Minkowski Uzayında Spacelike Regle Yüzeyler

Hamdi Levent Aydoğan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ocak 2008

The Spacelike Ruled Surfaces in Minkowski Space

Hamdi Levent Aydoğan

THESIS for MASTER DEGREE

Department of Mathematics

January 2008

Minkowski Uzayında Spacelike Regle Yüzeyler

Hamdi Levent Aydoğan

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Cumali EKİCİ

Ocak 2008

Hamdi Levent AYDOĞAN ’ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı “Minkowski Uzayında Spacelike Regle Yüzeyler Üzerine” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye : Prof. Dr. Ali GÖRGÜLÜ

Üye : Yrd.Doç. Dr. Cumali EKİCİ (Danışman)

Üye : Prof. Dr. İsmail KOCAYUSUFOĞLU

Üye : Doç. Dr. Nevin GÜRBÜZ

Üye : Yrd.Doç. Dr. Kürşat YENİLMEZ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun ..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu çalışmanın amacı, $\mathbb{R}^3$ 3-uzayındaki regle yüzeylerin bazı geometrik özelliklerini eğrilik fonksiyonları ve ikinci temel form tensörü yardımıyla $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3-uzayında spacelike regle yüzeyler için yapmaktır.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, çalışma hakkında genel bir bilginin verildiği giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, çalışma için gerekli temel kavramlar ve daha sonra kullanılacak olan teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında spacelike regle yüzeylerin açılabilirlik şartı, dağılma parametresi ve boğaz noktasının yer vektörü incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ise, ilk olarak Darboux türev formülleri verilmiştir. Daha sonra $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında spacelike regle yüzeyler için açılabilirliği, dağılma parametresi, boğaz noktası ile Gauss eğriliği ile ilgili teoremler ve son olarak da Chasles teoremi, eğrilik fonksiyonları ve ikinci temel form tensörü kullanılarak elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Spacelike Regle Yüzey, İkinci Temel Form Tensörü, Geodezik Eğrilik, Dağılma Parametresi.

SUMMARY

The aim of this thesis is to get some geometrical properties of spacelike ruled surfaces in Minkowski 3-space $\mathbb{R}_1^3$, which hold in ruled surfaces in 3-space $\mathbb{R}^3$, by using curvature functions and second fundemantal form tensor .

This work consists of four chapters. The first chapter is devoted to enterance which is given for a general knowledge about this thesis.

In the second chapter, the basic definitions which is necessary and the theorems that will be needed for later to be used are given.

In the third chapter, the developable condition, distribution parameter and the position vector of the striction point of the spacelike ruled surfaces in $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski space are examined .

In the fourth chapter, first of all Darboux derivative formulas are given. After that theorems about developability for spacelike ruled surfaces, distribution parameter, the striction point with Gauss curvature and at the end The Chasles Theorem in the $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski space are obtained by using the definitions of curvature functions and the second fundamental form tensor.

Keywords: Spacelike Ruled Surface, Second Fundamental Form Tensor, Geodesic Curvature, Distribution Parameter.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarım boyunca, bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım Yrd. Doç. Dr. Cumali EKİCİ hocama ve değerli fikirlerine başvurduğum diğer hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET v
SUMMARY vi
TEŞEKKÜR vii

1. GİRİŞ 1
2. TEMEL KAVRAMLAR 3
2.1 Yarı-Riemann Manifoldlar 3
2.2 Lorentz Uzayı 6
2.3 R_1^3 Minkowski Uzayında Regle Yüzeyler 8
2.4 R_1^3 Minkowski Uzayı Üzerinde Vektörel Çarpım 11
2.5 R_1^3 Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Yüzeyler 14
2.6 R_1^3 Minkowski Uzayında Eğrilikler 18
3. R_1^3 MINKOWSKI UZAYINDA SPACELIKE REGLE YÜZEYLER 22
3.1 Açılabilir Spacelike Regle Yüzeyler 26
3.2 Boğaz Noktasının Yer Vektörü 27
3.3 Dağılma Parametresi 28
4. MINKOWSKI UZAYINDA SPACELIKE REGLE YÜZEYLER ÜZERİNE 30
4.1 Spacelike Regle Yüzeyler İle İlgili Bazı Teoremler 38
4.1.1 Dağılma Parametresi 41
4.1.2 Boğaz Noktasının Yer Vektörü 43
4.1.3 Boğaz Noktası İle İlgili Bazı Teoremler 45
KAYNAKLAR 60

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Öklidyen geometride, bir α eğrisi boyunca hareket eden, X doğrultmanlı regle yüzeyler yüzeyler teorisi içinde ilginç ve bir o kadar da dikkat çekici bir araştırma konusu olmuştur.

Regle yüzeyler, ilk olarak tüm regle yüzeyler için kısmi diferensiyel denklemlerini elde eden G. Monge tarafından keşfedilmiştir. Daha sonra regle yüzeyler bir-parametreli doğruların kümesi tarafından oluşturulmuş ve V. Hlavati ve J. Hoschek tarafından araştırılmıştır. Regle yüzey teorisi kinematiğe uygulanabilir, bir konudur. Özellikle bir-parametreli kapalı hareketlerin çalışılması kinematikte J. Steiner ve A. Holditch in çalışmalarından sonra ilgi çekici bir konu haline gelmiştir.

Regle yüzeyler teorisi hem yüzey teorisi hem de E-Study dönüşümü yardımıyla bir parametreli regle yüzeylerin geometrisi incelenerek geliştirilmiş ve bir parametreli kapalı hareketler teorisi ilginç bir hale gelmiştir. Daha sonra, regle yüzeyler geometrisi kinematik ve uzaysal mekanik çalışmalarında kullanılmaya başlamıştır. Özellikle, Alman matematikçi H.R. Müller bu konuda pek çok çalışma yapmıştır.

Regle yüzeyler, özellikle açılabilir regle yüzeyler; arabalar, gemiler, ürün imalatı, katı cisim ve örnek temelli nesne tanıma sisteminin hareket analizi ve simülasyon gibi bir çok alanlarda tasarlama işlemlerinde kullanılmıştır.

Bu çalışmaları takiben, son zamanlarda Lorentz metriği kullanılarak, daha önce Öklidyen geometride verilen bir çok tanım ve teoremler tekrardan 3-boyutlu Minkowski uzayında ele alınmıştır. Örnek olarak, 3-boyutlu Minkowski uzayında A. Turgut ve H. H. Hacısalihoğlu tarafından spacelike ve

timelike regle yüzeyler için dağılma parametresi ve boğaz noktası incelenmiştir.

Minkowski uzayı adını, uzayın üç boyutuyla zamanın boyutunu birleştiren dört boyutlu bir uzay zamanı olabildiğini 1907'li yıllarda özel izafiyet teorisinin de yardımıyla fark eden ünlü Alman matematikçi Hermann Minkowski'den almıştır. Aslında ilk olarak bu çalışmaları izafiyet teorisi ile bilinen Albert Einstein ele almıştır.

Lorentz metriği ile verilen ve özel izafiyet uzayı olarak da bilinen Öklidyen uzayına Minkowski uzay zamanı denir. Ayrıca, bir Lorentz uzayı Minkowski uzay zamanının bir hiperyüzeyidir. Bu konu ile ilgili pek çok çalışma yapılmıştır.

Bu çalışmada, 3-boyutlu Minkowski uzayındaki spacelike regle yüzeyler konusunu ele alacağız. Bu konuda daha önce yapılmış çalışmaları kullanarak, spacelike regle yüzeylerin, bazı eğrilik fonksiyonları olan geodezik eğrilik, geodezik torsiyon ve ayrıca ikinci temel form tensörü ile ilgili bazı karakteristik özelliklerini araştırıp, bunlar arasındaki ilişkileri bulmaya çalışacağız.

Eskişehir, 2008 Hamdi Levent Aydoğan

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Yarı-Riemann Manifoldlar

Bu kısımda kaynak verilenler hariç, temel tanımlar ve teoremler (O'Neill, 1983) kaynağından alınmıştır.

Tanım 2.1.1 (Yarı-Riemann Altmanifoldu):

M bir yarı-Riemann manifoldu ve $\overline{M}$, M nin bir alt manifoldu olsun. j: $\overline{M} \to M$ inclusion dönüşümü olmak üzere her $p \in \overline{M}$ için

$$(j^*(g))(p) = g(j(p))$$

şeklinde tanımlı $j(g)$ dönüşümü $\overline{M}$ üzerinde bir metrik tensör ise $\overline{M}$ ye M nin bir yarı-Riemann altmanifoldu denir.

Bundan sonraki gösterimlerde $\overline{M}$ üzerindeki metrik tensör ile M üzerindeki metrik tensörü g ile göstereceğiz.

Tanım 2.1.2 (İndirgenmiş Konneksiyon):

$\overline{M}$, M nin bir yarı Riemann altmanifoldu ve M üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu D olsun.

$$D : \chi(\overline{M}) \times \overline{\chi}(\overline{M}) \to \overline{\chi}(\overline{M})$$

indirgenmiş fonksiyonu $\overline{M}$ yarı-Riemann altmanifoldu üzerine indirgenmiş konneksiyon denir. Burada $\overline{\chi}(\ \overline{M}\ )$ ile $\overline{M}$ nin her bir p noktasına T_pM de bir tanjant vektör karşılık getiren vektör alanlarının $\Im(\overline{M})$ modülü gösterilmektedir.

Teorem 2.1.1:

$\overline{M}$, M nin bir yarı-Riemann altmanifoldu ve M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu D olsun. Her V, $W \in \chi(\overline{M})$ için

$$\overline{D}_V W = \tan D_V W \tag{1}$$

şeklinde tanımlı $\overline{D}$ fonksiyonu $\overline{M}$ üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonudur.

Tanım 2.1.3 (Şekil Tensörü):

$\overline{M}$, M nin bir yarı-Riemann altmanifoldu olsun.

$$\begin{aligned} \mathrm{II} : \chi(\overline{M}) \times \chi(\overline{M}) &\rightarrow \chi(\overline{M})^{\perp} \\ (V, W) &\rightarrow \mathrm{II}(V, W) = nor D_V W \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\Im(\overline{M})$-bilineer ve simetrik fonksiyonuna $\overline{M}$ nin şekil tensörü (veya ikinci temel form tensörü) denir.

Tanım 2.1.4 (Yarı-Riemann Hiperyüzeyi):

n-boyutlu bir M yarı-Riemann manifoldunun $(n-1)$-boyutlu bir $\overline{M}$ yarı-Riemann altmanifolduna M nin yarı-Riemann hiperyüzeyi denir.

Tanım 2.1.5 (Şekil Operatörü):

M nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyi $\overline{M}$ ve $\overline{M}$ nin birim normal vektör alanı N olsun. Her $V, W \in \chi(\overline{M})$ için

$$g(S(V), W) = g(\mathrm{II}(V, W), N) \tag{2}$$

şeklindeki (1,1)-tipinden tensör alanı S ye $\overline{M}$ nin N den elde edilen şekil operatörü denir.

Diğer bir ifadeyle, S şekil operatörü $\overline{M}$ nin her p noktasında

$$S : T_p(\overline{M}) \rightarrow T_p(\overline{M})$$

bir lineer operatördür.

Teorem 2.1.2:

M nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyi $\overline{M}$ ve S, $\overline{M}$ nin normali olan N den elde edilen şekil operatörü olsun. Bu durumda $V \in \chi(\overline{M})$ için

$$S(V) = -D_V N \tag{3}$$

dir ve ayrıca S şekil operatörü self-adjointdir.

M nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyi $\overline{M}$ olsun. $\overline{M}$ nin N normalinden elde edilen şekil operatörü S olmak üzere, her $V, W \in \chi(\overline{M})$ için

$$\mathrm{II}(V, W) = \varepsilon g(S(V), W)N \tag{4}$$

ve burada $\varepsilon = g(N, N)$ dir. Yarı-Riemann hiperyüzeyleri için Gauss denklemi; her $V, W \in \chi(\overline{M})$ olmak üzere

$$D_V W = \overline{D}_V W + \varepsilon g(S(V), W)N$$

şeklinde verilir.

Tanım 2.1.6 (Asimptotik çizgi):

M nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyi $\overline{M}$ olsun. $\overline{M}$ nin normali olan N den elde edilen şekil operatörü S ve $\alpha : I \to \overline{M}$ eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere

$$g(S(T), T) = 0$$

ise α eğrisine asimptotik çizgi (eğri) denir.

Tanım 2.1.7 (Jeodezik eğri):

M nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyi $\overline{M}$ olsun. $\overline{M}$ üzerindeki konneksiyon $\overline{D}$ ve $\alpha : I \to \overline{M}$ eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere

$$\overline{D}_T T = 0$$

ise α eğrisine $\overline{M}$ üzerinde bir jeodezik eğri denir.

2.2 Lorentz Uzayı

Tanım 2.2.1 (Skalar çarpım):

V bir vektör uzayı olsun. V üzerinde tanımlı

$$g \ : \ V \times V \ \longrightarrow \ \mathbb{R}$$

dönüşümü bilineer, simetrik ve nondejenere ise g ye V üzerinde bir skalar çarpım, bu durumda V vektör uzayına da bir skalar çarpım uzayı denir.

Tanım 2.2.2 (İndeks):

V bir skalar çarpım uzayı, W alt cümlesi de üzerindeki skalar çarpım negatif tanımlı olacak şekilde V nin en büyük boyutlu altuzayı olsun. Bu durumda W nin boyutuna g skalar çarpımın indeksi denir. g skalar çarpımın indeksi ν ise $0 \leq \nu \leq boyV$ dir. Ayrıca V skalar çarpım uzayını indeksi, üzerindeki tanımlı g skalar çarpımın indeksi olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.3 (Lorentz uzayı):

V bir skalar çarpım uzayı olsun. V nin indeksi ν olmak üzere $\nu = 1$ ve $boyV \geq 2$ ise V skalar çarpım uzayına Lorentz uzayı denir.

Tanım 2.2.4 (Timekoni):

V bir Lorentz uzayı olsun. $v \in V$ için

$g(v, v) > 0$ veya $v = 0$ ise v ye spacelike vektör,

$g(v, v) < 0$ ise v ye timelike vektör,

$g(v, v) = 0$ ve $v \neq 0$ ise v ye null (lightlike) vektör ve $||v|| = |g(v, v)|^{1/2}$ reel sayısına v vektörünün normu denir. V Lorentz uzayında tüm timelike vektörlerinin cümlesi Γ olsun. $u \in \Gamma$ için

$$C(u) = \{v \in \Gamma | g(v, u) < 0\}$$

u vektörünü kapsayan V Lorentz uzayının timekonisi denir.

Teorem 2.2.1:

V bir Lorentz uzayı ve iki timelike vektör v, ω olsun. Bu durumda

(i) $|g(v,\omega)| \geq ||v|| \cdot ||\omega||$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlikte eşitlik olması için gerek ve yeter şart v ve ω nin lineer bağımlı olmasıdır.

(ii) v, ω timelike vektörleri aynı timekonide ise

$$g(v,\omega) = -||v|| \cdot ||\omega|| \cosh\varphi$$

olacak şekilde bir tek $\varphi \geq 0$ sayısı vardır. Bu φ sayısına v ve ω timelike vektörleri arasındaki hiperbolik açı denir.

Tanım 2.2.5 (Altuzay):

V bir Lorentz uzayı ve W, V nin bir altuzayı olsun. Bu durumda

$g|_w$ pozitif tanımlı ise W ya spacelike altuzay,

$g|_w$ nondejenere ve indeksi 1 ise W ya timelike altuzay ve

$g|_w$ dejenere ise W ya lightlike altuzay denir.

Teorem 2.2.2:

V bir Lorentz uzayı, V nin bir altuzayı W ve $boyW \geq 2$ olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler birbirine denktirler:

i) W timelike uzay ise W bir Lorentz vektör uzayıdır.

ii) W uzayı iki tane lineer bağımsız null vektör içerir.

iii) W uzayı bir tane timelike vektör içerir.

Tanım 2.2.6 (Metrik tensör):

M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerinde simetrik, nondejenere ve sabit indeksli $(0,2)$-tipinden g tensör alanına bir metrik tensör denir.

Tanım 2.2.7 (Minkowski uzayı):

$\mathbb{R}^3$ standart reel vektör uzayı üzerinde her $p \in \mathbb{R}^3$ ve $v_p = (v_1, v_2, v_3)$, $\omega_p = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in T_P\mathbb{R}^3$ olmak üzere

$$\langle v_p, \omega_p \rangle \;=\; -v_1\omega_1 \;+\; v_2\omega_2 \;+v_3\omega_3$$

eşitliğiyle verilen 1-indeksli metrik tensörle birlikte elde edilen uzaya $\mathbb{R}^3_1$ 3-boyutlu Minkowski uzayı denir.

Tanım 2.2.8 (Eğriler):

M bir Lorentz manifoldu ve

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$$

bir eğri olsun. α eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere

$g(T,T) > 0$ ise α eğrisine spacelike eğri,

$g(T,T) < 0$ ise α eğrisine timelike eğri,

$g(T,T) = 0$ ve, $T \neq 0$ ise α eğrisine null(lightlike) eğri denir.

Eğrinin bir özel hali olan doğruyu gözönüne alalım. Doğrunun doğrultman vektörü spacelike ise spacelike doğru, doğrultman vektörü timelike ise timelike doğru, doğrultman vektörü null ise null doğru olarak adlandırılır.

2.3 $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski Uzayında Regle Yüzeyler

(Hacısalihoğlu, 2000) referansında verilen regle yüzey ve regle yüzeylere ait bazı kavramların $\mathbb{R}^3_1$, 3-Boyutlu Minkowski uzayına uyarlaması aşağıdaki gibidir.

Tanım 2.3.1 (Regle Yüzey):

$M \subset \mathbb{R}^3_1$ yüzeyi verilsin. $\forall P \in M$ noktasında $\mathbb{R}^3_1$ uzayının M de kalan bir doğrusu varsa M ye bir regle yüzey ve $P \in M$ noktasından geçen ve M de kalan doğruya da M nin bir doğrultmanı denir.

Ayrıca; $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında verilen bir l doğrusunun, verilen bir α eğrisi boyunca hareket ettirilmesiyle elde edilen yüzeye 3-boyutlu Minkowski uzayında bir regle yüzey denir. Bu durumda verilen l doğrusuna, regle yüzeyin bir anadoğrusu ve verilen α eğrisine, regle yüzeyin dayanak eğrisi denir.

Tanım 2.3.2 (Kapalı Regle Yüzey):

$$\begin{aligned} \varphi: \ I \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_1^3 \\ (t, v) &\rightarrow \varphi(t, v) = \alpha(t) + vX(t) \end{aligned}$$

regle yüzeyi $\forall t \in I$ için

$$\varphi(t + 2\pi, v) = \varphi(t, v)$$

olacak şekilde periyodik ise regle yüzeye kapalıdır denir.

Kapalı regle yüzeylerin dayanak eğrileri ve anadoğrularının küresel göstergeleri kapalı eğrilerdir. Yani, bir periyot sonra her anadoğru kendi üzerine gelir.

Tanım 2.3.3 (Ortogonal Yörünge):

Bir $\varphi(t, v)$ regle yüzeyinin anadoğrularının her birini dik olarak kesen eğriye regle yüzeyin ortogonal yörüngesi denir.

Tanım 2.3.4 (Striksiyon Noktası):

Bir $\varphi(t, v)$ regle yüzeyinde komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin esas doğrultman üzerindeki ayağına boğaz (merkez veya striksiyon) noktası adı verilir.

Tanım 2.3.5 (Striksiyon Eğrisi):

Bir $\varphi(t, v)$ regle yüzeyinin anadoğrusu dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin boğaz (striksiyon) çizgisi (eğrisi) adı verilir.

Bir başka deyişle; $c \neq 0$ olmak üzere kapalı M regle yüzeyi

$$\varphi(t,v) \;=\; \alpha(t) + vX(t)$$

için atlas

$$\{(I \times \mathbb{R}, \varphi)\}$$

olarak verilsin. M nin herbir doğrultmanı üzerinde

$$v \;=\; \frac{a}{a^2 + c^2}$$

değerine karşılık gelen noktaya o doğrultman üzerindeki merkez nokta (boğaz noktası) ve M nin merkez noktalarının geometrik yerine de M nin striksiyon çizgisi denir.

Tanım 2.3.6 (Dağılma Parametresi):

Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu anadoğru arasındaki açıya oranına regle yüzeyin dağılma parametresi (drali) denir, ve

$$P_X \;=\; \frac{\det(T, X, X')}{\|X'\|^2}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.3.7 (Açılabilir RegleYüzey):

$\mathbb{R}^3_1$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilir denir.

Tanım 2.3.8 (Boğaz Noktası)

$\mathbb{R}^3_1$, 3-boyutlu Minkowski uzayında açılabilir olmayan bir regle yüzey verilsin. Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusunun ortak dikmesi varsa, bu dikmenin esas anadoğrusu üzerindeki ayağına boğaz (merkez veya striksiyon) noktası denir.

Tanım 2.3.9 (Boğaz Çizgisi)

3-boyutlu Minkowski uzayında açılabilir olmayan bir regle yüzeyin ana doğrusu, dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine, regle yüzeyin boğaz (striksiyon) çizgisi (eğrisi) denir.

Tanım 2.3.10 (Ortogonal Yörünge)

3-boyutlu Minkowski uzayında bir regle yüzeyin anadoğrularının her birini dik olarak kesen bir eğri varsa, bu eğriye regle yüzeyin bir ortogonal yörüngesi denir.

2.4 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayı Üzerinde Vektörel Çarpım

Bu kısımdaki tanım ve teoremler (Turgut, 1995) den alınmıştır.

Tanım 2.4.1 (Vektörel Çarpım):

$\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında iki vektör v ve ω olsun. $v = (v_1, v_2, v_3)$ ve $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ olmak üzere

$$(v_3\omega_2 - v_2\omega_3, \quad v_1\omega_3 - v_3\omega_1, \quad v_1\omega_2 - v_2\omega_1)$$

vektörüne v ve ω nin vektörel çarpımı (veya dış çarpım) denir. $v \times \omega$ veya $v \wedge \omega$ şeklinde gösterilir (Akutagawa ve Nishikawa, 1990).

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \quad ise \\ & \\ 0, & i \neq j \quad ise \end{cases} \qquad \text{ve} \quad e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$$

olmak üzere

$$v \wedge \omega \;=\; -\det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{bmatrix}$$

veya

$$v \wedge \omega = \det \begin{bmatrix} -e_1 & -e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanabilir. Burada

$$e_1 \wedge e_2 = e_3, \quad e_2 \wedge e_3 = -e_1, \quad e_3 \wedge e_1 = -e_2$$

dir. Saat yönünün ters yönü pozitif yön olarak alınmıştır. Saat yönünün tersi negatif yön olarak kabul edilecek olursa o zaman

$$e_1 \wedge e_2 = -e_3, \quad e_2 \wedge e_3 = e_1, \quad e_3 \wedge e_1 = e_2$$

dir. Bu durumda

$$v \wedge \omega = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

Tanım 2.4.2 (Lagrange Özdeşliği):

$\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında a, b, c, d vektörleri için

$$\langle (a \times b), (c \times d) \rangle = -\langle a, c \rangle \langle b, d \rangle + \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle \tag{5}$$

özdeşliği geçerlidir (Kaya, 2002).

Teorem 2.4.1:

$\mathbb{R}_1^3$, Minkowski uzayında üç vektör $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ ve $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ olsun. Bu durumda

$$i) \quad \langle u \wedge v, \omega \rangle = -\det(u, v, \omega)$$

$$ii) \quad (u \wedge v) \wedge \omega = -\langle u, \omega \rangle v + \langle v, \omega \rangle u$$

$$iii) \quad \langle u \wedge v, u \rangle = 0 \text{ ve } \langle u \wedge v, v \rangle = 0$$

$$iv) \quad \langle u \wedge v, u \wedge v \rangle = -\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle + (\langle u, v \rangle)^2$$

dir (Turgut, 1995).

Teorem 2.4.2:

M spacelike bir yüzey olsun. T ve G spacelike birim vektör alanları N timelike birim vektör alanı olmak üzere $\{T, G, N\}$ ortonormal sisteminde,

$$\begin{aligned} T \wedge G &= N \\ G \wedge N &= -T \\ T \wedge N &= G \end{aligned}$$

dir (Turgut, 1995).

Teorem 2.4.3:

M timelike bir yüzey olsun. T ve N birim vektör alanları G timelike birim vektör alanı olmak üzere $\{T, G, N\}$ ortonormal çatı alanı için,

$$\begin{aligned} T \wedge G &= -N \\ G \wedge N &= -T \\ N \wedge T &= G \end{aligned}$$

dir (Turgut, 1995).

Teorem 2.4.4:

M timelike bir yüzey olsun. Bu yüzeyde T timelike birim vektör alanı, G ve N birim spacelike vektör alanları olmak üzere $\{T, G, N\}$ ortonormal çatı alanı için,

$$\begin{aligned} T \wedge G &= -N \\ N \wedge T &= -G \\ G \wedge N &= T \end{aligned}$$

dir (Turgut, 1995).

Teorem 2.4.5

$\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında iki vektör u ve v olsun.

i) u ve v spacelike vektör ise $u \wedge v$ bir timelike vektördür.

ii) u spacelike ve v timelike vektör ise $u \wedge v$ bir timelike vektördür.

iii) u spacelike ve v null vektör olmak üzere $< u, v >= 0$ ise $u \wedge v$ null vektör, eğer $< u, v > \neq 0$ ise $u \wedge v$ spacelike vektördür.

iv) u ve v null vektör ise $u \wedge v$ spacelike vektördür.

v) u timelike ve v null vektör ise $u \wedge v$ spacelike vektördür.

vi) u ve v timelike vektör ise $u \wedge v$ spacelike vektördür (Turgut, 1995).

2.5 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Yüzeyler

Bu kısımda verilen temel tanımlar ve teoremler (Beem ve Ehrlich, 1981) den alınmıştır.

M yarı-Riemann manifoldu olarak 3-boyutlu $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayını ve $\overline{M}$ yarı-Riemann hiperyüzeyi olarak da (u, φ) parametrizasyonu ile verilen $\varphi(U)$ yüzeyini gözönüne alalım.

$$\left\{ \varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial_u} \right), \varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial_v} \right) \right\}$$

lineer bağımsız olmak üzere yüzeyin vektör alanlarının bir bazı

$$\left\{ \varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial_u} \right), \varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial_v} \right) \right\}$$

dir. Kısalık için

$$\varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial_u} \right)$$

ifadesini φ_u ile göstereceğiz. Yüzeyin bir normali

$$N = \varphi_u \wedge \varphi_v$$

dir. Gerçekten,

$$< N, \varphi_u >= 0 \text{ ve } < N, \varphi_v >= 0$$

dır. Yüzeyin I. temel formunu yani metriğini hesaplamadan önce bazı eşitlikleri verelim.

$$E =< \varphi_u, \varphi_u >, F =< \varphi_u, \varphi_v >, G =< \varphi_v, \varphi_v > \tag{6}$$

dir. Burada

$$< N, N >=< \varphi_u \wedge \varphi_v, \varphi_u \wedge \varphi_v > \tag{7}$$

ve (6) ile (7) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} < N, N > &= (< \varphi_u, \varphi_v >)^2 - < \varphi_u, \varphi_u >< \varphi_v, \varphi_v > \\ &= F^2 - EG \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi yüzeyin I. temel formunu hesaplayalım φ nin tam diferensiyeli

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv$$

dir.

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= (ds)^2 =< d\varphi, d\varphi > \\ &= E(du)^2 + 2F du dv + G(dv)^2 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\frac{(ds)^2}{(dv)^2} = E\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2F\frac{du}{dv} + G \tag{8}$$

ve

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{du}{dv} \\ \mathrm{I}' &= \frac{(ds)^2}{(dv)^2} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\mathrm{I}' = E\lambda^2 + 2F\lambda + G \tag{9}$$

elde edilir. $\overline{M}$ yüzeyi üzerindeki

$$\mathrm{I} = (ds)^2$$

indirgenmiş metriğinin pozitif tanımlı veya indefinit olup olmadığını incelemek ile,

$$\mathrm{I} = (dv)^2\mathrm{I}'$$

olduğundan, I' türevini incelemek aynı anlama gelir.

Tanım 2.5.1 (Nondejenere Yüzey):

$\mathbb{R}^3_1$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey $\overline{M}$ olsun. Her $p \in \overline{M}$ ve her $\omega_p \in T_p\overline{M}$, $v_p \in T_p\overline{M}$ için

$$< v_p, \omega_p >= 0 \Rightarrow v_p = 0$$

önermesi sağlanıyorsa $\overline{M}$ ye $\mathbb{R}^3_1$ uzayında bir nondejenere yüzey denir. $\overline{M}$ yüzey üzerindeki metriğin matris formu

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

dir. $\overline{M}$ yüzeyi üzerindeki metriğinin nondejenere olması için gerek ve yeter şart

$$det \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \neq 0$$

olmasıdır.

Bir başka ifadeyle, $\overline{M}$ yüzeyinin nondejenere yüzey olması için gerek ve yeter şart, yüzeyin normalinin null vektör alanı olmamasıdır.

Tanım 2.5.2 (Spacelike Yüzey):

$\mathbb{R}^3_1$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey $\overline{M}$ olsun. $\overline{M}$ yüzey üzerine indirgenmiş metrik pozitif tanımlı ise $\overline{M}$ ye $\mathbb{R}^3_1$ de bir spacelike yüzey denir.

Teorem 2.5.1:

$\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında (U, φ) parametrizasyonu ile verilen bir

$$\begin{aligned} \varphi : U \subset \mathbb{R}_1^3 &\rightarrow \mathbb{R}_1^3 \\ (u, v) &\rightarrow \varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v)) \end{aligned}$$

yüzeyinin spacelike bir yüzey olması için gerek ve yeter şart yüzeyin normalinin timelike bir vektör alanı, yani

$$< N, N >< 0$$

olmasıdır.

Tanım 2.5.3 (Timelike Yüzey):

$\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey $\overline{M}$ olsun. $\overline{M}$ yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik Lorentz Metriği ise $\overline{M}$ ye timelike yüzey denir.

Teorem 2.5.2

$\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir $\overline{M}$ yüzeyinin timelike yüzey olması için gerek ve yeter şart yüzeyin normalinin spacelike bir vektör alanı, yani

$$< N, N > > 0$$

olmasıdır.

Tanım 2.5.4 (Gauss Eğriliği):

$\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey $\overline{M}$ ve $\overline{M}$ nin şekil operatörüne karşılık gelen matris S olsun. $p \in \overline{M}$ için

$$K(p) = \varepsilon \det S_p$$

$\overline{M}$ yüzeyinin p noktasındaki Gauss Eğriliği ve $K : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna $\overline{M}$ yüzeyinin Gauss Eğrilik fonksiyonu denir. Burada

$$\varepsilon =< N, N >= \pm 1$$

dir, $N, \overline{M}$ yüzeyinin normal vektör alanıdır.

$\overline{M}$ yüzeyi spacelike ise

$$\varepsilon =< N, N >= -1$$

dir. O zaman

$$K = -detS$$

dir.

M yüzeyi timelike ise

$$\varepsilon =< N, N >= 1$$

dir. O zaman

$$K = detS$$

dir.

2.6 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında Eğrilikler

Bu kısımda eğrilikler hakkında bazı bilgiler vereceğiz.

Tanım 2.6.1 (Frenet üçyüzlüsü):

$\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında bir α eğrisinin belirli bir s parametresine karşılık gelen noktada teğet, asal normal ve binormal birim vektörlerinden oluşan $\{T, n, b\}$ ortonormal sistemine Frenet üçyüzlüsü denir (Kobayashi, 1983).

Tanım 2.6.2 (Darboux üçyüzlüsü):

$\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında $M \subset \mathbb{R}_1^3$ olmak üzere M bir yüzey ve α, M üzerinde bir eğri olsun. Eğrinin herhangi bir noktadaki teğeti α' olmak üzere bu teğeti T ve düzlemin normalini de N olarak alırsak, bu iki vektöre dik olacak şekilde $G = N \times T$ vektörünü seçtiğimizde elde edilen $\{T, G, N\}$ ortonormal sistemine Darboux üçyüzlüsü denir (Uğurlu ve Çalışkan, 1997).

Tanım 2.6.3 (Asli eğrilik):

$\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında $M \subset \mathbb{R}_1^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet üçyüzlüsü $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s)\}$ olsun. $\varepsilon_i = \pm 1, \;\; i = 1, 2, 3, \; \langle V_i, V_i \rangle = \varepsilon_i$ olmak üzere $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında i-inci asli eğrilik

$$k_i = \varepsilon_{i+1} \langle D_{V_1} V_i, V_{i+1} \rangle \qquad i = 1, 2$$

şeklinde yazılır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.6.4 (Normal eğrilik):

M, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında yarı-Öklidyen bir yüzey ve α, M üzerinde bir eğri olsun. O zaman $\forall s \in I$ ya karşı gelen $\alpha(s)$ noktasındaki $\{T, G, N\}$ Darboux üçyüzlüsü için

$$\begin{array}{rccccc} k_n : & \alpha(I) & \longrightarrow & \mathbb{R} & & \\ & s & \longrightarrow & k_n(s) & = & < T'(s), N(s) > \end{array}$$

biçiminde tanımlanan k_n fonksiyonuna α nın normal eğrilik fonksiyonu denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.6.5 (Geodezik eğrilik):

M, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında yarı-Öklidyen bir yüzey ve α, M üzerinde bir eğri olsun. O zaman $\forall s \in I$ ya karşı gelen $\alpha(s)$ noktasındaki $\{T, G, N\}$ Darboux üçyüzlüsü için

$$\begin{array}{rccccc} k_g : & I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & & \\ & s & \longrightarrow & k_g(s) & = & < T'(s), G(s) > \end{array}$$

şeklinde tanımlanan k_g fonksiyonuna α eğrisinin geodezik eğrilik fonksiyonu ve $k_g(s)$ sayısına da α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki geodezik eğriliği denir (Uğurlu ve Çalışkan, 1997).

Tanım 2.6.6 (Geodezik burulma):

M, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında yarı-Öklidyen bir yüzey ve α, M üzerinde bir eğri olsun. O zaman $\forall s \in I$ ya karşı gelen $\alpha(s)$ noktasındaki $\{T, G, N\}$ Darboux üçyüzlüsü için

$$\begin{array}{rccccl} \tau_g: & I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & & \\ & s & \longrightarrow & \tau_g(s) & = & < G'(s), N(s) > \end{array}$$

şeklinde tanımlanan τ_g fonksiyonuna α eğrisinin geodezik burulma fonksiyonu $\tau_g(s)$ sayısına da α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki geodezik burulması adı verilir (Uğurlu ve Çalışkan, 1997).

Teorem 2.6.1:

$\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında birim hızlı bir eğri $\alpha = \alpha(s)$ olsun. Bu eğrinin herhangi bir P noktasında teğet, asal normal ve binormal birim vektörlerinden meydana gelen $\{T, n, b\}$ Frenet üçyüzlüsü vardır. Bu üçyüzlü için türev formülleri, birinci asli eğrilik k_1 ve ikinci asli eğrilik k_2 olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} T' \\ n' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_2 k_1 & 0 \\ -\varepsilon_1 k_1 & 0 & \varepsilon_3 k_2 \\ 0 & -\varepsilon_2 k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ n \\ b \end{bmatrix}$$

biçimindedir (Çöken, 1995).

Bu tezin orijinal kısmını oluştururken yararlanılan (Sarıoğlugil ve Tutar, 2007) kaynağından bazı teoremleri verelim.

Darboux türev formülleri,

$$\begin{bmatrix} T' \\ G' \\ N' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & \tau_g \\ k_n & \tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ G \\ N \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Ayrıca, k_n ve τ_g ifadelerinin II. temel form tensörü cinsinden karşılıklarını yukarıda yerine yazdığımızda,

$$\begin{bmatrix} T' \\ G' \\ N' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & \mathrm{II}(T,T) \\ -k_g & 0 & \mathrm{II}(T,g) \\ \mathrm{II}(T,T) & -\mathrm{II}(T,g) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ G \\ N \end{bmatrix}$$

Darboux türev formülleri elde edilir (Guggenheimer, 1963).

Genel olarak, herhangi bir P noktasındaki Frenet ve Darboux üçyüzlüleri çakıştırılırsa $\{T, X, N\}$ ortonormal sistemi için Darboux türev formülleri,

$$\begin{bmatrix} D_T T \\ D_T X \\ D_T N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & \mathrm{II}(T,T) \\ -k_g & 0 & \mathrm{II}(T,X) \\ -\mathrm{II}(T,T) & -\mathrm{II}(T,X) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ X \\ N \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir (Sarıoğlugil ve Tutar, 2007).

Sonuç 2. 6. 1:

M $\mathbb{E}^3$ de bir regle yüzey olsun. Bu durumda regle yüzeyin dağılma parametresi

$$P_X = \lambda = \frac{\mathrm{II}(T,X)}{k_g^2 + [\mathrm{II}(T,X)]^2}$$

dir (Sarıoğlugil ve Tutar, 2007).

Teorem 2.6.2:

$\mathbb{E}^3$ de bir M regle yüzeyi için $\mathrm{II}(T,X) \neq 0$ ve $\varphi(s,v) = \alpha(s) + vX(s)$, $s \in I$, $v \in \mathbb{R}$ verilsin. M regle yüzeyinin herhangi iki anadoğrusu arasında ortogonal yörüngeler boyunca ölçülen en uzun uzaklık $v = \dfrac{k_g}{k_g^2 + [\mathrm{II}(T,X)]^2}$ de ğerine karşılık gelen $\varphi_v : I \to M$ eğrisi boyunca ölçülen uzaklıktır (Sarıoğlugil ve Tutar, 2007).

BÖLÜM 3

$\mathbb{R}_1^3$ MİNKOWSKİ UZAYINDA SPACELİKE REGLE YÜZEYLER

Bu bölümde 3-boyutlu $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında dayanak eğrisi spacelike bir eğri, anadoğrusu spacelike bir doğru olan spacelike regle yüzeyler ve özellikleri incelenecektir. Ayrıca bu bölümde aksi belirtilmedikçe regle yüzeyin dayanak eğrisi spacelike bir eğri, anadoğruları da spacelike birer doğru olarak alınacaktır.

Bu bölümdeki temel kavramlar ve teoremler, (Turgut, 1995) çalışmasından alınmıştır.

$\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında $\{0\} \subset I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere diferensiyellenebilir birim hızlı bir eğri

$$\begin{aligned} \alpha : \ I &\rightarrow \mathbb{R}_1^3 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) \end{aligned}$$

olsun. Her $t \in I$ için $\alpha(t)$ noktasındaki $T_{\alpha(t)}$ teğet vektörü ile anadoğrunun doğrultman vektörü lineer bağımsız olacak şekilde

$$\begin{aligned} l : \ \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_1^3 \\ v &\rightarrow l(v) = (\alpha_1(t) + va_1(t), \alpha_2(t) + va_2(t), \alpha_3(t) + va_3(t)) \end{aligned}$$

doğrusunu seçelim. Burada $1 \leq i \leq 3$ olmak üzere $a_i \ (t) \in \mathbb{R}$, skalarları, $\alpha(t)$ noktasındaki doğrultman vektörünün bileşenleridir. l doğrusunun α eğrisi boyunca hareket etmesiyle, $(I \times \mathbb{R}, \varphi)$ parametrizasyonu ile verilen bir regle yüzey olarak

$$\begin{aligned} \varphi : I \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_1^3 \\ (t, v) &\rightarrow \varphi(t, v) = (\alpha_1(t) + va_1(t), \alpha_2(t) + va_2(t), \alpha_3(t) + va_3(t)) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu regle yüzeyi M ile gösterelim.

M regle yüzeyinin, α eğrisi boyunca ortonormal çatı alanı, α eğrisinin birim teğeti T ve l anadoğrusunun teğet vektör alanı yani (doğrultman vektörü) Z ise bu düzlemde T ye dik olacak şekilde

$$Y = Z - < Z, T > T$$

seçilerek Y spacelike vektör alanı elde edilir. Ayrıca

$$X = \frac{Y}{\|Y\|} \tag{10}$$

alınırsa

$$\|X\| = 1$$

ve

$$< X, T >= 0$$

olur.

$$N = T \wedge X \tag{11}$$

olmak üzere

$$< X, N >= 0, < T, N >= 0 \text{ ve } < N, N >= -1$$

olur. Bu durumda $\{T, X, N\}$ sistemi M nin ortonormal çatı alanıdır. Şimdi bu sistemin α eğrisi boyunca değişimini inceleyelim $\mathbb{R}_1^3$ üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu D olsun.

$$< T, T > \; = \; < X, X > \; = \; 1 \quad < N, N >= -1 \quad \text{ve} \quad < D_T N, N >= 0$$

bulunur. Benzer şekilde

$$< D_T T, T > \; = \; 0 \quad , \quad < D_T X, X > \; = \; 0$$

elde edilir. a, b, c fonksiyonlarını

$$\begin{aligned} a &= < D_T T, X > \;\; = \; - < T, D_T X > \\ b &= - < D_T T, N > \; = \; < T, D_T N > \\ c &= - < D_T X, N > \; = \; < X, D_T N > \end{aligned} \tag{12}$$

eşitlikleriyle tanımlayalım. Burada

$$\begin{aligned} D_T T &= aX + bN \\ D_T X &= -aT + cN \\ D_T N &= bT + cX \end{aligned} \tag{13}$$

dir.

(13) ifadesinin matris formu

$$\begin{bmatrix} D_T T \\ D_T X \\ D_T N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ X \\ N \end{bmatrix} \tag{14}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \varphi : \ I \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_1^3 \\ (t, v) &\to \varphi(t, v) = \alpha(t) + vX(t) \end{aligned} \tag{15}$$

parametrizasyonu ile verilen M regle yüzeyi için

$$\begin{aligned} \varphi_t &= \alpha'(t) + vX'(t) = (1 - av)T + cvN \\ \varphi_V &= X(t) \end{aligned} \tag{16}$$

şeklinde ve

$$\begin{aligned} E &= <\varphi_t, \varphi_t> = (1 - av)^2 - c^2 v^2 \\ F &= <\varphi_t, \varphi_v> = 0 \\ G &= <\varphi_v, \varphi_v> = 1 \end{aligned} \tag{17}$$

dir. Ayrıca (17) ifadesi gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} E &= (1 - av)^2 - c^2 v^2 \\ &= (a^2 - c^2)v^2 - 2av + 1 \end{aligned} \tag{18}$$

olur. Buradan ikinci dereceden denklemin kökleri

$$\min\left\{\frac{1}{a-c}, \frac{1}{a+c}\right\} \text{ ve } \max\left\{\frac{1}{a-c}, \frac{1}{a+c}\right\} \tag{19}$$

bulunur. Burada

$$a^2 - c^2 =< D_T X, D_T X > \tag{20}$$

dir. Bu durumda

1.) $D_T X$ vektör alanı spacelike ise

$$a^2 - c^2 > 0$$

dır.

2.) $D_T X$ vektör alanı timelike ise

$$a^2 - c^2 < 0$$

dır.

3.) $D_T X$ vektör alanı null ise

$$a^2 - c^2 = 0$$

dır.

Bu nedenle $D_T X$ vektör alanı hangi cins vektör alanı ise regle yüzeyin parametrizasyonunda tanımlı olan v parametrisinin tanım aralığı, reel sayıların tümü olmayıp, yukarıda belirtilen aralıklar olacaktır. Bu bilgilere göre v nin tanım aralığını J ile gösterelim. Bu tanım aralığında v değeri sabit olmak üzere M spacelike regle yüzeyinin bir

$$\begin{array}{rccl} \varphi_v : & I \times \{v\} & \to & M \\ & (t, v) & \to & \varphi_v(t, v) = \alpha(t) + vX(t) \end{array}$$

eğrisini belirtir. Bu eğrinin teğet vektör alanı

$$A = (1 - av)T + cvN \tag{21}$$

dir. (17) ifadesinden

$$< N, N >< 0 \text{ ve } < A, A >= - < N, N >$$

olduğundan A spacelike bir vektör alanıdır. Bu durumda φ_v eğrisi spacelike bir eğri olur ve

$$< X, A >= (1 - av) < X, T > +cv < X, N >= 0 \tag{22}$$

dir.

3.1. Açılabilir Spacelike Regle Yüzeyler

Bir anadoğru boyunca, M spacelike regle yüzeyinin teğet düzlemlerinin çakışık olduğu genellikle doğru değildir. Ancak, bu düzlemlerin daima sabit olması, c fonksiyonu ile yakından ilgilidir. Bu durumda aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

Teorem 3.1.1:

M spacelike bir regle yüzey olsun. Bir anadoğru boyunca teğet düzlemlerin ayrı olması için gerek ve yeter şart $c = 0$ olmasıdır (Turgut, 1995).

Teorem 3.1.2:

Spacelike bir M regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart $c = 0$ olmasıdır.

Sonuç 3.1.1:

Spacelike bir M regle yüzeyi için

$$c = \det(T, X, X') \tag{23}$$

dir (Turgut, 1995).

3.2. Boğaz Noktasının Yer Vektörü

Açılabilir olmayan spacelike bir regle yüzeyin bir merkez noktasının dayanak eğrisine olan uzaklığı $\overline{u}$ olmak üzere, $\overline{\alpha}(t)$ yervektörü

$$\overline{\alpha}(t,\overline{u}) = \alpha(t) + \overline{u}X(t) \tag{24}$$

şeklinde ifade edilebilir burada $\alpha(t)$ dayanak eğrisinin yer vektörü ve $X(t)$ de anadoğruya ait doğrultman vektörüdür. $\overline{u}$ parametresi, spacelike regle yüzeyin dayanak eğrisinin yervektörü ve doğrultman vektörü cinsinden bulunabilir. Spacelike regle yüzeyin, ilk ikisi $X(t)$ ve $X(t)+dX(t)$ olan, komşu üç anadoğrusu verilsin.

P, P' ve Q, Q' komşu anadoğruların ortak dikmelerinin anadoğrular üzerindeki ayakları olsunlar. Bu durumda P ve Q farklı iki boğaz noktasıdır.İlk iki komşu anadoğrunun ortak dikmesi

$$X(t) \wedge (X(t) + X'(t)dt) = X(t) \wedge X'(t)dt \tag{25}$$

nin bir katıdır. Limit halinde $\overrightarrow{PQ}$ vektörü $\overrightarrow{PP'}$ ile çakışacak ve boğaz eğrisinin teğeti olacaktır. Dolayısıyla

$$< X, \overrightarrow{PQ} >= 0, < X + D_T X dt, \overrightarrow{PQ} >= 0 \tag{26}$$

olacağından

$$< D_T X, \overrightarrow{PQ} >= 0$$

elde edilir.

$$< T, X' > + \overline{u} < X', X' > \;\; = \;\; 0$$

veya

$$\overline{u} = -\frac{< T, X' >}{< X, X' >} = \frac{a}{a^2 - c^2} \tag{27}$$

bulunur. Böylece boğaz eğrisinin yer vektörü için (23) dan

$$\overline{\alpha}(t) = \alpha(t) - \frac{< T, X' >}{< X, X' >} X(t) \tag{28}$$

elde edilir. Burada

$$< X', X' > \neq 0$$

dır (Turgut, 1995).

Teorem 3.2.1:

Açılabilir olmayan spacelike bir regle yüzeyin boğaz çizgisi dayanak eğrisinin seçilişinden bağımsızdır (Turgut, 1995).

Teorem 3.2.2:

Açılabilir olmayan bir M spacelike regle yüzeyi verilsin. $\alpha(t)$ noktasından geçen anadoğru üzerinde $\varphi(t, v_0)$ noktasının boğaz noktası olması için gerek ve yeter şart $\varphi(t, v_0)$ noktasındaki teğet düzlemin bir normalinin $D_T X$ olmasıdır (Turgut, 1995).

Teorem 3.2.3:

Açılabilir olmayan bir M spacelike regle yüzeyinin boğaz eğrisi

$$\overline{\alpha}(t) = \alpha(t) + \frac{a}{a^2 - c^2} X(t)$$

bir spacelike eğrisidir (Turgut, 1995).

3.3. Dağılma Parametresi

Spacelike bir M regle yüzeyinin dayanak eğirisi olarak boğaz eğrisini alalım. Bu durumda

$$\overline{u} = \frac{a}{a^2 - c^2} = 0$$

olur. Buradan

$$a = 0$$

dır. O zaman

$$X' = -aT + cN$$

olduğundan X', yüzeyin normali N ile lineer bağımlıdır. O halde

$$\lambda X' = T \wedge X = \frac{d\overline{\alpha}}{dt} \wedge X$$

ve buradan

$$\lambda = \frac{< T \wedge X, X' >}{< X', X' >} = -\frac{\det(T, X, X')}{< X', X' >} \tag{29}$$

dır. λ ya spacelike regle yüzeyin dağılma parametresi denir ve λ veya P_X ile gösterilir. Burada X' vektör alanı yüzeyin normali ile lineer bağımlı olduğundan, X bir timelike vektör alanıdır, dolayısıyla

$$< X', X' > \neq 0$$

dır.

Teorem 3.3.1:

Bir M spacelike regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır (Turgut, 1995).

Teorem 3.3.2:

Spacelike bir regle yüzey M olsun. M nin her noktasından bir tek ortogonal yörünge geçer (Turgut, 1995).

BÖLÜM 4

MİNKOWSKİ UZAYINDA SPACELİKE REGLE YÜZEYLER

Bu bölümde 3-boyutlu $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında dayanak eğrisi spacelike bir eğri, anadoğrusu spacelike bir doğru ve dolayısıyla normali N timelike olan M spacelike regle yüzeyler ve özellikleri incelenecektir. Ayrıca bu bölümde aksi belirtilmedikçe regle yüzeyin dayanak eğrisi spacelike bir eğri, anadoğruları da spacelike birer doğru olarak alınacaktır.

$\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında $\{0\} \subset I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere diferensiyellenebilir birim hızlı bir eğri

$$\begin{aligned} \alpha: \ I &\longrightarrow \mathbb{R}_1^3 \\ t &\longrightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) \end{aligned}$$

olsun. Her $t \in I$ için $\alpha(t)$ noktasındaki $T_{\alpha(t)}$ teğet vektörü ile anadoğrunun doğrultman vektörü lineer bağımsız olacak şekilde

$$\begin{aligned} l: \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_1^3 \\ v &\longrightarrow l(v) = (\alpha_1(t) + va_1(t), \alpha_2(t) + va_2(t), \alpha_3(t) + va_3(t)) \end{aligned}$$

doğrusunu seçelim. Burada $1 \leq i \leq 3$ olmak üzere $a_i(t) \in \mathbb{R}$, skalarları, $\alpha(t)$ noktasındaki doğrultman vektörünün bileşenleridir.l doğrusunun α eğrisi boyunca hareket etmesiyle, $(I \times \mathbb{R}, \varphi)$ parametrizasyonu ile verilen bir regle yüzey olarak

$$\begin{aligned} \varphi: \ I \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_1^3 \\ (t, v) &\to \varphi(t, v) = (\alpha_1(t) + va_1(t), \alpha_2(t) + va_2(t), \alpha_3(t) + va_3(t)) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu regle yüzeyi M ile gösterelim.

M regle yüzeyinin, α eğrisi boyunca ortonormal çatı alanı, α eğrisinin birim teğeti T ve l anadoğrusunun teğet vektör alanı yani; doğrultman vektörü

Z ise bu düzlemde T ye dik olacak şekilde

$$Y = Z - < Z, T > T$$

seçilerek Y spacelike vektör alanı elde edilir. Ayrıca

$$n = \frac{Y}{\|Y\|}$$

alınırsa

$$\|X\| = 1$$

ve

$$< n, T >= 0$$

olur. b vektörünü

$$b = T \wedge n$$

olacak şekilde seçersek

$$< n, b >= 0, < T, b >= 0, < b, b >= -1$$

bulunur. Bu durumda $\{T, n, b\}$ sistemi M nin ortonormal çatı alanıdır. Şimdi bu sistemin α eğrisi boyunca t ye göre değişimini inceleyelim. $\mathbb{R}_1^3$ üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu D olmak üzere,

$$< T, T >=< n, n >= 1 \text{ ve } < b, b >= -1$$

olup, buradan

$$T\left[< b, b >\right] = 2 < D_T b, b >= 0$$

veya

$$< D_T b, b >= 0$$

bulunur. Benzer şekilde

$$< D_T T, T > \;=\; 0 \quad , \quad < D_T n, n > \;=\; 0$$

elde edilir. Böylece, x, y, z fonksiyonlarını

$$\begin{array}{rclcrcl} x & = & < D_T T, n > & = & T\left[< T, n >\right] - < T, D_T n > & = & - < T, D_T n > \\ y & = & - < D_T T, b > & = & -T\left[< T, b >\right] + < T, D_T b > & = & < T, D_T b > \\ z & = & - < D_T n, b > & = & -T\left[< n, b >\right] + < n, D_T b > & = & < n, D_T b > \end{array} \tag{30}$$

eşitlikleriyle tanımlayabiliriz. Burada

$$\begin{array}{rcl} D_T T & = & xX + yN \\ D_T X & = & -xT + zN \\ D_T N & = & yT + zX \end{array} \tag{31}$$

dir. $k_1 =< D_T T, n >$ ve $k_2 =< D_T n, b >$ olmak üzere, k_1 ve k_2 eğrilikleri cinsinden (31) ifadesinin matris formunu

$$\begin{bmatrix} D_T T \\ D_T n \\ D_T b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ n \\ b \end{bmatrix} \tag{32}$$

biçiminde verebiliriz.

T spacelike kapalı eğri olan α nın birim teğet vektörü, spacelike regle yüzeyin verilen noktadaki timelike birim normali N ve spacelike birim vektörü $G = T \wedge N$ olmak üzere yüzeyin Darboux üçyüzlüsü $\{T, G, N\}$ şeklindedir.

Yüzeyin k_g geodezik eğriliği

$$k_g = - \langle V_1'(s), G(s) \rangle = k_1(s) \cosh \varphi$$

yüzeyin k_n normal eğriliği

$$k_n = - \langle V_1'(s), N(s) \rangle = k_1(s) \sinh \varphi$$

ve yüzeyin τ_g geodezik torsiyonu

$$\tau_g = \langle G'(s), N(s) \rangle = k_2(s) + \frac{d\varphi}{ds}$$

şeklinde tanımlanır. Burada φ, timelike iki vektör olan b ve N arasındaki hiperbolik açıdır.

Darboux üçyüzlüsünün türev denklemleri

$$\begin{aligned} T'(s\ ) &= k_g G(s) + k_n N(s) \\ G'(s) &= -k_g T(s) + \tau_g N(s) \\ N'(s) &= k_n T(s) + \tau_g G(s) \end{aligned} \tag{33}$$

şeklindedir. b timelike olduğundan dolayı $< b, b >= -1$ dir. O halde; yüzeyin geodezik eğriliği

$$k_g =< T', g >= k_1 \cosh\varphi$$

dır. (n, b) düzlemini gözönüne alırsak, yüzeyin birim normali olan N, n ve b vektörlerinin gerdiği düzlemde olduğundan

$$N = c_1 n + c_2 b$$

şeklinde yazılır. Buradaki katsayıları bulmak için her iki tarafı n ile iç çarparsak,

$$\begin{aligned} < N, n > &= < c_1 n + c_2 b, n > \\ &= < c_1 n, n > + < c_2 b, n > \\ &= c_1 < n, n > + c_2 < b, n > \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$< N, n >= c_1 = \sinh\varphi$$

bulunur.

Benzer olarak, c_2 katsayısını bulmak için her iki tarafı b ile iç çarparsak,

$$\begin{aligned} < N, b > &= < c_1 n + c_2 b, b > \\ &= < c_1 n, b > + < c_2 b, b > \\ &= c_1 < n, b > + c_2 < b, b > \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$< N, b >= -c_2 = -\cosh\varphi$$

dır. Burada b ile N aynı timekonide bulunan timelike vektörlerdir. Dolayısıyla,

$$N = \sinh\varphi.n + \cosh\varphi.b \tag{34}$$

bulunur.

$G = N \wedge T$ olduğundan elde edilen N vektörünü bu vektörel çarpımda yerine yazar ve gerekli düzenlemeleri yaparsak;

$$\begin{aligned} G &= (\sinh\varphi.n + \cosh\varphi.b) \wedge T \\ &= \sinh\varphi.(n \wedge T) + \cosh\varphi.(b \wedge T) \end{aligned}$$

veya

$$G = \cosh\varphi.n + \sinh\varphi.b \tag{35}$$

elde edilir.

$T' = k_1 n$ eşitliğini kullanarak, (34) eşitliğini $\sinh\varphi$ ile ve (35) eşitliğini $\cosh\varphi$ ile çarpıp taraf tarafa çıkarırsak,

$$(\cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi).n = \cosh\varphi.G - \sinh\varphi.N$$

veya

$$n = \cosh\varphi.G - \sinh\varphi.N$$

bulunur. O halde,

$$T' = k_1.(\cosh\varphi.G - \sinh\varphi.N)$$

elde edilir.

Şimdi ise diğer Darboux elemanları olan G ve N vektörlerinin türev denklemlerini bulalım. (35) eşitliğinde türev alırsak

$$\begin{aligned} G' &= \cosh\varphi.\frac{d\varphi}{ds}.b + \frac{db}{ds}.\sinh\varphi + \sinh\varphi.\frac{d\varphi}{ds}.n + n'.\cosh\varphi \\ &= \frac{d\varphi}{ds}.(\sinh\varphi.n + \cosh\varphi.b) + k_{2.}n.\sinh\varphi + (-k_1T + k_{2.}b).\cosh\varphi \\ &= \frac{d\varphi}{ds}.N + k_{2.}n.\sinh\varphi - k_1.\cosh\varphi.T + k_{2.}\cosh\varphi.b \end{aligned}$$

ve (34) eşitliğini kullanırsak

$$\begin{aligned} G' &= \cosh\varphi.\frac{d\varphi}{ds}.b + b'.\sinh\varphi + \sinh\varphi.\frac{d\varphi}{ds}.n + n'.\cosh\varphi \\ &= \frac{d\varphi}{ds}.(\sinh\varphi.n + \cosh\varphi.b) + k_{2.}n.\sinh\varphi + (-k_1T + k_{2.}b).\cosh\varphi \\ &= \frac{d\varphi}{ds}.N + k_{2.}n.\sinh\varphi - k_1.\cosh\varphi.T + k_{2.}\cosh\varphi.b \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} N' &= \cosh\varphi.\frac{d\varphi}{ds}.n + n'.\sinh\varphi + \sinh\varphi.\frac{d\varphi}{ds}.b + b'.\cosh\varphi \\ &= \frac{d\varphi}{ds}.(\cosh\varphi.n + \sinh\varphi.b) + k_{2.}n.\cosh\varphi + (-k_1T + k_{2.}b).\sinh\varphi \\ &= \frac{d\varphi}{ds}.g + k_{2.}b.\sinh\varphi - k_1.\sinh\varphi.T + k_{2.}\cosh\varphi.n \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} N' &= \frac{d\varphi}{ds}.G - k_1.\sinh\varphi.T + k_{2.}(\cosh\varphi.n + \sinh\varphi.b) \\ &= -k_1.\sinh\varphi.T + \frac{d\varphi}{ds}.G + k_2.G \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$N' = -k_1.\sinh\varphi.T + (k_2 + \frac{d\varphi}{ds}).G$$

eşitliği elde edilmiş olur. Burada $\frac{d\varphi}{ds}$ açısal hızı göstermektedir. Böylece, Darboux türev formülleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ G' \\ N' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_{1.}\cosh\varphi & -k_{1.}\sinh\varphi \\ k_{1.}\cosh\varphi & 0 & (k_2 + \frac{d\varphi}{ds}) \\ -k_{1.}\sinh\varphi & (k_2 + \frac{d\varphi}{ds}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ G \\ N \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılır.

İkinci temel form tensörü tanımına göre,

$$\mathrm{II}(T,T) = \varepsilon. < S(T), T > .N = \varepsilon.k_n < T, T > .N$$

dir. Burada $\varepsilon =< N, N >= -1$ ve $< T, T >= 1$ olduğundan

$$\mathrm{II}(T,T) = - < S(T), T > .N = -k_n.N$$

dır. O halde

$$k_n.N =< \mathrm{II}(T,T), N >$$

ve

$$\mathrm{II}(T,G) = - < S(T), G > .N$$

olup, şekil operatörünün tanımına göre,

$$S(T) = -D_T N$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \mathrm{II}(T,G) &= - < -D_T N, G > .N \\ &= < D_T N, G > .N \end{aligned}$$

veya

$$\mathrm{II}(T,G) = < N', G > .N$$

yazılır. $< N', G >= - < G', N >$ olduğundan

$$\begin{aligned} \mathrm{II}(T, G) &= - < G', N > .N \\ &= \tau_g N \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca,

$$< \mathrm{II}(T, G), N > \;=\; < \tau_{g.} N, N >$$

veya

$$\tau_g = - \langle \mathrm{II}(T, G), N \rangle$$

elde edilir. Geodezik eğrilik tanımı gereğince,

$$\begin{aligned} k_g &= < T', G > \\ &= < (k_1 . \cosh \varphi . G - \sinh \varphi . N), G > \\ &= k_1 . \cosh \varphi \end{aligned}$$

yazılır. Benzer olarak, sırasıyla, normal eğrilik ve geodezik torsiyon kavramlarından,

$$\begin{aligned} k_n &= - < T', N > \\ &= < (k_1 . \cosh \varphi . G - \sinh \varphi . N), N > \\ &= -k_1 . \sinh \varphi \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \tau_g &= - < G', N > \\ &= - < (k_1 . \cosh \varphi . T + k_2 + \frac{d\varphi}{ds}), N > \\ &= k_2 + \frac{d\varphi}{ds} \end{aligned}$$

bulunur. Bu değerleri Darboux türev formüllerinde yerine yazarsak,

$$\begin{bmatrix} T' \\ G' \\ N' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & \tau_g \\ k_n & \tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ G \\ N \end{bmatrix}$$

olur. Ayrıca, k_n ve τ_g ifadelerinin II. temel form tensörü cinsinden karşılıklarını yukarıda yerine yazdığımızda,

$$\begin{bmatrix} T' \\ G' \\ N' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & <;\mathrm{II}(T,T),N> \\ -k_g & 0 & -<\mathrm{II}(T,g),N> \\ <\mathrm{II}(T,T),N> & -<\mathrm{II}(T,g),N> & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ G \\ N \end{bmatrix} \tag{36}$$

Darboux türev formüllerini elde ederiz.

Genel olarak, herhangi bir P noktasındaki Frenet ve Darboux üçyüzlüleri çakıştırılırsa $\{T, X, N\}$ ortonormal sistemi için Darboux türev formülleri,

$$\begin{bmatrix} D_T T \\ D_T X \\ D_T N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & <\mathrm{II}(T,T),N> \\ -k_g & 0 & -<\mathrm{II}(T,X),N> \\ <\mathrm{II}(T,T),N> & -<\mathrm{II}(T,X),N> & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ X \\ N \end{bmatrix} \tag{37}$$

şeklinde ifade edilir.

α eğrisinin bir v =sabit noktasındaki teğet vektör alanı A olmak üzere,

$$\begin{aligned} A &= \alpha'(s) + v.X'(s) \\ &= T + v.D_T X \\ &= T + v.(-k_g T - <\mathrm{II}(T,X),N>.N \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} A &= (1 - k_g.v).T + v.\tau_g.N \\ &= (1 - k_g.v).T - v.<\mathrm{II}(T,X),N>.N \end{aligned} \tag{38}$$

olacak şekilde X vektörüne normal olan, A vektör alanı elde edilir.

4.1 Spacelike Regle Yüzeyler ile İlgili Bazı Teoremler

Bu kısımda, Minkowski uzayındaki spacelike regle yüzeyler ile ilgili bazı teoremleri eğrilik fonksiyonları ve ikinci temel form tensörü cinsinden vereceğiz.

Teorem 4.1.1:

Spacelike bir regle yüzey M olsun. M nin anadoğruları M üzerinde asimptotik ve jeodezik çizgilerdir.

İspat: Spacelike M regle yüzeyinin bir anadoğrusu olan l doğrusunun teğet vektör alanı X olsun. Her bir anadoğru bir doğru olacağından $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında bir jeodeziktir. Yani;

$$D_X X = 0$$

dır.

Gauss denklemini gözönüne alırsak,

$$\varepsilon =< N, N >= -1$$

olmak üzere

$$D_X X = \overline{D}_X X - < S(X), X > .N$$

olur. Burada $\overline{D}$, M spacelike regle yüzeyi üzerindeki indirgenmiş konneksiyondur. O halde,

$$\overline{D}_X X =< S(X), X > .N$$

veya

$$\overline{D}_X X = -\mathrm{II}(X, X)$$

dir. Burada II ikinci temel form tensörünü göstermektedir.

$\overline{D}_X X \in \chi(M)$ ve $< S(X), X > .N$ veya $\mathrm{II}(X, X) \in \chi(M)^{\perp}$ dir. M spacelike regle yüzeyi nondejenere olduğundan,

$$\chi(\mathbb{R}_1^3) = \chi(M) \oplus \chi(M)^{\perp} \qquad \text{ve} \qquad \chi(M) \cap (M)^{\perp} = \{\overrightarrow{0}\}$$

olduğundan dolayı

$$\overline{D}_X X \ = 0$$

ve

$$< S(X), X >= 0,\ N \neq 0$$

elde edilir.

Böylece M spacelike regle yüzeyin anadoğruları asimptotik ve jeodezik çizgilerdir.

Teorem 4.1.2:

M, $\mathbb{R}^3_1$ de spacelike bir yüzey olsun. Bir anadoğru boyunca teğet düzlemlerin aynı olması için gerek ve yeter şart $\mathrm{II}(T, X) = 0$ olmasıdır.

İspat: M spacelike bir regle yüzey ve α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki ortonormal çatı alanı $\{T, X, N\}$ olsun. v =sabit noktasından geçen,

$$\begin{array}{rccl} \varphi_v: & I \times \{v\} & \longrightarrow & M \\ & (t, v) & \longrightarrow & \varphi_t(t, v) = \alpha(t) + v.X(t) \end{array}$$

eğrisi için teğet vektör alanı A olmak üzere,

$$A = T + v.D_T X(t)$$

olduğundan

$$A = T + v.X'$$

yazabiliriz. Burada

$$X' = -k_g T - < \mathrm{II}(T, X), N > .N$$

ifadesini A ifadesinde yerine yazdığımızda;

$$\begin{array}{rcl} A & = & T + v.(-k_g.T - < \mathrm{II}(T, X), N > .N \\ & = & (1 - k_g v).T - < \mathrm{II}(T, X), N > .N \\ & = & (1 - k_g v).T + v\tau_g.N \end{array}$$

elde edilir.

N normal vektörün anadoğrular boyunca sabit olması için $\{A, T\}$ sisteminin lineer bağımlı olması gerekir. Dolayısıyla

$$-v. < \mathrm{II}(T, X), N > .N = 0$$

$v \neq 0$ ve $N \neq 0$ olduğundan dolayı;

$$- < \mathrm{II}(T, X), N >= \tau_g = 0$$

veya

$$< \mathrm{II}(T, X), N >= 0$$

dır. Bu nedenle,

$$\mathrm{II}(T, X) = 0$$

bulunur.

Burada A vektör alanı

$$< A, A >= - < N, N >= 1$$

olduğundan

$$< A, A > \quad > 0$$

dır. Böylece A vektör alanı spacelike bir vektör alanıdır.

4.1.1 Dağılma Parametresi

Spacelike bir M regle yüzeyin dayanak eğrisi olarak boğaz eğrisini alalım. Bu durumda $\overline{u} = \dfrac{k_g}{k_g^2 - \tau_g^2} = 0$ olur. Bu durumda,

$$X' = -k_g T + \tau_g N$$

olduğundan dolayı X' yüzeyin normali N ile lineer bağımlıdır. O halde,

$$\lambda X' = T \wedge X$$

dır. Dağılma parametresinin tanımı gereğince, doğrultman vektörü X olan bir regle yüzeyin dağılma parametresi P_X ile gösterilsin. O halde,

$$X' = D_T X = (1 - k_g v).T - v < \mathrm{II}(T, X), N > .N$$

dir.

Burada X' timelike bir vektör alanıdır.

$$\begin{aligned} N &= -(X \wedge T) \\ &= T \wedge X \\ &= \lambda X' \end{aligned}$$

veya

$$\lambda X' = T \wedge X$$

Burada eşitliğin her iki tarafını X' ile iç çarpar; ve $< X', X' >$ ile bölersek,

$$\begin{aligned} \det(T, X, X') &= \det(T, X, -k_g T + \tau_g N) \\ &= -k_g \det(T, X, T) + \tau_g \det(T, X, N) \\ &= \tau_g \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \langle X', X' \rangle &= < -k_g T + \tau_g N, -k_g T + \tau_g N > \\ &= k_g^2 - \tau_g^2 \end{aligned}$$

olur. Bulunan bu eşitlik P_X ifadesinde yerine yazıldığında

$$P_X = \lambda = \frac{< T \wedge X, X' >}{< X', X' >} = -\frac{\det(T, X, X')}{< X', X' >}$$

veya

$$P_X = -\frac{\tau_g}{k_g^2 - \tau_g^2}$$

elde edilir. O halde, $\tau_g = - <\mathrm{II}(T,X), N>$ değeri P_X ifadesinde yerine yazılırsa

$$P_X = \lambda = \frac{<\mathrm{II}(T,X), N>}{k_g^2 - \{<\mathrm{II}(T,X), N>\}^2} \tag{39}$$

bulunur.

Teorem 4.1.1.1:

M, $\mathbb{R}_1^3$ de bir spacelike yüzey olsun. M regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter koşul $P_X = 0$ olmasıdır.

İspat: M açılabilir olduğundan teğet düzlemleri aynı olur. O halde, $\mathrm{II}(T,X) = 0$ dır. Bu ifadeyi,

$$P_X = \lambda = \frac{<\mathrm{II}(T,X), N>}{k_g^2 - [<\mathrm{II}(T,X), N>]^2}$$

denkleminde yerine koyarsak,

$$P_X = \frac{<0, N>}{k_g^2 - [<\mathrm{II}(T,X), N>]^2}$$

elde edilir. Böylece,

$$P_X = 0$$

bulunur. Bu da teoremin ispatıdır.

4.1.2 Boğaz Noktasının Yer Vektörü

Açılabilir olmayan spacelike bir regle yüzeyin bir merkez noktasının dayanak eğrisine olan uzaklığı $\overline{u}$ olmak üzere, $\overline{\alpha}(t)$ yervektörü

$$\overline{\alpha}(t, \overline{u}) = \alpha(t) + \overline{u}X(t)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\alpha(t)$ dayanak eğrisinin yer vektörü ve $X(t)$ de anadoğruya ait doğrultman vektörüdür. $\overline{u}$ parametresi, spacelike regle yüzeyin dayanak eğrisinin yer vektörü ve doğrultman vektörü cinsinden bulunabilir. Spacelike regle yüzeyin, ilk ikisi $X(t)$ ve $X(t)+dX(t)$ olan, komşu üç anadoğrusu verilsin.

P, P' ve Q, Q' komşu anadoğruların ortak dikmelerinin anadoğrular üzerindeki ayakları olsunlar. Bu durumda P ve Q farklı iki boğaz noktasıdır. İlk iki komşu anadoğrunun ortak dikmesi

$$X(t) \wedge (X(t) + X'(t)dt) = X(t) \wedge X'(t)dt$$

bağıntısından dolayı $X(t) \wedge X'(t)$ vektörüne paraleldir. Limit halinde $\overrightarrow{PQ}$ vektörü $\overrightarrow{PP'}$ ile çakışacak ve boğaz eğrisinin teğeti olacaktır. Dolayısıyla,

$$< X, \overrightarrow{PQ} >= 0 \text{ ve } < X + D_T X dt, \overrightarrow{PQ} >= 0$$

olacağından

$$< D_T X, \overrightarrow{PQ} >= 0$$

elde edilir. Gerçekten,

$$< \overline{\alpha}(t), X >= 0$$

eşitliğinin türevi hesaplanırsa

$$< T + \left(\frac{k_g}{k_g^2 - \tau_g^2}\right) X' + \left(\frac{k_g}{k_g^2 - \tau_g^2}\right)' X, X >= 0$$

olur. Ayrıca iç çarpımın lineerlik özelliğinden

$$< T, X > + \left(\frac{k_g}{k_g^2 - \tau_g^2}\right) < X', X > + \left(\frac{k_g}{k_g^2 - \tau_g^2}\right)' < X, X >= 0$$

bulunur. Buradan

$$\left(\frac{k_g}{k_g^2 - \tau_g^2}\right)' = 0$$

veya

$$\overline{u} = \frac{k_g}{k_g^2 - \tau_g^2} = sbt$$

elde edilir.

Böylece, boğaz noktasının yer vektörü

$$\overline{\alpha}(t, \overline{u}) = \alpha(t) + \frac{k_g}{k_g^2 - \tau_g^2} X(t)$$

eşitliğiyle verilir.

4.1.3 Boğaz Noktası İle İlgili Bazı Teoremler

Teorem 4.1.3.1:

$\mathbb{R}_1^3$ de bir M spacelike regle yüzeyi için $\mathrm{II}(T, X) \neq 0$ ve her $s \in I$ ile $v \in \mathbb{R}$ için $\varphi(s, v) = \alpha(s) + vX(s)$ verilsin. M regle yüzeyinin herhangi iki anadoğrusu arasında ortogonal yörüngeler boyunca ölçülen en uzun uzaklık

$$v = -\frac{k_g}{k_g^2 + [\langle \mathrm{II}(T, X), N \rangle]^2}$$

değerine karşılık gelen $\varphi_v : I \to M$ eğrisi boyunca ölçülen uzaklıktır.

İspat: $\alpha(s_1)$, $\alpha(s_2)$ $(s_1 < s_2,\ s_1, s_2 \in I)$ noktalarından geçen iki doğrultmanı gözönüne alalım. Bu iki doğrultman arasında, bir ortogonal yörünge boyunca olan uzaklık

$$J(v) = \int_{s_0}^{s_1} \|A\|\, ds$$

dır. Bu durumda $J'(v) = 0$ denklemini sağlayan v değeri için $J(v)$ maksimum değerini alır. Şimdi, bu şartı sağlayan v değerini hesaplayalım:

$$J(v) = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{(1 - k_g v)^2 - v^2 \tau_g^2}\, ds.$$

ve $J'(v) = 0$ olması halinde

$$\int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\left[(1 - k_g v)^2 - v^2 \tau_g^2\right]} ds \;\; = \;\; 0$$

ya da buradan

$$[(1 - 2k_g v + k_g^2 v^2 - v^2 \tau_g^2)^{1/2}]' \;\; = \;\; 0$$

olur. Uygun hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned} -2k_g + 2k_g^2 v - 2\tau_g^2 v &= 0 \\ -k_g + k_g^2 v - \tau_g^2 v &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$v(k_g^2 - \tau_g^2) = k_g$$

olur. Bu durumda

$$v = \frac{k_g}{k_g^2 - \tau_g^2}$$

dır. Böylece,

$$v = \frac{k_g}{k_g^2 - (< \mathrm{II}(T, X), N >)^2}$$

elde edilir. Yani; ortogonal yörünge olan

$$\begin{aligned} \beta : \;\; I &\longrightarrow M \\ s &\longrightarrow \beta(s) = \alpha(s) + \frac{k_g}{k_g^2 - \tau_g^2} X(s) \end{aligned}$$

eğrisi boyunca ölçülen uzaklık, iki anadoğru arasındaki ortogonal yörüngeler boyunca ölçülen en uzun uzaklık olacaktır.

Teorem 4.1.3.2:

Açılabilir olmayan bir M spacelike regle yüzeyi verilsin. $\alpha(t)$ noktasından geçen anadoğru üzerinde $\varphi(t, v)$ noktasının boğaz noktası olması için gerek ve yeter şart $\varphi(t, v)$ noktasındaki teğet düzlemin bir normalinin $D_T X$ olmasıdır.

İspat: ($\Leftarrow$) : M açılabilir olmayan spacelike bir regle yüzey olsun. M nin dayanak eğrisi α üzerindeki $\alpha(t)$ noktasından geçen anadoğru üzerinde $\varphi(t,v)$ noktasındaki teğet düzlemin bir normali D_TX olsun. Bu durumda

$$\varphi_v : I \times \{v\} \to M$$

eğrisinin teğet vektör alanı $A = (1 - k_g v)T + \tau_g v N$ olmak üzere,

$$< D_TX, A >= 0$$

dır. Öyleyse,

$$\langle D_TX, A\rangle \;=\; < -k_gT + \tau_gN, (1 - k_gv)T + \tau_gvN$$

olduğundan

$$-k_g + (k_g^2 - \tau_g^2)v = 0$$

ve

$$v = \frac{k_g}{k_g^2 - \tau_g^2}$$

elde edilir. Bu ise $\varphi(t,v)$ noktasının boğaz noktası olması anlamına gelir.

($\Rightarrow$) : Tersine olarak, $\alpha(t)$ noktasından geçen anadoğruya ait boğaz noktası $\varphi(t,v)$ olsun. Bu durumda,

$$< X', X >=< -k_gT + \tau_gN, X >= 0$$

dır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} < X', A > &= -k_gT + \tau_gN, (1 - k_gv)T + \tau_gvN > \\ &= -k_g + (k_g^2 - \tau_g^2)v \end{aligned}$$

ve $\varphi(t,v)$ boğaz noktası olduğundan

$$-k_g + (k_g^2 - \tau_g^2) = 0$$

dır. O halde,

$$< X', A >= 0$$

elde edilir. Böylece, $\varphi(t, v)$ boğaz noktasında teğet düzlemin bir normali $D_T X$ bulunur.

Teorem 4.1.3.3:

M spacelike bir regle yüzey olsun. M nin Gauss eğrilik fonksiyonu K olmak üzere her $p \in M$ için

$$K(p) \geq 0$$

dır.

İspat: $p \in M$ noktasındaki anadoğrunun teğet vektör alanı X olsun. $\chi(M)$ nin $\{X, Y\}$ ortonormal bazını gözönüne alalım. X ve Y spacelike vektör alanlarıdır. M nin S şekil operatörünü ortonormal bazlar cinsinden

$$\begin{aligned} S(X) &= c_1 X + c_2 Y \\ &= c_3 X + c_4 Y \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} < S(X), X > &= < c_1 X + c_2 Y, X > \\ &= c_1 \end{aligned}$$

ve benzer şekilde c_2, c_3 ve c_4 katsayıları da bulunarak, S şekil operatörüne karşılık gelen matris

$$S = \begin{bmatrix} < S(X), X > & < S(X), Y > \\ < S(Y), X > & < S(Y), Y > \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} < S(X), X > &= 0 \\ < S(Y), Y > &= 0 \end{aligned}$$

olup, bu değerler $K = \varepsilon . \det S$ denkleminde yerine yazılırsa

$$K = -(< S(X), Y >)^2$$

bulunur. O halde, her $p \in M$ için

$$K(p) \geq 0$$

dır.

Teorem 4.1.3.4:

Açılabilir olmayan spacelike bir regle yüzeyin Gauss eğriliği bir anadoğru üzerinde boğaz noktasında minimum değerini alır.

İspat: M açılabilir olmayan spacelike bir regle yüzey olsun. O halde,

$$\chi(M) = S_p\{A, X\}$$

olmak üzere $\{A, X\}$ tanjant uzayın ortogonal bir bazıdır.

$$A_0 = \frac{A}{\| A \|} = \frac{(1 - k_g v)T + \tau_g v N}{[(k_g^2 - \tau_g^2)v^2 - 2k_g v + 1]^{\frac{1}{2}}}$$

birim spacelike vektör alanı ve $\{A_0, X\}$ ortonormal bir baz olur. $\varphi(t, v)$ noktasında M spacelike regle yüzeyin normalini

$$\begin{aligned} \widetilde{N} = A_0 \wedge X &= \frac{1}{\| A \|}[(1 - k_g v)T + \tau_g v N) \wedge X \\ &= \frac{1}{\| A \|}[(1 - k_g v)(T \wedge X) + \tau_g v (N \wedge X) \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Ayrıca,

$$\begin{aligned} T \wedge X &= N \\ N \wedge X &= T \end{aligned}$$

değerlerini yerine yazarsak,

$$\widetilde{N} = \frac{1}{\| A \|}[\tau_g v T + (1 - k_g v)N)$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned} < \widetilde{N}, \widetilde{N} > &= \frac{1}{\| A \|}[\tau_g v T + (1 - k_g v)N), \frac{1}{\| A \|}[\tau_g v T + (1 - k_g v)N) \\ &= (\frac{1}{\| A \|})^2[\tau_g^2 v^2 - (1 - k_g v)^2] = -1 \end{aligned}$$

olup, $\widetilde{N} = N_{\varphi(t,v)}$ birim timelike vektördür. A_0 ve X vektörleri yardımıyla S şekil operatörünün matrisi

$$\begin{aligned} S(A_0) &= \mu_1 A_0 + \mu_2 X \\ S(X) &= \mu_3 A_0 + \mu_4 X \end{aligned}$$

şeklinde yazılır ve buradan da

$$K = -\det S = \mu_2^2 = (S(A), X)^2$$

olur. Böylece,

$$S_v = -D_v N$$

olduğundan

$$S_{A_0} = -D_{A_0} N$$

yazılır. O halde,

$$S_{A_0} = -D_{A_0} N = -\frac{d\widetilde{N}}{dt^*} = -\frac{d\widetilde{N}}{dt}.\frac{dt}{dt^*}$$

dir. Burada t^* ile φ_v, v =sabit eğrisinin yay parametresi gösterilmektedir.

Bu durumda

$$A_0 = \frac{d\varphi(t,v)}{dt^*} = \frac{d\varphi(t,v)}{dt}.\frac{dt}{dt^*} = A.\frac{dt}{dt^*}$$

ve

$$A = A.\frac{1}{\parallel A \parallel}$$

olduğundan;

$$\frac{dt}{dt^*} = \frac{1}{\parallel A \parallel}$$

elde edilir. Böylece,

$$S(A_0) = -\frac{1}{\parallel A \parallel}.\frac{d\widetilde{N}}{dt^*}$$

eşitliğinde

$$\begin{aligned} \frac{d\widetilde{N}}{dt^*} &= \frac{\frac{1}{\parallel A \parallel}.[\tau_g v T + (1 - k_g v)N]}{dt^*} \\ &= \frac{1}{\parallel A \parallel}\{(\frac{1}{\parallel A \parallel}.[(1 - k_g v)D_T N + \tau_g v D_T T]\} \end{aligned} .$$

ifadesi yerine yazılır ve ayrıca,

$$\begin{aligned} D_T T &= k_g T + k_n N \\ D_T N &= k_n T + \tau_g X \end{aligned}$$

ifadeleri de kullanılırsa

$$S(A_0) = -\frac{1}{\parallel A \parallel}\{\frac{[k_n(1 - k_g)]}{\frac{1}{\parallel A \parallel}}.T + \frac{\tau_g}{\parallel A \parallel}.X + \frac{k_n \tau_g}{\parallel A \parallel}\}$$

elde edilir. Bu ifadeyi sağdan X ile iç çarparsak,

$$< S(A_0), X >= -\frac{1}{\| A \|}.\{\frac{\tau_g}{\| A \|}. < X, X >\}$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} < S(A_0), X > &= -\frac{\tau_g}{\| A \|^2} < X, X > \\ &= -\frac{\tau_g}{\| A \|^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, Gauss eğriliği

$$K = -\det S = (< S(A_0, X >)^2$$

olur. Bu eşitlik $< S(A_0), X >$ ifadesinde yerine yazılır ve

$$\|A\| = [(k_g^2 - \tau_g^2)v^2 - 2k_g v + 1]^{\frac{1}{2}}$$

değeri kullanılırsa

$$K(t, v) = (-\frac{\tau_g}{\| A \|^2})^2 = \frac{\tau_g^2}{\| A \|^4}$$

veya

$$\begin{aligned} K(t, v) &= \frac{\tau_g^2}{\{[(k_g^2 - \tau_g^2)v^2 - 2k_g v + 1]^{\frac{1}{2}}\}^4} \\ &= \frac{\tau_g^2}{[(k_g^2 - \tau_g^2)v^2 - 2k_g v + 1]^2} \end{aligned}$$

elde edilir. v ye göre türev alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{d[K(t, v)]}{dv} &= -\frac{2\tau_g^2[(k_g^2 - \tau_g^2)v^2 - 2k_g v + 1][2.(k_g^2 - \tau_g^2)v - 2k_g]}{\{[(k_g^2 - \tau_g^2)v^2 - 2k_g v + 1]^2\}^2} \\ &= -\frac{2\tau_g^2[(k_g^2 - \tau_g^2)v^2 - 2k_g v + 1][2.(k_g^2 - \tau_g^2)v - 2k_g]}{[(k_g^2 - \tau_g^2)v^2 - 2k_g v + 1]^4} \\ &= -\frac{2\tau_g^2\ [(k_g^2 - \tau_g^2)v^2 - 2k_g v + 1]\ [2.(k_g^2 - \tau_g^2)v - 2k_g]}{[(k_g^2 - \tau_g^2)v^2 - 2k_g v + 1].[(k_g^2 - \tau_g^2)v^2 - 2k_g v + 1]^3} \end{aligned}$$

gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{d[K(t, v)]}{dv} = -\frac{2\tau_g^2.2.[(k_g^2 - \tau_g^2)v - k_g]}{[(k_g^2 - \tau_g^2)v^2 - 2k_g v + 1]^3}$$

veya

$$\frac{d[K(t,v)]}{dv} = -\frac{4\tau_g^2[(k_g^2-\tau_g^2)v-k_g]}{[(k_g^2-\tau_g^2)v^2-2k_gv+1]^3}$$

yazılır. Burada $< A, A >= [(k_g^2-\tau_g^2)v^2-2k_gv+1]$ değeri yerine yazılırsa,

$$\frac{d[K(t,v)]}{dv} = -\frac{4\tau_g^2[(k_g^2-\tau_g^2)v-k_g]}{< A, A >^3}$$

bulunur. M açılabilir olmayan bir regle yüzey olduğundan

$$\tau_g \neq 0$$

ve

$$< A, A > \quad > 0$$

dır. O halde,

$$\frac{d[K(t,v)]}{dv} = -\frac{4\tau_g^2[(k_g^2-\tau_g^2)v-k_g]}{< A, A >^3} = 0$$

olduğunda

$$4\tau_g^2[4\tau_g^2[(k_g^2-\tau_g^2)v-k_g]] = 0$$

olmalıdır. Böylece,

$$(k_g^2-\tau_g^2)v-k_g = 0,$$

eşitliğinden

$$v = \frac{k_g}{k_g^2-\tau_g^2}$$

ekstremum noktası bulunur. Dolayısıyla,

$$\frac{d^2[K(t,v)]}{d^2v} \quad > 0$$

dır. Böylece $v = \frac{k_g}{k_g^2-\tau_g^2}$ noktası $K(t,v)$ nin bir minimum noktasıdır.

$v = \frac{k_g}{k_g^2-\tau_g^2}$ değerine anadoğru üzerindeki karşılık gelen nokta merkez noktası

olduğundan X anadoğrusu üzerinde K fonksiyonu minimum değerini merkez noktasında alır. v nin bu değeri,

$$K(t,v) = \frac{\tau_g^2}{[(k_g^2 - \tau_g^2)v^2 - 2k_g v + 1]^2}$$

denkleminde yerine yazıldığında

$$K(t,v) = \frac{\tau_g^2}{[(k_g^2 - \tau_g^2)(\frac{k_g}{k_g^2 - \tau_g 2})^2 - 2k_g(\frac{k_g}{k_g^2 - \tau_g 2}) + 1]^2}$$

veya

$$K_{\min} = \frac{(k_g^2 - \tau_g^2)^2}{\tau_g^2}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.3.5:

Bir M spacelike regle yüzeyin dağılma parametresi yalnızca anadoğrulara bağlıdır.

İspat: Teorem 4.1.3.4 gereğince

$$K_{\min} = \frac{(k_g^2 - \tau_g^2)^2}{\tau_g^2}$$

dır. O halde, boğaz noktasında

$$k_g = 0$$

ve

$$P_X = -\frac{\det(T, X, X')}{< X', X' >}$$

ve

$$X' = -k_g T + \tau_g N$$

olduğundan

$$P_X = -\frac{\det(T, X, -k_g T + \tau_g N)}{< -k_g T + \tau_g N, -k_g T + \tau_g N >}$$

veya

$$P_X = -\frac{[-k_g \det(T, X, T) + \tau_g \det(T, X, N)]}{< -k_g T, -k_g T > + < \tau_g N, +\tau_g N >}$$

dır. Buradan

$$P_X = -\frac{\tau_g}{k_g^2 - \tau_g^2}$$

bulunur. O halde,

$$K_{\min} = \tau_g^2$$

dır. Böylece,

$$P_X = -\frac{\tau_g}{k_g^2 - \tau_g^2} = -\frac{\tau_g}{0^2 - \tau_g^2}$$

veya

$$P_X = -\frac{\tau_g}{-\tau_g^2} = \frac{1}{\tau_g}$$

olacağından,

$$\sqrt{K_{\min}} = \sqrt{\tau_g^2} = \tau_g = \frac{1}{\frac{1}{\tau_g}} = \frac{1}{P_X}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\sqrt{K_{\min}} = \frac{1}{P_X}$$

veya

$$P_X = \frac{1}{\sqrt{K_{\min}}}$$

dır. Bu ifade, M spacelike regle yüzeyin dağılma parametresinin yalnızca anadoğrulara bağlı olduğunu gösterir.

Teorem 4.1.3.6:

M açılabilir olmayan spacelike bir regle yüzey olsun. M nin bir anadoğru boyunca normali N_v, bu anadoğru üzerindeki merkez noktasında M nin normali N ise N ile N_v arasındaki açının hiperbolik tanjantı, N_v nin başlangıç noktasının merkez noktasına olan uzaklığı ile doğru orantılıdır (Ekici ve Öztürk, 2008).

İspat: M spacelike regle yüzeyi

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & I \times J & \longrightarrow & \mathbb{R}_1^3 \\ & (t,v) & \longrightarrow & \varphi(t,v) = [\alpha_1(t) + va_1(t), \alpha_2(t) + va_2(t), \alpha_3(t) + va_3(t)] \end{array}$$

olmak üzere $(I \times J, \varphi)$ parametrizasyonu ile verilsin. $v = 0$ için $\varphi(t,0)$ noktası M nin bir boğaz noktası olsun.

$$\alpha : I \longrightarrow M$$

eğrisi $\varphi(t,0)$ noktasından geçen bir ortogonal yörünge olacaktır. α eğrisinin birim teğet vektör alanı T ve $\alpha(t)$ noktasından geçen anadoğrunun birim teğet vektör alanı X olmak üzere, $\varphi(t,0)$ noktasında $D_T X$ vektör alanı M ye normaldir. Böylece $v = 0$ olduğundan $k_g = 0$ dır. Buna göre, dağılma parametresi

$$P_X = \frac{1}{\tau_g}$$

dir. Ayrıca,

$$\widetilde{N} = \frac{1}{\| A \|}[\tau_g v T + (1 - k_g v)N]$$

denkleminde

$$k_g = 0$$

yazılırsa

$$\widetilde{N} = \frac{1}{\| A \|}[\tau_g v T + N]$$

bulunur. Benzer olarak,

$$A = (1 - k_g v)T + \tau_g N$$

ifadesinde

$$k_g = 0$$

değeri yazılırsa

$$A = T + \tau_g v N$$

elde edilir. $\|A\|$ tanımı gereğince,

$$\|A\| = \sqrt{< A, A >} = \sqrt{< T + \tau_g v N, T + \tau_g v N >}$$

olup,

$$\|A\| = \sqrt{1 - \tau_g^2 v^2}$$

dır. N_v vektörü ise

$$N_v = \frac{1}{\|A\|}(A \wedge X) \tag{40}$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$A = T + \tau_g v N$$

değeri (40) denkleminde yerine yazılırsa,

$$N_v = \frac{(T + \tau_g v N) \wedge X}{\sqrt{1 - \tau_g^2 v^2}} = \frac{(T \wedge X) + \tau_g v (N \wedge X)}{\sqrt{1 - \tau_g^2 v^2}}$$

veya

$$N_v = \frac{(T + \tau_g v N \times X)}{\sqrt{1 - \tau_g^2 v^2}} = \frac{N + \tau_g v T}{\sqrt{1 - \tau_g^2 v^2}}$$

bulunur. Buradan

$$N_v = \frac{\tau_g v T + N}{\sqrt{1 - \tau_g^2 v^2}}$$

elde edilir.

N ile N_v arasındaki hiperbolik açıyı φ ile gösterelim. Burada N ile N_v timelike vektörlerdir. O halde,

$$N_v = \frac{\tau_g v T + N}{\sqrt{1 - \tau_g^2 v^2}}$$

ifadesi yardımıyla,

$$< N, N_v >=< N, \frac{\tau_g v T + N >}{\sqrt{1 - \tau_g^2 v^2}}$$

veya

$$< N, N_v >= \frac{< N, N > + \tau_g v < T, N >}{\sqrt{1 - \tau_g^2 v^2}}$$

yazılır. Buradan da

$$< N, N_v >= \frac{-1}{\sqrt{1 - \tau_g^2 v^2}}$$

elde edilir. N ile N_v ikisi de aynı timekonideki timelike vektörler olduklarından,

$$< N, N_v >= -\|N\|.\|N_v\|. \cosh \varphi$$

dır. N ve N_v ikisi de birim vektör olduklarından

$$\|N\| = \|N_v\| = 1$$

ve

$$< N, N_v >= -\cosh \varphi$$

yazılır. Dağılma parametresi

$$P_X = \frac{1}{\tau_g}$$

veya

$$\tau_g = \frac{1}{P_X}$$

olduğundan

$$< N, N_v >= \frac{-1}{\sqrt{1 - \tau_g^2 v^2}}$$

dır. O halde,

$$\cosh\varphi = - < N, N_v >= \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{P_X^2}}} \tag{41}$$

elde edilir.

$$\sinh^2\varphi = \cosh^2\varphi - 1$$

eşitliğinden

$$\sinh^2\varphi = (\frac{1}{1 - \dfrac{v^2}{P_X^2}}) - 1$$

ve

$$\sinh^2\varphi = (\frac{P_X^2}{P_X^2 - v^2}) - 1$$

dır. Buradan

$$\sinh\varphi = (\frac{v}{\sqrt{P_X^2 - v^2}}) \tag{42}$$

elde edilir. (41) ve (42) eşitliklerini oranlarsak,

$$\tanh\varphi = \frac{\sinh\varphi}{\cosh\varphi} = \frac{\dfrac{v}{\sqrt{P_X^2 - v^2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{P_X^2}}}}$$

veya

$$\tanh\varphi = \frac{v}{P_X}$$

elde edilir. Böylece, N ile N_v arasındaki açının hiperbolik tanjantı, N_v nin başlangıç noktasının merkez noktasına olan uzaklığı ile doğru orantılıdır.

KAYNAKLAR

Akutagawa, K., Nishikawa, S. The Gauss map and spacelike surfaces with prescribed mean curvature in Minkowski 3-space, Tohoku Math. J.42, 67-82, (1990).

Beem, J. K.,Ehrlich, P. E., Global Lorentzian Geometry, New York, Dekker Inc., (1981).

Blacshke, W., Differential Geometry, İstanbul University, No 433, (1949).

Ekici, C**.,** Bir Kapalı Regle Yüzeyin İntegral İnvaryantları Arasındaki Bağıntılar, Anadolu Üniversitesi, Eskişehir, (1992).

Ekici, C., Öztürk, H., On The Timelike Ruled Surfaces in Minkowski 3-Space, Math Journals, (incelemede), (2008).

Guggenheimer, H. W., Differential Geometry, Mc Graw-Hill Book Company, (1963).

Hacısalihoğlu, H. H., Diferensiyel Geometri, Cilt I, Ankara Univ. Fen Fak. Yayınları, (1993).

Hacısalihoğlu, H. H., Diferensiyel Geometri, Cilt II, Ankara Univ. Fen Fak. Yayınları, (2000).

Kaya, R.**,** Analitik Geometri, Bilim Teknik Yayınevi, 7. Baskı, Eskişehir, (2002).

Kobayashi, O., Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space L^3, Tokyo J. Math., Vol 6, No.2, 297-309,.(1983).

O'Neill, B., Elementary Differential Geometry, Academic Press, New York-London (1966).

O'Neill, B., Semi-Riemannian Geometry, Academic Press, New York-London (1983).

Özyılmaz, E., Yaylı Y., On the Closed Spacelike Developable Ruled Surface, Hadronic Journal, Vol.23, 439-456, (2000).

Sarıoğlugil, A., Tutar A., On Ruled Surfaces in Euclidean Space $\mathbb{E}^3$, Int. J. Contemp. Math Sci., Vol. 2, No.1, 1-11, (2007).

Turgut, A., 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara (1995).

Turgut, A., Hacısalihoğlu, H. H., On the Distribution Parameter of Timelike Ruled Surfaces in the Minkowski 3-Space, Far East J. Math. Sci.,Vol.5, No.2, 321-328, (1997).

Turgut, A., Hacısalihoğlu, H. H., Timelike Ruled Surfaces in the Minkowski 3-Space-II, Tr. J. of Mathematics, Vol.22, No.1, 33-46, (1998).

Uğurlu, H. H., Çalışkan, A., Timelike Regle Yüzey Üzerindeki bir Time-Like Eğrinin Frenet ve Darboux Vektörleri, L. Spil Fen Bilimleri Kongresi, 4-5 Eylül, Manisa, (1995).

Uğurlu, H. H., Çalışkan, A., Spacelike ve timelike yüzeyler Geometrisi, Manisa, (1997).