedron

uzaklığını koruduğu bulunacak daha sonra bu izometrilerden başka izometriler olmadığı gösterilecektir.

$\alpha : \mathbb{R}^3_{PD} \to \mathbb{R}^3_{PD}$ dönüşüm olmak üzere her $X, Y \in \mathbb{R}^3_{PD}$ için

$$d_{PD}(X,Y) = d_{PD}(\alpha(X), \alpha(Y))$$

ise $\alpha$ dönüşümü $\mathbb{R}^3_{PD}$ de bir izometridir.

Aşağıda ifade edilen önermeler ile hangi Öklidyen izometrilerin pentakis dodecahedron uzayında da izometri oldukları verilmektedir.

**Önerme 6.3** *$\mathbb{R}^3$de her Öklidyen öteleme $\mathbb{R}^3_{PD}$ ün bir izometrisidir.*

**İspat** *$\alpha$=$(a_1, a_2, a_3)$, $X$=$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere $T_\alpha : \mathbb{R}^3_{PD} \to \mathbb{R}^3_{PD}$, $T_\alpha(X)$=$\alpha + X$ olacak şekilde reel uzayda bir öteleme olsun. $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3_{PD}$ için $A = |a_1 + x_1 - a_1 - x_2|$, $B = |a_2 + y_1 - a_2 - y_2|$, $C = |a_3 + z_1 - a_3 - z_2|$ olmak üzere,*

$$\begin{aligned}
&d_{PD}(T_\alpha(P_1), T_\alpha(P_2)) \\
&= \max \left\{ \begin{array}{l}
A + \frac{\omega}{3} \max \left\{ \begin{array}{c} B, 2B + C + \omega(C - A), \\ B + 2C + 2\omega(C - A) \end{array} \right\}, \\
B + \frac{\omega}{3} \max \left\{ \begin{array}{c} C, 2C + A + \omega)(A - B), \\ C + 2A + 2\omega(A - B) \end{array} \right\}, \\
C + \frac{\omega}{3} \max \left\{ \begin{array}{c} A, 2A + B + \omega(B - C), \\ A + 2B + 2\omega(B - C) \end{array} \right\}
\end{array} \right\} \\
&= \max \left\{ \begin{array}{l}
|x_1 - x_2| + \frac{\omega}{3} \max \left\{ \begin{array}{c} |y_1 - y_2|, 2|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| + \omega(|z_1 - z_2| - |x_1 - x_2|), \\ |y_1 - y_2| + 2|z_1 - z_2| + 2\omega(|z_1 - z_2| - |x_1 - x_2|) \end{array} \right\}, \\
|y_1 - y_2| + \frac{\omega}{3} \max \left\{ \begin{array}{c} |z_1 - z_2|, 2|z_1 - z_2| + |x_1 - x_2| + \omega)(|x_1 - x_2| - |y_1 - y_2|), \\ |z_1 - z_2| + 2|x_1 - x_2| + 2\omega(|x_1 - x_2| - |y_1 - y_2|) \end{array} \right\}, \\
|z_1 - z_2| + \frac{\omega}{3} \max \left\{ \begin{array}{c} |x_1 - x_2|, 2|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + \omega(|y_1 - y_2| - |z_1 - z_2|), \\ |x_1 - x_2| + 2|y_1 - y_2| + 2\omega(|y_1 - y_2| - |z_1 - z_2|) \end{array} \right\}
\end{array} \right\} \\
&= d_{PD}(P_1, P_2)
\end{aligned}$$

*olur. Bundan dolayı $T_\alpha$ bir izometridir.*

Yukarıdaki önermeden $\mathbb{R}^3_{PD}$ uzayında dönme ve yansımaları bulmak için orijinden geçen düzlemleri düşünmek yeterli olacaktır. Aşağıdaki önermede $\mathbb{R}^3_{PD}$ de uzaklığı koruyan yansımalar ifade edilecektir.

**Önerme 6.4** *$\mathbb{R}^3_{PD}$ de $\Delta = ax + by + cz = 0$ düzlemine göre yansımanın izometri olması için gerek ve yeter koşul düzlemin doğrultu vektörü $(a, b, c)$ nin*

$$D = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (\pm 1, \varphi, \pm(1-\varphi)), (\pm(1-\varphi), \pm 1, \varphi), (\varphi, \pm(1-\varphi), \pm 1)\}$$

*vektör kümesi elemanlarına paralel olmasıdır.*

**İspat** *Öklidyen olarak $ax + by + cz = 0$ birim normali $(a, b, c)$ olan düzlemin yansımasını $\sigma_\Delta$ olarak düşünürsek; $\sigma_\Delta : \mathbb{R}^3_{PD} \to \mathbb{R}^3_{PD}$ olmak üzere Öklidyen yansıma*

$$\sigma_\Delta(x,y,z) = ((1-2a^2)x - 2aby - 2acz, -2abx + (1-2b^2)y - 2bcz, -2acx - 2bcy + (1-2c^2)z)$$

*şeklinde tanımlanır. $\mathbb{R}^3_{PD}$ ün taban vektörlerini koruyan yansıma izometri olacağından, pentakis dodecahedronun köşe noktalarıda olan, $\mathbb{R}^3_{PD}$ ün $A_{12} = (\frac{3(9+\sqrt{5})}{19(1+\sqrt{5})}, 0, \frac{3(7+\sqrt{5})}{19(1+\sqrt{5})})$, $A_4 = (1, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{1+\sqrt{5}})$, $A_{24} = (\frac{2}{1+\sqrt{5}}, \frac{2}{1+\sqrt{5}}, \frac{2}{1+\sqrt{5}})$ tabanını koruyan yansımları tespit etmek izometrileri bulmak için yeterli olacaktır. Taban vektörlerinin Öklidyen yansımalar altında görüntüleri,*

$$\sigma_\Delta(\tfrac{3(9+\sqrt{5})}{19(1+\sqrt{5})}, 0, \tfrac{3(7+\sqrt{5})}{19(1+\sqrt{5})}) = \begin{pmatrix} \frac{3(9+\sqrt{5})}{19(1+\sqrt{5})}(1-2a^2) - \frac{3(7+\sqrt{5})}{19(1+\sqrt{5})}2ac, -\frac{3(9+\sqrt{5})}{19(1+\sqrt{5})}2ab - \frac{3(7+\sqrt{5})}{19(1+\sqrt{5})}2bc, \\ -\frac{3(9+\sqrt{5})}{19(1+\sqrt{5})}2ac + \frac{3(9+\sqrt{5})}{19(1+\sqrt{5})}(1-2c^2) \end{pmatrix}$$

$$\sigma_\Delta(1, 0, \tfrac{\sqrt{5}-1}{1+\sqrt{5}}) = \left((1-2a^2) - 2ac\tfrac{\sqrt{5}-1}{1+\sqrt{5}}, -2ab - 2bc\tfrac{\sqrt{5}-1}{1+\sqrt{5}}, -2ac + (1-2c^2)\tfrac{\sqrt{5}-1}{1+\sqrt{5}}\right)$$

$$\sigma_\Delta(\tfrac{2}{1+\sqrt{5}}, \tfrac{2}{1+\sqrt{5}}, \tfrac{2}{1+\sqrt{5}}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{5}}((1-2a^2) - 2ab - 2ac, -2ab + (1-2b^2) - 2bc, \\ -2ac - 2bc + (1-2c^2) \end{pmatrix}$$

*olur. Açıkça $d_{PD}(O, A_{12}) = d_{DH}(O, A_4) = d_{DH}(O, A_{24}) = 1$ olmalıdır. Eğer yansıma $d_{PD}$ uzaklığını koruyor ise taban vektörlerinin yansıma altındaki görüntüleri için uzaklık korunmalıdır. Yani*

$$d_{PD}(\sigma_\Delta(O), \sigma_\Delta(A_{12})) = d_{PD}(\sigma_\Delta(O), \sigma_\Delta(A_4)) = d_{PD}(\sigma_\Delta(O), \sigma_\Delta(A_{24})) = 1$$

*olmalıdır. Buna göre*

$$K = \left|\tfrac{3(9+\sqrt{5})}{19(1+\sqrt{5})}(1-2a^2) - \tfrac{3(7+\sqrt{5})}{19(1+\sqrt{5})}2ac\right|, L = \left|-\tfrac{3(9+\sqrt{5})}{19(1+\sqrt{5})}2ab - \tfrac{3(7+\sqrt{5})}{19(1+\sqrt{5})}2bc\right|$$

$$M = \left|-\tfrac{3(9+\sqrt{5})}{19(1+\sqrt{5})}2ac + \tfrac{3(9+\sqrt{5})}{19(1+\sqrt{5})}(1-2c^2)\right|, N = \left|(1-2a^2) - 2ac\tfrac{\sqrt{5}-1}{1+\sqrt{5}}\right|$$

$$O = \left|-2ab - 2bc\tfrac{\sqrt{5}-1}{1+\sqrt{5}}\right|, P = \left|\tfrac{2}{1+\sqrt{5}}((1-2a^2) - 2ab - 2ac)\right|$$

$$R = \left|\tfrac{2}{1+\sqrt{5}}(-2ab + (1-2b^2) - 2bc)\right|, S = \left|\tfrac{2}{1+\sqrt{5}}(-2ac - 2bc + (1-2c^2))\right|$$

*olmak üzere*

$$d_{PD}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(E_1)) = \max\left\{\begin{array}{c} K+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} L, 2L+M+\omega(M-K), \\ L+2M+2\omega(M-K)\end{array}\right\}, \\ L+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} M, 2M+K+\omega(M-L), \\ M+2K+2\omega(K-L)\end{array}\right\}, \\ M+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} K, 2K+L+\omega(L-M), \\ K+2L+2\omega(L-M)\end{array}\right\}\end{array}\right\} = 1$$

$$d_{PD}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(E_2)) = \max\left\{\begin{array}{c} N+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} O, 2O+P+\omega(P-N), \\ O+2P+2\omega(P-N)\end{array}\right\}, \\ O+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} P, 2P+N+\omega(N-O), \\ P+2N+2\omega(N-O)\end{array}\right\}, \\ P+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} N, 2N+O+\omega(O-P), \\ N+2O+2\omega(O-P)\end{array}\right\}\end{array}\right\} = 1$$

$$d_{PD}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(E_3)) = \max\left\{\begin{array}{c} P+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} R, 2R+S+\omega(S-P), \\ R+2S+2\omega(S-P)\end{array}\right\}, \\ R+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} S, 2S+P+\omega+(P-R), \\ S+2P+2\omega(P-R)\end{array}\right\}, \\ S+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} P, 2P+P+\omega(R-S), \\ P+2R+2\omega(R-S)\end{array}\right\}\end{array}\right\} = 1$$

*denklem sistemleri elde edilir. Denklem sistemi çözülürse,* $(\pm 1, \varphi, \pm(1-\varphi))$, $(\pm(1-\varphi), \pm 1, \varphi)$, $(\varphi, \pm(1-\varphi), \pm 1)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ *çözümleri elde edilir.*

*Tersine normal vektörleri $D$ kümesindeki vektörlere paralel olacak şekildeki düzlemlere göre yansımaların uzaklığı koruduğu gösterilmelidir. $\sigma_\Delta(X) = Y$ olacak şekilde $X$ ve $Y$ noktaları için $(p_1,q_1,r_1)$ ve $(p_2,q_2,r_2)$, $OX$ ve $OY$ vektörlerinin yön vektörleri olsun. $d_{PD}(O,X) = d_{PD}(O,Y)$ olduğunu göstermek için önerme 5.2 den $\mu_{OX} = \mu_{OY}$ olduğunu göstermek yeterlidir. $(p_1,q_1,r_1)$ vektörünün düzleme göre yansıma altındaki görüntüleri bulunursa;*

*1. Durum:* $1x+\varphi y+(1-\varphi)z=0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1-\tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}r_1, \tfrac{-1-\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1}{2}r_1, \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1),$$

*2. Durum:* $1x+\varphi y+-(1-\varphi)z=0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{-1-\sqrt{5}}{4}q_1-\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1, \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1-\tfrac{1}{2}r_1, \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1-\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1),$$

*3.Durum:* $-1x+\varphi y+(1-\varphi)z=0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1, \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1}{2}r_1, \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1),$$

*4.Durum:* -$1x + \varphi y + -(1-\varphi)z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\frac{1}{2}p_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{4}r_1, \frac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{4}q_1 - \frac{1}{2}r_1, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1 - \frac{1}{2}q_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{4}r_1),$

*5.Durum:* (1-$\varphi$)$x + 1y + \varphi z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\frac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 - \frac{-1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \frac{1}{2}r_1, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \frac{1}{2}q_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{4}r_1, \frac{1}{2}p_1 + \frac{-1-\sqrt{5}}{4}q_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{4}r_1),$

*6.Durum:* -(1-$\varphi$)$x + 1y + \varphi z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\frac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{4}q_1 - \frac{1}{2}r_1, \frac{1-\sqrt{5}}{4}p_1 + \frac{1}{2}q_1 + \frac{-1-\sqrt{5}}{4}r_1, -\frac{1}{2}p_1 - \frac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{4}r_1),$

*7.Durum:* $(1-\varphi)x - 1y + \varphi z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\frac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{4}q_1 + \frac{1}{2}r_1, \frac{1-\sqrt{5}}{4}p_1 + \frac{1}{2}q_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{4}r_1, \frac{1}{2}p_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{4}r_1),$

*8.Durum:* $-(1-\varphi)x - 1y + \varphi z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\frac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{4}q_1 - \frac{1}{2}r_1, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \frac{1}{2}q_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{4}r_1, -\frac{1}{2}p_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{4}r_1),$

*9.Durum:* $\varphi x + (1-\varphi)y + 1z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\frac{1-\sqrt{5}}{4}p_1 + \frac{1}{2}q_1 - \frac{1+\sqrt{5}}{4}r_1, \frac{1}{2}p_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{4}r_1, -\frac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \frac{1}{2}r_1),$

*10.Durum:* $\varphi x + -(1-\varphi)y + 1z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\frac{1-\sqrt{5}}{4}p_1 - \frac{1}{2}q_1 - \frac{1+\sqrt{5}}{4}r_1, -\frac{1}{2}p_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{4}r_1, -\frac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{4}q_1 + \frac{1}{2}r_1),$

*11.Durum:* $\varphi x + (1-\varphi)y - 1z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\frac{1-\sqrt{5}}{4}p_1 + \frac{1}{2}q_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{4}r_1, \frac{1}{2}p_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{4}r_1, \frac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{4}q_1 + \frac{1}{2}r_1),$

*12.Durum:* $\varphi x + -(1-\varphi)y - 1z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\frac{1-\sqrt{5}}{4}p_1 - \frac{1}{2}q_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{4}r_1, -\frac{1}{2}p_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{4}r_1, \frac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \frac{1}{2}r_1),$

*13.Durum:* $1x = 0$ *yansıma düzlemi için,*$\sigma_\Delta\ (p_1,q_1,r_1) = (-p_1,q_1,r_1)$ ,

*14.Durum:* $1y = 0$ *yansıma düzlemi için,*$\sigma_\Delta\ (p_1,q_1,r_1) = (p_1,-q_1,r_1)$ ,

*15.Durum:* $1z = 0$ *yansıma düzlemi için,*$\sigma_\Delta\ (p_1,q_1,r_1) = (p_1,q_1,-r_1)$ .

*sonuçlarını elde edilir. Çıkan bu sonuçlara ve önerme 5.2 ye göre de* $\mu(OX) = \mu(OY)$ *olduğu görülmektedir. Böylece ispat tamamlanmış olur.*

**Sonuç 6.4** *$S_{PD}$ izometrik yansımalarının kümesi orijinden geçen düzlemlere göre on beş Öklidyen yansımadan oluşur. Orijinden geçen düzlemler;*

$$\begin{array}{ccc} x=0 & y=0 & z=0 \\ x+\varphi y+(1-\varphi)z=0 & (1-\varphi)x+y+\varphi z=0 & \varphi x+(1-\varphi)y+z=0 \\ x+\varphi y-(1-\varphi)z=0 & -(1-\varphi)x+y+\varphi z=0 & \varphi x-(1-\varphi)y+z=0 \\ -x+\varphi y+(1-\varphi)z=0 & (1-\varphi)x-y+\varphi z=0 & \varphi x+(1-\varphi)y-z=0 \\ -x+\varphi y-(1-\varphi)z=0 & -(1-\varphi)x-y+\varphi z=0 & \varphi x+-(1-\varphi)y-z=0 \end{array}$$

Şekil6.4 deki tablo birim kürenin köşe noktalarının ilgili yansıma dönüşümleri altındaki görüntülerini vermektedir.

| Yansıma Düzlemleri | A0 | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 | A10 | A11 | A12 | A13 | A14 | A15 | A16 | A17 | A18 | A19 | A20 | A21 | A22 | A23 | A24 | A25 | A26 | A27 | A28 | A29 | A30 | A31 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x=0 | A0 | A1 | A2 | A3 | A6 | A7 | A4 | A5 | A10 | A11 | A8 | A9 | A14 | A15 | A12 | A13 | A18 | A19 | A16 | A17 | A20 | A21 | A22 | A23 | A28 | A29 | A30 | A31 | A24 | A25 | A26 | A27 |
| y=0 | A2 | A3 | A0 | A1 | A4 | A5 | A6 | A7 | A9 | A8 | A11 | A10 | A12 | A13 | A14 | A15 | A17 | A16 | A19 | A18 | A22 | A23 | A20 | A21 | A26 | A27 | A24 | A25 | A30 | A31 | A28 | A29 |
| z=0 | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A7 | A6 | A8 | A9 | A10 | A11 | A13 | A12 | A15 | A14 | A16 | A17 | A18 | A19 | A21 | A20 | A23 | A22 | A25 | A24 | A27 | A26 | A29 | A28 | A31 | A30 |
| 1x+φy+(1-φ)z=0 | A31 | A8 | A11 | A24 | A27 | A5 | A6 | A28 | A1 | A26 | A29 | A2 | A23 | A16 | A19 | A20 | A13 | A17 | A18 | A14 | A15 | A21 | A22 | A12 | A3 | A25 | A9 | A4 | A7 | A10 | A30 | A0 |
| 1x+φy-(1-φ)z=0 | A8 | A30 | A25 | A11 | A4 | A26 | A29 | A7 | A0 | A27 | A28 | A3 | A16 | A22 | A21 | A19 | A12 | A17 | A18 | A15 | A20 | A14 | A13 | A23 | A24 | A2 | A5 | A9 | A10 | A6 | A1 | A31 |
| -1x+φy+(1-φ)z=0 | A10 | A26 | A29 | A9 | A25 | A5 | A6 | A30 | A24 | A3 | A0 | A31 | A21 | A17 | A18 | A22 | A16 | A13 | A14 | A19 | A20 | A12 | A15 | A23 | A8 | A4 | A1 | A27 | A28 | A2 | A7 | A11 |
| -1x+φy-(1-φ)z=0 | A27 | A10 | A9 | A28 | A4 | A24 | A31 | A7 | A25 | A2 | A1 | A30 | A17 | A20 | A23 | A18 | A16 | A12 | A15 | A19 | A13 | A21 | A22 | A14 | A5 | A8 | A26 | A0 | A3 | A29 | A11 | A6 |
| (1-φ)x+1y+φz=0 | A30 | A1 | A2 | A25 | A9 | A27 | A28 | A10 | A31 | A4 | A7 | A24 | A22 | A13 | A14 | A21 | A23 | A17 | A18 | A20 | A19 | A15 | A12 | A16 | A11 | A3 | A26 | A5 | A6 | A29 | A0 | A8 |
| -(1-φ)x+1y+φz=0 | A0 | A27 | A28 | A3 | A8 | A25 | A30 | A11 | A4 | A29 | A26 | A7 | A20 | A13 | A14 | A23 | A16 | A21 | A22 | A19 | A12 | A17 | A18 | A15 | A24 | A5 | A10 | A1 | A2 | A9 | A6 | A31 |
| (1-φ)x-1y+φz=0 | A26 | A1 | A2 | A29 | A24 | A8 | A11 | A31 | A5 | A28 | A27 | A6 | A12 | A21 | A22 | A15 | A16 | A20 | A23 | A19 | A17 | A13 | A14 | A18 | A4 | A25 | A0 | A10 | A9 | A3 | A30 | A7 |
| -(1-φ)x-1y+φz=0 | A0 | A31 | A24 | A3 | A26 | A9 | A10 | A29 | A30 | A5 | A6 | A25 | A12 | A23 | A20 | A15 | A22 | A17 | A18 | A21 | A14 | A19 | A16 | A13 | A2 | A11 | A4 | A27 | A28 | A7 | A8 | A1 |
| φx+(1-φ)y+1z=0 | A6 | A25 | A30 | A5 | A31 | A3 | A0 | A24 | A29 | A9 | A10 | A26 | A19 | A13 | A14 | A16 | A15 | A23 | A20 | A12 | A18 | A21 | A22 | A17 | A7 | A1 | A11 | A27 | A28 | A8 | A2 | A4 |
| φx-(1-φ)y+1z=0 | A24 | A7 | A4 | A31 | A2 | A30 | A25 | A1 | A28 | A9 | A10 | A27 | A12 | A19 | A16 | A15 | A14 | A22 | A21 | A13 | A20 | A18 | A17 | A23 | A0 | A6 | A26 | A11 | A8 | A29 | A5 | A3 |
| φx+(1-φ)y-1z=0 | A4 | A29 | A26 | A7 | A0 | A28 | A27 | A3 | A8 | A30 | A25 | A11 | A12 | A18 | A17 | A15 | A20 | A14 | A13 | A23 | A16 | A21 | A22 | A19 | A24 | A10 | A2 | A6 | A5 | A1 | A9 | A31 |
| φx+(1-φ)y-1z=0 | A28 | A5 | A6 | A27 | A29 | A1 | A2 | A26 | A8 | A31 | A24 | A11 | A18 | A13 | A14 | A17 | A21 | A15 | A12 | A22 | A20 | A16 | A19 | A23 | A10 | A25 | A7 | A31 | A0 | A4 | A30 | A9 |

Şekil 6.4 $\mathbb{R}^3_{PD}$ de Yansıma Düzlemlerine Göre Köşe Noktaların Görüntüleri

**Önerme 6.5** *$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ve*

$$D_1 = \{1, (\pm(1-\varphi), 0),\ (0, 1, \pm(1-\varphi)),\ (\pm(1-\varphi), 0, 1)\}$$
$$D_2 = \left\{ \begin{array}{l} (1,0,0),\ (0,1,0), (0,0,1),\ (1, \pm\varphi, \pm(1-\varphi)), (\pm(1-\varphi), 1, \pm\varphi) \\ (\pm\varphi, \pm(1-\varphi), 1) \end{array} \right\}$$
$$D_3 = \left\{ \begin{array}{l} (1,1,1),\ (-1,1,1),\ (1,-1,1),\ (1,1,-1),\ (\pm(2-\varphi), 1, 0), \\ (0, \pm(2-\varphi), 1), (1, 0 \pm (2-\varphi)) \end{array} \right\}$$

*olmak üzere*

$$R_1 = \{r_\theta \mid \theta \in \{2\pi/5,\ 4\pi/5,\ 6\pi/5, 8\pi/5\},\ dönme\ ekseninin\ doğrultu\ vektörü\ D_1\ in\ elemanı\}$$
$$R_2 = \{r_\theta \mid \theta \in \{\pi\},\ dönme\ ekseninin\ doğrultu\ vektörü\ D_2\ in\ elemanı\}$$
$$R_3 = \{r_\theta \mid \theta = \{2\pi/3, 4\pi/3\},\ dönme\ ekseninin\ doğrultu\ vektörü\ D_3\ in\ elemanı\}$$

*kümeleri verilsin. Dönme ekseni orijinden geçen bir l doğrusu olan $r_\theta$ dönmesinin bir izometri olması için gerek ve yeter koşul $r_\theta \in R_{PD} = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ olmasıdır.*

**İspat** *Bir $l$ doğrusunun birim doğrultusu $(p,q,r)$ olmak üzere $r_\theta$ Öklidyen dönmenin matris formu,*

$$\begin{bmatrix} \cos\theta + p^2(1-\cos\theta) & pq(1-\cos\theta) - r\sin\theta & pr(1-\cos\theta) + q\sin\theta \\ pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta & \cos\theta + q^2(1-\cos\theta) & qr(1-\cos\theta) - p\sin\theta \\ pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta & qr(1-\cos\theta) + p\sin\theta & \cos\theta - r^2(1-\cos\theta) \end{bmatrix}$$

*şeklindedir. $l$ eksenindeki bir dönme, $l$ doğrusu boyunca kesişen iki düzlemin yansımalarının birleşimi olduğundan önerme 5.4 den dolayı $l$ doğrusunun doğrultu vektörleri* $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(0,-1,\pm(1-\varphi))$, $((1-\varphi),0,\pm1)$, $(-1,\pm(1-\varphi),0)$, $(1,\pm\varphi,\pm(1-\varphi))$, $(\pm(1-\varphi),\pm1,\varphi)$, $(\pm\varphi,-(1-\varphi),\pm1)$, $(1,1,1)$, $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$, $(\pm(2-\varphi),1,0)$, $(0,\pm(2-\varphi),1)$, $(1,0,\pm(2-\varphi))$ *olarak alınabilir.*

$\mathbb{R}^3_{PD}$ *de izometrik dönmelerin bulunması için, $d_{PD}$ birim küresinin kenarlarının uzunluklarını koruyan dönmelerin bulunması yeterlidir.*

$A_{20}=\left(0,\frac{3(7+5\sqrt{5})}{19(1+\sqrt{5})},\frac{3(9+\sqrt{5})}{19(1+\sqrt{5})}\right)$, $A_8=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{1+\sqrt{5}},1,0\right)$ *ve* $A_{24}=\left(\frac{2}{1+\sqrt{5}},\frac{2}{1+\sqrt{5}},\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)$ $d_{PD}$ *birim küresinin köşe noktalarını ele alalım. Buna göre açıkça* $d_{PD}(A_{20},\ A_8) = \frac{44\sqrt{5}-60}{57}$*ve* $d_{PD}(r_\theta(A_8), r_\theta(A_{24})) = 3-\sqrt{5}$ *dir. O halde* $\theta \neq 0$ *olmak üzere* $r_\theta$, $d_{PD}$ *uzaklığını koruması için* $d_{PD}(r_\theta(A_{20}), r_\theta(A_8)) = \frac{44\sqrt{5}-60}{57}$*ve* $d_{PD}(r_\theta(A_8), r_\theta(A_{24})) = 3-\sqrt{5}$ *olmalıdır. Bu takdirde,*

$$K_1 = \left| \begin{array}{l} \frac{3\sqrt{5}-11}{38}(pq(1-\cos\theta) - r\sin\theta) + \frac{6\sqrt{5}-3}{19}(pr(1-\cos\theta) + q\sin\theta) \\ -(\cos\theta + p^2(1-\cos\theta)\frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array} \right|,$$

$$L_1 = \left| \begin{array}{l} \frac{3\sqrt{5}-11}{38}(qr(1-\cos\theta) + p\sin\theta) + \frac{6\sqrt{5}-3}{19}(\cos\theta + r^2(1-\cos\theta)) \\ -(pr(1-\cos\theta) - q(1-\cos\theta)\frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array} \right|,$$

$$M_1 = \left| \begin{array}{l} \frac{3\sqrt{5}-11}{38}(\cos\theta + q^2(1-\cos\theta)) + \frac{6\sqrt{5}-3}{19}(qr(1-\cos\theta) \\ -p\sin\theta) - (r\sin\theta + pq(1-\cos\theta)\frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array} \right|,$$

$$K_2 = \left| \begin{array}{l} (2-\sqrt{5})(pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta) + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(\cos\theta + q^2(1-\cos\theta) \\ -\frac{\sqrt{5}-1}{2}(qr(1-\cos\theta) - p\sin\theta) \end{array} \right|,$$

$$L_2 = \left| \begin{array}{l} (2-\sqrt{5})(pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta) + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(qr(1-\cos\theta) + p\sin\theta) \\ -\frac{\sqrt{5}-1}{2}(\cos\theta + r^2(1-\cos\theta)) \end{array} \right| \textit{ve}$$

$$M_2 = \left| \begin{array}{l} (2-\sqrt{5})(\cos\theta + p^2(1-\cos\theta)) + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(pq(1-\cos\theta) \\ -r\sin\theta) - \frac{\sqrt{5}-1}{2}(pr(1-\cos\theta) + q\sin\theta) \end{array} \right|$$

*olmak üzere*

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_1+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} L_1, 2L_1+M_1+\omega\left(M_1-K_1\right), \\ L_1+2M_1+2\omega\left(M_1-K_1\right)\end{array}\right\}, \\ L_1+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} M_1, 2M_1+K_1+\omega\left(M_1-L_1\right), \\ M_1+2K_1+2\omega\left(K_1-L_1\right)\end{array}\right\}, \\ M_1+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} K_1, 2K_1+L_1+\omega\left(L_1-M_1\right), \\ K_1+2L_1+2\omega\left(L_1-M_1\right)\end{array}\right\}\end{array}\right\} = \frac{44\sqrt{5}-60}{57}$$

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_2+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} L_2, 2L_2+M_2+\omega\left(M_2-K_2\right), \\ L_2+2M+2\omega\left(M-K_2\right)\end{array}\right\}, \\ L_2+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} M_2, 2M_2+K_2+\omega\left(M_2-L_2\right), \\ M_2+2K_2+2\omega\left(K_2-L_2\right)\end{array}\right\}, \\ M_2+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} K_2, 2K_2+L_2+\omega\left(L_2-M_2\right), \\ K_2+2L_2+2\omega\left(L_2-M_2\right)\end{array}\right\}\end{array}\right\} = 3-\sqrt{5}$$

*denklemleri elde edilir.*

*l doğrusunun doğrultu vektörü* $(0,1,(1-\varphi))$ *olarak alınırsa* $(p,q,r)=(0,\frac{1}{\sqrt{2-2\varphi+\varphi^2}},\frac{1-\varphi}{\sqrt{2-2\varphi+\varphi^2}})$ *olur.* $p,q,r$ *değerlerini* $d_{PD}(r_\theta(A_{20}),r_\theta(A_8)) = \frac{44\sqrt{5}-60}{57}$ *ve* $d_{PD}(r_\theta(A_8),r_\theta(A_{24}))=3-\sqrt{5}$ *de yerine yazalım.*

$$K_1=\left|\left(\tfrac{11-3\sqrt{5}}{38}\tfrac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}+\tfrac{6\sqrt{5}-3}{19}(\tfrac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\right)\sin\theta-\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}\cos\theta\right|,$$

$$L_1=\left|\tfrac{3\sqrt{5}-11}{38}\tfrac{\sqrt{5}}{5}(1-\cos\theta)+\tfrac{6\sqrt{5}-3}{19}(\cos\theta+\tfrac{50-10\sqrt{5}}{100}(1-\cos\theta))+\tfrac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}\sin\theta\right|,$$

$$M_1=\left|\tfrac{3\sqrt{5}-11}{38}(\cos\theta+\tfrac{50+10\sqrt{5}}{100}(1-\cos\theta))+\tfrac{6\sqrt{5}-3}{19}\tfrac{\sqrt{5}}{5}(1-\cos\theta)-\tfrac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}\sin\theta\right|,$$

$$K_2=\left|(2-\sqrt{5})\cos\theta-\tfrac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}\sin\theta-\tfrac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\tfrac{\sqrt{5-1}}{2}\sin\theta\right|,$$

$$L_2=\left|-(2-\sqrt{5})\tfrac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\sin\theta+\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}\tfrac{\sqrt{5}}{5}(1-\cos\theta)-\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}(\cos\theta+\tfrac{50-10\sqrt{5}}{100}(1-\cos\theta))\right| \text{ ve}$$

$$M_2=\left|(2-\sqrt{5})\tfrac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\sin\theta+\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}(\cos\theta+\tfrac{50-10\sqrt{5}}{100}(1-\cos\theta))-\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\tfrac{\sqrt{5}}{5}(1-\cos\theta)\right|$$

*olmak üzere,*

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_1+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} L_1, 2L_1+M_1+\omega\left(M_1-K_1\right), \\ L_1+2M_1+2\omega\left(M_1-K_1\right)\end{array}\right\}, \\ L_1+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} M_1, 2M_1+K_1+\omega\left(M_1-L_1\right), \\ M_1+2K_1+2\omega\left(K_1-L_1\right)\end{array}\right\}, \\ M_1+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} K_1, 2K_1+L_1+\omega\left(L_1-M_1\right), \\ K_1+2L_1+2\omega\left(L_1-M_1\right)\end{array}\right\}\end{array}\right\} = \frac{44\sqrt{5}-60}{57}$$

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_2+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} L_2, 2L_2+M_2+\omega\left(M_2-K_2\right), \\ L_2+2M+2\omega\left(M-K_2\right) \end{array}\right\}, \\ L_2+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} M_2, 2M_2+K_2+\omega\left(M_2-L_2\right), \\ M_2+2K_2+2\omega\left(K_2-L_2\right) \end{array}\right\}, \\ M_2+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} K_2, 2K_2+L_2+\omega\left(L_2-M_2\right), \\ K_2+2L_2+2\omega\left(L_2-M_2\right) \end{array}\right\} \end{array}\right\} = 3-\sqrt{5}$$

*denklemleri elde edilir. Yukarıdaki denklem sistemi çözülürse* $\theta = 2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5$ *sonuçları bulunur. Benzer şekilde, eğer l nin yön vektörü;*

$$\left(1, \pm(1-\varphi), 0\right), \left(0, 1, \pm(1-\varphi)\right), \left(\pm(1-\varphi), 0, 1\right)$$

*olarak alınır ise* $\theta = 2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5$ *olur.*

*l doğrusunun yön vektörü (1,0,0) ise* $(p,q,r) = (1,0,0)$ *olur.* $p, q, r$ *değerlerini* $d_{PD}(r_\theta(A_{20}), r_\theta(A_8)) = \frac{44\sqrt{5}-60}{57}$ *ve* $d_{PD}(r_\theta(A_8), r_\theta(A_{24})) = 3-\sqrt{5}$ *de yerine yazalım.*

$$K_1 = \left|\tfrac{3\sqrt{5}-11}{38}\cos\theta - \tfrac{6\sqrt{5}-3}{19}\sin\theta\right|, L_1 = \left|\tfrac{3\sqrt{5}-11}{38}\sin\theta + \tfrac{6\sqrt{5}-3}{19}\cos\theta\right|, M_1 = \left|\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right|,$$

$K_2 = \left|\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\sin\theta\right|, L_2 = \left|\frac{3-\sqrt{5}}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\cos\theta\right|$ *ve* $M_2 = \left|\sqrt{5}-2\right|$ *olmak üzere,*

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_1+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} L_1, 2L_1+M_1+\omega\left(M_1-K_1\right), \\ L_1+2M_1+2\omega\left(M_1-K_1\right) \end{array}\right\}, \\ L_1+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} M_1, 2M_1+K_1+\omega\left(M_1-L_1\right), \\ M_1+2K_1+2\omega\left(K_1-L_1\right) \end{array}\right\}, \\ M_1+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} K_1, 2K_1+L_1+\omega\left(L_1-M_1\right), \\ K_1+2L_1+2\omega\left(L_1-M_1\right) \end{array}\right\} \end{array}\right\} = \frac{44\sqrt{5}-60}{57}$$

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_2+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} L_2, 2L_2+M_2+\omega\left(M_2-K_2\right), \\ L_2+2M+2\omega\left(M-K_2\right) \end{array}\right\}, \\ L_2+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} M_2, 2M_2+K_2+\omega\left(M_2-L_2\right), \\ M_2+2K_2+2\omega\left(K_2-L_2\right) \end{array}\right\}, \\ M_2+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} K_2, 2K_2+L_2+\omega\left(L_2-M_2\right), \\ K_2+2L_2+2\omega\left(L_2-M_2\right) \end{array}\right\} \end{array}\right\} = 3-\sqrt{5}$$

*denklemlerine ulaşılır. Bu denklem sistemi çözülürse* $\theta = \pi$ *sonucu bulunur. l etrafındaki* $\theta = \pi$ *radyanlık dönme* $\mathbb{R}^3_{PD}$ *ün bir izometrisidir. Benzer şekilde, l nin yön vektörü*

$$\left(0,1,0\right), \left(0,0,1\right), \left(1, \varphi, \pm(1-\varphi)\right), \left(\pm(1-\varphi), 1, \varphi\right), \left(\varphi, \pm(1-\varphi), 1\right)$$

*ise* $\theta = \pi$ *sonucu bulunur.*

*l nin yön vektörü (1,1,1) ise* $(p,q,r) = (\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$ *olur.* $p,q,r$ *değerlerini* $d_{PD}(r_\theta(A_{20}),r_\theta(A_8)) = \frac{44\sqrt{5}-60}{57}$ *ve* $d_{PD}(r_\theta(A_8),r_\theta(A_{24})) = 3-\sqrt{5}$ *de yerine yazalım.*

$$K_1 = \left|\tfrac{3\sqrt{5}-11}{38}\left(\tfrac{2\cos\theta+1}{3}\right) + \tfrac{31\sqrt{5}-63}{38}\left(\tfrac{1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)\right|,$$

$$L_1 = \left|\tfrac{3\sqrt{5}-11}{38}\left(\tfrac{1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right) + \tfrac{6\sqrt{5}-3}{19}\left(\tfrac{1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right) - \tfrac{3-\sqrt{5}}{2}\left(\tfrac{2\cos\theta+1}{3}\right)\right|,$$

$$M_1 = \left|\tfrac{3\sqrt{5}-11}{38}\left(\tfrac{1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right) + \tfrac{6\sqrt{5}-3}{19}\left(\tfrac{2\cos\theta+1}{3}\right) - \tfrac{3-\sqrt{5}}{2}\left(\tfrac{1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)\right|,$$

$$K_2 = \left|(2-\sqrt{5})\left(\tfrac{1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right) + \tfrac{3-\sqrt{5}}{2}\left(\tfrac{2\cos\theta+1}{3}\right) - \tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\tfrac{1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)\right|,$$

$$L_2 = \left|(2-\sqrt{5})\left(\tfrac{2\cos\theta+1}{3}\right) + \tfrac{3-\sqrt{5}}{2}\left(\tfrac{1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right) - \tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\tfrac{1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)\right| \text{ ve}$$

$$M_2 = \left|(2-\sqrt{5})\left(\tfrac{1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right) + \tfrac{3-\sqrt{5}}{2}\left(\tfrac{1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right) - \tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\tfrac{1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)\right|$$

*olmak üzere,*

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_1+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} L_1, 2L_1+M_1+\omega(M_1-K_1), \\ L_1+2M_1+2\omega(M_1-K_1)\end{array}\right\}, \\ L_1+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} M_1, 2M_1+K_1+\omega(M_1-L_1), \\ M_1+2K_1+2\omega(K_1-L_1)\end{array}\right\}, \\ M_1+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} K_1, 2K_1+L_1+\omega(L_1-M_1), \\ K_1+2L_1+2\omega(L_1-M_1)\end{array}\right\}\end{array}\right\} = \frac{44\sqrt{5}-60}{57}$$

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_2+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} L_2, 2L_2+M_2+\omega(M_2-K_2), \\ L_2+2M+2\omega(M-K_2)\end{array}\right\}, \\ L_2+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} M_2, 2M_2+K_2+\omega(M_2-L_2), \\ M_2+2K_2+2\omega(K_2-L_2)\end{array}\right\}, \\ M_2+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} K_2, 2K_2+L_2+\omega(L_2-M_2), \\ K_2+2L_2+2\omega(L_2-M_2)\end{array}\right\}\end{array}\right\} = 3-\sqrt{5}$$

*denklemleri bulunur. Bu denklem sistemi çözülürse* $\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ *sonuçları bulunur. Buradan l etrafındaki* $\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ *radyanlık dönmeler* $\mathbb{R}^3_{PD}$ *ün bir izometrisidir. Benzer şekilde, eğer l nin yön vektörü*

$$(-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1),(\pm(2-\varphi),1,0),(0,\pm(2-\varphi),1),(1,0,\pm(2-\varphi))$$

*ise* $\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ *olur.*

*Tersine* $r_\theta(X) = Y$ *olacak şekilde* $X$ *ve* $Y$ *noktalarıyla oluşturulan* $OX$ *ve* $OY$ *doğrularının doğrultuları sırasıyla* $(p_1,q_1,r_1)$ *ve* $(p_2,q_2,r_2)$ *olmak üzere* $d_{PD}(OX) = d_{PD}(OY)$ *olduğunu göstermek için önerme 5.2 den* $\mu_{OX} = \mu_{OY}$ *olduğu*

*gösterilmelidir. Bu ise* $(p_1, q_1, r_1)$ *vektörünün tüm durumları için görüntüleri bulunarak kolaylıkla gösterilebilir. Örneğin doğrultu vektörü* $(1, 1, 1)$ *olmak üzere, bu eksende* $\frac{2\pi}{3}$ *radyanlık dönme dönüşümü yapılınca*$(p_2, q_2, r_2) = (r_1, p_{,1}, q_1)$ *bulunur. Buradan da açıkça* $\mu(OX) = \mu(OY)$ *olduğu görülür. Benzer şekilde diğer dönme eksenleri ve dönme açıları için eşitlik gösterilebilir. Buda ispatı tamamlar.*

**Sonuç 6.5** *Orijinden geçen doğrulara göre izometrik dönmelerin* $R_{PD}$ *kümesi tam olarak 59 Öklidyen dönme içerir.*

Şekil6.5 deki tablo birim kürenin köşe noktalarının ilgili dönme dönüşümleri altındaki görüntülerini vermektedir.

| Dönme Ekseni Doğrultu Vektörleri | Açılar | A0 | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 | A10 | A11 | A12 | A13 | A14 | A15 | A16 | A17 | A18 | A19 | A20 | A21 | A22 | A23 | A24 | A25 | A26 | A27 | A28 | A29 | A30 | A31 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1,0,0) | θ=π | A3 | A2 | A1 | A0 | A5 | A4 | A7 | A6 | A9 | A8 | A11 | A10 | A13 | A12 | A15 | A14 | A17 | A16 | A19 | A18 | A23 | A22 | A21 | A20 | A27 | A26 | A25 | A24 | A31 | A30 | A29 | A28 |
| (0,1,0) | θ=π | A1 | A0 | A3 | A2 | A7 | A6 | A5 | A4 | A10 | A11 | A8 | A9 | A15 | A14 | A13 | A12 | A18 | A19 | A16 | A17 | A21 | A20 | A23 | A22 | A29 | A28 | A31 | A30 | A25 | A24 | A27 | A26 |
| (0,0,1) | θ=π | A2 | A3 | A0 | A1 | A6 | A7 | A4 | A5 | A11 | A10 | A9 | A8 | A14 | A15 | A12 | A13 | A19 | A18 | A17 | A16 | A22 | A23 | A20 | A21 | A30 | A31 | A28 | A29 | A26 | A27 | A24 | A25 |
| (1,1,1) | θ=2π/3 | A4 | A6 | A5 | A7 | A8 | A10 | A9 | A11 | A0 | A1 | A2 | A3 | A16 | A18 | A17 | A19 | A20 | A21 | A22 | A23 | A12 | A14 | A13 | A15 | A24 | A28 | A25 | A29 | A26 | A30 | A27 | A31 |
| | θ=4π/3 | A8 | A9 | A10 | A11 | A0 | A2 | A1 | A3 | A4 | A6 | A5 | A7 | A20 | A22 | A21 | A23 | A12 | A14 | A13 | A15 | A16 | A17 | A18 | A19 | A24 | A26 | A28 | A30 | A25 | A27 | A29 | A31 |
| (-1,1,1) | θ=2π/3 | A10 | A11 | A8 | A9 | A1 | A3 | A0 | A2 | A7 | A5 | A6 | A4 | A21 | A23 | A20 | A22 | A15 | A13 | A14 | A12 | A18 | A19 | A16 | A17 | A29 | A31 | A25 | A27 | A28 | A30 | A24 | A26 |
| | θ=4π/3 | A6 | A4 | A7 | A5 | A11 | A9 | A10 | A8 | A2 | A3 | A0 | A1 | A19 | A17 | A18 | A16 | A22 | A23 | A20 | A21 | A14 | A12 | A15 | A13 | A30 | A26 | A31 | A27 | A28 | A24 | A29 | A25 |
| (1,-1,1) | θ=2π/3 | A11 | A10 | A9 | A8 | A2 | A0 | A3 | A1 | A6 | A4 | A7 | A5 | A22 | A20 | A23 | A21 | A14 | A12 | A15 | A13 | A19 | A18 | A17 | A16 | A30 | A28 | A26 | A24 | A31 | A29 | A27 | A25 |
| | θ=4π/3 | A5 | A7 | A4 | A6 | A9 | A11 | A8 | A10 | A3 | A2 | A1 | A0 | A17 | A19 | A16 | A18 | A23 | A22 | A21 | A20 | A13 | A15 | A12 | A14 | A27 | A31 | A26 | A30 | A25 | A29 | A24 | A28 |
| (1,1,-1) | θ=2π/3 | A9 | A8 | A11 | A10 | A3 | A1 | A2 | A0 | A5 | A7 | A4 | A6 | A23 | A21 | A22 | A20 | A13 | A15 | A12 | A14 | A17 | A16 | A19 | A18 | A27 | A25 | A31 | A29 | A26 | A24 | A30 | A28 |
| | θ=4π/3 | A7 | A5 | A6 | A4 | A10 | A8 | A11 | A9 | A1 | A0 | A3 | A2 | A18 | A16 | A19 | A17 | A21 | A20 | A23 | A22 | A15 | A13 | A14 | A12 | A29 | A25 | A28 | A24 | A31 | A27 | A30 | A26 |
| (0,(2-φ),1) | θ=2π/3 | A0 | A31 | A24 | A3 | A10 | A29 | A26 | A9 | A6 | A25 | A30 | A5 | A20 | A15 | A12 | A23 | A18 | A21 | A22 | A17 | A14 | A19 | A16 | A13 | A28 | A7 | A8 | A1 | A2 | A11 | A4 | A27 |
| | θ=4π/3 | A0 | A27 | A28 | A3 | A30 | A11 | A8 | A25 | A26 | A77 | A4 | A29 | A14 | A23 | A20 | A13 | A22 | A19 | A16 | A21 | A12 | A17 | A18 | A15 | A2 | A9 | A6 | A31 | A24 | A5 | A10 | A1 |
| (0,-(2-φ),1) | θ=2π/3 | A26 | A1 | A2 | A29 | A11 | A31 | A24 | A8 | A27 | A6 | A5 | A28 | A22 | A15 | A12 | A21 | A23 | A19 | A16 | A20 | A17 | A13 | A14 | A18 | A9 | A31 | A30 | A7 | A4 | A25 | A0 | A10 |
| | θ=4π/3 | A30 | A1 | A2 | A25 | A28 | A10 | A9 | A27 | A7 | A24 | A31 | A4 | A14 | A21 | A22 | A13 | A18 | A20 | A23 | A17 | A19 | A15 | A12 | A16 | A6 | A29 | A0 | A8 | A11 | A3 | A26 | A5 |
| ((2-φ),1,0) | θ=2π/3 | A5 | A28 | A27 | A6 | A1 | A29 | A26 | A2 | A8 | A31 | A24 | A11 | A13 | A18 | A17 | A14 | A21 | A15 | A12 | A22 | A16 | A20 | A23 | A19 | A25 | A10 | A3 | A7 | A4 | A0 | A9 | A30 |
| | θ=4π/3 | A29 | A4 | A7 | A26 | A28 | A0 | A3 | A27 | A8 | A30 | A25 | A11 | A18 | A12 | A15 | A17 | A20 | A14 | A13 | A23 | A21 | A16 | A19 | A22 | A10 | A24 | A6 | A2 | A1 | A5 | A31 | A9 |
| (-(2-φ),1,0) | θ=2π/3 | A7 | A24 | A31 | A4 | A30 | A2 | A1 | A25 | A28 | A9 | A10 | A27 | A19 | A12 | A15 | A16 | A14 | A22 | A21 | A13 | A18 | A20 | A23 | A17 | A6 | A0 | A11 | A26 | A29 | A8 | A3 | A5 |
| | θ=4π/3 | A25 | A6 | A5 | A30 | A3 | A31 | A24 | A0 | A29 | A9 | A10 | A26 | A13 | A19 | A16 | A14 | A15 | A23 | A20 | A12 | A21 | A18 | A17 | A22 | A1 | A7 | A27 | A11 | A8 | A28 | A4 | A2 |
| (1,0,(2-φ)) | θ=2π/3 | A9 | A28 | A27 | A10 | A4 | A24 | A31 | A7 | A2 | A25 | A30 | A1 | A17 | A20 | A23 | A18 | A12 | A16 | A19 | A15 | A22 | A14 | A13 | A21 | A26 | A0 | A5 | A8 | A11 | A6 | A3 | A29 |
| | θ=4π/3 | A25 | A11 | A8 | A30 | A4 | A26 | A29 | A7 | A27 | A0 | A3 | A28 | A16 | A22 | A21 | A19 | A17 | A12 | A15 | A18 | A13 | A23 | A20 | A14 | A5 | A9 | A24 | A2 | A1 | A31 | A10 | A6 |
| (1,0,-(2-φ)) | θ=2π/3 | A29 | A9 | A10 | A26 | A25 | A5 | A6 | A30 | A3 | A24 | A31 | A0 | A21 | A17 | A18 | A22 | A13 | A16 | A19 | A14 | A15 | A23 | A20 | A12 | A1 | A27 | A8 | A4 | A7 | A11 | A28 | A2 |
| | θ=4π/3 | A11 | A24 | A31 | A8 | A27 | A5 | A6 | A28 | A26 | A1 | A2 | A29 | A23 | A16 | A19 | A20 | A17 | A13 | A14 | A18 | A22 | A12 | A15 | A21 | A9 | A4 | A3 | A25 | A30 | A0 | A7 | A10 |
| (0,1,(1-φ)) | θ=2π/5 | A24 | A7 | A4 | A31 | A25 | A1 | A2 | A30 | A10 | A27 | A28 | A9 | A16 | A15 | A12 | A19 | A21 | A13 | A14 | A22 | A20 | A18 | A17 | A23 | A8 | A29 | A5 | A3 | A0 | A6 | A30 | A11 |
| | θ=4π/5 | A8 | A30 | A25 | A11 | A29 | A7 | A4 | A26 | A28 | A3 | A0 | A27 | A21 | A19 | A16 | A22 | A18 | A15 | A12 | A17 | A20 | A14 | A13 | A23 | A10 | A6 | A1 | A31 | A24 | A2 | A5 | A9 |
| | θ=6π/5 | A10 | A26 | A29 | A9 | A6 | A30 | A25 | A5 | A0 | A31 | A24 | A3 | A18 | A22 | A21 | A17 | A14 | A19 | A16 | A13 | A20 | A12 | A15 | A23 | A28 | A2 | A7 | A11 | A8 | A4 | A1 | A27 |
| | θ=8π/5 | A28 | A5 | A6 | A27 | A2 | A26 | A29 | A1 | A24 | A11 | A8 | A31 | A14 | A17 | A18 | A13 | A12 | A22 | A21 | A15 | A20 | A16 | A19 | A23 | A0 | A4 | A30 | A9 | A10 | A25 | A7 | A3 |
| (0,1,-(1-φ)) | θ=2π/5 | A4 | A29 | A26 | A7 | A27 | A3 | A0 | A28 | A25 | A11 | A8 | A30 | A17 | A15 | A12 | A18 | A13 | A23 | A20 | A14 | A16 | A21 | A22 | A19 | A5 | A1 | A9 | A31 | A24 | A10 | A2 | A6 |
| | θ=4π/5 | A27 | A10 | A9 | A28 | A31 | A7 | A4 | A24 | A1 | A30 | A25 | A2 | A23 | A18 | A17 | A20 | A15 | A19 | A16 | A12 | A13 | A21 | A22 | A14 | A3 | A29 | A11 | A6 | A5 | A8 | A26 | A0 |
| | θ=6π/5 | A31 | A8 | A11 | A24 | A6 | A28 | A27 | A5 | A29 | A2 | A1 | A26 | A19 | A20 | A23 | A16 | A18 | A14 | A13 | A17 | A15 | A21 | A22 | A12 | A7 | A10 | A30 | A0 | A3 | A25 | A9 | A4 |
| | θ=8π/5 | A6 | A25 | A30 | A5 | A0 | A24 | A31 | A3 | A10 | A26 | A29 | A9 | A14 | A16 | A19 | A13 | A20 | A12 | A15 | A23 | A18 | A21 | A22 | A17 | A28 | A8 | A2 | A4 | A7 | A1 | A11 | A27 |
| ((1-φ),0,1) | θ=2π/5 | A2 | A29 | A26 | A1 | A24 | A8 | A11 | A31 | A28 | A5 | A6 | A27 | A12 | A21 | A22 | A15 | A20 | A16 | A19 | A23 | A14 | A18 | A17 | A13 | A0 | A10 | A4 | A25 | A30 | A7 | A9 | A3 |
| | θ=4π/5 | A26 | A7 | A4 | A29 | A0 | A28 | A27 | A3 | A30 | A8 | A11 | A25 | A12 | A18 | A17 | A15 | A14 | A20 | A23 | A13 | A22 | A19 | A16 | A21 | A2 | A6 | A24 | A10 | A9 | A31 | A5 | A1 |
| | θ=6π/5 | A4 | A31 | A24 | A7 | A2 | A30 | A25 | A1 | A8 | A28 | A27 | A10 | A12 | A19 | A16 | A15 | A22 | A14 | A13 | A21 | A17 | A23 | A20 | A18 | A26 | A11 | A0 | A6 | A5 | A3 | A8 | A29 |
| | θ=8π/5 | A24 | A3 | A0 | A31 | A26 | A9 | A10 | A29 | A5 | A30 | A25 | A6 | A12 | A23 | A20 | A15 | A17 | A22 | A21 | A18 | A16 | A13 | A14 | A19 | A4 | A27 | A2 | A11 | A8 | A1 | A28 | A7 |
| (-(1-φ),0,1) | θ=2π/5 | A2 | A25 | A30 | A1 | A9 | A27 | A28 | A10 | A4 | A31 | A24 | A7 | A22 | A13 | A14 | A21 | A17 | A23 | A20 | A18 | A12 | A16 | A19 | A15 | A26 | A5 | A11 | A3 | A0 | A8 | A6 | A29 |
| | θ=4π/5 | A30 | A5 | A6 | A25 | A31 | A3 | A0 | A24 | A9 | A29 | A26 | A10 | A19 | A13 | A14 | A16 | A23 | A15 | A12 | A20 | A22 | A17 | A18 | A21 | A11 | A27 | A7 | A1 | A2 | A4 | A28 | A8 |
| | θ=6π/5 | A6 | A27 | A28 | A5 | A29 | A1 | A2 | A26 | A31 | A8 | A11 | A24 | A18 | A13 | A14 | A17 | A15 | A21 | A22 | A12 | A19 | A23 | A20 | A16 | A7 | A3 | A10 | A25 | A30 | A9 | A0 | A4 |
| | θ=8π/5 | A28 | A3 | A0 | A27 | A8 | A25 | A30 | A11 | A29 | A4 | A7 | A26 | A20 | A13 | A14 | A23 | A21 | A16 | A19 | A22 | A18 | A15 | A12 | A17 | A10 | A1 | A24 | A5 | A6 | A31 | A2 | A9 |
| ((1-φ),1,0) | θ=2π/5 | A26 | A10 | A9 | A29 | A5 | A25 | A30 | A6 | A24 | A3 | A0 | A31 | A17 | A21 | A22 | A18 | A16 | A13 | A14 | A19 | A12 | A20 | A23 | A15 | A4 | A8 | A27 | A1 | A2 | A28 | A11 | A7 |
| | θ=4π/5 | A27 | A0 | A3 | A28 | A25 | A8 | A11 | A30 | A4 | A29 | A26 | A7 | A13 | A20 | A23 | A14 | A16 | A21 | A22 | A19 | A17 | A12 | A15 | A18 | A5 | A24 | A1 | A10 | A9 | A2 | A31 | A6 |
| | θ=6π/5 | A1 | A26 | A29 | A2 | A8 | A24 | A31 | A11 | A5 | A28 | A27 | A6 | A21 | A12 | A15 | A22 | A16 | A20 | A23 | A19 | A13 | A17 | A18 | A14 | A25 | A4 | A10 | A0 | A3 | A9 | A7 | A30 |
| | θ=8π/5 | A10 | A27 | A28 | A9 | A24 | A4 | A7 | A31 | A25 | A2 | A1 | A30 | A20 | A17 | A18 | A23 | A16 | A12 | A15 | A19 | A21 | A13 | A14 | A22 | A8 | A5 | A0 | A26 | A29 | A3 | A6 | A11 |
| (-(1-φ),1,0) | θ=2π/5 | A30 | A8 | A11 | A25 | A26 | A4 | A7 | A29 | A0 | A27 | A28 | A3 | A22 | A16 | A19 | A21 | A12 | A17 | A18 | A15 | A14 | A20 | A23 | A13 | A2 | A24 | A9 | A5 | A6 | A10 | A31 | A1 |
| | θ=4π/5 | A31 | A0 | A3 | A24 | A9 | A26 | A29 | A10 | A30 | A5 | A6 | A25 | A23 | A12 | A15 | A20 | A22 | A17 | A18 | A21 | A19 | A14 | A13 | A16 | A11 | A2 | A27 | A4 | A7 | A28 | A1 | A8 |
| | θ=6π/5 | A1 | A30 | A25 | A2 | A27 | A9 | A10 | A28 | A31 | A4 | A7 | A24 | A13 | A22 | A21 | A14 | A23 | A17 | A18 | A20 | A15 | A19 | A16 | A12 | A3 | A11 | A5 | A26 | A29 | A6 | A8 | A0 |
| | θ=8π/5 | C | A31 | A24 | A11 | A5 | A27 | A28 | A6 | A1 | A26 | A29 | A2 | A16 | A23 | A20 | A19 | A13 | A17 | A18 | A14 | A21 | A15 | A12 | A22 | A25 | A3 | A4 | A9 | A10 | A7 | A0 | A30 |
| (1,φ,(1-φ)) | θ=π | A24 | A11 | A8 | A31 | A28 | A6 | A5 | A27 | A2 | A29 | A26 | A1 | A20 | A19 | A16 | A23 | A14 | A18 | A17 | A13 | A12 | A22 | A21 | A15 | A0 | A30 | A10 | A7 | A4 | A9 | A25 | A3 |
| (1,φ,-(1-φ)) | θ=π | A11 | A25 | A30 | A8 | A7 | A29 | A26 | A4 | A3 | A28 | A27 | A0 | A19 | A21 | A22 | A16 | A15 | A18 | A17 | A12 | A23 | A13 | A14 | A20 | A31 | A10 | A6 | A10 | A9 | A5 | A2 | A24 |
| (1,-φ,(1-φ)) | θ=π | A9 | A29 | A26 | A10 | A30 | A6 | A5 | A25 | A31 | A0 | A3 | A24 | A22 | A18 | A17 | A21 | A19 | A14 | A13 | A16 | A23 | A15 | A12 | A20 | A11 | A7 | A2 | A28 | A27 | A11 | A4 | A8 |
| (1,-φ,-(1-φ)) | θ=π | A28 | A9 | A10 | A27 | A7 | A31 | A24 | A4 | A30 | A1 | A2 | A25 | A18 | A23 | A20 | A17 | A19 | A15 | A12 | A16 | A14 | A22 | A21 | A13 | A6 | A11 | A29 | A3 | A0 | A26 | A8 | A5 |
| (φ,(1-φ),1) | θ=π | A25 | A2 | A1 | A30 | A10 | A28 | A27 | A9 | A24 | A7 | A4 | A31 | A21 | A14 | A13 | A22 | A20 | A18 | A17 | A23 | A16 | A12 | A15 | A19 | A8 | A0 | A29 | A6 | A5 | A26 | A3 | A11 |
| (φ,-(1-φ),1) | θ=π | A3 | A28 | A27 | A0 | A11 | A30 | A25 | A8 | A7 | A26 | A29 | A4 | A23 | A14 | A13 | A20 | A19 | A22 | A21 | A16 | A15 | A18 | A17 | A12 | A31 | A6 | A9 | A2 | A1 | A10 | A5 | A24 |
| (-φ,(1-φ),1) | θ=π | A29 | A2 | A1 | A26 | A31 | A11 | A8 | A24 | A6 | A27 | A28 | A5 | A15 | A22 | A21 | A12 | A19 | A23 | A20 | A16 | A18 | A14 | A13 | A17 | A7 | A30 | A3 | A9 | A10 | A0 | A25 | A4 |
| (-φ,-(1-φ),1) | θ=π | A3 | A24 | A31 | A0 | A29 | A10 | A9 | A26 | A25 | A6 | A5 | A30 | A15 | A20 | A23 | A12 | A21 | A18 | A17 | A22 | A13 | A16 | A19 | A14 | A1 | A8 | A7 | A28 | A27 | A4 | A11 | A2 |
| ((1-φ),1,φ) | θ=π | A5 | A30 | A25 | A6 | A24 | A0 | A3 | A31 | A26 | A10 | A9 | A29 | A16 | A14 | A13 | A19 | A12 | A20 | A23 | A15 | A17 | A22 | A21 | A18 | A4 | A2 | A8 | A28 | A27 | A11 | A1 | A7 |
| ((1-φ),1,-φ) | θ=π | A31 | A4 | A7 | A24 | A1 | A25 | A30 | A2 | A27 | A10 | A9 | A28 | A15 | A16 | A19 | A12 | A13 | A21 | A22 | A14 | A23 | A17 | A18 | A20 | A3 | A5 | A29 | A8 | A11 | A26 | A6 | A0 |
| (-(1-φ),1,φ) | θ=π | A7 | A26 | A29 | A4 | A3 | A27 | A28 | A0 | A11 | A25 | A30 | A8 | A15 | A17 | A18 | A12 | A23 | A13 | A14 | A20 | A19 | A22 | A21 | A16 | A31 | A9 | A1 | A5 | A6 | A2 | A10 | A24 |
| (-(1-φ),1,-φ) | θ=π | A27 | A6 | A5 | A28 | A26 | A2 | A1 | A29 | A11 | A24 | A31 | A8 | A17 | A14 | A13 | A18 | A22 | A12 | A15 | A21 | A23 | A19 | A16 | A20 | A9 | A30 | A4 | A0 | A3 | A7 | A25 | A10 |

Şekil 6.5 $\mathbb{R}^3_{PD}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

**Yardımcı Teorem 6.2** *$(x, y, z)$ noktasını $(-x, -y, -z)$ eşleyen dönüşüm olan orijine göre $\sigma_0$ inversiyonu(noktaya göre yansıma) $\mathbb{R}^3_{DH}$ ün bir izometrisidir.*

Şekil6.6 daki tabloda inversiyon dönüşümü altında birim kürenin köşe noktalarının görüntüleri verilmektedir.

| İnversiyonAltında Nokta Görüntüleri | A0 | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 | A10 | A11 | A12 | A13 | A14 | A15 | A16 | A17 | A18 | A19 | A20 | A21 | A22 | A23 | A24 | A25 | A26 | A27 | A28 | A29 | A30 | A31 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| O=(O,O,O) | A3 | A2 | A1 | A0 | A7 | A6 | A5 | A4 | A11 | A10 | A9 | A8 | A15 | A14 | A13 | A12 | A19 | A18 | A17 | A16 | A23 | A22 | A21 | A20 | A31 | A30 | A29 | A28 | A27 | A26 | A25 | A24 |

Şekil 6.6 $\mathbb{R}^3_{PD}$ de $\sigma_O$ İnversiyonu Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

**Önerme 6.6** *$d_{PD}$ uzaklığını invaryant bırakan orijine göre dönme yansımaların hepsi orijine göre inversiyon dönüşümüne eşittir.*

**İspat** *$r_\theta \in \mathbb{R}_{PD}$, $\Gamma$, $\Delta$ ve $\Pi$ düzlemine dik olan düzlemler olmak üzere bir dönme yansıma $\rho = \sigma_\Pi \sigma_\Delta \sigma_\Gamma = \sigma_\Pi r_\theta$ bileşkesi olarak yazılabilir. O halde dönme ekseni yansıma düzlemine dik olmak zorundadır. $D_1$ ve $D_3$ de verilen dönme eksenlerinden hiçbiri sonuç 5.4 de verilen yansıma düzlemlerine dik olmadığından dolayı Önerme 5.5 den $\Pi$ düzlemi için otuz bir dönme ekseninden on beş durum incelenmelidir. $\Pi$ düzlemi olarak $x = 0$ düzlemini alalım. Bu durumda $r_\theta$ nın birim doğrultu vektörü $(1, 0, 0)$ olmak üzere*

$$\rho : \sigma_\Pi r_\theta(x, y, z) = (-x, ycos\theta - zsin\theta, ysin\theta + zcos\theta)$$

*olarak tanımlıdır. $\rho(A_{20}) = \left(0, \frac{3(7+5\sqrt{5})}{19(1+\sqrt{5})}, \frac{3(9+\sqrt{5})}{19(1+\sqrt{5})}\right)$, $\rho(A_8) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{1+\sqrt{5}}, 1, 0\right)$ ve $\rho(A_{24}) = \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}, \frac{2}{1+\sqrt{5}}, \frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)$ noktaları için*

$$\begin{aligned}
\rho(A_{24}) &= (-\tfrac{\sqrt{5}+1}{2}, \tfrac{\sqrt{5}-1}{2}(\cos\theta - \sin\theta), \tfrac{\sqrt{5}-1}{2}(\cos\theta + \sin\theta)) \\
\rho(A_{20}) &= (0, \tfrac{(3\sqrt{5}+1)}{22}cos\theta - \tfrac{5\sqrt{5}+9}{22}sin\theta, \tfrac{(3\sqrt{5}+1)}{22}sin\theta + \tfrac{5\sqrt{5}+9}{22}cos\theta) \\
\rho(A_8) &= (-\tfrac{\sqrt{5}+1}{6}, -\tfrac{\sqrt{5}+3}{6}sin\theta, \tfrac{\sqrt{5}+3}{6}cos\theta)
\end{aligned}$$

*bulunur. $d_{PD}(\rho(A_{20}), \rho(A_8)) = \frac{44\sqrt{5}-60}{57}$ ve $d_{PD}(\rho(A_8), \rho(A_{24})) = 3 - \sqrt{5}$ dir.*

$$K_1 = \left|\tfrac{11-3\sqrt{5}}{38}\cos\theta + \tfrac{6\sqrt{5}-3}{19}\sin\theta)\right|, L_1 = \left|\tfrac{11-3\sqrt{5}}{38}\sin\theta - \tfrac{6\sqrt{5}-3}{19}\cos\theta\right|, M_1 = \left|\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right|,$$

$$K_2 = \left|\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}\cos\theta + \tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\sin\theta)\right|, L_2 = \left|\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}\sin\theta - \tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\cos\theta\right| \quad ve \quad M_2 = \left|\sqrt{5} - 2\right|$$

*olmak üzere,*

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_1+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{l} L_1, 2L_1+M_1+\omega\left(M_1-K_1\right), \\ L_1+2M_1+2\omega\left(M_1-K_1\right)\end{array}\right\}, \\ L_1+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{l} M_1, 2M_1+K_1+\omega\left(M_1-L_1\right), \\ M_1+2K_1+2\omega\left(K_1-L_1\right)\end{array}\right\}, \\ M_1+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{l} K_1, 2K_1+L_1+\omega\left(L_1-M_1\right), \\ K_1+2L_1+2\omega\left(L_1-M_1\right)\end{array}\right\}\end{array}\right\} = \frac{44\sqrt{5}-60}{57}$$

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_2+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{l} L_2, 2L_2+M_2+\omega\left(M_2-K_2\right), \\ L_2+2M+2\omega\left(M-K_2\right)\end{array}\right\}, \\ L_2+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{l} M_2, 2M_2+K_2+\omega\left(M_2-L_2\right), \\ M_2+2K_2+2\omega\left(K_2-L_2\right)\end{array}\right\}, \\ M_2+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{l} K_2, 2K_2+L_2+\omega\left(L_2-M_2\right), \\ K_2+2L_2+2\omega\left(L_2-M_2\right)\end{array}\right\}\end{array}\right\} = 3-\sqrt{5}$$

*denklemleri ortaya çıkar. Bu denklemler çözülürse* $\theta=\{0,\pi\}$ *elde edilir. Buradan açıkça* $\sigma_{\Pi}r_{\pi}$ *dönüşümünün* $O$ *orijin etrafında* $\sigma_O$ *inversiyonuna karşılık geldiği görülebilir. Bu durumda yeni bir dönme-yansıma yoktur. Benzer şekilde dönme eksenleri bir yansıma düzlemi normali olan* $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,\pm\varphi,\pm(1-\varphi))$, $(\pm(1-\varphi),1,\pm\varphi)$, $(\pm\varphi,\pm(1-\varphi),1)$ *vektörleri içinde aynı sonuç elde edilir.*

Şekil6.7 deki tablo birim kürenin köşe noktalarının ilgili dönme-yansıma dönüşümleri altındaki görüntülerini vermektedir.

| Yansıma Düzlemi Normali Olan Dönme Ekseni Doğrultu Vektörleri | Açılar | A0 | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 | A10 | A11 | A12 | A13 | A14 | A15 | A16 | A17 | A18 | A19 | A20 | A21 | A22 | A23 | A24 | A25 | A26 | A27 | A28 | A29 | A30 | A31 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x=0 | θ=π | A3 | A2 | A1 | A0 | A7 | A6 | A5 | A4 | A11 | A10 | A9 | A8 | A15 | A14 | A13 | A12 | A19 | A18 | A17 | A16 | A23 | A22 | A21 | A20 | A31 | A30 | A29 | A28 | A27 | A26 | A25 | A24 |
| y=0 | θ=π | A3 | A2 | A1 | A0 | A7 | A6 | A5 | A4 | A11 | A10 | A9 | A8 | A15 | A14 | A13 | A12 | A19 | A18 | A17 | A16 | A23 | A22 | A21 | A20 | A31 | A30 | A29 | A28 | A27 | A26 | A25 | A24 |
| z=0 | θ=π | A3 | A2 | A1 | A0 | A7 | A6 | A5 | A4 | A11 | A10 | A9 | A8 | A15 | A14 | A13 | A12 | A19 | A18 | A17 | A16 | A23 | A22 | A21 | A20 | A31 | A30 | A29 | A28 | A27 | A26 | A25 | A24 |
| 1x+φy+(1-φ)z=0 | θ=π | A3 | A2 | A1 | A0 | A7 | A6 | A5 | A4 | A11 | A10 | A9 | A8 | A15 | A14 | A13 | A12 | A19 | A18 | A17 | A16 | A23 | A22 | A21 | A20 | A31 | A30 | A29 | A28 | A27 | A26 | A25 | A24 |
| 1x+φy-(1-φ)z=0 | θ=π | A3 | A2 | A1 | A0 | A7 | A6 | A5 | A4 | A11 | A10 | A9 | A8 | A15 | A14 | A13 | A12 | A19 | A18 | A17 | A16 | A23 | A22 | A21 | A20 | A31 | A30 | A29 | A28 | A27 | A26 | A25 | A24 |
| -1x+φy+(1-φ)z=0 | θ=π | A3 | A2 | A1 | A0 | A7 | A6 | A5 | A4 | A11 | A10 | A9 | A8 | A15 | A14 | A13 | A12 | A19 | A18 | A17 | A16 | A23 | A22 | A21 | A20 | A31 | A30 | A29 | A28 | A27 | A26 | A25 | A24 |
| -1x+φy-(1-φ)z=0 | θ=π | A3 | A2 | A1 | A0 | A7 | A6 | A5 | A4 | A11 | A10 | A9 | A8 | A15 | A14 | A13 | A12 | A19 | A18 | A17 | A16 | A23 | A22 | A21 | A20 | A31 | A30 | A29 | A28 | A27 | A26 | A25 | A24 |
| (1-φ)x+1y+φz=0 | θ=π | A3 | A2 | A1 | A0 | A7 | A6 | A5 | A4 | A11 | A10 | A9 | A8 | A15 | A14 | A13 | A12 | A19 | A18 | A17 | A16 | A23 | A22 | A21 | A20 | A31 | A30 | A29 | A28 | A27 | A26 | A25 | A24 |
| -(1-φ)x+1y+φz=0 | θ=π | A3 | A2 | A1 | A0 | A7 | A6 | A5 | A4 | A11 | A10 | A9 | A8 | A15 | A14 | A13 | A12 | A19 | A18 | A17 | A16 | A23 | A22 | A21 | A20 | A31 | A30 | A29 | A28 | A27 | A26 | A25 | A24 |
| (1-φ)x-1y+φz=0 | θ=π | A3 | A2 | A1 | A0 | A7 | A6 | A5 | A4 | A11 | A10 | A9 | A8 | A15 | A14 | A13 | A12 | A19 | A18 | A17 | A16 | A23 | A22 | A21 | A20 | A31 | A30 | A29 | A28 | A27 | A26 | A25 | A24 |
| -(1-φ)x-1y+φz=0 | θ=π | A3 | A2 | A1 | A0 | A7 | A6 | A5 | A4 | A11 | A10 | A9 | A8 | A15 | A14 | A13 | A12 | A19 | A18 | A17 | A16 | A23 | A22 | A21 | A20 | A31 | A30 | A29 | A28 | A27 | A26 | A25 | A24 |
| φx+(1-φ)y+1z=0 | θ=π | A3 | A2 | A1 | A0 | A7 | A6 | A5 | A4 | A11 | A10 | A9 | A8 | A15 | A14 | A13 | A12 | A19 | A18 | A17 | A16 | A23 | A22 | A21 | A20 | A31 | A30 | A29 | A28 | A27 | A26 | A25 | A24 |
| φx-(1-φ)y+1z=0 | θ=π | A3 | A2 | A1 | A0 | A7 | A6 | A5 | A4 | A11 | A10 | A9 | A8 | A15 | A14 | A13 | A12 | A19 | A18 | A17 | A16 | A23 | A22 | A21 | A20 | A31 | A30 | A29 | A28 | A27 | A26 | A25 | A24 |
| φx+(1-φ)y-1z=0 | θ=π | A3 | A2 | A1 | A0 | A7 | A6 | A5 | A4 | A11 | A10 | A9 | A8 | A15 | A14 | A13 | A12 | A19 | A18 | A17 | A16 | A23 | A22 | A21 | A20 | A31 | A30 | A29 | A28 | A27 | A26 | A25 | A24 |
| φx+(1-φ)y-1z=0 | θ=π | A3 | A2 | A1 | A0 | A7 | A6 | A5 | A4 | A11 | A10 | A9 | A8 | A15 | A14 | A13 | A12 | A19 | A18 | A17 | A16 | A23 | A22 | A21 | A20 | A31 | A30 | A29 | A28 | A27 | A26 | A25 | A24 |

Şekil 6.7 $\mathbb{R}^3_{PD}$ de Dönme Yansıma Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

**Önerme 6.7** *$d_{PD}$- uzaklığını koruyan orijine göre kırk dört dönme inversiyon vardır.*

**İspat** *$r_\theta \in \mathbb{R}_{PD}$ olmak üzere, bir dönme inversiyon $\rho = \sigma_O\sigma_\Delta\sigma_\Gamma = \sigma_O r_\theta$ bileşkesi olarak yazılabilir. O halde dönme eksenin yansıma düzlemine dik olmak zorundadır. Böylece önerme 5.5 den otuz bir dönme ekseni için ispat verilmelidir.*

*$r_\theta$, dönme ekseni $(1,(1-\varphi),0)$ dönme eksenine paralel ise $\left(\frac{1}{\sqrt{2-2\varphi+\varphi^2}}, \frac{1-\varphi}{\sqrt{2-2\varphi+\varphi^2}}, 0\right)$ birim normal yön vektörü olur. Bu durumda*

$$\rho(x,y,z) = \sigma_O r_\theta = \begin{pmatrix} -\cos\theta x + \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\sin\theta y - \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\sin\theta z, \\ -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\sin\theta x - (\cos\theta + \frac{50+10\sqrt{5}}{100}(1-\cos\theta)y - \frac{\sqrt{5}}{5}(1-\cos\theta)z, \\ \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\sin\theta x - \frac{\sqrt{5}}{5}(1-\cos\theta)y - (\cos\theta + \frac{50-10\sqrt{5}}{100}(1-\cos\theta)z \end{pmatrix}$$

*olur.* $\rho(A_{20}) = \left(0, \frac{3(7+5\sqrt{5})}{19(1+\sqrt{5})}, \frac{3(9+\sqrt{5})}{19(1+\sqrt{5})}\right)$, $\rho(A_8) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{1+\sqrt{5}}, 1, 0\right)$ *ve* $\rho(A_{24}) = \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}, \frac{2}{1+\sqrt{5}}, \frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)$ *için* $\rho(A_8), \rho(A_{24}), \rho(A_{20})$ *hesaplanıp* $d_{PD}(\rho(A_{20}),\ \rho(A_8)) = \frac{44\sqrt{5}-60}{57}$ *ve* $d_{PD}(\rho(A_8), \rho(A_{24})) = 3-\sqrt{5}$ *ifadelerinde yerine yazılırsa,*

$$K_1 = \left|\frac{31-5\sqrt{5}}{114}\sqrt{3}\sin\theta - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\cos\theta)\right|,$$

$$L_1 = \left|\frac{-10+\sqrt{5}}{19}\cos\theta - \frac{\left(3-\sqrt{5}\right)(1-\cos\theta)}{6} + \frac{\sqrt{5}+9}{38} - \frac{1-\sqrt{5}}{6}\frac{3-\sqrt{5}}{2}\sqrt{3}\sin\theta\right|,$$

$$M_1 = \left|\frac{3\sqrt{5}-11}{19}\cos\theta - \frac{1}{3}(1-\cos\theta) + \frac{3\sqrt{5}+8}{38} + \frac{1-\sqrt{5}}{6}\frac{3-\sqrt{5}}{2}\sqrt{3}\sin\theta\right|,$$

$$K_2 = \left|\frac{\sqrt{5}-1}{12}(2\sqrt{3}(\sqrt{5}-2)\sin\theta) - 2\cos\theta - 4\right|,$$

$$L_2 = \left|\frac{\sqrt{5}-3}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta - \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(-3\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta\right)}{6}\right| \text{ ve}$$

$$M_2 = \left|\frac{2\sqrt{3}\left(1-\sqrt{5}\sin\theta-6(1+\cos\theta)+2\sqrt{5}(1-\cos\theta)\right)}{12} + \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)\right)\sin\theta+\left(1+\sqrt{5}\cos\theta+5-\sqrt{5}\right)}{12}\right|$$

*olmak üzere,*

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_1 + \frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} L_1, 2L_1 + M_1 + \omega(M_1 - K_1), \\ L_1 + 2M_1 + 2\omega(M_1 - K_1) \end{array}\right\}, \\ L_1 + \frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} M_1, 2M_1 + K_1 + \omega(M_1 - L_1), \\ M_1 + 2K_1 + 2\omega(K_1 - L_1) \end{array}\right\}, \\ M_1 + \frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} K_1, 2K_1 + L_1 + \omega(L_1 - M_1), \\ K_1 + 2L_1 + 2\omega(L_1 - M_1) \end{array}\right\} \end{array}\right\} = \frac{44\sqrt{5}-60}{57}$$

$$\max\left\{\begin{array}{c} K_2+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} L_2,2L_2+M_2+\omega\left(M_2-K_2\right),\\ L_2+2M+2\omega\left(M-K_2\right)\end{array}\right\},\\ L_2+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} M_2,2M_2+K_2+\omega\left(M_2-L_2\right),\\ M_2+2K_2+2\omega\left(K_2-L_2\right)\end{array}\right\},\\ M_2+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} K_2,2K_2+L_2+\omega\left(L_2-M_2\right),\\ K_2+2L_2+2\omega\left(L_2-M_2\right)\end{array}\right\}\end{array}\right\} = 3-\sqrt{5}$$

*denklemleri ortaya çıkar. Bu denklemler çözülür ise* $\theta=\left\{\frac{2\pi}{5},\frac{4\pi}{5},\frac{6\pi}{5},\frac{8\pi}{5}\right\}$ *elde edilir. Benzer şekilde, eğer l nin yön vektörü*

$$\left(\pm(1-\varphi),0,1\right),\left(1,\pm(1-\varphi),0\right),\left(0,1,\pm(1-\varphi)\right)$$

*ise* $\theta=\left\{\frac{2\pi}{5},\frac{4\pi}{5},\frac{6\pi}{5},\frac{8\pi}{5}\right\}$ *olur.*

$r_\theta$, *dönme ekseni* $(1,1,1)$ *doğrultulu doğru dönme eksenine paralel ise* $r_\theta$ *nın birim normal yön vektörü* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olur. Bu durumda*

$$\rho(x,y,z)=\sigma_O r_\theta=\begin{pmatrix} -x\left[\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\theta\right]-y\left[\frac{(1-\cos\theta)}{3}-\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right]-z\left[\frac{(1-\cos\theta)}{3}+\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right],\\ -x\left[\frac{(1-\cos\theta)}{3}+\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right]-y\left[\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\theta\right]-z\left[\frac{(1-\cos\theta)}{3}-\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right],\\ -x\left[\frac{(1-\cos\theta)}{3}-\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right]-y\left[\frac{(1-\cos\theta)}{3}+\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right]-z\left[\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\theta\right]\end{pmatrix}$$

*şeklinde tanımlanır.* $\rho\left(A_{20}\right)=\left(0,\frac{3(7+5\sqrt{5})}{19(1+\sqrt{5})},\frac{3(9+\sqrt{5})}{19(1+\sqrt{5})}\right)$, $\rho\left(A_8\right)=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{1+\sqrt{5}},1,0\right)$ *ve* $\rho\left(A_{24}\right)=\left(\frac{2}{1+\sqrt{5}},\frac{2}{1+\sqrt{5}},\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)$ *için* $\rho\left(A_8\right),\rho\left(A_{24}\right),\rho\left(A_{20}\right)$ *hesaplanıp* $d_{PD}(\rho\left(A_{20}\right),\ \rho\left(A_8\right))=\frac{44\sqrt{5}-60}{57}$*ve* $d_{PD}(\rho(A_8),\rho(A_{24}))=3-\sqrt{5}$ *ifadelerinde yerine yazılırsa,*

$$K_1=\left|\tfrac{\sqrt{5}-3}{2}\left(\tfrac{1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)+\tfrac{3\sqrt{5}-11}{38}\left(\tfrac{2\cos\theta+1}{3}\right)+\tfrac{6\sqrt{5}-3}{19}\left(\tfrac{1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)\right|,$$

$$L_1=\left|\tfrac{\sqrt{5}-3}{2}\left(\tfrac{2\cos\theta+1}{3}\right)+\tfrac{3\sqrt{5}-11}{38}\left(\tfrac{1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)+\tfrac{6\sqrt{5}-3}{19}\left(\tfrac{1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)\right|,$$

$$M_1=\left|\tfrac{\sqrt{5}-3}{2}\left(\tfrac{1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)+\tfrac{3\sqrt{5}-11}{38}\left(\tfrac{1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)+\tfrac{6\sqrt{5}-3}{19}\left(\tfrac{2\cos\theta+1}{3}\right)\right|,$$

$$K_2=\left|\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\tfrac{1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)+\tfrac{\sqrt{5}-3}{2}\left(\tfrac{2\cos\theta+1}{3}\right)+\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\tfrac{1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)\right|,$$

$$L_2=\left|\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\tfrac{2\cos\theta+1}{3}\right)+\tfrac{\sqrt{5}-3}{2}\left(\tfrac{1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)+\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\tfrac{1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)\right| \text{ ve}$$

$M_2 = \left|\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\frac{1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)+\frac{\sqrt{5}-3}{2}\left(\frac{1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\frac{2\cos\theta+1}{3}\right)\right|$ *olmak üzere,*

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_1+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} L_1, 2L_1+M_1+\omega\left(M_1-K_1\right), \\ L_1+2M_1+2\omega\left(M_1-K_1\right)\end{array}\right\}, \\ L_1+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} M_1, 2M_1+K_1+\omega\left(M_1-L_1\right), \\ M_1+2K_1+2\omega\left(K_1-L_1\right)\end{array}\right\}, \\ M_1+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} K_1, 2K_1+L_1+\omega\left(L_1-M_1\right), \\ K_1+2L_1+2\omega\left(L_1-M_1\right)\end{array}\right\}\end{array}\right\} = \frac{44\sqrt{5}-60}{57}$$

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_2+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} L_2, 2L_2+M_2+\omega\left(M_2-K_2\right), \\ L_2+2M+2\omega\left(M-K_2\right)\end{array}\right\}, \\ L_2+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} M_2, 2M_2+K_2+\omega\left(M_2-L_2\right), \\ M_2+2K_2+2\omega\left(K_2-L_2\right)\end{array}\right\}, \\ M_2+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} K_2, 2K_2+L_2+\omega\left(L_2-M_2\right), \\ K_2+2L_2+2\omega\left(L_2-M_2\right)\end{array}\right\}\end{array}\right\} = 3-\sqrt{5}$$

*denklemleri bulunur. Bu denklemler çözülür ise* $\theta = \{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$ *elde edilir. Benzer şekilde, eğer l nin yön vektörü*

$$(-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1),(\pm(2-\varphi),1,0),(0,\pm(2-\varphi),1),(1,0\pm(2-\varphi))$$

*ise* $\theta = \{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$ *olur.*

$r_\theta$, *dönme ekseni* $(1,0,0)$ *doğrultulu doğru ise birim normal yön vektörü* $(1,0,0)$ *olur. Bu durumda,*

$$\rho(x,y,z) = \sigma_O r_\theta(x,y,z) = (-x, -y\cos\theta + z\sin\theta, -y\sin\theta - z\cos\theta)$$

*şeklinde tanımlanır.* $\rho\left(A_{20}\right) = \left(0, \frac{3(7+5\sqrt{5})}{19(1+\sqrt{5})}, \frac{3(9+\sqrt{5})}{19(1+\sqrt{5})}\right)$, $\rho\left(A_8\right) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{1+\sqrt{5}}, 1, 0\right)$ *ve* $\rho\left(A_{24}\right) = \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}, \frac{2}{1+\sqrt{5}}, \frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)$ *için* $\rho\left(A_8\right), \rho\left(A_{24}\right), \rho\left(A_{20}\right)$ *hesaplanıp* $d_{PD}(\rho\left(A_{20}\right), \rho\left(A_8\right)) = \frac{44\sqrt{5}-60}{57}$*ve* $d_{PD}(\rho(A_8), \rho(A_{24})) = 3-\sqrt{5}$ *ifadelerinde yerine yazılırsa,*

$$K_1 = \left|\frac{3\sqrt{5}-11}{38}\cos\theta - \frac{6\sqrt{5}-3}{19}\sin\theta\right|, L_1 = \left|\frac{3\sqrt{5}-11}{38}\sin\theta + \frac{6\sqrt{5}-3}{19}\cos\theta\right|, M_1 = \left|\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right|,$$

$K_2=\left|\frac{\sqrt{5}-3}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\sin\theta\right|, L_2=\left|\frac{\sqrt{5}-3}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cos\theta\right|$ *ve* $M_2=\left|\sqrt{5}-2\right|$ *olmak üzere,*

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_1+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} L_1, 2L_1+M_1+\omega\left(M_1-K_1\right), \\ L_1+2M_1+2\omega\left(M_1-K_1\right)\end{array}\right\}, \\ L_1+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} M_1, 2M_1+K_1+\omega\left(M_1-L_1\right), \\ M_1+2K_1+2\omega\left(K_1-L_1\right)\end{array}\right\}, \\ M_1+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} K_1, 2K_1+L_1+\omega\left(L_1-M_1\right), \\ K_1+2L_1+2\omega\left(L_1-M_1\right)\end{array}\right\}\end{array}\right\} = \frac{44\sqrt{5}-60}{57}$$

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_2+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} L_2, 2L_2+M_2+\omega\left(M_2-K_2\right), \\ L_2+2M+2\omega\left(M-K_2\right)\end{array}\right\}, \\ L_2+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} M_2, 2M_2+K_2+\omega\left(M_2-L_2\right), \\ M_2+2K_2+2\omega\left(K_2-L_2\right)\end{array}\right\}, \\ M_2+\frac{\omega}{3}\max\left\{\begin{array}{c} K_2, 2K_2+L_2+\omega\left(L_2-M_2\right), \\ K_2+2L_2+2\omega\left(L_2-M_2\right)\end{array}\right\}\end{array}\right\} = 3-\sqrt{5}$$

*denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülür ise* $\theta=\{0,\pi\}$ *elde edilir. Fakat* $\theta=\pi$ *için hesaplamalar yapıldığında* $\sigma_o r_\pi$ *dönüşümünün* $x=0$ *düzlemine göre yansıma hareketine karşılık geldiği görülmektedir. Benzer şekilde, eğer l nin yön vektörü*

$$(0,1,0),(0,0,1),(1,\pm\varphi,\pm(1-\varphi)),(\pm(1-\varphi),1,\pm\varphi),(\pm\varphi,\pm(1-\varphi),1)$$

*ise* $\theta=\{0,\pi\}$ *bulunur. Eğer* $\theta=\pi$ *için dönme ekseni doğrultu vektörü bu vektöre paralel olacak şekilde alınır ve dönme -inversiyon hareketi yapılırsa benzer şekilde tespit edilen önerme 5.4 de tespit edilen bir düzleme göre yansıma hareketleri bulunur. Yani bu durumda yeni bir hareket olacak şekilde dönme-inversiyon yoktur.*

Şekil6.8 deki tablo birim kürenin köşe noktalarının ilgili dönme-inversion dönüşümleri altındaki görüntülerini verir.

| Dönme Ekseni Doğrultu Vektörleri | Açılar | A0 | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 | A10 | A11 | A12 | A13 | A14 | A15 | A16 | A17 | A18 | A19 | A20 | A21 | A22 | A23 | A24 | A25 | A26 | A27 | A28 | A29 | A30 | A31 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1,0,0) | θ=π | A0 | A1 | A2 | A3 | A6 | A7 | A4 | A5 | A10 | A11 | A8 | A9 | A14 | A15 | A12 | A13 | A18 | A19 | A16 | A17 | A20 | A21 | A22 | A23 | A28 | A29 | A30 | A31 | A24 | A25 | A26 | A27 |
| (0,1,0) | θ=π | A2 | A3 | A0 | A1 | A4 | A5 | A6 | A7 | A9 | A8 | A11 | A10 | A12 | A13 | A14 | A15 | A17 | A16 | A19 | A18 | A22 | A23 | A20 | A21 | A26 | A27 | A24 | A25 | A30 | A31 | A28 | A29 |
| (0,0,1) | θ=π | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A7 | A6 | A8 | A9 | A10 | A11 | A13 | A12 | A15 | A14 | A16 | A17 | A18 | A19 | A21 | A20 | A23 | A22 | A25 | A24 | A27 | A26 | A29 | A28 | A31 | A30 |
| (1,1,1) | θ=2π/3 | A7 | A5 | A6 | A4 | A11 | A9 | A10 | A8 | A3 | A2 | A1 | A0 | A19 | A17 | A18 | A16 | A23 | A22 | A21 | A20 | A15 | A13 | A14 | A12 | A31 | A27 | A30 | A26 | A29 | A25 | A28 | A24 |
| | θ=4π/3 | A11 | A10 | A9 | A8 | A3 | A1 | A2 | A0 | A7 | A5 | A6 | A4 | A23 | A21 | A22 | A20 | A15 | A13 | A14 | A12 | A19 | A18 | A17 | A16 | A31 | A29 | A27 | A25 | A30 | A28 | A26 | A24 |
| (-1,1,1) | θ=2π/3 | A9 | A8 | A11 | A10 | A2 | A0 | A3 | A1 | A4 | A6 | A5 | A7 | A22 | A20 | A23 | A21 | A12 | A14 | A13 | A15 | A17 | A16 | A19 | A18 | A16 | A24 | A30 | A28 | A27 | A25 | A31 | A29 |
| | θ=4π/3 | A5 | A7 | A4 | A6 | A8 | A10 | A9 | A11 | A1 | A0 | A3 | A2 | A16 | A18 | A17 | A19 | A21 | A20 | A23 | A22 | A13 | A15 | A12 | A14 | A25 | A29 | A24 | A28 | A27 | A31 | A26 | A30 |
| (1,-1,1) | θ=2π/3 | A8 | A9 | A10 | A11 | A1 | A3 | A0 | A2 | A5 | A7 | A4 | A6 | A21 | A23 | A20 | A22 | A13 | A15 | A12 | A14 | A16 | A17 | A18 | A19 | A25 | A27 | A29 | A31 | A24 | A26 | A28 | A30 |
| | θ=4π/3 | A6 | A4 | A7 | A5 | A10 | A8 | A11 | A9 | A0 | A1 | A2 | A3 | A18 | A16 | A19 | A17 | A20 | A21 | A22 | A23 | A14 | A12 | A15 | A13 | A28 | A24 | A29 | A25 | A30 | A26 | A31 | A27 |
| (1,1,-1) | θ=2π/3 | A10 | A11 | A8 | A9 | A0 | A2 | A1 | A3 | A6 | A4 | A7 | A5 | A20 | A22 | A21 | A23 | A14 | A12 | A15 | A13 | A18 | A19 | A16 | A17 | A28 | A30 | A24 | A26 | A29 | A21 | A25 | A27 |
| | θ=4π/3 | A4 | A6 | A5 | A7 | A9 | A11 | A8 | A10 | A2 | A3 | A0 | A1 | A17 | A19 | A16 | A18 | A22 | A23 | A20 | A21 | A12 | A14 | A13 | A15 | A26 | A30 | A27 | A31 | A24 | A28 | A25 | A29 |
| (0,(2-φ),1) | θ=2π/3 | A3 | A24 | A31 | A0 | A9 | A26 | A29 | A10 | A5 | A30 | A25 | A6 | A23 | A12 | A15 | A20 | A17 | A22 | A21 | A18 | A13 | A16 | A19 | A14 | A27 | A4 | A11 | A2 | A1 | A8 | A7 | A28 |
| | θ=4π/3 | A3 | A28 | A27 | A0 | A25 | A8 | A11 | A30 | A29 | A4 | A7 | A26 | A13 | A20 | A23 | A14 | A21 | A16 | A19 | A22 | A15 | A18 | A17 | A12 | A1 | A10 | A5 | A24 | A31 | A6 | A9 | A2 |
| (0,-(2-φ),1) | θ=2π/3 | A29 | A2 | A1 | A26 | A8 | A24 | A31 | A11 | A28 | A5 | A6 | A27 | A21 | A12 | A15 | A22 | A20 | A16 | A19 | A23 | A18 | A14 | A13 | A17 | A10 | A0 | A25 | A4 | A7 | A30 | A3 | A9 |
| | θ=4π/3 | A25 | A2 | A1 | A30 | A27 | A9 | A10 | A28 | A4 | A31 | A24 | A7 | A13 | A22 | A21 | A14 | A17 | A23 | A20 | A18 | A16 | A12 | A15 | A19 | A5 | A26 | A3 | A11 | A8 | A0 | A29 | A6 |
| ((2-φ),1,0) | θ=2π/3 | A6 | A27 | A28 | A5 | A2 | A26 | A29 | A1 | A11 | A24 | A31 | A8 | A14 | A17 | A18 | A13 | A22 | A12 | A15 | A21 | A19 | A23 | A20 | A16 | A30 | A9 | A0 | A4 | A7 | A3 | A10 | A25 |
| | θ=4π/3 | A26 | A7 | A4 | A29 | A27 | A3 | A0 | A28 | A11 | A25 | A30 | A8 | A17 | A15 | A12 | A18 | A23 | A13 | A14 | A20 | A22 | A19 | A16 | A21 | A9 | A31 | A5 | A1 | A2 | A6 | A24 | A10 |
| (-(2-φ),1,0) | θ=2π/3 | A4 | A31 | A24 | A7 | A25 | A1 | A2 | A30 | A27 | A10 | A9 | A28 | A16 | A15 | A12 | A19 | A13 | A21 | A22 | A14 | A17 | A23 | A20 | A18 | A5 | A3 | A8 | A29 | A26 | A11 | A0 | A6 |
| | θ=4π/3 | A30 | A5 | A6 | A25 | A0 | A24 | A31 | A3 | A26 | A10 | A9 | A29 | A14 | A16 | A19 | A13 | A12 | A20 | A23 | A15 | A22 | A17 | A18 | A21 | A2 | A4 | A28 | A8 | A11 | A27 | A7 | A1 |
| (1,0,(2-φ)) | θ=2π/3 | A10 | A27 | A28 | A9 | A7 | A31 | A24 | A4 | A1 | A30 | A25 | A2 | A18 | A23 | A20 | A17 | A15 | A19 | A16 | A12 | A21 | A13 | A14 | A22 | A29 | A3 | A6 | A11 | A8 | A5 | A0 | A26 |
| | θ=4π/3 | A30 | A8 | A11 | A25 | A7 | A29 | A26 | A4 | A28 | A3 | A0 | A27 | A19 | A21 | A22 | A16 | A18 | A15 | A12 | A17 | A14 | A20 | A23 | A13 | A6 | A10 | A31 | A1 | A2 | A24 | A9 | A5 |
| (1,0,-(2-φ)) | θ=2π/3 | A26 | A10 | A9 | A29 | A30 | A6 | A5 | A25 | A0 | A31 | A24 | A3 | A22 | A18 | A17 | A21 | A14 | A19 | A16 | A13 | A12 | A20 | A23 | A15 | A2 | A28 | A11 | A7 | A4 | A8 | A27 | A1 |
| | θ=4π/3 | A8 | A31 | A24 | A11 | A28 | A6 | A5 | A27 | A29 | A2 | A1 | A26 | A20 | A19 | A16 | A23 | A18 | A14 | A13 | A17 | A21 | A15 | A12 | A22 | A10 | A7 | A0 | A30 | A25 | A3 | A4 | A9 |
| (0,1,(1-φ)) | θ=2π/5 | A31 | A4 | A7 | A24 | A30 | A2 | A1 | A25 | A9 | A28 | A27 | A10 | A19 | A12 | A15 | A16 | A22 | A14 | A13 | A21 | A23 | A17 | A18 | A20 | A11 | A26 | A6 | A0 | A3 | A5 | A29 | A8 |
| | θ=4π/5 | A11 | A25 | A30 | A8 | A26 | A4 | A7 | A29 | A27 | A0 | A10 | A28 | A22 | A16 | A15 | A21 | A17 | A12 | A15 | A18 | A23 | A13 | A14 | A20 | A9 | A5 | A2 | A24 | A31 | A1 | A6 | A10 |
| | θ=6π/5 | A9 | A29 | A26 | A10 | A5 | A25 | A30 | A6 | A3 | A24 | A31 | A0 | A17 | A21 | A22 | A18 | A13 | A16 | A19 | A14 | A23 | A15 | A12 | A20 | A27 | A1 | A4 | A8 | A11 | A7 | A2 | A28 |
| | θ=8π/5 | A27 | A6 | A5 | A28 | A1 | A29 | A26 | A2 | A31 | A8 | A11 | A24 | A13 | A18 | A17 | A14 | A15 | A21 | A22 | A12 | A23 | A19 | A16 | A20 | A3 | A7 | A25 | A10 | A9 | A30 | A4 | A0 |
| (0,1,-(1-φ)) | θ=2π/5 | A7 | A26 | A29 | A4 | A28 | A0 | A3 | A27 | A30 | A8 | A11 | A25 | A18 | A12 | A15 | A17 | A14 | A20 | A23 | A13 | A19 | A22 | A21 | A16 | A6 | A2 | A10 | A24 | A31 | A9 | A1 | A5 |
| | θ=4π/5 | A28 | A9 | A10 | A27 | A24 | A4 | A7 | A31 | A2 | A25 | A30 | A1 | A20 | A17 | A18 | A23 | A12 | A16 | A19 | A15 | A14 | A22 | A21 | A13 | A0 | A26 | A8 | A5 | A6 | A11 | A29 | A3 |
| | θ=6π/5 | A24 | A11 | A8 | A31 | A5 | A27 | A28 | A6 | A26 | A1 | A2 | A29 | A16 | A23 | A20 | A19 | A17 | A13 | A14 | A18 | A12 | A22 | A21 | A15 | A4 | A9 | A25 | A3 | A0 | A30 | A10 | A7 |
| | θ=8π/5 | A5 | A30 | A25 | A6 | A3 | A31 | A24 | A0 | A9 | A29 | A26 | A10 | A13 | A19 | A16 | A14 | A23 | A15 | A12 | A20 | A17 | A22 | A21 | A18 | A27 | A11 | A1 | A7 | A4 | A2 | A8 | A28 |
| ((1-φ),0,1) | θ=2π/5 | A1 | A26 | A29 | A2 | A31 | A11 | A8 | A24 | A27 | A6 | A5 | A28 | A15 | A22 | A21 | A12 | A23 | A19 | A16 | A20 | A13 | A17 | A18 | A14 | A3 | A9 | A15 | A30 | A25 | A4 | A10 | A0 |
| | θ=4π/5 | A29 | A4 | A7 | A26 | A31 | A27 | A28 | A0 | A25 | A11 | A8 | A30 | A15 | A17 | A18 | A12 | A13 | A23 | A20 | A14 | A21 | A16 | A19 | A22 | A1 | A5 | A31 | A9 | A10 | A24 | A6 | A2 |
| | θ=6π/5 | A7 | A24 | A31 | A4 | A1 | A25 | A30 | A2 | A10 | A27 | A28 | A9 | A15 | A16 | A19 | A12 | A21 | A13 | A14 | A22 | A18 | A20 | A23 | A17 | A29 | A8 | A3 | A5 | A6 | A0 | A11 | A26 |
| | θ=8π/5 | A31 | A0 | A31 | A24 | A29 | A10 | A9 | A26 | A6 | A25 | A30 | A5 | A15 | A20 | A23 | A12 | A18 | A21 | A22 | A17 | A19 | A14 | A13 | A16 | A7 | A28 | A1 | A8 | A11 | A2 | A27 | A4 |
| (-(1-φ),0,1) | θ=2π/5 | A1 | A30 | A25 | A2 | A10 | A28 | A27 | A9 | A7 | A24 | A31 | A4 | A21 | A14 | A13 | A22 | A18 | A20 | A23 | A17 | A15 | A19 | A16 | A12 | A29 | A6 | A8 | A0 | A3 | A11 | A5 | A26 |
| | θ=4π/5 | A25 | A6 | A5 | A30 | A24 | A0 | A3 | A31 | A10 | A26 | A29 | A9 | A16 | A14 | A13 | A19 | A20 | A12 | A15 | A23 | A21 | A18 | A17 | A22 | A8 | A28 | A4 | A2 | A1 | A7 | A27 | A11 |
| | θ=6π/5 | A5 | A28 | A27 | A6 | A26 | A2 | A1 | A29 | A24 | A11 | A8 | A31 | A17 | A14 | A13 | A18 | A12 | A22 | A21 | A15 | A16 | A20 | A23 | A19 | A4 | A0 | A9 | A30 | A25 | A10 | A3 | A7 |
| | θ=8π/5 | A27 | A0 | A3 | A28 | A11 | A30 | A25 | A8 | A26 | A7 | A4 | A29 | A23 | A14 | A13 | A20 | A22 | A19 | A16 | A21 | A17 | A12 | A15 | A18 | A9 | A2 | A31 | A6 | A5 | A24 | A1 | A10 |
| ((1-φ),1,0) | θ=2π/5 | A29 | A9 | A10 | A26 | A6 | A30 | A25 | A5 | A31 | A0 | A3 | A24 | A18 | A22 | A21 | A17 | A19 | A14 | A13 | A16 | A15 | A23 | A20 | A12 | A7 | A11 | A28 | A2 | A11 | A27 | A8 | A4 |
| | θ=4π/5 | A28 | A3 | A0 | A27 | A30 | A11 | A8 | A25 | A7 | A26 | A29 | A4 | A14 | A23 | A20 | A13 | A19 | A22 | A21 | A16 | A18 | A15 | A12 | A17 | A6 | A31 | A2 | A9 | A10 | A1 | A24 | A5 |
| | θ=6π/5 | A2 | A29 | A26 | A1 | A11 | A31 | A24 | A8 | A6 | A27 | A28 | A5 | A22 | A15 | A12 | A21 | A19 | A23 | A20 | A16 | A14 | A18 | A17 | A13 | A30 | A7 | A9 | A3 | A0 | A10 | A4 | A25 |
| | θ=8π/5 | A9 | A28 | A27 | A10 | A31 | A7 | A4 | A24 | A30 | A1 | A2 | A25 | A23 | A18 | A17 | A20 | A19 | A15 | A12 | A16 | A22 | A14 | A13 | A21 | A11 | A6 | A3 | A29 | A26 | A0 | A5 | A8 |
| (-(1-φ),1,0) | θ=2π/5 | A25 | A11 | A8 | A30 | A29 | A7 | A4 | A26 | A3 | A28 | A27 | A0 | A21 | A19 | A16 | A22 | A15 | A18 | A17 | A12 | A13 | A23 | A20 | A14 | A1 | A31 | A10 | A6 | A5 | A9 | A24 | A2 |
| | θ=4π/5 | A24 | A3 | A0 | A31 | A10 | A29 | A26 | A9 | A25 | A6 | A5 | A30 | A20 | A15 | A12 | A23 | A21 | A18 | A17 | A22 | A16 | A13 | A14 | A19 | A8 | A1 | A28 | A7 | A4 | A27 | A2 | A11 |
| | θ=6π/5 | A2 | A25 | A30 | A1 | A28 | A10 | A9 | A27 | A24 | A7 | A4 | A31 | A14 | A21 | A22 | A13 | A20 | A18 | A17 | A23 | A12 | A16 | A19 | A15 | A0 | A8 | A6 | A29 | A26 | A5 | A11 | A3 |
| | θ=8π/5 | A11 | A24 | A31 | A8 | A6 | A28 | A27 | A5 | A2 | A29 | A26 | A1 | A19 | A20 | A23 | A16 | A14 | A18 | A17 | A13 | A22 | A12 | A15 | A21 | A30 | A0 | A7 | A10 | A9 | A4 | A30 | A25 |
| (1,φ,(1-φ)) | θ=π | A26 | A1 | A2 | A29 | A24 | A8 | A11 | A31 | A5 | A28 | A27 | A6 | A12 | A21 | A22 | A15 | A16 | A20 | A23 | A19 | A17 | A13 | A14 | A18 | A4 | A25 | A0 | A10 | A9 | A3 | A30 | A7 |
| (1,φ,-(1-φ)) | θ=π | A0 | A31 | A24 | A3 | A26 | A9 | A10 | A29 | A30 | A5 | A6 | A25 | A12 | A23 | A20 | A15 | A22 | A17 | A18 | A21 | A14 | A19 | A16 | A13 | A2 | A11 | A4 | A27 | A28 | A7 | A8 | A1 |
| (1,-φ,(1-φ)) | θ=π | A6 | A25 | A30 | A5 | A31 | A3 | A0 | A24 | A29 | A9 | A10 | A26 | A19 | A13 | A14 | A16 | A15 | A23 | A20 | A12 | A18 | A21 | A22 | A17 | A7 | A1 | A11 | A27 | A28 | A8 | A2 | A4 |
| (1,-φ,-(1-φ)) | θ=π | A24 | A7 | A4 | A31 | A2 | A30 | A25 | A1 | A28 | A9 | A10 | A27 | A12 | A19 | A16 | A15 | A14 | A22 | A21 | A13 | A20 | A18 | A17 | A23 | A0 | A6 | A26 | A11 | A8 | A29 | A5 | A3 |
| (φ,(1-φ),1) | θ=π | A4 | A29 | A26 | A7 | A0 | A28 | A27 | A3 | A8 | A30 | A25 | A11 | A12 | A18 | A17 | A15 | A20 | A14 | A13 | A23 | A16 | A21 | A22 | A19 | A24 | A10 | A2 | A6 | A5 | A1 | A9 | A31 |
| (φ,-(1-φ),1) | θ=π | A28 | A5 | A6 | A27 | A29 | A1 | A2 | A26 | A8 | A31 | A24 | A11 | A18 | A13 | A14 | A17 | A21 | A15 | A12 | A22 | A20 | A16 | A19 | A23 | A10 | A25 | A7 | A3 | A0 | A4 | A30 | A9 |
| (-φ,(1-φ),1) | θ=π | A26 | A1 | A2 | A29 | A24 | A8 | A11 | A31 | A5 | A28 | A27 | A6 | A12 | A21 | A22 | A15 | A16 | A20 | A23 | A19 | A17 | A13 | A14 | A18 | A4 | A25 | A0 | A10 | A9 | A3 | A30 | A7 |
| (-φ,-(1-φ),1) | θ=π | A0 | A31 | A24 | A3 | A26 | A9 | A10 | A29 | A30 | A5 | A6 | A25 | A12 | A23 | A20 | A15 | A22 | A17 | A18 | A21 | A14 | A19 | A16 | A13 | A2 | A11 | A4 | A27 | A28 | A7 | A8 | A1 |
| ((1-φ),1,φ) | θ=π | A6 | A25 | A30 | A5 | A31 | A3 | A0 | A24 | A29 | A9 | A10 | A26 | A19 | A13 | A14 | A16 | A15 | A23 | A20 | A12 | A18 | A21 | A22 | A17 | A7 | A1 | A11 | A27 | A28 | A8 | A2 | A4 |
| ((1-φ),1,-φ) | θ=π | A24 | A7 | A4 | A31 | A2 | A30 | A25 | A1 | A28 | A9 | A10 | A27 | A12 | A19 | A16 | A15 | A14 | A22 | A21 | A13 | A20 | A18 | A17 | A23 | A0 | A6 | A26 | A11 | A8 | A29 | A5 | A3 |
| (-(1-φ),1,φ) | θ=π | A4 | A29 | A26 | A7 | A0 | A28 | A27 | A3 | A8 | A30 | A25 | A11 | A12 | A18 | A17 | A15 | A20 | A14 | A13 | A23 | A16 | A21 | A22 | A19 | A24 | A10 | A2 | A6 | A5 | A1 | A9 | A31 |
| (-(1-φ),1,-φ) | θ=π | A28 | A5 | A6 | A27 | A29 | A1 | A2 | A26 | A8 | A31 | A24 | A11 | A18 | A13 | A14 | A17 | A21 | A15 | A12 | A22 | A20 | A16 | A19 | A23 | A10 | A25 | A7 | A3 | A0 | A4 | A30 | A9 |

Şekil 6.8 $\mathbb{R}^3_{PD}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

Buraya kadar olan kısımda Öklidyen 3-uzayın izometrilerinden hangilerinin $d_{PD}$ metriğini koruduğu bulunmuştur. Daha açıkça Öklidyen 3-uzayın izometrilerinden 15 yansıma, 60 dönme, 44 dönme-inversiyon ve bir inversiyonun $d_{PD}$ metriğini koruduğu gösterilmiştir. Bu tespit edilen elemanlar pentakis dodecahedron Öklidyen simetri grubu

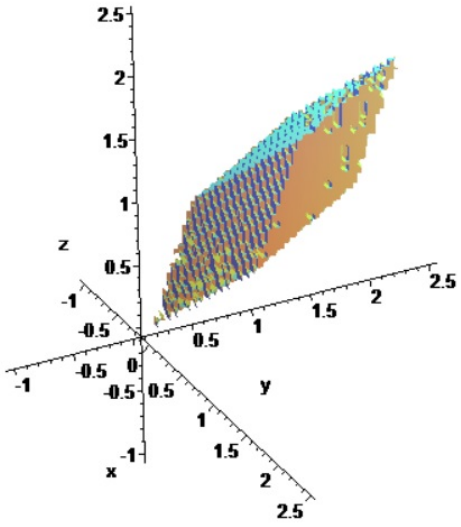
olan $I_h$ (Icosahedral grup) elemanlarıdır. Bu gruba pentakis dodecahedron grup denilsin ve $G(PD)$ ile gösterilsin. Açıkça $G(PD)$, $I_h$ grubuna izomorftur. Bundan sonraki kısımda bu dönüşümlerden başka $d_{PD}$ metriğini koruyan izometrinin olmadığı gösterilecektir. Yani $\mathbb{R}^3_{PD}$ nin tüm izometrilerinin $T(3).G(PD)$ olduğu gösterilecektir.

**Tanım 6.2** *$A = (a_1, a_2, a_3)$ ve $B = (b_1, b_2, b_3)$ $\mathbb{R}^3_{PD}$ uzayında iki farklı nokta olsun. Bu taktirde*

$$\{X \mid d_{PD}(A, X) + d_{PD}(B, X) = d_{PD}(A, B)\}$$

*kümesine $A$, $B$ noktalarının minimum uzaklık kümesi denir ve $[AB]$ ile gösterilir.*

Genel olarak, $[AB]$ kümesi $AB$ köşegenli bir paralelyüz oluşturur. Şekil6.9 da $A = (0, 0, 0)$ ve $B = (0, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3} + 1)$ olmak üzere minimum uzaklık kümesi $(\frac{3-\sqrt{5}}{2} - \frac{3\sqrt{5}+27}{38})y + (1 - \frac{6\sqrt{5}-3}{19})z = 0$, $(\frac{3-\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2})y + (1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2})z = \frac{\sqrt{5}-1}{2}x$, $(\frac{3\sqrt{5}+27}{38} - \frac{\sqrt{5}-1}{2})y + (\frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{\sqrt{5}-1}{2})z = \frac{\sqrt{5}-1}{2}x$ ve bu düzlemlere paralel olup $B$ noktasından geçen düzlemlerin sınırladığı bölgedir.




Şekil 6.9 $\mathbb{R}^3_{PD}$ de Minimum Uzaklık Kümesi

**Önerme 6.8** *$\phi : \mathbb{R}^3_{PD} \to \mathbb{R}^3_{PD}$ bir izometri ve $[AB]$ paralelyüz olsun. O halde*

$$\phi([AB]) = [\phi(A)\phi(B)]$$

*olur.*

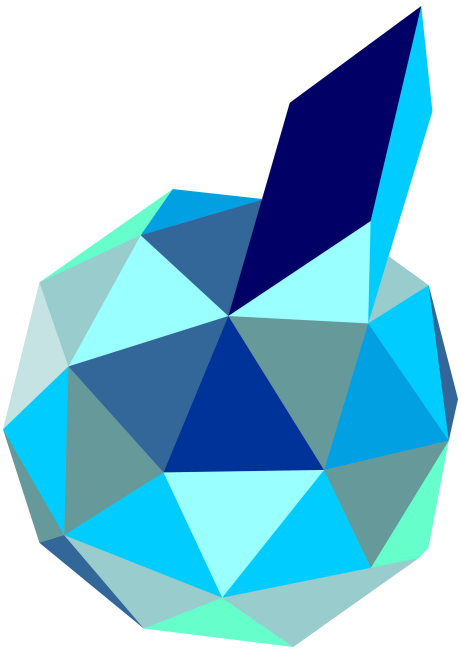
**İspat** *$Y \in \phi([AB])$ olsun.*

$$\begin{aligned} Y \in \phi([AB]) &\iff \exists X \in [AB] \ni Y = \phi(X) \\ &\iff d_{PD}(A,X) + d_{PD}(B,X) = d_{PD}(A,B) \\ &\iff d_{PD}(\phi(A),\phi(X)) + d_{PD}(\phi(B),\phi(X)) = d_{PD}(\phi(A),\phi(B)) \\ &\Leftrightarrow \quad Y = \phi(X) \in [\phi(A)\phi(B)]\,. \end{aligned}$$

**Sonuç 6.6** *$\phi : \mathbb{R}^3_{PD} \to \mathbb{R}^3_{PD}$ bir izometri ve $[AB]$ paralelyüz olsun. Bu durumda $\phi$, $[AB]$ nin köşelerini köşelere dönüştürür ve kenar uzunluklarını korur.*

**Önerme 6.9** *$f : \mathbb{R}^3_{PD} \to \mathbb{R}^3_{PD}$ dönüşümü $f(O) = O$ olacak şekilde bir izometri olsun. Bu taktirde $f \in G(PD)$ olur.*

**İspat** *$O = (0,0,0)$ ve $D = (\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{3\sqrt{5}+65}{38}, \frac{31\sqrt{5}+13}{38})$ olmak üzere $[OD]$ paralelyüzünü gözönüne alalım. Bu paralelyüzün köşe noktalarından üçü $A_0 = (0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1)$, $A_{20} = (0, \frac{3\sqrt{5}+27}{38}, \frac{6\sqrt{5}-3}{19})$, $A_{24} = (\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2})$ olup bu noktalar aynı zamanda merkezil birim pentakis dodecahedron birim küresinin köşe noktalarıdır. Dahası bu üç nokta pentakis dodecahedronun her biri aynı ikizkenar üçgen olan bir yüzünün köşe noktalarıdır.*



Şekil 6.10 $\mathbb{R}^3_{PD}$ de Birim Küre Ve Minimum Uzaklık Kümesi

*$f$ izometrisi $[OD]$ paralelyüzününün köşe noktalarını köşe noktalara dönüştürüp, kenar uzaklıklarını korduğundan ve $f(O) = O$ olduğundan dolayı $A_0$, $A_{20}$ ve $A_{24}$ noktalarını pentakis dodecahedronun yine bir yüzünün köşe noktalarına dönüştürür. Ayrıca bu dönüştürme işlemi gerçekleşirken kenar uzunlukları korunacağından dolayı $i, k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31\}$ olmak üzere $f(A_0) = A_i$ ve de $j \in \{12\ , 13, 14, 14, 15, 16, 7, 18, 19, 20, 21, 22, 23, \}$ ve $A_jA_k$ triakis icosahedron bir kenarı olmak üzere $f(A_{20}) = A_j\ ,\ f(A_{24}) = A_k$ olur.Açıkça ifade edilirse $f$ izometrisi, triakis icosahedron bir yüzünün köşe noktalarını yine bir yüzünün köşe noktalarına dönüştürür. O halde pentakis dodecahedron 60 yüze sahip olduğundan bir yüzün dönüşebileceği 60 yüz ihtimali vardır. Ayrıca kenar uzunlukları korunmak zorunda olduğundan $A_0$ noktası bu yüz üzerinde dönüşebileceği nokta tek olarak belli iken diğer iki köşe noktaları olan $A_{20}$ ve $A_{24}$ için iki farklı ihtimal vardır. Bu taktirde pentakis dodecahedron her bir yüzü için 2 ihtimal olduğundan dolayı bu noktaların dönüşebileceği 120 ihtimal vardır. Bu ihtimaller ise aşağıda tek tek sıralanmış ve her bir dönüşümün önceden tespit edilen hareketlerden hangisine karşılık geldiği ifade edilmiştir.*

*1. $f(A_0) = A_0$ ise $f(A_{20}) = A_{20}$ ve $f(A_{24}) = A_{28}$ ise $\Delta : x = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ yansımasıdır.*

*2. $f(A_0) = A_2$ ise $f(A_{20}) = A_{22}$ ve $f(A_{24}) = A_{26}$ ise $\Delta : y = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ yansımasıdır.*

*3. $f(A_0) = A_1$ ise $f(A_{20}) = A_{21}$ ve $f(A_{24}) = A_{25}$ ise $\Delta : z = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ yansımasıdır.*

*4. $f(A_0) = A_{31}$ ise $f(A_{20}) = A_{15}$ ve $f(A_{24}) = A_3$ ise $\Delta : x + \varphi y + (1 - \varphi)z = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ yansımasıdır.*

*5. $f(A_0) = A_8$ ise $f(A_{20}) = A_{20}$ ve $f(A_{24}) = A_{24}$ ise $\Delta : -x + \varphi y + (1 - \varphi)z = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ göre yansımasıdır.*

*6. $f(A_0) = A_{10}$ ise $f(A_{20}) = A_{20}$ ve $f(A_{24}) = A_8$ ise $\Delta : -x + \varphi y + (1 - \varphi)z = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ göre yansımasıdır.*

*7. $f(A_0) = A_{27}$ ise $f(A_{20}) = A_{13}$ ve $f(A_{24}) = A_5$ ise $\Delta : -x + \varphi y - (1 - \varphi)z = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ göre yansımasıdır.*

*8. $f(A_0) = A_{30}$ ise $f(A_{20}) = A_{19}$ ve $f(A_{24}) = A_{11}$ ise $\Delta : (1 - \varphi)x + y + \varphi z = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ göre yansımasıdır.*

*9.* $f(A_0) = A_0$ *ise* $f(A_{20}) = A_{12}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{24}$ *ise* $\Delta : -(1-\varphi)x + y + \varphi z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

*10.* $f(A_0) = A_{26}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{17}$ *ve* $f(A_{24}) = A_4$ *ise* $\Delta : (1-\varphi)x - y + \varphi z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

*11.* $f(A_0) = A_0$ *ise* $f(A_{20}) = A_{14}$ *ve* $f(A_{24}) = A_2$ *ise* $\Delta : -(1-\varphi)x - y + \varphi z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

*12.* $f(A_0) = A_6$ *ise* $f(A_{20}) = A_{18}$ *ve* $f(A_{24}) = A_7$ *ise* $\Delta : \varphi x + (1-\varphi)y + z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

*13.* $f(A_0) = A_{24}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{20}$ *ve* $f(A_{24}) = A_0$ *ise* $\Delta : \varphi x - (1-\varphi)y + z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

*14.* $f(A_0) = A_4$ *ise* $f(A_{20}) = A_{16}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{24}$ *ise* $\Delta : \varphi x + (1-\varphi)y - z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

*15.* $f(A_0) = A_{28}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{20}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{10}$ *ise* $\Delta : \varphi x - (1-\varphi)y - z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

*16.* $f(A_0) = A_3$ *ise* $f(A_{20}) = A_{23}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{27}$ *ise dönme ekseni* $(1,0,0)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*17.* $f(A_0) = A_1$ *ise* $f(A_{20}) = A_{21}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{29}$ *ise dönme ekseni* $(0,1,0)$ *olmak üzere* $f_\pi$ *dönmedir.*

*18.* $f(A_0) = A_2$ *ise* $f(A_{20}) = A_{22}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{30}$*ise dönme ekseni* $(0,0,1)$ *olmak üzere* $f_\pi$ *dönmedir.*

*19.* $f(A_0) = A_4$ *ise* $f(A_{20}) = A_{12}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{24}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*20.* $f(A_0) = A_8$ *ise* $f(A_{20}) = A_{16}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{24}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*21.* $f(A_0) = A_{10}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{18}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{29}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*22.* $f(A_0) = A_6$ *ise* $f(A_{20}) = A_{14}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{30}$*ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$*olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*23.* $f(A_0) = A_{11}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{19}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{30}$*ise dönme eksen* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*24.* $f(A_0) = A_5$ *ise* $f(A_{20}) = A_{13}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{27}$*ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*25.* $f(A_0) = A_9$ *ise* $f(A_{20}) = A_{17}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{27}$*ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*26.* $f(A_0) = A_7$ *ise* $f(A_{20}) = A_{15}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{29}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*27.* $f(A_0) = A_0$ *ise* $f(A_{20}) = A_{14}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{28}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*28.* $f(A_0) = A_0$ *ise* $f(A_{20}) = A_{12}$ *ve* $f(A_{24}) = A_2$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*29.* $f(A_0) = A_{26}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{17}$ *ve* $f(A_{24}) = A_9$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*30.* $f(A_0) = A_{30}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{19}$ *ve* $f(A_{24}) = A_6$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*31.* $f(A_0) = A_5$ *ise* $f(A_{20}) = A_{16}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{25}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*32.* $f(A_0) = A_{29}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{21}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{10}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*33.* $f(A_0) = A_7$ *ise* $f(A_{20}) = A_{18}$ *ve* $f(A_{24}) = A_6$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*34.* $f(A_0) = A_{25}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{21}$ *ve* $f(A_{24}) = A_1$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*35.* $f(A_0) = A_9$ *ise* $f(A_{20}) = A_{22}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{26}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*36.* $f(A_0) = A_{25}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{13}$ *ve* $f(A_{24}) = A_5$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*37.* $f(A_0) = A_{29}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{15}$ *ve* $f(A_{24}) = A_1$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{\sqrt{5}+-1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*38.* $f(A_0) = A_{11}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{22}$ *ve* $f(A_{24}) = A_9$*ise dönme ekseni* $(-\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*39.* $f(A_0) = A_{24}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{20}$ *ve* $f(A_{24}) = A_8$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*40.* $f(A_0) = A_8$ *ise* $f(A_{20}) = A_{20}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{10}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*41.* $f(A_0) = A_{10}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{20}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{28}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*42.* $f(A_0) = A_{28}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{20}$ *ve* $f(A_{24}) = A_0$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*43.* $f(A_0) = A_4$ *ise* $f(A_{20}) = A_{16}$ *ve* $f(A_{24}) = A_5$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*44.* $f(A_0) = A_{27}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{13}$ *ve* $f(A_{24}) = A_3$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*45.* $f(A_0) = A_{31}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{15}$ *ve* $f(A_{24}) = A_7$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*46.* $f(A_0) = A_6$ *ise* $f(A_{20}) = A_{18}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{28}$ *ise dönme ekseni*$(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*47.* $f(A_0) = A_2$ *ise* $f(A_{20}) = A_{14}$ *ve* $f(A_{24}) = A_0$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*48.* $f(A_0) = A_{26}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{22}$ *ve* $f(A_{24}) = A_2$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*49.* $f(A_0) = A_4$ *ise* $f(A_{20}) = A_{17}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{26}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*50.* $f(A_0) = A_{24}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{16}$ *ve* $f(A_{24}) = A_4$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*51.* $f(A_0) = A_2$ *ise* $f(A_{20}) = A_{12}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{26}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*52.* $f(A_0) = A_{30}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{22}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{11}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*53.* $f(A_0) = A_6$ *ise* $f(A_{20}) = A_{19}$ *ve* $f(A_{24}) = A_7$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*54.* $f(A_0) = A_{28}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{18}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{10}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*55.* $f(A_0) = A_{26}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{12}$ *ve* $f(A_{24}) = A_4$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*56.* $f(A_0) = A_{27}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{17}$ *ve* $f(A_{24}) = A_5$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*57.* $f(A_0) = A_1$ *ise* $f(A_{20}) = A_{13}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{25}$ *ise dönme ekseni*$(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\Pi}{5}}$ *dönmedir.*

*58.* $f(A_0) = A_{10}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{21}$ *ve* $f(A_{24}) = A_8$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*59.* $f(A_0) = A_{30}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{14}$ *ve* $f(A_{24}) = A_2$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*60.* $f(A_0) = A_{31}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{19}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{11}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*61.* $f(A_0) = A_1$ *ise* $f(A_{20}) = A_{15}$ *ve* $f(A_{24}) = A_3$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*62.*$f(A_0) = A_0$ *ise* $f(A_8) = A_{21}$ *ve* $f(A_{12}) = A_{25}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*63.* $f(A_0) = A_{24}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{12}$ *ve* $f(A_{24}) = A_0$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*64.* $f(A_0) = A_{11}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{23}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{31}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}+1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*65.* $f(A_0) = A_9$ *ise* $f(A_{20}) = A_{23}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{11}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*66.* $f(A_0) = A_{28}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{14}$ *ve* $f(A_{24}) = A_6$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}+1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*67.* $f(A_0) = A_{25}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{16}$ *ve* $f(A_{24}) = A_8$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*68.* $f(A_0) = A_3$ *ise* $f(A_{20}) = A_{15}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{31}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*69.* $f(A_0) = A_{29}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{18}$ *ve* $f(A_{24}) = A_7$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*70.* $f(A_0) = A_3$ *ise* $f(A_{20}) = A_{13}$ *ve* $f(A_{24}) = A_1$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*71.* $f(A_0) = A_5$ *ise* $f(A_{20}) = A_{17}$ *ve* $f(A_{24}) = A_4$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{1}{2})$*olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*72.* $f(A_0) = A_{31}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{23}$ *ve* $f(A_{24}) = A_3$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4}, -\frac{1}{2})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*73.* $f(A_0) = A_7$ *ise* $f(A_{20}) = A_{19}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{31}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{1}{2})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*74.* $f(A_0) = A_{27}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{23}$ *ve* $f(A_{24}) = A_9$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4}, -\frac{1}{2})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*75.* $f(A_0) = A_7$ *ise* $f(A_{20}) = A_{15}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{31}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*76.* $f(A_0) = A_{11}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{19}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{31}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*77.* $f(A_0) = A_9$ *ise* $f(A_{20}) = A_{17}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{16}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*78.* $f(A_0) = A_5$ *ise* $f(A_{20}) = A_{13}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{25}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*79.* $f(A_0) = A_8$ *ise* $f(A_{20}) = A_{16}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{25}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*80.* $f(A_0) = A_6$ *ise* $f(A_{20}) = A_{14}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{28}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*81.* $f(A_0) = A_{10}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{18}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{28}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*82.* $f(A_0) = A_4$ *ise* $f(A_{20}) = A_{12}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{26}$ *ise dönme ekseni*$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*83.* $f(A_0) = A_3$ *ise* $f(A_{20}) = A_{13}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{27}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*84.* $f(A_0) = A_3$ *ise* $f(A_{20}) = A_{15}$ *ve* $f(A_{24}) = A_1$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*85.* $f(A_0) = A_{29}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{18}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{10}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*86.* $f(A_0) = A_{25}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{16}$ *ve* $f(A_{24}) = A_5$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*87.* $f(A_0) = A_6$ *ise* $f(A_{20}) = A_{19}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{30}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*88.* $f(A_0) = A_{26}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{22}$ *ve* $f(A_{24}) = A_9$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*89.* $f(A_0) = A_4$ *ise* $f(A_{20}) = A_{17}$ *ve* $f(A_{24}) = A_5$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*90.* $f(A_0) = A_{30}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{22}$ *ve* $f(A_{24}) = A_2$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*91.* $f(A_0) = A_{10}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{21}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{29}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*92.* $f(A_0) = A_{30}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{14}$ *ve* $f(A_{24}) = A_6$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\Pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*93.* $f(A_0) = A_{26}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{12}$ *ve* $f(A_{24}) = A_2$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{\sqrt{5+}-1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*94.* $f(A_0) = A_8$ *ise* $f(A_{20}) = A_{21}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{10}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*95.* $f(A_0) = A_{31}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{23}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{11}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*96.* $f(A_0) = A_{11}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{23}$ *ve* $f(A_{24}) = A_9$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*97.* $f(A_0) = A_9$ *ise* $f(A_{20}) = A_{23}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{27}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*98.* $f(A_0) = A_{27}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{23}$ *ve* $f(A_{24}) = A_3$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmk üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*99.* $f(A_0) = A_7$ *ise* $f(A_{20}) = A_{19}$ *ve* $f(A_{24}) = A_6$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*100.* $f(A_0) = A_{28}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{14}$ *ve* $f(A_{24}) = A_0$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*101.* $f(A_0) = A_{24}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{12}$ *ve* $f(A_{24}) = A_4$ *ise dönme ekseni*$(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*102.* $f(A_0) = A_5$ *ise* $f(A_{20}) = A_{17}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{27}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*103.* $f(A_0) = A_1$ *ise* $f(A_{20}) = A_{13}$ *ve* $f(A_{24}) = A_3$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*104.* $f(A_0) = A_{29}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{21}$ *ve* $f(A_{24}) = A_1$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*105.* $f(A_0) = A_7$ *ise* $f(A_{20}) = A_{18}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{29}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*106.* $f(A_0) = A_{31}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{19}$ *ve* $f(A_{24}) = A_7$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*107.* $f(A_0) = A_1$ *ise* $f(A_{20}) = A_{15}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{29}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*108.* $f(A_0) = A_{25}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{21}$ *ve* $f(A_{24}) = A_8$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*109.* $f(A_0) = A_5$ *ise* $f(A_{20}) = A_{16}$ *ve* $f(A_{24}) = A_4$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*110.* $f(A_0) = A_{27}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{17}$ *ve* $f(A_{24}) = A_9$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*111.* $f(A_0) = A_{29}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{15}$ *ve* $f(A_{24}) = A_7$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$*eksenine göre* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*112.* $f(A_0) = A_{28}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{18}$ *ve* $f(A_{24}) = A_6$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*113.* $f(A_0) = A_2$ *ise* $f(A_{20}) = A_{14}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{30}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*114.* $f(A_0) = A_9$ *ise* $f(A_{20}) = A_{22}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{11}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*115.* $f(A_0) = A_{25}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{13}$ *ve* $f(A_{24}) = A_1$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*116.* $f(A_0) = A_{24}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{16}$ *ve* $f(A_{24}) = A_8$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*117.* $f(A_0) = A_2$ *ise* $f(A_{20}) = A_{12}$ *ve* $f(A_{24}) = A_0$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*118.* $f(A_0) = A_{11}$ *ise* $f(A_{20}) = A_{22}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{30}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*119.* $f(A_0) = A_0$ *ise* $f(A_{20}) = A_{20}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{24}$ *ise* $f$ *birim dönüşümdür.*

*120.* $f(A_0) = A_3$ *ise* $f(A_{20}) = A_{23}$ *ve* $f(A_{24}) = A_{31}$ *ise* $f$ *inversiyondur.*

*Buna göre orijini koruyan* $f$ *izometrisi* $G(PD)$ *nin bir elemanıdır. Bir başka deyişle pentakis dodecahedron uzaklığını koruyan Öklidyen izometriler dışında bir izometri yoktur.*

**Teorem 6.1** $f : \mathbb{R}^3_{PD} \to \mathbb{R}^3_{PD}$ *dönüşümü bir izometri olsun.* $f = T_A \circ g$ *olacak şekilde bir tek* $T_A \in T(3)$ *ve* $g \in G(PD)$ *vardır.*

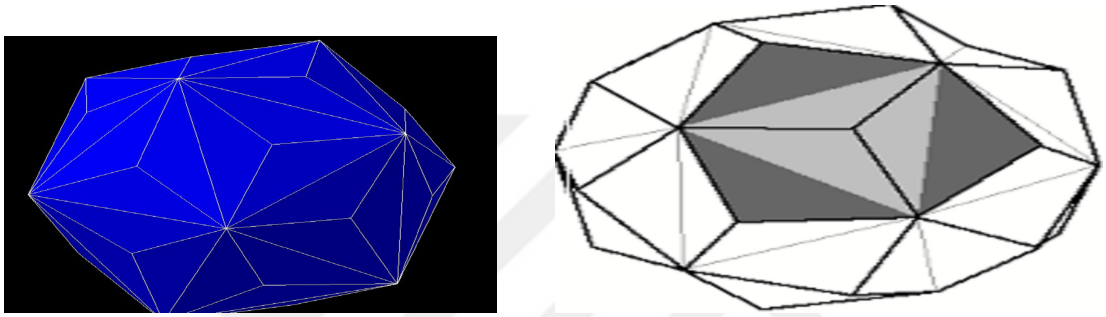
**İspat** *$A = (a_1, a_2, a_3)$ olmak üzere $f(O) = A$ olsun. Bu taktirde $g = T_{-A} \circ f$ olacak şekilde tanımlı $g$ dönüşümü bir izometridir ve $g(O) = O$ olur. Böylece önerme 5.9 dan dolayı $g \in G(PD)$ ve $f = T_A \circ g$ olur. İspatın tekliği aşikardır.*

Buna göre pentakis dodecahedron metriği ile donatılmış analitik 3-uzayın izometrilerinin grubu pentakis dodecahedronun (Öklidyen) simetri grubu olan $I_h$ ile 3-boyutlu analitik uzayın tüm ötelemelerinin grubu olan $T(3)$ ün yarı-direkt çarpımıdır. Yani $\mathbb{R}^3_{PD}$ nın tüm izometrilerinin kümesi $T(3).G(PD)$ dır.

# 7. TRİAKİS İCOSAHEDRON UZAYI

## 7.1 Triakis İcosahedron Metriği ve Özellikleri

Triakis icosahedron 60 tane ikiz kenar üçgenin birleşmesinden oluşan konveks bir çokyüzlüdür. Toplamda 32 köşe ve 90 ayrıta sahiptir (Şekil7.1).



Şekil 7.1 Triakis Icosahedron ve Icosahedronun kleetopu

Geometrik olarak kisicosahedron olarak da adlandırılır. Arşimed cisimlerden truncated dodecahedronun dualidir. İcosahedronun yüzeyine eklenen üçgensel piramidlerinden oluşan triakis icosahedron cismi, icosahedronun kleetopudur (Şekil7.1). Yüzey alanı $S = \frac{75}{11}\sqrt{\frac{1}{2}(313+117\sqrt{5})}br^2$ve hacmi $V = \frac{125}{44}(19+9\sqrt{5})\ br^3$dür. Ayrıca Triakis İcosahedron120 tane simetriye sahip olup, simetri grubu $I_h$ ile gösterilir. Birim küresi triakis icosahedron olan uzaklık fonksiyonu $d_{TI}$ ile gösterilir ve bu uzaklık fonksiyonunun metrik aksiyomlarını sağladığı ve bazı özellikleri (Can, Çolak ve Gelişgen, 2015) kaynağından verilmektedir.

**Tanım 7.1** *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\mathbb{R}^3$ de iki farklı nokta olsun.*

$$d_{TI}(P_1,P_2) = \max\left\{ \begin{array}{c} |x| + \frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{ \begin{array}{c} |z|, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})|x| + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})|z| + |y|, \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})|x| + (\sqrt{5}+1)|z| + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})|y| \end{array} \right\}, \\ |y| + \frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{ \begin{array}{c} |x|, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})|y| + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})|x| + |z|, \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})|y| + (\sqrt{5}+1)|x| + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})|z| \end{array} \right\}, \\ |z| + \frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{ \begin{array}{c} |y|, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})|z| + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})|y| + |x|, \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})|z| + (\sqrt{5}+1)|y| + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})|x| \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

*şeklinde tanımlanan $d_{TI} : \mathbb{R}^3 x\, \mathbb{R}^3 \to [0,\infty)$ uzaklık fonksiyona analitik 3-uzayda $P_1$ ve $P_2$ noktaları arasındaki triakis icosahedron uzaklık fonksiyonu denir.*

**Yardımcı Teorem 7.1** *$P_1 = (x_1, y_1 z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\mathbb{R}^3$de iki farklı nokta olsun.*

$$d_{TI}(P_1,P_2) \geq \max\{|x_1-x_2| + \tfrac{3\sqrt{5}-5}{10} \max \left\{ \begin{array}{l} |z|\,, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})\,|x| + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})\,|z| + |y|\,, \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})\,|x| + (\sqrt{5}+1)\,|z| + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})\,|y| \end{array} \right\}$$

$$d_{TI}(P_1,P_2) \geq \max\{|y_1-y_2| + \tfrac{3\sqrt{5}-5}{10} \max \left\{ \begin{array}{l} |x|\,, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})\,|y| + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})\,|x| + |z|\,, \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})\,|y| + (\sqrt{5}+1)\,|x| + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})\,|z| \end{array} \right\}$$

$$d_{TI}(P_1,P_2) \geq \max\{|z_1-z_2| + \tfrac{3\sqrt{5}-5}{10} \max \left\{ \begin{array}{l} |y|\,, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})\,|z| + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})\,|y| + |x|\,, \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})\,|z| + (\sqrt{5}+1)\,|y| + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})\,|x| \end{array} \right\}$$

*olur.*

**İspat** *Maksimum fonksiyonun tanımından ispat aşikardır.*

**Önerme 7.1** *$\mathbb{R}^3$de $d_{TI}$ uzaklık fonksiyonu metriktir ve bu metrikle donatılmış uzayın birim küresi triakis icosahedrondur.*

**İspat** *$d_{TI} : \mathbb{R}^3 x\, \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ triakis icosahedron uzaklık fonksiyonu ve $P_1$=$(x_1, y_1, z_1)$, $P_2$=$(x_2, y_2, z_2)$ ve $P_3$=$(x_3, y_3, z_3)$ $\mathbb{R}^{3\prime}$de üç farklı nokta olsun. $d_{TI}$ uzaklık fonksiyonu her $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^3$ için aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa $\mathbb{R}^3$ de bir metriktir.*

***M1)*** $d_{TI}(P_1,P_2) \geq 0$ *ve* $d_{TI}(P_1,P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$
***M2)*** $d_{TI}(P_1,P_2) = d_{TI}(P_2,P_1)$
***M3)*** $d_{TI}(P_1,P_3) \leq d_{TI}(P_1,P_2) + d_{TI}(P_2,P_3)\,.$

***M1)****Mutlak değer daima negatif olmayan değerler ürettiğinden mutlak değerli ifadelerin pozitif ifadelerle çarpılıp toplanması sonucu negatif olmayan değerler elde edilir. Açıkça $d_{TI}(P_1,P_2) \geq 0$. Yani $d_{TI}$ pozitif tanımlıdır. Eğer, $d_{TI}(P_1,P_2) = 0$ ise*

$$|x_1-x_2| = 0, |y_1-y_2| = 0, |z_1-z_2| = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2 \Longrightarrow P_1 = P_2$$

*olur. Tersine $P_1$=$P_2 \Longrightarrow |x_1-x_2|$=0, $|y_1-y_2|$=0, $|z_1-z_2|$=0 $\Longrightarrow d_{PD}(P_1,P_2)$=0 bulunur.*
***M2)*** *Mutlak değerden dolayı $|x_1-x_2|$= $|x_2-x_1|$, $|y_1-y_2|$=$|y_2-y_1|$, $|z_1-z_2|$= $|z_2-z_1|$ olduğundan açıkça, $d_{TI}(P_1,P_2) = d_{TI}(P_2,P_1)$ dir. Yani $d_{TI}$ simetriktir.*
***M3)*** *$P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ve $P_3 = (x_3, y_3, z_3) \in \mathbb{R}^3$ olsun. $u_1 = |x_1 - x_3|\,,$ $v_1 = |y_1 - y_3|\,,$ $w_1 = |z_1 - z_3|\,,$ $u_2 = |x_1 - x_2|\,,$ $v_2 = |y_1 - y_2|\,,$ $w_2 = |z_1 - z_2|\,,$ $u_3 = |x_3 - x_2|\,,$ $v_3 = |y_3 - y_2|\,,$ $w_3 = |z_3 - z_2|$ olmak üzere,*

$$
\begin{aligned}
&d_{TI}(P_1,P_3)\\
&= \max\left\{\begin{array}{l}
u_1+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{c} w_1,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})u_1+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})w_1+v_1,\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})u_1+(\sqrt{5}+1)w_1+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})v_1\end{array}\right\},\\
v_1+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{c} u_1,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})v_1+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})u_1+w_1,\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})v_1+(\sqrt{5}+1)u_1+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})w_1\end{array}\right\},\\
w_1+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{c} v_1,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})w_1+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})v_1+u_1,\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})w_1+(\sqrt{5}+1)v_1+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})u_1\end{array}\right\}
\end{array}\right\}\\
&\leq \max\left\{\begin{array}{l}
u_2+u_3+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l} w_2+w_3,\\ (\frac{1-\sqrt{5}}{2})(u_2+u_3)+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})(w_2+w_3)+(v_2+v_3),\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})(u_2+u_3)+(\sqrt{5}+1)(w_2+w_3)+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})(v_2+v_3)\end{array}\right\},\\
v_2+v_3+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l} u_2+u_3,\\ (\frac{1-\sqrt{5}}{2})(v_2+v_3)+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})(u_2+u_3)+(w_2+w_3),\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})(v_2+v_3)+(\sqrt{5}+1)(u_2+u_3)+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})(w_2+w_3)\end{array}\right\},\\
w_2+w_3+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l} v_2+v_3,\\ (\frac{1-\sqrt{5}}{2})(w_2+w_3)+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})(v_2+v_3)+(u_2+u_3),\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})(w_2+w_3)+(\sqrt{5}+1)(v_2+v_3)+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})(u_2+u_3)\end{array}\right\}
\end{array}\right\}\\
&\leq \max\left\{\begin{array}{l}
u_2+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{c} w_2,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})u_2+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})w_2+v_2,\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})u_2+(\sqrt{5}+1)w_2+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})v_2\end{array}\right\},\\
v_2+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{c} u_2,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})v_2+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})u_2+w_2,\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})v_2+(\sqrt{5}+1)u_2+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})w_2\end{array}\right\},\\
w_2+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{c} v_2,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})w_2+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})v_2+u_2,\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})w_2+(\sqrt{5}+1)v_2+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})u_2\end{array}\right\}
\end{array}\right\}\\
&\quad+\max\left\{\begin{array}{l}
u_3+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{c} w_3,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})u_3+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})w_3+v_3,\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})u_3+(\sqrt{5}+1)w_3+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})v_3\end{array}\right\},\\
v_3+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{c} u_3,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})v_3+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})u_3+w_3,\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})v_3+(\sqrt{5}+1)u_3+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})w_3\end{array}\right\},\\
w_3+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{c} v_3,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})w_3+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})v_3+u_3,\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})w_3+(\sqrt{5}+1)v_3+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})u_3\end{array}\right\}
\end{array}\right\}\\
&= X
\end{aligned}
$$

*dir. Burada Yardımcı teorem 6.1 den dolayı*

$$
d_{PD}(P_1,P_2) \;\geq\; \max\left\{\begin{array}{l}
u_2+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{c} w_2,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})u_2+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})w_2+v_2,\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})u_2+(\sqrt{5}+1)w_2+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})v_2\end{array}\right\},\\
v_2+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{c} u_2,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})v_2+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})u_2+w_2,\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})v_2+(\sqrt{5}+1)u_2+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})w_2\end{array}\right\},\\
w_2+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{c} v_2,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})w_2+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})v_2+u_2,\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})w_2+(\sqrt{5}+1)v_2+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})u_2\end{array}\right\}
\end{array}\right\}
$$

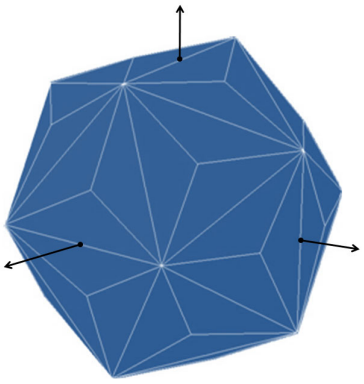
$$d_{PD}(P_2,P_3) \geq \max\left\{\begin{array}{l} u_3+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{c} w_3,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})u_3+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})w_3+v_3,\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})u_3+(\sqrt{5}+1)w_3+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})v_3 \end{array}\right\},\\ v_3+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{c} u_3,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})v_3+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})u_3+w_3,\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})v_3+(\sqrt{5}+1)u_3+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})w_3 \end{array}\right\},\\ w_3+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{c} v_3,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})w_3+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})v_3+u_3,\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})w_3+(\sqrt{5}+1)v_3+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})u_3 \end{array}\right\} \end{array}\right\}$$

*olur. Buna göre* $d_{TI}(P_1,P_3) \leq d_{TI}(P_1,P_2)+d_{TI}(P_2,P_3)$ *elde edlir. Yani triakis icosahedron uzaklık fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar.*

*Sonuç olarak triakis icosahedron uzaklık fonksiyonu metriktir Ayrıca bu metrikle döşenmiş analitik 3- uzayda orijinden 1 birim triakis icosahedron uzaklığındaki noktalar kümesi*

$$S_{TI}=\{(x,y,z):\max\left\{\begin{array}{l} |x|+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{c} |z|,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})|x|+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})|z|+|y|,\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})|x|+(\sqrt{5}+1)|z|+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})|y| \end{array}\right\},\\ |y|+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{c} |x|,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})|y|+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})|x|+|z|,\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})|y|+(\sqrt{5}+1)|x|+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})|z| \end{array}\right\},\\ |z|+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{c} |y|,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})|z|+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})|y|+|x|,\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})|z|+(\sqrt{5}+1)|y|+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})|x| \end{array}\right\} \end{array}\right\}=1\}$$

*olup bu noktaların geometrik yeri şekil7.2 de görüldüğü gibi triakis icosahedrondur.*



Şekil 7.2 Triakis icosahedronun koordinat sistemine yerleştirilmesi

Triakis İcosahedron uzaklık fonksiyonu oldukça karmaşık görünmesine rağmen, apsis, ordinat ve kotlar farkı arasında bir yönlendirme vardır. Bu yönlendirme $|x_1-x_2|-|y_1-y_2|-|z_1-z_2|-|x_1-x_2|$ şeklindedir. Buna göre $d_{TI}$ fonksiyonunda yer alan 3 ifadeden birinde $|x_1-x_2|$ yerine $|y_1-y_2|$, $|y_1-y_2|$ yerine $|z_1-z_2|$ yerine, $|z_1-z_2|$ yerine $|x_1-x_2|$ yazıldığında diğer bir ifadeye ulaşılır. Geometrik olarak $P_1$

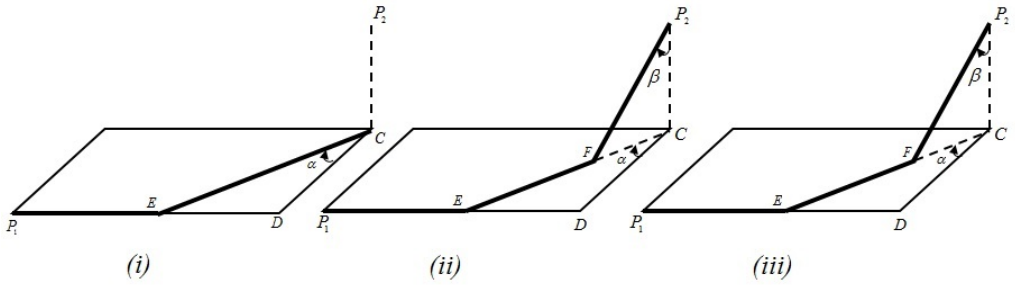
noktasından $P_2$ noktasına olan yol için 3 farklı ihtimal vardır. Buna göre, bu yollar aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$(i)$ Biri koordinat eksenlerinden birine paralel diğeri bir diğer koordinat ekseni ile arctan $\left(15-3\sqrt{5}\right)$ radyanlık açı yapan iki doğru parçasının birleşimidir.

$(ii)$ Biri koordinat eksenlerinden birine paralel diğerleri ise diğer koordinat eksenleri ile arctan $\left(\frac{3}{4}\right)$ ve arctan $\left(2\sqrt{5}-3\right)$ radyanlık açı yapan üç doğru parçasının birleşimidir.

$(iii)$ Biri koordinat eksenlerinden birine paralel diğerleri ise diğer koordinat eksenleri ile arctan $\left(\frac{91\sqrt{5}-12}{44}\right)$ ve arctan $\left(\frac{1281\sqrt{5}-690}{44}\right)$ radyanlık açı yapan üç doğru parçasının birleşimidir.

Böylece $P_1$ ve $P_2$ noktaları arasındaki triakis icosahedron uzaklığı $(i)$ deki yol için bahsedilen iki doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamı, $(ii)$ deki yol için bahsedilen üç doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamının $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ katı, $(iii)$ deki yol için bahsedilen üç doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamının $\frac{15+\sqrt{5}}{10}$katıdır (Şekil7.3).




Şekil 7.3 Triakis icosahedron yolu

**Sonuç 7.1** $\mathbb{R}^3_{TI}$ *de* $(x_0, y_0, z_0)$ *merkezli ve* $r$ *yarıçaplı küre*

$$\max\left\{\begin{array}{l} |x-x_0|+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l}|z-z_0|\,,\\ (\frac{1-\sqrt{5}}{2})\,|x-x_0|+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})\,|z-z_0|+|y-y_0|\,,\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})\,|x-x_0|+(\sqrt{5}+1)\,|z-z_0|+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})\,|y-y_0|\end{array}\right\},\\ |y-y_0|+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l}|x-x_0|\,,\\ (\frac{1-\sqrt{5}}{2})\,|y-y_0|+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})\,|x-x_0|+|z-z_0|\,,\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})\,|y-y_0|+(\sqrt{5}+1)\,|x-x_0|+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})\,|z-z_0|\end{array}\right\},\\ |z-z_0|+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l}|y-y_0|\,,\\ (\frac{1-\sqrt{5}}{2})\,|z-z_0|+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})\,|y-y_0|+|x-x_0|\,,\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})\,|z-z_0|+(\sqrt{5}+1)\,|y-y_0|+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})\,|x-x_0|\end{array}\right\}\end{array}\right\}=r$$

*denklemi ile ifade edilen köşe noktaları* $(0, r, \frac{\sqrt{5}-1}{2}r)$, $(0, \frac{4\sqrt{5}-5}{11}r, \frac{7\sqrt{5}+5}{22}r)$, $(\frac{7\sqrt{5}+5}{22}r, 0, \frac{4\sqrt{5}-5}{11}r)$, $(\frac{4\sqrt{5}-5}{11}r, \frac{7\sqrt{5}+5}{22}r, 0)$, $(\frac{15-\sqrt{5}}{22}r, \frac{15-\sqrt{5}}{22}r, \frac{15-\sqrt{5}}{22}r)$ *noktalarının herbir bileşeninin* $+/-$ *işaret değişiklikleri ve üç bileşenin tüm muhtemel permütasyonlarının* $(x_0, y_0, z_0)$ *kadar ötelenmişlerinden oluşan 60 yüzlü bir çokyüzlü olan triakis icosahedrondur..*

Bu bölümün geri kalan kısmında sıkça kullanılacağından dolayı merkezil birim kürenin köşe noktaları aşğıdaki şekilde isimlendirilmiştir.

$A_0 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}r, 0, r\right), A_1 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}r, 0, -r\right), A_2 = \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2}r, 0, r\right), A_3 = \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2}r, 0, -r\right),$
$A_4 = \left(r, \frac{\sqrt{5}-1}{2}r, 0\right), A_5 = \left(r, -\frac{\sqrt{5}-1}{2}r, 0\right), A_6 = \left(-r, \frac{\sqrt{5}-1}{2}r, 0\right), A_7 = \left(-r, -\frac{\sqrt{5}-1}{2}r, 0\right),$
$A_8 = \left(0, r, \frac{\sqrt{5}-1}{2}r\right), A_9 = \left(0, r, -\frac{\sqrt{5}-1}{2}r\right), A_{10} = \left(0, -r, \frac{\sqrt{5}-1}{2}r\right), A_{11} = \left(0, -r, -\frac{\sqrt{5}-1}{2}r\right),$
$A_{12} = \left(0, \frac{4\sqrt{5}-5}{11}r, \frac{7\sqrt{5}+5}{22}r\right), A_{13} = \left(0, \frac{4\sqrt{5}-5}{11}r, -\frac{7\sqrt{5}+5}{22}r\right), A_{14} = \left(0, -\frac{4\sqrt{5}-5}{11}r, \frac{7\sqrt{5}+5}{22}r\right),$
$A_{15} = \left(0, -\frac{4\sqrt{5}-5}{11}r, -\frac{7\sqrt{5}+5}{22}r\right), A_{16} = \left(\frac{7\sqrt{5}+5}{22}r, 0, \frac{4\sqrt{5}-5}{11}r\right), A_{17} = \left(\frac{7\sqrt{5}+5}{22}r, 0, -\frac{4\sqrt{5}-5}{11}r\right),$
$A_{18} = \left(-\frac{7\sqrt{5}+5}{22}r, 0, \frac{4\sqrt{5}-5}{11}r\right), A_{19} = \left(-\frac{7\sqrt{5}+5}{22}r, 0, -\frac{4\sqrt{5}-5}{11}r\right), A_{20} = \left(\frac{4\sqrt{5}-5}{11}r, \frac{7\sqrt{5}+5}{22}r, 0\right),$
$A_{21} = \left(\frac{4\sqrt{5}-5}{11}r, -\frac{7\sqrt{5}+5}{22}r, 0\right), A_{22} = \left(-\frac{4\sqrt{5}-5}{11}r, \frac{7\sqrt{5}+5}{22}r, 0\right), A_{23} = \left(-\frac{4\sqrt{5}-5}{11}r, -\frac{7\sqrt{5}+5}{22}r, 0\right),$
$A_{24} = \left(\frac{15-\sqrt{5}}{22}r, \frac{15-\sqrt{5}}{22}r, \frac{15-\sqrt{5}}{22}r\right), A_{25} = \left(\frac{15-\sqrt{5}}{22}r, \frac{15-\sqrt{5}}{22}r, -\frac{15-\sqrt{5}}{22}r\right),$
$A_{26} = \left(\frac{15-\sqrt{5}}{22}r, -\frac{15-\sqrt{5}}{22}r, \frac{15-\sqrt{5}}{22}r\right), A_{27} = \left(\frac{15-\sqrt{5}}{22}r, -\frac{15-\sqrt{5}}{22}r, -\frac{15-\sqrt{5}}{22}r\right),$
$A_{28} = \left(-\frac{15-\sqrt{5}}{22}r, \frac{15-\sqrt{5}}{22}r, \frac{15-\sqrt{5}}{22}r\right), A_{29} = \left(-\frac{15-\sqrt{5}}{22}r, \frac{15-\sqrt{5}}{22}r, -\frac{15-\sqrt{5}}{22}r\right),$
$A_{30} = \left(-\frac{15-\sqrt{5}}{22}r, -\frac{15-\sqrt{5}}{22}r, \frac{15-\sqrt{5}}{22}r\right), A_{31} = \left(-\frac{15-\sqrt{5}}{22}r, -\frac{15-\sqrt{5}}{22}r, -\frac{15-\sqrt{5}}{22}r\right).$

Aşağıdaki önermede $\mathbb{R}^3$ deki noktalar arasındaki Öklidyen ve triakis icosahedron uzaklıkları arasındaki geçiş bağıntısını ifade etmektedir.

**Önerme 7.2** $\mathbb{R}^3$ *de* $P_1$ *ve* $P_2$ *noktalarından geçen doğru* $l$ *olsun. Eğer* $l$ *doğrusunun doğrultu vektörü* $(p, q, r)$*,*

$$K = \max\left\{\begin{array}{c} p + \frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{r, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})p + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})r + q, (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})p + (\sqrt{5}+1)r + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})q\right\}, \\ q + \frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{p, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})q + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})p + r, (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})q + (\sqrt{5}+1)p + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})r\right\}, \\ r + \frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{q, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})r + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})q + p, (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})r + (\sqrt{5}+1)q + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})p\right\} \end{array}\right\}$$

*ve* $\mu_{P_1P_2} = \frac{K}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$ *ise* $d_{TI}(P_1, P_2) = \mu_{P_1P_2} d_E(P_1, P_2)$ *olur.*

**İspat** $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ *ve* $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\mathbb{R}^3$ *deki herhangi iki nokta olsun.* $P_1$ *ve* $P_2$ *den geçen doğru* $l$ *ise*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \lambda$$

*olur. $l$ doğrusunun doğrultu vektörü $(p,q,r)$ olduğundan $(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1) = \lambda(p,q,r)$ dir. Buna göre $d_{TI}(P_1,P_2) = \lambda K$ ve $d_E(P_1,P_2) = \lambda\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ olduğundan dolayı $\frac{d_{TI}(P_1,P_2)}{K} = \frac{d_E(P_1,P_2)}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$ bulunur. Bu ise önermenin ifadesindeki sonucu verir.*

Yukarıdaki önerme herhangi bir doğru boyunca $d_{TI}(P_1,P_2)$ uzaklığının aynı doğru boyunca olan Öklidyen uzaklığın pozitif katı olduğu gösterir. Buna göre aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

**Sonuç 7.2** *$\mathbb{R}^3$de $A, B, X$ doğrudaş üç farklı nokta ise*

$$d_E(A,X) = d_E(B,X) \iff d_{TI}(A,X) = d_{TI}(B,X)$$

**Sonuç 7.3** *3-boyutlu uzayda $A, B, X$ doğrudaş üç farklı nokta ise*

$$d_{TI}(A,X)/d_{TI}(B,X) = d_E(A,X)/d_E(B,X)$$

*olur.*

Yani doğru boyunca olan $d_E$, $d_{TI}$ uzaklıklarının oranı aynıdır.

## 7.2 Triakis Icosahedron İzometri Grubu

Bu kısımda $d_{TI}$ metriği ile donatılmış $\mathbb{R}^3$ ün izometri grubu araştırılacaktır. Bunu gerçekleştirmek için öncelikle hangi Öklidyen izometrilerin triaksi icosahedron uzaklığını koruduğu bulunacak daha sonra bu izometrilerden başka izometriler olmadığı gösterilecektir.

$\alpha : \mathbb{R}^3_{TI} \to \mathbb{R}^3_{TI}$ dönüşüm olmak üzere her $X, Y \in \mathbb{R}^3_{TI}$ için

$$d_{TI}(X,Y) = d_{TI}(\alpha(X), \alpha(Y))$$

ise $\alpha$ dönüşümü $\mathbb{R}^3_{TI}$ de bir izometridir.

**Önerme 7.3** *$\mathbb{R}^3$de her Öklidyen öteleme $\mathbb{R}^3_{TI}$ ün bir izometrisidir.*

**İspat** *$\alpha$=$(a,b,c)$, $X$=$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere $T_\alpha : \mathbb{R}^3_{TI} \to \mathbb{R}^3_{TI}$, $T_\alpha(X)$=$\alpha + X$ olacak şekilde reel uzayda bir öteleme olsun. $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3_{PD}$ için $A = |a_1 + x_1 - a_1 - x_2|$, $B = |a_2 + y_1 - a_2 - y_2|$, $C = |a_3 + z_1 - a_3 - z_2|$ olmak üzere*

$$
\begin{aligned}
& d_{TI}(T_A(P_1), T_A(P_2)) \\
&= \max \left\{ \begin{array}{l}
A + \frac{3\sqrt{5}-5}{10} \max \left\{ \begin{array}{l} C, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})A + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})C + B, \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})A + (\sqrt{5}+1)C + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})B \end{array} \right\}, \\
B + \frac{3\sqrt{5}-5}{10} \max \left\{ \begin{array}{l} A, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})B + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})A + C, \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})B + (\sqrt{5}+1)A + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})C \end{array} \right\}, \\
C + \frac{3\sqrt{5}-5}{10} \max \left\{ \begin{array}{l} B, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})C + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})B + A, \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})C + (\sqrt{5}+1)B + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})A \end{array} \right\}
\end{array} \right\} \\
&= \max \left\{ \begin{array}{l}
|x| + \frac{3\sqrt{5}-5}{10} \max \left\{ \begin{array}{c} |z|, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})|x| + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})|z| + |y|, \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})|x| + (\sqrt{5}+1)|z| + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})|y| \end{array} \right\}, \\
|y| + \frac{3\sqrt{5}-5}{10} \max \left\{ \begin{array}{c} |x|, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})|y| + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})|x| + |z|, \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})|y| + (\sqrt{5}+1)|x| + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})|z| \end{array} \right\}, \\
|z| + \frac{3\sqrt{5}-5}{10} \max \left\{ \begin{array}{c} |y|, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})|z| + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})|y| + |x|, \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})|z| + (\sqrt{5}+1)|y| + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})|x| \end{array} \right\}
\end{array} \right\} \\
&= d_{TI}(P_1, P_2)
\end{aligned}
$$

*olur. Bundan dolayı $T_\alpha$ bir izometridir.*

Yukarıdaki önermeden dolayı $\mathbb{R}^3_{TI}$ uzayında dönme ve yansımaları bulmak için orijinden geçen düzlemleri düşünmek yeterli olacaktır. Aşağıdaki önermede $\mathbb{R}^3_{TI}$ de uzaklığı koruyan yansımalar ifade edilecektir.

**Önerme 7.4** *$\mathbb{R}^3_{TI}$ de $\Delta = ax + by + cz = 0$ düzlemine göre yansımanın izometri olması için gerek ve yeter koşul düzlemin doğrultu vektörü $(a, b, c)$ nin*

$$D = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (\pm 1, \varphi, \pm(1-\varphi)), (\pm(1-\varphi), \pm 1, \varphi), (\varphi, \pm(1-\varphi), \pm 1)\}$$

*vektör kümesi elemanlarına paralel olmasıdır.*

**İspat** *Öklidyen olarak $ax + by + cz = 0$ birim normali $(a, b, c)$ olan düzlemin yansımasını $\sigma_\Delta$ olarak düşünürsek; $\sigma_\Delta : \mathbb{R}^3_{TI} \to \mathbb{R}^3_{TI}$ olmak üzere Öklidyen yansıma*

$$\sigma_\Delta(x,y,z) = ((1-2a^2)x - 2aby - 2acz, -2abx + (1-2b^2)y - 2bcz, -2acx - 2bcy + (1-2c^2)z)$$

*şeklinde tanımlanır. $\mathbb{R}^3_{TI}$ ün taban vektörlarini koruyan yansıma izometri olacağından, triakis icosahedron köşe noktalarıda olan, $\mathbb{R}^3_{PD}$ ün $A_0 = (\frac{5+\sqrt{5}}{5+3\sqrt{5}}, 0, 1)$,*

$A_{24} = (\frac{10(3+2\sqrt{5})}{11(5+3\sqrt{5})}, \frac{10(3+2\sqrt{5})}{11(5+3\sqrt{5})}, \frac{10(3+2\sqrt{5})}{11(5+3\sqrt{5})})$, $A_4 = (1, \frac{5+\sqrt{5}}{5+3\sqrt{5}}, 0)$ *tabanını koruyan yansımları tespit etmek izometrileri bulmak için yeterli olacaktır. Taban vektörlerinin Öklidyen yansımalar altında görüntüleri,*

$$\sigma_\Delta(A_0) = ((1-2a^2)\tfrac{5+\sqrt{5}}{5+3\sqrt{5}} - 2ac, -2ab\tfrac{5+\sqrt{5}}{5+3\sqrt{5}} - 2bc, -2ac\tfrac{5+\sqrt{5}}{5+3\sqrt{5}} + (1-2c^2))$$
$$\sigma_\Delta(A_{24}) = \left( \begin{array}{r} \frac{10(3+2\sqrt{5})}{11(5+3\sqrt{5})}((1-2a^2) - 2aby - 2acz, -2abx + (1-2b^2)y - 2bcz, \\ -2acx - 2bcy + (1-2c^2)z \end{array} \right)$$
$$\sigma_\Delta(A_4) = ((1-2a^2) - 2ab\tfrac{5+\sqrt{5}}{5+3\sqrt{5}}, -2ab + (1-2b^2)\tfrac{5+\sqrt{5}}{5+3\sqrt{5}}, -2ac - 2bc\tfrac{5+\sqrt{5}}{5+3\sqrt{5}})$$

*şeklindedir. Açıkça* $d_{TI}(O, A_0) = d_{TI}(O, A_{24}) = d_{DH}(O, A_4) = 1$ *dir.Eğer yansıma* $d_{TI}$ *uzaklığını koruyor ise taban vektörlerinin yansıma altındaki görüntüleri için uzaklık korunmalıdır. Yani*

$$d_{TI}(\sigma_\Delta(O), \sigma_\Delta(A_0)) = d_{TI}(\sigma_\Delta(O), \sigma_\Delta(A_{24})) = d_{TI}(\sigma_\Delta(O), \sigma_\Delta(A_4)) = 1$$

*olmalıdır. Böylece,*
$K = \left|(1-2a^2)\frac{5+\sqrt{5}}{5+3\sqrt{5}} - 2ac\right|$, $L = \left|-2ab\frac{5+\sqrt{5}}{5+3\sqrt{5}} - 2bc\right|$, $M = \left|-2ac\frac{5+\sqrt{5}}{5+3\sqrt{5}} + (1-2c^2)\right|$,
$N = \left|\frac{10(3+2\sqrt{5})}{11(5+3\sqrt{5})}((1-2a^2) - 2aby - 2acz\right|$, $O = |-2abx + (1-2b^2)y - 2bcz|$,
$P = |-2acx - 2bcy + (1-2c^2)z))|$, $R = \left|(1-2a^2) - 2ab\frac{5+\sqrt{5}}{5+3\sqrt{5}}\right|$,
$S = \left|-2ab + (1-2b^2)\frac{5+\sqrt{5}}{5+3\sqrt{5}}\right|$, $T = \left|-2ac - 2bc\frac{5+\sqrt{5}}{5+3\sqrt{5}}\right|$ *olmak üzere*

$$d_{TI}(\sigma_\Delta(O), \sigma_\Delta(A_0)) = \max \left\{ \begin{array}{l} K + \frac{3\sqrt{5}-5}{10} \max \left\{ \begin{array}{l} M, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})K + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})M + L, \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})K + (\sqrt{5}+1)M + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})L \end{array} \right\}, \\ L + \frac{3\sqrt{5}-5}{10} \max \left\{ \begin{array}{l} K, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})L + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})K + M, \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})L + (\sqrt{5}+1)K + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})M \end{array} \right\}, \\ M + \frac{3\sqrt{5}-5}{10} \max \left\{ \begin{array}{l} L, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})M + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})L + K, \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})M + (\sqrt{5}+1)L + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})K \end{array} \right\} \end{array} \right\} = 1$$

$$d_{TI}(\sigma_\Delta(O), \sigma_\Delta(A_{24})) = \max \left\{ \begin{array}{l} N + \frac{3\sqrt{5}-5}{10} \max \left\{ \begin{array}{l} P, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})N + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})P + O, \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})N + (\sqrt{5}+1)P + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})O \end{array} \right\}, \\ O + \frac{3\sqrt{5}-5}{10} \max \left\{ \begin{array}{l} N, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})O + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})N + P, \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})O + (\sqrt{5}+1)N + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})P \end{array} \right\}, \\ P + \frac{3\sqrt{5}-5}{10} \max \left\{ \begin{array}{l} O, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})P + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})O + N, \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})P + (\sqrt{5}+1)O + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})N \end{array} \right\} \end{array} \right\} = 1$$

$$d_{TI}(\sigma_\Delta(O), \sigma_\Delta(A_4)) = \max \left\{ \begin{array}{l} R + \frac{3\sqrt{5}-5}{10} \max \left\{ \begin{array}{l} T, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})R + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})T + S, \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})R + (\sqrt{5}+1)T + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})S \end{array} \right\}, \\ S + \frac{3\sqrt{5}-5}{10} \max \left\{ \begin{array}{l} R, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})S + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})R + T, \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})S + (\sqrt{5}+1)R + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})T \end{array} \right\}, \\ T + \frac{3\sqrt{5}-5}{10} \max \left\{ \begin{array}{l} S, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})T + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})S + R, \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})T + (\sqrt{5}+1)S + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})R \end{array} \right\} \end{array} \right\} = 1$$

*denklem sistemi elde edilir. Denklem sistemi çözülürse,* $(\pm 1, \varphi, \pm(1-\varphi))$, $(\pm(1-\varphi), \pm 1, \varphi)$, $(\varphi, \pm(1-\varphi), \pm 1)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ *sonuçları bulunur.*

*Tersine normal vektörleri $D$ kümesindeki vektörlere paralel olacak şekildeki düzlemlere göre yansımaların uzaklığı koruduğu gösterilmelidir.*

*$\sigma_\Delta(X) = Y$ olacak şekilde $X$ ve $Y$ noktaları için $(p_1, q_1, r_1)$ ve $(p_2, q_2, r_2)$, $OX$ ve $OY$ vektörlerinin yön vektörleri olsun. $d_{TI}(O, X) = d_{TI}(O, Y)$ olduğunu göstermek için önerme 6.2 den $\mu_{OX} = \mu_{OY}$ olduğunu göstermek yeterlidir. $(p_1, q_1, r_1)$ vektörünün düzleme göre yansıma altındaki görüntüleri bulunursa;*

*1. Durum:* $1x + \varphi y + (1-\varphi)z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1, q_1, r_1) = (\tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 - \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}r_1, \tfrac{-1-\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1}{2}r_1, \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1}{2}q_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1),$$

*2. Durum:* $1x + \varphi y + -(1-\varphi)z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1, q_1, r_1) = (\tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{-1-\sqrt{5}}{4}q_1 - \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1, \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1 - \tfrac{1}{2}r_1, \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1 - \tfrac{1}{2}q_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1),$$

*3.Durum:* -$1x + \varphi y + (1-\varphi)z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1, q_1, r_1) = (\tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1, \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1}{2}r_1, \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1}{2}q_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1),$$

*4.Durum:* -$1x + \varphi y + -(1-\varphi)z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1, q_1, r_1) = (\tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}r_1, \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1 - \tfrac{1}{2}r_1, \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1 - \tfrac{1}{2}q_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1),$$

*5.Durum:* (1-$\varphi)x + 1y + \varphi z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1, q_1, r_1) = (\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 - \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1}{2}r_1, \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1}{2}q_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1, \tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{-1-\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1),$$

*6.Durum:* -(1-$\varphi)x + 1y + \varphi z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1, q_1, r_1) = (\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1 - \tfrac{1}{2}r_1, \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1}{2}q_1 + \tfrac{-1-\sqrt{5}}{4}r_1, -\tfrac{1}{2}p_1 - \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1),$$

*7.Durum:* $(1-\varphi)x - 1y + \varphi z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1, q_1, r_1) = (\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1}{2}r_1, \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1}{2}q_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1, \tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1),$$

*8.Durum:* $-(1-\varphi)x - 1y + \varphi z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1, q_1, r_1) = (\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}q_1 - \tfrac{1}{2}r_1, \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1}{2}q_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1, -\tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1),$$

*9.Durum:* $\varphi x + (1-\varphi)y + 1z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1}{2}q_1-\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1, \tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}r_1, -\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1}{2}r_1),$$

*10.Durum:* $\varphi x + -(1-\varphi)y + 1z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1-\tfrac{1}{2}q_1-\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1, -\tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1, -\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1}{2}r_1),$$

*11.Durum:* $\varphi x + (1-\varphi)y - 1z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1, \tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1, \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1}{2}r_1),$$

*12.Durum:* $\varphi x + -(1-\varphi)y - 1z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1-\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1, -\tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}r_1, \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1}{2}r_1),$$

*13.Durum:* $1x = 0$ *yansıma düzlemi için,*$\sigma_\Delta\ (p_1,q_1,r_1) = (-p_1,q_1,r_1)$ ,

*14.Durum:* $1y = 0$ *yansıma düzlemi için,*$\sigma_\Delta\ (p_1,q_1,r_1) = (p_1,-q_1,r_1)$ ,

*15.Durum:* $1z = 0$ *yansıma düzlemi için,*$\sigma_\Delta\ (p_1,q_1,r_1) = (p_1,q_1,-r_1)$ .
*sonuçlarını elde edilir. Çıkan bu sonuçlara ve önerme 6.2 ye göre de* $\mu(OX) = \mu(OY)$ *olduğu görülmektedir. Böylece ispat tamamlanmış olur.*

**Sonuç 7.4** $S_{TI}$ *izometrik yansımalarının kümesi orijinden geçen düzlemlere göre on beş Öklidyen yansımadan oluşur. Orijinden geçen düzlemler;*

| $x=0$ | $y=0$ | $z=0$ |
|---|---|---|
| $x+\varphi y+(1-\varphi)z=0$ | $(1-\varphi)x+y+\varphi z=0$ | $\varphi x+(1-\varphi)y+z=0$ |
| $x+\varphi y-(1-\varphi)z=0$ | $-(1-\varphi)x+y+\varphi z=0$ | $\varphi x-(1-\varphi)y+z=0$ |
| $-x+\varphi y+(1-\varphi)z=0$ | $(1-\varphi)x-y+\varphi z=0$ | $\varphi x+(1-\varphi)y-z=0$ |
| $-x+\varphi y-(1-\varphi)z=0$ | $-(1-\varphi)x-y+\varphi z=0$ | $\varphi x+-(1-\varphi)y-z=0$ |

Şekil7.4 deki tablo birim kürenin köşe noktalarının ilgili yansıma dönüşümleri altındaki görüntülerini vermektedir.

| Yansıma Düzlemleri | A0 | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 | A10 | A11 | A12 | A13 | A14 | A15 | A16 | A17 | A18 | A19 | A20 | A21 | A22 | A23 | A24 | A25 | A26 | A27 | A28 | A29 | A30 | A31 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x=0 | A2 | A3 | A0 | A1 | A6 | A7 | A4 | A5 | A8 | A9 | A10 | A11 | A12 | A13 | A14 | A15 | A18 | A19 | A16 | A17 | A22 | A23 | A20 | A21 | A28 | A29 | A30 | A31 | A24 | A25 | A26 | A27 |
| y=0 | A0 | A1 | A2 | A3 | A5 | A4 | A7 | A6 | A10 | A11 | A8 | A9 | A14 | A15 | A12 | A13 | A16 | A17 | A18 | A19 | A21 | A20 | A23 | A22 | A26 | A27 | A24 | A25 | A30 | A31 | A28 | A29 |
| z=0 | A1 | A0 | A3 | A2 | A4 | A5 | A6 | A7 | A9 | A8 | A11 | A10 | A13 | A12 | A15 | A14 | A17 | A16 | A19 | A18 | A20 | A21 | A22 | A23 | A25 | A24 | A27 | A26 | A29 | A28 | A31 | A30 |
| 1x+φy+(1-φ)z=0 | A11 | A4 | A7 | A8 | A1 | A5 | A6 | A2 | A3 | A9 | A10 | A0 | A31 | A20 | A23 | A24 | A27 | A17 | A18 | A28 | A13 | A26 | A29 | A14 | A15 | A25 | A21 | A16 | A19 | A22 | A30 | A12 |
| 1x+φy-(1-φ)z=0 | A4 | A10 | A9 | A7 | A0 | A5 | A6 | A3 | A8 | A2 | A1 | A11 | A20 | A30 | A25 | A23 | A16 | A26 | A29 | A19 | A12 | A27 | A28 | A15 | A24 | A14 | A17 | A21 | A22 | A18 | A13 | A31 |
| -1x+φy+(1-φ)z=0 | A9 | A5 | A6 | A10 | A4 | A1 | A2 | A7 | A8 | A0 | A3 | A11 | A22 | A26 | A29 | A21 | A25 | A17 | A18 | A30 | A24 | A15 | A12 | A31 | A20 | A16 | A13 | A27 | A28 | A14 | A19 | A23 |
| -1x+φy-(1-φ)z=0 | A5 | A8 | A11 | A6 | A4 | A0 | A3 | A7 | A10 | A9 | A10 | A2 | A27 | A22 | A21 | A28 | A16 | A24 | A31 | A19 | A25 | A14 | A13 | A30 | A17 | A20 | A26 | A12 | A15 | A29 | A23 | A18 |
| (1-φ)x+1y+φz=0 | A10 | A1 | A2 | A9 | A11 | A5 | A6 | A8 | A7 | A3 | A0 | A4 | A30 | A13 | A14 | A25 | A21 | A27 | A28 | A22 | A31 | A16 | A19 | A24 | A23 | A15 | A26 | A17 | A18 | A29 | A12 | A20 |
| -(1-φ)x+1y+φz=0 | A8 | A1 | A2 | A11 | A4 | A9 | A10 | A7 | A0 | A5 | A6 | A3 | A12 | A27 | A28 | A15 | A20 | A25 | A30 | A23 | A16 | A29 | A26 | A19 | A24 | A17 | A22 | A13 | A14 | A21 | A18 | A31 |
| (1-φ)x-1y+φz=0 | A0 | A9 | A10 | A3 | A4 | A8 | A11 | A7 | A5 | A1 | A2 | A6 | A26 | A13 | A14 | A29 | A24 | A20 | A23 | A31 | A17 | A28 | A27 | A18 | A16 | A25 | A12 | A22 | A21 | A15 | A30 | A19 |
| -(1-φ)x-1y+φz=0 | A0 | A11 | A8 | A3 | A10 | A5 | A6 | A9 | A2 | A7 | A4 | A1 | A12 | A31 | A24 | A15 | A26 | A21 | A22 | A29 | A30 | A17 | A18 | A25 | A14 | A23 | A16 | A27 | A28 | A19 | A20 | A13 |
| φx+(1-φ)y+1z=0 | A7 | A1 | A2 | A4 | A3 | A11 | A8 | A0 | A6 | A9 | A10 | A5 | A18 | A25 | A30 | A17 | A31 | A15 | A12 | A24 | A29 | A21 | A22 | A26 | A19 | A13 | A23 | A27 | A28 | A20 | A14 | A16 |
| φx-(1-φ)y+1z=0 | A0 | A7 | A4 | A3 | A2 | A10 | A9 | A1 | A8 | A6 | A5 | A11 | A24 | A19 | A16 | A31 | A14 | A30 | A25 | A13 | A28 | A21 | A22 | A27 | A12 | A18 | A26 | A23 | A20 | A29 | A17 | A15 |
| φx+(1-φ)y-1z=0 | A0 | A6 | A5 | A3 | A8 | A2 | A1 | A11 | A4 | A9 | A10 | A7 | A16 | A29 | A26 | A19 | A12 | A28 | A27 | A15 | A20 | A30 | A25 | A23 | A24 | A22 | A14 | A18 | A17 | A13 | A21 | A31 |
| φx+(1-φ)y-1z=0 | A6 | A1 | A2 | A5 | A9 | A3 | A0 | A10 | A8 | A4 | A7 | A11 | A28 | A17 | A18 | A27 | A29 | A13 | A14 | A26 | A20 | A31 | A24 | A23 | A22 | A25 | A19 | A15 | A12 | A16 | A30 | A21 |

Şekil 7.4 $\mathbb{R}^3_{TI}$ de Yansıma Düzlemlerine Göre Köşe Noktaların Görüntüleri

**Önerme 7.5** *$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve*

$$D_1 = \{1, (\pm(1-\varphi), 0),\ (0, 1, \pm(1-\varphi)),\ (\pm(1-\varphi), 0, 1)\}$$
$$D_2 = \left\{ \begin{array}{l} (1,0,0),\ (0,1,0), (0,0,1),\ (1, \pm\varphi, \pm(1-\varphi)), (\pm(1-\varphi), 1, \pm\varphi), (\pm\varphi, \pm(1-\varphi), 1) \end{array} \right\}$$
$$D_3 = \left\{ \begin{array}{l} (1,1,1),\ (-1,1,1),\ (1,-1,1),\ (1,1,-1),\ (\pm(2-\varphi), 1, 0), \\ (0, \pm(2-\varphi), 1), (1, 0 \pm (2-\varphi)) \end{array} \right\}$$

*olmak üzere*

$$R_1 = \{r_\theta \mid \theta \in \{2\pi/5,\ 4\pi/5,\ 6\pi/5, 8\pi/5\},\ dönme\ ekseninin\ doğrultu\ vektörü\ D_1\ in\ elemanı\}$$
$$R_2 = \{r_\theta \mid \theta \in \{\pi\},\ dönme\ ekseninin\ doğrultu\ vektörü\ D_2\ in\ elemanı\}$$
$$R_3 = \{r_\theta \mid \theta = \{2\pi/3, 4\pi/3\},\ dönme\ ekseninin\ doğrultu\ vektörü\ D_3\ in\ elemanı\}$$

*kümeleri verilsin. Dönme ekseni orijinden geçen bir $l$ doğrusu olan $r_\theta$ dönmesinin bir izometri olması için gerek ve yeter koşul $r_\theta \in R_{PD} = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ olmasıdır.*

**İspat** *Bir $l$ doğrusunun birim doğrultusu $(p, q, r)$ olmak üzere $r_\theta$ Öklidyen dönmenin matris formu,*

$$\begin{bmatrix} \cos\theta + p^2(1-\cos\theta) & pq(1-\cos\theta) - r\sin\theta & pr(1-\cos\theta) + q\sin\theta \\ pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta & \cos\theta + q^2(1-\cos\theta) & qr(1-\cos\theta) - p\sin\theta \\ pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta & qr(1-\cos\theta) + p\sin\theta & \cos\theta - r^2(1-\cos\theta) \end{bmatrix}$$

*şeklindedir. $l$ eksenindeki bir dönme, $l$ doğrusu boyunca kesişen iki düzlemin yansımalarının birleşimi olduğundan önerme 6.4 den $l$ doğrusunun doğrultu vektörleri $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(0,-1,\pm(1-\varphi))$, $((1-\varphi),0,\pm1)$, $(-1,\pm(1-\varphi),0)$, $(1,\pm\varphi,\pm(1-\varphi))$, $(\pm(1-\varphi),\pm1,\varphi)$, $(\pm\varphi,-(1-\varphi),\pm1)$, $(1,1,1)$, $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$, $(\pm(2-\varphi),1,0)$, $(0,\pm(2-\varphi),1)$, $(1,0,\pm(2-\varphi))$ olarak alınabilir.*

*$\mathbb{R}^3_{TI}$ de izometrik dönmelerin bulunması için, $d_{TI}$ birim küresinin kenarlarının uzunluklarını koruyan dönmelerin bulunması yeterlidir.*

$$A_{16}=\left(\frac{5(13+5\sqrt{5})}{11(5+3\sqrt{5})},0,\frac{5(7+\sqrt{5})}{11(5+3\sqrt{5})}\right),A_0=\left(\frac{5+\sqrt{5})}{5+3\sqrt{5}},0,1\right),\ A_4=\left(1,\frac{5+\sqrt{5})}{5+3\sqrt{5}},0\right)$$

*noktalarını ele alalım. O halde $\theta\neq 0$ olmak üzere $r_\theta$, $d_{TI}$ koruması için $d_{TI}(r_\theta(A_4),r_\theta(\ A_{16}))=\frac{16-4\sqrt{5}}{11}$ ve $d_{TI}(r_\theta(A_4),r_\theta(\ A_0))=\sqrt{5}-1$ olmalıdır.*

*$l$ doğrusunun doğrultu vektörü $(0,1,(1-\varphi))$ olarak alınırsa $(p,q,r)$= $(0,\frac{1}{\sqrt{2-2\varphi+\varphi^2}},\frac{1-\varphi}{\sqrt{2-2\varphi+\varphi^2}})$ olur. $p,q,r$ değerleri $d_{TI}(r_\theta(A_4),r_\theta(\ A_{16}))=\frac{16-4\sqrt{5}}{11}$ ve $d_{TI}(r_\theta(A_4),r_\theta(A_0))=\sqrt{5}-1$ de yerine yazılırsa,*

$$K_1=\left|\tfrac{17-7\sqrt{5}}{22}\cos\theta-\left(\tfrac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}+\tfrac{50+10\sqrt{5}}{100}\tfrac{4\sqrt{5}-5}{11}\right)\sin\theta\right|,$$

$$L_1=\left|\tfrac{17-7\sqrt{5}}{22}\tfrac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\sin\theta+\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\cos\theta+\left(\tfrac{50+10\sqrt{5}}{100}\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}-\tfrac{\sqrt{5}}{5}\tfrac{4\sqrt{5}-5}{11}\right)(1-\cos\theta)\right|,$$

$$M_1=\left|\tfrac{17-7\sqrt{5}}{22}\tfrac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\sin\theta+\tfrac{4\sqrt{5}-5}{11}\cos\theta+\left(\tfrac{50-10\sqrt{5}}{100}\tfrac{4\sqrt{5}-5}{11}-\tfrac{\sqrt{5}}{5}\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)(1-\cos\theta)\right|,$$

$$K_2=\left|\tfrac{3-\sqrt{5}}{22}\cos\theta-\left(\tfrac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}+\tfrac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{100}\right)\sin\theta\right|,$$

$$L_2=\left|\tfrac{3-\sqrt{5}}{22}\tfrac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\sin\theta+\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\cos\theta+\left(\tfrac{50+10\sqrt{5}}{100}\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}-\tfrac{\sqrt{5}}{5}\right)(1-\cos\theta)\right| \text{ ve}$$

$$M_2=\left|\tfrac{3-\sqrt{5}}{22}\tfrac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\sin\theta+\cos\theta+\left(\tfrac{50-10\sqrt{5}}{100}-\tfrac{\sqrt{5}}{55}\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)(1-\cos\theta)\right| \text{ olmak üzere}$$

$$\max\left\{\begin{array}{l}K_1+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l}M_1,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})K_1+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})M_1+L_1,\\(\frac{-1-\sqrt{5}}{2})K_1+(\sqrt{5}+1)M_1+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})L_1\end{array}\right\},\\ L_1+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l}K_1,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})L_1+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})K_1+M_1,\\(\frac{-1-\sqrt{5}}{2})L_1+(\sqrt{5}+1)K_1+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})M_1\end{array}\right\},\\ M_1+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l}L_1,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})M_1+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})L_1+K_1,\\(\frac{-1-\sqrt{5}}{2})M_1+(\sqrt{5}+1)L_1+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})K_1\end{array}\right\}\end{array}\right\}=\frac{16-4\sqrt{5}}{11}$$

$$\max\left\{\begin{array}{l}K_2+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l}M_2,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})K_2+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})M_2+L_2,\\(\frac{-1-\sqrt{5}}{2})K_2+(\sqrt{5}+1)M_2+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})L_2\end{array}\right\},\\ L_2+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l}K_2,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})L_2+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})K_2+M_2,\\(\frac{-1-\sqrt{5}}{2})L_2+(\sqrt{5}+1)K_2+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})M_2\end{array}\right\},\\ M_2+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l}L_2,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})M_2+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})L_2+K_2,\\(\frac{-1-\sqrt{5}}{2})M_2+(\sqrt{5}+1)L_2+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})K_2\end{array}\right\}\end{array}\right\}=\sqrt{5}-1$$

*denklem sistemi elde edilir. Bu denklemler çözülürse* $\theta = 2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5$ *sonuçları bulunur. Benzer şekilde, eğer l doğrusunun yön vektörü;*

$$(1, \pm(1-\varphi), 0), (0, 1, \pm(1-\varphi)), (\pm(1-\varphi), 0, 1)$$

*olarak alınır ise* $\theta = 2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5$ *olur.*

*l doğrusunun yön vektörü (1,0,0) ise* $(p, q, r) = (1, 0, 0)$ *olur.* $p, q, r$ *değerleri* $d_{TI}(r_\theta(A_4), r_\theta(\ A_{16})) = \frac{16-4\sqrt{5}}{11}$ *ve* $d_{TI}(r_\theta(A_4), r_\theta(A_0)) = \sqrt{5}-1$ *de yerine yazılırsa,*

$$K_1 = \left|\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\cos\theta + \tfrac{4\sqrt{5}-5}{11}\sin\theta\right|, L_1 = \left|\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\sin\theta - \tfrac{4\sqrt{5}-5}{11}\cos\theta\right|, M_1 = \left|\tfrac{17-7\sqrt{5}}{22}\right|,$$

$K_2 = \left|\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cos\theta + \sin\theta\right|, L_2 = \left|\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cos\theta - \sin\theta\right|$ *ve* $M_2 = \left|\frac{3-\sqrt{5}}{22}\right|$ *olmak üzere*

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_1 + \frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l} M_1, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})K_1 + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})M_1 + L_1, \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})K_1 + (\sqrt{5}+1)M_1 + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})L_1 \end{array}\right\}, \\ L_1 + \frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l} K_1, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})L_1 + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})K_1 + M_1, \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})L_1 + (\sqrt{5}+1)K_1 + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})M_1 \end{array}\right\}, \\ M_1 + \frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l} L_1, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})M_1 + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})L_1 + K_1, \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})M_1 + (\sqrt{5}+1)L_1 + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})K_1 \end{array}\right\} \end{array}\right\} = \frac{16-4\sqrt{5}}{11}$$

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_2 + \frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l} M_2, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})K_2 + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})M_2 + L_2, \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})K_2 + (\sqrt{5}+1)M_2 + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})L_2 \end{array}\right\}, \\ L_2 + \frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l} K_2, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})L_2 + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})K_2 + M_2, \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})L_2 + (\sqrt{5}+1)K_2 + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})M_2 \end{array}\right\}, \\ M_2 + \frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l} L_2, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})M_2 + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})L_2 + K_2, \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})M_2 + (\sqrt{5}+1)L_2 + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})K_2 \end{array}\right\} \end{array}\right\} = \sqrt{5}-1$$

*denklemeleri elde edilir. Bu denklemler çözülürse* $\theta = \pi$ *olur. Buradan l etrafındaki* $\theta = \pi$ *radyanlık dönmeler* $\mathbb{R}^3_{TI}$ *ün bir izometrisidir. Benzer şekilde, l nin yön vektörü*

$$(0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, \varphi, \pm(1-\varphi)), (\pm(1-\varphi)1, \varphi), (\varphi, \pm(1-\varphi), 1)$$

*ise* $\theta = \pi$ *sonucu bulunur.*

*l nin yön vektörü (1,1,1) ise* $(p, q, r) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olur.* $p, q, r$ *değerleri* $d_{TI}(r_\theta(A_4), r_\theta(\ A_{16})) = \frac{16-4\sqrt{5}}{11}$ *ve* $d_{TI}(r_\theta(A_4), r_\theta(A_0)) = \sqrt{5}-1$ *de yerine yazılırsa,*

$$K_1 = \left|\tfrac{17-7\sqrt{5}}{22}\left(\tfrac{2\cos\theta+1}{3}\right) + \tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\tfrac{1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right) - \tfrac{4\sqrt{5}-5}{11}\left(\tfrac{1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)\right|,$$

$$L_1 = \left|\tfrac{17-7\sqrt{5}}{22}\left(\tfrac{1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right) + \tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\tfrac{1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right) - \tfrac{4\sqrt{5}-5}{11}\left(\tfrac{2\cos\theta+1}{3}\right)\right|,$$

$$M_1 = \left| \tfrac{17-7\sqrt{5}}{22} \left( \tfrac{1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{3} \right) + \tfrac{\sqrt{5}-1}{2} \left( \tfrac{2\cos\theta+1}{3} \right) - \tfrac{4\sqrt{5}-5}{11} \left( \tfrac{1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{3} \right) \right|,$$

$$K_2 = \left| \tfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta + \tfrac{\sqrt{5}-1}{2} \left( \tfrac{2\cos\theta+1}{3} \right) - \tfrac{\sqrt{5}-1}{2} \left( \tfrac{1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{3} \right) \right|,$$

$$L_2 = \left| \cos\theta + \tfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta + \tfrac{\sqrt{5}-1}{2} \left( \tfrac{-2\sqrt{3}}{3} \right) \sin\theta \right| \textit{ ve}$$

$$M_2 = \left| \cos\theta - \tfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta + \tfrac{\sqrt{5}-1}{2} \left( -\cos\theta - \tfrac{\sqrt{3}\sin\theta}{3} \right) \right| \textit{ olmak üzere}$$

$$\max \left\{ \begin{array}{l} K_1 + \tfrac{3\sqrt{5}-5}{10} \max \left\{ \begin{array}{l} M_1, (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})K_1 + (\tfrac{\sqrt{5}+3}{2})M_1 + L_1, \\ (\tfrac{-1-\sqrt{5}}{2})K_1 + (\sqrt{5}+1)M_1 + (\tfrac{\sqrt{5}+3}{2})L_1 \end{array} \right\}, \\ L_1 + \tfrac{3\sqrt{5}-5}{10} \max \left\{ \begin{array}{l} K_1, (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})L_1 + (\tfrac{\sqrt{5}+3}{2})K_1 + M_1, \\ (\tfrac{-1-\sqrt{5}}{2})L_1 + (\sqrt{5}+1)K_1 + (\tfrac{\sqrt{5}+3}{2})M_1 \end{array} \right\}, \\ M_1 + \tfrac{3\sqrt{5}-5}{10} \max \left\{ \begin{array}{l} L_1, (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})M_1 + (\tfrac{\sqrt{5}+3}{2})L_1 + K_1, \\ (\tfrac{-1-\sqrt{5}}{2})M_1 + (\sqrt{5}+1)L_1 + (\tfrac{\sqrt{5}+3}{2})K_1 \end{array} \right\} \end{array} \right\} = \frac{16-4\sqrt{5}}{11}$$

$$\max \left\{ \begin{array}{l} K_2 + \tfrac{3\sqrt{5}-5}{10} \max \left\{ \begin{array}{l} M_2, (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})K_2 + (\tfrac{\sqrt{5}+3}{2})M_2 + L_2, \\ (\tfrac{-1-\sqrt{5}}{2})K_2 + (\sqrt{5}+1)M_2 + (\tfrac{\sqrt{5}+3}{2})L_2 \end{array} \right\}, \\ L_2 + \tfrac{3\sqrt{5}-5}{10} \max \left\{ \begin{array}{l} K_2, (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})L_2 + (\tfrac{\sqrt{5}+3}{2})K_2 + M_2, \\ (\tfrac{-1-\sqrt{5}}{2})L_2 + (\sqrt{5}+1)K_2 + (\tfrac{\sqrt{5}+3}{2})M_2 \end{array} \right\}, \\ M_2 + \tfrac{3\sqrt{5}-5}{10} \max \left\{ \begin{array}{l} L_2, (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})M_2 + (\tfrac{\sqrt{5}+3}{2})L_2 + K_2, \\ (\tfrac{-1-\sqrt{5}}{2})M_2 + (\sqrt{5}+1)L_2 + (\tfrac{\sqrt{5}+3}{2})K_2 \end{array} \right\} \end{array} \right\} = \sqrt{5}-1$$

*denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülürse* $\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ *olur.Buradan l etrafındaki* $\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ *radyanlık dönmeler* $\mathbb{R}^3_{DH}$ *ün bir izometrisidir. Benzer şekilde, eğer l nin yön vektörü*

$$(-1,1,1), (1,-1,1), (1,1,-1), (\pm(2-\varphi),1,0), (0,\pm(2-\varphi),1), (1,0,\pm(2-\varphi))$$

*ise* $\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$*olur.*

*Tersine* $r_\theta(X) = Y$ *olacak şekilde* $X$ *ve* $Y$ *noktalarıyla oluşturulan* $OX$ *ve* $OY$ *doğrularının doğrultuları sırasıyla* $(p_1, q_1, r_1)$ *ve* $(p_2, q_2, r_2)$ *olmak üzere* $d_{TI}(OX) = d_{PD}(OY)$ *olduğunu göstermek için önerme 6.2 den* $\mu_{OX} = \mu_{OY}$ *olduğu gösterilmelidir. Bu ise* $(p_1, q_1, r_1)$ *vektörünün tüm durumları için görüntüleri bulunarak kolaylıkla gösterilebilir. Örneğin doğrultu vektörü* $(1,1,1)$ *olmak üzere, bu eksende* $\frac{2\pi}{3}$ *radyanlık dönme dönüşümü yapılınca*$(p_2, q_2, r_2) = (r_1, p_{,1}, q_1)$ *bulunur. Buradan da açıkça* $\mu(OX) = \mu(OY)$ *olduğu görülür. Benzer şekilde diğer dönme eksenleri ve dönme açıları için eşitlik gösterilebilir. Buda ispatı tamamlar.*

**Sonuç 7.5** *Orijinden geçen doğrulara göre izometrik dönmelerin* $R_{TI}$ *kümesi tam olarak 59 Öklidyen dönme içerir.*

Şekil7.5 deki tablo birim kürenin köşe noktalarının ilgili dönme dönüşümleri altındaki görüntülerini vermektedir.

| Dönme Ekseni Doğrultu Vektörleri | | A0 | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 | A10 | A11 | A12 | A13 | A14 | A15 | A16 | A17 | A18 | A19 | A20 | A21 | A22 | A23 | A24 | A25 | A26 | A27 | A28 | A29 | A30 | A31 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1,0,0) | θ=π | A1 | A0 | A3 | A2 | A5 | A4 | A7 | A6 | A11 | A10 | A9 | A8 | A15 | A14 | A13 | A12 | A17 | A16 | A19 | A18 | A21 | A20 | A23 | A22 | A27 | A26 | A25 | A24 | A31 | A30 | A29 | A28 |
| (0,1,0) | θ=π | A3 | A2 | A1 | A0 | A6 | A7 | A4 | A5 | A9 | A8 | A11 | A10 | A13 | A12 | A15 | A14 | A19 | A18 | A17 | A16 | A22 | A23 | A20 | A21 | A29 | A28 | A31 | A30 | A25 | A24 | A27 | A26 |
| (0,0,1) | θ=π | A2 | A3 | A0 | A1 | A7 | A6 | A5 | A4 | A10 | A11 | A8 | A9 | A14 | A15 | A12 | A13 | A18 | A19 | A16 | A17 | A23 | A22 | A21 | A20 | A30 | A31 | A28 | A29 | A26 | A27 | A24 | A25 |
| (1,1,1) | θ=2π/3 | A4 | A6 | A5 | A7 | A8 | A9 | A10 | A11 | A0 | A2 | A1 | A3 | A16 | A18 | A17 | A19 | A20 | A22 | A21 | A23 | A12 | A13 | A14 | A15 | A24 | A28 | A25 | A29 | A26 | A30 | A27 | A31 |
| | θ=4π/3 | A8 | A10 | A9 | A11 | A0 | A2 | A1 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A20 | A21 | A22 | A23 | A12 | A14 | A13 | A15 | A16 | A18 | A17 | A19 | A24 | A26 | A28 | A30 | A25 | A27 | A29 | A31 |
| (-1,1,1) | θ=2π/3 | A9 | A11 | A8 | A10 | A3 | A1 | A2 | A0 | A6 | A7 | A4 | A5 | A22 | A23 | A20 | A21 | A13 | A15 | A12 | A14 | A19 | A17 | A18 | A16 | A29 | A31 | A25 | A27 | A28 | A30 | A24 | A26 |
| | θ=4π/3 | A7 | A5 | A6 | A4 | A10 | A11 | A8 | A9 | A2 | A0 | A3 | A1 | A18 | A16 | A19 | A17 | A23 | A21 | A22 | A20 | A14 | A15 | A12 | A13 | A30 | A26 | A31 | A27 | A28 | A24 | A29 | A25 |
| (1,-1,1) | θ=2π/3 | A10 | A8 | A11 | A9 | A2 | A0 | A3 | A1 | A7 | A6 | A5 | A4 | A23 | A22 | A21 | A20 | A14 | A12 | A15 | A13 | A18 | A16 | A19 | A17 | A30 | A28 | A26 | A24 | A31 | A29 | A27 | A25 |
| | θ=4π/3 | A5 | A7 | A4 | A6 | A11 | A10 | A9 | A8 | A1 | A3 | A0 | A2 | A17 | A19 | A16 | A18 | A21 | A23 | A20 | A22 | A15 | A14 | A13 | A12 | A27 | A31 | A26 | A30 | A25 | A29 | A24 | A28 |
| (1,1,-1) | θ=2π/3 | A11 | A9 | A10 | A8 | A1 | A3 | A0 | A2 | A5 | A4 | A7 | A6 | A21 | A20 | A23 | A22 | A15 | A13 | A14 | A12 | A17 | A19 | A16 | A18 | A27 | A25 | A31 | A29 | A26 | A24 | A30 | A28 |
| | θ=4π/3 | A6 | A4 | A7 | A5 | A9 | A8 | A11 | A10 | A3 | A1 | A2 | A0 | A19 | A17 | A18 | A16 | A22 | A20 | A23 | A21 | A13 | A12 | A15 | A14 | A29 | A25 | A28 | A24 | A31 | A27 | A30 | A26 |
| (0,(2-φ),1) | θ=2π/3 | A8 | A3 | A0 | A11 | A6 | A9 | A10 | A5 | A2 | A7 | A14 | A1 | A12 | A31 | A24 | A15 | A22 | A29 | A26 | A21 | A18 | A25 | A30 | A17 | A28 | A19 | A20 | A13 | A14 | A23 | A16 | A27 |
| | θ=4π/3 | A2 | A11 | A8 | A1 | A10 | A7 | A4 | A9 | A0 | A5 | A6 | A3 | A12 | A27 | A28 | A15 | A30 | A23 | A20 | A25 | A26 | A19 | A16 | A29 | A14 | A21 | A18 | A31 | A24 | A17 | A22 | A13 |
| (0,-(2-φ),1) | θ=2π/3 | A10 | A3 | A0 | A9 | A11 | A7 | A4 | A8 | A5 | A1 | A2 | A6 | A26 | A13 | A14 | A29 | A23 | A31 | A24 | A20 | A27 | A18 | A17 | A28 | A21 | A15 | A30 | A19 | A16 | A25 | A12 | A22 |
| | θ=4π/3 | A2 | A9 | A10 | A1 | A6 | A8 | A11 | A5 | A7 | A3 | A0 | A4 | A30 | A13 | A14 | A25 | A28 | A22 | A21 | A27 | A19 | A24 | A31 | A16 | A18 | A29 | A12 | A20 | A23 | A15 | A26 | A17 |
| ((2-φ),1,0) | θ=2π/3 | A1 | A6 | A5 | A2 | A9 | A3 | A0 | A10 | A4 | A8 | A11 | A7 | A17 | A28 | A27 | A18 | A13 | A29 | A26 | A14 | A20 | A31 | A24 | A23 | A25 | A22 | A15 | A19 | A16 | A12 | A21 | A30 |
| | θ=4π/3 | A6 | A0 | A3 | A5 | A8 | A2 | A1 | A11 | A9 | A4 | A7 | A10 | A29 | A16 | A19 | A26 | A28 | A12 | A15 | A27 | A20 | A30 | A25 | A23 | A22 | A24 | A18 | A14 | A13 | A17 | A31 | A21 |
| (-(2-φ),1,0) | θ=2π/3 | A7 | A0 | A3 | A4 | A2 | A10 | A9 | A1 | A6 | A8 | A11 | A5 | A19 | A24 | A31 | A16 | A30 | A14 | A13 | A25 | A28 | A21 | A22 | A27 | A18 | A12 | A23 | A26 | A29 | A20 | A15 | A17 |
| | θ=4π/3 | A1 | A7 | A4 | A2 | A3 | A11 | A8 | A0 | A9 | A6 | A5 | A10 | A25 | A18 | A17 | A30 | A15 | A31 | A24 | A12 | A29 | A21 | A22 | A26 | A13 | A19 | A27 | A23 | A20 | A28 | A16 | A14 |
| (1,0,(2-φ)) | θ=2π/3 | A5 | A8 | A11 | A6 | A0 | A4 | A7 | A3 | A10 | A2 | A1 | A9 | A21 | A28 | A27 | A22 | A16 | A24 | A31 | A19 | A14 | A25 | A30 | A13 | A26 | A12 | A17 | A20 | A23 | A18 | A15 | A29 |
| | θ=4π/3 | A4 | A10 | A9 | A7 | A5 | A0 | A3 | A6 | A1 | A11 | A8 | A2 | A25 | A23 | A20 | A30 | A16 | A26 | A29 | A19 | A27 | A12 | A15 | A28 | A17 | A21 | A24 | A14 | A13 | A31 | A22 | A18 |
| (1,0,-(2-φ)) | θ=2π/3 | A9 | A5 | A6 | A10 | A1 | A4 | A7 | A2 | A3 | A11 | A8 | A0 | A29 | A21 | A22 | A26 | A25 | A17 | A18 | A30 | A15 | A24 | A31 | A12 | A13 | A27 | A20 | A16 | A19 | A23 | A28 | A14 |
| | θ=4π/3 | A11 | A4 | A7 | A8 | A5 | A1 | A2 | A6 | A10 | A0 | A3 | A9 | A23 | A24 | A31 | A20 | A27 | A17 | A18 | A28 | A26 | A13 | A14 | A29 | A21 | A16 | A15 | A25 | A30 | A12 | A19 | A22 |
| (0,1,(1-φ)) | θ=2π/5 | A4 | A3 | A0 | A7 | A9 | A1 | A2 | A10 | A8 | A6 | A5 | A11 | A24 | A19 | A16 | A31 | A25 | A13 | A14 | A30 | A22 | A27 | A28 | A21 | A20 | A29 | A17 | A15 | A12 | A18 | A26 | A23 |
| | θ=4π/5 | A9 | A7 | A4 | A10 | A6 | A3 | A0 | A5 | A8 | A2 | A1 | A11 | A20 | A30 | A25 | A23 | A29 | A19 | A16 | A26 | A28 | A15 | A12 | A27 | A22 | A18 | A13 | A31 | A24 | A14 | A17 | A21 |
| | θ=6π/5 | A6 | A10 | A9 | A5 | A2 | A7 | A4 | A1 | A8 | A0 | A3 | A11 | A22 | A26 | A29 | A21 | A18 | A30 | A25 | A17 | A12 | A31 | A24 | A15 | A28 | A14 | A19 | A23 | A20 | A16 | A13 | A27 |
| | θ=8π/5 | A2 | A5 | A6 | A1 | A0 | A11 | A9 | A3 | A8 | A4 | A7 | A11 | A28 | A17 | A18 | A27 | A14 | A26 | A29 | A13 | A24 | A23 | A20 | A31 | A12 | A16 | A30 | A21 | A22 | A25 | A19 | A15 |
| (0,1,-(1-φ)) | θ=2π/5 | A5 | A3 | A0 | A6 | A1 | A11 | A8 | A2 | A4 | A9 | A10 | A7 | A16 | A29 | A26 | A19 | A27 | A15 | A12 | A28 | A25 | A23 | A20 | A30 | A17 | A13 | A21 | A31 | A24 | A22 | A14 | A18 |
| | θ=4π/5 | A11 | A6 | A5 | A8 | A3 | A7 | A4 | A0 | A1 | A9 | A10 | A2 | A27 | A22 | A21 | A28 | A31 | A19 | A16 | A24 | A13 | A30 | A25 | A14 | A15 | A29 | A23 | A18 | A17 | A20 | A26 | A12 |
| | θ=6π/5 | A7 | A12 | A15 | A4 | A6 | A2 | A1 | A5 | A3 | A13 | A14 | A0 | A31 | A20 | A23 | A24 | A18 | A28 | A27 | A17 | A29 | A14 | A13 | A26 | A19 | A22 | A30 | A12 | A15 | A25 | A21 | A16 |
| | θ=8π/5 | A2 | A4 | A7 | A1 | A8 | A0 | A3 | A11 | A6 | A9 | A10 | A5 | A18 | A25 | A30 | A17 | A12 | A24 | A31 | A15 | A22 | A26 | A29 | A21 | A28 | A20 | A14 | A16 | A19 | A13 | A23 | A27 |
| ((1-φ),0,1) | θ=2π/5 | A0 | A9 | A10 | A3 | A8 | A4 | A7 | A11 | A2 | A6 | A5 | A1 | A14 | A29 | A26 | A13 | A24 | A20 | A23 | A31 | A28 | A17 | A18 | A27 | A12 | A22 | A16 | A25 | A30 | A19 | A21 | A15 |
| | θ=4π/5 | A0 | A6 | A5 | A3 | A2 | A8 | A11 | A1 | A10 | A7 | A4 | A9 | A26 | A19 | A16 | A29 | A12 | A28 | A27 | A15 | A30 | A20 | A23 | A25 | A14 | A18 | A24 | A22 | A21 | A31 | A17 | A13 |
| | θ=6π/5 | A0 | A7 | A4 | A3 | A10 | A2 | A1 | A9 | A5 | A11 | A8 | A6 | A16 | A31 | A24 | A19 | A14 | A30 | A25 | A13 | A21 | A28 | A27 | A22 | A26 | A23 | A12 | A18 | A17 | A15 | A20 | A29 |
| | θ=8π/5 | A0 | A11 | A8 | A3 | A5 | A10 | A9 | A6 | A4 | A1 | A2 | A7 | A24 | A15 | A12 | A31 | A26 | A21 | A22 | A29 | A17 | A30 | A25 | A18 | A16 | A27 | A14 | A23 | A30 | A13 | A28 | A19 |
| (-(1-φ),0,1) | θ=2π/5 | A10 | A1 | A2 | A9 | A5 | A11 | A8 | A6 | A0 | A4 | A7 | A3 | A14 | A25 | A30 | A13 | A21 | A27 | A28 | A22 | A16 | A31 | A24 | A19 | A26 | A17 | A23 | A15 | A12 | A20 | A18 | A29 |
| | θ=4π/5 | A7 | A1 | A2 | A4 | A11 | A3 | A0 | A8 | A10 | A5 | A6 | A9 | A30 | A17 | A18 | A25 | A31 | A15 | A12 | A24 | A21 | A29 | A26 | A22 | A23 | A27 | A19 | A13 | A14 | A16 | A28 | A20 |
| | θ=6π/5 | A6 | A1 | A2 | A5 | A3 | A9 | A10 | A0 | A7 | A11 | A8 | A4 | A18 | A27 | A28 | A17 | A29 | A13 | A14 | A26 | A31 | A20 | A23 | A24 | A19 | A15 | A22 | A25 | A30 | A21 | A12 | A16 |
| | θ=8π/5 | A8 | A1 | A2 | A11 | A9 | A4 | A7 | A10 | A6 | A3 | A0 | A5 | A28 | A15 | A12 | A27 | A20 | A25 | A30 | A23 | A29 | A16 | A19 | A26 | A22 | A13 | A24 | A17 | A18 | A31 | A14 | A21 |
| ((1-φ),1,0) | θ=2π/5 | A5 | A9 | A10 | A6 | A4 | A1 | A2 | A7 | A0 | A8 | A11 | A3 | A26 | A22 | A21 | A29 | A17 | A25 | A30 | A18 | A24 | A15 | A12 | A31 | A16 | A20 | A27 | A13 | A14 | A28 | A23 | A19 |
| | θ=4π/5 | A1 | A8 | A11 | A2 | A4 | A9 | A10 | A6 | A5 | A0 | A3 | A6 | A27 | A12 | A15 | A28 | A25 | A20 | A23 | A30 | A16 | A29 | A26 | A19 | A17 | A24 | A13 | A22 | A21 | A14 | A31 | A18 |
| | θ=6π/5 | A9 | A0 | A3 | A10 | A4 | A8 | A11 | A7 | A1 | A5 | A6 | A2 | A13 | A26 | A29 | A14 | A20 | A24 | A31 | A23 | A17 | A28 | A27 | A18 | A25 | A16 | A22 | A12 | A15 | A21 | A19 | A30 |
| | θ=8π/5 | A8 | A5 | A6 | A11 | A4 | A0 | A3 | A7 | A9 | A1 | A2 | A10 | A22 | A27 | A28 | A21 | A24 | A16 | A19 | A31 | A25 | A14 | A13 | A30 | A20 | A17 | A12 | A26 | A29 | A15 | A18 | A23 |
| (-(1-φ),1,0) | θ=2π/5 | A10 | A4 | A7 | A9 | A0 | A5 | A6 | A3 | A2 | A8 | A11 | A1 | A30 | A20 | A23 | A25 | A26 | A16 | A19 | A29 | A12 | A27 | A28 | A15 | A14 | A24 | A21 | A17 | A18 | A22 | A31 | A13 |
| | θ=4π/5 | A11 | A0 | A3 | A8 | A10 | A5 | A6 | A9 | A7 | A2 | A1 | A4 | A31 | A12 | A15 | A24 | A21 | A26 | A29 | A22 | A30 | A17 | A18 | A25 | A23 | A14 | A27 | A16 | A19 | A28 | A13 | A20 |
| | θ=6π/5 | A1 | A10 | A9 | A2 | A11 | A5 | A6 | A8 | A3 | A7 | A5 | A0 | A13 | A30 | A25 | A14 | A27 | A21 | A22 | A28 | A31 | A16 | A19 | A24 | A15 | A23 | A17 | A26 | A29 | A18 | A20 | A12 |
| | θ=8π/5 | A4 | A11 | A8 | A7 | A1 | A5 | A6 | A2 | A9 | A3 | A0 | A10 | A20 | A31 | A24 | A23 | A17 | A27 | A28 | A18 | A13 | A26 | A29 | A14 | A25 | A15 | A16 | A21 | A22 | A19 | A12 | A30 |
| (1,φ,(1-φ)) | θ=π | A8 | A7 | A4 | A11 | A2 | A6 | A5 | A1 | A0 | A10 | A9 | A3 | A24 | A23 | A20 | A31 | A28 | A18 | A17 | A27 | A14 | A29 | A26 | A13 | A12 | A30 | A22 | A19 | A16 | A21 | A25 | A15 |
| (1,φ,-(1-φ)) | θ=π | A7 | A9 | A10 | A4 | A3 | A6 | A5 | A0 | A11 | A1 | A2 | A8 | A23 | A25 | A30 | A20 | A19 | A29 | A26 | A16 | A15 | A28 | A27 | A12 | A31 | A13 | A18 | A22 | A21 | A17 | A14 | A24 |
| (1,-φ,(1-φ)) | θ=π | A10 | A6 | A5 | A9 | A7 | A2 | A1 | A4 | A11 | A3 | A0 | A8 | A21 | A29 | A26 | A22 | A30 | A18 | A17 | A25 | A31 | A12 | A15 | A24 | A23 | A19 | A14 | A28 | A27 | A13 | A16 | A20 |
| (1,-φ,-(1-φ)) | θ=π | A6 | A11 | A8 | A5 | A7 | A3 | A0 | A4 | A2 | A10 | A9 | A1 | A28 | A21 | A22 | A27 | A19 | A31 | A24 | A16 | A30 | A13 | A14 | A25 | A18 | A23 | A29 | A15 | A12 | A26 | A20 | A17 |
| (φ,(1-φ),1) | θ=π | A9 | A2 | A1 | A10 | A8 | A6 | A5 | A11 | A4 | A0 | A3 | A7 | A25 | A14 | A13 | A30 | A22 | A28 | A27 | A21 | A24 | A19 | A16 | A31 | A20 | A12 | A29 | A18 | A17 | A26 | A15 | A23 |
| (φ,-(1-φ),1) | θ=π | A11 | A2 | A1 | A8 | A7 | A10 | A9 | A4 | A3 | A6 | A5 | A0 | A15 | A28 | A27 | A12 | A23 | A30 | A25 | A20 | A19 | A26 | A29 | A16 | A31 | A18 | A21 | A14 | A13 | A22 | A17 | A24 |
| (-φ,(1-φ),1) | θ=π | A3 | A10 | A9 | A0 | A7 | A11 | A8 | A4 | A6 | A2 | A1 | A5 | A29 | A14 | A13 | A26 | A31 | A23 | A20 | A24 | A18 | A27 | A28 | A17 | A19 | A30 | A15 | A21 | A22 | A12 | A25 | A16 |
| (-φ,-(1-φ),1) | θ=π | A3 | A8 | A11 | A0 | A9 | A6 | A5 | A10 | A1 | A4 | A7 | A2 | A15 | A24 | A31 | A12 | A29 | A22 | A21 | A26 | A25 | A18 | A17 | A30 | A13 | A20 | A19 | A28 | A27 | A16 | A23 | A14 |
| ((1-φ),1,φ) | θ=π | A4 | A2 | A1 | A7 | A0 | A8 | A11 | A3 | A5 | A10 | A9 | A6 | A17 | A30 | A25 | A18 | A24 | A12 | A15 | A31 | A26 | A22 | A21 | A29 | A16 | A14 | A20 | A28 | A27 | A23 | A13 | A19 |
| ((1-φ),1,-φ) | θ=π | A3 | A4 | A7 | A0 | A1 | A9 | A10 | A2 | A11 | A5 | A6 | A8 | A31 | A16 | A19 | A24 | A13 | A25 | A30 | A14 | A27 | A22 | A21 | A28 | A15 | A17 | A29 | A20 | A23 | A26 | A18 | A12 |
| (-(1-φ),1,φ) | θ=π | A3 | A5 | A6 | A0 | A11 | A1 | A2 | A8 | A7 | A10 | A9 | A4 | A19 | A26 | A29 | A16 | A15 | A27 | A28 | A12 | A23 | A25 | A30 | A20 | A31 | A21 | A13 | A17 | A18 | A14 | A22 | A24 |
| (-(1-φ),1,-φ) | θ=π | A5 | A2 | A1 | A6 | A10 | A0 | A3 | A9 | A11 | A7 | A4 | A8 | A27 | A18 | A17 | A28 | A26 | A14 | A13 | A29 | A23 | A24 | A31 | A20 | A21 | A30 | A16 | A12 | A15 | A19 | A25 | A22 |

Şekil 7.5 $\mathbb{R}^3_{TI}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

**Yardımcı Teorem 7.2** *$(x, y, z)$ noktasını $(-x, -y, -z)$ eşleyen dönüşüm olan orijine göre $\sigma_0$ inversiyonu (noktaya göre yansıma) $\mathbb{R}^3_{DH}$ ün bir izometrisidir.*

Şekil7.6 daki tabloda inversiyon dönüşümü altında birim kürenin köşe noktalarının görüntüleri verilmektedir.

| İnversiyon Altında Nokta Görüntüler | A0 | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 | A10 | A11 | A12 | A13 | A14 | A15 | A16 | A17 | A18 | A19 | A20 | A21 | A22 | A23 | A24 | A25 | A26 | A27 | A28 | A29 | A30 | A31 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $O$=(O,O,O) | A3 | A2 | A1 | A0 | A7 | A6 | A5 | A4 | A11 | A10 | A9 | A8 | A15 | A14 | A13 | A12 | A19 | A18 | A17 | A16 | A23 | A22 | A21 | A20 | A31 | A30 | A29 | A28 | A27 | A26 | A25 | A24 |

Şekil 7.6 $\mathbb{R}^3_{TI}$ de $\sigma_O$ İnversiyonu Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

**Önerme 7.6** *$d_{TI}$ uzaklığını invaryant bırakan orijine göre dönme yansımaların hepsi orijine göre inversiyon dönüşümüne eşittir.*

**İspat** *$r_\theta \in R_{TI}$, $\Gamma$, $\Delta$ ve $\Pi$ düzlemine dik olan düzlemler olmak üzere bir dönme yansıma $\rho = \sigma_\Pi \sigma_\Delta \sigma_\Gamma = \sigma_\Pi r_\theta$ bileşkesi olarak yazılabilir. O halde dönme ekseni yansıma düzlemine dik olmak zorundadır. $D_1$ ve $D_3$ de verilen dönme eksenlerinden hiçbiri sonuç 6.4 de verilen yansıma düzlemlerine dik olmadığından dolayı Önerme 6.5 den $\Pi$ düzlemi için otuz bir dönme ekseninden on beş durum incelenmelidir. $\Pi$ düzlemi olarak $x = 0$ düzlemini alalım. Bu durumda $r_\theta$ nın birim doğrultu vektörü $(1, 0, 0)$ olmak üzere*

$$\rho : \sigma_\Pi r_\theta(x, y, z) = (-x, ycos\theta - zsin\theta, ysin\theta + zcos\theta)$$

*olarak tanımlıdır. Buradan*

$$A_{16} = \left(\frac{5(13+5\sqrt{5})}{11(5+3\sqrt{5})}, 0, \frac{5(7+\sqrt{5})}{11(5+3\sqrt{5})}\right), A_0 = \left(\frac{5+\sqrt{5})}{5+3\sqrt{5}}, 0, 1\right), A_4 = \left(1, \frac{5+\sqrt{5})}{5+3\sqrt{5}}, 0\right)$$

*noktaları için;*

$$\rho(A_0) = (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}, -\sin\theta, \cos\theta)$$
$$\rho(A_4) = (-1, \tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\cos\theta, \tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\sin\theta)$$
$$\rho(A_{16}) = (\tfrac{-7\sqrt{5}+5)}{22}, -\tfrac{4\sqrt{5}-5}{11}\sin\theta, \tfrac{4\sqrt{5}-5}{11}\cos\theta)$$

*olup $d_{TI}(\rho(A_4), \rho(A_{16})) = \frac{16-4\sqrt{5}}{11}$ ve $d_{TI}(\rho(A_4), \rho(A_0)) = \sqrt{5} - 1$ olmak zorunda olduğundan $K_1 = \left|\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cos\theta\right|$, $L_1 = \left|\frac{\sqrt{5}-1}{2}\sin\theta\right|$, $M_1 = \left|\frac{17-7\sqrt{5}}{22}\right|$,*

$K_2 = \left|\cos\theta - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\sin\theta\right|$, $L_2 = \left|\sin\theta + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\cos\theta\right|$ *ve* $M_2 = \left|\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right|$ *olmak üzere*

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_1 + \frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l} M_1, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})K_1 + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})M_1 + L_1, \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})K_1 + (\sqrt{5}+1)M_1 + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})L_1 \end{array}\right\}, \\ L_1 + \frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l} K_1, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})L_1 + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})K_1 + M_1, \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})L_1 + (\sqrt{5}+1)K_1 + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})M_1 \end{array}\right\}, \\ M_1 + \frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l} L_1, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})M_1 + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})L_1 + K_1, \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})M_1 + (\sqrt{5}+1)L_1 + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})K_1 \end{array}\right\} \end{array}\right\} = \frac{16-4\sqrt{5}}{11}$$

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_2 + \frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l} M_2, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})K_2 + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})M_2 + L_2, \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})K_2 + (\sqrt{5}+1)M_2 + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})L_2 \end{array}\right\}, \\ L_2 + \frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l} K_2, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})L_2 + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})K_2 + M_2, \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})L_2 + (\sqrt{5}+1)K_2 + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})M_2 \end{array}\right\}, \\ M_2 + \frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l} L_2, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})M_2 + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})L_2 + K_2, \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})M_2 + (\sqrt{5}+1)L_2 + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})K_2 \end{array}\right\} \end{array}\right\} = \sqrt{5}-1$$

*denklemlerine ulaşılır. Bu denklemler çözülürse* $\theta = \{0, \pi\}$ *elde edilir. Buradan açıkça* $\sigma_\Pi r_\pi$ *dönüşümünün* $O$ *orijin etrafında* $\sigma_O$ *inversiyonuna karşılık geldiği görülebilir. Bu durumda yeni bir dönme-yansıma yoktur. Benzer şekilde dönme eksenleri bir yansıma düzlemi normali olan* $(0,1,0), (0,0,1), (1,\pm\varphi,\pm(1-\varphi)), (\pm(1-\varphi),1,\pm\varphi), (\pm\varphi,\pm(1-\varphi),1)$ *vektörleri içinde aynı sonuç elde edilir.*

Şekil7.7 deki tablo birim kürenin köşe noktalarının ilgili dönme-yansıma dönüşümleri altındaki görüntülerini vermektedir.

| Yansıma Düzlemi Normali Olan Dönme Ekseni Doğrultu Vektörleri | Açılar | A0 | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 | A10 | A11 | A12 | A13 | A14 | A15 | A16 | A17 | A18 | A19 | A20 | A21 | A22 | A23 | A24 | A25 | A26 | A27 | A28 | A29 | A30 | A31 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x=0 | θ=π | A3 | A2 | A1 | A0 | A7 | A6 | A5 | A4 | A11 | A10 | A9 | A8 | A15 | A14 | A13 | A12 | A19 | A18 | A17 | A16 | A23 | A22 | A21 | A20 | A31 | A30 | A29 | A28 | A27 | A26 | A25 | A24 |
| y=0 | θ=π | A3 | A2 | A1 | A0 | A7 | A6 | A5 | A4 | A11 | A10 | A9 | A8 | A15 | A14 | A13 | A12 | A19 | A18 | A17 | A16 | A23 | A22 | A21 | A20 | A31 | A30 | A29 | A28 | A27 | A26 | A25 | A24 |
| z=0 | θ=π | A3 | A2 | A1 | A0 | A7 | A6 | A5 | A4 | A11 | A10 | A9 | A8 | A15 | A14 | A13 | A12 | A19 | A18 | A17 | A16 | A23 | A22 | A21 | A20 | A31 | A30 | A29 | A28 | A27 | A26 | A25 | A24 |
| 1x+φy+(1-φ)z=0 | θ=π | A3 | A2 | A1 | A0 | A7 | A6 | A5 | A4 | A11 | A10 | A9 | A8 | A15 | A14 | A13 | A12 | A19 | A18 | A17 | A16 | A23 | A22 | A21 | A20 | A31 | A30 | A29 | A28 | A27 | A26 | A25 | A24 |
| 1x+φy-(1-φ)z=0 | θ=π | A3 | A2 | A1 | A0 | A7 | A6 | A5 | A4 | A11 | A10 | A9 | A8 | A15 | A14 | A13 | A12 | A19 | A18 | A17 | A16 | A23 | A22 | A21 | A20 | A31 | A30 | A29 | A28 | A27 | A26 | A25 | A24 |
| -1x+φy+(1-φ)z=0 | θ=π | A3 | A2 | A1 | A0 | A7 | A6 | A5 | A4 | A11 | A10 | A9 | A8 | A15 | A14 | A13 | A12 | A19 | A18 | A17 | A16 | A23 | A22 | A21 | A20 | A31 | A30 | A29 | A28 | A27 | A26 | A25 | A24 |
| -1x+φy-(1-φ)z=0 | θ=π | A3 | A2 | A1 | A0 | A7 | A6 | A5 | A4 | A11 | A10 | A9 | A8 | A15 | A14 | A13 | A12 | A19 | A18 | A17 | A16 | A23 | A22 | A21 | A20 | A31 | A30 | A29 | A28 | A27 | A26 | A25 | A24 |
| (1-φ)x+1y+φz=0 | θ=π | A3 | A2 | A1 | A0 | A7 | A6 | A5 | A4 | A11 | A10 | A9 | A8 | A15 | A14 | A13 | A12 | A19 | A18 | A17 | A16 | A23 | A22 | A21 | A20 | A31 | A30 | A29 | A28 | A27 | A26 | A25 | A24 |
| -(1-φ)x+1y+φz=0 | θ=π | A3 | A2 | A1 | A0 | A7 | A6 | A5 | A4 | A11 | A10 | A9 | A8 | A15 | A14 | A13 | A12 | A19 | A18 | A17 | A16 | A23 | A22 | A21 | A20 | A31 | A30 | A29 | A28 | A27 | A26 | A25 | A24 |
| (1-φ)x-1y+φz=0 | θ=π | A3 | A2 | A1 | A0 | A7 | A6 | A5 | A4 | A11 | A10 | A9 | A8 | A15 | A14 | A13 | A12 | A19 | A18 | A17 | A16 | A23 | A22 | A21 | A20 | A31 | A30 | A29 | A28 | A27 | A26 | A25 | A24 |
| -(1-φ)x-1y+φz=0 | θ=π | A3 | A2 | A1 | A0 | A7 | A6 | A5 | A4 | A11 | A10 | A9 | A8 | A15 | A14 | A13 | A12 | A19 | A18 | A17 | A16 | A23 | A22 | A21 | A20 | A31 | A30 | A29 | A28 | A27 | A26 | A25 | A24 |
| φx+(1-φ)y+1z=0 | θ=π | A3 | A2 | A1 | A0 | A7 | A6 | A5 | A4 | A11 | A10 | A9 | A8 | A15 | A14 | A13 | A12 | A19 | A18 | A17 | A16 | A23 | A22 | A21 | A20 | A31 | A30 | A29 | A28 | A27 | A26 | A25 | A24 |
| φx-(1-φ)y+1z=0 | θ=π | A3 | A2 | A1 | A0 | A7 | A6 | A5 | A4 | A11 | A10 | A9 | A8 | A15 | A14 | A13 | A12 | A19 | A18 | A17 | A16 | A23 | A22 | A21 | A20 | A31 | A30 | A29 | A28 | A27 | A26 | A25 | A24 |
| φx+(1-φ)y-1z=0 | θ=π | A3 | A2 | A1 | A0 | A7 | A6 | A5 | A4 | A11 | A10 | A9 | A8 | A15 | A14 | A13 | A12 | A19 | A18 | A17 | A16 | A23 | A22 | A21 | A20 | A31 | A30 | A29 | A28 | A27 | A26 | A25 | A24 |
| φx+(1-φ)y-1z=0 | θ=π | A3 | A2 | A1 | A0 | A7 | A6 | A5 | A4 | A11 | A10 | A9 | A8 | A15 | A14 | A13 | A12 | A19 | A18 | A17 | A16 | A23 | A22 | A21 | A20 | A31 | A30 | A29 | A28 | A27 | A26 | A25 | A24 |

Şekil 7.7 $\mathbb{R}^3_{TI}$ de Dönme Yansıma Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

**Önerme 7.7** *$d_{TI}$- uzaklığını koruyan orijine göre kırk dört dönme inversiyon vardır.*

**İspat** *$r_\theta \in R_{TI}$ olmak üzere, bir dönme inversiyon $\rho = \sigma_O\sigma_\Delta\sigma_\Gamma = \sigma_O r_\theta$ bileşkesi olarak yazılabilir. Böylece önerme 6.5 den otuz bir dönme ekseni için ispat verilmelidir. $r_\theta$, dönme ekseni $(1,(1-\varphi),0)$ dönme eksenine paralel ise $\left(\frac{1}{\sqrt{2-2\varphi+\varphi^2}}, \frac{1-\varphi}{\sqrt{2-2\varphi+\varphi^2}}, 0\right)$ birim normal yön vektörü olur. Bu durumda*

$$\rho(x,y,z) = \sigma_O r_\theta = \begin{pmatrix} -\cos\theta x + \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\sin\theta y - \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\sin\theta z, \\ -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\sin\theta x - (\cos\theta + \frac{50+10\sqrt{5}}{100}(1-\cos\theta))y + \frac{\sqrt{5}}{5}(1-\cos\theta)z, \\ \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\sin\theta x - \frac{\sqrt{5}}{5}(1-\cos\theta)y + \frac{50-10\sqrt{5}}{100}(1-\cos\theta))z \end{pmatrix}$$

*şeklinde tanımlanır. Buradan $\rho(A_0), \rho(A_4), \rho(A_{16})$ hesaplanıp $d_{TI}(\rho(A_4), \rho(A_{16})) = \frac{16-4\sqrt{5}}{11}$ ve $d_{TI}(\rho(A_4), \rho(A_0)) = \sqrt{5}-1$ ifadelerinde yerine yazılırsa,*

$$K_1 = \left| \begin{array}{l} \frac{\sqrt{5}+1}{6}\sqrt{3}\sin\theta + (\cos\theta + \frac{3-\sqrt{5}}{6}(1-\cos\theta))\frac{\sqrt{5}-1}{2} - \\ \frac{\sqrt{5}+1}{132}(7\sqrt{5}+5)\sqrt{3}\sin\theta + (9\sqrt{5}-25)\cos\theta - 9\sqrt{5} + 25 \end{array} \right|,$$

$$L_1 = \left| \frac{7\sqrt{5}-17}{22}\cos\theta + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(\frac{\sqrt{5}+1}{6}\sqrt{3}\sin\theta) - (\frac{9\sqrt{5}-25}{66})\sqrt{3}\sin\theta \right|,$$

$$M_1 = \left| \frac{\sqrt{5}-1}{6}\sqrt{3}\sin\theta - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\frac{1-\cos\theta}{3} + (\frac{\sqrt{5}-15}{66})\sqrt{3}\sin\theta + \frac{17\sqrt{5}-35}{66}\cos\theta + \frac{7\sqrt{5}+5}{66} \right|,$$

$$K_2 = \left| \frac{\sqrt{5}-3}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\sqrt{3}\sin\theta \right|,$$

$$L_2 = \left| \frac{\sqrt{5}-1}{6}(\sqrt{3}\sin\theta - 1 + \cos\theta) + \frac{3-\sqrt{5}}{6}(\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta) + \frac{3+\sqrt{5}}{6} \right|$$

*ve*

$$M_2 = \left| -\frac{\sqrt{5}+1}{6}(\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta) + \frac{2-\sqrt{5}}{3} + \frac{\sqrt{5}+1}{12}(\left(\sqrt{5}-1\right)(1-\cos\theta) + \sqrt{3}\sin\theta)) \right|$$

*olmak üzere*

$$\max\left\{ \begin{array}{l} K_1 + \frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{ \begin{array}{c} M_1, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})K_1 + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})M_1 + L_1, \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})K_1 + (\sqrt{5}+1)M_1 + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})L_1 \end{array} \right\}, \\ L_1 + \frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{ \begin{array}{c} K_1, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})L_1 + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})K_1 + M_1, \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})L_1 + (\sqrt{5}+1)K_1 + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})M_1 \end{array} \right\}, \\ M_1 + \frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{ \begin{array}{c} L_1, (\frac{1-\sqrt{5}}{2})M_1 + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})L_1 + K_1, \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})M_1 + (\sqrt{5}+1)L_1 + (\frac{\sqrt{5}+3}{2})K_1 \end{array} \right\} \end{array} \right\} = \frac{16-4\sqrt{5}}{11}$$

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_2+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l} M_2,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})K_2+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})M_2+L_2,\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})K_2+(\sqrt{5}+1)M_2+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})L_2 \end{array}\right\},\\ L_2+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l} K_2,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})L_2+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})K_2+M_2,\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})L_2+(\sqrt{5}+1)K_2+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})M_2 \end{array}\right\},\\ M_2+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l} L_2,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})M_2+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})L_2+K_2,\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})M_2+(\sqrt{5}+1)L_2+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})K_2 \end{array}\right\} \end{array}\right\} = \sqrt{5}-1$$

*denklemleri ortaya çıkar. Bu denklemler çözülür ise* $\theta=\left\{\frac{2\pi}{5},\frac{4\pi}{5},\frac{6\pi}{5},\frac{8\pi}{5}\right\}$ *elde edilir. Benzer şekilde, eğer* $l$ *nin yön vektörü* $(\pm(1-\varphi),0,1),1,\pm(1-\varphi),,(0,1,\pm(1-\varphi))$ *ise* $\theta=\left\{\frac{2\pi}{5},\frac{4\pi}{5},\frac{6\pi}{5},\frac{8\pi}{5}\right\}$ *olur.*

$r_\theta$, *dönme ekseni* $(1,1,1)$ *doğrultulu doğru ise birim normal yön vektörü* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olur. Bu durumda*

$$\rho(x,y,z)=\sigma_O r_\theta=\begin{pmatrix} -x\left[\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\theta\right]-y\left[\frac{(1-\cos\theta)}{3}-\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right]-z\left[\frac{(1-\cos\theta)}{3}+\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right],\\ -x\left[\frac{(1-\cos\theta)}{3}+\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right]-y\left[\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\theta\right]-z\left[\frac{(1-\cos\theta)}{3}-\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right],\\ -x\left[\frac{(1-\cos\theta)}{3}-\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right]-y\left[\frac{(1-\cos\theta)}{3}+\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right]-z\left[\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\theta\right] \end{pmatrix}$$

*olur. Buradan* $\rho(A_0),\rho(A_4),\rho(A_{16})$ *hesaplanıp* $d_{TI}(\rho(A_4),\rho(\ A_{16}))=\frac{16-4\sqrt{5}}{11}$ *ve* $d_{TI}(\rho(A_4),\rho(\ A_0))=\sqrt{5}-1$ *ifadelerinde yerine yazılırsa,*

$$K_1=\left|\tfrac{7\sqrt{5}-17}{22}\left(\tfrac{2\cos\theta+1}{3}\right)-\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\tfrac{1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)+\tfrac{4\sqrt{5}-5}{11}\left(\tfrac{1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)\right|,$$

$$L_1=\left|\tfrac{7\sqrt{5}-17}{22}\left(\tfrac{1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)-\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\tfrac{2\cos\theta+1}{3}\right)+\tfrac{4\sqrt{5}-5}{11}\left(\tfrac{1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)\right|,$$

$$M_1=\left|\tfrac{7\sqrt{5}-17}{22}\left(\tfrac{1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)-\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\tfrac{1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{3}+\tfrac{4\sqrt{5}-5}{11}\left(\tfrac{2\cos\theta+1}{3}\right)\right)\right|,$$

$$K_2=\left|\tfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta+\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}(\cos\theta-\tfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta)\right|,$$

$$L_2=\left|-\cos\theta+\tfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta+\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}(\cos\theta+\tfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta)\right| ve$$

$$M_2=\left|\cos\theta+\tfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta+\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}(-\tfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta)\right| \textit{ olmak üzere}$$

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_1+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l} M_1,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})K_1+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})M_1+L_1,\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})K_1+(\sqrt{5}+1)M_1+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})L_1 \end{array}\right\},\\ L_1+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l} K_1,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})L_1+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})K_1+M_1,\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})L_1+(\sqrt{5}+1)K_1+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})M_1 \end{array}\right\},\\ M_1+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l} L_1,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})M_1+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})L_1+K_1,\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})M_1+(\sqrt{5}+1)L_1+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})K_1 \end{array}\right\} \end{array}\right\} = \frac{16-4\sqrt{5}}{11}$$

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_2+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l} M_2,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})K_2+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})M_2+L_2,\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})K_2+(\sqrt{5}+1)M_2+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})L_2 \end{array}\right\},\\ L_2+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l} K_2,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})L_2+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})K_2+M_2,\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})L_2+(\sqrt{5}+1)K_2+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})M_2 \end{array}\right\},\\ M_2+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l} L_2,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})M_2+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})L_2+K_2,\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})M_2+(\sqrt{5}+1)L_2+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})K_2 \end{array}\right\} \end{array}\right\}=\sqrt{5}-1$$

*denklemleri bulunur. Bu denklemler çözülür ise* $\theta=\{\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\}$ *elde edilir. Benzer şekilde, eğer l nin yön vektörü* $(-1,1,1)$*,* $(1,-1,1)$*,* $(1,1,-1)$*,* $(\pm(2-\varphi),1,0)$ *,*$(0,\pm(2-\varphi),1)$*,* $(1,0,\pm(2-\varphi))$ *ise* $\theta=\{\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\}$ *olur.*

$r_\theta$*, dönme ekseni* $(1,0,0)$ *doğrultulu doğru ise birim normal yön vektörü* $(1,0,0)$ *olur. Bu durumda* $\rho(x,y,z)=\sigma_O r_\theta(x,y,z)=(-x,-y\cos\theta+z\sin\theta,-y\sin\theta-z\cos\theta)$ *şeklinde tanımlanır. Buradan* $\rho(A_0),\rho(A_4),\rho(A_{16})$ *hesaplanıp* $d_{TI}(\rho(A_4),\rho(\ A_{16}))=\frac{16-4\sqrt{5}}{11}$ *ve* $d_{TI}(\rho(A_4),\rho(\ A_0))=\sqrt{5}-1$ *ifadelerinde yerine yazılırsa,*

$$K_1=\left|\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\cos\theta+\tfrac{4\sqrt{5}-5}{11}\sin\theta\right|,\ L_1=\left|-\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\sin\theta+\tfrac{4\sqrt{5}-5}{11}\cos\theta\right|,\ M_1=\left|\tfrac{17-7\sqrt{5}}{2}\right|,$$

$$K_2=\left|\cos\theta-\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\sin\theta\right|,\ L_2=\left|\sin\theta+\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\cos\theta\right| \textit{ve } M_2=\left|\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right| \textit{ olmak üzere}$$

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_1+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l} M_1,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})K_1+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})M_1+L_1,\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})K_1+(\sqrt{5}+1)M_1+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})L_1 \end{array}\right\},\\ L_1+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l} K_1,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})L_1+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})K_1+M_1,\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})L_1+(\sqrt{5}+1)K_1+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})M_1 \end{array}\right\},\\ M_1+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l} L_1,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})M_1+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})L_1+K_1,\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})M_1+(\sqrt{5}+1)L_1+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})K_1 \end{array}\right\} \end{array}\right\}=\frac{16-4\sqrt{5}}{11}$$

$$\max\left\{\begin{array}{l} K_2+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l} M_2,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})K_2+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})M_2+L_2,\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})K_2+(\sqrt{5}+1)M_2+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})L_2 \end{array}\right\},\\ L_2+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l} K_2,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})L_2+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})K_2+M_2,\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})L_2+(\sqrt{5}+1)K_2+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})M_2 \end{array}\right\},\\ M_2+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\max\left\{\begin{array}{l} L_2,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})M_2+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})L_2+K_2,\\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})M_2+(\sqrt{5}+1)L_2+(\frac{\sqrt{5}+3}{2})K_2 \end{array}\right\} \end{array}\right\}=\sqrt{5}-1$$

*denklemleri bulunur.Bu denklemler çözülür ise* $\theta=\{0,\pi\}$ *elde edilir. Fakat* $\theta=\pi$ *için hesaplamalar yapıldığında* $\sigma_o r_\pi$ *dönüşümünün* $x=0$ *düzlemine göre yansıma hareketine karşılık geldiği görülmektedir. Benzer şekilde, eğer l doğrusunun yön vektörü* $(0,1,0)$*,* $(0,0,1)$*,* $(1,\pm\varphi,\pm(1-\varphi))$*,* $(\pm(1-\varphi),1,\pm\varphi)$*,* $(\pm\varphi,\pm(1-\varphi),1)$ *ise* $\theta=\{0,\pi\}$ *bulunur. Eğer* $\theta=\pi$ *için dönme ekseni doğrultu vektörü bu vektöre paralel olacak şekilde alınır ve dönme -inversiyon hareketi yapılırsa benzer şekilde tespit edilen önerme 6.4 de*

*tespit edilen bir düzleme göre yansıma hareketleri bulunur. Yani bu durumda yeni bir hareket olacak şekilde dönme-inversiyon yoktur.*

Şekil7.8 deki tablo birim kürenin köşe noktalarının ilgili dönme-inversion dönüşümleri altındaki görüntülerini vermektedir.

| Dönme Ekseni Doğrultu Vektörleri | Açılar | A0 | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 | A10 | A11 | A12 | A13 | A14 | A15 | A16 | A17 | A18 | A19 | A20 | A21 | A22 | A23 | A24 | A25 | A26 | A27 | A28 | A29 | A30 | A31 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1,0,0) | θ=π | A2 | A3 | A0 | A1 | A6 | A7 | A4 | A5 | A8 | A9 | A10 | A11 | A12 | A13 | A14 | A15 | A18 | A19 | A16 | A17 | A22 | A23 | A20 | A21 | A28 | A29 | A30 | A31 | A24 | A25 | A26 | A27 |
| (0,1,0) | θ=π | A0 | A1 | A2 | A3 | A5 | A4 | A7 | A6 | A10 | A11 | A8 | A9 | A14 | A15 | A12 | A13 | A16 | A17 | A18 | A19 | A21 | A20 | A23 | A22 | A26 | A27 | A24 | A25 | A30 | A31 | A28 | A29 |
| (0,0,1) | θ=π | A1 | A0 | A3 | A2 | A4 | A5 | A6 | A7 | A9 | A8 | A11 | A10 | A13 | A12 | A15 | A14 | A17 | A16 | A19 | A18 | A20 | A21 | A22 | A23 | A25 | A24 | A27 | A26 | A29 | A28 | A31 | A30 |
| (1,1,1) | θ=2π/3 | A7 | A5 | A6 | A4 | A11 | A10 | A9 | A8 | A3 | A1 | A2 | A0 | A19 | A17 | A18 | A16 | A23 | A21 | A22 | A20 | A15 | A14 | A13 | A12 | A31 | A27 | A30 | A26 | A29 | A25 | A28 | A24 |
| | θ=4π/3 | A11 | A9 | A10 | A8 | A3 | A1 | A2 | A0 | A7 | A6 | A5 | A4 | A23 | A22 | A21 | A20 | A15 | A13 | A14 | A12 | A19 | A17 | A18 | A16 | A31 | A29 | A27 | A25 | A30 | A28 | A26 | A24 |
| (-1,1,1) | θ=2π/3 | A10 | A8 | A11 | A9 | A0 | A2 | A1 | A3 | A5 | A4 | A7 | A6 | A21 | A20 | A23 | A22 | A14 | A12 | A15 | A13 | A16 | A18 | A17 | A19 | A26 | A24 | A30 | A28 | A27 | A25 | A31 | A29 |
| | θ=4π/3 | A4 | A6 | A5 | A7 | A9 | A8 | A11 | A10 | A1 | A3 | A0 | A2 | A17 | A19 | A16 | A18 | A20 | A22 | A21 | A23 | A13 | A12 | A15 | A14 | A25 | A29 | A24 | A28 | A27 | A31 | A26 | A30 |
| (1,-1,1) | θ=2π/3 | A4 | A6 | A5 | A7 | A9 | A8 | A11 | A10 | A1 | A3 | A0 | A2 | A17 | A19 | A16 | A18 | A20 | A22 | A21 | A23 | A13 | A12 | A15 | A14 | A25 | A29 | A24 | A28 | A27 | A31 | A26 | A30 |
| | θ=4π/3 | A9 | A11 | A8 | A10 | A1 | A3 | A0 | A2 | A4 | A5 | A6 | A7 | A20 | A21 | A22 | A23 | A13 | A15 | A12 | A14 | A17 | A19 | A16 | A18 | A25 | A27 | A29 | A31 | A24 | A26 | A28 | A30 |
| (1,1,-1) | θ=2π/3 | A6 | A4 | A7 | A5 | A8 | A9 | A10 | A11 | A2 | A0 | A3 | A1 | A18 | A16 | A19 | A17 | A22 | A20 | A23 | A21 | A12 | A13 | A14 | A15 | A28 | A24 | A29 | A25 | A30 | A26 | A31 | A27 |
| | θ=4π/3 | A8 | A10 | A9 | A11 | A2 | A0 | A3 | A1 | A6 | A7 | A4 | A5 | A22 | A23 | A20 | A21 | A12 | A14 | A13 | A15 | A18 | A16 | A19 | A17 | A28 | A30 | A24 | A26 | A29 | A31 | A25 | A27 |
| (0,(2-φ),1) | θ=2π/3 | A5 | A7 | A4 | A6 | A10 | A11 | A8 | A9 | A0 | A2 | A1 | A3 | A16 | A18 | A17 | A19 | A21 | A23 | A20 | A22 | A15 | A15 | A12 | A13 | A26 | A30 | A27 | A31 | A24 | A28 | A25 | A29 |
| | θ=4π/3 | A11 | A0 | A3 | A8 | A5 | A10 | A9 | A6 | A1 | A4 | A7 | A2 | A15 | A24 | A31 | A12 | A21 | A26 | A29 | A22 | A17 | A30 | A25 | A18 | A27 | A16 | A23 | A14 | A13 | A20 | A19 | A28 |
| (0,-(2-φ),1) | θ=2π/3 | A1 | A8 | A11 | A2 | A9 | A4 | A7 | A10 | A3 | A6 | A5 | A0 | A15 | A28 | A27 | A12 | A25 | A20 | A23 | A30 | A29 | A16 | A19 | A26 | A13 | A22 | A17 | A24 | A31 | A18 | A21 | A14 |
| | θ=4π/3 | A9 | A0 | A3 | A10 | A8 | A4 | A7 | A11 | A6 | A2 | A1 | A5 | A29 | A14 | A13 | A26 | A20 | A24 | A31 | A23 | A28 | A17 | A18 | A27 | A22 | A12 | A25 | A16 | A19 | A30 | A15 | A21 |
| ((2-φ),1,0) | θ=2π/3 | A1 | A10 | A9 | A2 | A5 | A11 | A8 | A6 | A4 | A0 | A3 | A7 | A25 | A14 | A13 | A30 | A27 | A21 | A22 | A28 | A16 | A31 | A24 | A19 | A17 | A26 | A15 | A23 | A20 | A12 | A29 | A18 |
| | θ=4π/3 | A5 | A3 | A0 | A6 | A11 | A1 | A2 | A8 | A10 | A7 | A4 | A9 | A26 | A19 | A16 | A29 | A27 | A15 | A12 | A28 | A23 | A25 | A30 | A20 | A21 | A31 | A17 | A13 | A14 | A18 | A24 | A22 |
| (-(2-φ),1,0) | θ=2π/3 | A4 | A3 | A0 | A7 | A1 | A9 | A10 | A2 | A5 | A11 | A8 | A6 | A16 | A31 | A24 | A19 | A25 | A13 | A14 | A30 | A27 | A22 | A21 | A28 | A17 | A15 | A20 | A29 | A26 | A23 | A12 | A18 |
| | θ=4π/3 | A2 | A4 | A7 | A1 | A0 | A8 | A11 | A3 | A10 | A5 | A6 | A9 | A30 | A17 | A18 | A25 | A12 | A24 | A31 | A15 | A26 | A22 | A21 | A29 | A14 | A16 | A28 | A20 | A23 | A27 | A19 | A13 |
| (1,0,(2-φ)) | θ=2π/3 | A6 | A11 | A8 | A5 | A3 | A7 | A4 | A0 | A9 | A1 | A2 | A10 | A22 | A27 | A28 | A21 | A19 | A31 | A24 | A16 | A13 | A30 | A25 | A14 | A29 | A15 | A18 | A23 | A20 | A17 | A12 | A26 |
| | θ=4π/3 | A7 | A9 | A10 | A4 | A6 | A3 | A0 | A5 | A2 | A8 | A11 | A1 | A30 | A20 | A23 | A25 | A19 | A29 | A26 | A16 | A28 | A15 | A12 | A27 | A18 | A22 | A31 | A13 | A14 | A24 | A21 | A17 |
| (1,0,-(2-φ)) | θ=2π/3 | A10 | A6 | A5 | A9 | A2 | A7 | A4 | A1 | A0 | A8 | A11 | A3 | A26 | A22 | A21 | A29 | A30 | A18 | A17 | A25 | A12 | A31 | A24 | A15 | A14 | A28 | A23 | A19 | A16 | A20 | A27 | A13 |
| | θ=4π/3 | A8 | A7 | A4 | A11 | A6 | A2 | A1 | A5 | A9 | A3 | A0 | A10 | A20 | A31 | A24 | A23 | A28 | A18 | A17 | A27 | A29 | A14 | A13 | A26 | A22 | A19 | A12 | A30 | A25 | A15 | A16 | A21 |
| (0,1,(1-φ)) | θ=2π/5 | A7 | A0 | A3 | A4 | A10 | A2 | A1 | A9 | A11 | A5 | A6 | A8 | A31 | A16 | A19 | A24 | A30 | A14 | A13 | A25 | A21 | A28 | A27 | A22 | A23 | A26 | A18 | A12 | A15 | A17 | A29 | A20 |
| | θ=4π/5 | A10 | A4 | A7 | A9 | A5 | A2 | A3 | A6 | A11 | A1 | A2 | A8 | A23 | A25 | A30 | A20 | A26 | A16 | A19 | A29 | A27 | A12 | A15 | A28 | A21 | A17 | A14 | A24 | A31 | A13 | A18 | A22 |
| | θ=6π/5 | A5 | A9 | A10 | A6 | A1 | A4 | A7 | A2 | A11 | A3 | A0 | A8 | A21 | A29 | A26 | A22 | A17 | A25 | A30 | A18 | A15 | A24 | A31 | A12 | A27 | A13 | A16 | A20 | A23 | A19 | A14 | A28 |
| | θ=8π/5 | A1 | A6 | A5 | A2 | A3 | A9 | A10 | A0 | A11 | A7 | A4 | A8 | A27 | A18 | A17 | A28 | A13 | A29 | A26 | A14 | A31 | A20 | A23 | A24 | A15 | A19 | A25 | A22 | A21 | A30 | A16 | A12 |
| (0,1,-(1-φ)) | θ=2π/5 | A6 | A0 | A3 | A5 | A2 | A8 | A11 | A1 | A7 | A10 | A9 | A4 | A19 | A26 | A29 | A16 | A28 | A12 | A15 | A27 | A30 | A20 | A23 | A25 | A18 | A14 | A22 | A24 | A31 | A21 | A13 | A17 |
| | θ=4π/5 | A8 | A5 | A6 | A11 | A0 | A4 | A7 | A3 | A6 | A10 | A9 | A1 | A28 | A21 | A22 | A27 | A24 | A16 | A19 | A31 | A14 | A25 | A30 | A13 | A12 | A26 | A20 | A17 | A18 | A23 | A29 | A15 |
| | θ=6π/5 | A4 | A11 | A8 | A7 | A5 | A1 | A2 | A6 | A0 | A10 | A9 | A3 | A24 | A23 | A20 | A31 | A17 | A27 | A28 | A18 | A26 | A13 | A14 | A29 | A16 | A21 | A25 | A15 | A12 | A30 | A22 | A19 |
| | θ=8π/5 | A1 | A7 | A4 | A2 | A11 | A3 | A0 | A8 | A5 | A10 | A9 | A6 | A17 | A30 | A25 | A18 | A15 | A31 | A24 | A12 | A21 | A29 | A26 | A22 | A27 | A23 | A13 | A19 | A16 | A14 | A20 | A28 |
| ((1-φ),0,1) | θ=2π/5 | A3 | A10 | A9 | A0 | A11 | A7 | A4 | A8 | A1 | A5 | A6 | A2 | A13 | A26 | A29 | A14 | A31 | A23 | A20 | A24 | A27 | A18 | A17 | A28 | A15 | A21 | A19 | A30 | A25 | A16 | A22 | A12 |
| | θ=4π/5 | A3 | A5 | A6 | A0 | A1 | A11 | A8 | A2 | A9 | A4 | A7 | A10 | A29 | A16 | A19 | A26 | A15 | A27 | A28 | A12 | A25 | A23 | A16 | A30 | A13 | A17 | A31 | A21 | A22 | A24 | A18 | A14 |
| | θ=6π/5 | A3 | A4 | A7 | A0 | A9 | A1 | A2 | A10 | A6 | A8 | A11 | A5 | A19 | A24 | A31 | A16 | A13 | A25 | A30 | A14 | A22 | A27 | A28 | A21 | A29 | A20 | A15 | A17 | A18 | A12 | A23 | A26 |
| | θ=8π/5 | A3 | A8 | A11 | A0 | A6 | A9 | A10 | A5 | A7 | A2 | A1 | A4 | A31 | A12 | A15 | A24 | A29 | A22 | A21 | A26 | A18 | A25 | A30 | A17 | A19 | A28 | A13 | A20 | A23 | A14 | A27 | A16 |
| (-(1-φ),0,1) | θ=2π/5 | A9 | A2 | A1 | A10 | A6 | A8 | A11 | A5 | A3 | A7 | A4 | A0 | A13 | A30 | A25 | A14 | A22 | A28 | A27 | A21 | A19 | A24 | A31 | A16 | A29 | A18 | A20 | A12 | A15 | A23 | A17 | A26 |
| | θ=4π/5 | A4 | A2 | A1 | A7 | A8 | A0 | A3 | A11 | A9 | A6 | A5 | A10 | A25 | A18 | A17 | A30 | A24 | A12 | A15 | A31 | A22 | A26 | A29 | A21 | A20 | A28 | A16 | A14 | A13 | A19 | A27 | A23 |
| | θ=6π/5 | A5 | A2 | A1 | A6 | A0 | A10 | A9 | A3 | A4 | A8 | A11 | A7 | A17 | A28 | A27 | A18 | A26 | A14 | A13 | A29 | A24 | A23 | A20 | A31 | A16 | A12 | A21 | A30 | A25 | A22 | A15 | A19 |
| | θ=8π/5 | A11 | A2 | A1 | A8 | A10 | A7 | A4 | A9 | A5 | A0 | A3 | A6 | A27 | A12 | A15 | A28 | A23 | A30 | A25 | A20 | A26 | A19 | A16 | A29 | A21 | A14 | A31 | A18 | A17 | A24 | A13 | A22 |
| ((1-φ),1,0) | θ=2π/5 | A6 | A10 | A9 | A5 | A7 | A2 | A1 | A4 | A3 | A11 | A8 | A0 | A29 | A21 | A22 | A26 | A18 | A30 | A25 | A17 | A31 | A12 | A15 | A24 | A19 | A23 | A28 | A14 | A13 | A27 | A20 | A16 |
| | θ=4π/5 | A2 | A11 | A8 | A1 | A7 | A10 | A9 | A4 | A6 | A3 | A0 | A5 | A28 | A15 | A12 | A27 | A30 | A23 | A20 | A25 | A19 | A26 | A29 | A16 | A18 | A29 | A14 | A21 | A22 | A13 | A24 | A17 |
| | θ=6π/5 | A10 | A3 | A0 | A9 | A7 | A11 | A8 | A4 | A2 | A6 | A5 | A1 | A14 | A29 | A26 | A13 | A23 | A31 | A24 | A20 | A18 | A27 | A28 | A17 | A30 | A19 | A21 | A15 | A12 | A22 | A16 | A25 |
| | θ=8π/5 | A11 | A6 | A5 | A8 | A7 | A3 | A0 | A4 | A10 | A2 | A1 | A9 | A21 | A28 | A27 | A22 | A31 | A19 | A16 | A24 | A30 | A13 | A14 | A25 | A23 | A18 | A15 | A29 | A26 | A12 | A17 | A20 |
| (-(1-φ),1,0) | θ=2π/5 | A9 | A7 | A4 | A10 | A3 | A6 | A5 | A0 | A1 | A11 | A8 | A2 | A25 | A23 | A20 | A30 | A29 | A19 | A16 | A26 | A15 | A28 | A27 | A12 | A13 | A31 | A22 | A18 | A17 | A21 | A24 | A14 |
| | θ=4π/5 | A8 | A3 | A0 | A11 | A13 | A6 | A5 | A10 | A4 | A1 | A2 | A7 | A24 | A15 | A12 | A31 | A22 | A29 | A26 | A21 | A25 | A18 | A17 | A30 | A20 | A13 | A28 | A19 | A16 | A27 | A14 | A23 |
| | θ=6π/5 | A2 | A9 | A10 | A1 | A8 | A6 | A5 | A11 | A0 | A4 | A7 | A3 | A14 | A25 | A30 | A13 | A28 | A22 | A21 | A27 | A24 | A19 | A16 | A31 | A12 | A20 | A18 | A29 | A26 | A17 | A23 | A15 |
| | θ=8π/5 | A7 | A8 | A11 | A4 | A2 | A6 | A5 | A1 | A10 | A0 | A3 | A9 | A23 | A24 | A31 | A20 | A18 | A28 | A27 | A17 | A14 | A29 | A26 | A13 | A30 | A12 | A19 | A22 | A21 | A16 | A15 | A25 |
| (1,φ,(1-φ)) | θ=π | A11 | A4 | A7 | A8 | A1 | A5 | A6 | A2 | A3 | A9 | A10 | A0 | A31 | A20 | A23 | A24 | A27 | A17 | A18 | A28 | A13 | A26 | A29 | A14 | A15 | A25 | A21 | A16 | A19 | A22 | A30 | A12 |
| (1,φ,-(1-φ)) | θ=π | A4 | A10 | A9 | A7 | A0 | A5 | A6 | A3 | A8 | A2 | A1 | A11 | A20 | A30 | A25 | A23 | A16 | A26 | A29 | A19 | A12 | A27 | A28 | A15 | A24 | A14 | A17 | A21 | A22 | A18 | A13 | A31 |
| (1,-φ,(1-φ)) | θ=π | A9 | A5 | A6 | A10 | A4 | A1 | A2 | A7 | A8 | A0 | A3 | A11 | A22 | A26 | A29 | A21 | A25 | A17 | A18 | A30 | A24 | A15 | A12 | A31 | A20 | A16 | A13 | A27 | A28 | A14 | A19 | A23 |
| (1,-φ,-(1-φ)) | θ=π | A5 | A8 | A11 | A6 | A4 | A0 | A3 | A7 | A1 | A9 | A10 | A2 | A27 | A22 | A21 | A28 | A16 | A24 | A31 | A19 | A25 | A14 | A13 | A30 | A17 | A30 | A26 | A12 | A15 | A29 | A23 | A18 |
| (φ,(1-φ),1) | θ=π | A10 | A1 | A2 | A9 | A11 | A5 | A6 | A8 | A7 | A3 | A0 | A4 | A30 | A13 | A14 | A25 | A21 | A27 | A28 | A22 | A31 | A16 | A19 | A24 | A23 | A15 | A26 | A17 | A18 | A29 | A12 | A20 |
| (φ,-(1-φ),1) | θ=π | A8 | A1 | A2 | A11 | A4 | A9 | A10 | A7 | A0 | A5 | A6 | A3 | A12 | A27 | A28 | A15 | A20 | A25 | A30 | A23 | A16 | A29 | A26 | A19 | A24 | A17 | A22 | A13 | A14 | A21 | A18 | A31 |
| (-φ,(1-φ),1) | θ=π | A0 | A9 | A10 | A3 | A4 | A8 | A11 | A7 | A5 | A1 | A2 | A6 | A26 | A13 | A14 | A29 | A24 | A20 | A23 | A31 | A17 | A28 | A27 | A18 | A16 | A25 | A12 | A22 | A21 | A15 | A30 | A19 |
| (-φ,-(1-φ),1) | θ=π | A0 | A11 | A8 | A3 | A10 | A5 | A6 | A9 | A2 | A7 | A4 | A1 | A12 | A31 | A24 | A15 | A26 | A21 | A22 | A29 | A30 | A17 | A18 | A25 | A14 | A23 | A16 | A27 | A28 | A19 | A20 | A13 |
| ((1-φ),1,φ) | θ=π | A7 | A1 | A2 | A4 | A3 | A11 | A8 | A0 | A6 | A9 | A10 | A5 | A18 | A25 | A30 | A17 | A31 | A15 | A12 | A24 | A29 | A21 | A22 | A26 | A19 | A13 | A23 | A27 | A28 | A20 | A14 | A16 |
| ((1-φ),1,-φ) | θ=π | A0 | A7 | A4 | A3 | A2 | A10 | A9 | A1 | A8 | A6 | A5 | A11 | A24 | A19 | A16 | A31 | A14 | A30 | A25 | A13 | A28 | A21 | A22 | A27 | A12 | A18 | A26 | A23 | A20 | A23 | A17 | A15 |
| (-(1-φ),1,φ) | θ=π | A0 | A6 | A5 | A3 | A8 | A2 | A1 | A11 | A4 | A9 | A10 | A7 | A16 | A29 | A26 | A19 | A12 | A28 | A27 | A15 | A20 | A30 | A25 | A23 | A24 | A22 | A14 | A18 | A17 | A13 | A21 | A31 |
| (-(1-φ),1,-φ) | θ=π | A6 | A1 | A2 | A5 | A9 | A3 | A0 | A10 | A8 | A4 | A7 | A11 | A28 | A17 | A18 | A27 | A29 | A13 | A14 | A26 | A20 | A31 | A24 | A23 | A22 | A25 | A19 | A15 | A12 | A16 | A30 | A21 |

Şekil 7.8 $\mathbb{R}^3_{TI}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

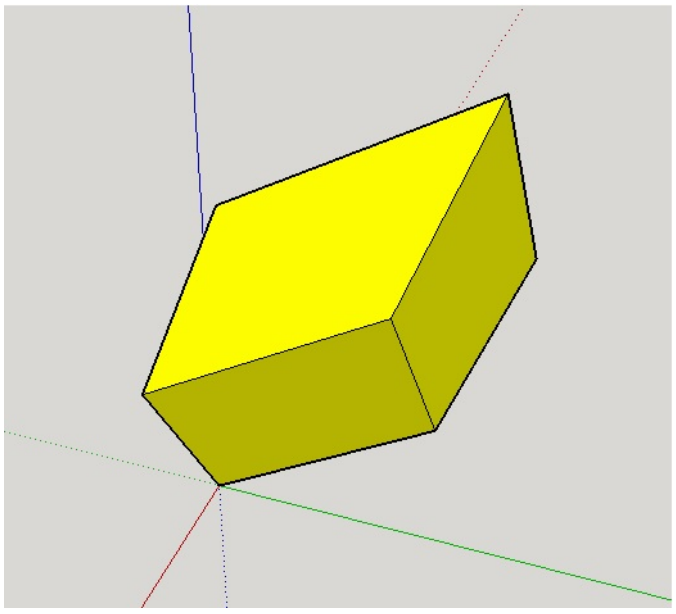
Buraya kadar olan kısımda Öklidyen 3-uzayın izometrilerinden hangilerinin $d_{TI}$ metriğini koruduğu bulunmuştur. Daha açıkça Öklidyen 3-uzayın izometrilerinden 15 yansıma, 60 dönme, 44 dönme-inversiyon ve bir inversiyonun $d_{TI}$ metriğini koruduğu gösterilmiştir. Bu tespit edilen elemanlar triakis icosahedron Öklidyen simetri grubu olan $I_h$ (Icosahedral grup) elemanlarıdır. Bu gruba triakis icosahedron grup denilsin ve $G(TI)$ ile gösterilsin. Açıkça $G(TI)$, $I_h$ grubuna izomorftur. Bundan sonraki kısımda bu dönüşümlerden başka $d_{TI}$ metriğini koruyan izometrinin olmadığı gösterilecektir. Yani $\mathbb{R}^3_{TI}$ nin tüm izometrilerinin $T(3).G(TI)$ olduğu gösterilecektir.

**Tanım 7.2** *$A = (a_1, a_2, a_3)$ ve $B = (b_1, b_2, b_3)$ $\mathbb{R}^3_{TI}$ uzayında iki farklı nokta olsun. Bu taktirde*

$$\{X \mid d_{TI}(A, X) + d_{TI}(B, X) = d_{TH}(A, B)\}$$

*kümesine $A$, $B$ noktalarının minimum uzaklık kümesi denir ve $[AB]$ ile gösterilir.*

Genel olarak, $[AB]$ kümesi $AB$ köşegenli bir paralelyüz oluşturur. Şekil7.9 da $A = (0, 0, 0)$ ve $B = (\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{4\sqrt{5}+6}{11}, \frac{16+18\sqrt{5}}{22})$ olmak üzere minimum uzaklık kümesi $(10-8\sqrt{5})x + (\sqrt{5}-15)y + (25-9\sqrt{5})z = 0$, $x - (\frac{\sqrt{5}-3}{2})y + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})z = 0$, $x = 0$ ve bu düzlemlere paralel olup $B$ noktasından geçen düzlemlerin sınırladığı bölgedir.



Şekil 7.9 $\mathbb{R}^3_{TI}$ da Minimum Uzaklık Kümesi

**Önerme 7.8** *$\phi : \mathbb{R}^3_{TI} \to \mathbb{R}^3_{TI}$ bir izometri ve $[AB]$ paralelyüz olsun. O halde*

$$\phi([AB]) = [\phi(A)\phi(B)]$$

*olur.*

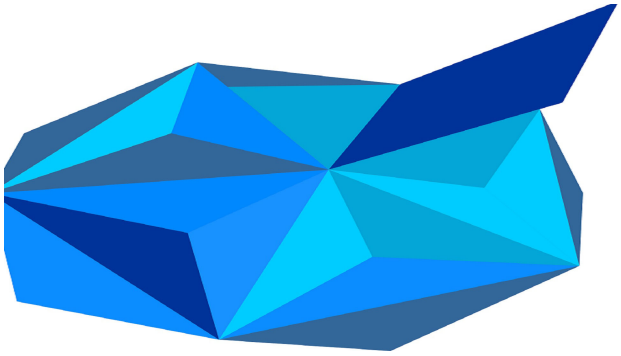
**İspat** *$Y \in \phi([AB])$ olsun.*

$$\begin{aligned} Y \in \phi([AB]) &\iff \exists X \in [AB] \ni Y = \phi(X) \\ &\iff d_{TI}(A,X) + d_{TI}(B,X) = d_{TI}(A,B) \\ &\iff d_{TI}(\phi(A),\phi(X)) + d_{TI}(\phi(B),\phi(X)) = d_{TI}(\phi(A),\phi(B)) \\ &\Leftrightarrow \quad Y = \phi(X) \in [\phi(A)\phi(B)]\,. \end{aligned}$$

**Sonuç 7.6** *$\phi : \mathbb{R}^3_{TI} \to \mathbb{R}^3_{TI}$ bir izometri ve $[AB]$ paralelyüz olsun. Bu durumda $\phi$, $[AB]$ nin köşelerini köşelere dönüştürür ve kenar uzunluklarını korur.*

**Önerme 7.9** *$f : \mathbb{R}^3_{TI} \to \mathbb{R}^3_{TI}$ dönüşümü $f(O) = O$ olacak şekilde bir izometri olsun. Bu taktirde $f \in G(D)$ olur.*

**İspat** *$O = (0,0,0)$ ve $D = (\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{4\sqrt{5}+6}{11}, \frac{16+18\sqrt{5}}{22})$ olmak üzere $[OD]$ paralelyüzünü gözönüne alalım. Bu paralelyüzün köşe noktalarından üçü $A_0 = (\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 0, 1)$, $A_8 = (0, \frac{4\sqrt{5}-5}{11}, \frac{7\sqrt{5}+5}{22})$, $A_{12} = (0, 1, \frac{\sqrt{5}-1}{2})$ olup bu noktalar aynı zamanda merkezil birim triakis icosahedron birim küresinin köşe noktalarıdır. Dahası bu üç nokta tetrakis hexahedronun her biri aynı ikizkenar üçgen olan bir yüzünün köşe noktalarıdır.*



Şekil 7.10 $\mathbb{R}^3_{TI}$ da Birim Küre Ve Minimum Uzaklık Kümesi

*$f$ izometrisi $[OD]$ paralelyüzününün köşe noktalarını köşe noktalara dönüştürüp, kenar uzaklıklarını korduğundan ve $f(O) = O$ olduğundan dolayı $A_0$, $A_8$ ve $A_{12}$ noktalarını triakis icosahedron yine bir yüzünün köşe noktalarına dönüştürür. Ayrıca bu dönüştürme işlemi gerçekleşirken kenar uzunlukları korunacağından dolayı $i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ olmak üzere $f(A_0) = A_i$ ve de $j,k \in \{0,1,2,3,4,5,...,26,27,28,29,30,31\}$ ve $A_jA_k$ triakis icosahedron bir kenarı olmak üzere $f(A_6) = A_j$ , $f(A_{10}) = A_k$ olur.Açıkça ifade edilirse $f$ izometrisi, triakis icosahedron bir yüzünün köşe noktalarını yine bir yüzünün köşe noktalarına dönüştürür. O halde triakis icosahedron 60 yüze sahip olduğundan bir yüzün dönüşebileceği 60 yüz ihtimali vardır. Ayrıca kenar uzunlukları korunmak zorunda olduğundan $A_0$ noktası bu yüz üzerinde dönüşebileceği nokta tek olarak belli iken diğer iki köşe noktaları olan $A_6$ ve $A_{10}$ için iki farklı ihtimal vardır. Bu taktirde triakis icosahedron her bir yüzü için 2 ihtimal olduğundan dolayı bu noktaların dönüşebileceği 120 ihtimal vardır. Bu ihtimaller ise aşağıda tek tek sıralanmış ve her bir dönüşümün önceden tespit edilen hareketlerden hangisine karşılık geldiği ifade edilmiştir.*

*1. $f(A_0) = A_2$ ise $f(A_8) = A_8$ ve $f(A_{12}) = A_{12}$ ise $\Delta : x = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ yansımasıdır.*

*2.$f(A_0) = A_0$ ise $f(A_8) = A_{10}$ ve $f(A_{12}) = A_{14}$ ise $\Delta : y = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ yansımasıdır.*

*3.$f(A_0) = A_1$ ise $f(A_8) = A_9$ ve $f(A_{12}) = A_{13}$ ise $\Delta : z = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ yansımasıdır.*

*4.$f(A_0) = A_{11}$ ise $f(A_8) = A_3$ ve $f(A_{12}) = A_{31}$; ise $\Delta : x + (1-\varphi)y + \varphi z = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ yansımasıdır.*

*5.$f(A_0) = A_4$ ise $f(A_8) = A_8$ ve $f(A_{12}) = A_{20}$ ise $\Delta : -x + (1-\varphi)y + \varphi z = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ göre yansımasıdır.*

*6.$f(A_0) = A_9$ ise $f(A_8) = A_8$ ve $f(A_{12}) = A_{22}$ ise $\Delta : -x + (1-\varphi)y + \varphi z = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ göre yansımasıdır.*

*7..$f(A_0) = A_5$ ise $f(A_8) = A_{10}$ ve $f(A_{12}) = A_{27}$ ise $\Delta : -x - (1-\varphi)y + \varphi z = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ göre yansımasıdır.*

*8.$f(A_0) = A_{10}$ ise $f(A_8) = A_7$ ve $f(A_{12}) = A_{30}$ ise $\Delta : \varphi x + y + (1-\varphi)z = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ göre yansımasıdır.*

*9.* $f(A_0) = A_8$ *ise* $f(A_8) = A_0$ *ve* $f(A_{12}) = A_{12}$ *ise* $\Delta : \varphi x + y - (1-\varphi)z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

*10.* $f(A_0) = A_0$ *ise* $f(A_8) = A_5$ *ve* $f(A_{12}) = A_{26}$ *ise* $\Delta : \varphi x - y + (1-\varphi)z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

*11.* $f(A_0) = A_0$ *ise* $f(A_8) = A_2$ *ve* $f(A_{12}) = A_{12}$ *ise* $\Delta : \varphi x - y - (1-\varphi)z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

*12.* $f(A_0) = A_7$ *ise* $f(A_8) = A_6$ *ve* $f(A_{12}) = A_{18}$ *ise* $\Delta : (1-\varphi)x + \varphi y + z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

*13.* $f(A_0) = A_0$ *ise* $f(A_8) = A_8$ *ve* $f(A_{12}) = A_{24}$ *ise* $\Delta : -(1-\varphi)x + \varphi y + z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

*14.* $f(A_0) = A_0$ *ise* $f(A_8) = A_4$ *ve* $f(A_{12}) = A_{16}$*ise* $\Delta : (1-\varphi)x + \varphi y - z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

*15.* $f(A_0) = A_6$ *ise* $f(A_8) = A_8$ *ve* $f(A_{12}) = A_{28}$*ise* $\Delta : -(1-\varphi)x + \varphi y - z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

*16.* $f(A_0) = A_1$ *ise* $f(A_8) = A_{11}$ *ve* $f(A_{12}) = A_{15}$ *ise dönme ekseni* $(1,0,0)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*17.* $f(A_0) = A_3$ *ise* $f(A_8) = A_9$ *ve* $f(A_{12}) = A_{13}$ *ise dönme ekseni* $(0,1,0)$ *olmak üzere* $f_\pi$ *dönmedir.*

*18.* $f(A_0) = A_2$ *ise* $f(A_8) = A_{10}$ *ve* $f(A_{12}) = A_{14}$*ise dönme ekseni* $(0,0,1)$ *olmak üzere* $f\pi$ *dönmedir.*

*19.* $f(A_0) = A_4$ *ise* $f(A_8) = A_0$ *ve* $f(A_{12}) = A_{16}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*20.* $f(A_0) = A_8$ *ise* $f(A_8) = A_4$ *ve* $f(A_{12}) = A_{20}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*21.* $f(A_0) = A_9$ *ise* $f(A_8) = A_6$ *ve* $f(A_{12}) = A_{22}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*22.* $f(A_0) = A_7$ *ise* $f(A_8) = A_2$ *ve* $f(A_{12}) = A_{18}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*23.* $f(A_0) = A_{10}$ *ise* $f(A_8) = A_7$ *ve* $f(A_{12}) = A_{23}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*24.* $f(A_0) = A_5$ *ise* $f(A_8) = A_1$ *ve* $f(A_{12}) = A_{17}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*25.* $f(A_0) = A_{11}$ *ise* $f(A_8) = A_5$ *ve* $f(A_{12}) = A_{21}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*26..* $f(A_0) = A_6$ *ise* $f(A_8) = A_3$ *ve* $f(A_{12}) = A_{19}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir*

*27.* $f(A_0) = A_8$ *ise* $f(A_8) = A_2$ *ve* $f(A_{12}) = A_{12}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*28* $f(A_0) = A_2$ *ise* $f(A_8) = A_0$ *ve* $f(A_{12}) = A_{12}$ *ise dönme ekseni*$(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*29.* $f(A_0) = A_{10}$ *ise* $f(A_8) = A_5$ *ve* $f(A_{12}) = A_{26}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*30.* $f(A_0) = A_2$ *ise* $f(A_8) = A_7$ *ve* $f(A_{12}) = A_{30}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*31.* $f(A_0) = A_1$ *ise* $f(A_8) = A_4$ *ve* $f(A_{12}) = A_{17}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*32.* $f(A_0) = A_6$ *ise* $f(A_8) = A_9$ *ve* $f(A_{12}) = A_{29}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*33.* $f(A_0) = A_7$ *ise* $f(A_8) = A_6$ *ve* $f(A_{12}) = A_{19}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*34.* $f(A_0) = A_1$ *ise* $f(A_8) = A_9$ *ve* $f(A_{12}) = A_{25}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*35.* $f(A_0) = A_5$ *ise* $f(A_8) = A_{10}$ *ve* $f(A_{12}) = A_{21}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*36.* $f(A_0) = A_4$ *ise* $f(A_8) = A_1$ *ve* $f(A_{12}) = A_{25}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*37.* $f(A_0) = A_9$ *ise* $f(A_8) = A_3$ *ve* $f(A_{12}) = A_{29}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{\sqrt{5}+-1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*38.* $f(A_0) = A_{11}$ *ise* $f(A_8) = A_{10}$ *ve* $f(A_{12}) = A_{23}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

*39.* $f(A_0) = A_4$ *ise* $f(A_8) = A_8$ *ve* $f(A_{12}) = A_{24}$ *ise dönme ekseni*$(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*40.* $f(A_0) = A_9$ *ise* $f(A_8) = A_8$ *ve* $f(A_{12}) = A_{20}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*41.* $f(A_0) = A_6$ *ise* $f(A_8) = A_8$ *ve* $f(A_{12}) = A_{22}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*42.* $f(A_0) = A_2$ *ise* $f(A_8) = A_8$ *ve* $f(A_{12}) = A_{28}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*43.* $f(A_0) = A_5$ *ise* $f(A_8) = A_4$ *ve* $f(A_{12}) = A_{16}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*44.* $f(A_0) = A_{11}$ *ise* $f(A_8) = A_1$ *ve* $f(A_{12}) = A_{27}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*45.* $f(A_0) = A_7$ *ise* $f(A_8) = A_3$ *ve* $f(A_{12}) = A_{31}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*46.* $f(A_0) = A_2$ *ise* $f(A_8) = A_6$ *ve* $f(A_{12}) = A_{18}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*47.* $f(A_0) = A_0$ *ise* $f(A_8) = A_6$ *ve* $f(A_{12}) = A_{29}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*48.* $f(A_0) = A_0$ *ise* $f(A_8) = A_7$ *ve* $f(A_{12}) = A_{19}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*49.* $f(A_0) = A_0$ *ise* $f(A_8) = A_{11}$ *ve* $f(A_{12}) = A_{31}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*50.* $f(A_0) = A_0$ *ise* $f(A_8) = A_{12}$ *ve* $f(A_{12}) = A_{15}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*51.* $f(A_0) = A_{10}$ *ise* $f(A_8) = A_0$ *ve* $f(A_{12}) = A_{14}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*52.* $f(A_0) = A_7$ *ise* $f(A_8) = A_{10}$ *ve* $f(A_{12}) = A_{30}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$*eksenine göre* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*53.* $f(A_0) = A_6$ *ise* $f(A_8) = A_7$ *ve* $f(A_{12}) = A_{18}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*54.* $f(A_0) = A_8$ *ise* $f(A_8) = A_6$ *ve* $f(A_{12}) = A_{28}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*55.* $f(A_0) = A_5$ *ise* $f(A_8) = A_0$ *ve* $f(A_{12}) = A_{26}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*56.* $f(A_0) = A_1$ *ise* $f(A_8) = A_5$ *ve* $f(A_{12}) = A_{27}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*57.* $f(A_0) = A_9$ *ise* $f(A_8) = A_1$ *ve* $f(A_{12}) = A_{13}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*58.* $f(A_0) = A_8$ *ise* $f(A_8) = A_9$ *ve* $f(A_{12}) = A_{22}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*59.* $f(A_0) = A_{10}$ *ise* $f(A_8) = A_2$ *ve* $f(A_{12}) = A_{30}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*60.* $f(A_0) = A_{11}$ *ise* $f(A_8) = A_7$ *ve* $f(A_{12}) = A_{31}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*61.* $f(A_0) = A_1$ *ise* $f(A_8) = A_3$ *ve* $f(A_{12}) = A_{13}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*62.* $f(A_0) = A_4$ *ise* $f(A_8) = A_9$ *ve* $f(A_{12}) = A_{20}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

*63.* $f(A_0) = A_8$ *ise* $f(A_8) = A_0$ *ve* $f(A_{12}) = A_{24}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*64.* $f(A_0) = A_7$ *ise* $f(A_8) = A_{11}$ *ve* $f(A_{12}) = A_{23}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}+1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*65.* $f(A_0) = A_{10}$ *ise* $f(A_8) = A_{11}$ *ve* $f(A_{12}) = A_{21}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*66.* $f(A_0) = A_6$ *ise* $f(A_8) = A_2$ *ve* $f(A_{12}) = A_{28}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}+1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*67.* $f(A_0) = A_9$ *ise* $f(A_8) = A_4$ *ve* $f(A_{12}) = A_{25}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\Pi$ *dönmedir.*

*68.* $f(A_0) = A_{11}$ *ise* $f(A_8) = A_3$ *ve* $f(A_{12}) = A_{15}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*69.* $f(A_0) = A_3$ *ise* $f(A_8) = A_6$ *ve* $f(A_{12}) = A_{29}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*70.* $f(A_0) = A_3$ *ise* $f(A_8) = A_1$ *ve* $f(A_{12}) = A_{15}$ *ise dönme ekseni*$(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*71.* $f(A_0) = A_4$ *ise* $f(A_8) = A_5$ *ve* $f(A_{12}) = A_{17}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{1}{2})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*72.* $f(A_0) = A_3$ *ise* $f(A_8) = A_{11}$ *ve* $f(A_{12}) = A_{31}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4}, -\frac{1}{2})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*73.* $f(A_0) = A_3$ *ise* $f(A_8) = A_7$ *ve* $f(A_{12}) = A_{19}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{1}{2})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*74.* $f(A_0) = A_5$ *ise* $f(A_8) = A_{11}$ *ve* $f(A_{12}) = A_{27}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4}, -\frac{1}{2})$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

*75.* $f(A_0) = A_7$ *ise* $f(A_8) = A_3$ *ve* $f(A_{12}) = A_{19}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*76.* $f(A_0) = A_{11}$ *ise* $f(A_8) = A_7$ *ve* $f(A_{12}) = A_{23}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*77.* $f(A_0) = A_{10}$ *ise* $f(A_8) = A_5$ *ve* $f(A_{12}) = A_{21}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$*eksenine göre* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*78.* $f(A_0) = A_4$ *ise* $f(A_8) = A_1$ *ve* $f(A_{12}) = A_{17}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*79.* $f(A_0) = A_4$ *ise* $f(A_8) = A_1$ *ve* $f(A_{12}) = A_{17}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*80.* $f(A_0) = A_9$ *ise* $f(A_8) = A_4$ *ve* $f(A_{12}) = A_{20}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*81.* $f(A_0) = A_6$ *ise* $f(A_8) = A_2$ *ve* $f(A_{12}) = A_{18}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*82.* $f(A_0) = A_8$ *ise* $f(A_8) = A_6$ *ve* $f(A_{12}) = A_{22}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*83.* $f(A_0) = A_5$ *ise* $f(A_8) = A_0$ *ve* $f(A_{12}) = A_{16}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*84.* $f(A_0) = A_{11}$ *ise* $f(A_8) = A_1$ *ve* $f(A_{12}) = A_{15}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*85.* $f(A_0) = A_1$ *ise* $f(A_8) = A_3$ *ve* $f(A_{12}) = A_{15}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*86.* $f(A_0) = A_9$ *ise* $f(A_8) = A_6$ *ve* $f(A_{12}) = A_{29}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*87.* $f(A_0) = A_1$ *ise* $f(A_8) = A_4$ *ve* $f(A_{12}) = A_{25}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*88.* $f(A_0) = A_5$ *ise* $f(A_8) = A_{10}$ *ve* $f(A_{12}) = A_{26}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*89.* $f(A_0) = A_4$ *ise* $f(A_8) = A_5$ *ve* $f(A_{12}) = A_{16}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*90.* $f(A_0) = A_2$ *ise* $f(A_8) = A_{10}$ *ve* $f(A_{12}) = A_{30}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*91.* $f(A_0) = A_6$ *ise* $f(A_8) = A_9$ *ve* $f(A_{12}) = A_{22}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*92.* $f(A_0) = A_7$ *ise* $f(A_8) = A_2$ *ve* $f(A_{12}) = A_{30}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*93.* $f(A_0) = A_{10}$ *ise* $f(A_8) = A_0$ *ve* $f(A_{12}) = A_{26}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{\sqrt{5}+-1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*94.* $f(A_0) = A_8$ *ise* $f(A_8) = A_9$ *ve* $f(A_{12}) = A_{20}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

*95.* $f(A_0) = A_7$ *ise* $f(A_8) = A_{11}$ *ve* $f(A_{12}) = A_{31}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*96.* $f(A_0) = A_{10}$ *ise* $f(A_8) = A_{11}$ *ve* $f(A_{12}) = A_{23}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*97.* $f(A_0) = A_5$ *ise* $f(A_8) = A_{11}$ *ve* $f(A_{12}) = A_{21}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*98.* $f(A_0) = A_1$ *ise* $f(A_8) = A_{11}$ *ve* $f(A_{12}) = A_{27}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*99.* $f(A_0) = A_6$ *ise* $f(A_8) = A_7$ *ve* $f(A_{12}) = A_{19}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*100.* $f(A_0) = A_8$ *ise* $f(A_8) = A_6$ *ve* $f(A_{12}) = A_{28}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*101.* $f(A_0) = A_4$ *ise* $f(A_8) = A_0$ *ve* $f(A_{12}) = A_{24}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*102.* $f(A_0) = A_1$ *ise* $f(A_8) = A_5$ *ve* $f(A_{12}) = A_{17}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*103.* $f(A_0) = A_3$ *ise* $f(A_8) = A_1$ *ve* $f(A_{12}) = A_{13}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*104.* $f(A_0) = A_3$ *ise* $f(A_8) = A_9$ *ve* $f(A_{12}) = A_{29}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*105.* $f(A_0) = A_3$ *ise* $f(A_8) = A_6$ *ve* $f(A_{12}) = A_{19}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmka üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*106.* $f(A_0) = A_3$ *ise* $f(A_8) = A_7$ *ve* $f(A_{12}) = A_{31}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*107.* $f(A_0) = A_9$ *ise* $f(A_8) = A_3$ *ve* $f(A_{12}) = A_{13}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*108.* $f(A_0) = A_4$ *ise* $f(A_8) = A_9$ *ve* $f(A_{12}) = A_{25}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*109.* $f(A_0) = A_5$ *ise* $f(A_8) = A_4$ *ve* $f(A_{12}) = A_{17}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*110.* $f(A_0) = A_{11}$ *ise* $f(A_8) = A_5$ *ve* $f(A_{12}) = A_{27}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0, -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*111.* $f(A_0) = A_6$ *ise* $f(A_8) = A_3$ *ve* $f(A_{12}) = A_{29}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*112.* $f(A_0) = A_2$ *ise* $f(A_8) = A_6$ *ve* $f(A_{12}) = A_{28}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*113.* $f(A_0) = A_{10}$ *ise* $f(A_8) = A_2$ *ve* $f(A_{12}) = A_{14}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*114.* $f(A_0) = A_{11}$ *ise* $f(A_8) = A_{10}$ *ve* $f(A_{12}) = A_{21}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*115.* $f(A_0) = A_9$ *ise* $f(A_8) = A_1$ *ve* $f(A_{12}) = A_{25}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*116.* $f(A_0) = A_8$ *ise* $f(A_8) = A_4$ *ve* $f(A_{12}) = A_{24}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*117.* $f(A_0) = A_2$ *ise* $f(A_8) = A_0$ *ve* $f(A_{12}) = A_{14}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*118.* $f(A_0) = A_7$ *ise* $f(A_8) = A_{10}$ *ve* $f(A_{12}) = A_{23}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

*119.* $f(A_0) = A_0$, $f(A_8) = A_8$ *ve* $f(A_{12}) = A_{12}$ *ise* $f$ *birim dönüşümdür.*

*120.* $f(A_0) = A_1$, $f(A_8) = A_{11}$ *ve* $f(A_{12}) = A_{15}$ *ise* $f$ *inversiyondur.*

*Buna göre orijini koruyan* $f$ *izometrisi* $G(TI)$ *nin bir elemanıdır. Bir başka deyişle triakis ıcosahedron uzaklığını koruyan Öklidyen izometriler dışında bir izometri yoktur.*

**Teorem 7.1** $f : \mathbb{R}^3_{TI} \to \mathbb{R}^3_{TI}$ *dönüşümü bir izometri olsun.* $f = T_A \circ g$ *olacak şekilde bir tek* $T_A \in T(3)$ *ve* $g \in G(D)$ *vardır.*

**İspat** *$A = (a_1, a_2, a_3)$ olmak üzere $f(O) = A$ olsun. Bu taktirde $g = T_{-A} \circ f$ olacak şekilde tanımlı $g$ dönüşümü bir izometridir ve $g(O) = O$ olur. Böylece önerme 6.9 dan dolayı $g \in G(TI)$ ve $f = T_A \circ g$ olur. İspatın tekliği aşikardır.*

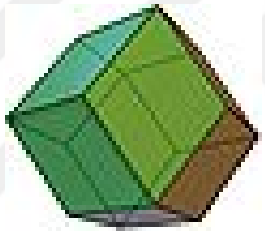
Buna göre triakis icosahedron metriği ile donatılmış analitik 3-uzayın izometrilerinin grubu triakis icosahedronun (Öklidyen) simetri grubu olan $G(TI)$ ile 3-boyutlu analitik uzayın tüm ötelemelerinin grubu olan $T(3)$ ün yarı-direkt çarpımıdır. Yani $\mathbb{R}^3_{TI}$ nın tüm izometrilerinin kümesi $T(3).G(TI)$ dır.

# 8. DİĞER KATALAN CİSİMLER

Bu bölümde bütünlüğü sağlamak adına tezde şuana kadar bahsedilmeyen ancak metrikleri ve izometri grupları yapılan çalışmalar dolayısıyla bilinen diğer katalan cisimlerden rhombic dodecahedron, triakis octahedron, deltoidal icositetrahedron, rhombic triacontahedron ve disdyakis triacontahedrondan ayrıntıya girilmeksizin kısaca bahsedilecektir.

## 8.1 Rhombic Dodecahedron

Rhombic dodecahedron 12 tane eşkenar dörtgen şeklinde yüze, 24 kenara ve 14 köşeye sahiptir(Şekil8.1)



Şekil 8.1 Rhombic Dodecahedron

Rhombic dodecahedron ile ilgili bu kısımda yer alan bilgiler (Erçınar,G.Z, 2015) yüksek lisans tezinden özetlenerek verilmiştir.

**Tanım 8.1** $\mathbb{R}^3$ *de* $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ *ve* $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ *noktaları verilsin. Bu taktirde,*

$$d_{RD}(P_1, P_2) = \max\{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, |x_1 - x_2| + |z_1 - z_2|, |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|\}$$

*şeklinde tanımlanan* $d_{RD} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$ *fonksiyonuna* $P_1$ *ve* $P_2$ *noktaları arasındaki rhombic dodecahedron uzaklık fonksiyonu denir.*

Bu metrikle döşenmiş analitik 3-uzayda $\mathbb{R}^3_{RD}$ ile gösterilmek üzere bu uzayın izometri grubu aşağıda verilen ispatsız önerme ve teoremlerle özetlenecektir.

**Önerme 8.1** $\mathbb{R}^3$ *de her Öklidyen öteleme* $\mathbb{R}^3_{RD}$ *ün bir izometrisidir.*

Yukarıdaki önermeden $\mathbb{R}^3_{RD}$ uzayında dönme ve yansımaları bulmak için orijinden geçen düzlemleri düşünmek yeterli olacaktır.

**Önerme 8.2** $\mathbb{R}^3_{RD}$ *de* $\Delta = ax + by + cz = 0$ *düzlemine göre yansımanın izometri olması için gerek ve yeter koşul düzlemin doğrultu vektörü* $(a, b, c)$ *nin*

$$D = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (-1,1,0), (1,0,1), (1,0,-1), (0,1,1), (0,1,-1)\}$$

*elemanlarına paralel olmasıdır.*

**Önerme 8.3** *Orijinden geçen bir* $l$ *doğrusuna göre bir* $r_\theta$ *dönmesinin izometri olması için gerek ve yeter koşul*

$$D_1 = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$$
$$D_2 = \{(1,1,1),\ (-1,1,1), (1,-1,1),\ (1,1,-1)\}$$
$$D_3 = \{(1,1,0),\ (1,0,1), (0,1,1),\ (1,-1,0),\ (1,0,-1),\ (0,1,-1)\}$$

$$R_1 = \{r_\theta \mid \theta \in \{\pi/2, \pi, 3\pi/2\}, \text{dönme ekseninin doğrultu vektörü } D_1 \text{ in elemanı}\}$$
$$R_2 = \{r_\theta \mid \theta \in \{2\pi/3, 4\pi/3\}, \text{dönme ekseninin doğrultu vektörü } D_2 \text{ nin elemanı}\}$$
$$R_3 = \{r_\theta \mid \theta = \pi, \text{dönme ekseninin doğrultu vektörü } D_3 \text{ ün elemanı}\}$$

*olmak üzere* $r_\theta \in \mathbb{R}_{RD} = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ *olmasıdır*

**Yardımcı Teorem 8.1** *Orijine göre inversiyon da uzaklığı korur. Yani inversiyon bir izometridir.*

**Önerme 8.4** $d_{RD}$ *uzaklığını invaryant bırakan orijine göre altı tane dönme yansıması vardır.*

**Önerme 8.5** $d_{RD}$ *uzaklığını değişmez bırakan orijine göre sekiz tane dönme inversiyonu vardır.*

Buraya kadar olan kısımda $O_h$ ocatahedral grubun dokuz yansıma, yirmi üç dönme, altı dönme yansıma, sekiz dönme-inversiyon ve bir inversiyondan oluşmakta olduğu gösterilmiştir. Yani rhombic dodecahedronun Öklidyen simetri grubu olduğu görülmektedir.

$\mathbb{R}^3_{RD}$ nin tüm izometrilerinin $T(3)O_h$ kümesinin elemanı olduğu aşağıdaki iki teoremle ifade edilmiştir.

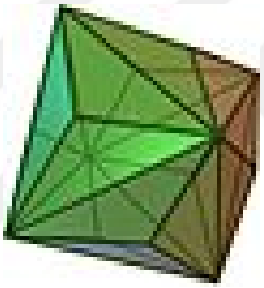
**Önerme 8.6** *$f : \mathbb{R}^3_{RD} \to \mathbb{R}^3_{RD}$, $f(O) = O$ özelliğinde bir izometri olmak üzere $f \in O_h$ dır.*

**Teorem 8.1** *$f : \mathbb{R}^3_{RD} \to \mathbb{R}^3_{RD}$ bir izometri olsun. Bu taktirde $f = T_A \circ g$ olacak şekilde bir tek $T_A \in T(3)$ ve $g \in O_h$ vardır.*

Buna göre $\mathbb{R}^3_{RD}$ ün izometri grubu $O_h$ ocathedral grup ile $T(3)$ analitik 3-uzayın tüm ötelemelerinin grubunun yarı direkt çarpımıdır.

## 8.2 Triakis Octahedron

Triakis Octahedron 24 tane ikiz kenar üçgen şeklinde yüze, 36 kenara ve 14 köşeye sahiptir (Şekil8.2).



Şekil 8.2 Triakis Octahedron

Triakis octahedron ile ilgili bu kısımda yer alan bilgiler (Bozkurt, G, 2016) doktora tezinden özetlenerek verilmiştir.

**Tanım 8.2** *$\mathbb{R}^3$ de $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ noktaları verilsin. Bu taktirde,*

$$d_{TO}(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| + (\sqrt{2} - 2) \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}$$

*şeklinde tanımlanan $d_{TO} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$ fonksiyonuna $P_1$ ve $P_2$ noktaları arasındaki triakis octahedron uzaklık fonksiyonu denir.*

Bu metrikle döşenmiş analitik 3-uzayda $\mathbb{R}^3_{TO}$ ile gösterilmek üzere bu uzayın izometri grubu aşağıda verilen ispatsız önerme ve teoremlerle özetlenecektir.

**Önerme 8.7** $\mathbb{R}^3$ *de her Öklidyen öteleme* $\mathbb{R}^3_{TO}$ *ün bir izometrisidir.*

Yukarıdaki önermeden $\mathbb{R}^3_{TO}$ uzayında dönme ve yansımaları bulmak için orijinden geçen düzlemleri düşünmek yeterli olacaktır.

**Önerme 8.8** $\mathbb{R}^3_{TO}$ *de* $\Delta = ax + by + cz = 0$ *düzlemine göre yansımanın izometri olması için gerek ve yeter koşul düzlemin doğrultu vektörü* $(a, b, c)$ *nin*

$$D = \{(1,0,0)\,,(0,1,0)\,,(0,0,1)\,,(1,1,0)\,,(-1,1,0)\,,(1,0,1)\,,(1,0,-1)\,,(0,1,1)\,,(0,1,-1)\}$$

*elemanlarına paralel olmasıdır.*

**Önerme 8.9** *Orijinden geçen bir* $l$ *doğrusuna göre bir* $r_\theta$ *dönmesinin izometri olması için gerek ve yeter koşul*

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(1,0,0)\,,\ (0,1,0)\,,\ (0,0,1)\} \\ D_2 &= \{(1,1,1)\,,\ (-1,1,1)\,,(1,-1,1)\,,\ (1,1,-1)\} \\ D_3 &= \{(1,1,0)\,,\ (1,0,1)\,,(0,1,1)\,,\ (1,-1,0)\,,\ (1,0,-1)\,,\ (0,1,-1)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1 &= \{r_\theta \mid \theta \in \{\pi/2\,,\,\pi,3\pi/2\}\,,\ dönme\ ekseninin\ doğrultu\ vektörü\ D_1\ in\ elemanı\} \\ R_2 &= \{r_\theta \mid \theta \in \{2\pi/3\,,\,4\pi/3\}\,,\ dönme\ ekseninin\ doğrultu\ vektörü\ D_2\ nin\ elemanı\} \\ R_3 &= \{r_\theta \mid \theta = \pi,\ dönme\ ekseninin\ doğrultu\ vektörü\ D_3\ ün\ elemanı\} \end{aligned}$$

*olmak üzere* $r_\theta \in \mathbb{R}_{TO} = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ *olmasıdır*

**Yardımcı Teorem 8.2** *Orijine göre inversiyon da uzaklığı korur. Yani inversiyon bir izometridir.*

**Önerme 8.10** $d_{TO}$ *uzaklığını invaryant bırakan orijine göre altı tane dönme yansıması vardır.*

**Önerme 8.11** $d_{TO}$ *uzaklığını değişmez bırakan orijine göre sekiz tane dönme inversiyonu vardır.*

Buraya kadar olan kısımda $O_h$ ocatahedral grubun dokuz yansıma, yirmi üç dönme, altı dönme yansıma, sekiz dönme-inversiyon ve bir inversiyondan oluşmakta olduğu gösterilmiştir. Yani triakis ocathedronun Öklidyen simetri grubu olduğu görülmektedir.

$\mathbb{R}^3_{TO}$ nin tüm izometrilerinin $T(3)O_h$ kümesinin elemanı olduğu aşağıdaki iki teoremle ifade edilmiştir.

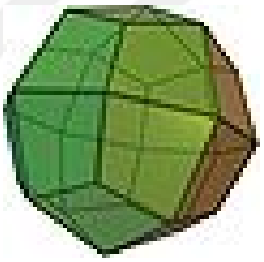
**Önerme 8.12** *$f : \mathbb{R}^3_{TO} \to \mathbb{R}^3_{TO}$, $f(O) = O$ özelliğinde bir izometri olmak üzere $f \in O_h$ dır.*

**Teorem 8.2** *$f : \mathbb{R}^3_{TO} \to \mathbb{R}^3_{TO}$ bir izometri olsun. Bu taktirde $f = T_A \circ g$ olacak şekilde bir tek $T_A \in T(3)$ ve $g \in O_h$ vardır.*

Buna göre $\mathbb{R}^3_{TO}$ ün izometri grubu $O_h$ ocathedral grup ile $T(3)$ analitik 3-uzayın tüm ötelemelerinin grubunun yarı direkt çarpımıdır.

## 8.3 Deltoidal Icositetrahedron

Deltoidal Icositetrahedron 24 tane deltoid şeklinde yüze, 48 kenara ve 26 köşeye sahiptir (Şekil8.3).



Şekil 8.3 Deltoidal İcositetrahedron

Deltoidal Icositetrahedron ile ilgili bu kısımda yer alan bilgiler (Gelişgen Ö., Kaya R., 2015) makalesinden özetlenerek verilmiştir.

**Tanım 8.3** *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ analitik düzlemde herhangi iki nokta olsun.*

$$\begin{aligned} d_C(P_1, P_2) &= \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\} + \\ &\quad \left(\sqrt{2} - 1\right) \min\{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, |x_1 - x_2| + |z_1 - z_2|, |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|\} \end{aligned}$$

*şeklinde tanımlanan $d_c : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$ fonksiyonuna $P_1$ ve $P_2$ noktaları arasındaki Çin Dama uzaklık fonksiyonu adı verilir.*

Octahedral izometri grubuna sahip olan deltoidal icositetrahedron 48 simetriye sahiptir.

**Önerme 8.13** $\mathbb{R}^3$ *de her Öklidyen öteleme* $\mathbb{R}^3_C$ *ün bir izometrisidir.*

Yukarıdaki önermeden $\mathbb{R}^3_C$ uzayında dönme ve yansımaları bulmak için orijinden geçen düzlemleri düşünmek yeterli olacaktır.

**Önerme 8.14** $\mathbb{R}^3_C$ *de* $\Delta = ax+by+cz = 0$ *düzlemine göre yansımanın izometri olması için gerek ve yeter koşul düzlemin doğrultu vektörü*$(a, b, c)$ *nin*

$$D = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (-1,1,0), (1,0,1), (1,0,-1), (0,1,1), (0,1,-1)\}$$

*elemanlarına paralel olmasıdır.*

**Önerme 8.15** *Orijinden geçen bir l doğrusuna göre bir* $r_\theta$ *dönmesinin izometri olması için gerek ve yeter koşul*

$$D_1 = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$$
$$D_2 = \{(1,1,1),\ (-1,1,1), (1,-1,1),\ (1,1,-1)\}$$
$$D_3 = \{(1,1,0),\ (1,0,1), (0,1,1),\ (1,-1,0),\ (1,0,-1),\ (0,1,-1)\}$$

$$R_1 = \{r_\theta \mid \theta \in \{\pi/2, \pi, 3\pi/2\}, \text{dönme ekseninin doğrultu vektörü } D_1 \text{ in elemanı}\}$$
$$R_2 = \{r_\theta \mid \theta \in \{2\pi/3, 4\pi/3\}, \text{dönme ekseninin doğrultu vektörü } D_2 \text{ nin elemanı}\}$$
$$R_3 = \{r_\theta \mid \theta = \pi, \text{dönme ekseninin doğrultu vektörü } D_3 \text{ ün elemanı}\}$$

*olmak üzere* $r_\theta \in \mathbb{R}_C = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ *olmasıdır*

**Yardımcı Teorem 8.3** *Orijine göre inversiyon da uzaklığı korur. Yani inversiyon bir izometridir.*

**Önerme 8.16** $d_C$ *uzaklığını invaryant bırakan orijine göre altı tane dönme yansıması vardır.*

**Önerme 8.17** $d_C$ *uzaklığını değişmez bırakan orijine göre sekiz tane dönme inversiyonu vardır.*

Buraya kadar olan kısımda $O_h$ ocatahedral grubun dokuz yansıma, yirmi üç dönme, altı dönme yansıma, sekiz dönme-inversiyon ve bir inversiyondan oluşmakta olduğu gösterilmiştir. Yani deltoidal icositetrahedronun Öklidyen simetri grubu olduğu görülmektedir.

$\mathbb{R}^3_C$ nin tüm izometrilerinin $T(3)O_h$ kümesinin elemanı olduğu aşağıdaki iki teoremle ifade edilmiştir.

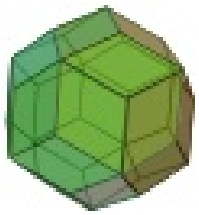
**Önerme 8.18** *$f : \mathbb{R}^3_C \to \mathbb{R}^3_C$, $f(O) = O$ özelliğinde bir izometri olmak üzere $f \in O_h$ dır.*

**Teorem 8.3** *$f : \mathbb{R}^3_C \to \mathbb{R}^3_C$ bir izometri olsun. Bu taktirde $f = T_A \circ g$ olacak şekilde bir tek $T_A \in T(3)$ ve $g \in O_h$ vardır.*

Buna göre $\mathbb{R}^3_C$ ün izometri grubu $O_h$ ocathedral grup ile $T(3)$ analitik 3-uzayın tüm ötelemelerinin grubunun yarı direkt çarpımıdır.

## 8.4 Rhombic Triacontahedron

Rhombic triacontaheron 30 tane eş kenar dörtgen şeklide yüze, 60 kenara ve iki tipten oluşan 32 köşeye sahiptir (Şekil8.4).



Şekil 8.4 Rhombic triacontahedron

Birinci tip köşede 3, ikinci tiptekilerde ise 5 tane yüz buluşmaktadır. İcosidodecahedronun dualidir ve bir zonohedrondur. Ayrıca rhombic triacontahedron 120 tane simetriye sahip olup, simetri grubu $I_h$ ile gösterilir

**Tanım 8.4** *$P_1 = (x_1, y_1 z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\mathbb{R}^3 de$ iki farklı nokta olsun. $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ altın oran olmak üzere*

$$d_{RT}(P_1, P_2) = \frac{\varphi}{2} \max \left\{ \begin{array}{l} |x_1 - x_2| + (2\varphi - 3) \max \{(\varphi + 1)|z_1 - z_2| + \varphi |y_1 - y_2|, |x_1 - x_2|\}, \\ |y_1 - y_2| + (2\varphi - 3) \max \{(\varphi + 1)|x_1 - x_2| + \varphi |z_1 - z_2|, |y_1 - y_2|\}, \\ |z_1 - z_2| + (2\varphi - 3) \max \{(\varphi + 1)|y_1 - y_2| + \varphi |x_1 - x_2|, |z_1 - z_2|\} \end{array} \right\}$$

*biçiminde tanımlanan $d_{RT} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$ uzaklık fonksiyonuna rhombic triacontahedron uzaklık fonksiyon denir.*

Icosahedral izometri grubuna sahip olan Rhombic Triacontahedron 120 simetriye sahiptir.

**Önerme 8.19** *$\mathbb{R}^3$ de her öklidyen öteleme $\mathbb{R}^3_{RT}$ ün bir izometrisidir.*

Yukarıdaki önermeden $\mathbb{R}^3_{RT}$ uzayında dönme ve yansımaları bulmak için orijinden geçen düzlemleri düşünmek yeterli olacaktır.

**Önerme 8.20** *$\mathbb{R}^3_{RT}$ de $\Delta = ax + by + cz = 0$ düzlemine göre yansımanın izometri olması için gerek ve yeter koşul düzlemin doğrultu vektörü $(a, b, c)$ nin*

$$D = \left\{ \begin{array}{l} (\pm 1, \varphi, \pm(1 - \varphi)), \ (\pm(1 - \varphi), \pm 1, \varphi), \ (\varphi, \pm(1 - \varphi), \pm 1), \\ (1, 0, 0), \ (0, 1, 0), \ (0, 0, 1), \end{array} \right\}$$

*vektör kümesi elemanlarına paralel olmasıdır.*

**Önerme 8.21** *$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve*

$$D_1 = \{1, (\pm(1 - \varphi), 0), \ (0, 1, \pm(1 - \varphi)), \ (\pm(1 - \varphi), 0, 1)\}$$
$$D_2 = \left\{ \begin{array}{l} (1, 0, 0), \ (0, 1, 0), (0, 0, 1), \ (1, \pm\varphi, \pm(1 - \varphi)), (\pm(1 - \varphi), 1, \pm\varphi) \\ (\pm\varphi, \pm(1 - \varphi), 1) \end{array} \right\}$$
$$D_3 = \left\{ \begin{array}{l} (1, 1, 1), \ (-1, 1, 1), \ (1, -1, 1), \ (1, 1, -1), \ (\pm(2 - \varphi), 1, 0), \\ (0, \pm(2 - \varphi), 1), (1, 0 \pm (2 - \varphi)) \end{array} \right\}$$

*olmak üzere*

$$R_1 = \{r_\theta \mid \theta \in \{2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5\}, \text{ dönme ekseninin doğrultu vektörü } D_1 \text{ in elemanı}\}$$
$$R_2 = \{r_\theta \mid \theta \in \{\pi\}, \text{ dönme ekseninin doğrultu vektörü } D_2 \text{ in elemanı}\}$$
$$R_3 = \{r_\theta \mid \theta = \{2\pi/3, 4\pi/3\}, \text{ dönme ekseninin doğrultu vektörü } D_3 \text{ in elemanı}\}$$

*kümeleri verilsin. Dönme ekseni orijinden geçen bir l doğrusu olan $r_\theta$ dönmesinin bir izometri olması için gerek ve yeter koşul $r_\theta \in \mathbb{R}_{RT} = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ olmasıdır.*

**Yardımcı Teorem 8.4** *Orijine göre inversiyon da uzaklığı korur. Yani inversiyon bir izometridir.*

**Önerme 8.22** $d_{RT}$ *uzaklığını invaryant bırakan orijine göre dönme yansımaların hepsi orijine göre inversiyon dönüşümüne eşittir.*

**Önerme 8.23** $d_{RT}$ *uzaklığını koruyan orijine göre kırk dört dönme inversiyon vardır.*

Buraya kadar olan kısımda $I_h$ ocatahedral grubun 15 yansıma, 60 dönme, 44 dönme-inversiyon ve bir inversiyondan oluşmakta olduğu gösterilmiştir. Yani rhombic triacontahedron Öklidyen simetri grubu olduğu görülmektedir.

$\mathbb{R}^3_{RT}$ nin tüm izometrilerinin $T(3)I_h$ kümesinin elemanı olduğu aşağıdaki iki teoremle ifade edilmiştir.

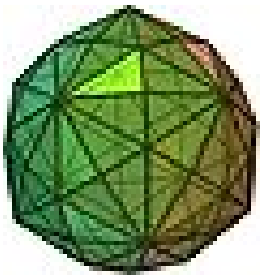
**Önerme 8.24** $f : \mathbb{R}^3_{RT} \to \mathbb{R}^3_{RT}$, $f(O) = O$ *özelliğinde bir izometri olmak üzere* $f \in I_h$ *dır.*

**Teorem 8.4** $f : \mathbb{R}^3_{RT} \to \mathbb{R}^3_{RT}$ *bir izometri olsun. Bu taktirde* $f = T_A \circ g$ *olacak şekilde bir tek* $T_A \in T(3)$ *ve* $g \in I_h$ *vardır.*

Buna göre $\mathbb{R}^3_{RT}$ ün izometri grubu $I_h$ ocathedral grup ile $T(3)$ analitik 3-uzayın tüm ötelemelerinin grubunun yarı direkt çarpımıdır.

## 8.5 Disdyakis Triacontahedron

Truncated icosidodecahedronun duali olan disdyakis triacontahedron, hexakis icosahedron ya da kisrhombic triacontahedron 120 yüze sahip bir katalan cismidir (Şekil8.5).



Şekil 8.5 Disdyakis triacontahedron

Rhombic triacontahedronun her bir yüzüne düzgün bir şekilde tek bir köşede buluşan 4 er üçgen yerleştirilirse disdyakis triacontahedron elde edilir, yani disdyakis triacontahedron rhombic triacontahedronun Kleetopudur. Bu cisim Katalan ve Arşimed cisimleri arasında en çok yüze sahip olanıdır. Ayrıca Disdyakis Triacontahedron 120 tane simetriye sahip olup, simetri grubu $I_h$ ile gösterilir.

Birim küresi disdyakis triacontahedron olan uzaklık fonksiyonu $d_{DT}$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

**Tanım 8.5** *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\mathbb{R}^3$'te iki farklı nokta olsun. $|\alpha_1| = |x_1 - x_2|, |\alpha_2| = |y_1 - y_2|$ ve $|\alpha_3| = |z_1 - z_2|$ denilirse*

$$d_{DT}(P_1,P_2) = \max \left\{ \begin{array}{l} |\alpha_1| + \frac{4\varphi-5}{11} \max \left\{ \begin{array}{l} |\alpha_2| + |\alpha_3|, \\ (1-\varphi)|\alpha_1| + 2|\alpha_2| + (1+\varphi)|\alpha_3|, \\ -\varphi|\alpha_1| + (2+\varphi)|\alpha_2| + 2\varphi|\alpha_3|, \\ (1-2\varphi)|\alpha_1| + (1+\varphi)|\alpha_2| + 3\varphi|\alpha_3|, \\ 2(1-\varphi)|\alpha_1| + |\alpha_2| + (2\varphi+1)|\alpha_3| \end{array} \right\}, \\ |\alpha_2| + \frac{4\varphi-5}{11} \max \left\{ \begin{array}{l} |\alpha_1| + |\alpha_3|, \\ (1+\varphi)|\alpha_1| + (1-\varphi)|\alpha_2| + 2|\alpha_3|, \\ 2\varphi|\alpha_1| - \varphi|\alpha_2| + (2+\varphi)|\alpha_3|, \\ 3\varphi|\alpha_1| + (1-2\varphi)|\alpha_2| + (1+\varphi)|\alpha_3|, \\ (2\varphi+1)|\alpha_1| + 2(1-\varphi)|\alpha_2| + |\alpha_3| \end{array} \right\}, \\ |\alpha_3| + \frac{4\varphi-5}{11} \max \left\{ \begin{array}{l} |\alpha_1| + |\alpha_2|, \\ 2|\alpha_1| + (1+\varphi)|\alpha_2| + (1-\varphi)|\alpha_3|, \\ (2+\varphi)|\alpha_1| + 2\varphi|\alpha_2| - \varphi|\alpha_3|, \\ (1+\varphi)|\alpha_1| + 3\varphi|\alpha_2| + (1-2\varphi)|\alpha_3|, \\ |\alpha_1| + (2\varphi+1)|\alpha_2| + 2(1-\varphi)|\alpha_3| \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

*biçiminde tanımlanan* $d_{DT} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to [0,\infty)$ *uzaklık fonksiyonuna disdyakis triacontahedron uzaklık fonksiyonu denir.*

Icosahedral izometri grubuna sahip olan Rhombic Triacontahedron 120 simetriye sahiptir.

**Önerme 8.25** $\mathbb{R}^3$*de her öklidyen öteleme* $\mathbb{R}^3_{DT}$ *ün bir izometrisidir.*

Yukarıdaki önermeden $\mathbb{R}^3_{DT}$ uzayında dönme ve yansımaları bulmak için orijinden geçen düzlemleri düşünmek yeterli olacaktır.

**Önerme 8.26** $\mathbb{R}^3_{DT}$ *de* $\Delta = ax + by + cz = 0$ *düzlemine göre yansımanın izometri olması için gerek ve yeter koşul düzlemin doğrultu vektörü* $(a,b,c)$ *nin*

$$D = \left\{ \begin{array}{l} (\pm 1, \varphi, \pm(1-\varphi)),\ (\pm(1-\varphi), \pm 1, \varphi),\ (\varphi, \pm(1-\varphi), \pm 1),\ \\ (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1), \end{array} \right\}$$

*vektör kümesi elemanlarına paralel olmasıdır.*

**Önerme 8.27** $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *ve*

$$\begin{aligned} D_1 &= \{1, (\pm(1-\varphi), 0),\ (0, 1, \pm(1-\varphi)),\ (\pm(1-\varphi), 0, 1)\} \\ D_2 &= \left\{ \begin{array}{l} (1,0,0),\ (0,1,0), (0,0,1),\ (1, \pm\varphi, \pm(1-\varphi)), (\pm(1-\varphi), 1, \pm\varphi) \\ (\pm\varphi, \pm(1-\varphi), 1) \end{array} \right\} \\ D_3 &= \left\{ \begin{array}{l} (1,1,1),\ (-1,1,1),\ (1,-1,1),\ (1,1,-1),\ (\pm(2-\varphi), 1, 0), \\ (0, \pm(2-\varphi), 1), (1, 0 \pm (2-\varphi)) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

*olmak üzere*

$$\begin{aligned} R_1 &= \{r_\theta \mid \theta \in \{2\pi/5,\ 4\pi/5,\ 6\pi/5, 8\pi/5\},\ dönme\ ekseninin\ doğrultu\ vektörü\ D_1\ in\ elemanı\} \\ R_2 &= \{r_\theta \mid \theta \in \{\pi\},\ dönme\ ekseninin\ doğrultu\ vektörü\ D_2\ in\ elemanı\} \\ R_3 &= \{r_\theta \mid \theta = \{2\pi/3, 4\pi/3\},\ dönme\ ekseninin\ doğrultu\ vektörü\ D_3\ in\ elemanı\} \end{aligned}$$

*kümeleri verilsin. Dönme ekseni orijinden geçen bir l doğrusu olan* $r_\theta$ *dönmesinin bir izometri olması için gerek ve yeter koşul* $r_\theta \in \mathbb{R}_{DT} = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ *olmasıdır.*

**Yardımcı Teorem 8.5** *Orijine göre inversiyon da uzaklığı korur. Yani inversiyon bir izometridir.*

**Önerme 8.28** *$d_{DT}$ uzaklığını invaryant bırakan orijine göre dönme yansımaların hepsi orijine göre inversiyon dönüşümüne eşittir.*

**Önerme 8.29** *$d_{DT}$ uzaklığını koruyan orijine göre kırk dört dönme inversiyon vardır.*

Buraya kadar olan kısımda $I_h$ ocatahedral grubun 15 yansıma, 60 dönme, 44 dönme-inversiyon ve bir inversiyondan oluşmakta olduğu gösterilmiştir. Yani rhombic triacontahedron Öklidyen simetri grubu olduğu görülmektedir.

$\mathbb{R}^3_{RT}$ nin tüm izometrilerinin $T(3)I_h$ kümesinin elemanı olduğu aşağıdaki iki teoremle ifade edilmiştir.

**Önerme 8.30** *$f : \mathbb{R}^3_{DT} \to \mathbb{R}^3_{DT}$, $f(O) = O$ özelliğinde bir izometri olmak üzere $f \in I_h$ dır.*

**Teorem 8.5** *$f : \mathbb{R}^3_{DT} \to \mathbb{R}^3_{DT}$ bir izometri olsun. Bu taktirde $f = T_A \circ g$ olacak şekilde bir tek $T_A \in T(3)$ ve $g \in I_h$ vardır.*

Buna göre $\mathbb{R}^3_{DT}$ ün izometri grubu $I_h$ octahedral grup ile $T(3)$ analitik 3-uzayın tüm ötelemelerinin grubunun yarı direkt çarpımıdır.

# 9. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölüme kadar, $\mathbb{R}^3$ te Katalan cisimler olarak adlandırdığımız düzgün olmayan çokyüzlülerden bahsederek, bu cisimlerin matematiksel yapısını, çeşitli bilim dallarındaki rolleri ve geçmişten günümüze kullanım alanları ve uygulamalarından bahsedilmiştir. Böylece de $\mathbb{R}^3$ te düzgün olmayan çokyüzlüler hakkında detaylı bir inceleme yapılmıştır.

Daha önce yapılan metrik geometri çalışmaları incelendiğinde, maksimum ve taksi metriklerine göre birim kürelerin sırasıyla düzgün altı yüzlü ve sekiz yüzlü olduğu görülmektedir. Bu çalışmada da varlıkları bilinen ancak nasıl bir yapıda oldukları bilinmeyen daha önce de tanımlanmamış birim küreleri tetrakis hexahedron, disdyakis dodecahedron, deltoidal hexacontahedron, pentakis dodecahedron ve triakis ıcosahedron olan metrikler bulunmuştur. Sahip oldukları simetri özelliğinden dolayı Katalan Cisimler, matematiksel olarak ilgi görmesinin yanında, diğer bilim dalları içinde ilgi odağı olmuştur. Bu tezle, bulunan metriklerin kartezyen formları sayesinde Katalan Cisimler üzerinde, matematiksel ve diğer bilim dalları açısından daha kolay bir şekilde çalışılması öngörülmektedir.

Son olarak da bulunan bu metrikle döşenmiş analitik 3-uzayının izometri gruplarının ilgili uzayın birim küresi olan katalan cismin Öklidyen Simetri grubu ile Öklidyen tüm ötelemelerin grubu olan $T(3)$ ün yarı direkt çarpımı olduğu gösterilmiştir.

Özetlemek gerekirse, bu tezde on üç katalan cisimden beş tanesi önceki çalışmalardan bilinen, diğer beş tanesi de bu tezde alınan olmak üzere on tanesinin metrikleri ve bu metriklerle donatılmış 3-boyutlu uzayın izometri grupları belirlenmiştir. Ancak üç katalan cisim olan triakis tetrahedron, pentagonal icositetrahedron, pentagonal hexacontahedron için sorular açık problemdir ve bu konuda çalışmalarımız devam etmektedir.

# KAYNAKLAR DİZİNİ


Akça, Z. ve Kaya, R., 2004, On the Norm in Higher Dimensional Taxicab Spaces, Hadronic Journal Supplement, 19, 491-501.

Akça, Z. ve Kaya, R., 1997, On the Taxicab Trigonometry, Journal of Inst. of Math. &Comp. Sci., 10, 3, 151-159.

Akça, Z. ve Kaya, R., 2004, On The Distance Formulae in Three Dimensional Taxicab Space, Hadronic Journal, 27**,** 5, 521-532.

Alexandrov, A. D., 2000, Convex Polyhedra, Springer, 7-16p.

Atiyah, M. ve Sutcliffe, P., 2003, Polyhedra in Physics, Chemistry and Geometry, Milan Journal of Mathematics, 71:33-58.

Bayar, A. ve Ekmekçi, S., 2006, On the Chinese Checker Sine and Cosine Functions, Internationnal Journal of Mathematics and Analysis, 1, 3, 249-259.

Bozkurt, G., 2016, $\mathbb{R}^3$ de "Öklidyen, Taksi ve Çin Dama Metrikleri Ayrdımıyla oluşan Metrikler" Üzerine, PhD Thesis, Eskişehir Osmangazi University.

Bulgarean, V., 2013, The Group Isodp(Rn) with p 6 =2, Automation Computers Applied Mathematics Scientific Journal, 22-1:69-74.

Can, Z., Çolak, Z., Gelişgen, Ö., 2015, A Note On The Metrics Induced By Triakis Icosahedron And Disdyakis Triacontahedron, Eurasian Academy of Sciences Eurasian Life Sciences Journal / Avrasya Fen Bilimleri Dergisi Vol.1, 1-11.

Catalan, Eugène, 1865, Memoriè sur la Thèorie des Polyèdres. J. I'Ecole Polytechnique, Paris, 41, 1-71.

Chen, G. , 1992, Lines and Circles in Taxicab Geometry, M.S. thesis, Department of Mathematics and Computer Science, Centered Missouri State University, 43p.

Coxeter, H. S. M., 1961, Introduction to Geometry, John Wiley&Sons Inst., 443p.

Cromwell, Peter R., 1997, Polyhedra, Cambridege Universıty Press,1-7p.

Çolak, Z., Gelişgen, Ö., 2015, New Metrics for Deltoidal Hexacontahedron and Pentakis Dodecahedron, SAU Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, Vol.19, No.3, 353-360.

# KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Çolakoğlu, H., B., 2009, Taksi, Maksimum, Çin Dama ve Alfa Düzlemlerinin Bazı Özellikleri ve Genelleştirilmesi, ESOGÜ , PhD Thesis.

Çolakoğlu, H., B. ve Kaya R., 2011, A generalization of some well-known distances and related isometries, Mathematical Communications, 16, 21-35.

Colakoğlu, H.B., Gelisgen, O. ve Kaya, R., 2013, Area formulas for triangle in alpha plane, Mathematical Communications, 18-1:123-132.

Erçınar, G.Z., 2015, Birim küresi Rhombic Dodecahedron Olan Metriğin Araştırılması, Master Thesis, Eskişehir Osmangazi University.

Ermiş, T., Gelisgen, O. ve Kaya, R., 2012, On Taxicab Incircle and Circumcircle of a Triangle, Scientific and Professional Journal of the Croatian Society for Geometry and Graphics (KoG), 16:3-12.

Ermiş, T., 2014, Düzgün Çokyüzlülerin Metrik Geometriler İle İlişkileri Üzerine , ESOGÜ , PhD Thesis.

Ermiş, T. ve Kaya, R., On the Isometries of 3-Dimensional Maximum Space, Konuralp Journal Of Mathematics, Vol.3, No.1, pp.103-114, 2015.

Gelişgen, Ö. ve Kaya, R., 2006, Generalization of $\alpha$-Distance to n-Dimensional Space, Scientific and Professional Journal of the Croatian Society for Geometry and Graphics (KoG), 10, 33-37.

Gelişgen, Ö. ve Kaya, R., 2006, CC – Analog of the Theorem of Pythagoras, Algebras, Groups and Geometries, 23, 2, 179-188.

Gelişgen,Ö., Kaya,R. ve Özcan,M., 2006, Distance Formulae in the Chinese Checker Space, International Journal of Pure and Applied Mathematical (IJPAM), 26, 1, 35-44.

Gelişgen, Ö. ve Kaya, R., 2006, On $\alpha-$Distance in Three Dimensional Space, Applied Sciences,8, 65-69.

Gelişgen, Ö., ve Kaya, R., 2015, The Isometry Group of Chinese Checker Space, International Electronic Journal of Geometry, Vol.8, No:2, 82-96.

Gelişgen Ö. , Kaya R., 2009, The Taxicab Space Group, Acta Mathematica Hungarica, Acta Mathematica Hungarica, Vol. 122, No.1 - 2, 187 - 200.

# KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Gelişgen Ö., Çolak Z., 2015, A Family of Metrics for Some Polyhedra, Automation Computers Applied Mathematics Scientific Journal, Vol.24, No.1, 3-1.

Kaya, R., 2002, Analitik Geometri, Bilim ve Teknik Yayınevi, 439p.

Kaya, R., Gelişgen, Ö., Ekmekçi, S. ve Bayar, A., Group of Isometries of the CC-Plane, Missouri Journal of Mathematical Sciences, 01/2006, 18(3):221-233.

Kaya, R., Gelişgen, Ö., Ekmekçi, S. ve Bayar, A., On the Group of Isometries of the Plane with Generalized Absolute Value Metric, Rocky Mountain Journal of Mathematics, Volume 39, Number 2, 2009.

Koca, M., Koca N. ve Koç, R., 2010, Catalan solids derived from three-dimensional-root systems and quarternions, Journal of Mathematical Physics, 51:043501.

Krause, E.F., 1975, Taxicab Geometry, Addison - Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 88p.

Milmann, R. S. ve Parker, G. D., 1991, Geometry a Metric Approach with Models, Springer, 370p.

Martin, G. E. , Transformation Geometry, Springer-Verlag, 1997.

Martin, G. E., 1998, The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane, Springer, 509p.

Milmann, R. S. and Parker, G. D., 1991, Geometry a Metric Approach with Models, Springer, 370p.

Minkowski, H., 1967, Gesammelte Abhandlungen, Chelsa Publishing Co. New York, 836p.

Minkowski, H., 1896 sur les proprie'te's des nombers entiers qui sont de'rive'es de I'ntuition de I'espace, Nouvelles Annales de Mathe 'matiques, 3e Se'rie 15 (1896); aso in: Gesammelte Abhandlungen 1, Band XII, pp. 271:277.

Riemann, B., 1868, U" ber die Hypothensen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, Abh. ko¨nigl. Ges. Wiss. Go¨ttingen 13.

Salihova, S. , Maksimum Metrik Geometri Üzerine , ESOGÜ, PhD Thesis, 2006.

Schattschneider, D. J., 1984, The Taxicab Group, Amer. Math. Monthly 91, 423-428.

# KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Schein, S ve Gayed J. M. , Feb. 25, 2014, Fourth Class Of Convex Equilateral Polyhedron With Polyhedral Symmetry Related To Fullerenes And Viruses , Proceeding Of The National Academy Of The Sciences Of The United States Of America , Vol. 111, No. 8, 2923

So, S.S., 2002, Recent Developments in Taxicab Geometry, Cubo Mathematica Educational, 4, 2, 79-96.

Stanley J. Schein, James Maurice Gayed, 2014, Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. 185 No. 6.

Thompson, A. C., 1996, Minkowski Geometry, Cambridge University Press, 346p

Tian, S., 2005, Alpha Distance-A Generalization of Chinese Checker Distance and Taxicab Distance, Missouri Journal of Mathematical Sciences, 17, 1, 35-40.

http://anlamak.com/eski/anasayfa

http://anlamak.com/platon'un-beş-katı-cismi.html

# ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı:** Zeynep Çolak

**Uyruğu:** T.C

**Doğum Yeri, Tarihi:** Yozgat, 01.12.1984

**Medeni Hali:** Evli

**İş Adresi:** Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Yönetim Bilişim Sistemleri Bölümü Çanakkale

**E-posta:** zeynepcolak@comu.edu.tr, zolak.84@gmail.com

**Eğitim Bilgileri**

**Doktora:**

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2007-2016)

**Lisans:**

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2003-2007)

**İş Deneyimi:**

Ziraat Bankası Genel Müdürlüğü (04.10.2008-04.04.2010)

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Yönetim Bilişim Sistemleri Bölümü (10.02.2014-)

Zeynep ÇOLAK