R-Cebiroid Çaprazlanmış Modüllerinin Kategoriksel Özellikleri

Osman Avcıoğlu

DOKTORA TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Aralık 2012

Categorical Properties of Crossed Modules of R-Algebroids

Osman Avcıoğlu

DOCTORAL DISSERTATION
Department of Mathematics
December 2012

R-Cebiroid Çaprazlanmış Modüllerinin Kategoriksel Özellikleri

Osman Avcıoğlu

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik Anabilim Dalı

Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalında

DOKTORA TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Yrd. Doç. Dr. İ. İlker AKÇA

Aralık 2012

ONAY

Matematik Anabilim Dalı Doktora öğrencisi Osman Avcıoğlu' nun DOKTORA tezi olarak hazırladığı "***R*-Cebiroid Çaprazlanmış Modüllerinin Kategoriksel Özellikleri**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. İ. İlker AKÇA

İkinci Danışman :

Doktora Tez Savunma Jürisi:

Üye : Yrd. Doç. Dr. İ. İlker AKÇA

Üye : Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ

Üye : Doç. Dr. Erdal ULUALAN

Üye : Doç. Dr. Enver Önder USLU

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ummahan Ege ARSLAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, kategori, funktor, R-cebir, R-kategori, R-cebiroid, R-funktor, altcebiroid, çift yönlü ideal, bölüm cebiroidi, cebiroidlerin birbirine etkisi ve cebiroid modülleri gibi kavramların tanımları ve temel özellikleri verilmiştir. İkinci bölümde, R-cebiroid ön-çaprazlanmış ve çaprazlanmış modülleri, temel özellikleri, bir ön-çaprazlanmış modülün Peiffer ideali ve Peiffer ideali ile bir ön-çaprazlanmış modülden çaprazlanmış modül elde edilişi yer almaktadır. Üçüncü bölümde, R-cebiroid serbest modülleri, R-cebiroid serbest ön-çaprazlanmış ve çaprazlanmış modülleri, R-cebiroid geri çekme çaprazlanmış modülleri ve R-cebiroid indirgenmiş çaprazlanmış modülleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde, iki R-cebiroidin serbest çarpımı ve iki R-cebiroid çaprazlanmış modülünün eş çarpımı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: R-cebiroid, R-funktor, R-cebiroid modülleri, R-cebiroid ön-çaprazlanmış modülleri, R-cebiroid çaprazlanmış modülleri, R-cebiroid serbest modülleri, R-cebiroid serbest çaprazlanmış modülleri, R-cebiroid geri çekme çaprazlanmış modülleri, R-cebiroid indirgenmiş çaprazlanmış modülleri, iki R-cebiroidin serbest çarpımı, iki R-cebiroid çaprazlanmış modüllünün eş çarpımı.

SUMMARY

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, the definitions and basic properties of subjects such as category, functor, R-algebra, R-category, R-algebroid, R-functor, subalgebroid, two sided ideal, quotient algebroid, the action of an algebroid on another algebroid and algebroid modules are given. In the second chapter, pre-crossed and crossed modules of R-algebroids, their basic properties, the Peiffer ideal of a pre-crossed module and the construction of a crossed module from a pre-crossed module by Peiffer ideal are examined. In the third chapter, free modules of R-algebroids, free pre-crossed and crossed modules of R-algebroids, pullback crossed modules of R-algebroids and induced crossed modules of R-algebroids are examined. In the fourth chapter, free product two R-algebroids and coproduct of two crossed modules of R-algebroids are examined.

Keywords: R-algebroid, R-functor, modules of R-algebroids, pre-crossed modules of R-algebroids, crossed modules of R-algebroids, free modules of R-algebroids, free crossed modules of R-algebroids, pullback crossed modules of R-algebroids, induced crossed modules of R-algebroids, free product of two R-algebroids, coproduct of two crossed modules of R-algebroids.

TEŞEKKÜR

Beni bu çalışmaya sevkeden ve yöneten, çalışma boyunca değerli yardımlarını esirgemeyen sayın hocam,

Yrd. Doç. Dr. İ.İlker AKÇA ya

ayrıca her türlü desteği için değerli hocam sayın,

Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ ye

ve her zaman yanımda olup desteklerini hiçbir zaman eksik etmeyen,

aileme ve yakınlarıma

sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR vii

BÖLÜM 0. ÖNSÖZ 1

0.1 Giriş . . . 1

0.2 Tezin Yapısı . . . 5

BÖLÜM 1. Cebirden Cebiroide 6

1.1 Giriş . . . 6

1.2 Kategoriler ve Funktorlar . . . 6

1.3 R-cebir . . . 11

1.4 R-kategori ve R-cebiroid . . . 12

1.5 R-funktor . . . 13

1.6 Altcebiroid, çift yönlü ideal ve bölüm cebiroidleri . . . 15

1.7 Cebiroidlerin birbirine etkisi ve cebiroid modülleri . . . 17

BÖLÜM 2. R-Cebiroid Ön-Çaprazlanmış ve Çaprazlanmış Modülleri 19

2.1 Giriş . . . 19

2.2 Ön-çaprazlanmış ve çaprazlanmış modüller . . . 19

2.3 Bir ön-çaprazlanmış modülün Peiffer ideali . . . 28

2.4 Ön-çaprazlanmış modülden Peiffer ideali ile çaprazlanmış modül elde edilişi . . . 30

2.5 $(-)^{\mathrm{cr}}$ funktoru . . . 36

BÖLÜM 3. R-Cebiroid Serbest Modülleri, Serbest Çaprazlanmış Modülleri, Geri Çekme Çaprazlanmış Modülleri ve İndirgenmiş Çaprazlanmış Modülleri 40

3.1 Giriş . . . 40

3.2 R-cebiroid serbest modülleri 41

3.3 R-cebiroid serbest ön-çaprazlanmış modülleri 50

3.4 R-cebiroid serbest çaprazlanmış modülleri 57

3.5 R-cebiroid geri çekme çaprazlanmış modülleri 60

3.6 R-cebiroid indirgenmiş çaprazlanmış modülleri 69

BÖLÜM 4. R-Cebiroidlerin Serbest Çarpımı ve R-Cebiroid Çaprazlanmış Modüllerinin Eş-Çarpımı **93**

4.1 Giriş 93

4.2 R-cebiroidlerin serbest çarpımı 93

4.3 R-cebiroid çaprazlanmış A-modül kategorisinde eş-çarpım 96

4.3.1 Eş-çarpımın serbest çarpımdan elde edilişi 97

4.3.2 Eş-çarpımın yarı direk çarpımdan elde edilişi 108

4.3.3 $(\mathcal{M} * \mathcal{N})^{\mathrm{cr}}$ ile $(\mathcal{M} \ltimes \mathcal{N})^{\mathrm{cr}}$ nin karşılaştırılması 116

KAYNAKLAR DİZİNİ **124**

BÖLÜM 0

ÖNSÖZ

0.1 Giriş

Çaprazlanmış modüller temel cebirsel yapılardan biri olup, çaprazlanmış modül kavramı ilk olarak J. H. C. Whitehead, [30], [31], tarafından tanımlanmıştır. Whitehead, relatif homotopi gruplarının cebirsel yapıları üzerine yaptığı çalışmasında çaprazlanmış modüllere yer vermiştir. Çaprazlanmış modüllerin homotopi teori, gruplar üzerinde homoloji ve kohomoloji, cebirsel K-teori, devirli (cyclic) homoloji, kombinator grup teori ve diferansiyel geometri olmak üzere matematiğin bir çok alanında önemli rolü vardır. Bu konuda yapılan önemli çalışmalardan bazıları [8], [10], [11], [24] ve [28] de bulunabilir.

Asosyatif ve değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modül kavramı, M. Gerstenhaber, [13], A. S.-T. Lue, [18], S. Lichtenbaum - M. Schlessinger, [17], R. Lavendhomme and J. Roisin'in, [16], çalışmalarında karşımıza çıkar. Lie cebirlerinin çaprazlanmış modülleri C. Kassell and J. L. Loday tarafından [15] de incelenmiştir. Z. Arvasi ve T. Porter [3], [4], [5],[6] ve [25] deki çalışmalarında değişmeli cebirler için çaprazlanmış modüllerle ilgili önemli sonuçlar elde etmişlerdir. T. Porter [26] da interest C kategorisinde çaprazlanmış modülleri ve [27] deki çalışmasında Koszul komplekslerle çaprazlanmış modüller arasındaki ilişkileri incelemiştir. G. J. Ellis [12] de yüksek boyutlu cebir çaprazlanmış modüllerini incelemiştir.

Gruboidlerin gruplara göre daha genel bir yapı olması gibi ([9], [14]), cebiroidler de cebirlere göre daha genel bir yapıdır. Bir R-cebiroid çok objeli bir R-cebir, ya da bir R-cebir tek objeli bir R-cebiroid olarak düşünülebilir. R-cebiroidin kategoriksel olarak ilk tanımı B. Mitchell, [20], [21], [22], tarafından " *herbir homseti bir R-modül yapısına sahip olan ve kompozisyonu R-bilineer olan küçük kategori"* biçiminde yapılmış ve Mitchell bu yapı üzerinde ilginç sonuçlar elde etmiştir. Mitchell'in bu tanımı ve R-cebiroidlerin temel özellikleri bu çalışmanın ilk bölümünde ayrıntılarıyla verilmiştir.

G. H. Mosa [23] de R-cebiroid çaprazlanmış modül tanımını vermiş, bazı özelliklerini incelemiş ve double R-cebiroidler ile R-cebiroid çaprazlanmış modülleri arasındaki ilişkileri ele almıştır. Ön-çaprazlanmış modüllerden çaprazlanmış modül elde etmek grup ve grupoidler için ne kadar önemli ise cebir ve cebiroidler için de o derece önemlidir. Nizar [29] da R-cebir

çaprazlanmış modüllerinin eş-çarpımını oluştururken, ön-çaprazlanmış modül özelliği taşıyan bir cebir morfizminden bir çaprazlanmış modül elde edebilmek için Peiffer idealini kullanmıştır. Biz de, bu çalışmanın ikinci bölümünde R-cebiroid ön-çaprazlanmış modülleri için Peiffer çift yönlü idealini oluşturup, bu ideali kullanarak bir R-cebiroid çaprazlanmış modülü elde ettik. Buna göre eğer $\mathcal{M}=(\mu : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{A})$, $\mathrm{PXAlg}(R)$ de bir ön-çaprazlanmış modül ise $tm = sm'$ koşulunu sağlayan her $m, m' \in \mathrm{M}$ için

$$[\![m,m']\!]_1 \;=\; m^{\mu m'} - mm' \;\text{ ve }\; [\![m,m']\!]_2 \;=\; {}^{\mu m}m' - mm'$$

biçimindeki elemanlara m ile m' nün Peiffer komutatörleri denir. $\mathrm{M}(x,y)$ nin $[\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!]_{\mathrm{g}}(x,y) = \{[\![m,m']\!]_1, [\![m,m']\!]_2 : m,m' \in \mathrm{M},\, x = sm,\, tm = sm',\, tm' = y\}$ kümesinin elemanları tarafından üretilen alt grubu $[\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!](x,y)$ ile gösterilirse ikinci bölümde göstereceğimiz üzere $[\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!](x,y)$ bir R-modül olup $[\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!] = \{[\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!](x,y) : x,y \in \mathrm{A}_0\}$ R-modüller ailesi M nin Peiffer ideali adı verilen çift yönlü bir idealidir. Böylece $\mathrm{M}^{\mathrm{cr}} = \frac{\mathrm{M}}{[\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!]} = \left\{ \frac{\mathrm{M}}{[\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!]}(x,y) = \frac{\mathrm{M}(x,y)}{[\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!](x,y)} : x,y \in \mathrm{A}_0 \right\}$ olmak üzere μ^{cr} morfizmi

$$\begin{array}{rccc} \mu^{\mathrm{cr}} : & \mathrm{M}^{\mathrm{cr}} & \longrightarrow & \mathrm{A} \\ & \overline{m} & \longmapsto & \mu^{\mathrm{cr}}\overline{m} = \mu m \end{array}$$

biçiminde tanımlanırsa $\mathcal{M}^{\mathrm{cr}}=(\mu^{\mathrm{cr}} : \mathrm{M}^{\mathrm{cr}} \longrightarrow \mathrm{A})$ bir çaprazlanmış modül olur.

Ön-çaprazlanmış modülden Peiffer ideali ile çaprazlanmış modül elde edilişi

$$\begin{array}{rccc} f_1^{\mathrm{cr}} : & \mathrm{M}^{\mathrm{cr}} & \longrightarrow & \mathrm{M}'^{\mathrm{cr}} \\ & \overline{m} & \longmapsto & f_1^{\mathrm{cr}}\overline{m} = \overline{f_1 m} \end{array}$$

olmak üzere

$$\begin{array}{rccc} (-)^{\mathrm{cr}} : & \mathrm{PXAlg}(R) & \longrightarrow & \mathrm{XAlg}(R) \\ & \mathcal{M} & \longmapsto & \mathcal{M}^{\mathrm{cr}} \\ & f = (f_1, f_2) & \longmapsto & f^{\mathrm{cr}} = \left(f_1^{\mathrm{cr}}, f_2\right) \end{array}$$

biçiminde bir funktor oluşturur. Bu funktor i: $\mathrm{XAlg}(R) \longrightarrow \mathrm{PXAlg}(R)$ gömme funktorunun sol-ek'idir. Böylece $(-)^{\mathrm{cr}}$ funktoru $\mathrm{PXAlg}(R)$ kategorisindeki çarpımları korur. $(-)^{\mathrm{cr}}$ nin bu özelliği dördüncü bölümde iki R-cebiroid çaprazlanmış modülünün eş-çarpımını elde ederken kullanılmıştır.

Üçüncü bölümde R. Brown, P. J. Higgins ve R. Sivera'nın [10] da gruplar ve gruboidler üzerine ele aldıkları çalışmalar model alınarak sırasıyla R-cebiroid serbest modülleri, serbest ön-çaprazlanmış ve çaprazlanmış modüller, geri çekme çaprazlanmış modülleri ve indirgenmiş

çaprazlanmış modüller incelenmiştir. İlk olarak K herhangi bir küme ve A herhangi bir R-cebiroid olmak üzere $\omega : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{A}_0 \times \mathrm{A}_0$ biçiminde tanımlı tüm fonksiyonların objelerini oluşturduğu $\mathrm{Sets}_0/\mathrm{Alg}(R)$ kategorisi ve sabit bir A R-cebiroidi için $\mathrm{Sets}_0/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A})$ kategorisi tanımlanmıştır. Sonra $\mathrm{Sets}_0/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A})$ kategorisinin bir $\omega : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{A}_0 \times \mathrm{A}_0$ objesi üzerinde serbest R-cebiroid A-modülü, $\mathrm{F}(\omega)$, tanımlanıp her $k \in \mathrm{K}$ ve $ta = \omega_1 k$ ve $sa' = \omega_2 k$ koşulunu sağlayan her $a, a' \in \mathrm{A}$ için aka' şeklindeki üreteç elemanlarıyla $\mathrm{F}(\omega)$ nin inşaası yapılmıştır.

Ardından K herhangi bir küme ve A herhangi bir R-cebiroid olmak üzere K dan A ya tanımlı fonksiyonların objelerini oluşturduğu $\mathrm{Sets}/\mathrm{Alg}(R)$ kategorisi ile sabit bir A R-cebiroidi için $\mathrm{Sets}/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A})$ kategorisi tanımlanmıştır. Sonra $\mathrm{Sets}/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A})$ kategorisinin bir $\omega : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{A}$ objesi tarafından belirlenen serbest R-cebiroid ön-çaprazlanmış A-modülü, $F_P(\omega) = (\theta : \mathrm{F}_P(\omega) \longrightarrow \mathrm{A})$, tanımlanmıştır. $F_P(\omega)$ nin inşaası için, $\omega : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{A}$ fonksiyonu tarafından indirgenen $\omega_{\mathrm{A}_0} : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{A}_0 \times \mathrm{A}_0$ fonksiyonu üzerine serbest $\mathrm{F}(\omega_{\mathrm{A}_0})$ A-modülü, $\mathrm{F}_P(\omega)$ olarak alınıp $\mathrm{F}_P(\omega)$ den A ya

$$\begin{array}{rccc} \theta : & \mathrm{F}_P(\omega) & \longrightarrow & \mathrm{A} \\ & aka' & \longmapsto & \theta(aka') = a(\omega k)a' \end{array}$$

biçiminde tanımlanan θ fonksiyonun etki koruyan bir R-cebiroid morfizmi olduğu gösterilmiştir. Sonra da elde edilen $F_P(\omega) = (\theta : \mathrm{F}_P(\omega) \longrightarrow \mathrm{A})$ ön-çaprazlanmış modülünün serbest ön-çaprazlanmış modül koşullarını taşıdığı gösterilmiştir.

Daha sonra, $\mathrm{Sets}/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A})$ kategorisinde serbest çaprazlanmış modül tanımlanıp inşaası aynı kategoride elde ettiğimiz serbest ön-çaprazlanmış modüle $(-)^{\mathrm{cr}}$ funktoru uygulanarak gerçekleştirilmiştir.

M. Alp "Pullback crossed modules of Algebroids" isimli, [1], çalışmasında R-cebiroid geri çekme çaprazlanmış modül yapısını tanımlamıştır. Biz de bu çalışmada M. Alp'in R-cebiroid geri çekme çaprazlanmış modülü için yaptığı tanımı biraz daha genişletip, elde edilen geri çekme çaprazlanmış modülünün evrensellik özelliğini taşıdığını gösterdik. Buna göre $f : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ bir R-cebiroid morfizmi, $\mathcal{N} = (\eta : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{B})$ bir R-cebiroid çaprazlanmış B-modülü, $\mathrm{N} \times_f \mathrm{A}$ kümesi $\mathrm{N} \times \mathrm{A}$ nın $fa = \eta n$ eşitliğini sağlayan tüm (n, a) ikililerinin oluşturduğu alt kümesi ve bu kümeye ait herbir (n, a) ikilisinin kaynak ve hedefi $s(n, a) = sa$ ve $t(n, a) = ta$ olmak üzere her $x, y \in \mathrm{A}_0$ için $f^*\mathrm{N}(x, y) = \{(n, a) \in \mathrm{N} \times_f \mathrm{A} : s(n, a) = x \text{ ve } t(n, a) = y\}$ biçiminde, $f^*\mathrm{N} = \{f^*\mathrm{N}(x, y) : x, y \in \mathrm{A}_0\}$ biçiminde ve η_{f^*} morfizmi

$$\begin{array}{rccc} \eta_{f^*} : & f^*\mathrm{N} & \longrightarrow & \mathrm{A} \\ & (n, a) & \longmapsto & a \end{array}$$

biçiminde tanımlanırsa $f^*\mathcal{N} = \left(\eta_{f^*} : f^*\mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{A}\right)$ bir çaprazlanmış modül olur. Bu çaprazlanmış modüle $\mathcal{N}$ nin f üzerinden geri çekme çaprazlanmış modülü denir.

Bu bölümde son olarak R-cebiroid indirgenmiş çaprazlanmış modülleri incelenmiştir. Buna göre $f : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ bir R-cebiroid morfizmi, $\mathcal{N} = (\eta : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{A})$ bir R-cebiroid çaprazlanmış A-modülü, $F_P(f\eta) = (\theta : \mathrm{F}_P(f\eta) \longrightarrow \mathrm{B})$ N üzerine $f\eta$ tarafından belirlenmiş serbest ön-çaprazlanmış B-modülü ve $\mathrm{F}_P(f\eta)$ nin

$$\begin{array}{l} b_1 n_1 b_1' b_2 n_2 b_2' - (b_1 (f\eta n_1) b_1' b_2) n_2 b_2' \\ b_1 n_1 b_1' b_2 n_2 b_2' - b_1 n_1 (b_1' b_2 (f\eta n_2) b_2') \\ bnb' + bn_1 b' - b(n+n_1) b' \\ b({}^a n) b' - (b(fa)) nb' \\ b\left(n^{a'}\right) b' - bn((fa') b') \\ (r\cdot b) nb' - b(r\cdot n) b' \\ bn(r\cdot b') - b(r\cdot n) b' \end{array}$$

formatındaki tüm elemanların ürettiği çift yönlü ideali I olmak üzere η_{f_*} morfizmi

$$\begin{array}{rccl} \eta_{f_*} : & f_*\mathrm{N} = \frac{\mathrm{F}_P(f\eta)}{\mathrm{I}} & \longrightarrow & \mathrm{B} \\ & \overline{bnb'} & \longmapsto & b((f\eta) n) b' \end{array}$$

biçiminde tanımlanırsa $f_*\mathcal{N} = \left(\eta_{f_*} : f_*\mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{B}\right)$ bir çaprazlanmış modül olur. Bu çaprazlanmış modüle $\mathcal{N}$ den f ile indirgenmiş çaprazlanmış modül denir.

Ayrıca bu kısımda $f : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ bir R-cebiroid morfizmi ise $f_* : \mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{B}$ indirgenmiş çaprazlanmış modül funktorunun, $f^* : \mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{A}$ geri çekme çaprazlanmış modül funktorunun sol-eki olduğu da ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümde, A sabit bir R-cebiroid olmak üzere, iki R-cebiroid çaprazlanmış A modülünün eş-çarpımı, biri R-cebiroidlerin serbest çarpımından biri de R-cebiroidlerin yarı direkt çarpımından olmak üzere iki ayrı şekilde elde edilmiştir. İlk olarak R. Brown'ın [7] de grupların serbest çarpımı için kullandığı metot model alınıp, obje kümeleri aynı olan iki R cebiroidin serbest çarpımı indirgenmiş kelimeler kullanılarak tanımlanmıştır. Daha sonra R. Brown, P. J. Higgins ve R. Sivera'nın [10] da grup çaprazlanmış P-modüllerinin eş-çarpımı için yaptıkları çalışmalardan yola çıkılarak iki R-cebiroid çaprazlanmış A modülünün eş-çarpımı elde edilmiştir. Buna göre $\mathcal{M} = (\mu : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{A})$ ve $\mathcal{N} = (\eta : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{A})$ birer R-cebiroid çaprazlanmış A-modülü ve $\mathrm{M} * \mathrm{N}$, M ile N nin serbest çarpımı olmak üzere $\mu * \eta$ morfizmi

$$\begin{array}{rccl} \mu * \eta : \mathrm{M} * \mathrm{N} & \longrightarrow & \mathrm{A} \\ m & \longmapsto & (\mu * \eta) m = \mu m \\ n & \longmapsto & (\mu * \eta) n = \eta n \end{array}$$

biçiminde tanımlanırsa $\mathcal{M}*\mathcal{N}=(\mu*\eta : \mathrm{M}*\mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{A})$ bir ön-çaprazlanmış modül olup, PXAlg(R)/A kategorisinde $\mathcal{M}$ ile $\mathcal{N}$ ön-çaprazlanmış modüllerinin eş-çarpımıdır. Böylece $\mathcal{M}*\mathcal{N}$ ye $(-)^{\mathrm{cr}}$ funktoru uygulanarak XAlg(R)/A kategorisinde $\mathcal{M}$ ile $\mathcal{N}$ çaprazlanmış modüllerinin eş-çarpımı elde edilir.

İkinci olarak N. M. Shammu'nun [29] da R-cebir çaprazlanmış modüllerinin eş-çarpımını R-cebirlerin yarı direkt çarpımından elde ettiği metoda benzer şekilde, R-cebiroid çaprazlanmış modüllerinin eş-çarpımı R-cebiroidlerin yarı direkt çarpımından da elde edilmiştir. Buna göre $\mathcal{M}=(\mu : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{A})$ ve $\mathcal{N}=(\eta : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{A})$ birer R-cebiroid çaprazlanmış A-modülü ve $\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N}$, M ile N nin yarı direkt çarpımı olmak üzere $\mu \ltimes \eta$ morfizmi

$$\begin{array}{rccc} \mu \ltimes \eta : & \mathrm{M} \ltimes \mathrm{N} & \longrightarrow & \mathrm{A} \\ & (m,n) & \longmapsto & (\mu \ltimes \eta)(m,n) = \mu m + \eta n \end{array}$$

biçiminde tanımlanırsa $\mathcal{M} \ltimes \mathcal{N} = (\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{A})$ morfizmi bir ön-çaprazlanmış modül olup PXAlg(R)/A kategorisinde $\mathcal{M}$ ile $\mathcal{N}$ ön-çaprazlanmış modüllerinin eş-çarpımıdır. Böylece $(\mathcal{M} \ltimes \mathcal{N})^{\mathrm{cr}}$ çaprazlanmış modülü XAlg(R)/A kategorisinde $\mathcal{M}$ ile $\mathcal{N}$ çaprazlanmış modüllerinin eş-çarpımı olur.

Bu bölümde son olarak $(\mathcal{M}*\mathcal{N})^{\mathrm{cr}}$ ile $(\mathcal{M} \ltimes \mathcal{N})^{\mathrm{cr}}$ çaprazlanmış modüllerinin izomorfik olduğu gösterilmiştir.

0.2 Tezin Yapısı

Birinci bölümde, kategori, funktor, R-cebir, R-kategori, R-cebiroid, R-funktor, altcebiroid, çift yönlü ideal, bölüm cebiroidleri, cebiroidlerin birbirine etkisi ve cebiroid modüllerinin tanımları ve temel özellikleri verilmiştir. İkinci bölümde, R-cebiroid ön-çaprazlanmış ve çaprazlanmış modülleri, temel özellikleri, bir ön-çaprazlanmış modülün Peiffer ideali, Peiffer ideali ile bir ön-çaprazlanmış modülden çaprazlanmış modül elde edilişi ve $(-)^{\mathrm{cr}}$ funktoru incelenmiştir. Üçüncü bölümde R-cebiroid serbest modülleri, serbest ön-çaprazlanmış ve çaprazlanmış modülleri, geri çekme çaprazlanmış modülleri ve indirgenmiş çaprazlanmış modülleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde, iki R-cebiroidin serbest çarpımı ve iki R-cebiroid çaprazlanmış modülünün eş-çarpımı incelenmiştir.

BÖLÜM 1

Cebirden Cebiroide

1.1 Giriş

Bu bölümde, çalışmamızın temelini oluşturan cebiroid kavramını, temel özelliklerini ve cebirden farkını inceledik. Bu çalışmada cebir yerine cebiroidi tercih etmemizin sebebi cebiroidin cebire göre daha genel bir kavram oluşudur. Aşağıda da tanımlarını verdiğimiz üzere bir cebiroid çok objeli bir cebir olarak ya da tersine bir cebir tek objeli bir cebiroid olarak kabul edilebilir.

R değişmeli birimli bir halka olmak üzere bu bölümde incelediğimiz temel kavramlar sırasıyla kategoriler, funktorlar, R-cebir, R-kategori ve R-funktor, R-cebiroid, altcebiroid, çift yönlü ideal, bölüm cebiroidleri, cebiroidlerin birbirine etkisi ve cebiroid modülleri olup kategoriler ve funktorlar için R. Brown, [7] , ve Maclain'in, [19], R-kategori, R-cebiroid ve R-funktor için B.Mitchell, [20], [21], [22], S. M. Amgott, [2], ve G. H. Mosa'nın, [23], tanımlamalarını kullandık.

1.2 Kategoriler ve Funktorlar

Tanım 1.1 [7], Bir $\mathcal{C}$ kategorisi

1. '$\mathcal{C}$ nin objelerinin sınıfı' adı verilen ve $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}_0$ ile gösterilen bir sınıftan,

2. $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ deki her x, y için, elemanlarına x den y ye morfizmler adı verilen bir $\mathcal{C}(x,y)$ kümesinden,

3. $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ deki her x, y, z için kompozisyon adı verilen ve

$$\begin{array}{rccc} * : & \mathcal{C}(x,y) \times \mathcal{C}(y,z) & \longrightarrow & \mathcal{C}(x,z) \\ & (c, c') & \longmapsto & c' * c \end{array}$$

biçiminde $\mathcal{C}(x,y)$ nin her c morfizmi ile $\mathcal{C}(y,z)$ nin her c' morfizmi için $\mathcal{C}(x,z)$ de bir $c' * c$ morfizmi veren bir ikili işlemden oluşur ve bu verilenler aşağıdaki aksiyomları sağlar:

C1. (Asosyatiflik) Her $c \in \mathcal{C}(x,y)$, $c' \in \mathcal{C}(y,z)$ ve $c'' \in \mathcal{C}(z,t)$ için

$$c'' * \left(c' * c\right) = \left(c'' * c'\right) * c$$

dir,

C2. (Birimlerin varlığı) $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ deki her x için $\mathcal{C}(x,x)$ de bir $e_x = id_x = 1_x$ elemanı her $c \in \mathcal{C}(w,x)$ ve $c' \in \mathcal{C}(x,y)$ için

$$1_x * c = c \quad \text{ve} \quad c' * 1_x = c'$$

olacak biçimde mevcuttur.

Not 1.2 1. Her x,y objesi için $\mathcal{C}(x,y)$ ye $\mathcal{C}$ nin bir homseti denir ve $\mathrm{Hom}(x,y)$ ile de gösterilebilir.

2. Tüm homsetlerin bileşimi, yani $\mathcal{C}$ nin tüm morfizmlerinin kümesi $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}_1$ ile gösterilir.

3. Farklı (x,y) ikilileri için $\mathcal{C}(x,y)$ ler ayrıktır.

4. $c \in \mathcal{C}_1$ ise $c \in \mathcal{C}(x,y)$ olacak biçimde x,y objeleri mevcut demektir.

5. $c \in \mathcal{C}(x,y)$ ise bu durumda $c : x \longrightarrow y$ ya da $x \xrightarrow{c} y$ yazılabilir.

6. Eğer $c \in \mathcal{C}(x,y)$ ise x e c nin kaynağı denir ve $sc = x$ ile gösterilir. Aynı şekilde y ye de c nin hedefi denir ve $tc = y$ ile gösterilir. Böylece

$$s,t : \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$$

biçiminde iki morfizm elde edilmiş olur.

7. Her x objesi için $e_x = id_x = 1_x$ morfizmi biriciktir. Karışıklık olmadığı sürece e_x, id_x ve 1_x yerine e, id ya da 1 yazılabilir.

8. Bu çalışma boyunca çoğu yerde, herhangi bir anlam karmaşası yoksa, $c \in \mathcal{C}_1$ yerine $c \in \mathcal{C}$ yazılacaktır.

Kategorinin tanımı yönlendirilmiş graf yardımı ile de verilebilir:

Bir $\mathcal{C}$ yönlendirilmiş grafı bir $\mathcal{C}_0$ objeler kümesi, bir $\mathcal{C}_1$ morfizmler (oklar) kümesi ve $\mathcal{C}_1 \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} \mathcal{C}_0$ fonksiyonlarından oluşur. s ile t ye sırası ile kaynak ve hedef fonksiyonları denir ve $\mathcal{C}$ yönlendirilmiş grafı bu fonksiyonlarla birlikte $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, s, t)$ ile gösterilir. Ayrıca her $x, y \in \mathcal{C}_0$ için $\mathcal{C}(x,y) = \{c \in \mathcal{C}_1 : sc = x, tc = y\}$ kümesine $\mathcal{C}$ nin bir homseti denir. $c, c' \in \mathcal{C}_1$ için $tc = sc'$ ise c ile c' ne bileşkesi alınabilir morfizmler denir ve $\mathcal{C}$ nin bileşkesi alınabilir morfizmlerinin kümesi $\mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1$ ile gösterilir. Yani $\mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1 = \{(c, c') : tc = sc'\}$ dir.

$\mathcal{C} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, s, t)$ bir yönlendirilmiş graf olsun. $\mathcal{C}$ ye 'birim' adı verilen bir

$$\begin{array}{rccc} e: & \mathcal{C}_0 & \longrightarrow & \mathcal{C}_1 \\ & x & \longmapsto & ex = e_x \end{array}$$

fonksiyonunu ve kompozisyon adı verilen bir

$$\begin{array}{rccc} *: & \mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1 & \longrightarrow & \mathcal{C}_1 \\ & (c, c') & \longmapsto & c' * c \end{array}$$

fonksiyonu ekleyelim. Eğer bu fonksiyonlar her $x \in \mathcal{C}_0$, $c \in \mathcal{C}_1$ ve $(c, c'), (c', c'') \in \mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1$ için

1. $(se)x = (te)x = x$
2. $s(c' * c) = sc$, $t(c' * c) = tc'$
3. $e_{tc} * c = c * e_{sc} = c$
4. $c'' * (c' * c) = (c'' * c') * c$

koşullarını sağlıyorsa bu fonksiyonlarla birlikte $\mathcal{C}$ ye bir kategori denir ve $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, s, t, e, *)$ ile gösterilir.

Örnek 1.1 1. Set kategorisi objelerini tüm kümelerin ve morfizmlerini tüm fonksiyonların oluşturduğu kategoridir.

2. Gr kategorisi objelerini tüm grupların ve morfizmlerini tüm grup homomorfizmlerinin oluşturduğu kategoridir.

3. Ab kategorisi objelerini tüm abelyan grupların ve morfizmlerini abelyan gruplar arasındaki tüm grup homomorfizmlerinin oluşturduğu kategoridir.

4. Top kategorisi objelerini tüm topolojik uzayların ve morfizmlerini topolojik uzaylar arasındaki tüm sürekli dönüşümlerin oluşturduğu kategoridir.

Örnek 1.2 Bir grup tek başına tek objeli bir kategoridir. Grup elemanları bu kategorinin morfizmlerini oluşturur.

Tanım 1.3 Eğer $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ bir küme ise $\mathcal{C}$ ye bir küçük kategori denir.

Tanım 1.4 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ birer kategori olsun. Eğer

1. $\mathcal{D}$ nin her objesi $\mathcal{C}$ nin de bir objesi,

2. $\mathcal{D}$ nin her x,y objesi için $\mathcal{D}(x,y) \subseteq \mathcal{C}(x,y)$,

3. $\mathcal{D}$ deki morfizmlerin kompozisyonu $\mathcal{C}$ dekilerle aynı,

4. $\mathcal{D}$ nin her x objesi için $\mathcal{D}(x,x)$ in birimi $\mathcal{C}(x,x)$ inki ile aynı

ise $\mathcal{D}$ ye $\mathcal{C}$ nin bir alt kategorisi denir.

Eğer $\mathcal{D}$ nin her x,y objesi için $\mathcal{D}(x,y) = \mathcal{C}(x,y)$ ise $\mathcal{D}$ ye $\mathcal{C}$ nin bir dolu alt kategorisi denir.

Örnek 1.3 1. Gr kategorisi Set kategorisinin bir alt kategorisi, Ab kategorisi de Gr kategorisinin bir dolu alt kategorisidir.

2. $\mathcal{C}$ bir kategori ise herbir $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ için $\mathcal{C}(x,x)$, $\mathcal{C}$ nin bir dolu alt kategorisidir.

3. $\mathcal{C}$ bir kategori ise $\mathrm{Ob}(\mathcal{D}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ve $\mathrm{Mor}(\mathcal{D}) = \{1_x : x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})\}$ olacak biçimde elde edilen $\mathcal{D}$ kategorisi $\mathcal{C}$ nin bir alt kategorisidir.

Tanım 1.5 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ birer kategori olsun. Bir $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ dönüşümü eğer $\mathcal{C}$ nin her x objesine karşılık $\mathcal{D}$ de bir Tx objesi ve $\mathcal{C}$ nin her $c : x \longrightarrow y$ morfizmine karşılık $\mathcal{D}$ de bir $Tc : Tx \longrightarrow Ty$ morfizmi veriyor, ve aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyorsa T ye bir funktor denir:

F1 : $\mathcal{C}$ nin her x objesi için $T(1_x) = 1_{Tx}$ dir.

F2 : $\mathcal{C}$ nin $tc' = sc$ koşulunu sağlayan her c, c' morfizmi için

$$T\left(c * c'\right) = Tc * Tc'$$

dir.

Sonuç 1.6 Her T funktoru,

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Ob}T : & \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) & \longrightarrow & \mathrm{Ob}(\mathcal{D}) \\ & x & \longmapsto & Tx \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Mor}T : & \mathrm{Mor}\mathcal{C} & \longrightarrow & \mathrm{Mor}\mathcal{D} \\ & c : x \longrightarrow y & \longmapsto & Tc : Tx \longrightarrow Ty \end{array}$$

biçiminde birer dönüşüm olmak üzere $T = (\mathrm{Ob}T, \mathrm{Mor}T)$ ikilisinden oluşur.

Örnek 1.4 1. $\mathcal{C}$ bir kategori olmak üzere $\mathcal{C}$ den $\mathcal{C}$ ye

$$\begin{array}{rccc} I_{\mathcal{C}}: & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ & x & \longmapsto & x \\ & c: x \longrightarrow y & \longmapsto & c: x \longrightarrow y \end{array}$$

dönüşümüne **birim** funktor denir.

2. $\mathcal{C}$ bir kategori ve D, $\mathcal{C}$ nin bir alt kategorisi ise D den $\mathcal{C}$ ye

$$\begin{array}{rccc} i: & \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ & x & \longmapsto & x \\ & c: x \longrightarrow y & \longmapsto & c: x \longrightarrow y \end{array}$$

dönüşümüne **gömme** funktoru denir.

3.Bir kategorinin objeleri üzerindeki cebirsel yapıyı ihmal eden funktora **forgetfull** funktoru denir:

$$\begin{array}{rccc} U: & \mathrm{Gr} & \longrightarrow & \mathrm{Set} \\ & (A,+) & \longmapsto & A \\ & f:(A,+) \longrightarrow (B,+') & \longmapsto & Uf: A \longrightarrow B \\ & & & a \longmapsto fa \end{array}$$

dönüşümü gruplar için forgetfull funktorudur.

4. A bir grup ve A_{Ab} A nın, her $a,b \in A$ için $a+b-a-b$ biçimindeki elemanları tarafından üretilen alt grubu ise A/A_{Ab} değişmeli olup

$$\begin{array}{rccc} F_{\mathrm{Ab}}: & \mathrm{Gr} & \longrightarrow & \mathrm{Ab} \\ & A & \longmapsto & A/A_{\mathrm{Ab}} \\ & f: A \longrightarrow B & \longmapsto & F_{\mathrm{Ab}} f: A/A_{\mathrm{Ab}} \longrightarrow B/B_{\mathrm{Ab}} \\ & & & a+A_{\mathrm{Ab}} \longmapsto fa+B_{\mathrm{Ab}} \end{array}$$

dönüşümüne **abelyenizasyon** funktoru denir.

Tanım 1.7 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategory ve $F,G: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ iki funktor olsun.

$$\alpha = \{\alpha_x \in \mathrm{Mor}\mathcal{D} : \alpha_x : Fx \longrightarrow Gx,\ x \in \mathcal{C}_0\}$$

dönüşümler ailesi her $x,y \in \mathcal{C}_0$ ve her $f: x \longrightarrow y$ morfizmi için

$$Gf * \alpha_x = \alpha_y * Ff$$

koşulunu gerçekliyorsa α ya F den G ye bir **doğal dönüşüm** denir ve $\alpha: F \Rightarrow G$ biçiminde gösterilir. Eğer her $x \in \mathcal{C}$ için α_x bir izomorfizm ise α ya F ile G arasında bir **doğal izomorfizm** ve F ile G ye de doğal izomorfik denir. F ile G doğal izomorfik ise bu durum $F \cong G$ biçiminde gösterilir.

1.3 *R*-cebir

Tanım 1.8 *R* değişmeli birimli bir halka olmak üzere, üzerinde *R*-bilineer bir ikili işlem tanımlı bir *R*-modüle bir *R*-cebir denir.

Buna göre, eğer A bir *R*-cebir ise A da

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{A}\times\mathrm{A} & \longrightarrow & \mathrm{A} \\ (a,a') & \longmapsto & aa' \end{array}$$

biçiminde, her $a,a',a''\in \mathrm{A}$ ve $r\in R$ için

$$\begin{array}{lrcl} 1. & a(a'+a'') & = & aa'+aa'' \\ 2. & (a'+a'')a & = & a'a+a''a \\ 3. & r\cdot(aa') & = & (r\cdot a)a'=a(r\cdot a') \end{array}$$

koşullarını gerçekleyen bir ikili işlem mevcuttur.

Sonuç 1.9 Her $a\in \mathrm{A}$ için

$$a0=0a=0$$

dir.

Tanım 1.10 A bir *R*-cebir ise A da tanımlı *R*-bilineer ikili işleme A-çarpımı denir. Eğer A-çarpımı asosyatif ise A ya asosyatif cebir, A-çarpımı değişmeli ise A ya değişmeli cebir, A-çarpımı birimli ise A ya birimli cebir denir.

Örnek 1.5 1. *R* nin üzerinde tanımlı çarpma işlemi kendisi üzerine bir etkisidir. Bu etki ile *R* bir *R*-cebirdir.

2. $\mathbb{Q}$ bir $\mathbb{Q}$-cebirdir.

3. $\mathbb{Q}$ ile $\mathbb{Z}$ birer $\mathbb{Z}$-cebirdir.

3. Her $n\in\mathbb{Z}^+$ için $\mathbb{Z}/n$ ile $n\mathbb{Z}$ bir $\mathbb{Z}$-cebirdir.

4. $\mathbb{Q}[x]$ bir $\mathbb{Q}$-cebirdir.

5. $\mathbb{Q}[x]$ ile $\mathbb{Z}[x]$ birer $\mathbb{Z}$-cebirdir.

Sonuç 1.11 1. Bir asosyatif *R*-cebir bir halka oluşturur.

2. A bir halka olmak üzere bir $f:R\longrightarrow \mathrm{A}$ halka morfizmi mevcutsa A bir asosyatif *R*-cebirdir.

Tanım 1.12 İki R-cebir arasındaki çarpım koruyan bir R-modül morfizmine R-cebir morfizmi denir.

Buna göre $f : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ bir R-cebir morfizmi ise her $a, a', a'' \in \mathrm{A}$ ve $r \in R$ için

$$\begin{array}{rrcl} 1. & f(a+a') & = & fa+fa' \\ 2. & f(aa') & = & (fa)(fa') \\ 3. & f(r\cdot a) & = & r\cdot(fa) \end{array}$$

koşullarını sağlar. Tüm R-cebirler bu morfizm ile Al(R) kategorisini oluşturur.

Not 1.13 1. Bu çalışma boyunca, belirtilmese bile, R değişmeli birimli bir halka olarak alınacaktır.

2. Bu çalışma boyunca R etkisi olarak R nin sol etkisi alınacaktır.

1.4 R-kategori ve R-cebiroid

Bu kısımda R-kategori ve R-cebiroidin tanımı verilecektir. Burada yapacağımız R-kategori ve R-cebiroid tanımlarında işlem kolaylığı için c morfizmi ile c' morfizminin, varsa, kompozisyonu $c' * c = cc'$ biçiminde gösterilecek ve bu çalışmanın bundan sonraki bölümlerinde de bu şekilde kullanılacaktır.

Tanım 1.14 R değişmeli birimli bir halka olmak üzere, herbir homseti bir R-modül yapısına sahip olan ve kompozisyonu R-bilineer olan kategoriye bir R-kategori denir.

Buna göre A kategorisi bir R-kategori ise:

(i) Her $x, y \in \mathrm{A}_0$ için $\mathrm{A}(x,y)$ bir R-modüldür, yani $\mathrm{A}(x,y)$ bir değişmeli grup olup R nin $\mathrm{A}(x,y)$ üzerine

$$\begin{array}{ccc} R\times \mathrm{A}(x,y) & \longrightarrow & \mathrm{A}(x,y) \\ (r,a) & \longmapsto & r\cdot a \end{array}$$

biçiminde, her $a, a_1, a_2 \in \mathrm{A}(x,y)$ ve $r, r_1, r_2 \in R$ için

$$\begin{array}{rrcl} 1. & r\cdot(a_1+a_2) & = & r\cdot a_1 + r\cdot a_2 \\ 2. & (r_1+r_2)\cdot a & = & r_1\cdot a + r_2\cdot a \\ 3. & (r_1r_2)\cdot a & = & r_1\cdot(r_2\cdot a) \\ 4. & 1_R\cdot a & = & a \end{array}$$

koşullarını gerçekleyen bir etkisi vardır.

(ii) A nın kompozisyonu her $x,y,z \in \mathrm{A}_0$, $a,a_1,a_2 \in \mathrm{A}(x,y)$, $a',a'_1,a'_2 \in \mathrm{A}(y,z)$ ve $r \in R$ için

$$\begin{array}{lrcl} 1. & (a_1+a_2)\,a' & = & a_1a'+a_2a' \\ 2. & a\,(a'_1+a'_2) & = & aa'_1+aa'_2 \\ 3. & r\cdot(aa') & = & (r\cdot a)\,a' = a\,(r\cdot a') \end{array}$$

koşullarını gerçekler.

Sonuç 1.15 Her $x,y,z \in \mathrm{A}_0$, $a \in \mathrm{A}(x,y)$ ve $a' \in \mathrm{A}(y,z)$ için

$$a0_{\mathrm{A}(y,z)} = 0_{\mathrm{A}(x,y)}a' = 0_{\mathrm{A}(x,z)}$$

dir.

Tanım 1.16 Bir küçük R-kategoriye bir R-cebiroid denir.

Not 1.17 Eğer bir R-cebiroidin birim morfizmi yoksa birimsiz bir R-cebiroid elde edilir. Bu çalışmada kullanacağımız R-cebiroidler birimsiz olabilecektir. Eğer bir R-cebiroidin özellikle birimli ya da birimsiz olması gerekirse bu durum belirtilecektir.

Sonuç 1.18 Tek objeli bir R-cebiroid asosyatif bir R-cebirdir.

1.5 R-funktor

Tanım 1.19 İki R-kategori arasında tanımlı R-lineer bir funktora R-funktor denir.

Buna göre A ve B birer R-kategori ve $T : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ bir R-funktor ise her $x,y \in \mathrm{A}_0$, $a,a_1,a_2 \in \mathrm{A}(x,y)$ ve $r \in R$ için

$$\begin{array}{lrcl} 1. & T\,(a_1+a_2) & = & Ta_1+Ta_2 \\ 2. & T\,(r\cdot a) & = & r\cdot Ta \end{array}$$

dir.

Bu funktor ile tüm R-kategoriler $\mathrm{Cat}(R)$ kategorisini oluşturur.

Sonuç 1.20 $T : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ bir R-funktor ise her $x,y \in \mathrm{A}_0$ için $T\left(0_{\mathrm{A}(x,y)}\right) = 0_{\mathrm{B}(x,y)}$ dir.

Tanım 1.21 İki R-cebiroid arasındaki R-funktora R-cebiroid morfizmi denir.

Tüm R-cebiroidler bu morfizm ile Alg(R) kategorisini oluşturur. Dikkat edilirse Al(R) kategorisi Alg(R) kategorisinin bir dolu alt kategorisidir.

Eğer A ile B iki R-cebiroid ise A dan B ye tanımlı tüm R-cebiroid morfizmlerinin kümesi $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{A},\mathrm{B})$ ile gösterilir.

Örnek 1.6 [23], A ile B birer R-cebir ve her $f,g \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{A},\mathrm{B})$ için $\underline{\mathrm{Hom}}(f,g)$, f den g ye tanımlı tüm doğal dönüşümlerin kümesi olsun. Kategoriksel olarak A tek objeli bir R-cebiroiddir. Bu obje $\bullet$ olsun. Bu durumda doğal dönüşümün tanımı gereği her $\alpha \in \underline{\mathrm{Hom}}(f,g)$ için $\alpha(\bullet) = \alpha_\bullet \in \mathrm{B}$ olup, her $a \in \mathrm{A}$ için

$$\alpha_\bullet(ga) = (ga) * \alpha_\bullet = \alpha_\bullet * (fa) = (fa)\alpha_\bullet$$

dir.

Buna göre her $\alpha, \alpha' \in \underline{\mathrm{Hom}}(f,g)$ ve $a \in \mathrm{A}$ için

$$\begin{aligned}(\alpha_\bullet + \alpha'_\bullet)(ga) &= \alpha_\bullet(ga) + \alpha'_\bullet(ga)\\ &= (fa)\alpha_\bullet + (fa)\alpha'_\bullet\\ &= (fa)(\alpha_\bullet + \alpha'_\bullet)\end{aligned}$$

olduğundan, $\underline{\mathrm{Hom}}(f,g)$ de $(\alpha+\alpha')_\bullet = \alpha_\bullet + \alpha'_\bullet$ biçimde bir toplama işlemi tanımlanabilir. Ayrıca her $\alpha \in \underline{\mathrm{Hom}}(f,g)$ ve $a \in \mathrm{A}$ için

$$\begin{aligned}0_\mathrm{B} &= (\alpha_\bullet + (-\alpha_\bullet))(ga)\\ &= \alpha_\bullet(ga) + (-\alpha_\bullet)(ga)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}0_\mathrm{B} &= (fa)(\alpha_\bullet + (-\alpha_\bullet))\\ &= (fa)\alpha_\bullet + (fa)(-\alpha_\bullet)\end{aligned}$$

olup $\alpha_\bullet(ga) + (-\alpha_\bullet)(ga) = (fa)\alpha_\bullet + (fa)(-\alpha_\bullet)$ dir. Bu eşitlikte $\alpha_\bullet(ga) = (fa)\alpha_\bullet$ olduğundan $(-\alpha_\bullet)(ga) = (fa)(-\alpha_\bullet)$ elde edilir. Öyle ise her $\alpha \in \underline{\mathrm{Hom}}(f,g)$ için $(-\alpha)_\bullet = -\alpha_\bullet$ olacak biçimde tanımlanan $-\alpha \in \underline{\mathrm{Hom}}(f,g)$ dönüşümü α nın toplama işlemine göre tersidir. Açıkça $\underline{\mathrm{Hom}}(f,g)$ de toplama işleminin birleşme ve değişme özellikleri de mevcut olup, $0_\bullet = 0_\mathrm{B}$ eşitliğini sağlayan 0 dönüşümüyle $\underline{\mathrm{Hom}}(f,g)$ toplama işlemine göre bir değişmeli grup olur.

Diğer taraftan her $\alpha \in \underline{\mathrm{Hom}}(f,g)$ ve $r \in R$ için $r \cdot \alpha$ dönüşümü $(r\cdot\alpha)_\bullet = r \cdot \alpha_\bullet$ biçiminde tanımlanırsa, her $a \in \mathrm{A}$ için

$$\begin{aligned}(r\cdot\alpha)_\bullet(ga) &= (r\cdot\alpha_\bullet)(ga)\\ &= r\cdot(\alpha_\bullet(ga))\\ &= r\cdot((fa)\alpha_\bullet)\\ &= (fa)(r\cdot\alpha_\bullet)\\ &= (fa)(r\cdot\alpha)_\bullet\end{aligned}$$

ve böylece $r\cdot\alpha \in \underline{\mathrm{Hom}}(f,g)$ olup, $\underline{\mathrm{Hom}}(f,g)$ açıkça bir R-modül olur.

Son olarak, her $f,g,h \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{A},\mathrm{B})$, $\alpha \in \underline{\mathrm{Hom}}(f,g)$ ve $\alpha' \in \underline{\mathrm{Hom}}(g,h)$ için $\alpha\alpha'$ dönüşümü $(\alpha\alpha')_\bullet = \alpha_\bullet\alpha'_\bullet$ biçiminde tanımlanırsa her $a \in \mathrm{A}$ için

$$\begin{aligned}(\alpha\alpha')_\bullet(ha) &= (\alpha_\bullet\alpha'_\bullet)(ha)\\ &= \alpha_\bullet(\alpha'_\bullet(ha))\\ &= \alpha_\bullet((ga)\alpha'_\bullet)\\ &= (\alpha_\bullet(ga))\alpha'_\bullet\\ &= ((fa)\alpha_\bullet)\alpha'_\bullet\\ &= (fa)(\alpha_\bullet\alpha'_\bullet)\\ &= (fa)(\alpha\alpha')_\bullet\end{aligned}$$

olup $\alpha\alpha' \in \underline{\mathrm{Hom}}(f,h)$ dir. Böylece, tanımlanan bu kompozisyon açıkça R-bilineer olduğundan $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \{\underline{\mathrm{Hom}}(f,g) : f,g \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{A},\mathrm{B})\}$ biçiminde tanımlanan R-modüller ailesi bir R-cebiroid olur.

Sonuç 1.22 A ile B, R-cebiroid iken de R-cebir iken de $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{A},\mathrm{B})$ bir R-cebiroid olur. Bu tezde R-cebiroidlerle çalışmamızın bir sebebi de budur.

1.6 Altcebiroid, çift yönlü ideal ve bölüm cebiroidleri

Tanım 1.23 A ve B birer R-cebiroid olsun. Eğer

1. B nin her objesi A nın da bir objesi,

2. B nin her x,y objesi için $\mathrm{B}(x,y)$, $\mathrm{A}(x,y)$ nin bir R-altmodülü,

3. B deki morfizmlerin kompozisyonu A dakilerle aynı,

4. A birimli iken B de birimli olup, B nin her x objesi için $\mathrm{B}(x,x)$ in birimi $\mathrm{A}(x,x)$ inki ile aynı, ise B ye A nın bir R-altcebiroidi denir.

Örnek 1.7 A bir R-cebiroid ise $\{\mathrm{A}(x,x) : x \in \mathrm{A}_0\}$ ve herbir $x \in \mathrm{A}_0$ için $\mathrm{A}(x,x)$ A nın bir R-altcebiroididir.

Tanım 1.24 A bir R-cebir olsun. A nın çarpma işlemini koruyan ve, varsa, çarpımsal birimini de içeren her R-altmodülüne A nın bir R-altcebiri denir.

Örnek 1.8 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ nun bir $\mathbb{Z}$-altcebiridir.

Tanım 1.25 [23], A bir R-cebiroid ve $\mathrm{I} = \{\mathrm{I}(x,y) \subseteq \mathrm{A}(x,y) : x,y \in \mathrm{A}_0\}$, A nın bir R-altmodüller ailesi olsun. Eğer her $w,x,y,z \in \mathrm{A}_0$, $a' \in \mathrm{A}(w,x)$, $a'' \in \mathrm{A}(y,z)$ ve $a \in \mathrm{I}(x,y)$ için $a'a \in \mathrm{I}(w,y)$ ve $aa'' \in \mathrm{I}(x,z)$ ise I ya A nın bir çift yönlü ideali denir.

Örnek 1.9 1. A bir R-cebiroid ise $0_{\mathrm{A}}=\left\{0_{\mathrm{A}(x,y)}:\ x,y\in \mathrm{A}_0\right\}$, A nın bir çift yönlü idealidir.

2. Her $n\in\mathbb{Z}^+$ için $n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ nin bir çift yönlü idealidir.

Not 1.26 A bir R-cebiroid ve I, A nın bir çift yönlü ideali olsun:

1. I bir R-cebiroiddir.

2. A birimsiz ise I, A nın bir R-altcebiroididir.

3. A birimli ve I, A nın tüm birimlerini içeriyorsa $\mathrm{I}=\mathrm{A}$ olur.

Önerme 1.27 [23], A ve B aynı obje kümesine sahip iki R-cebiroid ve $\mathrm{Ob}(f)=I_{\mathrm{A}_0}$ olmak üzere $f:\mathrm{A}\longrightarrow \mathrm{B}$ bir R-cebiroid morfizmi ise $\text{Çek}f=\left\{a\in \mathrm{A}:fa=0_{\mathrm{B}(sa,ta)}\right\}$, A nın bir çift yönlü idealidir.

İspat: Her $w,x,y,z\in \mathrm{A}_0$, $a'\in \mathrm{A}(w,x)$, $a''\in \mathrm{A}(y,z)$ ve $a\in \text{Çek}f(x,y)$ için

$$f\left(a'a\right)=\left(fa'\right)(fa)=\left(fa'\right)0_{\mathrm{B}(x,y)}=0_{\mathrm{B}(w,y)}$$

ve

$$f\left(aa''\right)=(fa)\left(fa''\right)=0_{\mathrm{B}(x,y)}\left(fa''\right)=0_{\mathrm{B}(x,z)}$$

olup $a'a\in \text{Çek}f(w,y)$ ve $aa''\in \text{Çek}f(x,z)$ dir. Öyle ise Çek$f$, A nın bir çift yönlü idealidir.

Tanım 1.28 [23], A bir R-cebiroid ve I, A nın çift yönlü bir ideali olsun. Her $x,y\in \mathrm{A}_0$ için $\mathrm{A}(x,y)/\mathrm{I}(x,y)$ bölüm R-modülleri arasında her $x,y,z\in \mathrm{A}_0$ için

$$\begin{array}{rcl}(\mathrm{A}(x,y)/\mathrm{I}(x,y))\times \mathrm{A}(y,z)/\mathrm{I}(y,z) & \longrightarrow & (\mathrm{A}(x,z)/\mathrm{I}(x,z))\\ ((a+\mathrm{I}(x,y)),(a'+\mathrm{I}(y,z))) & \longmapsto & (a+\mathrm{I}(x,y))(a'+\mathrm{I}(y,z))=aa'+\mathrm{I}(x,z)\end{array}$$

biçiminde tanımlanan kompozisyon asosyatif ve R-bilineerdir. Böylece bu kompozisyon ile

$$\mathrm{A}/\mathrm{I}=\{\mathrm{A}(x,y)/\mathrm{I}(x,y):x,y\in \mathrm{A}_0\}$$

ailesi bir R-cebiroiddir. Bu R-cebiroide bir bölüm R-cebiroidi denir.

□

1.7 Cebiroidlerin birbirine etkisi ve cebiroid modülleri

Tanım 1.29 [23], A ve M aynı A_0 obje kümesine sahip iki R-cebiroid olsun. Her $x,y,z \in A_0$ için

$$\begin{array}{ccc} M(x,y) \times A(y,z) & \longrightarrow & M(x,z) \\ (m,a) & \longmapsto & m^a \end{array}$$

biçiminde tanımlı ve her $w,x,y,z,t \in A_0$, $m,m_1,m_2 \in M(x,y)$, $m' \in M(w,x)$, $a,a_1,a_2 \in A(y,z)$, $a' \in A(z,t)$ için

1. $m^{a_1+a_2} = m^{a_1} + m^{a_2}$
2. $(m_1+m_2)^a = m_1^a + m_2^a$
3. $r \cdot m^a = (r \cdot m)^a = m^{r \cdot a}$
4. $(m^a)^{a'} = m^{aa'}$
5. $(m'm)^a = m'(m^a)$

aksiyomları ile eğer A birimli ise

6. $m^{1_y} = m$

aksiyomunu da sağlayan dönüşümler ailesine A nın M üzerine bir sağ etkisi denir.

Benzer şekilde her $w,x,y \in A_0$ için

$$\begin{array}{ccc} A(w,x) \times M(x,y) & \longrightarrow & M(w,y) \\ (a,m) & \longmapsto & {}^a m \end{array}$$

biçiminde tanımlı ve her $v,w,x,y,z \in A_0$, $m,m_1,m_2 \in M(x,y)$, $m' \in M(y,z)$, $a,a_1,a_2 \in A(w,x)$, $a' \in A(v,w)$ için

1. ${}^{a_1+a_2}m = {}^{a_1}m + {}^{a_2}m$
2. ${}^a(m_1+m_2) = {}^a m_1 + {}^a m_2$
3. $r \cdot {}^a m = {}^a(r \cdot m) = {}^{r \cdot a}m$
4. ${}^{a'}({}^a m) = {}^{a'a}m$
5. ${}^a(mm') = ({}^a m)\, m'$

aksiyomları ile eğer A birimli ise

6. ${}^{1_x}m = m$

aksiyomunu da sağlayan dönüşümler ailesine A nın M üzerine bir sol etkisi denir.

Eğer A nın M üzerine hem sağ hem sol etkisi mevcut iken her $w,x,y,z \in A_0$, $m \in M(x,y)$, $a \in A(w,x)$ ve $a' \in A(y,z)$ için

$$({}^a m)^{a'} = {}^a\left(m^{a'}\right)$$

aksiyomu da sağlanıyorsa A nın M üzerine bir asosyatif etkisi vardır denir.

A ve M iki R-cebir ise A nın M üzerine asosyatif etkisi aynı şekilde tanımlanabilir.

Not 1.30 Bu çalışma boyunca bir R-cebiroidin ya da R-cebirin kendi üzerine etkisi kendi kompozisyonu olarak alınacaktır.

Tanım 1.31 A ve M birer R-cebiroid olsun. Eğer A nın M üzerine bir asosyatif etkisi varsa M ye bir A-modül denir. Ayrıca eğer M bir A-modül ise bu durum kısaca (M,A) ile gösterilir ve (M,A) ikilisine bir R-cebiroid modülü denir.

Tanım 1.32 (M,A) ve (N,B) birer R-cebiroid modülü olsun. $f:\mathrm{M}\longrightarrow\mathrm{N}$ ile $g:\mathrm{A}\longrightarrow\mathrm{B}$ dönüşümleri A_0 üzerinde eşit iki R-cebiroid morfizmi olmak üzere, her $w,x,y,z\in\mathrm{A}_0$, $m\in\mathrm{M}(x,y)$, $a\in\mathrm{A}(w,x)$ ve $a'\in\mathrm{A}(y,z)$ için

$$f({}^{a}m)={}^{ga}(fm)\quad\text{ve}\quad f\left(m^{a'}\right)=(fm)^{ga'}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa $(f,g):(\mathrm{M},\mathrm{A})\longrightarrow(\mathrm{N},\mathrm{B})$ ikilisine bir R-cebiroid modül morfizmi denir.

Böylece tüm R-cebiroid modüllerinin objelerini ve tüm R-cebiroid modül morfizmlerinin morfizmlerini oluşturduğu R-cebiroid modül kategorisi elde edilir. Bu kategori $\mathrm{ModAlg}(R)$ ile gösterilir. Ayrıca A üzerinde birim dönüşüm ile tüm R-cebiroid A-modülleri $\mathrm{ModAlg}(R)$ nin bir alt kategorisini oluşturur. Bu kategori de $\mathrm{ModAlg}(R)/\mathrm{A}$ ile gösterilir.

Aynı şekilde tüm R-cebir modülleri ile tüm R-cebir modül morfizmleri $\mathrm{ModAl}(R)$ kategorisini, tüm R-cebir A-modülleri ve morfizmleri de $\mathrm{ModAl}(R)$ nin bir alt kategorisi olan $\mathrm{ModAl}(R)/\mathrm{A}$ kategorisini oluşturur. Ayrıca $\mathrm{ModAl}(R)$, $\mathrm{ModAlg}(R)$ nin, $\mathrm{ModAl}(R)/\mathrm{A}$ da $\mathrm{ModAlg}(R)/\mathrm{A}$ nın bir dolu alt kategorisidir.

BÖLÜM 2

R-Cebiroid Ön-Çaprazlanmış ve Çaprazlanmış Modülleri

2.1 Giriş

Bu bölümde ilk olarak R-cebiroid ön-çaprazlanmış ve çaprazlanmış modüllerini inceledik. Bu incelemede ön-çaprazlanmış ve çaprazlanmış modül tanımları için G. H. Mosa'nın [23] deki çalışmalarından faydalandık. Ön-çaprazlanmış ve çaprazlanmış modüllerin diğer özellikleri için yaptığımız incelemeleri ise T. Porter ve Z. Arvasi'nin [25] ve [3] de cebir çaprazlanmış modülleri için yaptıkları çalışmaların paralelinde gerçekleştirdik. Sonraki kısımda R. Brown, P. J. Higgins ve R. Sivera'ın [10] da (Nonabelian Algebraic Topology, 72-76) grup ön-çaprazlanmış P-modüllerinin Peiffer altgrubunu elde etmek için kullandıkları yönteme benzer bir yöntem ile bir R-cebiroid ön çaprazlanmış modülünün Peiffer idealini elde ettik. Ardından Peiffer ideali ile bir R-cebiroid ön-çaprazlanmış modülünden R-cebiroid çaprazlanmış modülünün elde edilişini ve son olarak da $(-)^{\mathrm{cr}}$ funktoru ile özelliklerini inceledik.

2.2 Ön-çaprazlanmış ve çaprazlanmış modüller

Tanım 2.1 A ve M aynı A_0 obje kümesine sahip iki R-cebiroid ve A nın M üzerine bir asosyatif etkisi mevcut olsun. Bir $\mu : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{A}$ R-cebiroid morfizmi her $w,x,y,z \in \mathrm{A}_0$, $m \in \mathrm{M}(x,y)$, $m' \in \mathrm{M}(y,z)$, $a \in \mathrm{A}(w,x)$ ve $a' \in \mathrm{A}(y,z)$ için

$$\mathrm{CM1)} \quad \mu({}^{a}m) \;=\; a(\mu m) \quad \text{ve} \quad \mu\left(m^{a'}\right) \;=\; (\mu m)\, a'$$

eşitliklerini gerçekliyorsa, yani A etkisini koruyorsa, $\mu : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{A}$ ye bir R-cebiroid ön-çaprazlanmış modülü; ve ek olarak

$$\mathrm{CM2)} \quad m^{\mu m'} \;=\; mm' \;=\; {}^{\mu m}m'$$

eşitliklerini gerçekliyorsa $\mu : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{A}$ ye bir R-cebiroid çaprazlanmış modülü denir.

Demek ki, her çaprazlanmış modül CM2 koşulunu sağlayan bir ön-çaprazlanmış modüldür.

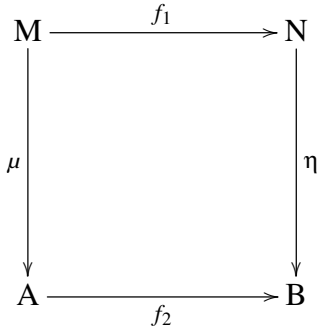
Tanım 2.2 $\mathcal{M} = (\mu : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{A})$ ve $\mathcal{N} = (\eta : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{B})$ iki R-cebiroid (ön-)çaprazlanmış modül ve $f_1 : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N}$ ile $f_2 : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ birer R-cebiroid morfizmi olsun. f_1 ile f_2 morfizmleri eğer her

$w,x,y,z \in \mathrm{A}_0$, $m \in \mathrm{M}(x,y)$, $a \in \mathrm{A}(w,x)$ ve $a' \in \mathrm{A}(y,z)$ için

$$\begin{array}{lrcl} 1. & f_1({}^a m) & = & {}^{f_2 a}(f_1 m) \quad \text{ve} \quad f_1\left(m^{a'}\right) = (f_1 m)^{f_2 a'} \\ 2. & (\eta f_1)\, m & = & (f_2 \mu)\, m \end{array}$$

eşitliklerini sağlıyorsa $f = (f_1, f_2) : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ morfizmine bir (ön-)çaprazlanmış modül morfizmi denir.

Bu tanımdaki 2. eşitliğin anlamı



diyagramının değişmeli olmasıdır.

Böylece tüm R-cebiroid ön-çaprazlanmış modülleri ve morfizmleri bir kategori oluşturur ve bu kategori PXAlg(R) ile gösterilir. Ayrıca A üzerindeki dönüşüm birim dönüşüm alınarak elde edilen tüm ön-çaprazlanmış A-modülleri PXAlg(R) nin bir alt kategorisi olan PXAlg(R)/A kategorisini oluşturur. Aynı morfizm ile tüm R-cebiroid çaprazlanmış modülleri XAlg(R) kategorisini, tüm R-cebiroid çaprazlanmış A-modülleri de XAlg(R) nin bir alt kategorisi olan XAlg(R)/A kategorisini oluşturur. Bu kategorilerden XAlg(R) kategorisi PXAlg(R) nin, XAlg(R)/A kategorisi de PXAlg(R)/A nın bir dolu alt kategorisidir.

Örnek 2.1 A bir R-cebiroid ve I, A nın çift yönlü bir ideali olsun. A nın I üzerine etkisi her $w,x,y,z \in \mathrm{A}_0$, $a \in \mathrm{A}(w,x)$, $a' \in \mathrm{A}(y,z)$, $b \in \mathrm{I}(x,y)$ için

$${}^a b = ab \quad \text{ve} \quad b^{a'} = ba'$$

biçiminde tanımlanırsa

$$i : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{A}$$

gömme morfizmi bir çaprazlanmış modül olur.

Önerme 2.3 [23], $\mathcal{M} = (\mu : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{A})$ bir R-cebiroid çaprazlanmış modülü ise Gör$\mu = \{\mu m : m \in \mathrm{M}\}$, A nın bir çift yönlü idealidir.

İspat: Her $w,x,y,z \in \mathrm{A}$ ve $a \in \text{Gör}\mu(x,y)$ için $\mu m = a$ olacak biçimde en az bir $m \in \mathrm{M}(x,y)$ vardır. Böylece her $a' \in \mathrm{A}(w,x)$ ve $a'' \in \mathrm{A}(y,z)$ için

$$a'a = a'(\mu m) = \mu\left({}^{a'}m\right)$$

ve

$$aa'' = (\mu m)a'' = \mu\left(m^{a''}\right)$$

olup $a'a \in \mathrm{A}(w,y)$ ve $aa'' \in \mathrm{A}(x,z)$ dir. □

Sonuç 2.4 $\mathcal{M} = (\mu : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{A})$ bir *R*-cebiroid çaprazlanmış modülü ise Çekμ, M nin bir çift yönlü idealidir. (Önerme1.27 den)

Önerme 2.5 $\mathcal{M} = (\mu : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{A})$ ve $\mathcal{N} = (\eta : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{A})$ iki *R*-cebiroid çaprazlanmış A-modülü ise N nin M üzerine η den indirgenen bir asosyatif etkisi vardır.

İspat: Açıkça, her $w,x,y,z \in \mathrm{A}_0$ için

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{M}(x,y)\times\mathrm{N}(y,z) & \longrightarrow & \mathrm{M}(x,z) \\ (m,n) & \longmapsto & m^n = m^{\eta n} \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{N}(w,x)\times\mathrm{M}(x,y) & \longrightarrow & \mathrm{M}(w,y) \\ (n,m) & \longmapsto & {}^n m = {}^{\eta n}m \end{array}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonlar N nin M üzerine bir etkisini oluşturur. □

Önerme 2.6 $\mathcal{M} = (\mu : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{A})$ ve $\mathcal{N} = (\eta : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{A})$ iki *R*-cebiroid çaprazlanmış A-modülü olsun. Eğer bir $(f, I_\mathrm{A}) : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ çaprazlanmış modül morfizmi mevcut ise $\mathcal{F} = (f : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N})$ bir *R*-cebiroid çaprazlanmış modülüdür.

İspat: $tn = sm, tm = sn' = sm'$ koşulunu gerçekleyen her $n,n' \in \mathrm{N}$ ve $m,m' \in \mathrm{M}$ için

CM1) $\quad f({}^n m) = f({}^{\eta n}m) = {}^{\eta n}(fm) = n(fm)$

$$f\left(m^{n'}\right) = f\left(m^{\eta n'}\right) = (fm)^{\eta n'} = (fm)n'$$

ve

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{M} & \xrightarrow{\ f\ } & \mathrm{N} \\ {\scriptstyle\mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\eta} \\ \mathrm{A} & \xrightarrow[I_\mathrm{A}]{} & \mathrm{A} \end{array}$$

diyagramı değişmeli olduğundan

$$\text{CM2)} \quad m^{fm'} = m^{\eta fm'} = m^{I_A \mu m'} = m^{\mu m'} = mm' = {}^{\mu m}m' = {}^{\eta fm}m' = {}^{fm}m'$$

dir. □

Tanım 2.7 M, N, A obje kümeleri A_0 olan birer *R*-cebiroid ve $\mathcal{M} = (\mu : M \longrightarrow N)$ ile $\mathcal{N} = (\eta : N \longrightarrow A)$ birer çaprazlanmış modül olsun. Eğer $ta = tn = sm, tm = sa' = sn'$ koşullarını sağlayan her $a, a' \in A$, $n, n' \in N$ ve $m \in M$ için A nın M üzerine

1. $\mu({}^a m) = {}^{a}(\mu m)$ ve $\mu\left(m^{a'}\right) = (\mu m)^{a'}$
2. $m^{n'} = m^{\eta n'}$ ve ${}^n m = {}^{\eta n}m$

eşitliklerini sağlayan bir asosyatif etkisi varsa, bu etkiye A nın M üzerine N ninki ile uyumlu bir etkisi denir.

Önerme 2.8 $\mathcal{M} = (\mu : M \longrightarrow N)$ ile $\mathcal{N} = (\eta : N \longrightarrow A)$ birer *R*-cebiroid çaprazlanmış modülü olsun. Eğer A nın M üzerine N ninki ile uyumlu bir asosyatif etkisi varsa $\mathcal{W} = (\omega = \eta\mu : M \longrightarrow A)$ bir çaprazlanmış modüldür.

İspat: Açıkça ω bir *R*-cebiroid morfizmi olup $ta = sm, tm = sa' = sm'$ koşullarını sağlayan her $a, a' \in A$ ve $m, m' \in M$ için

$$\text{CM1)} \quad \begin{aligned} &\omega({}^a m) = (\eta\mu)({}^a m) = \eta({}^a(\mu m)) = {}^{a((\eta\mu)m)} = {}^{a(\omega m)}, \\ &\omega\left(m^{a'}\right) = (\eta\mu)\left(m^{a'}\right) = \eta\left((\mu m)^{a'}\right) = {}^{((\eta\mu)m)a'} = {}^{(\omega m)a'} \end{aligned}$$

ve

$$\text{CM2)} \quad m^{\omega m'} = m^{(\eta\mu)m'} = m^{\mu m'} = mm' = {}^{\mu m}m' = {}^{(\eta\mu)m}m' = {}^{\omega m}m'$$

dir □

Tanım 2.9 $\mathcal{M} = (\mu : M \longrightarrow A)$ ve $\mathcal{N} = (\eta : N \longrightarrow B)$ birer *R*-cebiroid çaprazlanmış modülü olsun. Eğer

1. N, M nin ve B de A nın bir altcebiroidi,

2. B nin N üzerine etkisi, A nın M üzerine etkisinden indirgenmiş,ve

3. η morfizmi

$$\begin{array}{rccc} \eta: & N & \longrightarrow & B \\ & n & \longmapsto & \eta n = \mu n \end{array}$$

biçiminde tanımlanmış ise $\mathcal{N} = (\eta : N \longrightarrow B)$ çaprazlanmış modülüne $\mathcal{M} = (\mu : M \longrightarrow A)$ nin bir altçaprazlanmış modülü denir.

Örnek 2.2 $\mathcal{M}=(\mu:\mathrm{M}\longrightarrow\mathrm{A})$ bir R-cebiroid çaprazlanmış modülü ise $\mathrm{M}'=\{\mathrm{M}(x,x),x\in\mathrm{A}_0\}$ ve $\mathrm{A}'=\{\mathrm{A}(x,x),x\in\mathrm{A}_0\}$ sırasıyla M ile A nın birer altcebiroidi olup, μ' morfizmi

$$\begin{array}{rccc}\mu': & \mathrm{M}' & \longrightarrow & \mathrm{A}' \\ & m & \longmapsto & \mu' m=\mu m\end{array}$$

biçiminde tanımlanırsa, açıkça $\mathcal{M}'=(\mu':\mathrm{M}'\longrightarrow\mathrm{A}')$, $\mathcal{M}$ nin bir altçaprazlanmış modülü olur.

Önerme 2.10 $\mathcal{M}=(\mu:\mathrm{M}\longrightarrow\mathrm{A})$ bir R-cebiroid çaprazlanmış modülü, M birimsiz, N M nin bir R-altcebiroidi ve

$$\begin{array}{rccc}\eta: & \mathrm{N} & \longrightarrow & \mathrm{A} \\ & n & \longmapsto & \eta n=\mu n\end{array}$$

olsun. $\mathcal{N}=(\eta:\mathrm{N}\longrightarrow\mathrm{A})$ nin $\mathcal{M}$ nin bir altçaprazlanmış modülü olması için gerek ve yeter şart N nin M nin bir çift yönlü ideali olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ nin bir altçaprazlanmış modülü ise $tm''=sm$, $tm=sm'$ koşullarını sağlayan her $m\in\mathrm{N}$ ve $m',m''\in\mathrm{M}$ için $m^{\mu m'}=mm'\in\mathrm{N}$ ve ${}^{\mu m''}m=m''m\in\mathrm{N}$ olup N, M nin bir çift yönlü idealidir.

$(\Leftarrow)$ $\mathcal{M}$ bir çaprazalanmış modül olduğundan $tm''=sm$, $tm=sm'$ koşullarını sağlayan her $m\in\mathrm{N}$ ve $m',m''\in\mathrm{M}$ için $m^{\mu m'}=mm'$ ve ${}^{\mu m''}m=m''m$ dir. Eğer N nin M nin bir çift yönlü ideali ise $mm',m''m\in\mathrm{N}$ dir. Böylece A nın N üzerine, M üzerine etkisinden indirgenmiş asosyatif bir etkisi mevcut olup $\mathcal{N}=(\eta:\mathrm{N}\longrightarrow\mathrm{A})$, $\mathcal{M}$ nin bir altçaprazlanmış modülüdür. □

Tanım 2.11 $\mathcal{M}=(\mu:\mathrm{M}\longrightarrow\mathrm{A})$ ve $\mathcal{N}=(\eta:\mathrm{N}\longrightarrow\mathrm{B})$ birer R-cebiroid çaprazlanmış modülü olsun. Eğer

1. N, M nin ve B de A nın bir çift yönlü ideali,

2. B nin N üzerine etkisi, A nın M üzerine etkisinden indirgenmiş,

3. η morfizmi

$$\begin{array}{rccc}\eta: & \mathrm{N} & \longrightarrow & \mathrm{B} \\ & n & \longmapsto & \eta n=\mu n\end{array}$$

biçiminde tanımlanmış,

4. N, A nın etkisi altında kapalı, ve

5. $tb=sm$, $tm=sb'$ koşulunu sağlayan her $m\in\mathrm{M}$ ve $b,b'\in\mathrm{B}$ için ${}^{b}m$ ve $m^{b'}$ elemanları N nin elemanı ise, $\mathcal{N}=(\eta:\mathrm{N}\longrightarrow\mathrm{B})$ çaprazlanmış modülüne $\mathcal{M}=(\mu:\mathrm{M}\longrightarrow\mathrm{A})$ nin bir çaprazlanmış ideali denir.

Örnek 2.3 1. A bir R-cebiroid ve I, A nın bir çift yönlü ideali ise $I_{\mathrm{I}} : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{I}$ birim morfizmi ile $i : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{A}$ gömme morfizmi, $I_{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A}$ çaprazlanmış modülünün birer çaprazlanmış idealidir.

2. $\mathcal{M} = (\mu : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{A})$ bir R-cebiroid çaprazlanmış modülü ise

$$\begin{array}{rccc} \mu_{\mathrm{G}} : & \mathrm{M} & \longrightarrow & \mathrm{Gör}\mu \\ & m & \longmapsto & \mu m \end{array}$$

morfizmlerinin herbiri $\mathcal{M}$ nin bir çaprazlanmış idealidir.

3. $\mathcal{M} = (\mu : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{A})$ bir R-cebiroid çaprazlanmış modülü ise $0_{\mathrm{A}} = \left\{0_{\mathrm{A}(x,y)} : x, y \in \mathrm{A}_0\right\}$ olmak üzere

$$\begin{array}{rccc} \mu_0 : & \mathrm{Çek}\mu & \longrightarrow & 0_{\mathrm{A}} \\ & m & \longmapsto & \mu m = 0_{\mathrm{A}(sm,tm)} \end{array}$$

morfizmi $\mathcal{M}$ nin bir çaprazlanmış idealidir.

Önerme 2.12 $\mathcal{M} = (\mu : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{A})$ bir R-cebiroid çaprazlanmış modülü, N ile B sırasıyla M ile A nın birer çift yönlü ideali ve $\overline{\mu} : \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}} \longrightarrow \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ fonksiyonu

$$\begin{array}{rccc} \overline{\mu} : & \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}} & \longrightarrow & \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} \\ & m + \mathrm{N}(sm,tm) & \longmapsto & \overline{\mu}(m + \mathrm{N}(sm,tm)) = \mu m + \mathrm{B}(sm,tm) \end{array}$$

biçiminde tanımlanmış olsun. $\overline{\mu} : \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}} \longrightarrow \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ morfizminin bir R-cebiroid morfizmi olabilmesi için gerek ve yeter şart her $x, y \in \mathrm{A}_0$ için $\mu(\mathrm{N}(x,y)) \subseteq \mathrm{B}(x,y)$ olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$: $\overline{\mu} : \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}} \longrightarrow \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ bir R-cebiroid morfizmi olsun. Her $x, y \in \mathrm{A}_0$, $m \in \mathrm{M}(x,y)$ ve $n \in \mathrm{N}(x,y)$ için

$$\begin{array}{rcl} \mu m + \mu n + \mathrm{B}(x,y) & = & \mu(m+n) + \mathrm{B}(x,y) \\ & = & \overline{\mu}(m + n + \mathrm{N}(x,y)) \\ & = & \overline{\mu}(m + \mathrm{N}(x,y)) \\ & = & \mu m + \mathrm{B}(x,y) \end{array}$$

olup $\mu n \in \mathrm{B}(x,y)$ yani $\mu(\mathrm{N}(x,y)) \subseteq \mathrm{B}(x,y)$ dir.

$(\Leftarrow)$: $\mu(\mathrm{N}(x,y)) \subseteq \mathrm{B}(x,y)$ olsun. μ bir R-cebiroid morfizmi olduğundan $\overline{\mu}$ nin bir R-cebiroid morfizmi olabilmesi için iyi tanımlı olması yeterlidir: $x, y \in \mathrm{A}_0$, $m \in \mathrm{M}(x,y)$ ve $\mu m + \mathrm{B}(x,y) \neq \mu m' + \mathrm{B}(x,y)$ olsun. Bu durumda $\mu m - \mu m' = \mu(m - m') \notin \mathrm{B}(x,y)$ yani $\mu(m - m') \notin \mu(\mathrm{N}(x,y))$ olup $m - m' \notin \mathrm{N}(x,y)$ yani $m + \mathrm{N}(x,y) \neq m' + \mathrm{N}(x,y)$ dir. Demek ki $\overline{\mu}$ iyi tanımlıdır. $\square$

Önerme 2.13 $\mathcal{M} = (\mu : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{A})$ bir R-cebiroid çaprazlanmış modülü, N ile B sırasıyla M ile A nın birer çift yönlü ideali olsun. Her $w, x, y, z \in \mathrm{A}_0$ için $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ nin $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$ üzerine

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}(w,x) \times \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}(x,y) \longrightarrow \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}(w,y)$$

$$(a + \mathrm{B}(w,x), m + \mathrm{N}(x,y)) \longmapsto {}^{a+\mathrm{B}(w,x)}(m + \mathrm{N}(x,y)) = {}^{a}m + \mathrm{N}(w,y)$$

ve

$$\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}(x,y)\times\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}(y,z) \longrightarrow \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}(x,z)$$

$$(m+\mathrm{N}(x,y),a'+\mathrm{B}(y,z)) \longmapsto (m+\mathrm{N}(x,y))^{a'+\mathrm{B}(y,z)} = m^{a'}+\mathrm{N}(x,z)$$

biçiminde asosyatif bir etkisinin tanımlanabilmesi için gerek ve yeter şart

i) N nin, A nın etkisi altında kapalı, ve

ii) $tb = sm$, $tm = sb'$ koşulunu sağlayan her $m \in \mathrm{M}$ ve $b,b' \in \mathrm{B}$ için ${}^{b}m, m^{b'} \in \mathrm{N}$ olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$: Yukarıdaki şekilde tanımlı dönüşümler $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ nin $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$ üzerine bir etkisini oluştursun.

i) Her $w,x,y,z \in \mathrm{A}_0$, $m \in \mathrm{M}(x,y)$, $n \in \mathrm{N}(x,y)$, ve $a \in \mathrm{A}(w,x)$ için

$$\begin{aligned} {}^{a}m + {}^{a}n + \mathrm{N}(w,y) &= {}^{a+\mathrm{B}(w,x)}(m+n+\mathrm{N}(x,y)) \\ &= {}^{a+\mathrm{B}(w,x)}(m+\mathrm{N}(x,y)) \\ &= {}^{a}m+\mathrm{N}(w,y) \end{aligned}$$

olup ${}^{a}n \in \mathrm{N}(w,y)$ dir. Benzer şekilde her $a' \in \mathrm{A}(y,z)$ için $n^{a'} \in \mathrm{N}(x,z)$ olduğu da gösterilebilir.

ii) Her $w,x,y,z \in \mathrm{A}_0$, $m \in \mathrm{M}(x,y)$, $a \in \mathrm{A}(w,x)$, $b \in \mathrm{B}(w,x)$için

$$\begin{aligned} {}^{a}m + {}^{b}m + \mathrm{N}(w,y) &= {}^{a+b}m+\mathrm{N}(w,y) \\ &= {}^{a+b+\mathrm{B}(w,x)}(m+\mathrm{N}(x,y)) \\ &= {}^{a+\mathrm{B}(w,x)}(m+\mathrm{N}(x,y)) \\ &= {}^{a}m+\mathrm{N}(w,y) \end{aligned}$$

olup ${}^{b}m \in \mathrm{N}(w,y)$ dir. Benzer şekilde her $b' \in \mathrm{B}(y,z)$ için $m^{b'} \in \mathrm{N}(x,z)$ olduğu da gösterilebilir.

$(\Leftarrow)$: N, A nın etkisi altında kapalı ve $tb = sm$, $tm = sb'$ koşulunu sağlayan her $m \in \mathrm{M}$ ve $b,b' \in \mathrm{B}$ için ${}^{b}m, m^{b'} \in \mathrm{N}$ olsun. Etki fonksiyonlarımız A nın M üzerine etkisi ile tanımlandığından, etki fonksiyonlarımızın iyi tanımlı olduklarını göstermek yeterlidir:

$w,x,y \in \mathrm{A}_0$, $m,m' \in \mathrm{M}(x,y)$, $a \in \mathrm{A}(w,x)$ ve ${}^{a}m+\mathrm{N}(w,y) \neq {}^{a}m'+\mathrm{N}(w,y)$ olsun. Bu durumda ${}^{a}m - {}^{a}m' \notin \mathrm{N}(w,y)$ yani ${}^{a}(m-m') \notin \mathrm{N}(w,y)$ olup N A nın etkisi altında kapalı olduğundan $m-m' \notin \mathrm{N}(x,y)$ dir. Öyle ise $m+\mathrm{N}(x,y) \neq m'+\mathrm{N}(x,y)$ olup $(a+\mathrm{B}(w,x),m+\mathrm{N}(x,y)) \neq (a+\mathrm{B}(w,x),m'+\mathrm{N}(x,y))$ dir. Benzer şekilde $x,y,z \in \mathrm{A}_0$, $m,m' \in \mathrm{M}(x,y)$, $a' \in \mathrm{A}(y,z)$ ve $m^{a'}+\mathrm{N}(x,z) \neq (m')^{a'}+\mathrm{N}(x,z)$ ise $(m+\mathrm{N}(x,y),a'+\mathrm{B}(y,z)) \neq (m'+\mathrm{N}(x,y),a'+\mathrm{B}(y,z))$ olduğu da gösterilebilir.

$w,x,y \in \mathrm{A}_0$, $m \in \mathrm{M}(x,y)$, $a,a' \in \mathrm{A}(w,x)$ ve ${}^{a}m+\mathrm{N}(w,y) \neq {}^{a'}m+\mathrm{N}(w,y)$ olsun. Bu durumda ${}^{a}m-{}^{a'}m \notin \mathrm{N}(w,y)$ yani ${}^{a-a'}m \notin \mathrm{N}(w,y)$ olup, $tb=sm$, $tm=sb'$ koşulunu sağlayan her $m \in \mathrm{M}$ ve $b,b' \in \mathrm{B}$ için ${}^{b}m,m^{b'} \in \mathrm{N}$ olduğundan, $a-a' \notin \mathrm{B}(w,x)$ dir. Öyle ise $a+\mathrm{B}(w,x) \neq a'+\mathrm{B}(w,x)$ olup $(a+\mathrm{B}(w,x),m+\mathrm{N}(x,y)) \neq (a'+\mathrm{B}(w,x),m+\mathrm{N}(x,y))$ dir. Benzer şekilde $x,y,z \in \mathrm{A}_0$, $m \in \mathrm{M}(x,y)$, $a,a' \in \mathrm{A}(y,z)$ ve $m^{a}+\mathrm{N}(x,z) \neq m^{a'}+\mathrm{N}(x,z)$ ise $(m+\mathrm{N}(x,y),a+\mathrm{B}(y,z)) \neq (m+\mathrm{N}(x,y),a'+\mathrm{B}(y,z))$ olduğu da gösterilebilir. Demek ki $\overline{\mu}$ iyi tanımlıdır. □

Önerme 2.14 $\mathcal{M}=(\mu:\mathrm{M}\longrightarrow \mathrm{A})$ bir *R*-cebiroid çaprazlanmış modülü, N ile B sırasıyla M ile A nın birer çift yönlü ideali olmak üzere $\overline{\mu}:\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}\longrightarrow\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ önerme 2.12 deki gibi tanımlanmış bir *R*-cebiroid morfizmi ve $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ nin $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$ üzerine önerme 2.13 deki gibi tanımlanmış bir asosyatif etkisi mevcut ise $\overline{\mu}$ bir çaprazlanmış modüldür.

İspat: Her $w,x,y,z \in \mathrm{A}_0$, $m \in \mathrm{M}(x,y)$, $m' \in \mathrm{M}(y,z)$, $a \in \mathrm{A}(w,x)$ ve $a' \in \mathrm{A}(y,z)$ için

CM1)

$$\begin{aligned}\overline{\mu}\left({}^{a+\mathrm{B}(w,x)}(m+\mathrm{N}(x,y))\right) &= \overline{\mu}({}^{a}m+\mathrm{N}(w,y))\\ &= \mu({}^{a}m)+\mathrm{B}(w,y)\\ &= a(\mu m)+\mathrm{B}(w,y)\\ &= (a+\mathrm{B}(w,x))(\mu m+\mathrm{B}(x,y))\\ &= (a+\mathrm{B}(w,x))\overline{\mu}(m+\mathrm{N}(x,y))\end{aligned}$$

ve benzer şekilde $\overline{\mu}\left((m+\mathrm{N}(x,y))^{a'+\mathrm{B}(y,z)}\right)=\overline{\mu}(m+\mathrm{N}(x,y))(a'+\mathrm{B}(y,z))$ dir,

CM2)

$$\begin{aligned}{}^{\overline{\mu}(m+\mathrm{N}(x,y))}(m'+\mathrm{N}(y,z)) &= {}^{\mu m+\mathrm{B}(x,y)}(m'+\mathrm{N}(y,z))\\ &= {}^{\mu m}m'+\mathrm{N}(x,z)\\ &= mm'+\mathrm{N}(x,z)\\ &= (m+\mathrm{N}(x,y))(m'+\mathrm{N}(y,z))\end{aligned}$$

ve benzer şekilde $(m+\mathrm{N}(x,y))^{\overline{\mu}(m'+\mathrm{N}(y,z))}=(m+\mathrm{N}(x,y))(m'+\mathrm{N}(y,z))$ dir. □

Tanım 2.15 $\mathcal{M}=(\mu:\mathrm{M}\longrightarrow \mathrm{A})$ bir *R*-cebiroid çaprazlanmış modülü ise önerme 2.14 deki gibi elde edilen $\overline{\mathcal{M}}=(\overline{\mu}:\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}\longrightarrow\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}})$ çaprazlanmış modülüne $\mathcal{M}$ nin bir bölüm çaprazlanmış modülü denir.

Örnek 2.4 1. A bir *R*-cebiroid ve I, A nın bir çift yönlü ideali ise $I_{\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{I}}}:\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{I}}\longrightarrow\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{I}}$ çaprazlanmış modülü $I_{\mathrm{A}}:\mathrm{A}\longrightarrow\mathrm{A}$ çaprazlanmış modülünün bir bölüm çaprazlanmış modülüdür.

2. $\mathcal{M}=(\mu:\mathrm{M}\longrightarrow\mathrm{A})$ bir R-cebiroid çaprazlanmış modülü ise $0_{\mathrm{A}}=\left\{0_{\mathrm{A}(x,y)}:x,y\in\mathrm{A}_0\right\}$ olmak üzere

$$\begin{array}{rccc}\overline{\mu}: & \frac{\mathrm{M}}{\text{Çek}\mu} & \longrightarrow & \mathrm{A}=\frac{\mathrm{A}}{0_{\mathrm{A}}}\\ & m+\text{Çek}\mu(sm,tm) & \longmapsto & \mu m\end{array}$$

morfizmi $\mathcal{M}$ nin bir bölüm çaprazlanmış modülüdür.

Sonuç 2.16 $\overline{\mathcal{M}}=(\overline{\mu}:\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}\longrightarrow\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}})$ bölüm çaprazlanmış modülünde $\mathrm{N}=0_{\mathrm{M}}=\left\{0_{\mathrm{M}(x,y)}:x,y\in\mathrm{A}_0\right\}$ alınırsa

$$\begin{array}{rccc}\mu': & \mathrm{M} & \longrightarrow & \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\\ & m & \longmapsto & m+\mathrm{B}(sm,tm)\end{array}$$

çaprazlanmış modülü elde edilir.

Sonuç 2.17 $\overline{\mathcal{M}}=(\overline{\mu}:\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}\longrightarrow\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}})$ bir bölüm çaprazlanmış modülü ise B nin N üzerine A nın M üzerine etkisinden indirgenen bir etkisi vardır. (önerme 2.13 den)

Sonuç 2.18 $\mathcal{M}=(\mu:\mathrm{M}\longrightarrow\mathrm{A})$ bir R-cebiroid çaprazlanmış modülü, N M nin ve B de A nın bir çift yönlü ideali, $\overline{\mu}$ morfizmi

$$\begin{array}{rccc}\overline{\mu}: & \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}} & \longrightarrow & \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\\ & m+\mathrm{N}(sm,tm) & \longmapsto & \mu m+\mathrm{B}(sm,tm)\end{array}$$

biçiminde ve η morfizmi

$$\begin{array}{rccc}\eta: & \mathrm{N} & \longrightarrow & \mathrm{B}\\ & n & \longmapsto & \eta n=\mu n\end{array}$$

biçiminde tanımlanmış ise $\overline{\mathcal{M}}=(\overline{\mu}:\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}\longrightarrow\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}})$ nin bir bölüm çaprazlanmış modülü olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{N}=(\eta:\mathrm{N}\longrightarrow\mathrm{B})$ nin $\mathcal{M}$ nin bir çaprazlanmış ideali olmasıdır. (önerme 2.12 ve 2.13 den)

Önerme 2.19 $\mathcal{M}=(\mu:\mathrm{M}\longrightarrow\mathrm{A})$ bir R-cebiroid çaprazlanmış modülü ve N, M nin bir çift yönlü ideali ise

$$\begin{array}{rccc}\overline{\mu}: & \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}} & \longrightarrow & \mathrm{A}\\ & m+\mathrm{N}(sm,tm) & \longmapsto & \mu m\end{array}$$

morfizminin $\mathcal{M}$ nin bir bölüm çaprazlanmış modülü olabilmesi için gerek ve yeter şart her $x,y\in\mathrm{A}_0$ için $\mathrm{N}(x,y)\subseteq\text{Çek}\mu(x,y)$ olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ Önerme 2.12 de $\mathrm{B}=0_{\mathrm{A}}=\left\{0_{\mathrm{A}(x,y)}:x,y\in\mathrm{A}_0\right\}$ almak yeterlidir.

$(\Leftarrow)$ Önerme 2.12 de $\mathrm{B}=0_{\mathrm{A}}=\left\{0_{\mathrm{A}(x,y)}:x,y\in\mathrm{A}_0\right\}$ alıp A nın $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$ üzerine etkisini, her $w,x,y,z\in\mathrm{A}_0$ için

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{A}(w,x)\times\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}(x,y) & \longrightarrow & \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}(w,y)\\ (a,m+\mathrm{N}(x,y)) & \longmapsto & {}^{a}(m+\mathrm{N}(x,y))={}^{a}m+\mathrm{N}(w,y)\end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}(x,y)\times \mathrm{A}(y,z) & \longrightarrow & \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}(x,z) \\ (m+\mathrm{N}(x,y),a') & \longmapsto & (m+\mathrm{N}(x,y))^{a'} = m^{a'}+\mathrm{N}(x,z) \end{array}$$

biçiminde tanımlamak yeterlidir. □

2.3 Bir ön-çaprazlanmış modülün Peiffer ideali

Tanım 2.20 $\mathcal{M}=(\mu : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{A})$, PXAlg($R$) de bir ön-çaprazlanmış modül olsun. $tm = sm'$ koşulunu sağlayan her $m, m' \in \mathrm{M}$ için

$$[\![m,m']\!]_1 \;=\; m^{\mu m'} - mm' \;\text{ ve }\; [\![m,m']\!]_2 \;=\; {}^{\mu m}m' - mm'$$

biçimindeki elemanlara m ile m' nün Peiffer komutatörleri denir.

Dikkat edilirse bu iki komutatör Çekμ nün elemanlarıdır. Bir çaprazlanmış modülde bu iki komutatörün ikisi de sıfırdır. Eğer bir ön-çaprazlanmış modülde bu komutatörlerin ikisi de sıfırsa o ön-çaprazlanmış modül bir çaprazlanmış modüldür.

Her $x, y \in \mathrm{M}_0 = \mathrm{A}_0$ için $\mathrm{M}(x,y)$ nin tüm Peiffer komutatörleri tarafından, yani $[\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!]_{\mathrm{g}}(x,y) = \{[\![m,m']\!]_1, [\![m,m']\!]_2 : m,m' \in \mathrm{M},\, x = sm, tm = sm', tm' = y\}$ kümesinin elemanları tarafından üretilen alt grubunu $[\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!](x,y)$ ile gösterelim. $\mathrm{M}(x,y)$ değişmeli olduğundan $[\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!](x,y)$ de değişmelidir.

Önerme 2.21 $[\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!](x,y)$ R etkisi altında kapalıdır.

İspat: Her $[\![m,m']\!]_1 \in [\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!](x,y)$ ve $r \in R$ için

$$\begin{array}{rcl} r\cdot[\![m,m']\!]_1 & = & r\cdot(m^{\mu m'} - mm') \\ & = & r\cdot\left(m^{\mu m'}\right) - r\cdot(mm') \\ & = & (r\cdot m)^{\mu m'} - (r\cdot m)m' \\ & = & [\![r\cdot m, m']\!]_1 \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} r\cdot[\![m,m']\!]_1 & = & r\cdot(m^{\mu m'} - mm') \\ & = & r\cdot\left(m^{\mu m'}\right) - r\cdot(mm') \\ & = & m^{r\cdot\mu m'} - m(r\cdot m') \\ & = & m^{\mu(r\cdot m')} - m(r\cdot m') \\ & = & [\![m, r\cdot m']\!]_1 \end{array}$$

dir. Yani $r\cdot[\![m,m']\!]_1 = [\![r\cdot m, m']\!]_1 = [\![m, r\cdot m']\!]_1 \in [\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!](x,y)$ dir. Benzer şekilde $r\cdot[\![m,m']\!]_2 = [\![r\cdot m, m']\!]_2 = [\![m, r\cdot m']\!]_2 \in [\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!](x,y)$ olduğu da gösterilebilir. □

Sonuç 2.22 $[\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!](x,y)$ bir R-modüldür.

Önerme 2.23 $[\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!] = \{[\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!](x,y) : x,y \in \mathrm{A}_0\}$ R-modüller ailesi M nin bir çift yönlü idealidir.

İspat: Her $w,x,y,z \in \mathrm{A}_0$, $m'' \in \mathrm{M}(w,x)$, $[\![m,m']\!]_1, [\![m,m']\!]_2 \in [\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!](x,y)$, $m''' \in \mathrm{M}(y,z)$ için

$$\begin{aligned} m''[\![m,m']\!]_1 &= m''\left(m^{\mu m'} - mm'\right) \\ &= m''\left(m^{\mu m'}\right) - m''mm' \\ &= (m''m)^{\mu m'} - (m''m)\,m' \\ &= [\![m''m,m']\!]_1 \end{aligned}$$

olup $[\![m''m,m']\!]_1 \in [\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!](w,y)$ ve

$$\begin{aligned} [\![m,m']\!]_1 m''' &= \left(m^{\mu m'} - mm'\right)m''' \\ &= \left(m^{\mu m'}\right)m''' - mm'm''' \\ &= \left(m^{\mu m'}\right)m''' - mm'm''' + m^{\mu(m'm''')} - m^{\mu(m'm''')} \\ &= m^{\mu(m'm''')} - m\,(m'm''') - m^{(\mu m')(\mu m''')} + \left(m^{\mu m'}\right)m''' \\ &= m^{\mu(m'm''')} - m\,(m'm''') - \left[(m^{\mu m'})^{\mu m'''} - \left(m^{\mu m'}\right)m'''\right] \\ &= [\![m,m'm''']\!]_1 - [\![m^{\mu m'},m''']\!]_1 \end{aligned}$$

olup $[\![m,m'm''']\!]_1 - [\![m^{\mu m'},m''']\!]_1 \in [\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!](x,z)$ dir. Benzer şekilde $m''[\![m,m']\!]_2 = [\![m''m,m']\!]_2 - [\![m'',^{\mu m}m']\!]_2 \in [\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!](w,y)$ ve $[\![m,m']\!]_2 m''' = [\![m,m'm''']\!]_2 \in [\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!](x,z)$ olduğu da gösterilebilir. □

Not 2.24 $[\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!]$ ye M nin Peiffer ideali denir.

Önerme 2.25 $[\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!]$, A etkisi altında kapalıdır.

İspat: Her $w,x,y,z \in \mathrm{A}_0$, $a \in \mathrm{A}(w,x)$, $[\![m,m']\!]_1, [\![m,m']\!]_2 \in [\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!](x,y)$, $a' \in \mathrm{A}(y,z)$ için

$$\begin{aligned} {}^a[\![m,m']\!]_1 &= {}^a(m^{\mu m'} - mm') \\ &= {}^a(m^{\mu m'}) - {}^a mm' \\ &= ({}^a m)^{\mu m'} - ({}^a m)\,m' \\ &= [\![{}^a m,m']\!]_1 \end{aligned}$$

olup $[\![{}^a m,m']\!]_1 \in [\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!](w,y)$ ve

$$\begin{aligned} [\![m,m']\!]_1^{a'} &= (m^{\mu m'} - mm')^{a'} \\ &= (m^{\mu m'})^{a'} - (mm')^{a'} \\ &= m^{(\mu m')a'} - m\,(m')^{a'} \\ &= m^{\mu((m')^{a'})} - m\,(m')^{a'} \\ &= [\![m,(m')^{a'}]\!]_1 \end{aligned}$$

olup $\llbracket m,(m')^{a'}\rrbracket_1 \in \llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket(x,z)$ dir. Benzer şekilde ${}^a\llbracket m,m'\rrbracket_2 = \llbracket {}^a m,m'\rrbracket_2 \in \llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket(w,y)$ ve $\llbracket m,m'\rrbracket_2^{a'} = \llbracket m,(m')^{a'}\rrbracket_2 \in \llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket(x,z)$ olduğu da gösterilebilir. □

2.4 Ön-çaprazlanmış modülden Peiffer ideali ile çaprazlanmış modül elde edilişi

$\mathcal{M}=(\mu:\mathrm{M}\longrightarrow \mathrm{A})$, PXAlg($R$) de bir ön-çaprazlanmış modül olsun. $\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket$, M nin bir çift yönlü ideali olduğundan $\frac{\mathrm{M}}{\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket} = \left\{ \frac{\mathrm{M}}{\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket}(x,y) = \frac{\mathrm{M}(x,y)}{\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket(x,y)} : x,y\in \mathrm{A}_0 \right\}$ bölüm R-modülleri ailesi üzerine, M den , her $x,y\in \mathrm{A}_0$ için

$$\begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{M}}{\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket}(x,y)\times \frac{\mathrm{M}}{\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket}(x,y) & \longrightarrow & \frac{\mathrm{M}}{\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket}(x,y) \\ (m+\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket(x,y), m+\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket(x,y)) & \longmapsto & m+m'+\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket(x,y) \end{array}$$

biçiminde bir toplama işlemi, her $x,y,z\in \mathrm{A}_0$ için

$$\begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{M}}{\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket}(x,y)\times \frac{\mathrm{M}}{\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket}(y,z) & \longrightarrow & \frac{\mathrm{M}}{\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket}(x,z) \\ (m+\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket(x,y), m_1+\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket(y,z)) & \longmapsto & mm_1+\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket(x,z) \end{array}$$

biçiminde bir kompozisyon ve $\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket$, R etkisi altında kapalı olduğundan her $x,y\in \mathrm{A}_0$, $r\in R$ için

$$\begin{array}{rcl} R\times \frac{\mathrm{M}}{\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket}(x,y) & \longrightarrow & \frac{\mathrm{M}}{\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket}(x,y) \\ (r, m+\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket(x,y)) & \longmapsto & r\cdot m+\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket(x,y) \end{array}$$

biçiminde bir R etkisi indirgenebilir. Bu işlemler ve etki ile $\frac{\mathrm{M}}{\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket}$ bir R-cebiroid olur.

Ayrıca $\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket$, A etkisi altında kapalı olduğundan A nın M üzerine etkisinden $\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket$ üzerine de her $w,x,y,z\in \mathrm{A}_0$ için

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{A}(w,x)\times \frac{\mathrm{M}}{\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket}(x,y) & \longrightarrow & \frac{\mathrm{M}}{\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket}(w,y) \\ (a, m+\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket(x,y)) & \longmapsto & {}^a(m+\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket(x,y)) \;=\; {}^a m+\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket(w,y) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{M}}{\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket}(x,y)\times \mathrm{A}(y,z) & \longrightarrow & \frac{\mathrm{M}}{\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket}(x,z) \\ (m+\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket(x,y), a') & \longmapsto & (m+\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket(x,y))^{a'} \;=\; m^{a'}+\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket(x,z) \end{array}$$

biçiminde bir asosyatif etkisi indirgenebilir. Böylece bu etki ile $\frac{\mathrm{M}}{\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket}$ bir A-modül olur.

$\mathrm{M}^{\mathrm{cr}} = \frac{\mathrm{M}}{\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket}$ olsun. Eğer, her $x,y\in \mathrm{A}_0$ için ve $m\in \mathrm{M}(x,y)$ için $\mathrm{M}^{\mathrm{cr}}(x,y)$ nin elemanlarını da $m+\llbracket \mathrm{M},\mathrm{M}\rrbracket(x,y)=\overline{m}$ biçiminde kısaltırsak M^{cr} üzerindeki işlemler ve etkiler aşağıdaki gibi özetlenebilir: Her $w,x,y,z\in \mathrm{A}_0$, $m,m_1\in \mathrm{M}(x,y)$, $m'\in \mathrm{M}(y,z)$, $a\in \mathrm{A}(w,x)$, $a'\in \mathrm{A}(y,z)$ ve $r\in R$ için

$$\begin{array}{rrcl} 1. & \overline{m}+\overline{m_1} & = & \overline{m+m_1} \\ 2. & \overline{m}\overline{m'} & = & \overline{mm'} \\ 3. & r\cdot \overline{m} & = & \overline{r\cdot m} \\ 4. & {}^a\overline{m} & = & \overline{{}^a m} \\ 5. & \overline{m}^{a'} & = & \overline{m^{a'}} \end{array}$$

dir.

Diğer taraftan her $x,y \in \mathrm{A}_0$ ve $[\![m,m']\!]_1, [\![m,m']\!]_2 \in [\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!](x,y)$ için

$$\begin{aligned}\mu([\![m,m']\!]_1) &= \mu\left(m^{\mu m'} - mm'\right)\\ &= \mu\left(m^{\mu m'}\right) - \mu(mm')\\ &= (\mu m)(\mu m') - (\mu m)(\mu m')\\ &= 0_{\mathrm{A}(x,y)}\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\mu\left([\![m,m']\!]_2\right) = 0_{\mathrm{A}(x,y)}$$

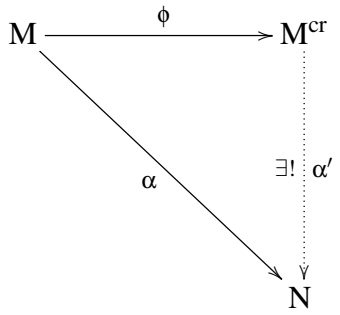
olduğundan, μ morfizmi

$$\begin{array}{rccc}\mu^{\mathrm{cr}}: & \mathrm{M}^{\mathrm{cr}} & \longrightarrow & \mathrm{A}\\ & \overline{m} & \longmapsto & \mu^{\mathrm{cr}}\overline{m} = \mu m\end{array}$$

biçiminde bir fonksiyon indirger.

Önerme 2.26 (i) $\mathcal{M}^{\mathrm{cr}}$=$(\mu^{\mathrm{cr}} : \mathrm{M}^{\mathrm{cr}} \longrightarrow \mathrm{A})$ bir çaprazlanmış modüldür.

(ii) $\phi : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}^{\mathrm{cr}}$ bölüm morfizmi olmak üzere her $\mathcal{N}$ =$(\eta : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{A})$ çaprazlanmış A-modülü ve her $(\alpha, I_{\mathrm{A}}) : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ ön-çaprazlanmış A-modül morfizmi için $\alpha = \alpha'\phi$ olacak biçimde yani



diyagramını değişmeli yapacak biçimde biricik bir $(\alpha', I_{\mathrm{A}}) : \mathcal{M}^{\mathrm{cr}} \longrightarrow \mathcal{N}$ çaprazlanmış A-modül morfizmi mevcuttur (evrensellik özelliği).

İspat: (i) Önce μ^{cr} nin bir R-cebiroid morfizmi olduğunu gösterelim: Her $x,y,z \in \mathrm{A}_0$, $m,m_1 \in \mathrm{M}(x,y)$, $m' \in \mathrm{M}(y,z)$ ve $r \in R$ için

1.

$$\begin{aligned}\mu^{\mathrm{cr}}\left(\overline{m}+\overline{m_1}\right) &= \mu^{\mathrm{cr}}\left(\overline{m+m_1}\right)\\ &= \mu\left(m+m_1\right)\\ &= \mu m+\mu m_1\\ &= \mu^{\mathrm{cr}}\overline{m}+\mu^{\mathrm{cr}}\overline{m_1}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\mu^{\mathrm{cr}}\left(\overline{m}\overline{m'}\right) &= \mu^{\mathrm{cr}}\left(\overline{mm'}\right)\\ &= \mu\left(mm'\right)\\ &= \left(\mu m\right)\left(\mu m'\right)\\ &= \left(\mu^{\mathrm{cr}}\overline{m}\right)\left(\mu^{\mathrm{cr}}\overline{m'}\right)\end{aligned}$$

3.

$$\mu^{\mathrm{cr}}\left(r\cdot\overline{m}\right)=\mu^{\mathrm{cr}}\left(\overline{r\cdot m}\right)=\mu\left(r\cdot m\right)=r\cdot\left(\mu m\right)=r\cdot\left(\mu^{\mathrm{cr}}\overline{m}\right)$$

dir.

Şimdi de μ^{cr} nin bir çaprazlanmış modül olduğunu gösterelim: Her $w,x,y,z\in \mathrm{A}_0$, $m\in \mathrm{M}\left(x,y\right)$, $m'\in \mathrm{M}\left(y,z\right)$, $a\in \mathrm{A}\left(w,x\right)$, $a'\in \mathrm{A}\left(y,z\right)$ için

CM1)

$$\mu^{\mathrm{cr}}\left({}^{a}\overline{m}\right)=\mu^{\mathrm{cr}}\left(\overline{{}^{a}m}\right)=\mu\left({}^{a}m\right)=\ a\left(\mu m\right)=a\left(\mu^{\mathrm{cr}}\overline{m}\right)$$

ve

$$\mu^{\mathrm{cr}}\left(\overline{m}^{a'}\right)=\mu^{\mathrm{cr}}\left(\overline{m^{a'}}\right)=\mu\left(m^{a'}\right)=\left(\mu m\right)a'=\left(\mu^{\mathrm{cr}}\overline{m}\right)a'$$

dir,

CM2)

$$\begin{aligned}\overline{m}^{\mu^{\mathrm{cr}}\overline{m'}} &= \overline{m}^{\mu m'}\\ &= \overline{m^{\mu m'}}\\ &= m^{\mu m'}+[\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!]\left(x,z\right)\\ &= m^{\mu m'}+\left[-[\![m,m']\!]_1+[\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!]\left(x,z\right)\right]\\ &= m^{\mu m'}+\left[-\left(m^{\mu m'}-mm'\right)+[\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!]\left(x,z\right)\right]\\ &= mm'+[\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!]\left(x,z\right)\\ &= \overline{mm'}\\ &= \overline{m}\overline{m'}\end{aligned}$$

ve benzer biçimde ${}^{\mu^{\mathrm{cr}}\overline{m}}\overline{m'}=\overline{m}\overline{m'}$ dir.

(ii) α' morfizmini

$$\begin{array}{rccc}\alpha': & \mathrm{M}^{\mathrm{cr}} & \longrightarrow & \mathrm{N}\\ & \overline{m} & \longmapsto & \alpha'\overline{m}=\alpha m\end{array}$$

biçiminde tanımlarsak, açıkça $(\alpha', I_{\mathrm{A}})$ çaprazlanmış A-modül morfizmi olup her $m \in \mathrm{M}$ için

$$\left(\alpha'\phi\right) m = \alpha'\left(\phi m\right) = \alpha'\overline{m} = \alpha m$$

olduğu görülür. Ayrıca aynı koşulları sağlayan ikinci bir morfizm α'' ise her $m \in \mathrm{M}$ için

$$\alpha''\overline{m} = \alpha''\left(\phi m\right) = \left(\alpha''\phi\right) m = \alpha m = \alpha'\overline{m}$$

olup $\alpha'' = \alpha'$ dir. □

Not 2.27 $\mathcal{M} \in$XAlg(R) ise $\mathcal{M}^{\mathrm{cr}} = \mathcal{M}$ olup her $m \in \mathrm{M}$ için $\overline{m} = m$ dir.

Önerme 2.28 $\mathcal{M} = (\mu : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{A})$, PXAlg($R$) de bir ön-çaprazlanmış modül ve $\mathrm{V} = \{\mathrm{V}(x,y) : x,y \in \mathrm{A}_0\}$ ailesi M nin R ve A etkisi altında kapalı bir üreteç ailesi olsun. Her $x,y \in \mathrm{A}_0$ için $[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!]_{\mathrm{g}}(x,y) = \{[\![m,m']\!]_1, [\![m,m']\!]_2 : m,m' \in \mathrm{V},\ x = sm,\ tm = sm',\ tm' = y\}$ olmak üzere $[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!]_{\mathrm{g}} = \left\{[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!]_{\mathrm{g}}(x,y) : x,y \in \mathrm{A}_0\right\}$ Peiffer komutatörleri ailesi M nin $[\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!]$ Peiffer idealinin bir üreteç ailesidir.

İspat: $[\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!]$ Peiffer idealinin, her $x,y \in \mathrm{A}_0$ için $[\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!]_{\mathrm{g}}(x,y) = \{[\![m,m']\!]_1, [\![m,m']\!]_2 : m,m' \in \mathrm{M},\ x = sm,\ tm = sm',\ tm' = y\}$ olmak üzere, $[\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!]_{\mathrm{g}} = \left\{[\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!]_{\mathrm{g}}(x,y) : x,y \in \mathrm{A}_0\right\}$ ailesi tarafından üretildiğini biliyoruz. $[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!]_{\mathrm{g}}$ tarafından üretilen çift yönlü ideal $[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!] = \{[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!](x,y) : x,y \in \mathrm{A}_0\}$ ise açıkça her $x,y \in \mathrm{A}_0$ için $[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!]_{\mathrm{g}}(x,y) \subseteq [\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!]_{\mathrm{g}}(x,y)$ olduğundan her $x,y \in \mathrm{A}_0$ için $[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!](x,y) \subseteq [\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!](x,y) \subseteq$Çek$\mu(x,y)$ dir.

V, R etkisi altında kapalı olduğundan $[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!]_{\mathrm{g}}$ ve $[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!]$ de R etkisi altında kapalı olup $\frac{\mathrm{M}}{[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!]} = \left\{\frac{\mathrm{M}}{[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!]}(x,y) = \frac{\mathrm{M}(x,y)}{[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!](x,y)} : x,y \in \mathrm{A}_0\right\}$ R-modüller ailesi A dan indirgenen toplama işlemi ve kompozisyon ile bir R-cebiroid olur.

Diğer taraftan V, A etkisi altında da kapalı olduğundan $[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!]_{\mathrm{g}}$ ve $[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!]$ de A etkisi altında kapalı olup A nın $\frac{\mathrm{M}}{[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!]}$ üzerinde her $w,x,y,z \in \mathrm{A}_0$ için

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{A}(w,x) \times \frac{\mathrm{M}}{[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!]}(x,y) & \longrightarrow & \frac{\mathrm{M}}{[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!]}(w,y) \\ (a,\overline{m}) & \longmapsto & {}^{a}\overline{m} = \overline{{}^{a}m} \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{ccc} \frac{\mathrm{M}}{[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!]}(x,y) \times \mathrm{A}(y,z) & \longrightarrow & \frac{\mathrm{M}}{[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!]}(x,z) \\ (\overline{m},a') & \longmapsto & \overline{m}^{a'} = \overline{m^{a'}} \end{array}$$

biçiminde bir asosyatif etkisi tanımlanabilir. Bu etki ile $\frac{\mathrm{M}}{[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!]}$ bir A-modüldür. Ayrıca her $x,y \in \mathrm{A}_0$ için $\mu([\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!](x,y)) = \left\{0_{\mathrm{A}(x,y)}\right\}$ olduğundan

$$\begin{array}{rccc} \overline{\mu}: & \frac{\mathrm{M}}{[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!]} & \longrightarrow & \mathrm{A} \\ & \overline{m} & \longmapsto & \overline{\mu}\,\overline{m} = \mu m \end{array}$$

morfizmi bir R-cebiroid morfizmidir ve A etkisini korur. Yani $\overline{\mu}:\frac{\mathrm{M}}{[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!]}\longrightarrow \mathrm{A}$ bir ön-çaprazlanmış modüldür. Şimdi $\overline{\mu}$ nün bir çaprazlanmış modül olduğunu görelim:

Her $x,y\in \mathrm{A}_0$ için $\overline{\mathrm{V}(x,y)}=\{\overline{m}=m+[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!](x,y):m\in \mathrm{V}(x,y)\}$ olmak üzere $\overline{\mathrm{V}}=\left\{\overline{\mathrm{V}(x,y)}:x,y\in \mathrm{A}_0\right\}$ olsun. Açıkça $\overline{\mathrm{V}}$ ailesi $\frac{\mathrm{M}}{[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!]}$ R-cebiroidinin üreteç ailesi olup her $w,x,y,z\in \mathrm{A}_0$, $m'\in \mathrm{V}(w,x)$, $m\in \mathrm{V}(x,y)$ ve $m''\in \mathrm{V}(y,z)$ için $[\![m',m]\!]_2={}^{\mu m'}m-m'm\in [\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!](w,y)$ ve $[\![m,m'']\!]_1=m^{\mu m''}-mm''\in [\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!](x,z)$ olduğundan

$$\overline{{}^{\overline{\mu}\overline{m'}}\overline{m}}=\overline{{}^{\mu m'}m}=\overline{{}^{\mu m'}\overline{m}}=\overline{m'm}=\overline{m'}\overline{m}$$

ve

$$\overline{m}^{\overline{\mu}\overline{m''}}=\overline{m}^{\mu m''}=\overline{m^{\mu m''}}=\overline{mm''}=\overline{m}\overline{m''}$$

dir.

Her $w,x,y,z,t\in \mathrm{A}_0$ için, $m_{wx}\in \mathrm{V}(w,x)$, $m_{yz}\in \mathrm{V}(y,z)$ ve $m_{zt}\in \mathrm{V}(z,t)$ sabit olmak üzere, $\mathrm{P}(x,y)=\left\{\overline{m}\in \frac{\mathrm{M}}{[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!]}(x,y):{}^{\overline{\mu}\,\overline{m_{wx}}}\overline{m}=\overline{m_{wx}}\,\overline{m}=\overline{m_{wx}}\,{}^{\overline{\mu}\,\overline{m}}\text{ ve }\overline{m}\,{}^{\overline{\mu}\,\overline{m_{yz}}}=\overline{m}\,\overline{m_{yz}}={}^{\overline{\mu}\,\overline{m}}\,\overline{m_{yz}}\right\}$ olsun. Açıkça $\overline{\mathrm{V}(x,y)}\subseteq \mathrm{P}(x,y)\subseteq \frac{\mathrm{M}}{[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!]}(x,y)$ dir.

$\frac{\mathrm{M}}{[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!]}$ bir A-modül olduğundan her $\overline{m_1},\overline{m_2}\in \mathrm{P}(x,y)$ için

$$\begin{aligned}{}^{\overline{\mu}\,\overline{m_{wx}}}(\overline{m_1}+\overline{m_2}) &= {}^{\overline{\mu}\,\overline{m_{wx}}}\overline{m_1}+{}^{\overline{\mu}\,\overline{m_{wx}}}\overline{m_2}\\ &= \overline{m_{wx}}\,\overline{m_1}+\overline{m_{wx}}\,\overline{m_2}\\ &= \overline{m_{wx}}\,(\overline{m_1}+\overline{m_2})\end{aligned}$$

ve her $\overline{m}\in \mathrm{P}(x,y)$ için $-\overline{m}=\overline{-m}\in \frac{\mathrm{M}}{[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!]}(x,y)$ olduğundan

$$\begin{aligned}{}^{\overline{\mu}\,\overline{m_{wx}}}(-\overline{m}) &= {}^{\overline{\mu}\,\overline{m_{wx}}}(\overline{-m})\\ &= \overline{{}^{\overline{\mu}\,\overline{m_{wx}}}(-m)}\\ &= \overline{-({}^{\overline{\mu}\,\overline{m_{wx}}}m)}\\ &= -\left(\overline{{}^{\overline{\mu}\,\overline{m_{wx}}}m}\right)\\ &= -({}^{\overline{\mu}\,\overline{m_{wx}}}\overline{m})\\ &= -(\overline{m_{wx}}\,\overline{m})\\ &= \overline{m_{wx}}\,(-\overline{m})\end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde

$$(\overline{m_1}+\overline{m_2})^{\overline{\mu}\,\overline{m_{yz}}}=(\overline{m_1}+\overline{m_2})\,\overline{m_{yz}}\text{ ve }(-\overline{m})^{\overline{\mu}\,\overline{m_{yz}}}=(-\overline{m})\,\overline{m_{yz}}$$

olduğu da gösterilebilir.

Diğer taraftan her $\overline{m_1},\overline{m_2}\in \mathrm{P}(x,y)$ için

$$\begin{aligned}\overline{m_{wx}}\,{}^{\overline{\mu}(\overline{m_1}+\overline{m_2})} &= \overline{m_{wx}}\,{}^{\overline{\mu}\,\overline{m_1}}+{}^{\overline{\mu}\,\overline{m_2}}\\ &= \overline{m_{wx}}\,{}^{\overline{\mu}\,\overline{m_1}}+\overline{m_{wx}}\,{}^{\overline{\mu}\,\overline{m_2}}\\ &= \overline{m_{wx}}\,\overline{m_1}+\overline{m_{wx}}\,\overline{m_2}\\ &= \overline{m_{wx}}\,(\overline{m_1}+\overline{m_2})\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\overline{m_{wx}}\,\overline{\mu}^{(-\overline{m})} &= \overline{m_{wx}}\,\overline{\mu}^{\,\overline{-m}} \\
&= \overline{(m_{wx})^{\overline{\mu}^{\,\overline{-m}}}} \\
&= \overline{(m_{wx})^{-\overline{\mu}\,\overline{m}}} \\
&= \overline{-(m_{wx})^{\overline{\mu}\,\overline{m}}} \\
&= -\overline{(m_{wx})^{\overline{\mu}\,\overline{m}}} \\
&= -(\overline{m_{wx}})^{\overline{\mu}\,\overline{m}} \\
&= -(\overline{m_{wx}}\,\overline{m}) \\
&= \overline{m_{wx}}\,(-\overline{m})
\end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde

$$\overline{\mu}^{(\overline{m_1}+\overline{m_2})}\overline{m_{yz}} = (\overline{m_1}+\overline{m_2})\,\overline{m_{yz}} \text{ ve } \overline{\mu}^{(-\overline{m})}\overline{m_{yz}} = (-\overline{m})\,\overline{m_{yz}}$$

olur. Demek ki her $\overline{m_1},\overline{m_2} \in \mathrm{P}(x,y)$ için $\overline{m_1}+\overline{m_2} \in \mathrm{P}(x,y)$ ve her $\overline{m} \in \mathrm{P}(x,y)$ için $-\overline{m} \in \mathrm{P}(x,y)$ dir. Öyle ise $\mathrm{P}(x,y) \subseteq \frac{\mathrm{M}}{[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!]}(x,y)$ bir değişmeli gruptur.

Ayrıca $\overline{\mu}$ bir R-cebiroid A-modül morfizmi olduğundan, her $\overline{m} \in \mathrm{P}(x,y)$, $r \in \mathrm{R}$ ve $a \in \mathrm{A}(w,x)$ için

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}^{\,\overline{m_{wx}}}(r\cdot\overline{m}) &= r\cdot\left(\overline{\mu}^{\,\overline{m_{wx}}}\overline{m}\right) \\
&= r\cdot(\overline{m_{wx}}\,\overline{m}) \\
&= \overline{m_{wx}}(r\cdot\overline{m})
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\overline{m_{wx}}\,\overline{\mu}^{(r\cdot\overline{m})} &= \overline{m_{wx}}^{\,r\cdot\,(\overline{\mu}\,\overline{m})} \\
&= r\cdot\,\left(\overline{m_{wx}}\,\overline{\mu}\,\overline{m}\right) \\
&= r\cdot\,(\overline{m_{wx}}\,\overline{m}) \\
&= \overline{m_{wx}}\,(r\cdot\overline{m})
\end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde

$$(r\cdot\overline{m})^{\overline{\mu}\,\overline{m_{yz}}} = (r\cdot\overline{m})\,\overline{m_{yz}} = \overline{\mu}^{(r\cdot\overline{m})}\overline{m_{yz}}$$

olduğu da gösterilebilir. Böylece her $\overline{m} \in \mathrm{P}(x,y)$ ve $r \in \mathrm{R}$ için $r\cdot\overline{m} \in \mathrm{P}(x,y)$ olup $\mathrm{P}(x,y)$ bir R-modüldür.

Ek olarak her $w,x,y,z,t \in \mathrm{A}_0$, $m \in \mathrm{P}(x,y)$ ve $m'' \in \mathrm{P}(y,z)$ için

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}^{\,\overline{m_{wx}}}\left(\overline{m}\overline{m''}\right) &= \left(\overline{\mu}^{\,\overline{m_{wx}}}\overline{m}\right)\overline{m''} \\
&= (\overline{m_{wx}}\,\overline{m})\,\overline{m''} \\
&= \overline{m_{wx}}\left(\overline{m}\overline{m''}\right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\overline{m_{wx}}\,\overline{\mu}^{(\overline{m}\overline{m''})} &= \overline{m_{wx}}^{(\overline{\mu}\,\overline{m})(\overline{\mu}\overline{m''})} \\
&= \left(\overline{m_{wx}}\,\overline{\mu}\,\overline{m}\right)^{\overline{\mu}\overline{m''}} \\
&= (\overline{m_{wx}}\,\overline{m})^{\overline{\mu}\overline{m''}} \\
&= \overline{m_{wx}}\left(\overline{m}^{\overline{\mu}\overline{m''}}\right) \\
&= \overline{m_{wx}}\left(\overline{m}\overline{m''}\right)
\end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde

$$\left(\overline{m}\overline{m''}\right)^{\overline{\mu}\,\overline{m_{zt}}} = \left(\overline{m}\overline{m''}\right)\overline{m_{zt}} = {}^{\overline{\mu}(\overline{m}\overline{m''})}\,\overline{m_{zt}}$$

olduğu görülür. Demek ki her $m \in \mathrm{P}(x,y)$ ve $m'' \in \mathrm{P}(y,z)$ için $\overline{m}\overline{m''} \in \mathrm{P}(x,z)$ olup $\mathrm{P} = \{\mathrm{P}(x,y) : x,y \in \mathrm{A}_0\}$ ailesi bir R-cebiroiddir. Öyle ise $\overline{\mathrm{V}} = \left\{\overline{\mathrm{V}(x,y)} : x,y \in \mathrm{A}_0\right\}$ ailesi $\frac{\mathrm{M}}{[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!]}$ R-cebiroidinin üreteç ailesi olduğundan ve her $x,y \in \mathrm{A}_0$ için $\overline{\mathrm{V}(x,y)} \subseteq \mathrm{P}(x,y)$ olduğundan her $x,y \in \mathrm{A}_0$ için $\frac{\mathrm{M}}{[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!]}(x,y) \subseteq \mathrm{P}(x,y)$ olup $\mathrm{P} = \frac{\mathrm{M}}{[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!]}$ dir. Bunun da anlamı $\overline{\mu} : \frac{\mathrm{M}}{[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!]} \longrightarrow \mathrm{A}$ bir çaprazlanmış modüldür.

Böylece her $x,y,z \in \mathrm{A}_0$, $m \in \mathrm{M}(x,z)$, $m' \in \mathrm{M}(z,y)$ için

$$\overline{m^{\mu m'}} = \overline{m^{\overline{\mu}\overline{m'}}} = \overline{m}^{\overline{\mu}\overline{m'}} = \overline{m}\overline{m'} = \overline{mm'}$$

olup $m^{\mu m'} - mm' = [\![m,m']\!]_1 \in [\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!](x,y)$ ve benzer şekilde

$$\overline{{}^{\mu m}m'} = \overline{mm'}$$

olup ${}^{m}m' - mm' = [\![m,m']\!]_2 \in [\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!](x,y)$ dir. Yani her $x,y \in \mathrm{A}_0$ için $[\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!](x,y) \subseteq [\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!](x,y)$ dir. İspatın başında her $x,y \in \mathrm{A}_0$ için $[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!](x,y) \subseteq [\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!](x,y)$ olduğunu görmüştük. Öyle ise her $x,y \in \mathrm{A}_0$ için $[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!](x,y) = [\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!](x,y)$ olup $[\![\mathrm{V},\mathrm{V}]\!] = [\![\mathrm{M},\mathrm{M}]\!]$ dir. □

2.5 $(-)^{\mathrm{cr}}$ funktoru

Her $\mathcal{M} = (\mu : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{A}), \mathcal{M}' = (\mu' : \mathrm{M}' \longrightarrow \mathrm{B}) \in \mathrm{ObPXALG}(R)$ ve her $f = (f_1, f_2) : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}' \in \mathrm{MorPXALG}(R)$ için

$$\begin{array}{rccc} f_1^{\mathrm{cr}} : & \mathrm{M}^{\mathrm{cr}} & \longrightarrow & \mathrm{M}'^{\mathrm{cr}} \\ & \overline{m} & \longmapsto & f_1^{\mathrm{cr}}\overline{m} = \overline{f_1 m} \end{array}$$

biçiminde tanımlanırsa $\left(f_1^{\mathrm{cr}}, f_2\right)$ açıkça bir R-cebiroid çaprazlanmış modül morfizmi olur.

Böylece $\mathcal{M}$ ön-çaprazlanmış modülünden $\mathcal{M}^{\mathrm{cr}}$ çaprazlanmış modülünün elde edilişi bize $\mathrm{PXAlg}(R)$ den $\mathrm{XAlg}(R)$ ye

$$\begin{array}{rccc} (-)^{\mathrm{cr}} : & \mathrm{PXAlg}(R) & \longrightarrow & \mathrm{XAlg}(R) \\ & \mathcal{M} & \longmapsto & \mathcal{M}^{\mathrm{cr}} \\ & f = (f_1, f_2) & \longmapsto & f^{\mathrm{cr}} = \left(f_1^{\mathrm{cr}}, f_2\right) \end{array}$$

biçiminde bir funktor verir.

Önerme 2.29 Her $\mathcal{M}=(\mu : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{A}), \mathcal{M}'=(\mu' : \mathrm{M}' \longrightarrow \mathrm{B}), \mathcal{M}''=(\mu'' : \mathrm{M}'' \longrightarrow \mathrm{C}) \in \mathrm{ObPXAlg}(R)$ ve her $f=(f_1,f_2):\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{M}'$, $f'=(f_1',f_2'):\mathcal{M}'\longrightarrow\mathcal{M}''\in\mathrm{MorPXAlg}(R)$ için $f'^{\mathrm{cr}}f^{\mathrm{cr}}=(f'f)^{\mathrm{cr}}$ eşitliği mevcuttur.

İspat: Her $m\in\mathrm{M}$ için

$$\left(f_1'^{\mathrm{cr}}f_1^{\mathrm{cr}}\right)\overline{m}=f_1'^{\mathrm{cr}}\left(f_1^{\mathrm{cr}}\overline{m}\right)=f_1'^{\mathrm{cr}}\left(\overline{f_1m}\right)=\overline{f_1'\left(f_1m\right)}=\overline{\left(f_1'f_1\right)(m)}=\left(f_1'f_1\right)^{\mathrm{cr}}\overline{m}$$

olduğundan $f_1'^{\mathrm{cr}}f_1^{\mathrm{cr}}=(f_1'f_1)^{\mathrm{cr}}$ dir. Öyle ise

$$f'^{\mathrm{cr}}f^{\mathrm{cr}}=\left(f_1'^{\mathrm{cr}},f_2'\right)\left(f_1^{\mathrm{cr}},f_2\right)=\left(f_1'^{\mathrm{cr}}f_1^{\mathrm{cr}},f_2'f_2\right)=\left(\left(f_1'f_1\right)^{\mathrm{cr}},f_2'f_2\right)=\left(f'f\right)^{\mathrm{cr}}$$

olur. □

Önerme 2.30 $(-)^{\mathrm{cr}}:\mathrm{PXAlg}(R)\longrightarrow\mathrm{XAlg}(R)$ funktoru i: $\mathrm{XAlg}(R)\longrightarrow\mathrm{PXAlg}(R)$ gömme funktorunun sol-eki'dir.

İspat: $\mathrm{XAlg}(R)\left((-)^{\mathrm{cr}},-\right)$ ile $\mathrm{PXAlg}(R)(-,i(-))$ arasında bir doğal izomorfizm bulmalıyız. Eğer aradığımız doğal izomorfizmi Φ ile gösterirsek

$$\begin{array}{rccc}\Phi: & \mathrm{ObPXAlg}(R)\times\mathrm{ObXAlg}(R) & \longrightarrow & \mathrm{Sets}\\ & (\mathcal{M},\mathcal{N}) & \longmapsto & \Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})\end{array}$$

biçiminde elde edilen $\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})$ dönüşümü her $\mathcal{M}\in\mathrm{ObPXAlg}(R)$, $\mathcal{N}\in\mathrm{ObXAlg}(R)$ için

$$\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N}):\mathrm{XAlg}(R)\left(\mathcal{M}^{\mathrm{cr}},\mathcal{N}\right)\longrightarrow\mathrm{PXAlg}(R)(\mathcal{M},\mathcal{N})$$

şeklinde $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{N}$ de doğal, 1-1 ve örten bir fonksiyon olmalıdır. Eğer $g=(g_1,g_2):\mathcal{M}^{\mathrm{cr}}\longrightarrow\mathcal{N}$ bir çaprazlanmış modül morfizmi ise

$$\begin{array}{rccc}h_1: & \mathrm{M} & \longrightarrow & \mathrm{N}\\ & m & \longmapsto & h_1m=g_1\overline{m}\end{array}$$

olmak üzere $h=(h_1,g_2):\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{N}$ bir ön-çaprazlanmış modül morfizmi olup $h^{\mathrm{cr}}=\left(h_1^{\mathrm{cr}},g_2\right)=(g_1,g_2)=g$ dir. Yani $\mathrm{XAlg}(R)\left(\mathcal{M}^{\mathrm{cr}},\mathcal{N}\right)$ nin her elemanı bir $f=(f_1,f_2)\in\mathrm{PXAlg}(R)(\mathcal{M},\mathcal{N})$ için $f^{\mathrm{cr}}=\left(f_1^{\mathrm{cr}},f_2\right)$ biçimindedir. Öyle ise $\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})$ yi

$$\begin{array}{rccc}\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N}): & \mathrm{XAlg}(R)\left(\mathcal{M}^{\mathrm{cr}},\mathcal{N}\right) & \longrightarrow & \mathrm{PXAlg}(R)(\mathcal{M},\mathcal{N})\\ & f^{\mathrm{cr}}=\left(f_1^{\mathrm{cr}},f_2\right) & \longmapsto & \Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})\left(f^{\mathrm{cr}}\right)=f=(f_1,f_2)\end{array}$$

biçiminde tanımlayabiliriz. Bu şekliyle $\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})$ fonksiyonu açıkça iyi tanımlı bir fonksiyondur. Şimdi $\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})$ nin taşıması gereken özelliklere bakalım:

1. $\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})$ 1-1 dir: Her $f^{\mathrm{cr}}=\left(f_1^{\mathrm{cr}},f_2\right), f'^{\mathrm{cr}}=\left(f_1'^{\mathrm{cr}},f_2'\right)\in \mathrm{XAlg}(R)(\mathcal{M},\mathcal{N})$ için $f^{\mathrm{cr}}\neq f'^{\mathrm{cr}}$ olsun. Bu durumda $f_2\neq f_2'$ veya $f_1^{\mathrm{cr}}\neq f_1'^{\mathrm{cr}}$ dir. Eğer $f_2\neq f_2'$ ise

$$\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})(f^{\mathrm{cr}})=f=(f_1,f_2)\neq\left(f_1',f_2'\right)=f'=\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})\left(f'^{\mathrm{cr}}\right)$$

dir. Eğer $f_1^{\mathrm{cr}}\neq f_1'^{\mathrm{cr}}$ ise en az bir $m\in \mathrm{M}$ için

$$f_1 m=f_1^{\mathrm{cr}}\overline{m}\neq f_1'^{\mathrm{cr}}\overline{m}=f_1' m$$

olur ki bu $f_1\neq f_1'$ demektir. Böylece yine

$$\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})(f^{\mathrm{cr}})=f=(f_1,f_2)\neq\left(f_1',f_2'\right)=f'=\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})\left(f'^{\mathrm{cr}}\right)$$

eşitsizliğine ulaşılır.

2. $\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})$ örtendir: Her $f\in \mathrm{PXAlg}(R)(\mathcal{M},\mathcal{N})$ için açıkça $f^{\mathrm{cr}}\in \mathrm{XAlg}(R)(\mathcal{M}^{\mathrm{cr}},\mathcal{N})$ olup $\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})(f^{\mathrm{cr}})=f$ dir.

3. $\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})$, $\mathcal{M}$ de doğaldır: $(-)^{\bullet}$, $(-)$ ile sağdan kompozisyon olmak üzere her $g\in \mathrm{PXAlg}(R)(\mathcal{M},\mathcal{M}')$ için

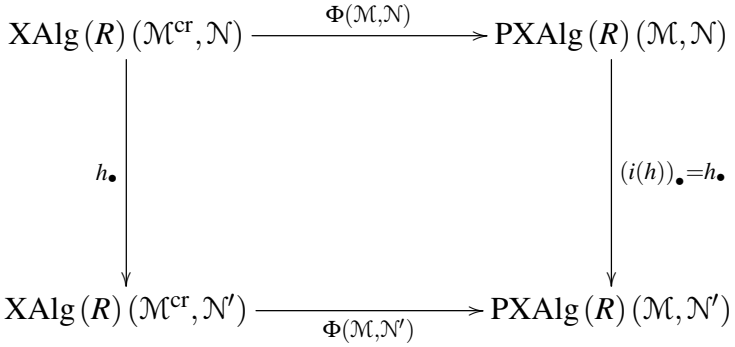
$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{XAlg}(R)(\mathcal{M}^{\mathrm{cr}},\mathcal{N}) & \xrightarrow{\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})} & \mathrm{PXAlg}(R)(\mathcal{M},\mathcal{N}) \\
\uparrow{\scriptstyle (g^{\mathrm{cr}})^{\bullet}} & & \uparrow{\scriptstyle g^{\bullet}} \\
\mathrm{XAlg}(R)(\mathcal{M}'^{\mathrm{cr}},\mathcal{N}) & \xrightarrow[\Phi(\mathcal{M}',\mathcal{N})]{} & \mathrm{PXAlg}(R)(\mathcal{M}',\mathcal{N})
\end{array}$$

diyagramı değişmelidir, çünkü her $f'^{\mathrm{cr}}\in \mathrm{XAlg}(R)(\mathcal{M}'^{\mathrm{cr}},\mathcal{N})$ için

$$\begin{array}{rcl}
\left(\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})(g^{\mathrm{cr}})^{\bullet}\right)(f'^{\mathrm{cr}}) & = & \Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})\left((g^{\mathrm{cr}})^{\bullet}f'^{\mathrm{cr}}\right) \\
 & = & \Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})\left(f'^{\mathrm{cr}}g^{\mathrm{cr}}\right) \\
 & = & \Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})\left((f'g)^{\mathrm{cr}}\right) \\
 & = & f'g \\
 & = & g^{\bullet}f' \\
 & = & g^{\bullet}\left(\Phi(\mathcal{M}',\mathcal{N})(f'^{\mathrm{cr}})\right) \\
 & = & \left(g^{\bullet}\Phi(\mathcal{M}',\mathcal{N})\right)(f'^{\mathrm{cr}})
\end{array}$$

dir.

4. $\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})$, $\mathcal{N}$ de doğaldır: $(-)_\bullet$, $(-)$ ile soldan kompozisyon olmak üzere her $h \in \mathrm{XAlg}(R)(\mathcal{N},\mathcal{N}')$ için



diyagramı değişmelidir, çünkü her $f^{\mathrm{cr}} \in \mathrm{XAlg}(R)(\mathcal{M}^{\mathrm{cr}},\mathcal{N})$ için

$$\begin{aligned}
((i(h))_\bullet \Phi(\mathcal{M},\mathcal{N}))\, f^{\mathrm{cr}} &= h_\bullet(\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})(f^{\mathrm{cr}})) \\
&= h_\bullet f \\
&= hf \\
&= \Phi(\mathcal{M},\mathcal{N}')((hf)^{\mathrm{cr}}) \\
&= \Phi(\mathcal{M},\mathcal{N}')(h^{\mathrm{cr}} f^{\mathrm{cr}}) \\
&= \Phi(\mathcal{M},\mathcal{N}')(hf^{\mathrm{cr}}) \\
&= \Phi(\mathcal{M},\mathcal{N}')(h_\bullet f^{\mathrm{cr}}) \\
&= (\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N}')h_\bullet)(f^{\mathrm{cr}})
\end{aligned}$$

dir. □

$(-)^{\mathrm{cr}} : \mathrm{PXAlg}(R) \longrightarrow \mathrm{XAlg}(R)$ funktoru i: $\mathrm{XAlg}(R) \longrightarrow \mathrm{PXAlg}(R)$ gömme funktorunun sol-eki olması eşçarpımları koruduğunu gösterir. 4. bölümde $\mathrm{XAlg}(R)$ de eşçarpımı elde ederken $(-)^{\mathrm{cr}}$ funktorunun bu özelliğini kullanacağız.

BÖLÜM 3

R-Cebiroid Serbest Modülleri, Serbest Çaprazlanmış Modülleri, Geri Çekme Çaprazlanmış Modülleri ve İndirgenmiş Çaprazlanmış Modülleri

3.1 Giriş

Bu bölümde R. Brown, P. J. Higgins ve R. Sivera'ın [10] de gruplar ve gruboidler üzerine yaptıkları çalışmaları (71-76, 231-233) model alarak sırasıyla R-cebiroid serbest modüllerini, serbest ön-çaprazlanmış ve çaprazlanmış modüllerini, geri çekme çaprazlanmış modüllerini ve indirgenmiş çaprazlanmış modüllerini inceledik.

İlk kısımda K herhangi bir küme, A herhangi bir R-cebiroid iken K dan $\mathrm{A}_0 \times \mathrm{A}_0$ a tanımlı fonksiyonların objelerini oluşturduğu $\mathrm{Sets}_0/\mathrm{Alg}(R)$ kategorisini ve sabit bir A R-cebiroidi için $\mathrm{Sets}_0/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A})$ kategorisini tanımlayıp, $\omega : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{A}_0 \times \mathrm{A}_0$ fonksiyonu $\mathrm{Sets}_0/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A})$ kategorisinin bir objesi ise K üzerinde ω tarafından belirlenen serbest R-cebiroid A-modülünü elde ettik.

İkinci ve üçüncü kısımlarda R-cebiroid serbest ön-çaprazlanmış ve çaprazlanmış modüllerini inceledik. Önce K herhangi bir küme ve A herhangi bir R-cebiroid olmak üzere objelerini K dan A ya tanımlı fonksiyonların oluşturduğu $\mathrm{Sets}/\mathrm{Alg}(R)$ kategorisini ve sabit bir A R-cebiroidi için $\mathrm{Sets}/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A})$ kategorisini tanımlayıp, $\omega : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{A}$ fonksiyonu $\mathrm{Sets}/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A})$ kategorisinin bir objesi olmak üzere, K üzerinde ω tarafından belirlenen serbest R-cebiroid ön-çaprazlanmış A-modülünü; sonra da elde ettiğimiz serbest ön-çaprazlanmış modüle $(-)^{\mathrm{cr}}$ funktorunu uygulayarak K üzerinde ω tarafından belirlenen serbest R-cebiroid çaprazlanmış A-modülünü elde ettik.

Dördüncü ve beşinci kısımlarda sırasıyla, $f : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ bir R-cebiroid morfizmi olmak üzere, bir R-cebiroid çaprazlanmış A-modülünün f üzerinden geri çekme çaprazlanmış modülünü ve bir R-cebiroid çaprazlanmış B-modülünden f ile indirgenmiş çaprazlanmış modülü inceleyip, f_* indirgenmiş çaprazlanmış modül funktorunun f^* geri çekme çaprazlanmış modül funktorunun sol-eki olduğunu gösterdik.

Bu bölüm boyunca kullanılacak olan A ve B R-cebiroidleri birimli olacaktır. Ayrıca bu

bölümde alt indis olarak kullanılacak olan tüm i, j, n, s, t ler birer doğal sayı olacaktır.

3.2 *R*-cebiroid serbest modülleri

M ve A birer *R*-cebiroid ve M bir A-modül olsun. Böylece

$$\begin{array}{rccc} \omega: & \mathrm{M} & \longrightarrow & \mathrm{A}_0 \times \mathrm{A}_0 \\ & m & \longmapsto & \omega m = (sm, tm) \end{array}$$

biçiminde bir fonksiyon vardır. Buradan hareketle K bir küme ve A bir *R*-cebiroid olmak üzere objelerini

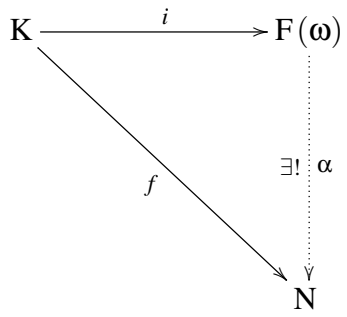
$$\begin{array}{rccc} \omega: & \mathrm{K} & \longrightarrow & \mathrm{A}_0 \times \mathrm{A}_0 \\ & k & \longmapsto & \omega k = (\omega_1 k, \omega_2 k) \end{array}$$

biçiminde fonksiyonların oluşturduğu, morfizmlerini de $f : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{K}'$ bir fonksiyon ve $g : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ bir *R*-cebiroid morfizmi olmak üzere,

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{K} & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathrm{K}' \\ {\scriptstyle \omega}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \omega'} \\ \mathrm{A}_0 \times \mathrm{A}_0 & \xrightarrow[g_0 \times g_0]{} & \mathrm{B}_0 \times \mathrm{B}_0 \end{array}$$

diyagramını komutatif yapan $(f, g_0 \times g_0)$ ikililerinin oluşturduğu $\mathrm{Sets}_0/\mathrm{Alg}(R)$ kategorisi elde edilir. Eğer $\mathrm{B} = \mathrm{A}$ ve $g_0 \times g_0 = I_{\mathrm{A}_0 \times \mathrm{A}_0}$ alınırsa $\mathrm{Sets}_0/\left(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A}\right)$ kategorisi elde edilir.

Tanım 3.1 K bir küme, A bir *R*-cebiroid ve $\omega : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{A}_0 \times \mathrm{A}_0$ fonksiyonu $\mathrm{Sets}_0/\left(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A}\right)$ kategorisinin bir objesi olsun. $\mathrm{F}(\omega)$ bir *R*-cebiroid A-modülü ve $i : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{F}(\omega)$ bir fonksiyon olmak üzere her N *R*-cebiroid A-modülü ve her $k \in \mathrm{K}$ için $f(k) \in \mathrm{N}(\omega_1 k, \omega_2 k)$ koşulunu sağlayan her $f : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{N}$ fonksiyonu için $f = \alpha i$ olacak biçimde yani



diyagramını değişmeli yapacak biçimde biricik bir $\alpha : \mathrm{F}(\omega) \longrightarrow \mathrm{N}$ A-modül morfizmi mevcutsa i fonksiyonu ile birlikte $\mathrm{F}(\omega)$ ya K üzerinde ω tarafından belirlenen serbest R-cebiroid A-modülü denir.

Serbest modül izomorfizm farkıyla biriciktir.

Önerme 3.2 $\omega : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{A}_0 \times \mathrm{A}_0$ fonksiyonu $\mathrm{Sets}_0/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A})$ kategorisinin bir objesi ise K üzerinde ω tarafından belirlenen serbest R-cebiroid A-modülü mevcuttur.

İspat: Her $k \in \mathrm{K}$ ve $ta = \omega_1 k$ ve $sa' = \omega_2 k$ koşulunu sağlayan her $a, a' \in \mathrm{A}$ için aka' şeklindeki tüm elemanlar kullanılarak $ta'_1 = sa_2$, $ta'_2 = sa_3, \ldots ta'_{n-1} = sa_n$ olmak koşulu ile elde edilen $a_1 k_1 a'_1 a_2 k_2 a'_2 \ldots a_n k_n a'_n$ biçimindeki tüm kelimelerin kümesini $\mathrm{F}(\mathrm{K})$ ile gösterelim. Her $p_i = a_{i_1} k_{i_1} a'_{i_1} \ldots a_{i_n} k_{i_n} a'_{i_n} \in \mathrm{F}(\mathrm{K})$ için $sp_i = sa_{i_1}$ ve $tp_i = ta'_{i_n}$ olsun. Eğer her $x, y \in \mathrm{A}_0$ için $sp_i = x$ ve $tp_i = y$ koşulunu sağlayan tüm kelimelerin oluşturduğu serbest toplamsal değişmeli grubu $\mathrm{F}(\omega)(x,y)$ ile gösterirsek, $\mathrm{F}(\omega)(x,y)$ nin herbir elemanı $\sum_i p_i$ biçiminde olup $\mathrm{F}(\omega)(x,y)$ üzerinde her $r \in R$ için

$$\begin{array}{rcl}
(r \cdot a_1) k_1 a'_1 \ldots a_n k_n a'_n & = & a_1 k_1 (r \cdot a'_1) \ldots a_n k_n a'_n \\
(r \cdot a_1) k_1 a'_1 \ldots a_n k_n a'_n & = & a_1 k_1 a'_1 (r \cdot a_2) \ldots a_n k_n a'_n \\
 & \vdots & \\
(r \cdot a_1) k_1 a'_1 \ldots a_n k_n a'_n & = & a_1 k_1 a'_1 \ldots a_n k_n (r \cdot a'_n)
\end{array}$$

şeklinde tanımlanan bağıntı açıkça bir denklik bağıntısıdır. Böylece $\mathrm{F}(\omega)(x,y)$ üzerinde

$$\begin{array}{rcl}
R \times \mathrm{F}(\omega)(x,y) & \longrightarrow & \mathrm{F}(\omega)(x,y) \\
(r, aka') & \longmapsto & r \cdot (aka') = (r \cdot a) ka' \\
(r, a_1 k_1 a'_1 \ldots a_n k_n a'_n) & \longmapsto & r \cdot (a_1 k_1 a'_1 \ldots a_n k_n a'_n) = (r \cdot a_1) k_1 a'_1 \ldots a_n k_n a'_n \\
\left(r, \sum_i p_i\right) & \longmapsto & r \cdot \left(\sum_i p_i\right) = \sum_i (r \cdot p_i)
\end{array}$$

biçiminde bir R-etkisi tanımlanabilir. Bu tanımlama ile $\mathrm{F}(\omega)(x,y)$ bir R-modül olur. Ayrıca

$$\mathrm{F}(\omega) = \{\mathrm{F}(\omega)(x,y) : x, y \in \mathrm{A}_0\}$$

ailesi üzerinde her $x,y,z \in \mathrm{A}_0$ için

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{F}(\omega)(x,y) \times \mathrm{F}(\omega)(y,z) & \longrightarrow & \mathrm{F}(\omega)(x,z) \\ \left(a_{i_1}k_{i_1}a'_{i_1}...a_{i_n}k_{i_n}a'_{i_n}, a_{j_1}k_{j_1}a'_{j_1}...a_{j_n}k_{j_n}a'_{j_n}\right) & \longmapsto & a_{i_1}k_{i_1}a'_{i_1}...a_{i_n}k_{i_n}a'_{i_n}a_{j_1}k_{j_1}a'_{j_1}...a_{j_n}k_{j_n}a'_{j_n} \\ \left(\sum\limits_i p_i, \sum\limits_j p_j\right) & \longmapsto & \left(\sum\limits_i p_i\right)\left(\sum\limits_j p_j\right) = \sum\limits_{i,j} p_i p_j \end{array}$$

biçiminde bir kompozisyon tanımlanırsa $\mathrm{F}(\omega)$ ailesinin bir R-cebiroid olduğu görülür.

Ek olarak, A nın $\mathrm{F}(\omega)$ üzerine her $w,x,y,z \in \mathrm{A}_0$ için

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{A}(w,x) \times \mathrm{F}(\omega)(x,y) & \longrightarrow & \mathrm{F}(\omega)(w,y) \\ (a, a_1k_1a'_1...a_nk_na'_n) & \longmapsto & {}^a(a_1k_1a'_1...a_nk_na'_n) = (aa_1)k_1a'_1...a_nk_na'_n \\ \left(a, \sum\limits_i p_i\right) & \longmapsto & {}^a\left(\sum\limits_i p_i\right) = \sum\limits_i {}^a p_i \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{F}(\omega)(x,y) \times \mathrm{A}(y,z) & \longrightarrow & \mathrm{F}(\omega)(x,z) \\ (a_1k_1a'_1...a_nk_na'_n, a') & \longmapsto & (a_1k_1a'_1...a_nk_na'_n)^{a'} = a_1k_1a'_1...a_nk_n(a'_na') \\ \left(\sum\limits_i p_i, a'\right) & \longmapsto & \left(\sum\limits_i p_i\right)^{a'} = \sum\limits_i p_i^{a'} \end{array}$$

biçiminde bir asosyatif etkisi tanımlanabilir ve bu etki ile $\mathrm{F}(\omega)$ bir A-modül olur.

i fonksiyonu

$$\begin{array}{rccl} i: & \mathrm{K} & \longrightarrow & \mathrm{F}(\omega) \\ & k & \longmapsto & i(k) = 1k1 \ (= 1_{\omega_1 k} k 1_{\omega_2 k}) \end{array}$$

biçiminde ve her N A-modülü ve her $k \in \mathrm{K}$ için $f(k) \in \mathrm{N}(\omega_1 k, \omega_2 k)$ koşulunu sağlayan her $f : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{N}$ fonksiyonu için α fonksiyonu

$$\begin{array}{rccl} \alpha: & \mathrm{F}(\omega) & \longrightarrow & \mathrm{N} \\ & aka' & \longmapsto & \alpha(aka') = {}^a f k^{a'} \\ & a_1k_1a'_1...a_nk_na'_n & \longmapsto & \alpha(a_1k_1a'_1...a_nk_na'_n) = \alpha(a_1k_1a'_1)...\alpha(a_nk_na'_n) \\ & \sum\limits_i p_i & \longmapsto & \alpha\left(\sum\limits_i p_i\right) = \sum\limits_i \alpha p_i \end{array}$$

biçiminde tanımlansın.

(i) α bir R-cebiroid morfizmidir. Çünkü

1. her $x,y \in \mathrm{A}_0$ ve $\sum_i p_i, \sum_j p_j \in \mathrm{F}(\omega)(x,y)$ için

$$\begin{aligned}
\alpha\left(\sum_i p_i + \sum_j p_j\right) &= \alpha\left(\sum_{t=i,j} p_t\right) \\
&= \sum_t \alpha p_t \\
&= \sum_i \alpha p_i + \sum_j \alpha p_j \\
&= \alpha\left(\sum_i p_i\right) + \alpha\left(\sum_j p_j\right)
\end{aligned}$$

2. her $x,y,z \in \mathrm{A}_0$, $\sum_i p_i \in \mathrm{F}(\omega)(x,y)$, ve $\sum_s p_s \in \mathrm{F}(\omega)(y,z)$ için

$$\begin{aligned}
\alpha\left(\sum_i p_i \sum_s p_s\right) &= \alpha\left(\sum_{i,s} p_i p_s\right) \\
&= \sum_{i,s} \alpha(p_i p_s) \\
&= \sum_{i,s} (\alpha p_i)(\alpha p_s) \\
&= \left(\sum_i \alpha p_i\right)\left(\sum_s \alpha p_s\right) \\
&= \alpha\left(\sum_i p_i\right)\alpha\left(\sum_s p_s\right)
\end{aligned}$$

3. her $r \in R$ ve $\sum_i p_i \in \mathrm{F}(\omega)$ için

$$\begin{aligned}
\alpha\left(r \cdot \sum_i p_i\right) &= \alpha\left(\sum_i (r \cdot p_i)\right) \\
&= \sum_i \alpha\left((r \cdot a_{i_1}) k_{i_1} a'_{i_1} \ldots a_{i_n} k_{i_n} a'_{i_n}\right) \\
&= \sum_i \left(^{r \cdot a_{i_1}} (fk_{i_1})^{a'_{i_1}} \ldots ^{a_{i_n}} (fk_{i_n})^{a'_{i_n}}\right) \\
&= \sum_i \left(\left(r \cdot \left(^{a_{i_1}} (fk_{i_1})^{a'_{i_1}}\right)\right) \ldots ^{a_{i_n}} (fk_{i_n})^{a'_{i_n}}\right) \\
&= \sum_i \left(\ r \cdot \left(^{a_{i_1}} (fk_{i_1})^{a'_{i_1}} \ldots ^{a_{i_n}} (fk_{i_n})^{a'_{i_n}}\right)\right) \\
&= \sum_i \left(\ r \cdot \left(\alpha\left(a_{i_1} k_{i_1} a'_{i_1} \ldots a_{i_n} k_{i_n} a'_{i_n}\right)\right)\right) \\
&= r \cdot \left(\sum_i \alpha p_i\right) \\
&= r \cdot \left(\alpha\left(\sum_i p_i\right)\right)
\end{aligned}$$

dir.

(ii) α bir A-modül morfizmidir. Çünkü her $w,x,y,z \in \mathrm{A}_0$, $a \in \mathrm{A}(w,x)$, $a' \in \mathrm{A}(y,z)$ ve

$\sum_i p_i \in \mathrm{F}(\omega)(x,y)$ için

$$\begin{aligned}
\alpha\left({}^{a}\left(\sum_i p_i\right)\right) &= \alpha\left(\sum_i {}^{a} p_i\right) \\
&= \alpha\left(\sum_i {}^{a}\left(a_{i_1}k_{i_1}a'_{i_1}...a_{i_n}k_{i_n}a'_{i_n}\right)\right) \\
&= \sum_i \alpha\left((aa_{i_1})k_{i_1}a'_{i_1}...a_{i_n}k_{i_n}a'_{i_n}\right) \\
&= \sum_i \left({}^{aa_{i_1}}(fk_{i_1})^{a'_{i_1}}...{}^{a_{i_n}}(fk_{i_n})^{a'_{i_n}}\right) \\
&= \sum_i \left({}^{a}\left({}^{a_{i_1}}(fk_{i_1})^{a'_{i_1}}\right)...{}^{a_{i_n}}(fk_{i_n})^{a'_{i_n}}\right) \\
&= \sum_i {}^{a}\left({}^{a_{i_1}}(fk_{i_1})^{a'_{i_1}}...{}^{a_{i_n}}(fk_{i_n})^{a'_{i_n}}\right) \\
&= {}^{a}\left(\sum_i \alpha\left(a_{i_1}k_{i_1}a'_{i_1}...a_{i_n}k_{i_n}a'_{i_n}\right)\right) \\
&= {}^{a}\left(\sum_i \alpha p_i\right) \\
&= {}^{a}\left(\alpha\left(\sum_i p_i\right)\right)
\end{aligned}$$

ve benzer biçimde

$$\alpha\left(\left(\sum_i p_i\right)^{a'}\right) = \left(\alpha\left(\sum_i p_i\right)\right)^{a'}$$

olduğu görülür.

(*iii*) α evrensellik özelliğini sağlar. Çünkü her $k \in \mathrm{K}$ için $(\alpha i)(k) = \alpha(1k1) = {}^{1}fk^{1} = fk$ dır.

(*iv*) Evrensellik özelliğini sağlayan başka bir R-cebiroid morfizmi $\alpha' : \mathrm{F}(\omega) \longrightarrow \mathrm{N}$ ise her $aka' \in \mathrm{F}(\omega)$ için

$$\begin{aligned}
\alpha'(aka') &= \alpha'\left({}^{a}(1k1)^{a'}\right) \\
&= {}^{a}(\alpha'(1k1))^{a'} \\
&= {}^{a}(\alpha'(ik))^{a'} \\
&= {}^{a}((\alpha' i)(k))^{a'} \\
&= {}^{a}(fk)^{a'} \\
&= {}^{a}((\alpha i)(k))^{a'} \\
&= {}^{a}(\alpha(ik))^{a'} \\
&= {}^{a}(\alpha(1k1))^{a'} \\
&= \alpha(aka')
\end{aligned}$$

olup $\alpha = \alpha'$ elde edilir.

Ayrıca, eğer $\widetilde{i} : \mathrm{K} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{F}(\omega)}$ morfizmi ile birlikte bu koşulları taşıyan başka bir R-cebiroid A-modülü $\widetilde{\mathrm{F}(\omega)}$ ve evrensellik özelliğini sağlayan biricik R-cebiroid morfizmi $\widetilde{\alpha} : \widetilde{\mathrm{F}(\omega)} \longrightarrow \mathrm{N}$

ise $\mathrm{N}=\mathrm{F}(\omega)$ aldığımızda $i=\widetilde{\alpha}\widetilde{i}$ ve $\mathrm{N}=\widetilde{\mathrm{F}(\omega)}$ aldığımızda $\widetilde{i}=\alpha i$ olup $i=\widetilde{\alpha}\alpha i$ ve $\widetilde{i}=\alpha\widetilde{\alpha}\widetilde{i}$ dir. Öyle ise $\widetilde{\alpha}\alpha=I_{\mathrm{F}(\omega)}$ ve $\alpha\widetilde{\alpha}=I_{\widetilde{\mathrm{F}(\omega)}}$ olduğundan α bir izomorfizmdir. $\square$

$\mathrm{Sets}_0/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A})$ nın her $\omega:\mathrm{K}\longrightarrow \mathrm{A}_0\times\mathrm{A}_0$, $\omega':\mathrm{K}'\longrightarrow \mathrm{A}_0\times\mathrm{A}_0$ objesi ve her $(f_1,I_{\mathrm{A}_0\times\mathrm{A}_0}):(\omega:\mathrm{K}\longrightarrow \mathrm{A}_0\times\mathrm{A}_0)\longrightarrow(\omega':\mathrm{K}'\longrightarrow \mathrm{A}_0\times\mathrm{A}_0)$ morfizmi için

$$\begin{array}{rccl} Ff_1: & \mathrm{F}(\omega) & \longrightarrow & \mathrm{F}(\omega') \\ & aka' & \longmapsto & Ff_1(aka')=a(f_1k)a' \\ & a_1k_1a_1'...a_nk_na_n' & \longmapsto & Ff_1(a_1k_1a_1'...a_nk_na_n')=Ff_1(a_1k_1a_1')...Ff_1(a_nk_na_n') \\ & \sum\limits_i p_i & \longmapsto & Ff_1\left(\sum\limits_i p_i\right)=\sum\limits_i Ff_1p_i \end{array}$$

biçiminde tanımlanırsa (Ff_1,I_{A}) açıkça bir R-cebiroid A-modül morfizmi olur.

Böylece R-cebiroid serbest modülünün elde edilişi bize

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathrm{Sets}_0/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A}) & \longrightarrow & \mathrm{ModAlg}(R)/\mathrm{A} \\ & \omega:\mathrm{K}\longrightarrow \mathrm{A}_0\times\mathrm{A}_0 & \longmapsto & F(\omega)=(\mathrm{F}(\omega),\mathrm{A}) \\ & (f_1,I_{\mathrm{A}_0\times\mathrm{A}_0}):\omega\longrightarrow\omega' & \longmapsto & F(f_1,I_{\mathrm{A}_0\times\mathrm{A}_0})=(Ff_1,I_{\mathrm{A}}):F(\omega)\longrightarrow F(\omega') \end{array}$$

biçiminde bir funktor verir.

Önerme 3.3 F funktoru,

$$\begin{array}{rccl} U: & \mathrm{ModAlg}(R)/\mathrm{A} & \longrightarrow & \mathrm{Sets}_0/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A}) \\ & (\mathrm{N},\mathrm{A}) & \longmapsto & U(\mathrm{N},\mathrm{A}):\ \mathrm{N}\longrightarrow \mathrm{A}_0\times\mathrm{A}_0 \\ & & & \qquad\qquad n\longmapsto (sn,tn) \\ & f=(f_1,I_{\mathrm{A}}):(\mathrm{N},\mathrm{A})\longrightarrow(\mathrm{N}',\mathrm{A}) & \longmapsto & Uf=U(f_1,I_{\mathrm{A}})=(f_1,I_{\mathrm{A}_0\times\mathrm{A}_0}):U(\mathrm{N},\mathrm{A})\longrightarrow U(\mathrm{N}',\mathrm{A}) \end{array}$$

forgetful funktorunun sol-eki'dir.

İspat: $(\mathrm{ModAlg}(R)/\mathrm{A})(F(-),(-))$ ile $(\mathrm{Sets}_0/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A}))(-,U(-))$ arasında bir doğal izomorfizm bulmalıyız. Aradığımız doğal izomorfizmi Φ ile gösterirsek

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & \mathrm{Ob}(\mathrm{Sets}_0/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A}))\times\mathrm{Ob}(\mathrm{ModAlg}(R)/\mathrm{A}) & \longrightarrow & \mathrm{Sets} \\ & (\omega:\mathrm{K}\longrightarrow \mathrm{A}_0\times\mathrm{A}_0,(\mathrm{N},\mathrm{A})) & \longmapsto & \Phi(\omega:\mathrm{K}\longrightarrow \mathrm{A}_0\times\mathrm{A}_0,(\mathrm{N},\mathrm{A}))=\Phi(\omega,\mathrm{N}) \end{array}$$

biçiminde elde edilen $\Phi(\omega,\mathrm{N})$ dönüşümü her $\omega\in\mathrm{Ob}(\mathrm{Sets}_0/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A}))$, $(\mathrm{N},\mathrm{A})\in\mathrm{Ob}(\mathrm{ModAlg}(R)/\mathrm{A})$ için

$$\Phi(\omega,\mathrm{N}):(\mathrm{ModAlg}(R)/\mathrm{A})((\mathrm{F}(\omega),\mathrm{A}),(\mathrm{N},\mathrm{A}))\longrightarrow(\mathrm{Sets}_0/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A}))(\omega,U(\mathrm{N},\mathrm{A}))$$

şeklinde, ω ve (N,A) da doğal, 1-1 ve örten bir fonksiyon olmalıdır.

Eğer $f=(f_1,I_{\mathrm{A}}):(\mathrm{F}(\omega),\mathrm{A})\longrightarrow(\mathrm{N},\mathrm{A})$ bir A-modül morfizmi ise

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{f_1}: & \mathrm{K} & \longrightarrow & \mathrm{N} \\ & k & \longmapsto & \widetilde{f_1}k=f_1(1k1) \end{array}$$

biçiminde bir $\widetilde{f_1}$ fonksiyonu mevcuttur. Bu durumda $F\widetilde{f_1}$ morfizmi $\mathrm{F}(\omega)$ den $\mathrm{F}(U(\mathrm{N},\mathrm{A}))$ ya tanımlı bir morfizm olup

$$\begin{array}{rccl}
\pi: & \mathrm{F}(U(\mathrm{N},\mathrm{A})) & \longrightarrow & \mathrm{N} \\
& ana' & \longmapsto & \pi(ana') = {}^{a}n^{a'} \\
& a_1n_1a'_1...a_tn_ta'_t & \longmapsto & \pi(a_1n_1a'_1...a_tn_ta'_t) = \pi(a_1n_1a'_1)...\pi(a_tn_ta'_t) \\
& \sum_i p_i & \longmapsto & \pi\left(\sum_i p_i\right) = \sum_i \pi p_i
\end{array}$$

A-modül morfizmi ile bileşkesi f_1 i verir. Gerçekten de her $aka' \in \mathrm{F}(\omega)$ için

$$\begin{array}{rcl}
\left(\pi \circ F\widetilde{f_1}\right)(aka') & = & \pi\left(F\widetilde{f_1}(aka')\right) \\
& = & \pi\left(a\left(\widetilde{f_1}k\right)a'\right) \\
& = & \pi(af_1(1k1)a') \\
& = & {}^{a}f_1(1k1)^{a'} \\
& = & f_1\left({}^{a}(1k1)^{a'}\right) \\
& = & f_1(aka')
\end{array}$$

dir. Öyle ise $\Phi(\omega,\mathrm{N})$ yi

$$\begin{array}{rccl}
\Phi(\omega,\mathrm{N}): & (\mathrm{ModAlg}(R)/\mathrm{A})((\mathrm{F}(\omega),\mathrm{A}),(\mathrm{N},\mathrm{A})) & \longrightarrow & (\mathrm{Sets}_0/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A}))(\omega, U(\mathrm{N},\mathrm{A})) \\
& f = (f_1, I_{\mathrm{A}}) & \longmapsto & \Phi(\omega,\mathrm{N})(f) = \widetilde{f} = \left(\widetilde{f_1}, I_{\mathrm{A}_0\times\mathrm{A}_0}\right)
\end{array}$$

biçiminde tanımlayabiliriz. Dikkat edilirse her $k \in \mathrm{K}$ için $s(1k1) = \omega_1 k$ ve $t(1k1) = \omega_2 k$ olduğundan

$$\begin{array}{rcl}
\left(U(\mathrm{N},\mathrm{A})\widetilde{f_1}\right)(k) & = & U(\mathrm{N},\mathrm{A})\left(\widetilde{f_1}(k)\right) \\
& = & U(\mathrm{N},\mathrm{A})(f_1(1k1)) \\
& = & (sf_1(1k1), tf_1(1k1)) \\
& = & (s(1k1), t(1k1)) \\
& = & (\omega_1 k, \omega_2 k) \\
& = & I_{\mathrm{A}_0\times\mathrm{A}_0}(\omega_1 k, \omega_2 k) \\
& = & (I_{\mathrm{A}_0\times\mathrm{A}_0}\omega)(k)
\end{array}$$

dir, yani

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{K} & \xrightarrow{\quad\widetilde{f_1}\quad} & \mathrm{N} \\
{\scriptstyle\omega}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle U(\mathrm{N},\mathrm{A})} \\
\mathrm{A}_0\times\mathrm{A}_0 & \xrightarrow[\mathrm{I}_{\mathrm{A}_0\times\mathrm{A}_0}]{} & \mathrm{A}_0\times\mathrm{A}_0
\end{array}$$

diyagramı değişmelidir. Öyle ise her $f \in (\mathrm{ModAlg}(R)/\mathrm{A})((\mathrm{F}(\omega),\mathrm{A}),(\mathrm{N},\mathrm{A}))$ için $\Phi(\omega,\mathrm{N})(f) = \widetilde{f} = \left(\widetilde{f}_1, I_{\mathrm{A}_0\times\mathrm{A}_0}\right) \in (\mathrm{Sets}_0/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A}))(\omega, U(\mathrm{N},\mathrm{A}))$ dir.

Şimdi $\Phi(\omega,\mathrm{N})$ nin özelliklerini inceleyelim:

1. $\Phi(\omega,\mathrm{N})$ iyi tanımlıdır: Yukarıda her $f \in (\mathrm{ModAlg}(R)/\mathrm{A})((\mathrm{F}(\omega),\mathrm{A}),(\mathrm{N},\mathrm{A}))$ için $\Phi(\omega,\mathrm{N})(f) \in (\mathrm{Sets}_0/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A}))(\omega, U(\mathrm{N},\mathrm{A}))$ olduğunu görmüştük. Şimdi $\Phi(\omega,\mathrm{N})(f) = \widetilde{f} \neq \widetilde{f'} = \Phi(\omega,\mathrm{N})(f')$ koşulunu gerçekleyen her $f, f' \in (\mathrm{ModAlg}(R)/\mathrm{A})((\mathrm{F}(\omega),\mathrm{A}),(\mathrm{N},\mathrm{A}))$ için $f \neq f'$ olduğunu görelim. Eğer $\widetilde{f} \neq \widetilde{f'}$ ise $\widetilde{f}_1(k) \neq \widetilde{f'}_1(k)$ eşitsizliğini sağlayan en az bir $k \in \mathrm{K}$ mevcuttur. Böylece $\widetilde{f}_1(k) = f_1(1k1)$ ve $\widetilde{f'}_1(k) = f'_1(1k1)$ olduğundan $f_1(1k1) \neq f'_1(1k1)$ elde edilir. Öyle ise $f \neq f'$ olur.

2. $\Phi(\omega,\mathrm{N})$ 1-1 dir: $f, f' \in (\mathrm{ModAlg}(R)/\mathrm{A})((\mathrm{F}(\omega),\mathrm{A}),(\mathrm{N},\mathrm{A}))$ için eğer $(\Phi(\omega,\mathrm{N})(f)) = (\Phi(\omega,\mathrm{N})(f'))$ ise her $k \in \mathrm{K}$ için $f_1(1k1) = \widetilde{f}_1(k) = \widetilde{f'}_1(k) = f_1(1k1)$ olup $ta = \omega_1 k$ ve $sa' = \omega_2 k$ koşulunu sağlayan her $a, a' \in \mathrm{A}$ için ${}^a f_1(1k1)^{a'} = {}^a f'_1(1k1)^{a'}$ elde edilir. Buradan, ${}^a f_1(1k1)^{a'} = f_1\left({}^a(1k1)^{a'}\right) = f_1(aka')$ ve ${}^a f'_1(1k1)^{a'} = f'_1\left({}^a(1k1)^{a'}\right) = f'_1(aka')$ olduğundan, $f_1(aka') = f'_1(aka')$ eşitliğine ulaşılır. Öyle ise $f_1 = f'_1$ ve böylece $f = f'$ olur.

3. $\Phi(\omega,\mathrm{N})$ örtendir: Her

$$h = (h_1,\ I_{\mathrm{A}_0\times\mathrm{A}_0}):\quad (\omega : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{A}_0\times\mathrm{A}_0) \quad\longrightarrow\quad (U(\mathrm{N},\mathrm{A}) : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{A}_0\times\mathrm{A}_0)$$

morfizmi için

$$f = (f_1, I_{\mathrm{A}_0\times\mathrm{A}_0}):\quad (\mathrm{F}(\omega),\mathrm{A}) \quad\longrightarrow\quad (\mathrm{N},\mathrm{A})$$

morfizmini

$$\begin{array}{rccl} f_1: & \mathrm{F}(\omega) & \longrightarrow & \mathrm{N} \\ & aka' & \longmapsto & {}^a(h_1k)^{a'} \\ & a_1ka'_1\ldots a_nk_na'_n & \longmapsto & f_1(a_1ka'_1)\ldots f_1(a_nk_na'_n) \\ & \sum\limits_i p_i & \longmapsto & \sum\limits_i (f_1 p_i) \end{array}$$

olacak biçimde tanımlarsak açıkça f bir A-modül morfizmi olup her $k \in \mathrm{K}$ için $(\Phi(\omega,\mathrm{N})(f))_1(k) = \widetilde{f}_1(k) = f_1(1k1) = {}^1(h_1k)^1 = h_1k$ yani $\Phi(\omega,\mathrm{N})(f) = h$ olur.

4. $\Phi(\omega,\mathrm{N})$, ω da doğaldır: $(-)^\bullet$, $(-)$ ile sağdan kompozisyon olmak üzere her $g \in (\mathrm{Sets}_0/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A}))(\omega,\omega')$ için

$$\begin{array}{ccc}
(\mathrm{ModAlg}(R)/\mathrm{A})((\mathrm{F}(\omega),\mathrm{A}),(\mathrm{N},\mathrm{A})) & \xrightarrow{\Phi(\omega,\mathrm{N})} & (\mathrm{Sets}_0/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A}))(\omega,U(\mathrm{N},\mathrm{A})) \\
\uparrow{\scriptstyle (Fg)^{\bullet}} & & \uparrow{\scriptstyle g^{\bullet}} \\
(\mathrm{ModAlg}(R)/\mathrm{A})((\mathrm{F}(\omega'),\mathrm{A}),(\mathrm{N},\mathrm{A})) & \xrightarrow[\Phi(\omega',\mathrm{N})]{} & (\mathrm{Sets}_0/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A}))(\omega',U(\mathrm{N},\mathrm{A}))
\end{array}$$

diyagramı değişmelidir. Gerçekten de her $h \in (\mathrm{ModAlg}(R)/\mathrm{A})((\mathrm{F}(\omega'),\mathrm{A}),(\mathrm{N},\mathrm{A}))$ ve $k \in \mathrm{K}$ için

$$\begin{array}{rcl}
((g^{\bullet}\Phi(\omega',\mathrm{N}))(h))_1(k) & = & (g^{\bullet}(\Phi(\omega',\mathrm{N})(h)))_1(k) \\
& = & ((\Phi(\omega',\mathrm{N})(h))g)_1(k) \\
& = & (\Phi(\omega',\mathrm{N})(h))_1(g_1k) \\
& = & h_1(1(g_1k)1)
\end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl}
((\Phi(\omega,\mathrm{N})(Fg)^{\bullet})(h))_1(k) & = & (\Phi(\omega,\mathrm{N})((Fg)^{\bullet}h))_1(k) \\
& = & (\Phi(\omega,\mathrm{N})(h(Fg)))_1(k) \\
& = & h_1((Fg)_1(1k1)) \\
& = & h_1(1(g_1k)1)
\end{array}$$

dir.

5. $\Phi(\omega,\mathrm{N})$, (N,A) da doğaldır: $(-)_{\bullet}$, $(-)$ ile soldan kompozisyon olmak üzere her $g \in (\mathrm{ModAlg}(R)/\mathrm{A})((\mathrm{N},\mathrm{A}),(\mathrm{N}',\mathrm{A}))$ için

$$\begin{array}{ccc}
(\mathrm{ModAlg}(R)/\mathrm{A})((\mathrm{F}(\omega),\mathrm{A}),(\mathrm{N},\mathrm{A})) & \xrightarrow{\Phi(\omega,\mathrm{N})} & (\mathrm{Sets}_0/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A}))(\omega,U(\mathrm{N},\mathrm{A})) \\
\downarrow{\scriptstyle g_{\bullet}} & & \downarrow{\scriptstyle (Ug)_{\bullet}} \\
(\mathrm{ModAlg}(R)/\mathrm{A})((\mathrm{F}(\omega),\mathrm{A}),(\mathrm{N}',\mathrm{A})) & \xrightarrow[\Phi(\omega,\mathrm{N}')]{} & (\mathrm{Sets}_0/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A}))(\omega,U(\mathrm{N}',\mathrm{A}))
\end{array}$$

diyagramı değişmelidir. Gerçekten de her $h \in (\mathrm{ModAlg}(R)/\mathrm{A})((\mathrm{F}(\omega),\mathrm{A}),(\mathrm{N},\mathrm{A}))$ ve $k \in \mathrm{K}$ için

$$\begin{array}{rcl}
((\Phi(\omega,\mathrm{N}')g_{\bullet})(h))_1(k) & = & (\Phi(\omega,\mathrm{N}')(g_{\bullet}h))_1(k) \\
& = & (\Phi(\omega,\mathrm{N}')(gh))_1(k) \\
& = & (gh)_1(1k1)
\end{array}$$

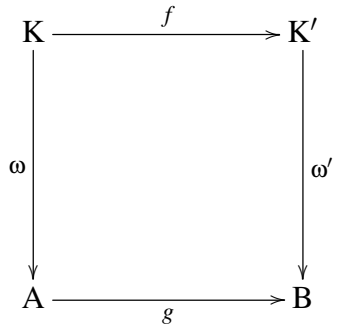
ve

$$\begin{aligned}
(((Ug)_{\bullet}\Phi(\omega,\mathrm{N}))(h))_1(k) &= ((Ug)_{\bullet}(\Phi(\omega,\mathrm{N})(h)))_1(k)\\
&= ((Ug)(\Phi(\omega,\mathrm{N})(h)))_1(k)\\
&= (Ug)_1((\Phi(\omega,\mathrm{N})(h))_1(k))\\
&= ((Ug)(h_1(1k1)))\\
&= g_1(h_1(1k1))\\
&= (g_1h_1)(1k1)\\
&= (gh)_1(1k1)
\end{aligned}$$

dir. □

3.3 *R*-cebiroid serbest ön-çaprazlanmış modülleri

K bir küme ve A bir *R*-cebiroid olmak üzere objelerini $\omega : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{A}$ biçiminde fonksiyonlarının oluşturduğu, morfizmlerini de $f : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{K}'$ bir fonksiyon ve $g : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ bir *R*-cebiroid morfizmi olmak üzere

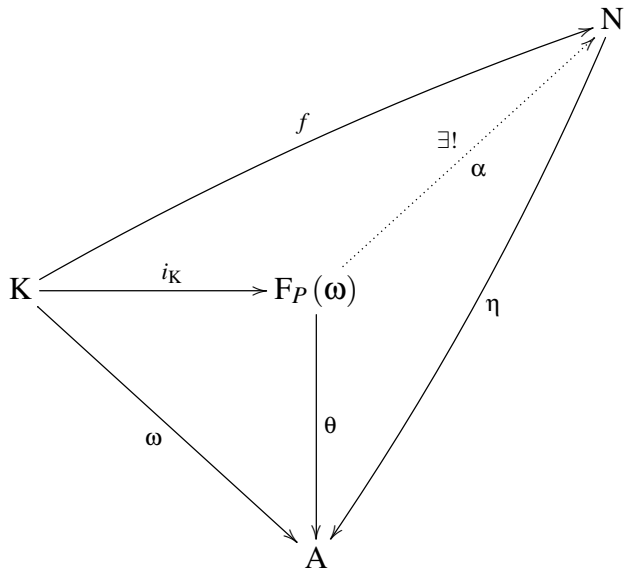


diyagramını değişmeli yapan (f,g) ikililerinin oluşturduğu kategoriyi Sets/Alg(*R*) ile gösterelim. Eğer $\mathrm{B} = \mathrm{A}$ ve $g = I_{\mathrm{A}}$ alınırsa Sets/ (Alg(*R*)/A) kategorisi elde edilir.

Tanım 3.4 K bir küme, A bir *R*-cebiroid ve $\omega : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{A}$ fonksiyonu Sets/ (Alg(*R*)/A) kategorisinin bir objesi olsun. $F_P(\omega) = (\theta : \mathrm{F}_P(\omega) \longrightarrow \mathrm{A})$ bir *R*-cebiroid ön-çaprazlanmış A-modülü ve $i_{\mathrm{K}} : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{F}_P(\omega)$ fonksiyonu $\theta i_{\mathrm{K}} = \omega$ eşitliğini sağlayan bir fonksiyon olmak üzere, her $\mathcal{N} = (\eta : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{A})$ *R*-cebiroid ön-çaprazlanmış A-modülü ve $\eta f = \omega$ koşulunu sağlayan her $f : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{N}$ fonksiyonu için $\alpha i_{\mathrm{K}} = f$ ve $\eta\alpha = \theta$ olacak biçimde biricik bir $\alpha : \mathrm{F}_P(\omega) \longrightarrow \mathrm{N}$ *R*-cebiroid A-modül morfizmi mevcutsa, i_{K} fonksiyonu ile birlikte $F_P(\omega)$ ya K üzerinde ω tarafından belirlenen serbest *R*-cebiroid ön-çaprazlanmış A-modülü denir.

Dikkat edilirse α nin bir A-modül morfizmi olması ve $\eta\alpha = \theta$ olması $(\alpha, I_{\mathrm{A}}) : F_P(\omega) \longrightarrow \mathcal{N}$ ikilisinin bir ön-çaprazlanmış modül morfizmi olmasını gerektirir. Ayrıca tanımda verilen ve

istenen koşullar gözönüne alındığında



diyagramının değişmeli olduğu görülür.

Serbest ön-çaprazlanmış modül izomorfizm farkıyla biriciktir.

Önerme 3.5 $\omega : K \longrightarrow A$ fonksiyonu $\mathrm{Sets}/(\mathrm{Alg}(R)/A)$ kategorisinin bir objesi ise K üzerinde ω tarafından belirlenen serbest R-cebiroid ön-çaprazlanmış A-modülü mevcuttur.

İspat: ω tarafından

$$\begin{array}{rccc} \omega_{A_0}: & K & \longrightarrow & A_0 \times A_0 \\ & k & \longmapsto & (s(\omega k), t(\omega k)) \end{array}$$

biçiminde bir fonksiyon indirgenebilir. Önceki kısımda ω_{A_0} nin belirlediği $F(\omega_{A_0})$ serbest A-modülünü,

$$\begin{array}{rccc} i_K: & K & \longrightarrow & F(\omega_{A_0}) \\ & k & \longmapsto & 1k1 \end{array}$$

fonksiyonu ve her $w,x,y,z \in A_0$, $aka' \in F(\omega)(x,y)$, $a'' \in A(w,x)$, $a''' \in A(y,z)$ için

$$^{a''}(aka') = (a''a)ka' \text{ ve } (aka')^{a'''} = ak(a'a''')$$

biçiminde A-etkisi ile elde etmiştik. Şimdi tanımda geçen θ ve α morfizmlerini elde edelim:

(i) $\mathrm{F}_P(\omega) = \mathrm{F}(\omega_{\mathrm{A}_0})$ alıp θ fonksiyonunu

$$\begin{array}{rccl} \theta: & \mathrm{F}_P(\omega) & \longrightarrow & \mathrm{A} \\ & aka' & \longmapsto & \theta(aka') = a(\omega k)a' \\ & p = a_1k_1a_1'...a_nk_na_n' & \longmapsto & \theta p = \theta(a_1k_1a_1')...\theta(a_nk_na_n') \\ & \sum_i p_i & \longmapsto & \theta\left(\sum_i p_i\right) = \sum_i \theta p_i \end{array}$$

biçiminde tanımlayalım:

1. Açıkça θ bir R-cebiroid morfizmidir.

2. Her $w,x,y,z \in \mathrm{A}_0$, $aka' \in \mathrm{F}_P(\omega)(x,y)$, $a'' \in \mathrm{A}(w,x)$, $a''' \in \mathrm{A}(y,z)$ için

$$\begin{array}{rcl} \theta\left({}^{a''}(aka')\right) & = & \theta((a''a)ka') \\ & = & (a''a)(\omega k)a' \\ & = & a''(a(\omega k)a') \\ & = & a''\theta(aka') \end{array}$$

ve benzer şekilde $\theta\left((aka')^{a'''}\right) = (\theta(aka'))a'''$ olduğu görülür. Yani $F_P(\omega) = (\theta : \mathrm{F}_P(\omega) \longrightarrow \mathrm{A})$ bir ön-çaprazlanmış modüldür.

3. Her $k \in \mathrm{K}$ için $(\theta i_{\mathrm{K}})k = \theta(i_{\mathrm{K}}k) = \theta(1k1) = 1(\omega k)1 = \omega k$ dir. Yani $\theta i_{\mathrm{K}} = \omega$ dir.

(ii) Her $\mathcal{N} = (\eta : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{A})$ ön-çaprazlanmış modülü için ve $\eta f = \omega$ koşulunu sağlayan her $f : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{N}$ fonksiyonu için α fonksiyonunu

$$\begin{array}{rccl} \alpha: & \mathrm{F}_P(\omega) & \longrightarrow & \mathrm{N} \\ & aka' & \longmapsto & \alpha(aka') = {}^{a}fk^{a'} \\ & p = a_1k_1a_1'...a_nk_na_n' & \longmapsto & \alpha(p) = \alpha(a_1k_1a_1'),,,\alpha(a_nk_na_n') \\ & \sum_i p_i & \longmapsto & \alpha\left(\sum_i p_i\right) = \sum_i \alpha p_i \end{array}$$

biçiminde tanımlayalım:

1. Her $aka' \in \mathrm{F}_P(\omega)$ için $ta = s(\omega k) = s(\eta fk) = s(fk)$ ve $sa' = t(\omega k) = t(\eta fk) = t(fk)$ olduğundan $\alpha(aka') = {}^{a}fk^{a'} \in \mathrm{N}$ dir. Buna ek olarak f iyi tanımlı olduğundan α da iyi tanımlıdır.

2. Açıkça α bir R-cebiroid morfizmidir.

3. Her $w,x,y,z \in \mathrm{A}_0$, $aka' \in \mathrm{F}_P(\omega)(x,y)$, $a'' \in \mathrm{A}(w,x)$, $a''' \in \mathrm{A}(y,z)$ için

$$\begin{array}{rcl} \alpha\left({}^{a''}(aka')\right) & = & \alpha((a''a)ka') \\ & = & {}^{a''a}(fk)^{a'} \\ & = & {}^{a''}\left({}^{a}(fk)^{a'}\right) \\ & = & {}^{a''}(\alpha(aka')) \end{array}$$

ve benzer şekilde $\alpha\left(\left(aka'\right)^{a'''}\right)=\left(\alpha\left(aka'\right)\right)^{a'''}$ olup α bir A-modül morfizmidir.

4. Her $aka'\in \mathrm{F}_P(\omega)$ için

$$\begin{aligned}(\eta\alpha)(aka') &= \eta(\alpha(aka'))\\ &= \eta\left({}^{a}(fk)^{a'}\right)\\ &= a(\eta(fk))a'\\ &= a((\eta f)(k))a'\\ &= a(\omega k)a'\\ &= \theta(aka')\\ &= (I_{\mathrm{A}}\theta)(aka')\end{aligned}$$

dir. Yani $\eta\alpha=\theta$ olup $(\alpha,I_{\mathrm{A}}):F_P(\omega)\longrightarrow\mathcal{N}$ bir ön-çaprazlanmış A-modül morfizmidir.

5. Her $k\in \mathrm{K}$ için $(\alpha i_{\mathrm{K}})k=\alpha(i_{\mathrm{K}}k)=\alpha(1k1)={}^{1}fk^{1}=fk$ dir. Yani $\alpha i_{\mathrm{K}}=f$ dir.

α nın biricikliği ve i_{K} ile $F_P(\omega)$ nın izomorfizm farkıyla biricikliği önceki evrensellik özelliklerinde olduğu gibi gösterilebilir. □

$\mathrm{Sets}/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A})$ nın her $\omega:\mathrm{K}\longrightarrow\mathrm{A}$, $\omega':\mathrm{K}'\longrightarrow\mathrm{A}$ objesi ve her $(f_1,I_{\mathrm{A}}):(\omega:\mathrm{K}\longrightarrow\mathrm{A})\longrightarrow(\omega':\mathrm{K}'\longrightarrow\mathrm{A})$ morfizmi için

$$\begin{array}{rccl}F_P(f_1): & \mathrm{F}_P(\omega) & \longrightarrow & \mathrm{F}_P(\omega')\\ & aka' & \longmapsto & F_P(f_1)(aka')=a(f_1k)a'\\ & a_1k_1a_1'...a_nk_na_n' & \longmapsto & F_P(f_1)(a_1k_1a_1'...a_nk_na_n')=F_P(f_1)(a_1k_1a_1')...F_P(f_1)(a_nk_na_n')\\ & \sum_i p_i & \longmapsto & F_P(f_1)\left(\sum_i p_i\right)=\sum_i F_P(f_1)(p_i)\end{array}$$

biçiminde tanımlanırsa $(F_P(f_1),I_{\mathrm{A}})$ açıkça bir R-cebiroid ön-çaprazlanmış A-modül morfizmi olur.

Böylece R-cebiroid serbest ön-çaprazlanmış modülünün elde edilişi bize

$$\begin{array}{rccl}F_P: & \mathrm{Sets}/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A}) & \longrightarrow & \mathrm{PXAlg}(R)/\mathrm{A}\\ & \omega:\mathrm{K}\longrightarrow\mathrm{A} & \longmapsto & F_P(\omega)=(\theta:\mathrm{F}_P(\omega)\longrightarrow\mathrm{A})\\ & f=(f_1,I_{\mathrm{A}}):\omega\longrightarrow\omega' & \longmapsto & F_P(f)=F_P(f_1,I_{\mathrm{A}})=(F_P(f_1),I_{\mathrm{A}}):F_P(\omega)\longrightarrow F_P(\omega')\end{array}$$

biçiminde bir funktor verir.

Önerme 3.6 F_P funktoru, $U:\mathrm{PXAlg}(R)/\mathrm{A}\longrightarrow\mathrm{Sets}/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A})$ forgetful funktorunun soleki'dir.

İspat: $(\mathrm{PXAlg}(R)/\mathrm{A})(F_P(-),(-))$ ile $(\mathrm{Sets}/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A}))(-,U(-))$ arasında bir doğal izomorfizm bulmalıyız. Aradığımız doğal izomorfizmi Φ ile gösterirsek, $\mathcal{N}=(\eta:\mathrm{N}\longrightarrow\mathrm{A})$

olmak üzere

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & \mathrm{Ob}\left(\mathrm{Sets}/\left(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A}\right)\right)\times \mathrm{Ob}\left(\mathrm{PXAlg}(R)/\mathrm{A}\right) & \longrightarrow & \mathrm{Sets} \\ & (\omega:\mathrm{K}\longrightarrow \mathrm{A},\mathcal{N}) & \longmapsto & \Phi(\omega:\mathrm{K}\longrightarrow \mathrm{A},\mathcal{N})=\Phi(\omega,\mathcal{N}) \end{array}$$

biçiminde elde edilen $\Phi(\omega,\mathcal{N})$ dönüşümü her $\omega \in \mathrm{Ob}\left(\mathrm{Sets}/\left(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A}\right)\right)$, $\mathcal{N}=(\eta:\mathrm{N}\longrightarrow \mathrm{A})\in \mathrm{Ob}\left(\mathrm{PXAlg}(R)/\mathrm{A}\right)$ için

$$\Phi(\omega,\mathcal{N}):\left(\mathrm{PXAlg}(R)/\mathrm{A}\right)\left(F_P(\omega),\mathcal{N}\right)\longrightarrow \left(\mathrm{Sets}/\left(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A}\right)\right)(\omega,U\mathcal{N}=\eta)$$

şeklinde, ω ve $\mathcal{N}$ de doğal, 1-1 ve örten bir fonksiyon olmalıdır.

Eğer $f=(f_1,I_{\mathrm{A}}):F_P(\omega)\longrightarrow \mathcal{N}$ bir ön-çaprazlanmış A-modül morfizmi ise

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{f_1}: & \mathrm{K} & \longrightarrow & \mathrm{N} \\ & k & \longmapsto & f_1(1k1) \end{array}$$

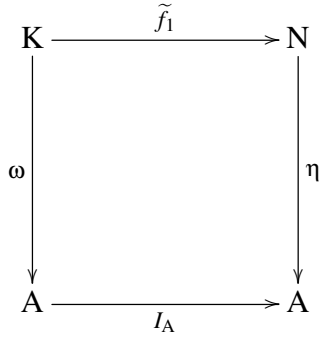
biçiminde bir $\widetilde{f_1}$ fonksiyonu mevcuttur. Öyle ise $\Phi(\omega,\mathcal{N})$ yi

$$\begin{array}{rccl} \Phi(\omega,\mathcal{N}): & \left(\mathrm{PXAlg}(R)/\mathrm{A}\right)\left(F_P(\omega),\mathcal{N}\right) & \longrightarrow & \left(\mathrm{Sets}/\left(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A}\right)\right)(\omega,\eta) \\ & f=(f_1,I_{\mathrm{A}}) & \longmapsto & \Phi(\omega,\mathcal{N})(f)=\widetilde{f}=\left(\widetilde{f_1},I_{\mathrm{A}}\right) \end{array}$$

biçiminde tanımlayabiliriz. Dikkat edilirse her $k\in \mathrm{K}$ için

$$\begin{array}{rcl} \left(\eta\widetilde{f_1}\right)(k) & = & \eta\left(\widetilde{f_1}(k)\right) \\ & = & \eta\left(f_1(1k1)\right) \\ & = & \left(I_{\mathrm{A}}\theta\right)(1k1) \\ & = & I_{\mathrm{A}}(\omega k) \\ & = & \left(I_{\mathrm{A}}\omega\right)(k) \end{array}$$

dir, yani



diyagramı değişmelidir. Demek ki

$$\Phi(\omega,\mathcal{N})(f)=\widetilde{f}=\left(\widetilde{f_1},I_{\mathrm{A}}\right)\in\left(\mathrm{Sets}/\left(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A}\right)\right)(\omega,\eta)$$

dir.

Şimdi $\Phi(\omega,\mathcal{N})$ nin özelliklerini inceleyelim:

1. $\Phi(\omega,\mathcal{N})$ iyi tanımlıdır: Yukarıda her $f\in(\mathrm{PXAlg}(R)/\mathrm{A})(F_P(\omega),\mathcal{N})$ için $\Phi(\omega,\mathcal{N})(f)\in(\mathrm{Sets}/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A}))(\omega,\eta)$ olduğunu gördük. Şimdi $\Phi(\omega,\mathcal{N})(f)=\widetilde{f}\neq\widetilde{f'}=\Phi(\omega,\mathcal{N})(f')$ koşulunu gerçekleyen her $f,f'\in(\mathrm{PXAlg}(R)/\mathrm{A})(F_P(\omega),\mathcal{N})$ için $f\neq f'$ olduğunu görelim. Eğer $\widetilde{f}\neq\widetilde{f'}$ ise $\widetilde{f}_1(k)\neq\widetilde{f'}_1(k)$ eşitsizliğini sağlayan en az bir $k\in\mathrm{K}$ mevcuttur. Buradan $\widetilde{f}_1(k)=f_1(1k1)$ ve $\widetilde{f'}_1(k)=f'_1(1k1)$ olduğundan $f_1(1k1)\neq f'_1(1k1)$ elde edilir. Öyle ise $f\neq f'$ olur.

2. $\Phi(\omega,\mathcal{N})$ 1-1 dir: $f,f'\in(\mathrm{PXAlg}(R)/\mathrm{A})(F_P(\omega),\mathcal{N})$ için eğer $\Phi(\omega,\mathcal{N})(f)=\Phi(\omega,\mathcal{N})(f')$ ise her $k\in\mathrm{K}$ için $f_1(1k1)=\widetilde{f}_1(k)=\widetilde{f'}_1(k)=f_1(1k1)$ olup $ta=s(\omega k)$ ve $sa'=t(\omega k)$ koşulunu sağlayan her $a,a'\in\mathrm{A}$ için ${}^af_1(1k1)^{a'}={}^af'_1(1k1)^{a'}$ elde edilir. Böylece, ${}^af_1(1k1)^{a'}=f_1\left({}^a(1k1)^{a'}\right)=f_1(aka')$ ve ${}^af'_1(1k1)^{a'}=f'_1\left({}^a(1k1)^{a'}\right)=f'_1(aka')$ olduğundan $f_1=f'_1$ ve $f=f'$ eşitliklerine ulaşılır.

3. $\Phi(\omega,\mathcal{N})$ örtendir: Her

$$h=(h_1,\,I_{\mathrm{A}}):\quad(\omega:\mathrm{K}\longrightarrow\mathrm{A})\quad\longrightarrow\quad U\mathcal{N}=(\eta:\mathrm{N}\longrightarrow\mathrm{A})$$

morfizmi için

$$f=(f_1,I_{\mathrm{A}}):\quad F_P(\omega)\quad\longrightarrow\quad\mathcal{N}$$

morfizmi

$$\begin{array}{rccl} f_1: & \mathrm{F}_P(\omega) & \longrightarrow & \mathrm{N}\\ & aka' & \longmapsto & {}^a(h_1k)^{a'}\\ & a_1ka'_1\ldots a_nk_na'_n & \longmapsto & f_1(a_1ka'_1)\ldots f_1(a_nk_na'_n)\\ & \sum\limits_i p_i & \longmapsto & \sum\limits_i f_1p_i \end{array}$$

olacak biçimde tanımlanırsa açıkça $f=(f_1,I_{\mathrm{A}})$ bir ön-çaprazlanmış A-modül morfizmi olup her $k\in\mathrm{K}$ için $(\Phi(\omega,\mathcal{N})(f))_1(k)=\widetilde{f}_1(k)=f_1(1k1)={}^1(h_1k)^1=h_1k$ yani $\Phi(\omega,\mathrm{N})(f)=h$ dır.

4. $\Phi(\omega,\mathcal{N})$, ω de doğaldır: $(-)^\bullet$, $(-)$ ile sağdan kompozisyon olmak üzere her $g\in(\mathrm{Sets}/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A}))(\omega,\omega')$ için

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{PXAlg}(R)/\mathrm{A}(F_P(\omega),\mathcal{N}) & \xrightarrow{\Phi(\omega,\mathcal{N})} & (\mathrm{Sets}/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A}))(\omega,\eta) \\
\uparrow{\scriptstyle (Fg)^\bullet} & & \uparrow{\scriptstyle g^\bullet} \\
\mathrm{PXAlg}(R)/\mathrm{A}(F_P(\omega'),\mathcal{N}) & \xrightarrow[\Phi(\omega',\mathcal{N})]{} & (\mathrm{Sets}/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A}))(\omega',\eta)
\end{array}$$

diyagramı değişmelidir. Gerçekten de her $h \in (\mathrm{PXAlg}(R)/\mathrm{A})(F_P(\omega'),\mathcal{N})$ ve $k \in \mathrm{K}$ için

$$\begin{array}{rcl}
((g^\bullet \Phi(\omega',\mathcal{N}))(h))_1(k) & = & (g^\bullet(\Phi(\omega',\mathcal{N})(h)))_1(k) \\
& = & ((\Phi(\omega',\mathcal{N})(h))\,g)_1(k) \\
& = & (\Phi(\omega',\mathcal{N})(h))_1(g_1 k) \\
& = & \widetilde{h}_1(g_1 k) \\
& = & h_1(1\,(g_1 k)\,1)
\end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl}
((\Phi(\omega,\mathcal{N})(Fg)^\bullet)(h))_1(k) & = & (\Phi(\omega,\mathcal{N})((Fg)^\bullet h))_1(k) \\
& = & (\Phi(\omega,\mathcal{N})(h(Fg)))_1(k) \\
& = & (h(Fg))_1(1k1) \\
& = & h_1((Fg)_1(1k1)) \\
& = & h_1(1\,(g_1 k)\,1)
\end{array}$$

dir.

5. $\Phi(\omega,\mathcal{N})$, $\mathcal{N}$ de doğaldır: $(-)_\bullet$, $(-)$ ile soldan kompozisyon ve her $g \in (\mathrm{PXAlg}(R)/\mathrm{A})(\mathcal{N},\mathcal{N}')$ için

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{PXAlg}(R)/\mathrm{A}(F_P(\omega),\mathcal{N}) & \xrightarrow{\Phi(\omega,\mathcal{N})} & (\mathrm{Sets}/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A}))(\omega,\eta) \\
\downarrow{\scriptstyle g_\bullet} & & \downarrow{\scriptstyle (Ug)_\bullet} \\
\mathrm{PXAlg}(R)/\mathrm{A}(F_P(\omega),\mathcal{N}') & \xrightarrow[\Phi(\omega,\mathcal{N}')]{} & (\mathrm{Sets}/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A}))(\omega,\eta')
\end{array}$$

diyagramı değişmelidir. Gerçekten de her $h \in (\mathrm{PXAlg}(R)/\mathrm{A})(F_P(\omega),\mathcal{N})$ ve $k \in \mathrm{K}$ için

$$\begin{array}{rcl}
((\,\Phi(\omega,\mathcal{N}')\,g_\bullet)(h))_1(k) & = & (\,\Phi(\omega,\mathcal{N}')(g_\bullet h))_1(k) \\
& = & (\,\Phi(\omega,\mathcal{N}')(gh))_1(k) \\
& = & (gh)_1(1k1)
\end{array}$$

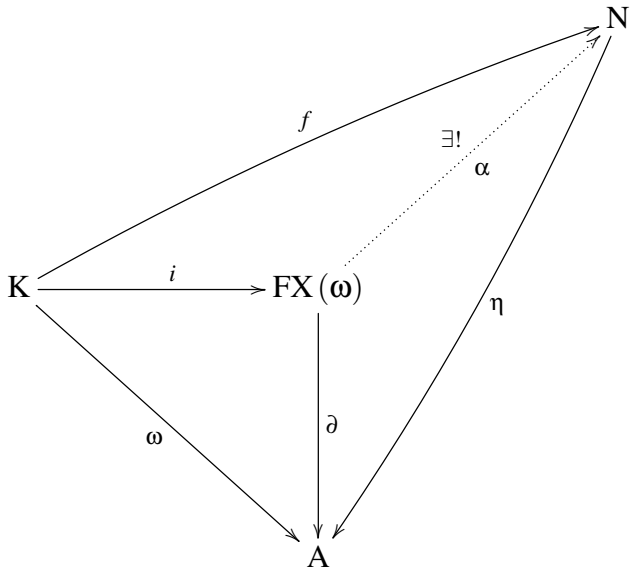
ve

$$\begin{aligned}(((Ug)_{\bullet}\Phi(\omega,\mathcal{N}))(h))_1(k) &= ((Ug)_{\bullet}(\Phi(\omega,\mathcal{N})(h)))_1(k)\\ &= ((Ug)(\Phi(\omega,\mathcal{N})(h)))_1(k)\\ &= (Ug)_1((\Phi(\omega,\mathcal{N})(h))_1(k))\\ &= (Ug)_1(h_1(1k1))\\ &= g_1(h_1(1k1))\\ &= (g_1h_1)(1k1)\\ &= (gh)_1(1k1)\end{aligned}$$

dir. □

3.4 *R*-cebiroid serbest çaprazlanmış modülleri

Tanım 3.7 K bir küme, A bir *R*-cebiroid ve $\omega : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{A}$ fonksiyonu $\mathrm{Sets}/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A})$ kategorisinin bir objesi olsun. $FX(\omega) = (\partial : \mathrm{FX}(\omega) \longrightarrow \mathrm{A})$ bir *R*-cebiroid çaprazlanmış A-modülü ve $i : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{FX}(\omega)$ fonksiyonu $\partial i = \omega$ eşitliğini sağlayan bir fonksiyon olmak üzere, her $\mathcal{N} = (\eta : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{A})$ *R*-cebiroid çaprazlanmış A-modülü ve $\eta f = \omega$ koşulunu sağlayan her $f : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{N}$ fonksiyonu için $\alpha i = f$ ve $\eta\alpha = \partial$ olacak biçimde biricik bir $\alpha : \mathrm{FX}(\omega) \longrightarrow \mathrm{N}$ *R*-cebiroid morfizmi mevcutsa, *i* morfizmi ile birlikte $FX(\omega)$ ya K üzerinde ω tarafından belirlenen serbest *R*-cebiroid çaprazlanmış A-modülü denir:



Dikkat edilirse α nin bir A-modül morfizmi olması ve $\eta\alpha = \partial$ olması $(\alpha, I_{\mathrm{A}}) : FX(\omega) \longrightarrow \mathcal{N}$ ikilisinin bir çaprazlanmış modül morfizmi olmasını gerektirir.

Serbest çaprazlanmış modül, izomorfizm farkıyla biriciktir.

Önerme 3.8 $\omega : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{A}$ fonksiyonu $\mathrm{Sets}/\left(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A}\right)$ kategorisinin bir objesi ise K üzerinde ω tarafından belirlenen serbest R-cebiroid çaprazlanmış A-modülü mevcuttur.

İspat: Önceki kısımda K üzerinde ω tarafından belirlenen

$$F_P(\omega) = (\theta : \mathrm{F}_P(\omega) \longrightarrow \mathrm{A})$$

serbest ön-çaprazlanmış A-modülünü elde etmiştik. $(-)^{\mathrm{cr}}$ funktorunu kullanarak $F_P(\omega)$ ön-çaprazlanmış modülünden

$$(F_P(\omega))^{\mathrm{cr}} = (\theta^{\mathrm{cr}} : (\mathrm{F}_P(\omega))^{\mathrm{cr}} \longrightarrow \mathrm{A})$$

biçiminde bir çaprazlanmış modül ve $F_P(\omega)$ ile birlikte elde ettiğimiz i_{K} morfizminden de

$$\begin{array}{rccccc} i_{\mathrm{K}}^{\mathrm{cr}}: & \mathrm{K} & \xrightarrow{i_{\mathrm{K}}} & \mathrm{F}_P(\omega) & \xrightarrow{(-)^{\mathrm{cr}}} & (\mathrm{F}_P(\omega))^{\mathrm{cr}} \\ & k & \longmapsto & i_{\mathrm{K}}k = 1k1 & \longmapsto & (1k1)^{\mathrm{cr}} = \overline{1k1} \end{array}$$

biçiminde bir bileşke R-cebiroid morfizmi elde edebiliriz. $\partial = \theta^{\mathrm{cr}}$ ve $\mathrm{FX}(\omega) = (\mathrm{F}(\omega))^{\mathrm{cr}}$ olmak üzere tanımda istenen i ve $FX(\omega)$ i

$$i = i_{\mathrm{K}}^{\mathrm{cr}}$$

ve

$$FX(\omega) = (F_P(\omega))^{\mathrm{cr}}$$

olarak alalım. Şimdi bu tanımlama ile i ve $FX(\omega)$ in serbest çaprazlanmış modül tanımında istenen koşulları gerçeklediğini görelim:

(i) Her $k \in \mathrm{K}$ için $(\partial i)k = \partial(ik) = \partial\left(i_{\mathrm{K}}^{\mathrm{cr}}k\right) = \theta^{\mathrm{cr}}\left(\overline{1k1}\right) = \theta(1k1) = 1(\omega k)1 = \omega k$ olup $\partial i = \omega$ dir.

(ii) Her $\mathcal{N} = (\eta : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{A})$ çaprazlanmış modülü ve $\eta f = \omega$ koşulunu sağlayan her $f : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{N}$ fonksiyonu için α fonksiyonunu

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & \mathrm{FX}(\omega) & \longrightarrow & \mathrm{N} \\ & \overline{aka'} & \longmapsto & \alpha\left(\overline{aka'}\right) = {}^{a}fk^{a'} \\ \overline{p} = \overline{a_1k_1a_1'...a_nk_na_n'} & & \longmapsto & \alpha\overline{p} = \alpha\left(\overline{a_1k_1a_1'}\right),,,\alpha\left(\overline{a_nk_na_n'}\right) \\ & \overline{\sum_i p_i} & \longmapsto & \alpha\left(\overline{\sum_i p_i}\right) = \sum_i \alpha\overline{p_i} \end{array}$$

biçiminde tanımlayalım:

1. Her $\overline{aka'} \in \mathrm{FX}(\omega)$ için $ta = s(\omega k) = s(\eta fk) = s(fk)$ ve $sa' = t(\omega k) = t(\eta fk) = t(fk)$ olduğundan $\alpha\left(\overline{aka'}\right) = {}^{a}fk^{a'} \in \mathrm{N}$ dir. Buna ek olarak f iyi tanımlı olduğundan α da iyi tanımlıdır.

2. Açıkça α bir R-cebir morfizmidir.

3. Her $w,x,y,z \in \mathrm{A}_0$, $\overline{aka'} \in \mathrm{FX}(\omega)(x,y)$, $a'' \in \mathrm{A}(w,x)$, $a''' \in \mathrm{A}(y,z)$ için

$$\begin{aligned}
\alpha\left({}^{a''}\overline{aka'}\right) &= \alpha\left(\overline{{}^{a''}(aka')}\right) \\
&= \alpha\left(\overline{(a''a)ka'}\right) \\
&= {}^{a''a}(fk)^{a'} \\
&= {}^{a''}\left({}^{a}(fk)^{a'}\right) \\
&= {}^{a''}\left(\alpha\left(\overline{aka'}\right)\right)
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde $\alpha\left(\left(\overline{aka'}\right)^{a'''}\right) = \left(\alpha\left(\overline{aka'}\right)\right)^{a'''}$ olur. Yani α bir A-modül morfizmidir.

4. Her $\overline{aka'} \in \mathrm{FX}(\omega)$ için

$$\begin{aligned}
(\eta\alpha)\left(\overline{aka'}\right) &= \eta\left(\alpha\left(\overline{aka'}\right)\right) \\
&= \eta\left({}^{a}(fk)^{a'}\right) \\
&= a(\eta(fk))a' \\
&= a((\eta f)(k))a' \\
&= a(\omega k)a' \\
&= \theta(aka') \\
&= \theta^{\mathrm{cr}}\left(\overline{aka'}\right) \\
&= \partial\left(\overline{aka'}\right) \\
&= (I_{\mathrm{A}}\partial)\left(\overline{aka'}\right)
\end{aligned}$$

dir. Yani $\eta\alpha = \partial$ olup $(\alpha, I_{\mathrm{A}}) : FX(\omega) \longrightarrow \mathcal{N}$ bir çaprazlanmış A-modül morfizmidir.

5. Her $k \in \mathrm{K}$ için $(\alpha i)k = \alpha\left(i^{\mathrm{cr}}_{\mathrm{K}}k\right) = \alpha\left(\overline{1k1}\right) = {}^{1}fk^{1} = fk$ dir. Yani $\alpha i = f$ dir.

α nın biricikliği ve i ile $FX(\omega)$ nın izomorfizm farkıyla biricikliği önceki evrensellik özelliklerinde olduğu gibi gösterilebilir. $\square$

$\mathrm{Sets}/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A})$ nın her $\omega : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{A}$, $\omega' : \mathrm{K}' \longrightarrow \mathrm{A}$ objesi ve her $(f_1, I_{\mathrm{A}}) : (\omega : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{A}) \longrightarrow (\omega' : \mathrm{K}' \longrightarrow \mathrm{A})$ morfizmi için

$$\begin{array}{rlll}
FX(f_1): & \mathrm{FX}(\omega) & \longrightarrow & \mathrm{FX}(\omega') \\
& \overline{aka'} & \longmapsto & FX(f_1)\left(\overline{aka'}\right) = \overline{a(f_1k)a'} \\
& \overline{a_1k_1a'_1...a_nk_na'_n} & \longmapsto & FX(f_1)\left(\overline{a_1k_1a'_1...a_nk_na'_n}\right) \\
& & & = FX(f_1)\left(\overline{a_1k_1a'_1}\right)...FX(f_1)\left(\overline{a_nk_na'_n}\right) \\
& \overline{\sum_i p_i} & \longmapsto & FX(f_1)\left(\overline{\sum_i p_i}\right) = \sum_i FX(f_1)\left(\overline{p_i}\right)
\end{array}$$

biçiminde tanımlanırsa $(FX(f_1), I_{\mathrm{A}})$ açıkça bir R-cebiroid çaprazlanmış A-modül morfizmi olur.

Böylece R-cebiroid serbest çaprazlanmış modülünün elde edilişi bize

$$\begin{array}{rccl} FX: & \mathrm{Sets}/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A}) & \longrightarrow & \mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{A} \\ & \omega : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{A} & \longmapsto & FX(\omega) = (\partial : \mathrm{FX}(\omega) \longrightarrow \mathrm{A}) \\ & f = (f_1, I_\mathrm{A}) : \omega \longrightarrow \omega' & \longmapsto & FX(f) = FX(f_1, I_\mathrm{A}) \\ & & & \quad = (FX(f_1), I_\mathrm{A}) : FX(\omega) \longrightarrow FX(\omega') \end{array}$$

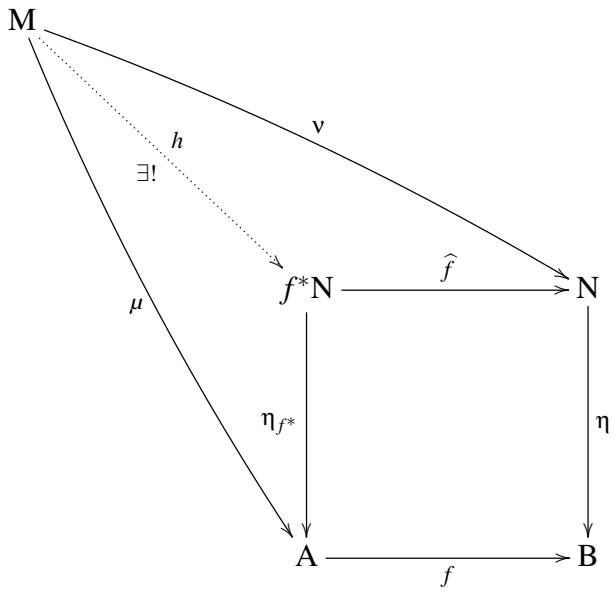
biçiminde bir funktor verir.

Önerme 3.9 FX funktoru, $U : \mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{Sets}/(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A})$ forgetful funktorunun soleki'dir.

İspat: Bu önermenin ispatı ön-çaprazlanmış modüllerdeki gibi yapılabilir. □

3.5 R-cebiroid geri çekme çaprazlanmış modülleri

Tanım 3.10 A ve B birer R-cebiroid, $f : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ bir R-cebiroid morfizmi ve $\mathcal{N} = (\eta : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{B})$ bir R-cebiroid çaprazlanmış B-modülü olsun. $f^*\mathcal{N} = \left(\eta_{f^*} : f^*\mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{A}\right)$ bir çaprazlanmış R-cebiroid A-modülü ve $\left(\widehat{f}, f\right) : f^*\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere her $\mathcal{M} = (\mu : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{A})$ R-cebiroid çaprazlanmış A-modülü ve her $(\nu, f) : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ çaprazlanmış modül morfizmi için $\nu = \widehat{f}h$ ve $\mu = \eta_{f^*}h$ olacak biçimde yani



diyagramı değişmeli olacak biçimde biricik bir $h : \mathrm{M} \longrightarrow f^*\mathrm{N}$ A-modül morfizmi mevcutsa $\widehat{f}$ morfizmi ile birlikte $f^*\mathcal{N}$ çaprazlanmış modülüne $\mathcal{N}$ nin f üzerinden geri çekme çaprazlanmış

modülü denir.

Dikkat edilirse h nin bir A-modül morfizmi olması ve $\mu = \eta_{f^*} h$ olması $(h, I_{\mathrm{A}}) : \mathcal{M} \longrightarrow f^*\mathcal{N}$ ikilisinin bir çaprazlanmış A-modül morfizmi olmasını gerektirir.

Geri çekme çaprazlanmış modülü izomorfizm farkıyla biriciktir.

Önerme 3.11 $\mathcal{N} = (\eta : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{B})$ bir R-cebiroid çaprazlanmış B-modülü ve $f : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ bir R-cebiroid morfizmi ise $\mathcal{N}$ nin f üzerinden geri çekme çaprazlanmış modülü mevcuttur.

İspat: $\mathrm{N} \times_f \mathrm{A}$, $\mathrm{N} \times \mathrm{A}$ nın $fa = \eta n$ eşitliğini sağlayan tüm (n,a) ikililerinin oluşturduğu alt kümesi olsun. Bu kümeye ait herbir (n,a) ikilisinin kaynak ve hedefini $s(n,a) = sa$ ve $t(n,a) = ta$ olarak tanımlayıp ve her $x, y \in \mathrm{A}_0$ için $f^*\mathrm{N}(x,y) = \left\{(n,a) \in \mathrm{N} \times_f \mathrm{A} : s(n,a) = x \text{ ve } t(n,a) = y\right\}$ kümesini oluşturabiliriz. Her $x, y \in \mathrm{A}_0$ için $f^*\mathrm{N}(x,y)$ üzerinde

$$\begin{array}{ccc} f^*\mathrm{N}(x,y) \times f^*\mathrm{N}(x,y) & \longrightarrow & f^*\mathrm{N}(x,y) \\ ((n,a),(n_1,a_1)) & \longmapsto & (n,a)+(n_1,a_1) = (n+n_1, a+a_1) \end{array}$$

biçiminde bir toplama işlemi ve

$$\begin{array}{ccc} R \times f^*\mathrm{N}(x,y) & \longrightarrow & f^*\mathrm{N}(x,y) \\ (r,(n,a)) & \longmapsto & r \cdot (n,a) = (r \cdot n, r \cdot a) \end{array}$$

biçiminde bir R-etkisi tanımlanabilir. Bu tanımlamalar ile $f^*\mathrm{N}(x,y)$ bir R-modül olur. Dikkat edilirse $\eta(n+n_1) = \eta n + \eta n_1 = fa + fa' = f(a+a')$ ve $\eta(r \cdot n) = r \cdot \eta(n) = r \cdot f(a) = f(r \cdot a)$ olup yukarıdaki işlemler iyi tanımlıdır. Toplama işlemi ile R-etkisine ilaveten $f^*\mathrm{N} = \{f^*\mathrm{N}(x,y) : x, y \in \mathrm{A}_0\}$ ailesi üzerinde her $x, y, z \in \mathrm{A}_0$ için

$$\begin{array}{ccc} f^*\mathrm{N}(x,y) \times f^*\mathrm{N}(y,z) & \longrightarrow & f^*\mathrm{N}(x,z) \\ ((n,a),(n',a')) & \longmapsto & (n,a)(n',a') = (nn', aa') \end{array}$$

biçiminde bir kompozisyon tanımlanırsa $f^*\mathrm{N}$ açıkça bir R-cebiroid olur. Kompozisyonda, $tn = t(\eta n) = t(fa) = f(ta) = f(sa') = s(fa') = s(\eta n') = sn'$ ve $ta = t(n,a) = y = s(n',a') = sa'$ olup nn' ve aa' iyi tanımlıdır. Ek olarak $\eta(nn') = (\eta n)(\eta n') = (fa)(fa') = f(aa')$, $s(aa') = sa = x$ ve $t(aa') = ta' = z$ olduğundan $(nn', aa') \in f^*\mathrm{N}(x,z)$ dir. Ayrıca $f^*\mathrm{N}$, her $w, x, y, z \in \mathrm{A}_0$ için

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{A}(w,x) \times f^*\mathrm{N}(x,y) & \longrightarrow & f^*\mathrm{N}(w,y) \\ (a'',(n,a)) & \longmapsto & {}^{a''}(n,a) = \left({}^{fa''}n, a''a\right) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{ccc} f^*\mathrm{N}(x,y) \times \mathrm{A}(y,z) & \longrightarrow & f^*\mathrm{N}(x,z) \\ ((n,a),a') & \longmapsto & (n,a)^{a'} = \left(n^{fa'}, aa'\right) \end{array}$$

biçiminde tanımlı A-etkisi ile bir A-modül olur.

$\widehat{f}$ ve η_{f^*} fonksiyonları

$$\begin{array}{rccc} \widehat{f}: & f^*\mathrm{N} & \longrightarrow & \mathrm{N} \\ & (n,a) & \longmapsto & n \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rccc} \eta_{f^*}: & f^*\mathrm{N} & \longrightarrow & \mathrm{A} \\ & (n,a) & \longmapsto & a \end{array}$$

biçiminde tanımlansın.

(i) $\eta_{f^*} : f^*\mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{A}$ bir R-cebiroid morfizmidir: Çünkü her $x,y,z \in \mathrm{A}_0$, $(n,a),(n_1,a_1) \in f^*\mathrm{N}(x,y)$, $(n',a') \in f^*\mathrm{N}(y,z)$ ve $r \in R$ için

1.

$$\begin{array}{rcl} \eta_{f^*}((n,a)+(n_1,a_1)) & = & \eta_{f^*}(n+n_1,a+a_1) \\ & = & a+a_1 \\ & = & \eta_{f^*}(n,a)+\eta_{f^*}(n_1,a_1) \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rcl} \eta_{f^*}((n,a)(n',a')) & = & \eta_{f^*}(nn',aa') \\ & = & aa' \\ & = & \eta_{f^*}(n,a)\,\eta_{f^*}(n',a') \end{array}$$

3.

$$\eta_{f^*}(r\cdot(n,a)) = \eta_{f^*}(r\cdot n, r\cdot a) = r\cdot a = r\cdot\eta_{f^*}(n,a)$$

dir.

(ii) $\eta_{f^*} : f^*\mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{A}$ bir çaprazlanmış modüldür: Çünkü her $w,x,y,z \in \mathrm{A}_0$, $(n,a) \in f^*\mathrm{N}(x,y)$, $(n',a') \in f^*\mathrm{N}(y,z)$, $a'' \in \mathrm{A}(w,x)$, $a''' \in \mathrm{A}(y,z)$ için

CM1)

$$\eta_{f^*}\left({}^{a''}(n,a)\right) = \eta_{f^*}\left({}^{fa''}n, a''a\right) = a''a = a''\eta_{f^*}(n,a)$$

ve

$$\eta_{f^*}\left((n,a)^{a'''}\right) = \eta_{f^*}\left(n^{fa'''}, aa'''\right) = aa''' = \left(\eta_{f^*}(n,a)\right)a'''$$

CM2)

$$(n,a)^{\eta_{f^*}(n',a')} = (n,a)^{a'} = \left(n^{fa'}, aa'\right) = \left(n^{\eta n'}, aa'\right) = \left(nn', aa'\right) = (n,a)\left(n',a'\right)$$

ve

$$\eta_{f^*(n,a)}\left(n',a'\right) = {}^{a}\left(n',a'\right) = \left({}^{fa}n',aa'\right) = \left({}^{\eta n}n',aa'\right) = \left(nn',aa'\right) = (n,a)\left(n',a'\right)$$

dir.

(iii) $\widehat{f}: f^*\mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{N}$ bir R-cebiroid morfizmidir. (ispatı (i) dekinin benzeri)

(iv) $\left(\widehat{f},f\right)$ bir çaprazlanmış modül morfizmidir: Çünkü her $w,x,y,z \in \mathrm{A}_0$, $(n,a) \in f^*\mathrm{N}(x,y)$, $a' \in \mathrm{A}(w,x)$, $a'' \in \mathrm{A}(y,z)$ için

1.
$$\widehat{f}\left({}^{a'}(n,a)\right) = \widehat{f}\left({}^{fa'}n,a'a\right) = {}^{fa'}n = {}^{fa'}\left(\widehat{f}(n,a)\right)$$

ve
$$\widehat{f}\left((n,a)^{a''}\right) = \widehat{f}\left(n^{fa''},aa''\right) = n^{fa''} = \left(\widehat{f}(n,a)\right)^{fa''}$$

2.
$$\left(\eta\widehat{f}\right)(n,a) = \eta\left(\widehat{f}(n,a)\right) = \eta n = fa = f\left(\eta_{f^*}(n,a)\right) = \left(f\eta_{f^*}\right)(n,a)$$

dir.

Şimdi de, her $\mathcal{M} = (\mu : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{A})$ R-cebiroid çaprazlanmış A-modülü ve her $(\nu,f) : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ çaprazlanmış modül morfizmi için h fonksiyonunu

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathrm{M} & \longrightarrow & f^*\mathrm{N} \\ & m & \longmapsto & (\nu m,\mu m) \end{array}$$

biçiminde tanımlayalım:

(i) h iyi tanımlıdır: Her $m \in \mathrm{M}$ için $\nu m \in \mathrm{N}$, $\mu m \in \mathrm{A}$ dır. Diğer taraftan (ν,f) bir çaprazlanmış modül morfizmi olduğundan $\eta\nu = f\mu$ ve böylece her $m \in \mathrm{M}$ için $\eta(\nu m) = f(\mu m)$ dir. Öyle ise $(\nu m,\mu m) \in f^*\mathrm{N}$ olup $s(\nu m,\mu m) = s(\mu m) = sm$ ve $t(\nu m,\mu m) = t(\mu m) = tm$ dir. Ek olarak ν ile μ iyi tanımlı olduklarından h de iyi tanımlıdır.

(ii) h bir R-cebiroid morfizmidir: ν ile μ birer R-cebiroid morfizmi olduğundan h nin de bir R-cebiroid morfizmi olduğu gösterilebilir.

(iii) h bir A-modül morfizmidir: Her $w,x,y,z \in \mathrm{A}_0$, $m \in \mathrm{M}(x,y)$, $a \in \mathrm{A}(w,x)$, $a' \in \mathrm{A}(y,z)$ için

$$h({}^{a}m) = (\nu({}^{a}m),\mu({}^{a}m)) = \left({}^{fa}(\nu m),a(\mu m)\right) = {}^{a}(\nu m,\mu m) = {}^{a}(hm)$$

ve benzer biçimde $h\left(m^{a'}\right)=(hm)^{a'}$ olur.

(iv) Her $m\in \mathrm{M}$ için

$$\left(\eta_{f^*}h\right)m=\eta_{f^*}(hm)=\eta_{f^*}(\nu m,\mu m)=\mu m$$

dir.

(v) Her $m\in \mathrm{M}$ için

$$\left(\widehat{f}h\right)m=\widehat{f}(hm)=\widehat{f}(\nu m,\mu m)=\nu m$$

dir.

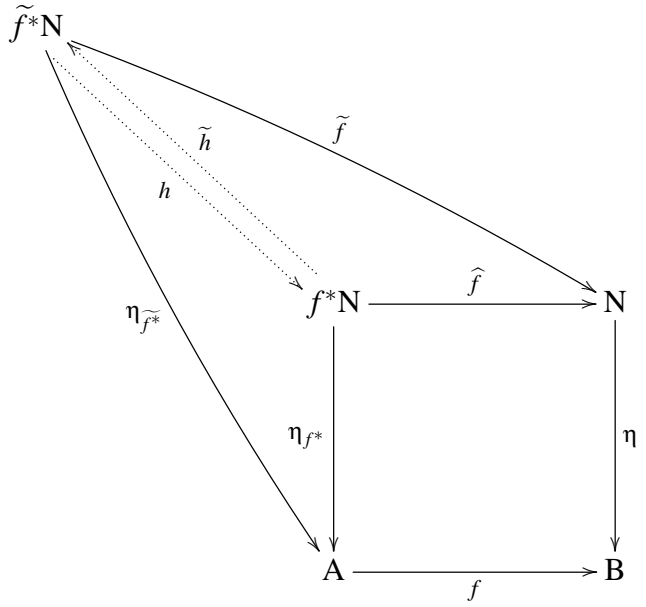
Dikkat edilirse (iii) ve (iv) ün bir sonucu olarak $(h,I_{\mathrm{A}}):\mathcal{M}\longrightarrow f^*\mathcal{N}$ ikilisi bir çaprazlanmış A-modül morfizmidir.

Eğer

$$\begin{array}{rccc}\widetilde{h}: & \mathrm{M} & \longrightarrow & f^*\mathrm{N}\\ & m & \longmapsto & \widetilde{h}m=\left(\widetilde{h}_1m,\widetilde{h}_2m\right)\end{array}$$

morfizmi $\nu=\widehat{f}\widetilde{h}$ ve $\mu=\eta_{f^*}\widetilde{h}$ eşitliklerini sağlayan başka bir morfizm ise her $m\in \mathrm{M}$ için $\widetilde{h}_1m=\widehat{f}\left(\widetilde{h}m\right)=\nu m$ ve $\widetilde{h}_2m=\eta_{f^*}\left(\widetilde{h}m\right)=\mu m$ olup $h=\widetilde{h}$ dir.

Ayrıca, eğer $\widetilde{f}:\widetilde{f}^*\mathrm{N}\longrightarrow \mathrm{N}$ morfizmi ile birlikte $\widetilde{f}^*\mathcal{N}=\left(\eta_{\widetilde{f^*}}:\widetilde{f}^*\mathrm{N}\longrightarrow \mathrm{A}\right)$ aynı koşulları sağlayan başka bir geri çekme çaprazlanmış modülü ve her $\mathcal{M}=(\mu:\mathrm{M}\longrightarrow \mathrm{A})$ R-cebiroid çaprazlanmış A-modülü için evrensellik özelliğini sağlayan biricik A-modül morfizmi $\widetilde{h}:\mathrm{M}\longrightarrow \widetilde{f}^*\mathrm{N}$ ise $\mathrm{M}=f^*\mathrm{N}$ alındığında $\eta_{f^*}=\eta_{\widetilde{f^*}}\widetilde{h}$ eşitliği, $\mathrm{M}=\widetilde{f}^*\mathrm{N}$ alındığında $\eta_{\widetilde{f^*}}=\eta_{f^*}h$ eşitliği ve buradan $\eta_{f^*}=\eta_{f^*}h\widetilde{h}$ ile $\eta_{\widetilde{f^*}}=\eta_{\widetilde{f^*}}\widetilde{h}h$ eşitlikleri elde edilir. Öyle ise $h\widetilde{h}=I_{f^*\mathrm{N}}$ ve $\widetilde{h}h=I_{\widetilde{f^*}\mathrm{N}}$ olup h bir izomorfizmdir:



□

Her $\mathcal{N} = (\eta : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{B})$, $\mathcal{N}' = (\eta' : \mathrm{N}' \longrightarrow \mathrm{B})$ R-cebiroid çaprazlanmış B-modülü ve her $(g_1, I_\mathrm{B}) : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}'$ R-cebiroid çaprazlanmış B-modül morfizmi için

$$\begin{array}{rccc} f^*g_1 : & f^*\mathrm{N} & \longrightarrow & f^*\mathrm{N}' \\ & (n,a) & \longmapsto & (f^*g_1)(n,a) = (g_1 n, a) \end{array}$$

biçiminde tanımlanırsa (f^*g_1, I_A) açıkça bir R-cebiroid çaprazlanmış A-modül morfizmi olur.

Böylece R-cebiroid geri çekme çaprazlanmış modülünün elde edilişi bize

$$\begin{array}{rccc} f^* : & \mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{B} & \longrightarrow & \mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{A} \\ & \mathcal{N} & \longmapsto & f^*\mathcal{N} \\ & g = (g_1, I_\mathrm{B}) : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}' & \longmapsto & f^*g = f^*(g_1, I_\mathrm{B}) = (f^*g_1, I_\mathrm{A}) : f^*\mathcal{N} \longrightarrow f^*\mathcal{N}' \end{array}$$

biçiminde bir funktor verir.

Önerme 3.12 A, B, C birer R-cebiroid ve $f : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ ile $f' : \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{C}$ birer R-cebiroid morfizmi ise $f^*f'^*$ funktoru $(f'f)^*$ funktoruna doğal izomorftur: $f^*f'^* \cong (f'f)^*$.

İspat: İspatımızı dört aşamada gerçekleştireceğiz.

(i) İspatın ilk kısmında sırasıyla $f'^*\mathrm{N}$, $(f^*f'^*)\mathrm{N}$ ve $(f'f)^*\mathrm{N}$ modüllerinin elemanlarını inceleyeceğiz:

1. Her $\mathcal{N} = (\eta : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{C}) \in \mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{C}$ için $f'^*\mathrm{N}$ B-modülü $\eta n = f'b$ eşitliğini sağlayan (n,b) ikililerinden oluşur.

2. Her $f'^{*}\mathcal{N} = \left(\eta_{f'^{*}} : f'^{*}\mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{B}\right) \in \mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{B}$ için $(f^{*}f'^{*})\,\mathrm{N} = f^{*}(f'^{*}\mathrm{N})$ A-modülü $\eta_{f'^{*}}(n,b) = fa$ eşitliğini sağlayan $((n,b),a)$ ikililerinden oluşur. Ancak $\eta_{f'^{*}}(n,b) = b$ olduğundan $b = fa$ olup $(f^{*}f'^{*})\,\mathrm{N}$ nin elemanları $((n,fa),a)$ biçimindedir.

3. Her $\mathcal{N} = (\eta : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{C}) \in \mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{C}$ için $(f'f)^{*}\mathrm{N}$ A-modülü $\eta n = (f'f)\,a$ eşitliğini sağlayan (n,a) ikililerinden oluşur.

Ayrıca

$$\begin{array}{ccccc}
(f^{*}f'^{*})\,\mathrm{N} & \xrightarrow{\widehat{f}} & f'^{*}\mathrm{N} & \xrightarrow{\widehat{f'}} & \mathrm{N} \\
\downarrow{\scriptstyle (\eta_{f'^{*}})_{f^{*}}} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_{f'^{*}}} & & \downarrow{\scriptstyle \eta} \\
\mathrm{A} & \xrightarrow[f]{} & \mathrm{B} & \xrightarrow[f']{} & \mathrm{C}
\end{array}$$

ve

$$\begin{array}{ccc}
(f'f)^{*}\,\mathrm{N} & \xrightarrow{\widehat{f'f}} & \mathrm{N} \\
\downarrow{\scriptstyle \eta_{(f'f)^{*}}} & & \downarrow{\scriptstyle \eta} \\
\mathrm{A} & \xrightarrow[f'f]{} & \mathrm{C}
\end{array}$$

diyagramları değişmelidir.

(ii) Her $\mathcal{N} = (\eta : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{C}) \in \mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{C}$ için α_{N}

$$\begin{array}{rccc}
\alpha_{\mathrm{N}} : & (f^{*}f'^{*})\,\mathrm{N} & \longrightarrow & (f'f)^{*}\mathrm{N} \\
& ((n,fa),a) & \longmapsto & (n,a)
\end{array}$$

biçiminde tanımlansın.

1. α_{N} bir R-cebiroid morfizmidir. Çünkü her $x,y,z \in \mathrm{A}_0$, $((n,fa),a),((n_1,fa_1),a_1) \in (f^*f'^*)\,\mathrm{N}(x,y)$, $((n',fa'),a') \in (f^*f'^*)\,\mathrm{N}(y,z)$ ve $r \in R$ için

$$\begin{aligned}
\alpha_{\mathrm{N}}(((n,fa),a)+((n_1,fa_1),a_1)) &= \alpha_{\mathrm{N}}((n,fa)+(n_1,fa_1),a+a_1)\\
&= \alpha_{\mathrm{N}}((n+n_1,fa+fa'),a+a_1)\\
&= (n+n_1,a+a_1)\\
&= (n,a)+(n_1,a_1)\\
&= \alpha_{\mathrm{N}}((n,fa),a)+\alpha_{\mathrm{N}}((n_1,fa_1),a_1)
\end{aligned}$$

,

$$\begin{aligned}
\alpha_{\mathrm{N}}(((n,fa),a)((n',fa'),a')) &= \alpha_{\mathrm{N}}((n,fa)(n',fa'),aa')\\
&= \alpha_{\mathrm{N}}((nn',fafa'),aa')\\
&= (nn',aa')\\
&= (n,a)(n',a')\\
&= \alpha_{\mathrm{N}}((n,fa),a)\,\alpha_{\mathrm{N}}((n',fa'),a')
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\alpha_{\mathrm{N}}(r\cdot((n,fa),a)) &= \alpha_{\mathrm{N}}((r\cdot(n,fa),r\cdot a))\\
&= \alpha_{\mathrm{N}}(((r\cdot n,r\cdot fa),r\cdot a))\\
&= (r\cdot n,r\cdot a)\\
&= r\cdot(n,a)\\
&= r\cdot(\alpha_{\mathrm{N}}((n,fa),a))
\end{aligned}$$

dir.

2. α_{N} bir A-modül morfizmidir. Çünkü her $w,x,y,z \in \mathrm{A}_0$, $a' \in \mathrm{A}(w,x)$, $a'' \in \mathrm{A}(y,z)$ ve $((n,fa),a) \in (f^*f'^*)\,\mathrm{N}(x,y)$ için

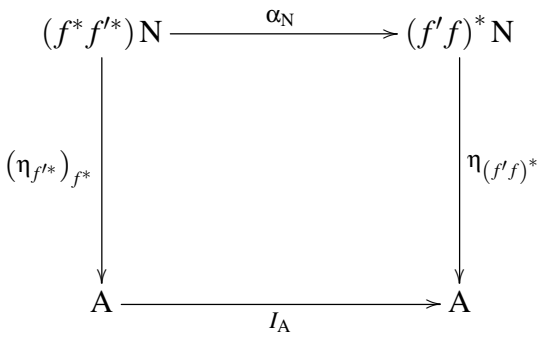
$$\begin{aligned}
\alpha_{\mathrm{N}}\left({}^{a'}((n,fa),a)\right) &= \alpha_{\mathrm{N}}\left({}^{fa'}(n,fa),a'a\right)\\
&= \alpha_{\mathrm{N}}\left(\left({}^{(f'f)a'}n,fa'fa\right),a'a\right)\\
&= \alpha_{\mathrm{N}}\left(\left({}^{(f'f)a'}n,f(a'a)\right),a'a\right)\\
&= \left({}^{(f'f)a'}n,a'a\right)\\
&= {}^{a'}(n,a)\\
&= {}^{a'}(\alpha_{\mathrm{N}}((n,fa),a))
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde $\alpha_{\mathrm{N}}\left(((n,fa),a)^{a''}\right) = (\alpha_{\mathrm{N}}((n,fa),a))^{a''}$ dir.

3. $\alpha_{\mathcal{N}} = (\alpha_{\mathrm{N}},I_{\mathrm{A}}) : (f^*f'^*)\,\mathcal{N} \longrightarrow (f'f)^*\,\mathcal{N}$ bir çaprazlanmış A-modül morfizmidir: Her $((n,fa),a) \in (f^*f'^*)\,\mathrm{N}$ için

$$\begin{aligned}
\left(\eta_{(f'f)^*}\alpha_{\mathrm{N}}\right)(((n,fa),a)) &= \eta_{(f'f)^*}(\alpha_{\mathrm{N}}((n,fa),a))\\
&= \eta_{(f'f)^*}(n,a)\\
&= a\\
&= \left(\eta_{f'^*}\right)_{f^*}((n,fa),a)\\
&= \left(I_{\mathrm{A}}\left(\eta_{f'^*}\right)_{f^*}\right)((n,fa),a)
\end{aligned}$$

olup



diyagramı değişmelidir.

(iii) Şimdi de β_{N} fonksiyonu ters yönde

$$\begin{array}{rccc} \beta_{\mathrm{N}}: & (f'f)^*\,\mathrm{N} & \longrightarrow & (f^*f'^*)\,\mathrm{N} \\ & (n,a) & \longmapsto & ((n,fa),a) \end{array}$$

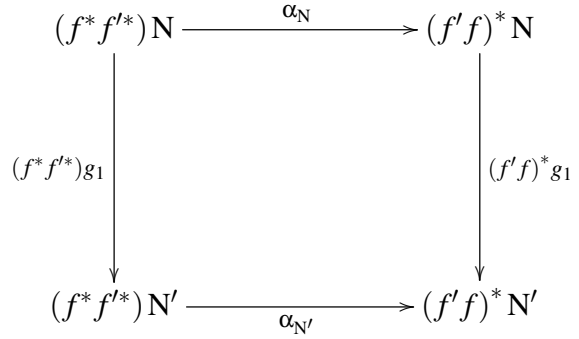
biçiminde tanımlansın. Yukarıdakilere benzer işlemlerle $\beta_{\mathcal{N}}=(\beta_{\mathrm{N}},I_{\mathrm{A}})$ in de çaprazlanmış A-modül morfizmi olduğu gösterilebilir.

Açıkça $\alpha_{\mathrm{N}}\beta_{\mathrm{N}}=I_{(f'f)^*\mathrm{N}}$ ve $\beta_{\mathrm{N}}\alpha_{\mathrm{N}}=I_{(f^*f'^*)\mathrm{N}}$ olduğundan α_{N} ve böylece $\alpha_{\mathcal{N}}$ birer izomorfizmdir.

(iv) Her $\mathcal{N}=(\eta:\mathrm{N}\longrightarrow \mathrm{C}),\mathcal{N}'=(\eta':\mathrm{N}'\longrightarrow \mathrm{C})\in \mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{C}$ çaprazlanmış modülü, her $g=(g_1,I_{\mathrm{A}}):\mathcal{N}\longrightarrow\mathcal{N}'$ çaprazlanmış modül morfizmi ve her $((n,fa),a)\in(f^*f'^*)\,\mathrm{N}\,(x,y)$ için

$$\begin{array}{rcl} \left(\left((f'f)^*\,g_1\right)\alpha_{\mathrm{N}}\right)((n,fa),a) & = & \left((f'f)^*\,g_1\right)((\alpha_{\mathrm{N}})\,((n,fa),a)) \\ & = & \left((f'f)^*\,g_1\right)(n,a) \\ & = & (g_1n,a) \\ & = & \alpha_{\mathrm{N}'}\,((g_1n,a),a) \\ & = & \alpha_{\mathrm{N}'}\,((f'^*g_1)\,(n,a),a) \\ & = & \alpha_{\mathrm{N}'}\,((f^*\,(f'^*g_1))\,((n,a),a)) \\ & = & \alpha_{\mathrm{N}'}\,(((f^*f'^*)\,g_1)\,((n,a),a)) \\ & = & (\alpha_{\mathrm{N}'}\,((f^*f'^*)\,g_1))\,((n,a),a) \end{array}$$

olup

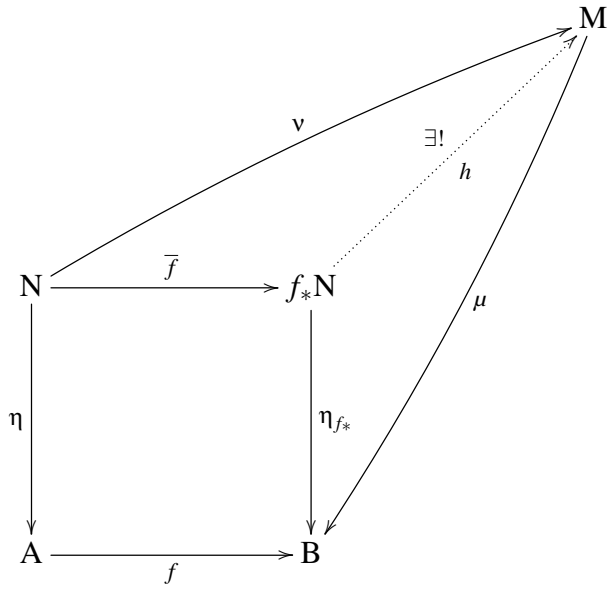


diyagramı değişmelidir. Böylece, A üzerindeki dönüşüm birim dönüşüm olduğundan, $\left((f'f)^* g\right)\alpha_{\mathcal{N}} = \alpha_{\mathcal{N}'}\left((f^*f'^*)\, g\right)$ eşitliği yazılabilir.

Demek ki $\alpha = \left\{\left(\alpha_{\mathcal{N}} : (f^*f'^*)\,\mathcal{N} \longrightarrow (f'f)^*\,\mathcal{N}\right) : \mathcal{N} \in \mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{C}\right\} : f^*f'^* \longrightarrow (f'f)^*$ ailesi bir doğal izomorfizmdir. □

3.6 *R*-cebiroid indirgenmiş çaprazlanmış modülleri

Tanım 3.13 A ve B birer *R*-cebiroid, $f : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ bir *R*-cebiroid morfizmi ve $\mathcal{N} = (\eta : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{A})$ bir *R*-cebiroid çaprazlanmış A-modülü olsun. $f_*\mathcal{N} = \left(\eta_{f_*} : f_*\mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{B}\right)$ bir çaprazlanmış *R*-cebiroid B-modülü ve $\left(\overline{f}, f\right) : \mathcal{N} \longrightarrow f_*\mathcal{N}$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere her $\mathcal{M} = (\mu : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{B})$ *R*-cebiroid çaprazlanmış B-modülü ve her $(\nu, f) : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}$ çaprazlanmış modül morfizmi için $\nu = h\overline{f}$ ve $\eta_{f_*} = \mu h$ olacak biçimde yani



diyagramı değişmeli olacak biçimde biricik bir $h : f_*\mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{M}$ B-modül morfizmi mevcutsa $\overline{f}$ morfizmi ile birlikte $f_*\mathcal{N}$ çaprazlanmış modülüne $\mathcal{N}$ den f ile indirgenmiş çaprazlanmış modül denir.

Dikkat edilirse h nin bir A-modül morfizmi olması ve $\eta_{f_*} = \mu h$ olması $(h, I_{\mathrm{B}}) : f_*\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}$ ikilisinin bir çaprazlanmış B-modül morfizmi olmasını gerektirir.

İndirgenmiş çaprazlanmış modül, izomorfizm farkıyla biriciktir.

Önerme 3.14 $\mathcal{N} = (\eta : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{A})$ bir R-cebiroid çaprazlanmış A-modülü ve $f : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ bir R-cebiroid morfizmi ise $\mathcal{N}$ den f ile indirgenmiş çaprazlanmış modül mevcuttur.

İspat: İspatımızı altı aşamada gerçekleştireceğiz.

(i) $F_P(f\eta) = (\theta : \mathrm{F}_P(f\eta) \longrightarrow \mathrm{B})$, $f\eta$ tarafından belirlenmiş N üzerine serbest ön-çaprazlanmış B-modül olsun. Buna göre

1. $\mathrm{F}_P(f\eta)$ nin üreteçleri her $n \in \mathrm{N}$ ve $tb = s((f\eta)n)$, $sb' = t((f\eta)n)$ koşulunu sağlayan her $b, b' \in \mathrm{B}$ için bnb' biçimindedir.

2. B nin $\mathrm{F}_P(f\eta)$ üzerinde her $w,x,y,z \in \mathrm{B}_0$ için

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{B}(w,x) \times (\mathrm{F}_P(f\eta))(x,y) & \longrightarrow & (\mathrm{F}_P(f\eta))(w,y) \\ (b'', bnb') & \longmapsto & {}^{b''}(bnb') = (b''b)nb' \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{F}_P(f\eta))(x,y) \times \mathrm{B}(y,z) & \longrightarrow & (\mathrm{F}_P(f\eta))(x,z) \\ (bnb', b''') & \longmapsto & (bnb')^{b'''} = bn(b'b''') \end{array}$$

biçiminde asosyatif bir etkisi mevcuttur.

3. θ morfizmi

$$\begin{array}{rccc} \theta : & \mathrm{F}_P(f\eta) & \longrightarrow & \mathrm{B} \\ & bnb' & \longmapsto & b((f\eta)n)b' \end{array}$$

biçiminde olup bir B-modül morfizmidir.

4. Her $n \in \mathrm{N}$ için

$$(\theta i_{\mathrm{N}})n = \theta(i_{\mathrm{N}}n) = \theta(1n1) = 1((f\eta)n)1 = (f\eta)n$$

olup

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{N} & \xrightarrow{\;i_{\mathrm{N}}\;} & \mathrm{F}_P(f\eta) \\ {\scriptstyle\eta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\theta} \\ \mathrm{A} & \xrightarrow[\;f\;]{} & \mathrm{B} \end{array}$$

diyagramı değişmelidir.

(ii) $\mathrm{F}_P(f\eta)$ nin

$$\begin{array}{l} b_1n_1b_1'b_2n_2b_2' - (b_1(f\eta n_1)b_1'b_2)n_2b_2' \\ b_1n_1b_1'b_2n_2b_2' - b_1n_1(b_1'b_2(f\eta n_2)b_2') \\ bnb' + bn_1b' - b(n+n_1)b' \\ b({}^an)b' - (b(fa))nb' \\ b\left(n^{a'}\right)b' - bn((fa')b') \\ (r\cdot b)nb' - b(r\cdot n)b' \\ bn(r\cdot b') - b(r\cdot n)b' \end{array}$$

formatındaki tüm elemanların ürettiği çift yönlü ideali I olsun. Açıkça I, R ve B etkisi altında kapalıdır. Bu ideal kullanılarak $\frac{\mathrm{F}_P(f\eta)}{\mathrm{I}} = \left\{ \frac{\mathrm{F}_P(f\eta)}{\mathrm{I}}(x,y) = \frac{\mathrm{F}_P(f\eta)(x,y)}{\mathrm{I}(x,y)} : x,y \in \mathrm{B}_0 \right\}$ bölüm R-modülleri ailesi oluşturulabilir. I nın üreteçleri düşünüldüğünde bu aile üzerinde her $b_1n_1b_1'b_2n_2b_2'$, $bnb'+bn_1b'$, $b({}^an)b'$, $b\left(n^{a'}\right)b'$, $(r\cdot b)nb' \in \mathrm{F}_P(f\eta)$ için

$$\begin{array}{l} \overline{b_1n_1b_1'b_2n_2b_2'} = \overline{\left(b_1(f\eta n_1)b_1'b_2\right)n_2b_2'} = \overline{b_1n_1\left(b_1'b_2(f\eta n_2)b_2'\right)} \\ \overline{bnb'+bn_1b'} = \overline{b(n+n_1)b'} \\ \overline{b({}^an)b'} = \overline{(b(fa))nb'} \\ \overline{b\left(n^{a'}\right)b'} = \overline{bn((fa')b')} \\ \overline{(r\cdot b)nb'} = \overline{b(r\cdot n)b'} = \overline{bn(r\cdot b')} \end{array}$$

ve böylece $b_1'(b_2((f\eta)n_2)b_2')\ldots(b_t((f\eta)n_t)b_t') = b_1'' \in \mathrm{B}$ olmak üzere her $b_1n_1b_1'b_2n_2b_2'\ldots b_tn_tb_t' \in \mathrm{F}_P(f\eta)$ için

$$\overline{b_1n_1b_1'b_2n_2b_2'\ldots b_tn_tb_t'} = \overline{b_1n_1\left(b_1'\left(b_2((f\eta)n_2)b_2'\right)\ldots(b_t((f\eta)n_t)b_t')\right)} = \overline{b_1n_1b_1''}$$

olduğu görülür.

Bu aile üzerinde, $\mathrm{F}_P(f\eta)$ den, her $x,y \in \mathrm{B}_0$ için

$$\begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{F}_P(f\eta)}{\mathrm{I}}(x,y) \times \frac{\mathrm{F}_P(f\eta)}{\mathrm{I}}(x,y) & \longrightarrow & \frac{\mathrm{F}_P(f\eta)}{\mathrm{I}}(x,y) \\ \left(\overline{bnb'}, \overline{b_1n_1b_1'}\right) & \longmapsto & \overline{bnb'} + \overline{b_1n_1b_1'} = \overline{bnb' + b_1n_1b_1'} = \overline{b(n+n_1)b'} \\ \left(\overline{\sum_i p_i}, \overline{\sum_j p_j}\right) & \longmapsto & \overline{\sum_i p_i} + \overline{\sum_j p_j} = \sum_i \overline{p_i} + \sum_j \overline{p_j} = \overline{\sum_i p_i + \sum_j p_j} \end{array}$$

biçiminde bir toplama işlemi indirgenebilir. Bu işlem ile $p_i = b_{i_1}n_{i_1}b_{i_1}'\ldots b_{i_t}n_{i_t}b_{i_t}'$ olmak üzere $\frac{\mathrm{F}_P(f\eta)}{\mathrm{I}}$ nin $\overline{\sum_i p_i}$ biçimindeki her elemanının

$$\overline{\sum_i p_i} = \sum_i \overline{p_i} = \sum_i \overline{b_{i_1}n_{i_1}b_{i_1}''}$$

biçiminde yazılabileceği sonucuna ulaşılır. Öyle ise $\frac{\mathrm{F}_P(f\eta)}{\mathrm{I}}$ ailesi $\overline{bnb'}$ biçimindeki üreteç elemanları ile bunların sonlu toplamları olan $\sum_i \overline{b_i n_i b_i'}$ biçimindeki elemanlardan oluşur. Böylece her $x,y \in \mathrm{B}_0$ ve $\sum_i \overline{b_i n_i b_i'}, \sum_j \overline{b_j n_j b_j'} \in \frac{\mathrm{F}_P(f\eta)}{\mathrm{I}}(x,y)$ için

$$\sum_i \overline{b_i n_i b_i'} + \sum_j \overline{b_j n_j b_j'} = \sum_{t=i,j} \overline{b_t n_t b_t'}$$

yazılabilir.

Diğer taraftan $\frac{\mathrm{F}_P(f\eta)}{\mathrm{I}}$ üzerinde, $\mathrm{F}_P(f\eta)$ den, her $x,y,z \in \mathrm{B}_0$ için

$$\begin{array}{rcl}
\frac{\mathrm{F}_P(f\eta)}{\mathrm{I}}(x,y) \times \frac{\mathrm{F}_P(f\eta)}{\mathrm{I}}(y,z) & \longrightarrow & \frac{\mathrm{F}_P(f\eta)}{\mathrm{I}}(x,z) \\
\left(\overline{b_1 n_1 b_1'}, \overline{b_2 n_2 b_2'}\right) & \longmapsto & \overline{b_1 n_1 b_1' b_2 n_2 b_2'} = \overline{b_1 n_1 b_1' b_2 n_2 b_2'} = \overline{b_1 n_1 \left(b_1' b_2 (f\eta n_2) b_2'\right)} \\
\left(\sum_i \overline{b_i n_i b_i'}, \sum_j \overline{b_j n_j b_j'}\right) & \longmapsto & \left(\sum_i \overline{b_i n_i b_i'}\right)\left(\sum_j \overline{b_j n_j b_j'}\right) = \sum_{i,j} \overline{b_i n_i b_i' b_j n_j b_j'} \\
 & & = \sum_{i,j} \overline{b_i n_i \left(b_i' b_j \left((f\eta) n_j\right) b_j'\right)}
\end{array}$$

biçiminde bir kompozisyon ile, I R etkisi altında kapalı olduğundan, her $r \in R$ ve $x,y \in \mathrm{B}_0$ için

$$\begin{array}{rcl}
R \times \frac{\mathrm{F}_P(f\eta)}{\mathrm{I}}(x,y) & \longrightarrow & \frac{\mathrm{F}_P(f\eta)}{\mathrm{I}}(x,y) \\
\left(r, \overline{bnb'}\right) & \longmapsto & r \cdot \overline{bnb'} = \overline{(r \cdot b) n b'} \\
\left(r, \sum_i \overline{b_i n_i b_i'}\right) & \longmapsto & r \cdot \left(\sum_i \overline{b_i n_i b_i'}\right) = \sum_i \overline{(r \cdot b_i) n_i b_i'}
\end{array}$$

biçiminde bir R-etkisi indirgenebilir. Bu işlemler ve etki ile $\frac{\mathrm{F}_P(f\eta)}{\mathrm{I}}$ bir R-cebiroid olur.

Ayrıca I, B etkisi altında kapalı olduğundan $\frac{\mathrm{F}_P(f\eta)}{\mathrm{I}}$ üzerinde her $w,x,y,z \in \mathrm{B}_0$ için

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{B}(w,x) \times \frac{\mathrm{F}_P(f\eta)}{\mathrm{I}}(x,y) & \longrightarrow & \frac{\mathrm{F}_P(f\eta)}{\mathrm{I}}(w,y) \\
\left(b'', \overline{bnb'}\right) & \longmapsto & {}^{b''}\overline{bnb'} = \overline{{}^{b''}(bnb')} = \overline{(b''b) n b'} \\
\left(b'', \sum_i \overline{b_i n_i b_i'}\right) & \longmapsto & {}^{b''}\left(\sum_i \overline{b_i n_i b_i'}\right) = \sum_i \overline{(b''b_i) n_i b_i'}
\end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl}
\frac{\mathrm{F}_P(f\eta)}{\mathrm{I}}(x,y) \times \mathrm{B}(y,z) & \longrightarrow & \frac{\mathrm{F}_P(f\eta)}{\mathrm{I}}(x,z) \\
\left(\overline{bnb'}, b'''\right) & \longmapsto & \overline{bnb'}^{b'''} = \overline{(bnb')^{b'''}} = \overline{bn(b'b''')} \\
\left(\sum_i \overline{b_i n_i b_i'}, b'''\right) & \longmapsto & \left(\sum_i \overline{b_i n_i b_i'}\right)^{b'''} = \sum_i \overline{b_i n_i (b_i' b''')}
\end{array}$$

biçiminde bir asosyatif B-etkisi tanımlanabilir. Bu etki ile $\mathrm{F}_P(f\eta)$ bir B-modül olur.

(iii) $\theta(\mathrm{I}) = 0 = \left\{0_{\mathrm{B}(x,y)} : x,y \in \mathrm{B}_0\right\}$ olduğundan θ morfizmi $\frac{\mathrm{F}_P(f\eta)}{\mathrm{I}}$ üzerine

$$\begin{array}{rccl} \eta_{f_*}: & \frac{\mathrm{F}_P(f\eta)}{\mathrm{I}} & \longrightarrow & \mathrm{B} \\ & \overline{bnb'} & \longmapsto & \eta_{f_*}\left(\overline{bnb'}\right) = \theta\left(bnb'\right) = b\left(\left(f\eta\right)n\right)b' \\ & \sum\limits_i \overline{b_i n_i b_i'} & \longmapsto & \eta_{f_*}\left(\sum\limits_i \overline{b_i n_i b_i'}\right) = \sum\limits_i \eta_{f_*}\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right) = \sum\limits_i \overline{b_i\left(\left(f\eta\right)n_i\right)b_i'} \end{array}$$

biçiminde bir R-cebiroid morfizmi indirger. Bu morfizm her $w,x,y,z \in \mathrm{B}_0$, $b'' \in \mathrm{B}(w,x)$, $b''' \in \mathrm{B}(y,z)$ ve $\overline{bnb'} \in \frac{\mathrm{F}_P(f\eta)}{\mathrm{I}}(x,y)$ için

$$\begin{array}{rcl} \eta_{f_*}\left(b''\overline{bnb'}\right) & = & \eta_{f_*}\left(\overline{b''\left(bnb'\right)}\right) \\ & = & \eta_{f_*}\left(\overline{\left(\left(b''b\right)nb'\right)}\right) \\ & = & \left(b''b\right)\left(\left(f\eta\right)n\right)b' \\ & = & b''\left(b\left(\left(f\eta\right)n\right)b'\right) \\ & = & b''\left(\eta_{f_*}\left(\overline{bnb'}\right)\right) \end{array}$$

ve benzer şekilde

$$\eta_{f_*}\left(\overline{bnb'}b'''\right) = \left(\eta_{f_*}\left(\overline{bnb'}\right)\right)b'''$$

eşitliklerini sağlar. Böylece her $w,x,y,z \in \mathrm{B}_0$, $b'' \in \mathrm{B}(w,x)$, $b''' \in \mathrm{B}(y,z)$ ve $\sum\limits_i \overline{b_i n_i b_i'} \in \frac{\mathrm{F}_P(f\eta)}{\mathrm{I}}(x,y)$ için

$$\begin{array}{rcl} \eta_{f_*}\left(b''\left(\sum\limits_i \overline{b_i n_i b_i'}\right)\right) & = & \eta_{f_*}\left(\sum\limits_i b''\overline{b_i n_i b_i'}\right) \\ & = & \sum\limits_i \eta_{f_*}\left(b''\overline{b_i n_i b_i'}\right) \\ & = & \sum\limits_i b''\left(\eta_{f_*}\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right)\right) \\ & = & b''\sum\limits_i \eta_{f_*}\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right) \\ & = & b''\left(\eta_{f_*}\sum\limits_i \overline{b_i n_i b_i'}\right) \end{array}$$

ve benzer şekilde

$$\eta_{f_*}\left(\left(\sum_i \overline{b_i n_i b_i'}\right)^{b'''}\right) = \left(\eta_{f_*}\left(\sum_i \overline{b_i n_i b_i'}\right)\right)b'''$$

eşitlikleri de sağlanır. Öyle ise

$$\frac{F_P(f\eta)}{\mathrm{I}} = \left(\eta_{f_*} : \frac{\mathrm{F}_P(f\eta)}{\mathrm{I}} \longrightarrow \mathrm{B}\right)$$

bir ön-çaprazlanmış modüldür.

(iv) Her $x,y,z \in \mathrm{B}_0$, $\overline{b_1 n_1 b_1'} \in \frac{\mathrm{F}_P(f\eta)}{\mathrm{I}}(x,y)$ ve $\overline{b_2 n_2 b_2'} \in \frac{\mathrm{F}_P(f\eta)}{\mathrm{I}}(y,z)$ için

$$\begin{array}{rcl} \overline{b_1 n_1 b_1'}^{\eta_{f_*}\left(\overline{b_2 n_2 b_2'}\right)} & = & \overline{b_1 n_1 b_1'^{\left(b_2\left(\left(f\eta\right)n_2\right)b_2'\right)}} \\ & = & \overline{\left(b_1 n_1 b_1'\right)^{\left(b_2\left(\left(f\eta\right)n_2\right)b_2'\right)}} \\ & = & \overline{b_1 n_1\left(b_1' b_2\left(\left(f\eta\right)n_2\right)b_2'\right)} \\ & = & \overline{b_1 n_1 b_1' b_2 n_2 b_2'} \\ & = & \overline{b_1 n_1 b_1'}\,\overline{b_2 n_2 b_2'} \end{array}$$

ve benzer şekilde

$$\eta_{f_*}(\overline{b_1 n_1 b_1'})\overline{b_2 n_2 b_2'} = \overline{b_1 n_1 b_1'}\ \overline{b_2 n_2 b_2'}$$

dir. Böylece her $x,y,z \in \mathrm{B}_0$, $\sum_i \overline{b_i n_i b_i'} \in \frac{\mathrm{F}_P(f\eta)}{\mathrm{I}}(x,y)$ ve $\sum_j \overline{b_j n_j b_j'} \in \frac{\mathrm{F}_P(f\eta)}{\mathrm{I}}(y,z)$ için

$$\begin{aligned}
\left(\sum_i \overline{b_i n_i b_i'}\right)^{\eta_{f_*}\left(\sum_j \overline{b_j n_j b_j'}\right)} &= \left(\sum_i \overline{b_i n_i b_i'}\right)^{\left(\sum_j \eta_{f_*}\left(\overline{b_j n_j b_j'}\right)\right)} \\
&= \sum_{i,j}\left(\overline{b_i n_i b_i'}^{\eta_{f_*}\left(\overline{b_j n_j b_j'}\right)}\right) \\
&= \sum_{i,j}\left(\overline{b_i n_i b_i'}\ \overline{b_j n_j b_j'}\right) \\
&= \left(\sum_i \overline{b_i n_i b_i'}\right)\left(\sum_j \overline{b_j n_j b_j'}\right)
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\sum_i \overline{b_i n_i b_i'}\left(\sum_j \overline{b_j n_j b_j'}\right) = \left(\sum_i \overline{b_i n_i b_i'}\right)\left(\sum_j \overline{b_j n_j b_j'}\right)$$

olur. Demek ki

$$\frac{F_P(f\eta)}{\mathrm{I}} = \left(\eta_{f_*} : \frac{\mathrm{F}_P(f\eta)}{\mathrm{I}} \longrightarrow \mathrm{B}\right)$$

bir çaprazlanmış modüldür. Böylece, $\frac{\mathrm{F}_P(f\eta)}{\mathrm{I}}$ ve $\frac{F_P(f\eta)}{\mathrm{I}}$ i sırasıyla $f_*\mathrm{N}$ ve $f_*\mathcal{N}$ ile gösterdiğimizde,

$$f_*\mathcal{N} = \left(\eta_{f_*} : f_*\mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{B}\right)$$

çaprazlanmış modülünü elde etmiş oluruz.

(v) $\overline{f}$ fonksiyonunu

$$\begin{array}{rccl}
\overline{f}: & \mathrm{N} & \longrightarrow & f_*\mathrm{N} \\
 & n & \longmapsto & \overline{f}n = \overline{i_{\mathrm{N}} n} = \overline{1_{s((f\eta)n)} n 1_{t((f\eta)n)}}
\end{array}$$

biçiminde tanımlayıp $\overline{1_{s((f\eta)n)} n 1_{t((f\eta)n)}}$ i $\overline{1_{s((f\eta)n)} n 1_{t((f\eta)n)}} = \overline{1n1}$ biçiminde kısaltalım. $sn = sn_1$, $tn = tn_1 = sn'$ koşulunu sağlayan her $n, n_1, n' \in \mathrm{N}$ ve $r \in R$ için

1.

$$\overline{f}(n+n_1) = \overline{1\,(n+n_1)\,1} = \overline{1n1 + 1n_1 1} = \overline{1n1} + \overline{1n_1 1} = \overline{f}n + \overline{f}n_1$$

2.

$$\begin{aligned}
\overline{f}(nn') &= \overline{1\,(nn')\,1} \\
&= \overline{1_{s((f\eta)n)}\,(nn')\,1_{t((f\eta)n')}} \\
&= \overline{1_{s((f\eta)n)}\left(n^{\eta n'}\right)1_{t((f\eta)n')}} \\
&= \overline{1_{s((f\eta)n)} n \left(((f\eta)\,n')\,1_{t((f\eta)n')}\right)} \\
&= \overline{1_{s((f\eta)n)} n \left(1_{t((f\eta)n)} 1_{s((f\eta)n')}\,((f\eta)\,n')\,1_{t((f\eta)n')}\right)} \\
&= \overline{1_{s((f\eta)n)} n 1_{t((f\eta)n)}}\ \overline{1_{s((f\eta)n')} n' 1_{t((f\eta)n')}} \\
&= \overline{1_{s((f\eta)n)} n 1_{t((f\eta)n)}}\ \overline{1_{s((f\eta)n')} n' 1_{t((f\eta)n')}} \\
&= \overline{1n1}\ \overline{1n'1}
\end{aligned}$$

ve

3.

$$r\cdot\overline{f}n = r\cdot\overline{1n1} = \overline{(r\cdot 1)n1} = \overline{1(r\cdot n)1} = \overline{f}(r\cdot n)$$

olduğundan $\overline{f}$ bir R-cebiroid morfizmidir.

Ayrıca $ta = sn$, $tn = sa'$ koşulunu sağlayan her $n \in \mathrm{N}$, $a, a' \in \mathrm{A}$ için

$$(f\eta)({}^{a}n) = f(\eta({}^{a}n)) = f(a(\eta n)) = (fa)(f(\eta n)) = (fa)((f\eta)n)$$

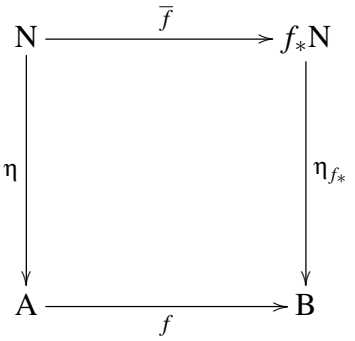
olup $s(((f\eta)({}^{a}n)) = s(fa)$, $t(((f\eta)({}^{a}n)) = t((f\eta)n)$ ve $t(fa) = s((f\eta)n)$ dir. Böylece

$$\begin{aligned}
\overline{f}({}^{a}n) &= \overline{1_{s((f\eta)({}^{a}n))}({}^{a}n)\,1_{t((f\eta)({}^{a}n))}} \\
&= \overline{\left(1_{s(fa)}(fa)\right)n1_{t((f\eta)n)}} \\
&= \overline{(fa)n1_{t((f\eta)n)}} \\
&= \overline{\left((fa)1_{t(fa)}\right)n1_{t((f\eta)n)}} \\
&= \overline{\left((fa)1_{s((f\eta)n)}\right)n1_{t((f\eta)n)}} \\
&= {}^{(fa)}\overline{\left(1_{s((f\eta)n)}n1_{t((f\eta)n)}\right)} \\
&= {}^{(fa)}\overline{\left(1_{s((f\eta)n)}n1_{t((f\eta)n)}\right)} \\
&= {}^{(fa)}\left(\overline{f}n\right)
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde $\overline{f}(n^{a}) = \left(\overline{f}n\right)^{(fa)}$ elde edilir. Bunlara ek olarak her $n \in \mathrm{N}$ için

$$\eta_{f_*}\left(\overline{f}n\right) = \eta_{f_*}\left(\overline{1n1}\right) = 1((f\eta)n)1 = (f\eta)n$$

olduğundan $\left(\overline{f}, f\right)$ ikilisi bir çaprazlanmış modül morfizmidir:



(vi) Her $\mathcal{M} = (\mu : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{B})$ R-cebiroid çaprazlanmış B-modülü ve her $(\nu, f) : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}$ çaprazlanmış modül morfizmi için h fonksiyonu

$$\begin{aligned}
h: \quad f_*\mathrm{N} &\longrightarrow \mathrm{M} \\
\overline{bnb'} &\longmapsto h\left(\overline{bnb'}\right) = {}^{b}(\nu n)^{b'} \\
\sum_i \overline{b_i n_i b_i'} &\longmapsto h\left(\sum_i \overline{b_i n_i b_i'}\right) = \sum_i h\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right) = \sum_i \left({}^{b_i}(\nu n_i)^{b_i'}\right)
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlansın:

1. Her $\overline{bnb'} \in f_*\mathrm{N}$ için açıkça ${}^{b}(\nu n)^{b'} \in \mathrm{M}$ olup ν iyi tanımlı olduğundan h de iyi tanımlıdır.

2. h bir R-cebiroid morfizmidir. Çünkü her $x,y,z \in \mathrm{B}_0$, $\overline{\sum_i p_i}, \overline{\sum_j p_j} \in f_*\mathrm{N}(x,y)$, $\overline{\sum_s p_s} \in f_*\mathrm{N}(y,z)$ için

$$\begin{aligned} h\left(\sum_i \overline{b_i n_i b_i'} + \sum_j \overline{b_j n_j b_j'}\right) &= h\left(\sum_{t=i,j} \overline{b_t n_t b_t'}\right) \\ &= \sum_{t=i,j} h\left(\overline{b_t n_t b_t'}\right) \\ &= \sum_i h\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right) + \sum_j h\left(\overline{b_j n_j b_j'}\right) \\ &= h\left(\sum_i \overline{b_i n_i b_i'}\right) + h\left(\sum_j \overline{b_j n_j b_j'}\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} h\left(\sum_i \overline{b_i n_i b_i'} \sum_s \overline{b_s n_s b_s'}\right) &= h\left(\sum_{i,s} \overline{b_i n_i b_i' b_s n_s b_s'}\right) \\ &= \sum_{i,s} h\left(\overline{b_i n_i \left(b_i' b_s \left(\left(f\eta\right) n_s\right) b_s'\right)}\right) \\ &= \sum_{i,s} \left({}^{b_i}(\nu n_i)^{\left(b_i' b_s ((\mu\nu) n_s) b_s'\right)}\right) \\ &= \sum_{i,s} \left({}^{b_i}(\nu n_i)^{b_i' (b_s (\mu(\nu n_s)) b_s')}\right) \\ &= \sum_{i,s} \left({}^{b_i}(\nu n_i)^{b_i'}\right)^{\mu\left({}^{b_s}(\nu n_s)^{b_s'}\right)} \\ &= \sum_{i,s} \left(\left({}^{b_i}(\nu n_i)^{b_i'}\right)\left({}^{b_s}(\nu n_s)^{b_s'}\right)\right) \\ &= \sum_{i,s} \left(h\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right) h\left(\overline{b_s n_s b_s'}\right)\right) \\ &= h\left(\sum_i \overline{b_i n_i b_i'}\right) h\left(\sum_s \overline{b_s n_s b_s'}\right) \end{aligned}$$

olup, her $\overline{bnb'}, \sum_i \overline{b_i n_i b_i'} \in f_*\mathrm{N}$ ve $r \in R$ için

$$h\left(r \cdot \overline{bnb'}\right) = h\left(\overline{(r\cdot b) n b'}\right) = {}^{(r\cdot b)}(\nu n)^{b'} = r \cdot \left({}^{b}(\nu n)^{b'}\right) = r \cdot h\left(\overline{bnb'}\right)$$

ve

$$\begin{aligned} h\left(r \cdot \left(\sum_i \overline{b_i n_i b_i'}\right)\right) &= h\left(\sum_i \overline{(r\cdot b_i) n_i b_i'}\right) \\ &= \sum_i h\left(\overline{(r\cdot b_i) n_i b_i'}\right) \\ &= \sum_i \left(r \cdot h\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right)\right) \\ &= r \cdot \left(\sum_i h\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right)\right) \\ &= r \cdot h\left(\sum_i \overline{b_i n_i b_i'}\right) \end{aligned}$$

dir.

3. h bir B-modül morfizmidir. Çünkü her $w,x,y,z \in \mathrm{B}_0$, $b'' \in \mathrm{B}(w,x)$, $b''' \in \mathrm{B}(y,z)$ ve $\overline{bnb'}$, $\sum_i \overline{b_i n_i b_i'} \in f_* \mathrm{N}(x,y)$ için

$$\begin{aligned} h\left({}^{b''}\overline{bnb'}\right) &= h\left(\overline{(b''b)\,nb'}\right) \\ &= {}^{b''b}(\nu n)^{b'} \\ &= {}^{b''}\left({}^{b}(\nu n)^{b'}\right) \\ &= {}^{b''}\left(h\left(\overline{bnb'}\right)\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} h\left({}^{b''}\left(\sum_i \overline{b_i n_i b_i'}\right)\right) &= h\left(\sum_i \overline{(b''b_i)\,n_i b_i'}\right) \\ &= \sum_i h\overline{(b''b_i)\,n_i b_i'} \\ &= \sum_i \left({}^{b''}\left(h\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right)\right)\right) \\ &= {}^{b''}\left(\sum_i h\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right)\right) \\ &= {}^{b''}\left(h\left(\sum_i \overline{b_i n_i b_i'}\right)\right) \end{aligned}$$

olup benzer şekilde

$$h\left(\overline{bnb'}^{b'''}\right) = \left(h\left(\overline{bnb'}\right)\right)^{b'''}$$

ve

$$h\left(\left(\sum_i \overline{b_i n_i b_i'}\right)^{b''}\right) = \left(h\left(\sum_i \overline{b_i n_i b_i'}\right)\right)^{b''}$$

olduğu da gösterilebilir.

4. (h, I_{B}) bir R-cebiroid çaprazlanmış B-modül morfizmidir. Çünkü her $\overline{bnb'}, \sum_i \overline{b_i n_i b_i'} \in f_* \mathrm{N}$ için

$$\begin{aligned} (\mu h)\left(\overline{bnb'}\right) &= \mu\left(h\left(\overline{bnb'}\right)\right) \\ &= \mu\left({}^{b}(\nu n)^{b'}\right) \\ &= b\mu(\nu n)\,b' \\ &= b\left((\mu\nu)\,n\right)b' \\ &= b\left((f\eta)\,n\right)b' \\ &= \eta_{f_*}\left(\overline{bnb'}\right) \\ &= \left(I_{\mathrm{B}}\eta_{f_*}\right)\left(\overline{bnb'}\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (\mu h)\left(\sum_i \overline{b_i n_i b_i'}\right) &= \sum_i (\mu h)\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right) \\ &= \sum_i \eta_{f_*}\left(\overline{bnb'}\right) \\ &= \eta_{f_*}\left(\sum_i \left(\overline{bnb'}\right)\right) \\ &= \left(I_{\mathrm{B}}\eta_{f_*}\right)\left(\sum_i \left(\overline{bnb'}\right)\right) \end{aligned}$$

dir.

5. Her $n \in \mathrm{N}$ için

$$\left(h\overline{f}\right)(n) = h\left(\overline{1n1}\right) = {}^{1}(\nu n)^{1} = \nu n$$

dir.

h nin biricikliği ve $f_*\mathcal{N}$ ile $\overline{f}$ nin de izomorfizm farkıyla biricikliği önceki evrensel yapılarda olduğu gibi gösterilebilir. □

Her $\mathcal{N} = (\eta : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{A})$, $\mathcal{N}' = (\eta' : \mathrm{N}' \longrightarrow \mathrm{A})$ R-cebiroid çaprazlanmış A-modülü ve her $(g_1, I_\mathrm{A}) : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}'$ R-cebiroid çaprazlanmış A-modül morfizmi için

$$\begin{array}{rccl} f_*g_1 : & f_*\mathrm{N} & \longrightarrow & f_*\mathrm{N}' \\ & \overline{bnb'} & \longmapsto & (f_*g_1)\left(\overline{bnb'}\right) = \overline{b\,(g_1 n)\,b'} \end{array}$$

biçiminde tanımlanırsa, (f_*g_1, I_B) açıkça bir R-cebiroid çaprazlanmış B-modül morfizmi olur.

Böylece R-cebiroid indirgenmiş çaprazlanmış modülünün elde edilişi bize

$$\begin{array}{rccl} f_* : & \mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{A} & \longrightarrow & \mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{B} \\ & \mathcal{N} & \longmapsto & f_*\mathcal{N} \\ & g = (g_1, I_\mathrm{A}) : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}' & \longmapsto & f_*g = f_*(g_1, I_\mathrm{A}) = (f_*g_1, I_\mathrm{B}) : f_*\mathcal{N} \longrightarrow f_*\mathcal{N}' \end{array}$$

biçiminde bir funktor verir.

Önerme 3.15 A, B, C birer R-cebiroid ve $f : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ ile $f' : \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{C}$ birer R-cebiroid morfizmi ise f'_*f_* funktoru $(f'f)_*$ funktoruna doğal izomorftur: $f'_*f_* \cong (f'f)_*$.

İspat: İspatımızı beş aşamada gerçekleştireceğiz.

(i) İspatın ilk kısmında sırasıyla $f_*\mathcal{N}$, $(f'_*f_*)\,\mathcal{N}$ ve $(f'f)_*\,\mathcal{N}$ çaprazlanmış modüllerini inceleyeceğiz:

1. Her $\mathcal{N} = (\eta : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{A}) \in \mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{A}$ çaprazlanmış modülünden f ile indirgenmiş çaprazlanmış modül $f_*\mathcal{N} = \left(\eta_{f_*} : f_*\mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{B}\right)$ olup $f_*\mathrm{N}$ B-modülünün üreteçleri her $n \in \mathrm{N}$ ve $tb = s((f\eta)\,n)$, $t((f\eta)\,n) = sb'$ koşullarını sağlayan her $b, b' \in \mathrm{B}$ için $\overline{bnb'}$ biçiminde ve η_{f_*} morfizmi

$$\begin{array}{rccl} \eta_{f_*} : & f_*\mathrm{N} & \longrightarrow & \mathrm{B} \\ & \overline{bnb'} & \longmapsto & b\,((f\eta)\,n)\,b' \\ & \sum_i \overline{b_i n_i b'_i} & \longmapsto & \sum_i \eta_{f_*}\left(\overline{b_i n_i b'_i}\right) \end{array}$$

biçimindedir.

2. Her $f_*\mathcal{N} = \left(\eta_{f_*} : f_*\mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{B}\right) \in \mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{B}$ çaprazlanmış modülünden f' ile indirgenmiş çaprazlanmış modül $(f'_*f_*)\mathcal{N} = f'_*(f_*\mathcal{N}) = \left(\left(\eta_{f_*}\right)_{f'_*} : (f'_*f_*)\mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{C}\right)$ olup $(f'_*f_*)\mathrm{N} = f'_*(f_*\mathrm{N})$ C-modülünün üreteçleri her $\overline{bnb'} \in f_*\mathrm{N}$ ve $tc = s(f'b),\ t(f'b') = sc'$ koşullarını sağlayan her $c, c' \in \mathrm{C}$ için $\overline{c\left(\overline{bnb'}\right)c'}$ biçimindedir. $(f'_*f_*)\mathrm{N}$ nin üreteçleri arasında her $\sum_i \overline{b_i n_i b'_i} \in f_*\mathrm{N}$ ve $tc = s(f'b_i),\ t(f'b'_i) = sc'$ koşullarını sağlayan her $c, c' \in \mathrm{C}$ için $\overline{c\left(\sum_i \overline{b_i n_i b'_i}\right)c'}$ biçimindeki elemanların da bulunması gerektiği düşünülebilir. Ancak bu elemanlar da zaten,

$$\overline{c\left(\sum_i \overline{b_i n_i b'_i}\right)c'} = \overline{\sum_i c\left(\overline{b_i n_i b'_i}\right)c'} = \sum_i \overline{c\left(\overline{b_i n_i b'_i}\right)c'}$$

olduğundan, $\overline{c\left(\overline{bnb'}\right)c'}$ biçimindeki elemanlarca üretilmektedir. $\left(\eta_{f_*}\right)_{f'_*}$ morfizmi ise

$$\begin{array}{rccl} \left(\eta_{f_*}\right)_{f'_*} : & (f'_*f_*)\mathrm{N} & \longrightarrow & \mathrm{C} \\ & \overline{c\left(\overline{bnb'}\right)c'} & \longmapsto & c\left(\left(f'\eta_{f_*}\right)\left(\overline{bnb'}\right)\right)c' \\ & \sum_i \overline{c\left(\overline{b_i n_i b'_i}\right)c'} & \longmapsto & \sum_i \left(\eta_{f_*}\right)_{f'_*}\left(\overline{c\left(\overline{b_i n_i b'_i}\right)c'}\right) \end{array}$$

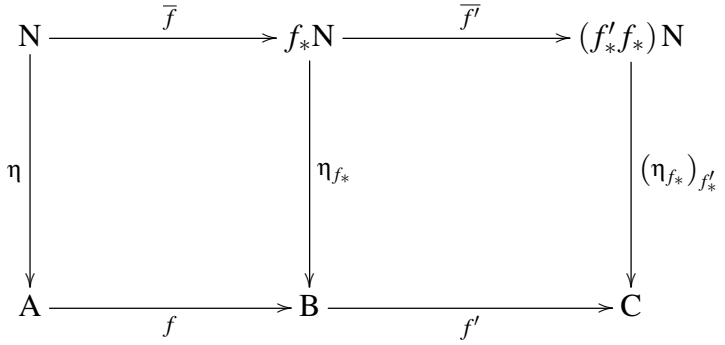
biçimindedir.

3. Her $\mathcal{N} = (\eta : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{A}) \in \mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{A}$ çaprazlanmış modülünden $f'f$ ile indirgenmiş çaprazlanmış modül $(f'f)_*\mathcal{N} = \left(\eta_{(f'f)_*} : (f'f)_*\mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{C}\right)$ olup $(f'f)_*\mathrm{N}$ C-modülünün üreteçleri her $n \in \mathrm{N}$ ve $tc = s((f'f\eta)n),\ t((f'f\eta)n) = sc'$ koşullarını sağlayan her $c, c' \in \mathrm{C}$ için $\overline{cnc'}$ biçiminde ve $\eta_{(f'f)_*}$ morfizmi

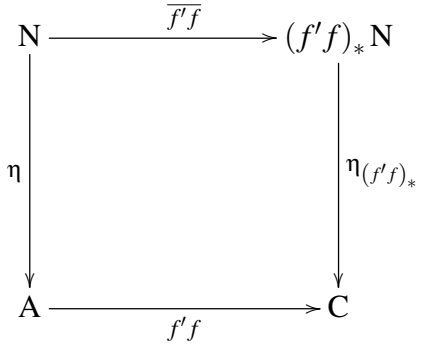
$$\begin{array}{rccl} \eta_{(f'f)_*} : & (f'f)_*\mathrm{N} & \longrightarrow & \mathrm{C} \\ & \overline{cnc'} & \longmapsto & c((f'f\eta)n)c' \\ & \sum_i \overline{c_i n_i c'_i} & \longmapsto & \sum_i \eta_{(f'f)_*}\left(\overline{c_i n_i c'_i}\right) \end{array}$$

biçimindedir.

Ayrıca



ve



diyagramları değişmelidir.

(ii) Her $\mathcal{N} = (\eta : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{A}) \in \mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{A}$ için α_{N}

$$\begin{array}{rccl}
\alpha_{\mathrm{N}}: & (f'_*f_*)\,\mathrm{N} & \longrightarrow & (f'f)_*\,\mathrm{N} \\
& \overline{c\left(\overline{bnb'}\right)c'} & \longmapsto & \alpha_{\mathrm{N}}\left(\overline{c\left(\overline{bnb'}\right)c'}\right) = \overline{(c\,(f'b))\,n\,((f'b')\,c')} \\
& \sum\limits_i \overline{c\left(\overline{b_in_ib'_i}\right)c'} & \longmapsto & \alpha_{\mathrm{N}}\left(\sum\limits_i \overline{c\left(\overline{b_in_ib'_i}\right)c'}\right) = \sum\limits_i \alpha_{\mathrm{N}}\left(\overline{c\left(\overline{b_in_ib'_i}\right)c'}\right)
\end{array}$$

biçiminde tanımlansın.

1. α_{N} bir R-cebiroid morfizmidir. Çünkü her $x,y,z \in \mathrm{C}_0$, $\sum\limits_i \overline{c_i\left(\overline{b_in_ib'_i}\right)c'_i}, \sum\limits_j \overline{c_j\left(\overline{b_jn_jb'_j}\right)c'_j} \in (f'_*f_*)\,\mathrm{N}\,(x,y)$, $\sum\limits_s \overline{c_s\left(\overline{b_sn_sb'_s}\right)c'_s} \in f_*\mathrm{N}\,(y,z)$ için

$$\begin{array}{rcl}
\alpha_{\mathrm{N}}\left(\sum\limits_i \overline{c_i\left(\overline{b_in_ib'_i}\right)c'_i} + \sum\limits_j \overline{c_j\left(\overline{b_jn_jb'_j}\right)c'_j}\right) & = & \alpha_{\mathrm{N}}\left(\sum\limits_{t=i,j} \overline{c_t\left(\overline{b_tn_tb'_t}\right)c'_t}\right) \\
& = & \sum\limits_{t=i,j} \alpha_{\mathrm{N}}\left(\overline{c_t\left(\overline{b_tn_tb'_t}\right)c'_t}\right) \\
& = & \sum\limits_i \alpha_{\mathrm{N}}\left(\overline{c_i\left(\overline{b_in_ib'_i}\right)c'_i}\right) + \sum\limits_j \alpha_{\mathrm{N}}\left(\overline{c_j\left(\overline{b_jn_jb'_j}\right)c'_j}\right) \\
& = & \alpha_{\mathrm{N}}\left(\sum\limits_i \overline{c_i\left(\overline{b_in_ib'_i}\right)c'_i}\right) + \alpha_{\mathrm{N}}\left(\sum\limits_j \overline{c_j\left(\overline{b_jn_jb'_j}\right)c'_j}\right)
\end{array}$$

ve

$$\begin{aligned}
\alpha_{\mathrm{N}}\left(\sum_i \overline{c_i\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right)c_i'}\sum_s \overline{c_s\left(\overline{b_s n_s b_s'}\right)c_s'}\right) &= \alpha_{\mathrm{N}}\left(\sum_{i,s}\left(\overline{c_i\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right)c_i' c_s\left(\overline{b_s n_s b_s'}\right)c_s'}\right)\right)\\
&= \sum_{i,s}\alpha_{\mathrm{N}}\left(\overline{c_i\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right)\left(c_i' c_s\left(\left(f'\eta_{f_*}\right)\left(\overline{b_s n_s b_s'}\right)\right)c_s'\right)}\right)\\
&= \sum_{i,s}\overline{\left(c_i\left(f' b_i\right)\right)n_i\left(\left(f' b_i'\right)\left(c_i' c_s\left(f'\left(b_s\left(\left(f\eta\right)n_s\right)b_s'\right)\right)c_s'\right)\right)}\\
&= \sum_{i,s}\overline{\left(c_i\left(f' b_i\right)\right)n_i\left(\left(f' b_i'\right)c_i' c_s\left(\left(f' b_s\right)\left(\left(f' f\eta\right)n_s\right)\left(f' b_s'\right)\right)c_s'\right)}\\
&= \sum_{i,s}\overline{\left(c_i\left(f' b_i\right)\right)n_i\left(\left(\left(f' b_i'\right)c_i'\right)\left(c_s\left(f' b_s\right)\right)\left(\left(\left(f' f\right)\eta\right)n_s\right)\left(\left(f' b_s'\right)c_s'\right)\right)}\\
&= \sum_{i,s}\overline{\left(c_i\left(f' b_i\right)\right)n_i\left(\left(f' b_i'\right)c_i'\right)}\ \overline{\left(c_s\left(f' b_s\right)\right)n_s\left(\left(f' b_s'\right)c_s'\right)}\\
&= \sum_i \overline{\left(c_i\left(f' b_i\right)\right)n_i\left(\left(f' b_i'\right)c_i'\right)}\sum_s \overline{\left(c_s\left(f' b_s\right)\right)n_s\left(\left(f' b_s'\right)c_s'\right)}\\
&= \sum_i \alpha_{\mathrm{N}}\left(\overline{c_i\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right)c_i'}\right)\sum_s \alpha_{\mathrm{N}}\left(\overline{c_s\left(\overline{b_s n_s b_s'}\right)c_s'}\right)\\
&= \alpha_{\mathrm{N}}\left(\sum_i \overline{c_i\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right)c_i'}\right)\alpha_{\mathrm{N}}\left(\sum_s \overline{c_s\left(\overline{b_s n_s b_s'}\right)c_s'}\right)
\end{aligned}$$

olup, her $\overline{c\left(\overline{bnb'}\right)c'}, \sum_i \overline{c_i\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right)c_i'} \in \left(f_*' f_*\right)\mathrm{N}$ ve $r \in R$ için

$$\begin{aligned}
\alpha_{\mathrm{N}}\left(r\cdot\overline{c\left(\overline{bnb'}\right)c'}\right) &= \alpha_{\mathrm{N}}\left(\overline{\left(r\cdot c\right)\left(\overline{bnb'}\right)c'}\right)\\
&= \overline{\left(\left(r\cdot c\right)\left(f' b\right)\right)n\left(\left(f' b'\right)c'\right)}\\
&= \overline{\left(r\cdot\left(c\left(f' b\right)\right)\right)n\left(\left(f' b'\right)c'\right)}\\
&= r\cdot\overline{\left(c\left(f' b\right)\right)n\left(\left(f' b'\right)c'\right)}\\
&= r\cdot\alpha_{\mathrm{N}}\left(\overline{c\left(\overline{bnb'}\right)c'}\right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\alpha_{\mathrm{N}}\left(r\cdot\left(\sum_i \overline{c_i\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right)c_i'}\right)\right) &= \alpha_{\mathrm{N}}\left(\sum_i r\cdot\overline{c_i\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right)c_i'}\right)\\
&= \sum_i \alpha_{\mathrm{N}}\left(r\cdot\overline{c_i\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right)c_i'}\right)\\
&= \sum_i\left(r\cdot\alpha_{\mathrm{N}}\left(\overline{c_i\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right)c_i'}\right)\right)\\
&= r\cdot\sum_i \alpha_{\mathrm{N}}\left(\overline{c_i\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right)c_i'}\right)\\
&= r\cdot\alpha_{\mathrm{N}}\left(\sum_i \overline{c_i\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right)c_i'}\right)
\end{aligned}$$

dir.

2. α_{N} bir C-modül morfizmidir. Çünkü her $w,x,y,z \in \mathrm{C}_0$, $c'' \in \mathrm{A}\left(w,x\right)$, $c''' \in \mathrm{A}\left(y,z\right)$ ve $\overline{c\left(\overline{bnb'}\right)c'}, \sum_i \overline{c_i\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right)c_i'} \in \left(f_*' f_*\right)\mathrm{N}\left(x,y\right)$ için

$$\begin{aligned}
\alpha_{\mathrm{N}}\left({}^{c''}\left(\overline{c\left(\overline{bnb'}\right)c'}\right)\right) &= \alpha_{\mathrm{N}}\left(\overline{\left(c''c\right)\left(\overline{bnb'}\right)c'}\right)\\
&= \overline{\left(\left(c''c\right)\left(f' b\right)\right)n\left(\left(f' b'\right)c'\right)}\\
&= {}^{c''}\left(\overline{\left(c\left(f' b\right)\right)n\left(\left(f' b'\right)c'\right)}\right)\\
&= {}^{c''}\left(\alpha_{\mathrm{N}}\left(\overline{c\left(\overline{bnb'}\right)c'}\right)\right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\alpha_{\mathrm{N}}\left({}^{c''}\left(\overline{\sum_i c_i\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right)c_i'}\right)\right) &= \sum_i \alpha_{\mathrm{N}}\left({}^{c''}\left(\overline{c_i\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right)c_i'}\right)\right)\\ &= \sum_i\left({}^{c''}\left(\alpha_{\mathrm{N}}\left(\overline{c\left(\overline{bnb'}\right)c'}\right)\right)\right)\\ &= {}^{c''}\left(\alpha_{\mathrm{N}}\left(\overline{\sum_i c_i\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right)c_i'}\right)\right)\end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde

$$\alpha_{\mathrm{N}}\left(\left(\overline{c\left(\overline{bnb'}\right)c'}\right)^{c'''}\right)=\left(\alpha_{\mathrm{N}}\left(\overline{c\left(\overline{bnb'}\right)c'}\right)\right)^{c'''}$$

ve

$$\alpha_{\mathrm{N}}\left(\left(\overline{\sum_i c_i\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right)c_i'}\right)^{c'''}\right)=\left(\alpha_{\mathrm{N}}\left(\overline{\sum_i c_i\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right)c_i'}\right)\right)^{c'''}$$

olduğu da gösterilebilir.

3. $\alpha_{\mathcal{N}}=(\alpha_{\mathrm{N}},I_{\mathrm{C}}):(f'_*f_*)\mathcal{N}\longrightarrow(f'f)_*\mathcal{N}$ bir çaprazlanmış C-modül morfizmidir. Çünkü her $\overline{c\left(\overline{bnb'}\right)c'},\overline{\sum_i c_i\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right)c_i'}\in(f'_*f_*)\mathrm{N}$ için

$$\begin{aligned}\left(\eta_{(f'f)_*}\alpha_{\mathrm{N}}\right)\left(\overline{c\left(\overline{bnb'}\right)c'}\right) &= \eta_{(f'f)_*}\left(\alpha_{\mathrm{N}}\left(\overline{c\left(\overline{bnb'}\right)c'}\right)\right)\\ &= \eta_{(f'f)_*}\left(\overline{(c(f'b))n((f'b')c')}\right)\\ &= (c(f'b))((f'f)\eta n)((f'b')c')\\ &= c((f'b)(f'((f\eta)n))(f'b'))c'\\ &= c(f'(b((f\eta)n)b'))c'\\ &= c\left(f'\left(\eta_{f_*}\left(\overline{bnb'}\right)\right)\right)c'\\ &= c\left(\left(f'\eta_{f_*}\right)\left(\overline{bnb'}\right)\right)c'\\ &= \left(\eta_{f_*}\right)_{f'_*}\left(\overline{c\left(\overline{bnb'}\right)c'}\right)\\ &= \left(I_{\mathrm{C}}\left(\eta_{f_*}\right)_{f'_*}\right)\left(\overline{c\left(\overline{bnb'}\right)c'}\right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\left(\eta_{(f'f)_*}\alpha_{\mathrm{N}}\right)\left(\overline{\sum_i c_i\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right)c_i'}\right) &= \sum_i\left(\left(\eta_{(f'f)_*}\alpha_{\mathrm{N}}\right)\left(\overline{c_i\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right)c_i'}\right)\right)\\ &= \sum_i\left(\left(I_{\mathrm{C}}\left(\eta_{f_*}\right)_{f'_*}\right)\left(\overline{c_i\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right)c_i'}\right)\right)\\ &= \left(I_{\mathrm{C}}\left(\eta_{f_*}\right)_{f'_*}\right)\left(\sum_i\left(\overline{c_i\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right)c_i'}\right)\right)\end{aligned}$$

olup

$$\begin{array}{ccc}(f'_*f_*)\mathrm{N} & \xrightarrow{\ \alpha_{\mathrm{N}}\ } & (f'f)_*\mathrm{N}\\ \Big\downarrow{\scriptstyle \left(\eta_{f_*}\right)_{f'_*}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \eta_{(f'f)_*}}\\ \mathrm{C} & \xrightarrow[\ I_{\mathrm{C}}\ ]{} & \mathrm{C}\end{array}$$

diyagramı değişmelidir.

(*iii*) Şimdi de β_N fonksiyonu ters yönde

$$\begin{array}{rccl} \beta_N: & (f'f)_* N & \longrightarrow & (f'_* f_*) N \\ & \overline{cnc'} & \longmapsto & \beta_N\left(\overline{cnc'}\right) = \overline{c\left(\overline{1n1}\right)c'} \\ & \sum_i \overline{c_i n_i c'_i} & \longmapsto & \beta_N\left(\sum_i \overline{c_i n_i c'_i}\right) = \sum_i \beta_N\left(\overline{c_i n_i c'_i}\right) \end{array}$$

biçiminde tanımlansın.

1. β_N bir R-cebiroid morfizmidir. Çünkü her $x,y,z \in C_0$, $\sum_i \overline{c_i n_i c'_i}, \sum_j \overline{c_j n_j c'_j} \in (f'f)_* N(x,y)$, $\sum_s \overline{c_s n_s c'_s} \in (f'f)_* N(y,z)$ için

$$\begin{aligned} \beta_N\left(\sum_i \overline{c_i n_i c'_i} + \sum_j \overline{c_j n_j c'_j}\right) &= \beta_N\left(\sum_{t=i,j} \overline{c_t n_t c'_t}\right) \\ &= \sum_{t=i,j} \beta_N\left(\overline{c_t n_t c'_t}\right) \\ &= \sum_i \beta_N\left(\overline{c_i n_i c'_i}\right) + \sum_j \beta_N\left(\overline{c_j n_j c'_j}\right) \\ &= \beta_N\left(\sum_i \overline{c_i n_i c'_i}\right) + \beta_N\left(\sum_j \overline{c_j n_j c'_j}\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \beta_N\left(\sum_i \overline{c_i n_i c'_i} \sum_s \overline{c_s n_s c'_s}\right) &= \beta_N\left(\sum_{i,s} \overline{c_i n_i c'_i c_s n_s c'_s}\right) \\ &= \sum_{i,s} \beta_N\left(\overline{c_i n_i \left(c'_i c_s \left(\left(\left(f'f\right)\eta\right) n_s\right) c'_s\right)}\right) \\ &= \sum_{i,s} \overline{c_i \overline{1 n_i 1} \left(c'_i c_s \left(f'\left(\left(f\eta\right) n_s\right)\right) c'_s\right)} \\ &= \sum_{i,s} \overline{c_i \overline{1 n_i 1} \left(c'_i c_s \left(f'\left(1\left(\left(f\eta\right) n_s\right) 1\right)\right) c'_s\right)} \\ &= \sum_{i,s} \overline{c_i \overline{1 n_i 1} \left(c'_i c_s \left(f'\left(\eta_{f_*} \overline{1 n_s 1}\right)\right) c'_s\right)} \\ &= \sum_{i,s} \overline{c_i \overline{1 n_i 1} \left(c'_i c_s \left(\left(f'\eta_{f_*}\right) \overline{1 n_s 1}\right) c'_s\right)} \\ &= \sum_{i,s} \left(\overline{c_i \overline{1 n_i 1} c'_i} \; \overline{c_s \overline{1 n_s 1} c'_s}\right) \\ &= \sum_i \overline{c_i \overline{1 n_i 1} c'_i} \sum_s \overline{c_s \overline{1 n_s 1} c'_s} \\ &= \sum_i \beta_N\left(\overline{c_i n_i c'_i}\right) \sum_s \beta_N\left(\overline{c_s n_s c'_s}\right) \\ &= \beta_N\left(\sum_i \overline{c_i n_i c'_i}\right) \beta_N\left(\sum_s \overline{c_s n_s c'_s}\right) \end{aligned}$$

olup, her $\overline{cnc'}, \sum_i \overline{c_i n_i c_i'} \in (f'f)_* \mathrm{N}$ ve $r \in R$ için

$$\begin{aligned} \beta_{\mathrm{N}}\left(r \cdot \left(\overline{cnc'}\right)\right) &= \beta_{\mathrm{N}}\left(\overline{(r \cdot c)\, nc'}\right) \\ &= \overline{(r \cdot c)\, \overline{1n1} c'} \\ &= r \cdot \left(\overline{c\left(\overline{1n1}\right) c'}\right) \\ &= r \cdot \beta_{\mathrm{N}}\left(\overline{cnc'}\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \beta_{\mathrm{N}}\left(r \cdot \left(\sum_i \overline{c_i n_i c_i'}\right)\right) &= \beta_{\mathrm{N}}\left(\sum_i r \cdot \overline{c_i n_i c_i'}\right) \\ &= \sum_i \beta_{\mathrm{N}}\left(r \cdot \overline{c_i n_i c_i'}\right) \\ &= \sum_i \left(r \cdot \beta_{\mathrm{N}}\left(\overline{c_i n_i c_i'}\right)\right) \\ &= r \cdot \sum_i \beta_{\mathrm{N}}\left(\overline{c_i n_i c_i'}\right) \\ &= r \cdot \beta_{\mathrm{N}}\left(\sum_i \overline{c_i n_i c_i'}\right) \end{aligned}$$

dir.

2. β_{N} bir C-modül morfizmidir. Çünkü her $w,x,y,z \in \mathrm{C}_0$, $c'' \in \mathrm{C}(w,x)$, $c''' \in \mathrm{C}(y,z)$ ve $\overline{cnc'}, \sum_i \overline{c_i n_i c_i'} \in (f'f)_* \mathrm{N}(x,y)$ için

$$\begin{aligned} \beta_{\mathrm{N}}\left({}^{c''}\left(\overline{cnc'}\right)\right) &= \beta_{\mathrm{N}}\left(\overline{(c''c)\, nc'}\right) \\ &= \overline{(c''c)\, \overline{1n1} c'} \\ &= {}^{c''}\left(\overline{c\overline{1n1}c'}\right) \\ &= {}^{c''}\left(\beta_{\mathrm{N}}\left(\overline{cnc'}\right)\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \beta_{\mathrm{N}}\left({}^{c''}\left(\sum_i \overline{c_i n_i c_i'}\right)\right) &= \sum_i \beta_{\mathrm{N}}\left({}^{c''}\overline{c_i n_i c_i'}\right) \\ &= \sum_i \left({}^{c''}\left(\beta_{\mathrm{N}}\left(\overline{c_i n_i c_i'}\right)\right)\right) \\ &= {}^{c''}\left(\beta_{\mathrm{N}}\left(\sum_i \overline{c_i n_i c_i'}\right)\right) \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde

$$\beta_{\mathrm{N}}\left(\overline{cnc'}^{c'''}\right) = \left(\beta_{\mathrm{N}}\left(\overline{cnc'}\right)\right)^{c'''}$$

ve

$$\beta_{\mathrm{N}}\left(\left(\sum_i \overline{c_i n_i c_i'}\right)^{c'''}\right) = \left(\beta_{\mathrm{N}}\left(\sum_i \overline{c_i n_i c_i'}\right)\right)^{c'''}$$

olduğu da gösterilebilir.

3. $\beta_{\mathcal{N}} = (\beta_{\mathrm{N}}, I_{\mathrm{C}}) : (f'f)_* \mathcal{N} \longrightarrow (f'_* f_*)\, \mathcal{N}$ bir çaprazlanmış C-modül morfizmidir. Çünkü

her $\overline{cnc'}, \sum_i \overline{c_i n_i c_i'} \in (f'f)_* \mathrm{N}$ için

$$\begin{aligned}
\left(\left(\eta_{f_*}\right)_{f'_*}\beta_{\mathrm{N}}\right)\left(\overline{cnc'}\right) &= \left(\eta_{f_*}\right)_{f'_*}\left(\beta_{\mathrm{N}}\left(\overline{cnc'}\right)\right) \\
&= \left(\eta_{f_*}\right)_{f'_*}\left(\overline{c\overline{1n1}c'}\right) \\
&= c\left(\left(f'\eta_{f_*}\right)\overline{1n1}\right)c' \\
&= c\left(f'\left(\eta_{f_*}\left(\overline{1n1}\right)\right)\right)c' \\
&= c\left(f'\left(1\left(\left(f\eta\right)n\right)1\right)\right)c' \\
&= c\left(f'\left(f\eta n\right)\right)c' \\
&= c\left(\left(\left(f'f\right)\eta\right)n\right)c' \\
&= \eta_{(f'f)_*}\left(\overline{cnc'}\right) \\
&= \left(I_{\mathrm{C}}\eta_{(f'f)_*}\right)\left(\overline{cnc'}\right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left(\left(\eta_{f_*}\right)_{f'_*}\beta_{\mathrm{N}}\right)\left(\sum_i \overline{c_i n_i c_i'}\right) &= \sum_i \left(\left(\left(\eta_{f_*}\right)_{f'_*}\beta_{\mathrm{N}}\right)\left(\overline{c_i n_i c_i'}\right)\right) \\
&= \sum_i \left(\left(I_{\mathrm{C}}\eta_{(f'f)_*}\right)\left(\overline{c_i n_i c_i'}\right)\right) \\
&= \left(I_{\mathrm{C}}\left(\eta_{f_*}\right)_{f'_*}\right)\left(\sum_i \overline{c_i n_i c_i'}\right)
\end{aligned}$$

olup

$$\begin{array}{ccc}
(f'f)_*\,\mathrm{N} & \xrightarrow{\beta_{\mathrm{N}}} & (f'_*f_*)\,\mathrm{N} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \eta_{(f'f)_*}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \left(\eta_{f_*}\right)_{f'_*}} \\
\mathrm{C} & \xrightarrow[I_{\mathrm{C}}]{} & \mathrm{C}
\end{array}$$

diyagramı değişmelidir.

(iv) Her $\overline{c\left(\overline{bnb'}\right)c'}, \sum_i \overline{c_i\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right)c_i'} \in (f'_*f_*)\,\mathrm{N}$ için

$$\begin{aligned}
\left(\beta_{\mathrm{N}}\alpha_{\mathrm{N}}\right)\left(\overline{c\left(\overline{bnb'}\right)c'}\right) &= \beta_{\mathrm{N}}\left(\alpha_{\mathrm{N}}\left(\overline{c\left(\overline{bnb'}\right)c'}\right)\right) \\
&= \beta_{\mathrm{N}}\left(\overline{\left(c\left(f'b\right)\right)n\left(\left(f'b'\right)c'\right)}\right) \\
&= \overline{\left(c\left(f'b\right)\right)\overline{1n1}\left(\left(f'b'\right)c'\right)} \\
&= \overline{c\left({}^{b}\overline{1n1}^{b'}\right)c'} \\
&= \overline{c\left(\overline{\left(b1\right)n\left(1b'\right)}\right)c'} \\
&= \overline{c\left(\overline{bnb'}\right)c'}
\end{aligned}$$

ve

$$(\beta_{\mathrm{N}}\alpha_{\mathrm{N}})\left(\sum_i \overline{c_i\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right)c_i'}\right)=\sum_i(\beta_{\mathrm{N}}\alpha_{\mathrm{N}})\left(\overline{c_i\left(\overline{b_i n_i b}\right)c_i'}\right)=\sum_i\overline{c_i\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right)c_i'}$$

yani

$$\beta_{\mathrm{N}}\alpha_{\mathrm{N}}=I_{(f_*'f_*)\mathrm{N}}$$

dir.

Diğer taraftan $\overline{cnc'},\sum_i\overline{c_i n_i c_i'}\in(f'f)_*\mathrm{N}$ için

$$\begin{aligned}(\alpha_{\mathrm{N}}\beta_{\mathrm{N}})\left(\overline{cnc'}\right) &= \alpha_{\mathrm{N}}\left(\beta_{\mathrm{N}}\left(\overline{cnc'}\right)\right)\\ &= \alpha_{\mathrm{N}}\left(\overline{c\overline{1n1}c'}\right)\\ &= \overline{\left(c\left(f'1_{s((f\eta)n)}\right)\right)n\left(\left(f'1_{t((f\eta)n)}\right)c'\right)}\\ &= \overline{\left(c\left(1_{s((f'f\eta)n)}\right)\right)n\left(\left(1_{t((f'f\eta)n)}\right)c'\right)}\\ &= \overline{(c(1_{tc}))n((1_{sc'})c')}\\ &= \overline{cnc'}\end{aligned}$$

ve

$$(\alpha_{\mathrm{N}}\beta_{\mathrm{N}})\left(\sum_i\overline{c_i n_i c_i'}\right)=\sum_i(\alpha_{\mathrm{N}}\beta_{\mathrm{N}})\left(\overline{c_i n_i c_i'}\right)=\sum_i\overline{c_i n_i c_i'}$$

yani

$$\alpha_{\mathrm{N}}\beta_{\mathrm{N}}=I_{(f'f)_*\mathrm{N}}$$

dir.

Öyle ise α_{N} ve böylece $\alpha_{\mathcal{N}}$ birer izomorfizmdir.

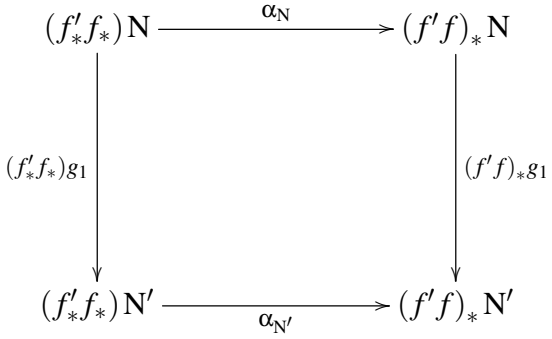
(v) Her $\mathcal{N}=(\eta:\mathrm{N}\longrightarrow\mathrm{A}),\mathcal{N}'=(\eta:\mathrm{N}'\longrightarrow\mathrm{A})\in\mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{A}$ çaprazlanmış modülü, her $g=(g_1,I_{\mathrm{A}}):\mathcal{N}\longrightarrow\mathcal{N}'$ çaprazlanmış modül morfizmi ve her $\overline{c\left(\overline{bnb'}\right)c'},\sum_i\overline{c_i\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right)c_i'}\in(f_*'f_*)\mathrm{N}$ için

$$\begin{aligned}(((f'f)_*g_1)\alpha_{\mathrm{N}})\left(\overline{c\left(\overline{bnb'}\right)c'}\right) &= ((f'f)_*g_1)\left(\alpha_{\mathrm{N}}\left(\overline{c\left(\overline{bnb'}\right)c'}\right)\right)\\ &= ((f'f)_*g_1)\left(\overline{(c(f'b))n((f'b')c')}\right)\\ &= \overline{(c(f'b))(g_1n)((f'b')c')}\\ &= \alpha_{\mathrm{N}'}\overline{c\left(\overline{b(g_1n)b'}\right)c'}\\ &= \alpha_{\mathrm{N}'}\overline{c\left((f_*g_1)\overline{bnb'}\right)c'}\\ &= \alpha_{\mathrm{N}'}(f_*'(f_*g_1))\overline{c\left(\overline{bnb'}\right)c'}\\ &= (\alpha_{\mathrm{N}'}((f_*'f_*)g_1))\overline{c\left(\overline{bnb'}\right)c'}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(((f'f)_*g_1)\alpha_{\mathrm{N}})\left(\sum_i\overline{c_i\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right)c_i'}\right) &= \sum_i(((f'f)_*g_1)\alpha_{\mathrm{N}})\left(\overline{c_i\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right)c_i'}\right)\\ &= \sum_i(\alpha_{\mathrm{N}'}((f_*'f_*)g_1))\left(\overline{c_i\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right)c_i'}\right)\\ &= (\alpha_{\mathrm{N}'}((f_*'f_*)g_1))\sum_i\left(\overline{c_i\left(\overline{b_i n_i b_i'}\right)c_i'}\right)\end{aligned}$$

olup



diyagramı değişmelidir.

Demek ki $\alpha = \{(\alpha_{\mathcal{N}} = (\alpha_{\mathrm{N}}, I_{\mathrm{C}}) : (f'_*f_*)\,\mathcal{N} \longrightarrow (f'f)_*\,\mathcal{N}) : \mathcal{N} \in \mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{A}\}$: $f'_*f_* \longrightarrow (f'f)_*$ ailesi bir doğal izomorfizmdir. □

Önerme 3.16 $f : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ bir R-cebiroid morfizmi ise $f_* : \mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{B}$ indirgenmiş çaprazlanmış modül funktoru $f^* : \mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{A}$ geri çekme çaprazlanmış modül funktorunun sol-eki'dir.

İspat: $(\mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{B})\,(f_*(-),-)$ ile $(\mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{A})\,(-,f^*(-))$ arasında bir doğal izomorfizm bulmalıyız. Aradığımız doğal izomorfizmi Φ ile gösterirsek

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathrm{Ob}\,(\mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{A}) \times \mathrm{Ob}\,(\mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{B}) & \longrightarrow & \mathrm{Sets} \\ & (\mathcal{M},\mathcal{N}) & \longmapsto & \Phi(\mathcal{M},\mathcal{N}) \end{array}$$

biçiminde elde edilen $\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})$ dönüşümü her $\mathcal{M} = (\mu : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{A}) \in \mathrm{Ob}\,(\mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{A})$ ve $\mathcal{N} = (\eta : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{B}) \in \mathrm{Ob}\,(\mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{B})$ için

$$\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N}) : (\mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{B})\,(f_*\mathcal{M},\mathcal{N}) \longrightarrow (\mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{A})\,(\mathcal{M},f^*\mathcal{N})$$

şeklinde, $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{N}$ de doğal, 1-1 ve örten bir fonksiyon olmalıdır:

Her $(h,I_{\mathrm{B}}) \in (\mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{B})\,(f_*(\mathcal{M}),\mathcal{N})$ için

$$\begin{array}{rccccl} \Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})(h): & \mathrm{M} & \longrightarrow & f^*\mathrm{N} & & \\ & m & \longmapsto & \Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})(h)(m) & = & \left(h\left(\overline{1_{s((f\mu)m)}m1_{t((f\mu)m)}}\right),\mu m\right) \\ & & & & = & \left(h\left(\overline{1m1}\right),\mu m\right) \end{array}$$

olmak üzere $\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})$ fonksiyonunu

$$\begin{array}{rccc} \Phi(\mathcal{M},\mathcal{N}): & (\mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{B})\,(f_*\mathcal{M},\mathcal{N}) & \longrightarrow & (\mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{A})\,(\mathcal{M},f^*\mathcal{N}) \\ & (h,I_{\mathrm{B}}) & \longmapsto & \Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})(h,I_{\mathrm{B}}) = (\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})(h),I_{\mathrm{A}}) \end{array}$$

biçiminde tanımlayalım:

(i) (h, I_{B}) bir çaprazlanmış B-modül morfizmi olduğundan her $m \in \mathrm{M}$ için

$$\eta\left(h\left(\overline{1m1}\right)\right) = \mu_{f_*}\left(\overline{1m1}\right) = 1\left(\left(f\mu\right)m\right)1 = f\left(\mu m\right)$$

olup $\left(h\left(\overline{1m1}\right), \mu m\right) \in f^*\mathrm{N}$ dir. Ayrıca $m_1 = m_2$ iken $h\left(\overline{1m_1 1}\right) = h\left(\overline{1m_2 1}\right)$ ve $\mu m_1 = \mu m_2$ olup $\left(h\left(\overline{1m_1 1}\right), \mu m_1\right) = \left(h\left(\overline{1m_2 1}\right), \mu m_2\right)$ yani $\Phi\left(\mathcal{M}, \mathcal{N}\right)(h)(m_1) = \Phi\left(\mathcal{M}, \mathcal{N}\right)(h)(m_2)$ dir. Öyle ise $\Phi\left(\mathcal{M}, \mathcal{N}\right)(h)$ ve böylece $\Phi\left(\mathcal{M}, \mathcal{N}\right)$ iyi tanımlıdır.

(ii) $\Phi\left(\mathcal{M}, \mathcal{N}\right)(h)$ bir R-cebiroid morfizmidir. Çünkü $sm = sm_1$, $tm = tm_1 = sm'$ koşulunu sağlayan her $m, m_1, m' \in \mathrm{M}$ için

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\mathcal{M}, \mathcal{N}\right)(h)(m + m_1) &= \left(h\left(\overline{1\left(m + m_1\right)1}\right), \mu\left(m + m_1\right)\right) \\
&= \left(h\left(\overline{1m1} + \overline{1m_1 1}\right), \mu m + \mu m_1\right) \\
&= \left(h\left(\overline{1m1}\right) + h\left(\overline{1m_1 1}\right), \mu m + \mu m_1\right) \\
&= \left(h\left(\overline{1m1}\right), \mu m\right) + \left(h\left(\overline{1m_1 1}\right), \mu m_1\right) \\
&= \Phi\left(\mathcal{M}, \mathcal{N}\right)(h)(m) + \Phi\left(\mathcal{M}, \mathcal{N}\right)(h)(m_1)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\mathcal{M}, \mathcal{N}\right)(h)(mm') &= \left(h\left(\overline{1\left(mm'\right)1}\right), \mu\left(mm'\right)\right) \\
&= \left(h\left(\overline{1m1}\,\overline{1m'1}\right), \left(\mu m\right)\left(\mu m'\right)\right) \\
&= \left(h\left(\overline{1m1}\right)h\left(\overline{1m'1}\right), \left(\mu m\right)\left(\mu m'\right)\right) \\
&= \left(h\left(\overline{1m1}\right), \mu m\right)\left(h\left(\overline{1m'1}\right), \mu m'\right) \\
&= \left(\Phi\left(\mathcal{M}, \mathcal{N}\right)(h)(m)\right)\left(\Phi\left(\mathcal{M}, \mathcal{N}\right)(h)(m')\right)
\end{aligned}$$

olup, her $m \in \mathrm{M}$ ve $r \in R$ için

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\mathcal{M}, \mathcal{N}\right)(h)(r \cdot m) &= \left(h\left(\overline{1\left(r \cdot m\right)1}\right), \mu\left(r \cdot m\right)\right) \\
&= \left(h\left(r \cdot \overline{1m1}\right), r \cdot \mu m\right) \\
&= \left(r \cdot h\left(\overline{1m1}\right), r \cdot \mu m\right) \\
&= r \cdot \left(h\left(\overline{1m1}\right), \mu m\right) \\
&= r \cdot \left(\Phi\left(\mathcal{M}, \mathcal{N}\right)(h)(m)\right)
\end{aligned}$$

dir.

(iii) $\Phi\left(\mathcal{M}, \mathcal{N}\right)(h)$ bir A-modül morfizmidir. Çünkü her $m \in \mathrm{M}$ ve $ta = sm$, $tm = sa'$ koşulunu sağlayan her $a, a' \in \mathrm{A}$ için

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\mathcal{M}, \mathcal{N}\right)(h)\left({}^{a}m\right) &= \left(h\left(\overline{1\left({}^{a}m\right)1}\right), \mu\left({}^{a}m\right)\right) \\
&= \left(h\left(\overline{\left(1fa\right)m1}\right), a\left(\mu m\right)\right) \\
&= \left(h\left(\overline{\left(\left(fa\right)1\right)m1}\right), a\left(\mu m\right)\right) \\
&= \left(h\left({}^{fa}\overline{1m1}\right), a\left(\mu m\right)\right) \\
&= \left({}^{fa}\left(h\left(\overline{1m1}\right)\right), a\left(\mu m\right)\right) \\
&= {}^{a}\left(h\left(\overline{1m1}\right), \mu m\right) \\
&= {}^{a}\left(\Phi\left(\mathcal{M}, \mathcal{N}\right)(h)(m)\right)
\end{aligned}$$

ve benzer biçimde

$$\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})(h)\left(m^{a'}\right)=\left(\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})(h)(m)\right)^{a'}$$

dir.

(iv) $\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})$ bir çaprazlanmış modül morfizmidir. Çünkü her $m\in \mathrm{M}$ için

$$\begin{aligned}\left(\eta_{f_*}\left(\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})(h)\right)\right)(m) &= \eta_{f_*}\left(\left(\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})(h)\right)(m)\right)\\ &= \eta_{f_*}\left(h\left(\overline{1m1}\right),\mu m\right)\\ &= \mu m\\ &= \left(I_{\mathrm{A}}\mu\right)m\end{aligned}$$

dir.

(v) $\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})$ 1-1 dir. Çünkü her $h,h'\in(\mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{B})(f_*\mathcal{M},\mathcal{N})$, $m\in\mathrm{M}$ ve $tb=sm$, $tm=sb'$ koşulunu sağlayan her $b,b'\in\mathrm{B}$ için

$$\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})(h)(m)=\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})\left(h'\right)(m)$$

ise

$$\left(h\left(\overline{1m1}\right),\mu m\right)=\left(h'\left(\overline{1m1}\right),\mu m\right)$$

ve böylece

$$h\left(\overline{1m1}\right)=h'\left(\overline{1m1}\right)$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı b ve b' ile etki ettirilerek sırasıyla

$$\begin{aligned}{}^{b}\left(h\left(\overline{1m1}\right)\right)^{b'} &= {}^{b}\left(h'\left(\overline{1m1}\right)\right)^{b'}\\ \left(h\,{}^{b}\left(\overline{1m1}\right)^{b'}\right) &= \left(h'\,{}^{b}\left(\overline{1m1}\right)^{b'}\right)\\ h\left(\overline{(b1)\,m\,(1b')}\right) &= \left(h'\left(\overline{(b1)\,m\,(1b')}\right)\right)\\ h\left(\overline{bmb'}\right) &= h'\left(\overline{bmb'}\right)\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Öyle ise $h=h'$ olup $\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})$ 1-1 dir.

(vi) $\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})$ örtendir. Her $(g,I_{\mathrm{A}})\in(\mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{A})(\mathcal{M},f^*\mathcal{N})$ için g morfizmi

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathrm{M} & \longrightarrow & f^*\mathrm{N}\\ & m & \longmapsto & (g_1m,g_2m)\end{array}$$

biçiminde bir morfizm olup (g,I_{A}) bir çaprazlanmış modül morfizmi olduğundan

$$(g_1,f):\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{N}$$

bir çaprazlanmış modül morfizmi ve

$$g_2:\mathrm{M}\longrightarrow\mathrm{A}$$

bir A-modül morfizmi, dolayısıyla bir ön-çaprazlanmış modül olmalıdır.

(g, I_{A}) bir çaprazlanmış modül morfizmi olduğundan her $m \in \mathrm{M}$ için

$$\mu m = (I_{\mathrm{A}}\mu)\, m = \left(\eta_{f_*} g\right) m = \eta_{f_*}(gm) = \eta_{f_*}(g_1 m, g_2 m) = g_2 m$$

dir. Öyle ise g morfizmi

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathrm{M} & \longrightarrow & f^*\mathrm{N} \\ & m & \longmapsto & gm = (g_1 m, \mu m) \end{array}$$

biçimindedir.

h fonksiyonunu

$$\begin{array}{rccc} h: & f_*\mathrm{M} & \longrightarrow & \mathrm{N} \\ & \overline{bmb'} & \longmapsto & h\left(\overline{bmb'}\right) = {}^{b}g_1 m^{b'} \\ & \sum_i \overline{b_i m_i b_i'} & \longmapsto & h\left(\sum_i \overline{b_i m_i b_i'}\right) = \sum_i h\left(\overline{b_i m_i b_i'}\right) \end{array}$$

biçiminde tanımlayalım.

1. g_1 iyi tanımlı olduğundan h de iyi tanımlıdır.

2. g_1 bir R-cebiroid morfizmi olduğundan h de bir R-cebiroid morfizmidir.

3. Her $\overline{bmb'}, \sum_i \overline{b_i m_i b_i'} \in f_*\mathrm{M}$ ve $tb'' = sb$, $tb' = sb'''$ koşulunu sağlayan her $b'', b''' \in \mathrm{B}$ için

$$\begin{array}{rcl} h\left({}^{b''}\overline{bmb'}\right) & = & h\left(\overline{(b''b)\, mb'}\right) \\ & = & {}^{b''b}g_1 m^{b'} \\ & = & {}^{b''}\left({}^{b}g_1 m^{b'}\right) \\ & = & {}^{b''}\left(h\left(\overline{bmb'}\right)\right) \end{array}$$

ve

$$h\left({}^{b''}\left(\sum_i \overline{b_i m_i b_i'}\right)\right) = \sum_i h\left({}^{b''}\overline{b_i m_i b_i'}\right) = \sum_i {}^{b''}\left(h\left(\overline{b_i m_i b_i'}\right)\right) = {}^{b''}\left(h\left(\sum_i \overline{b_i m_i b_i'}\right)\right)$$

dir. Benzer şekilde

$$h\left(\overline{bmb'}^{\,b'''}\right) = \left(h\left(\overline{bmb'}\right)\right)^{b'''}$$

ve

$$h\left(\left(\sum_i \overline{b_i m_i b_i'}\right)^{b'''}\right) = \left(h\left(\sum_i \overline{b_i m_i b_i'}\right)\right)^{b'''}$$

olduğu da gösterilebilir. Demek ki h bir B-modül morfizmidir.

4. Her $\overline{bmb'}, \sum_i \overline{b_i n_i b'_i} \in f_*\mathrm{M}$ için

$$(\eta h)\left(\overline{bmb'}\right) = \eta\left({}^{b}g_1 m^{b'}\right) = b\left((\eta g_1)\, m\right) b' = b\left((f\mu)\, m\right) b' = \mu_{f_*}\left(\overline{bmb'}\right) = \left(I_{\mathrm{B}}\mu_{f_*}\right)\left(\overline{bmb'}\right)$$

ve

$$(\eta h)\left(\sum_i \overline{b_i m_i b'_i}\right) = \sum_i (\eta h)\left(\overline{b_i m_i b'_i}\right) = \sum_i \left(I_{\mathrm{B}}\mu_{f_*}\right)\left(\overline{b_i m_i b'_i}\right) = \left(I_{\mathrm{B}}\mu_{f_*}\right)\left(\sum_i \left(\overline{b_i m_i b'_i}\right)\right)$$

dir.

Öyle ise $(h, I_{\mathrm{B}}) \in (\mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{B})\,(f_*\mathcal{M}, \mathcal{N})$ dir.

Son olarak her $m \in \mathrm{M}$ için

$$\begin{array}{rcl} \Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})(h)(m) & = & \left(h\left(\overline{1m1}\right), \mu m\right) \\ & = & \left({}^{1}g_1 m^{1}, \mu m\right) \\ & = & (g_1 m, \mu m) \\ & = & gm \end{array}$$

olup $\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})(h) = g$ dir. Böylece

$$\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})(h, I_{\mathrm{B}}) = (\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})(h), I_{\mathrm{A}}) = (g, I_{\mathrm{A}})$$

olup $\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})$ örtendir.

(*vii*) $\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})$, $\mathcal{M}$ de doğaldır: $(-)^{\bullet}\ (-)$ ile sağdan kompozisyon ve her $(g, I_{\mathrm{A}}) \in (\mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{A})\,(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$ için

$$\begin{array}{rccl} f_*g: & f_*\mathrm{M} & \longrightarrow & f_*\mathrm{M}' \\ & \overline{bmb'} & \longmapsto & f_*g\left(\overline{bmb'}\right) = \overline{b\,(gm)\,b'} \\ & \sum_i \overline{b_i m_i b'_i} & \longmapsto & f_*g\left(\sum_i \overline{b_i m_i b'_i}\right) = \sum_i f_*g\left(\overline{b_i m_i b'_i}\right) \end{array}$$

olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{B})\,(f_*\mathcal{M}, \mathcal{N}) & \xrightarrow{\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})} & (\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A})\,(\mathcal{M}, f^*\mathcal{N}) \\ \uparrow{\scriptstyle ((f_*g)^{\bullet}, I_{\mathrm{B}})} & & \uparrow{\scriptstyle (g^{\bullet}, I_{\mathrm{A}})} \\ (\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{B})\,(f_*\mathcal{M}', \mathcal{N}) & \xrightarrow[\Phi(\mathcal{M}',\mathcal{N})]{} & (\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A})\,(\mathcal{M}', f^*\mathcal{N}) \end{array}$$

diyagramı değişmelidir. Gerçekten de her $(h, I_{\mathrm{B}}) \in (\mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{B})(f_*\mathcal{M}', \mathcal{N})$ ve $m \in \mathrm{M}$ için

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})((f_*g)^\bullet h)(m) &= \Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})(h(f_*g))(m) \\
&= \left(h(f_*g)\left(\overline{1m1}\right), \mu m\right) \\
&= \left(h\left(\overline{1(gm)1}\right), (\mu' g)m\right) \\
&= \left(h\left(\overline{1(gm)1}\right), \mu'(gm)\right) \\
&= \Phi(\mathcal{M}',\mathcal{N})(h)(gm) \\
&= ((\Phi(\mathcal{M}',\mathcal{N})(h))g)(m) \\
&= (g^\bullet(\Phi(\mathcal{M}',\mathcal{N})(h)))(m)
\end{aligned}$$

dir.

(*viii*) $\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})$, $\mathcal{N}$ de doğaldır: $(-)_\bullet$ $(-)$ ile soldan kompozisyon ve her $(g, I_{\mathrm{B}}) \in (\mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{B})(\mathcal{N}, \mathcal{N}')$ için

$$\begin{array}{rccc}
f^*g: & f^*\mathrm{N} & \longrightarrow & f^*\mathrm{N}' \\
& (n,a) & \longmapsto & f^*g(n,a) = (gn,a)
\end{array}$$

olmak üzere

$$\begin{array}{ccc}
(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{B})(f_*\mathcal{M},\mathcal{N}) & \xrightarrow{\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})} & (\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A})(\mathcal{M}, f^*\mathcal{N}) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle (g_\bullet, I_{\mathrm{B}})} & & \Big\downarrow{\scriptstyle ((f^*g)_\bullet, I_{\mathrm{A}})} \\
(\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{B})(f_*\mathcal{M},\mathcal{N}') & \xrightarrow[\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N}')]{} & (\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A})(\mathcal{M}, f^*\mathcal{N}')
\end{array}$$

diyagramı değişmelidir. Gerçekten de her $(h, I_{\mathrm{B}}) \in (\mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{B})(f_*\mathcal{M}, \mathcal{N})$ ve $m \in \mathrm{M}$ için

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N}')(g_\bullet h)(m) &= \Phi(\mathcal{M},\mathcal{N}')(gh)(m) \\
&= \left((gh)\left(\overline{1m1}\right), \mu m\right) \\
&= \left(g\left(h\left(\overline{1m1}\right)\right), \mu m\right) \\
&= f^*g\left(h\left(\overline{1m1}\right), \mu m\right) \\
&= f^*g(\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})(h)(m)) \\
&= ((f^*g)\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})(h))(m) \\
&= ((f^*g)_\bullet(\Phi(\mathcal{M},\mathcal{N})(h)))(m)
\end{aligned}$$

dir. □

BÖLÜM 4

R-Cebiroidlerin Serbest Çarpımı ve R-Cebiroid Çaprazlanmış Modüllerinin Eş-Çarpımı

4.1 Giriş

Bu bölümde ilk önce R. Brown'ın [7] de grupların serbest çarpımı için kullandığı metodu (319-320) model alarak obje kümeleri aynı olan iki R-cebiroidin serbest çarpımını elde ettik.

İkinci kısımda R. Brown, P. J. Higgins ve R. Sivera'ın [10] da grup çaprazlanmış P-modüllerinin eş-çarpımı için yaptığı çalışmalardan (85-90) yola çıkarak iki R-cebiroid çaprazlanmış A-modülünün eş-çarpımını elde ettik.

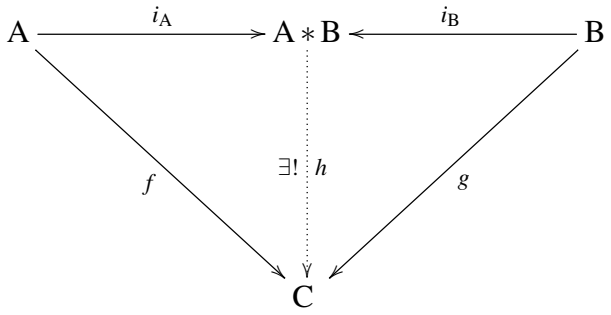
Ayrıca aynı kısmın devamında N. M. Shammu'nun [29] (Algebraic and Categorical Structure of Categories of Crossed Modules of Algebras) da R-cebir çaprazlanmış modüllerinin eş-çarpımını R-cebirlerin yarı direk çarpımından elde ettiği metodla R-cebiroid çaprazlanmış modüllerinin eş-çarpımını R-cebiroidlerin yarı direk çarpımından da elde edip, serbest çarpım ve yarı direk çarpımdan elde edilen eş-çarpımların birbirine izomorf olduklarını gösterdik.

Bu bölümde alt indis olarak kullanılacak olan tüm i, j, n, s, t ler birer doğal sayı olacaktır.

4.2 R-cebiroidlerin serbest çarpımı

Birinci bölümde, tüm R-cebiroidlerin ve morfizmlerinin oluşturduğu kategoriyi $\mathrm{Alg}(R)$ ile göstermiştik. Obje kümeleri A_0 olup, obje kümeleri üzerindeki dönüşüm birim dönüşüm olan tüm R-cebiroidlerin kategorisini de $\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A}_0$ ile gösterelim. Bu bölümde $\mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{A}_0$ da serbest çarpımı inceleyeceğiz:

Tanım 4.1 A ve B A_0 ortak obje kümeli birer R-cebiroid olsun. $\mathrm{A} * \mathrm{B}$ A_0 obje kümeli bir R-cebiroid ve $i_{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A} * \mathrm{B}$ ile $i_{\mathrm{B}} : \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{A} * \mathrm{B}$ birer R-cebiroid morfizmi olmak üzere, eğer, A_0 obje kümeli her C R-cebiroidi ile her $f : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{C}$ ve her $g : \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{C}$ R-cebiroid morfizmi için



diyagramını değişmeli yapacak, yani $f = h\,i_A$ ve $g = hi_B$ olacak biçimde biricik bir $h : A * B \longrightarrow C$ R-cebiroid morfizmi mevcut ise, i_A ile i_B morfizmleri ile birlikte $A * B$ R-cebiroidine A ile B nin serbest çarpımı denir.

Serbest çarpım izomorfizm farkıyla biriciktir.

Önerme 4.2 A_0 ortak obje kümeli her A, B R-cebiroidinin serbest çarpımı mevcuttur.

İspat: Herbir k_i A nın veya B nin elemanı ve $tk_i = sk_{i+1}$ olmak üzere A ve B de bir kelime $k_1k_2...k_i...k_n$ biçiminde tanımlansın. Bir kelimedeki, varsa, birim elemanları kaldırıp A nın ardışık elemanlarını A daki çarpımları ile B nin ardışık elemanlarını da B deki çarpımları ile yer değiştirerek elde ettiğimiz kelimelere de 'indirgenmiş kelime' diyelim. $m = k_1...k_n$ bir indirgenmiş kelime ise $sm = sk_1$, $tm = tk_n$ olarak ve $tm = sm'$ koşulunu sağlayan $m = k_1...k_n$ ile $m' = k'_1...k'_t$ indirgenmiş kelimelerinin mm' kompozisyonunu da $k_1...k_nk'_1...k'_t$ kelimesinin indirgenmişi olarak tanımlayalım. Her $x, y \in A_0$ için kaynakları x ve hedefleri y olan tüm indirgenmiş kelimelerin kümesi tarafından üretilen serbest toplamsal değişmeli grubu $\langle A, B\rangle(x,y)$ ile gösterelim. $\langle A, B\rangle(x,y)$ in elemanları, m_i ler birer indirgenmiş kelime ve $sm_i = x$ ve $tm_i = y$ olmak üzere $\sum_i m_i$ şeklinde olup $\langle A, B\rangle(x,y)$ üzerinde toplama işlemi

$$\begin{array}{rcl} \langle A, B\rangle(x,y) \times \langle A, B\rangle(x,y) & \longrightarrow & \langle A, B\rangle(x,y) \\ \left(\sum_i m_i, \sum_j m_j\right) & \longmapsto & \sum_i m_i + \sum_j m_j = \sum_{t=i,j} m_t \end{array}$$

biçimindedir. Ek olarak $\langle A, B\rangle(x,y)$ üzerinde her $r \in R$ için

$$\begin{array}{rcl} (r \cdot k_1)\,k_2k_3...k_n & = & k_1\,(r \cdot k_2)\,k_3...k_n \\ (r \cdot k_1)\,k_2k_3...k_n & = & k_1k_2\,(r \cdot k_3)\,...k_n \\ & \vdots & \\ (r \cdot k_1)\,k_2k_3...k_n & = & k_1k_2k_3...\,(r \cdot k_n) \end{array}$$

şeklinde tanımlanan bağıntı bir denklik bağıntısı olduğundan, $\langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle(x,y)$ üzerinde, $m_i = k_{i_1}k_{i_2}...k_{i_n}$ olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} R\times\langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle(x,y) & \longrightarrow & \langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle(x,y) \\ (r,m_i) & \longmapsto & r\cdot m_i = (r\cdot k_{i_1})...k_{i_n} \\ \left(r,\sum\limits_i m_i\right) & \longmapsto & r\cdot\sum\limits_i m_i = \sum\limits_i (r\cdot m_i) \end{array}$$

biçiminde bir R etkisi tanımlanırsa, $\langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle(x,y)$ nin bir R-modül olduğu görülür.

Böylece her $x,y,z\in \mathrm{A}_0$ için

$$\begin{array}{rcl} \langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle(x,y)\times\langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle(y,z) & \longrightarrow & \langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle(x,z) \\ \left(\sum\limits_i m_i,\sum\limits_s m_s\right) & \longmapsto & \sum\limits_i m_i\sum\limits_s m_s = \sum\limits_{i,s} m_i m_s \end{array}$$

biçiminde tanımlı asosyatif ve R-bilineer kompozisyon ile

$$\langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle = \{\langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle(x,y) : x,y\in \mathrm{A}_0\}$$

ailesi bir R-cebiroid olur.

$\mathrm{A}*\mathrm{B} = \langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle$ olsun. i_A ve i_B fonksiyonlarını

$$\begin{array}{rccc} i_\mathrm{A}: & \mathrm{A} & \longrightarrow & \mathrm{A}*\mathrm{B} \\ & a & \longmapsto & a \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{rccc} i_\mathrm{B}: & \mathrm{B} & \longrightarrow & \mathrm{A}*\mathrm{B} \\ & b & \longmapsto & b \end{array}$$

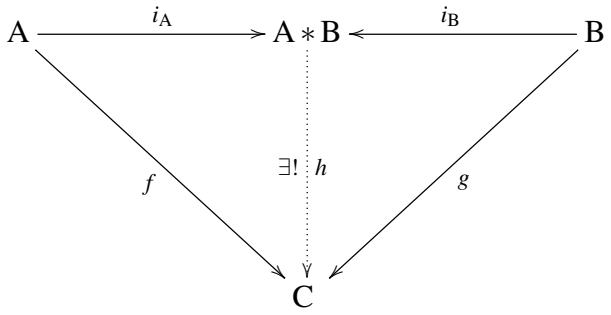
biçiminde ve her $f:\mathrm{A}\longrightarrow \mathrm{C}$ ve $g:\mathrm{B}\longrightarrow \mathrm{C}$ R-cebiroid morfizmi için $h:\mathrm{A}*\mathrm{B}\longrightarrow \mathrm{C}$ fonksiyonunu her $x,y\in \mathrm{A}_0$ için

$$\begin{array}{rcl} h: \quad (\mathrm{A}*\mathrm{B})(x,y) & \longrightarrow & \mathrm{C}(x,y) \\ a & \longmapsto & ha = fa \\ b & \longmapsto & hb = gb \\ m = k_1k_2...k_n & \longmapsto & hm = h(k_1k_2...k_n) = (hk_1)(hk_2)...(hk_n) \\ \sum\limits_i m_i & \longmapsto & \sum\limits_i (hm_i) \end{array}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu tanımlamalar ile i_A, i_B ve h açıkça birer R-cebiroid morfizmi olup her $x,y\in \mathrm{A}_0$, $a\in \mathrm{A}(x,y)$ ve $b\in \mathrm{B}(x,y)$ için

$$(hi_\mathrm{A})(a) = ha = fa \quad \text{ve} \quad (hi_\mathrm{B})(b) = hb = gb$$

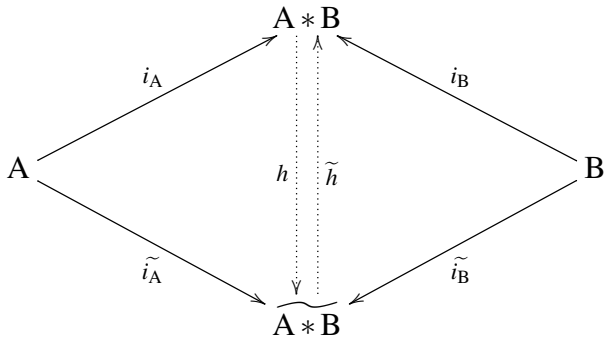
eşitlikleri, yani



diyagramının değişmeliliği sağlanmış olur.

Eğer evrensellik özelliğini sağlayan başka bir R-cebiroid morfizmi $h' : \mathrm{A} * \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{C}$ ise her $x, y \in \mathrm{A}_0$ ve $a \in \mathrm{A}(x,y)$ için $h'a = (h'i_{\mathrm{A}})(a) = fa = (hi_{\mathrm{A}})(a) = ha$ ve benzer şekilde her $x, y \in \mathrm{A}_0$ ve $b \in \mathrm{B}(x,y)$ için $h'b = hb$ olup h' ile h $\mathrm{A} * \mathrm{B}$ nin üreteçleri üzerinde eşit olduklarından $\mathrm{A} * \mathrm{B}$ üzerinde de eşittir. Yani h biriciktir.

Ayrıca, eğer $\widetilde{i_{\mathrm{A}}} : \mathrm{A} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{A} * \mathrm{B}}$ ve $\widetilde{i_{\mathrm{B}}} : \mathrm{B} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{A} * \mathrm{B}}$ morfizmleri ile birlikte bu koşulları taşıyan başka bir R-cebiroid $\widetilde{\mathrm{A} * \mathrm{B}}$ ve her $\mathrm{C} \in \mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A}_0$ için evrensellik özelliğini sağlayacak biricik R-cebiroid morfizmi $\widetilde{h} : \widetilde{\mathrm{A} * \mathrm{B}} \longrightarrow \mathrm{C}$ ise $\mathrm{C} = \widetilde{\mathrm{A} * \mathrm{B}}$ aldığımızda $\widetilde{i_{\mathrm{A}}} = hi_{\mathrm{A}}$, $\widetilde{i_{\mathrm{B}}} = hi_{\mathrm{B}}$ ve $\mathrm{C} = \mathrm{A} * \mathrm{B}$ aldığımızda $i_{\mathrm{A}} = \widetilde{h}\widetilde{i_{\mathrm{A}}}$ ve $i_{\mathrm{B}} = \widetilde{h}\widetilde{i_{\mathrm{B}}}$ olup $i_{\mathrm{A}} = \widetilde{h}hi_{\mathrm{A}}$, $i_{\mathrm{B}} = \widetilde{h}hi_{\mathrm{B}}$, $\widetilde{i_{\mathrm{A}}} = h\widetilde{h}\widetilde{i_{\mathrm{A}}}$ ve $\widetilde{i_{\mathrm{B}}} = h\widetilde{h}\widetilde{i_{\mathrm{B}}}$ elde edilir. Öyle ise $h\widetilde{h} = I_{\widetilde{\mathrm{A}*\mathrm{B}}}$ ve $\widetilde{h}h = I_{\mathrm{A}*\mathrm{B}}$ olup h bir izomorfizmdir:

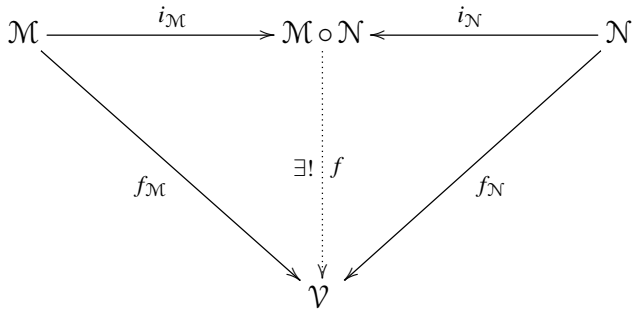


Yani A ile B nin serbest çarpımı izomorfizm farkıyla biriciktir. □

4.3 R-cebiroid çaprazlanmış A-modül kategorisinde eş-çarpım

Tanım 4.3 $\mathcal{M} = (\mu : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{A})$ ve $\mathcal{N} = (\eta : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{A})$ birer R-cebiroid çaprazlanmış A-modülü olsun. $\mathcal{M} \circ \mathcal{N}$ bir R-cebiroid çaprazlanmış A-modülü ve $i_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \circ \mathcal{N}$ ile $i_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \circ \mathcal{N}$

birer çaprazlanmış A-modül morfizmi olmak üzere, eğer her $\mathcal{V}$ R-cebiroid çaprazlanmış A-modülü ile her $f_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{V}$ ve $f_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{V}$ R-cebiroid çaprazlanmış A-modül morfizmi için $f_{\mathcal{M}} = fi_{\mathcal{M}}$ ve $f_{\mathcal{N}} = fi_{\mathcal{N}}$ olacak biçimde, yani



diyagramı değişmeli olacak biçimde biricik bir $f : \mathcal{M} \circ \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{V}$ R-cebiroid çaprazlanmış A-modül morfizmi mevcut ise, $i_{\mathcal{M}}$ ile $i_{\mathcal{N}}$ morfizmleri ile birlikte $\mathcal{M} \circ \mathcal{N}$ çaprazlanmış A-modülüne $\mathcal{M}$ ile $\mathcal{N}$ nin eş-çarpımı denir.

Eş-çarpım izomorfizm farkıyla biriciktir.

Şimdi iki R-cebiroid çaprazlanmış A-modülünün eş-çarpımını önce R-cebiroidlerin serbest çarpımından sonra da R-cebiroidlerin yarı direk çarpımından elde edip, iki ayrı yoldan elde ettiğimiz eş-çarpımların izomorfik olduğunu görelim:

4.3.1 Eş-çarpımın serbest çarpımdan elde edilişi

Önerme 2.30 da ispatladığımız üzere ön-çaprazlanmış modüllerden çaprazlanmış modüllere $(-)^{\mathrm{cr}}$ funktoru çaprazlanmış modüllerden ön-çaprazlanmış modüllere gömme funktorunun sol-ek'i olup çarpımları korur. Bu yüzden R-cebiroid çaprazlanmış A-modüllerinin eş-çarpımını oluşturmak için önce $\mathrm{PXAlg}(R)/\mathrm{A}$ kategorisinde eş-çarpımı oluşturup sonra $(-)^{\mathrm{cr}}$ funktorunu uygulayacağız.

$\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathrm{PXAlg}(R)/\mathrm{A}$ olsun. Bölüm 4.2 de $\mathrm{Alg}(R)/\mathrm{A}_0$ kategorisinde M ile N R-cebiroidlerinin serbest çarpımı olan $\mathrm{M} * \mathrm{N}$ nin elde edilişini görmüştük. $\mathcal{M}$ ile $\mathcal{N}$ birer ön-çaprazlanmış modül olduklarından, M ile N nin ikisi de A-modül olup, A nın M ve N üzerine tanımlı etkilerinden $\mathrm{M} * \mathrm{N}$ üzerine de, her $w, x, y, z \in \mathrm{A}_0$ için $p_i = k_{i_1} k_{i_2} \ldots k_{i_t}$ $(\mathrm{M} * \mathrm{N})(x, y)$ de bir

kelime olmak üzere

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{A}(w,x)\times((\mathrm{M}*\mathrm{N})(x,y)) & \longrightarrow & (\mathrm{M}*\mathrm{N})(w,y) & \\ (a,k_1k_2...k_t) & \longmapsto & {}^{a}(k_1k_2...k_t) & = ({}^{a}k_1)\,k_2...k_t \\ \left(a,\sum\limits_i p_i\right) & \longmapsto & {}^{a}\left(\sum\limits_i p_i\right) & = \sum\limits_i {}^{a}p_i \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcll} (\mathrm{M}*\mathrm{N})(x,y)\times\mathrm{A}(y,z) & \longrightarrow & (\mathrm{M}*\mathrm{N})(x,z) & \\ (k_1k_2...k_t,a') & \longmapsto & (k_1k_2...k_t)^{a'} & = k_1k_2...\left(k_t^{a'}\right) \\ \left(\sum\limits_i p_i,a'\right) & \longmapsto & \left(\sum\limits_i p_i\right)^{a'} & = \sum\limits_i p_i^{a'} \end{array}$$

biçiminde bir asosyatif etkisi indirgenebilir. Bu etki ile $\mathrm{M}*\mathrm{N}$ bir A-modül olur.

Diğer taraftan μ ve η morfizmlerini kullanarak

$$\begin{array}{rcl} \mu*\eta:\mathrm{M}*\mathrm{N} & \longrightarrow & \mathrm{A} \\ m & \longmapsto & (\mu*\eta)\,m=\mu m \\ n & \longmapsto & (\mu*\eta)\,n=\eta n \\ k_1k_2...k_t & \longmapsto & (\mu*\eta)(k_1k_2...k_t)=(\mu*\eta)\,k_1\,(\mu*\eta)\,k_2...(\mu*\eta)\,k_t \\ \sum\limits_i p_i & \longmapsto & (\mu*\eta)\left(\sum\limits_i p_i\right)=\sum\limits_i(\mu*\eta)\,p_i \end{array}$$

biçiminde bir $\mu*\eta:\mathrm{M}*\mathrm{N}\longrightarrow$A fonksiyon tanımlayabiliriz. Bu tanımda $1\leq j\leq t$ için eğer $k_j\in\mathrm{M}$ ise $(\mu*\eta)\,k_j=\mu k_j$ ve eğer $k_j\in\mathrm{M}$ ise $(\mu*\eta)\,k_j=\eta k_j$ dir.

Önerme 4.4 $\mathcal{M}*\mathcal{N}=(\mu*\eta:\mathrm{M}*\mathrm{N}\longrightarrow\mathrm{A})$ bir ön-çaprazlanmış modüldür.

İspat: Her $w,x,y,z\in\mathrm{A}_0$, $\sum\limits_i p_i,\sum\limits_j p_j\in(\mathrm{M}*\mathrm{N})(x,y)$, $\sum\limits_s p_s\in(\mathrm{M}*\mathrm{N})(y,z)$ ve $r\in R$ için, $p_i=k_{i_1}k_{i_2}...k_{i_t}$ olmak üzere

1.
$$\begin{array}{rcl} (\mu*\eta)\left(\sum\limits_i p_i+\sum\limits_j p_j\right) & = & (\mu*\eta)\left(\sum\limits_{t=i,j} p_t\right) \\ & = & \sum\limits_{t=i,j}(\mu*\eta)\,p_t \\ & = & \sum\limits_i(\mu*\eta)\,p_i+\sum\limits_j(\mu*\eta)\,p_j \\ & = & (\mu*\eta)\left(\sum\limits_i p_i\right)+(\mu*\eta)\left(\sum\limits_j p_j\right) \end{array}$$

2.

$$\begin{aligned}(\mu*\eta)\left(\sum_i p_i \sum_s p_s\right) &= (\mu*\eta)\left(\sum_{i,s}(p_i p_s)\right)\\ &= \sum_{i,s}(\mu*\eta)(p_i p_s)\\ &= \sum_{i,s}((\mu*\eta)p_i)((\mu*\eta)p_s)\\ &= \sum_i((\mu*\eta)p_i)\sum_s((\mu*\eta)p_s)\\ &= \left((\mu*\eta)\sum_i p_i\right)\left((\mu*\eta)\sum_s p_s\right)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}(\mu*\eta)\left(r\cdot\sum_i p_i\right) &= (\mu*\eta)\sum_i(r\cdot p_i)\\ &= (\mu*\eta)\sum_i((r\cdot k_{i_1})k_{i_2}...k_{i_t})\\ &= \sum_i(((\mu*\eta)(r\cdot k_{i_1}))(\mu*\eta)k_{i_2}...(\mu*\eta)k_{i_t})\\ &= \sum_i((r\cdot(\mu*\eta)k_{i_1})(\mu*\eta)k_{i_2}...(\mu*\eta)k_{i_t})\\ &= \sum_i r\cdot((\mu*\eta)k_{i_1}(\mu*\eta)k_{i_2}...(\mu*\eta)k_{i_t})\\ &= r\cdot\sum_i((\mu*\eta)k_{i_1}(\mu*\eta)k_{i_2}...(\mu*\eta)k_{i_t})\\ &= r\cdot\sum_i(\mu*\eta)(k_{i_1}k_{i_2}...k_{i_t})\\ &= r\cdot\left((\mu*\eta)\sum_i p_i\right)\end{aligned}$$

olduğundan $\mu*\eta$ bir R-cebiroid morfizmidir.

Ayrıca her $a\in \mathrm{A}(w,x)$ ve $a'\in \mathrm{A}(y,z)$ için

$$\begin{aligned}(\mu*\eta)\left({}^a\left(\sum_i p_i\right)\right) &= (\mu*\eta)\sum_i {}^a(p_i)\\ &= \sum_i(\mu*\eta)({}^a(k_{i_1})k_{i_2}...k_{i_t})\\ &= \sum_i(((\mu*\eta)({}^a k_{i_1})(\mu*\eta)(k_{i_2})...(\mu*\eta)(k_{i_t}))\\ &= \sum_i(a((\mu*\eta)(k_{i_1}))(\mu*\eta)(k_{i_2})...(\mu*\eta)(k_{i_t}))\\ &= \sum_i a((\mu*\eta)(k_{i_1})(\mu*\eta)(k_{i_2})...(\mu*\eta)(k_{i_t}))\\ &= \sum_i a((\mu*\eta)(k_{i_1}k_{i_2}...k_{i_t}))\\ &= a\left(\sum_i(\mu*\eta)p_i\right)\\ &= a\left((\mu*\eta)\sum_i p_i\right)\end{aligned}$$

olup benzer şekilde

$$(\mu*\eta)\left(\sum_i p_i\right)a' = \left((\mu*\eta)\sum_i p_i\right)a'$$

olduğu da görülür. Demek ki $\mathcal{M}*\mathcal{N}=(\mu*\eta:\mathrm{M}*\mathrm{N}\longrightarrow \mathrm{A})$ bir ön-çaprazlanmış A-modüldür.
□

eş-çarpımın evrensellik özelliği için gerekli olan $i_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} * \mathcal{N}$ ve $i_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} * \mathcal{N}$ gömme morfizmlerini M ile N nin serbest çarpımlarındaki $i_{\mathrm{M}} : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M} * \mathrm{N}$ ve $i_{\mathrm{N}} : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{M} * \mathrm{N}$ gömme morfizmleri ile I_{A} birim morfizmi kullanılarak $i_{\mathcal{M}} = (i_{\mathrm{M}}, I_{\mathrm{A}}) : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} * \mathcal{N}$ ve $i_{\mathcal{N}} = (i_{\mathrm{N}}, I_{\mathrm{A}}) : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} * \mathcal{N}$ biçiminde tanımlayabiliriz.

Önerme 4.5 $i_{\mathcal{M}} = (i_{\mathrm{M}}, I_{\mathrm{A}}) : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} * \mathcal{N}$ ve $i_{\mathcal{N}} = (i_{\mathrm{N}}, I_{\mathrm{A}}) : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} * \mathcal{N}$ nin birer ön-çaprazlanmış A-modül morfizmidir.

İspat: i_{M} ve i_{N} nin birer *R*-cebiroid morfizmi olduğunu biliyoruz.

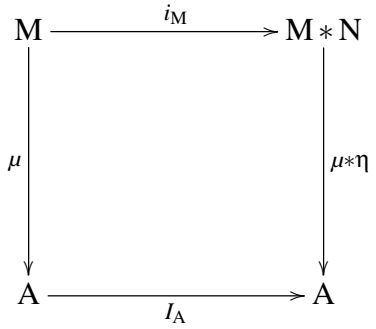
Her $w, x, y, z \in \mathrm{A}_0$, $m \in \mathrm{M}(x, y)$, $a \in \mathrm{A}(w, x)$, $a' \in \mathrm{A}(y, z)$ için

$$i_{\mathrm{M}}({}^{a}m) = {}^{a}m = {}^{a}(i_{\mathrm{M}}(m)) \text{ ve } i_{\mathrm{M}}\left(m^{a'}\right) = m^{a'} = (i_{\mathrm{M}}m)^{a'}$$

olduğundan i_{M} bir A-modül morfizmidir. Ayrıca her $m \in \mathrm{M}$ için

$$((\mu * \eta) i_{\mathrm{M}})(m) = (\mu * \eta)(i_{\mathrm{M}}m) = (\mu * \eta)(m) = \mu m = (I_{\mathrm{A}}\mu) m$$

olup



diyagramı değişmelidir. Demek ki $i_{\mathcal{M}} = (i_{\mathrm{M}}, I_{\mathrm{A}})$ bir ön-çaprazlanmış A-modül morfizmidir. Benzer şekilde $i_{\mathcal{N}} = (i_{\mathrm{N}}, I_{\mathrm{A}})$ nin de bir ön-çaprazlanmış A-modül morfizmi olduğu gösterilebilir. □

Önerme 4.6 PXAlg(*R*)/A kategorisinde yukarıdaki şekilde tanımlanan $\mathcal{M} * \mathcal{N}$ ön-çaprazlanmış modülü, $i_{\mathcal{M}}$ ve $i_{\mathcal{N}}$ morfizmleri ile birlikte, $\mathcal{M}$ ile $\mathcal{N}$ ön-çaprazlanmış modüllerinin eş-çarpımıdır.

İspat: Her $\mathcal{V} = (\nu : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{A})$ *R*-cebiroid ön-çaprazlanmış A-modülü, her $f_{\mathcal{M}} = (f_{\mathrm{M}}, I_{\mathrm{A}}) : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{V}$ ve $f_{\mathcal{N}} = (f_{\mathrm{N}}, I_{\mathrm{A}}) : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{V}$ ön-çaprazlanmış A-modül morfizmleri için evrensellik

özelliğini sağlayacak biricik bir $f=(f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}},I_{\mathrm{A}}):\mathcal{M}*\mathcal{N}\longrightarrow\mathcal{V}$ ön-çaprazlanmış A-modül morfizmi bulmalıyız.

Bunun için $f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}$ fonksiyonunu

$$\begin{array}{rcl} f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}:\mathrm{M}*\mathrm{N} & \longrightarrow & \mathrm{V} \\ m & \longmapsto & f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}m=f_{\mathrm{M}}m \\ n & \longmapsto & f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}n=f_{\mathrm{N}}n \\ k_1k_2...k_t & \longmapsto & f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}(k_1k_2...k_t)=f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}k_1f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}k_2...f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}k_t \\ \sum\limits_i p_i & \longmapsto & f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}\left(\sum\limits_i p_i\right)=\sum\limits_i\left(f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}p_i\right) \end{array}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu tanımda $1\leq j\leq t$ için eğer $k_j\in\mathrm{M}$ ise $f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}k_j=f_{\mathrm{M}}k_j$ ve eğer $k_j\in\mathrm{N}$ ise $f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}k_j=f_{\mathrm{N}}k_j$ dir.

Şimdi bu tanımlama ile $f=(f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}},I_{\mathrm{A}}):\mathcal{M}*\mathcal{N}\longrightarrow\mathcal{V}$ nin bir R-cebiroid ön-çaprazlanmış A-modül morfizmi olduğunu gösterelim: $p_i=k_{i_1}k_{i_2}...k_{i_t}$ olmak üzere, her $x,y,z\in\mathrm{A}_0$, $\sum\limits_i p_i,\sum\limits_j p_j\in(\mathrm{M}*\mathrm{N})(x,y)$, $\sum\limits_s p_s\in(\mathrm{M}*\mathrm{N})(y,z)$ ve $r\in R$ için

1.
$$\begin{array}{rcl} f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}\left(\sum\limits_i p_i+\sum\limits_j p_j\right) & = & f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}\left(\sum\limits_{t=i,j} p_t\right) \\ & = & \sum\limits_{t=i,j} f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}p_t \\ & = & \sum\limits_i f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}p_i+\sum\limits_j f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}p_j \\ & = & f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}\left(\sum\limits_i p_i\right)+f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}\left(\sum\limits_j p_j\right) \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rcl} f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}\left(\sum\limits_i p_i\sum\limits_s p_s\right) & = & f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}\left(\sum\limits_{i,s}(p_ip_s)\right) \\ & = & \sum\limits_{i,s} f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}(p_ip_s) \\ & = & \sum\limits_{i,s}(f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}p_if_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}p_s) \\ & = & \sum\limits_i f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}p_i\sum\limits_s f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}p_s \\ & = & f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}\left(\sum\limits_i p_i\right)f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}\left(\sum\limits_s p_s\right) \end{array}$$

3.

$$\begin{aligned}
f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}\left(r\cdot\sum_i p_i\right) &= f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}\left(\sum_i (r\cdot p_i)\right)\\
&= f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}\left(\sum_i ((r\cdot k_{i_1})\,k_{i_2}...k_{i_t})\right)\\
&= \sum_i (f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}(r\cdot k_{i_1})\,f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}k_{i_2}...f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}k_{i_t})\\
&= \sum_i ((r\cdot f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}k_{i_1})\,f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}k_{i_2}...f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}k_{i_t})\\
&= \sum_i r\cdot(f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}k_{i_1}f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}k_{i_2}...f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}k_{i_t})\\
&= r\cdot\sum_i (f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}k_{i_1}f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}k_{i_2}...f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}k_{i_t})\\
&= r\cdot\sum_i f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}(k_{i_1}k_{i_2}...k_{i_t})\\
&= r\cdot f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}\left(\sum_i (k_{i_1}k_{i_2}...k_{i_t})\right)
\end{aligned}$$

dir.

Demek ki $f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}$ bir R-cebiroid morfizmidir.

4. $p_i = k_{i_1}k_{i_2}...k_{i_t}$ olmak üzere her $w,x,y,z\in \mathrm{A}_0$, $\sum_i p_i \in (\mathrm{M}*\mathrm{N})(x,y)$, $a\in \mathrm{A}(w,x)$, $a'\in \mathrm{A}(y,z)$ için

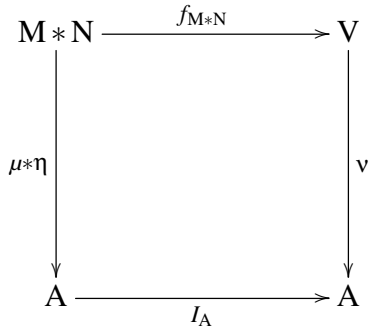
$$\begin{aligned}
f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}\left({}^{a}\left(\sum_i p_i\right)\right) &= f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}\left(\sum_i ({}^{a}p_i)\right)\\
&= \sum_i f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}\,{}^{a}(k_{i_1}k_{i_2}...k_{i_t})\\
&= \sum_i f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}({}^{a}k_{i_1})\,k_{i_2}...k_{i_t})\\
&= \sum_i (f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}({}^{a}k_{i_1})\,f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}k_{i_2}...f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}k_{i_t})\\
&= \sum_i ({}^{a}(f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}k_{i_1})\,f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}k_{i_2}...f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}k_{i_t})\\
&= \sum_i {}^{a}(f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}k_{i_1}f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}k_{i_2}...f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}k_{i_t})\\
&= {}^{a}\left(\sum_i f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}(k_{i_1}k_{i_2}...k_{i_t})\right)\\
&= {}^{a}\left(f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}\left(\sum_i p_i\right)\right)
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}\left(\left(\sum_i p_i\right)^{a'}\right) = \left(f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}\left(\sum_i p_i\right)\right)^{a'}$$

olup $f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}$ A etkisini korur, yani $f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}$ bir A-modül morfizmidir.

5.



diyagramı değişmelidir. Gerçekten de her $\sum_i p_i \in M*N$ için

$$\begin{aligned}
(\nu f_{M*N})\left(\sum_i p_i\right) &= \nu\left(f_{M*N}\sum_i p_i\right)\\
&= \nu\left(\sum_i f_{M*N}p_i\right)\\
&= \nu\left(\sum_i f_{M*N}\ (k_{i_1}k_{i_2}...k_{i_t})\right)\\
&= \sum_i \nu\left(f_{M*N}k_{i_1}f_{M*N}k_{i_2}...f_{M*N}k_{i_t}\right)\\
&= \sum_i \left((\nu f_{M*N})\,k_{i_1}\,(\nu f_{M*N})\,k_{i_2}...\,(\nu f_{M*N})\,k_{i_t}\right)
\end{aligned}$$

olup $i_1 \leq j \leq i_t$ için eğer $k_j \in M$ ise $f_{\mathcal{M}} = (f_M, I_A) : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{V}$ bir ön-çaprazlanmış A-modül morfizmi olduğundan

$$(\nu f_{M*N})\,k_j = \nu\left(f_{M*N}k_j\right) = \nu\left(f_M k_j\right) = (\nu f_M)\,k_j = (I_A\mu)\,k_j = (\mu*\eta)\,k_j$$

ve eğer $k_j \in N$ ise $f_{\mathcal{N}} = (f_N, I_A) : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{V}$ bir ön-çaprazlanmış A-modül morfizmi olduğundan

$$(\nu f_{M*N})\,k_j = \nu\left(f_{M*N}k_j\right) = \nu\left(f_N k_j\right) = (\nu f_N)\,k_j = (I_A\eta)\,k_j = (\mu*\eta)\,k_j$$

dir. Böylece yukarıdaki işlem devam ettirilirse

$$\begin{aligned}
(\nu f_{M*N})\left(\sum_i p_i\right) = \ ... \ &= \sum_i \left((\nu f_{M*N})\,k_{i_1}\,(\nu f_{M*N})\,k_{i_2}...\,(\nu f_{M*N})\,k_{i_t}\right)\\
&= \sum_i \left((\mu*\eta)\,k_{i_1}\,(\mu*\eta)\,k_{i_2}...\,(\mu*\eta)\,k_{i_t}\right)\\
&= \sum_i (\mu*\eta)\,(k_{i_1}k_{i_2}...k_{i_t})\\
&= (\mu*\eta)\left(\sum_i p_i\right)\\
&= (I_A\mu*\eta)\left(\sum_i p_i\right)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Demek ki $f = (f_{M*N}, I_A) : \mathcal{M}*\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{V}$ bir R-cebiroid ön-çaprazlanmış A-modül morfizmidir.

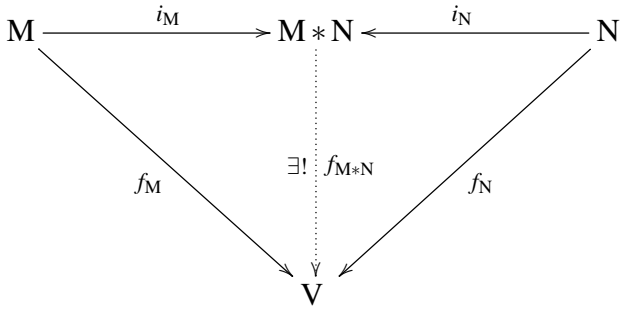
Şimdi de $f : \mathcal{M} * \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{V}$ morfizminin $i_{\mathcal{M}}$ ve $i_{\mathcal{N}}$ morfizmleri ile birlikte evrensellik özelliğini sağladığını görelim: Her $m \in \mathrm{M}$ için

$$\left(f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}} i_{\mathrm{M}}\right)(m) = f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}\left(i_{\mathrm{M}} m\right) = f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}} m = f_{\mathrm{M}} m$$

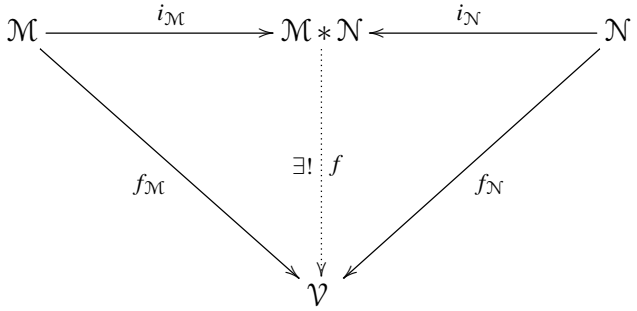
yani $f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}} i_{\mathrm{M}} = f_{\mathrm{M}}$ ve her $n \in \mathrm{N}$ için

$$\left(f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}} i_{\mathrm{N}}\right)(n) = f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}\left(i_{\mathrm{N}} n\right) = f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}} n = f_{\mathrm{N}} n$$

yani $f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}} i_{\mathrm{N}} = f_{\mathrm{N}}$ olduğundan



diyagramı değişmelidir. Böylece A üzerindeki dönüşüm birim dönüşüm olduğundan



diyagramının da değişmeliği sağlanmış olur. Yani $f i_{\mathcal{M}} = f_{\mathcal{M}}$ ve $f i_{\mathcal{N}} = f_{\mathcal{N}}$ dir.

Eğer aynı koşulları sağlayan başka bir morfizm $f' = \left(f'_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}, I_{\mathrm{A}}\right) : \mathcal{M} * \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{V}$ ise her $m \in \mathrm{M}$ için

$$f'_{\mathrm{M}*\mathrm{N}} m = f'_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}\left(i_{\mathrm{M}} m\right) = \left(f'_{\mathrm{M}*\mathrm{N}} i_{\mathrm{M}}\right) m = f_{\mathrm{M}} m = f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}} m$$

ve her $n \in \mathrm{N}$ için

$$f'_{\mathrm{M}*\mathrm{N}} n = f'_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}\left(i_{\mathrm{N}} n\right) = \left(f'_{\mathrm{M}*\mathrm{N}} i_{\mathrm{N}}\right) n = f_{\mathrm{N}} n = f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}} n$$

olup $f'_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}$ ile $f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}$, $\mathrm{M}*\mathrm{N}$ nin üreteçleri üzerinde eşit olduklarından $\mathrm{M}*\mathrm{N}$ üzerinde de eşittirler. $f'_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}$ ile $f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}$ nün eşit olması, A üzerinde birim dönüşüme sahip olduklarından, f' ile f in de eşit olmalarını gerektirir. Demek ki f biriciktir.

Ayrıca, eğer $\widetilde{i_{\mathcal{M}}} : \mathcal{M} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}*\mathcal{N}}$ ve $\widetilde{i_{\mathcal{N}}} : \mathcal{N} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}*\mathcal{N}}$ morfizmleri ile birlikte bu koşulları taşıyıyan başka bir R-cebiroid ön-çaprazlanmış A-modülü $\widetilde{\mathcal{M}*\mathcal{N}}$ ve her $\mathcal{V} \in \mathrm{PXAlg}(R)/\mathrm{A}$ için evrensellik özelliğini sağlayacak biricik R-cebiroid ön-çaprazlanmış A-modül morfizmi $\widetilde{f} : \widetilde{\mathcal{M}*\mathcal{N}} \longrightarrow \mathcal{V}$ ise, $\mathcal{V} = \widetilde{\mathcal{M}*\mathcal{N}}$ aldığımızda $\widetilde{i_{\mathcal{M}}} = f i_{\mathcal{M}}$ ve $\widetilde{i_{\mathcal{N}}} = f i_{\mathcal{N}}$, $\mathcal{V} = \mathcal{M}*\mathcal{N}$ aldığımızda $i_{\mathcal{M}} = \widetilde{f i_{\mathcal{M}}}$ ve $i_{\mathcal{N}} = \widetilde{f i_{\mathcal{N}}}$ eşitlikleri elde edilir. Böylece $i_{\mathcal{M}} = \widetilde{f} f i_{\mathcal{M}}$, $i_{\mathcal{N}} = \widetilde{f} f i_{\mathcal{N}}$, $\widetilde{i_{\mathcal{M}}} = f \widetilde{f i_{\mathcal{M}}}$ ve $\widetilde{i_{\mathcal{N}}} = f \widetilde{f i_{\mathcal{N}}}$, yani $\widetilde{f} f = I_{\mathcal{M}*\mathcal{N}}$ ve $f \widetilde{f} = I_{\widetilde{\mathcal{M}*\mathcal{N}}}$ olur. Öyle ise f bir izomorfizmdir. Demek ki eş-çarpım izomorfizm farkıyla biriciktir. □

Sonuç 4.7 $\mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{A}$ kategorisinde $\mathcal{M}=(\mu : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{A})$ ve $\mathcal{N}=(\eta : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{A})$ birer çaprazlanmış modül ise $\mathcal{M}$ ile $\mathcal{N}$ aynı zamanda birer ön-çaprazlanmış modül olup, yukarıda elde ettiğimiz $\mathcal{M}*\mathcal{N}$ R-cebiroid ön-çaprazlanmış A-modülü, $i_{\mathcal{M}}$ ile $i_{\mathcal{N}}$ morfizmleri ile birlikte, $\mathcal{M}$ ile $\mathcal{N}$ ön-çaprazlanmış modüllerinin eş-çarpımıdır. Öyle ise

$$\begin{array}{rccccc} i^{\mathrm{cr}}_{\mathrm{M}} : & \mathrm{M} & \xrightarrow{i_{\mathrm{M}}} & \mathrm{M}*\mathrm{N} & \xrightarrow{(-)^{\mathrm{cr}}} & (\mathrm{M}*\mathrm{N})^{\mathrm{cr}} \\ & m & \longmapsto & i_{\mathrm{M}} m = m & \longmapsto & (m)^{\mathrm{cr}} = \overline{m} \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rccccc} i^{\mathrm{cr}}_{\mathrm{N}} : & \mathrm{N} & \xrightarrow{i_{\mathrm{N}}} & \mathrm{M}*\mathrm{N} & \xrightarrow{(-)^{\mathrm{cr}}} & (\mathrm{M}*\mathrm{N})^{\mathrm{cr}} \\ & n & \longmapsto & i_{\mathrm{N}} n = n & \longmapsto & (n)^{\mathrm{cr}} = \overline{n} \end{array}$$

olacak biçimde elde edilen $i^{\mathrm{cr}}_{\mathcal{M}} = \left(i^{\mathrm{cr}}_{\mathrm{M}}, I_{\mathrm{A}}\right)$ ve $i^{\mathrm{cr}}_{\mathcal{N}} = \left(i^{\mathrm{cr}}_{\mathrm{N}}, I_{\mathrm{A}}\right)$ gömme morfizmleriyle birlikte $(\mathcal{M}*\mathcal{N})^{\mathrm{cr}}$ çaprazlanmış modülü de $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{N}$ çaprazlanmış modüllerinin eş-çarpımıdır.

Ayrıca, her $\mathcal{V} = (\nu : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{A})$ R-cebiroid çaprazlanmış A-modülü ve her $f_{\mathcal{M}} = (f_{\mathrm{M}}, I_{\mathrm{A}}) : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{V}$, $f_{\mathcal{N}} = (f_{\mathrm{N}}, I_{\mathrm{A}}) : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{V}$ çaprazlanmış A-modül morfizmleri için evrensellik özelliğini sağlayacak biricik $f^{\mathrm{cr}} : (\mathcal{M}*\mathcal{N})^{\mathrm{cr}} \longrightarrow \mathcal{V}$ çaprazlanmış A-modül morfizmini, $\mathcal{M}$ ile $\mathcal{N}$ ön-çaprazlanmış modüllerinin eş-çarpımlarında kullanılan yukarıdaki biricik $f = (f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}, I_{\mathrm{A}}) : \mathcal{M}*\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{V}$ ön-çaprazlanmış A-modül morfizminden $f^{\mathrm{cr}} = \left(f^{\mathrm{cr}}_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}, I_{\mathrm{A}}\right)$ ve

$$\begin{array}{rccc} f^{\mathrm{cr}}_{\mathrm{M}*\mathrm{N}} : & (\mathrm{M}*\mathrm{N})^{\mathrm{cr}} & \longrightarrow & \mathrm{V} \\ & \overline{\sum_i p_i} & \longmapsto & f^{\mathrm{cr}}_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}\left(\overline{\sum_i p_i}\right) = f_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}\left(\sum_i p_i\right) \end{array}$$

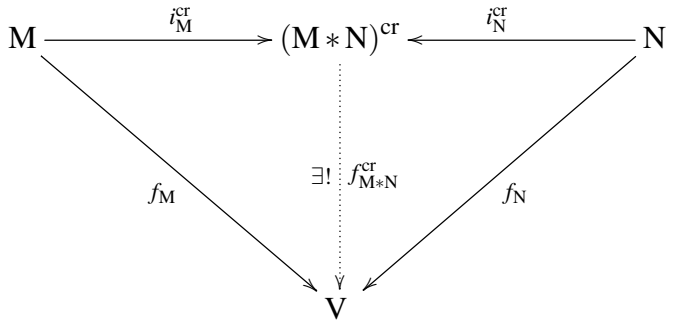
olacak biçiminde elde edebiliriz. Gerçekten de her $m \in \mathrm{M}$ için

$$\left(f^{\mathrm{cr}}_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}\, i^{\mathrm{cr}}_{\mathrm{M}}\right)(m) = f^{\mathrm{cr}}_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}\left(i^{\mathrm{cr}}_{\mathrm{M}} m\right) = f^{\mathrm{cr}}_{\mathrm{M}*\mathrm{N}} \overline{m} = f_{\mathrm{M}} m$$

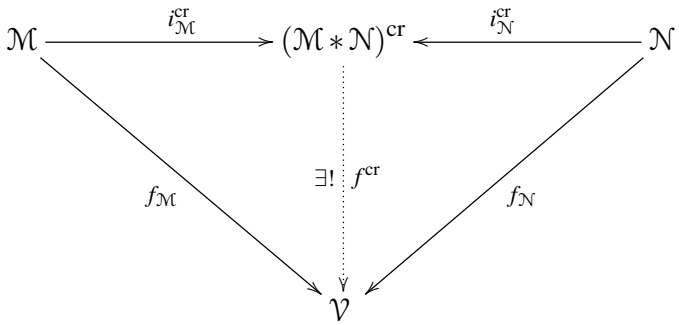
ve her $n \in \mathrm{N}$ için

$$\left(f^{\mathrm{cr}}_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}\, i^{\mathrm{cr}}_{\mathrm{N}}\right)(n) = f^{\mathrm{cr}}_{\mathrm{M}*\mathrm{N}}\left(\, i^{\mathrm{cr}}_{\mathrm{N}} n\right) = f^{\mathrm{cr}}_{\mathrm{M}*\mathrm{N}} \overline{n} = \; f_{\mathrm{N}} n$$

olup



diyagramı ve böylece A üzerindeki dönüşüm birim dönüşüm olduğundan



diyagramı değişmelidir.

$\mathcal{M}$ ile $\mathcal{N}$ nin eş-çarpımını kısaca $\mathcal{M}\circ\mathcal{N}=(\mu\circ\eta:\mathrm{M}\circ\mathrm{N}\longrightarrow\mathrm{A})$ ile göstereceğiz.

Şimdi de $(\mathcal{M}*\mathcal{N})^{\mathrm{cr}}$ yi inceleyelim:

Bildiğimiz üzere

$$(\mathcal{M}*\mathcal{N})^{\mathrm{cr}}=\left((\mu*\eta)^{\mathrm{cr}}:(\mathrm{M}*\mathrm{N})^{\mathrm{cr}}=\frac{\mathrm{M}*\mathrm{N}}{[\![\mathrm{M}*\mathrm{N},\mathrm{M}*\mathrm{N}]\!]}\longrightarrow\mathrm{A}\right)$$

olup $[\![\mathrm{M}*\mathrm{N},\mathrm{M}*\mathrm{N}]\!]$, $\mathrm{M}*\mathrm{N}$ nin iki yönlü Peiffer idealidir. $\mathrm{M}*\mathrm{N}$ nin üreteç kümesi $\mathrm{M}\cup\mathrm{N}$ olduğundan önerme 2.28 e göre $[\![\mathrm{M}*\mathrm{N},\mathrm{M}*\mathrm{N}]\!]=[\![\mathrm{M}\cup\mathrm{N},\mathrm{M}\cup\mathrm{N}]\!]$ dir. Yani her $x,y\in\mathrm{A}_0$ için $(\mathrm{M}*\mathrm{N})(x,y)$ nin $[\![\mathrm{M}*\mathrm{N},\mathrm{M}*\mathrm{N}]\!](x,y)$ R-altmodülü, $sm=sn=x$, $tm=tn=sm'=sn'$ ve $tm'=tn'=y$ olmak üzere her $m,m'\in\mathrm{M}$, $n,n'\in\mathrm{N}$ için $[\![m,m']\!]_1$, $[\![m,m']\!]_2$, $[\![n,n']\!]_1$, $[\![n,n']\!]_2$, $[\![m,n']\!]_1$, $[\![m,n']\!]_2$, $[\![n,m']\!]_1$, $[\![n,m']\!]_2$ komutatörleri tarafından üretilir. Fakat M ile N birer çaprazlanmış

modül olduğundan

$$\begin{array}{rcccccc} [\![m,m']\!]_1 & = & m^{(\mu*\eta)m'}-mm' & = & m^{\mu m'}-mm' & = & 0_{\mathrm{M}(x,y)} \\ [\![m,m']\!]_2 & = & {}^{(\mu*\eta)m}m'-mm' & = & {}^{\mu m}m'-mm' & = & 0_{\mathrm{M}(x,y)} \end{array}$$

ve benzer şekilde

$$[\![n,n']\!]_1 = [\![n,n']\!]_2 = 0_{\mathrm{N}(x,y)}$$

dir. Öyle ise $[\![\mathrm{M}*\mathrm{N},\mathrm{M}*\mathrm{N}]\!](x,y)$

$$\begin{array}{rcccccc} [\![m,n']\!]_1 & = & m^{(\mu*\eta)n'}-mn' & = & m^{\eta n'}-mn' \\ [\![m,n']\!]_2 & = & {}^{(\mu*\eta)m}n'-mn' & = & {}^{\mu m}n'-mn' \\ [\![n,m']\!]_1 & = & n^{(\mu*\eta)m'}-nm' & = & n^{\mu m'}-nm' \\ [\![n,m']\!]_2 & = & {}^{(\mu*\eta)n}m'-nm' & = & {}^{\eta n}m'-nm' \end{array}$$

komutatörleri tarafından üretilir.

Şimdi $(\mathcal{M}*\mathcal{N})^{\mathrm{cr}}$ nin çaprazlanmış A-modül koşullarını sağladığını görelim:

CM1) $\mathcal{M}*\mathcal{N}$ bir ön-çaprazlanmış A-modül olduğundan her $w,x,y,z \in \mathrm{A}_0$, $\sum_i p_i \in (\mathrm{M}*\mathrm{N})(x,y)$, $a \in \mathrm{A}(w,x)$, $a' \in \mathrm{A}(y,z)$ için

$$\begin{array}{rcl} (\mu*\eta)^{\mathrm{cr}}\left({}^{a}\left(\overline{\sum_i p_i}\right)\right) & = & (\mu*\eta)^{\mathrm{cr}}\left(\overline{{}^{a}\left(\sum_i p_i\right)}\right) \\ & = & (\mu*\eta)\left({}^{a}\left(\sum_i p_i\right)\right) \\ & = & a\left((\mu*\eta)\left(\sum_i p_i\right)\right) \\ & = & a\left((\mu*\eta)^{\mathrm{cr}}\left(\overline{\sum_i p_i}\right)\right) \end{array}$$

ve benzer şekilde $(\mu*\eta)^{\mathrm{cr}}\left(\left(\overline{\sum_i p_i}\right)^{a'}\right) = \left((\mu*\eta)^{\mathrm{cr}}\left(\overline{\sum_i p_i}\right)\right)a'$ olduğu görülür.

CM2) Her $x,y,z \in \mathrm{A}_0$, $k_1k_2\ldots k_t \in (\mathrm{M}*\mathrm{N})(x,y)$ ve $k'_1k'_2\ldots k'_j \in (\mathrm{M}*\mathrm{N})(y,z)$ için

$$\begin{array}{rcl} \left(\overline{k_1k_2\ldots k_t}\right)^{(\mu*\eta)^{\mathrm{cr}}\left(\overline{k'_1k'_2\ldots k'_j}\right)} & = & \left(\overline{k_1k_2\ldots k_t}\right)^{(\mu*\eta)\left(k'_1k'_2\ldots k'_j\right)} \\ & = & \left(\overline{k_1}\ \overline{k_2}\ldots\overline{k_t}\right)^{(\mu*\eta)k'_1(\mu*\eta)k'_2\ldots(\mu*\eta)k'_j} \\ & = & \left(\overline{k_1}\ \overline{k_2}\ldots\overline{k_{t-1}}\left(\overline{k_t}^{(\mu*\eta)k'_1}\right)\right)^{(\mu*\eta)k'_2\ldots(\mu*\eta)k'_j} \\ & = & \left(\overline{k_1}\ \overline{k_2}\ldots\overline{k_{t-1}\,k_t^{(\mu*\eta)k'_1}}\right)^{(\mu*\eta)k'_2\ldots(\mu*\eta)k'_j} \end{array}$$

olup eğer $k_t, k'_1 \in \mathrm{M}$ ise

$$k_t^{(\mu*\eta)k'_1} = k_t^{\mu k'_1} = k_tk'_1$$

ve eğer $k_t, k_1' \in \mathrm{N}$ ise

$$k_t^{(\mu*\eta)k_1'} = k_t^{\eta k_1'} = k_t k_1'$$

elde edilir. Eğer k_t ile k_1' den biri M nin biri N nin elemanı ise $[\![k_t, k_1']\!]_1 = k_t^{(\mu*\eta)k_1'} - k_t k_1' \in [\![\mathrm{M}*\mathrm{N}, \mathrm{M}*\mathrm{N}]\!](sk_t, tk_1')$ olduğundan

$$\overline{k_t^{(\mu*\eta)k_1'}} = \overline{k_t k_1'}$$

eşitliği elde edilir. Öyle ise her durumda

$$\overline{k_t^{(\mu*\eta)k_1'}} = \overline{k_t k_1'}$$

dir. Yukarıdaki işlem bu şekilde devam ettirilirse

$$\begin{aligned}
\left(\overline{k_1 k_2 \ldots k_t}\right)^{(\mu*\eta)^{\mathrm{cr}}\left(\overline{k_1' k_2' \ldots k_j'}\right)} &= \ldots = \left(\overline{k_1}\ \overline{k_2} \ldots \overline{k_{t-1}}\,\overline{k_t^{(\mu*\eta)k_1'}}\right)^{(\mu*)\eta k_2' \ldots (\mu*\eta)k_j'} \\
&= \left(\overline{k_1}\ \overline{k_2} \ldots \overline{k_{t-1}}\ \overline{k_t k_1'}\right)^{(\mu*\eta)k_2' \ldots (\mu*\eta)k_j'} \\
&\ \ \vdots \\
&= \overline{k_1 k_2 \ldots k_t}\ \overline{k_1' k_2' \ldots k_j'}
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$(\mu*\eta)^{\mathrm{cr}}\left(\overline{k_1 k_2 \ldots k_t}\right)\left(\overline{k_1' k_2' \ldots k_j'}\right) = \overline{k_1 k_2 \ldots k_t}\ \overline{k_1' k_2' \ldots k_j'}$$

olduğu görülür.

Böylece her $\sum_i p_i \in (\mathrm{M}*\mathrm{N})(x,y)$ ve $\sum_s p_s \in (\mathrm{M}*\mathrm{N})(y,z)$ için de

$$(\mu*\eta)^{\mathrm{cr}}\left(\overline{\sum_i p_i}\right)\overline{\sum_s p_s} = \overline{\sum_i p_i \sum_s p_s} = \overline{\sum_i p_i}^{(\mu*\eta)^{\mathrm{cr}}\overline{\sum_s p_s}}$$

olur.

4.3.2 Eş-çarpımın yarı direk çarpımdan elde edilişi

Tanım 4.8 $\mathcal{M} = (\mu : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{A})$ ve $\mathcal{N} = (\eta : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{A})$, $\mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{A}$ kategorisinde birer çaprazlanmış modül olsun. M nin N üzerine, A dan indirgenmiş, her $w, x, y, z \in \mathrm{A}_0$ için

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{M}(w,x) \times \mathrm{N}(x,y) & \longrightarrow & \mathrm{N}(w,y) \\
(m,n) & \longmapsto & {}^{\mu m}n
\end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{N}(x,y) \times \mathrm{M}(y,z) & \longrightarrow & \mathrm{N}(x,z) \\
(n,m') & \longmapsto & n^{\mu m'}
\end{array}$$

biçiminde bir asosyatif etkisi mevcuttur. Bu etki ile M ile N nin yarı direk çarpımı $\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N} = \{(\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N})(x,y) : x,y \in \mathrm{A}_0\}$ şeklinde, $\mathrm{M} \times \mathrm{N} = \{(\mathrm{M} \times \mathrm{N})(x,y) = \mathrm{M}(x,y) \times \mathrm{N}(x,y) : x,y \in \mathrm{A}_0\}$ ailesinin elemanları üzerinde tanımlı, her $x,y,z \in \mathrm{A}_0$ için

$$\begin{array}{rcl} ((\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N})(x,y)) \times ((\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N})(x,y)) & \longrightarrow & (\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N})(x,y) \\ ((m,n),(m_1,n_1)) & \longmapsto & (m,n)+(m_1,n_1) = (m+m_1, n+n_1) \end{array}$$

biçiminde bir toplama işlemine ve

$$\begin{array}{rcl} ((\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N})(x,y)) \times ((\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N})(y,z)) & \longrightarrow & (\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N})(x,z) \\ ((m,n),(m',n')) & \longmapsto & (m,n)(m',n') = \left(mm', n^{\mu m'} + {}^{\mu m}n' + nn'\right) \end{array}$$

biçiminde bir kompozisyona sahip bir ailedir.

Ayrıca $\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N}$ üzerinde her $x,y \in \mathrm{A}_0$ için

$$\begin{array}{rcl} R \times (\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N})(x,y) & \longrightarrow & (\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N})(x,y) \\ (r,(m,n)) & \longmapsto & r \cdot (m,n) = (r \cdot m, r \cdot n) \end{array}$$

biçiminde bir R-etkisi ile her $w,x,y,z \in \mathrm{A}_0$ için

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{A}(w,x) \times (\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N})(x,y) & \longrightarrow & (\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N})(w,y) \\ (a,(m,n)) & \longmapsto & {}^a(m,n) = ({}^a m, {}^a n) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} (\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N})(x,y) \times \mathrm{A}(y,z) & \longrightarrow & (\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N})(x,z) \\ ((m,n),a') & \longmapsto & (m,n)^{a'} = \left(m^{a'}, n^{a'}\right) \end{array}$$

biçiminde bir asosyatif A-etkisi mevcuttur.

Önerme 4.9 $\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N}$ bir R-cebiroiddir.

İspat: Diğerleri çok açık olduğundan sadece kompozisyonun asosyatifliğini göstereceğiz: Her $w,x,y,z \in \mathrm{A}_0$, $(m,n) \in (\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N})(w,x)$, $(m',n') \in (\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N})(x,y)$ ve $(m'',n'') \in (\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N})(y,z)$

için

$$\begin{aligned}
((m,n)(m',n'))(m'',n'') &= \left(mm', n^{\mu m'} + {}^{\mu m}n' + nn'\right)(m'',n'') \\
&= \left((mm')m'', \left(n^{\mu m'} + {}^{\mu m}n' + nn'\right)^{\mu m''}\right. \\
&\quad \left. + {}^{\mu m m'}n'' + \left(n^{\mu m'} + {}^{\mu m}n' + nn'\right)n''\right. \\
&= m(m'm''), \left(n^{\mu m'}\right)^{\mu m''} + ({}^{\mu m}n')^{\mu m''} + (nn')^{\mu m''} \\
&\quad + {}^{\mu(mm')}n'' + \left(n^{\mu m'}\right)n'' + ({}^{\mu m}n')n'' + (nn')n'' \\
&= m(m'm''), n^{\mu m'\mu m''} + {}^{\mu m}\left((n')^{\mu m''}\right) + n(n')^{\mu m''} \\
&\quad + {}^{\mu m\mu m'}n'' + n\left({}^{\mu m'}n''\right) + {}^{\mu m}(n'n'') + n(n'n'') \\
&= m(m'm''), n^{\mu m'\mu m''} + {}^{\mu m}\left((n')^{\mu m''}\right) + {}^{\mu m}\left({}^{\mu m'}n''\right) \\
&\quad + {}^{\mu m}(n'n'') + n(n')^{\mu m''} + n\left({}^{\mu m'}n''\right) + n(n'n'') \\
&= m(m'm''), n^{\mu(m'm'')} + {}^{\mu m}\left((n')^{\mu m''} + {}^{\mu m'}n'' + n'n''\right) \\
&\quad + n\left((n')^{\mu m''} + {}^{\mu m'}n'' + n'n''\right) \\
&= (m,n)\left(\left(m'm'', (n')^{\mu m''} + {}^{\mu m'}n'' + n'n''\right)\right) \\
&= (m,n)((m',n')(m'',n''))
\end{aligned}$$

dir. □

Sonuç 4.10 $\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N}$ yukarıda tanımladığımız A-etkisi ile açıkça bir A-modüldür.

Önerme 4.11 $\mu \ltimes \eta$ morfizmi

$$\begin{array}{rccl}
\mu \ltimes \eta : & \mathrm{M} \ltimes \mathrm{N} & \longrightarrow & \mathrm{A} \\
& (m,n) & \longmapsto & (\mu \ltimes \eta)(m,n) = \mu m + \eta n
\end{array}$$

biçiminde tanımlanırsa $\mathcal{M} \ltimes \mathcal{N} = (\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{A})$ bir ön-çaprazlanmış modül olur.

İspat: Her $w,x,y,z \in \mathrm{A}_0$, $(m,n) \in (\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N})(x,y)$, $a \in \mathrm{A}(w,x)$ ve $a' \in \mathrm{A}(y,z)$ için

$$\begin{aligned}
(\mu \ltimes \eta)({}^{a}(m,n)) &= (\mu \ltimes \eta)({}^{a}m, {}^{a}n) \\
&= \mu({}^{a}m) + \eta({}^{a}n) \\
&= a(\mu m) + a(\eta n) \\
&= a(\mu m + \eta n) \\
&= a((\mu \ltimes \eta)(m,n))
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde $(\mu \ltimes \eta)\left((m,n)^{a'}\right) = ((\mu \ltimes \eta)(m,n))a'$ dir. □

Önerme 4.12

$$\begin{array}{rccl}
i_{\mathrm{M}} : & \mathrm{M} & \longrightarrow & \overline{(\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N})^{\mathrm{cr}}} \\
& m & \longmapsto & \overline{(m,0)}
\end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rccc} i_{\mathrm{N}}: & \mathrm{N} & \longrightarrow & (\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N})^{\mathrm{cr}} \\ & n & \longmapsto & \overline{(0,n)} \end{array}$$

olmak üzere $(\mathcal{M} \ltimes \mathcal{N})^{\mathrm{cr}}$, $i_{\mathcal{M}} = (i_{\mathrm{M}}, I_{\mathrm{A}})$ ve $i_{\mathcal{N}} = (i_{\mathrm{N}}, I_{\mathrm{A}})$ morfizmleri ile birlikte, $\mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{A}$ kategorisinde $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{N}$ çaprazlanmış modüllerinin eş-çarpımıdır.

İspat: $\mathcal{V} = (\mathrm{v} : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{A})$, $\mathrm{XAlg}(R)/\mathrm{A}$ kategorisinde bir çaprazlanmış modül, $f_{\mathcal{M}} = (f_{\mathrm{M}}, I_{\mathrm{A}}) : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{V}$, $f_{\mathcal{N}} = (f_{\mathrm{N}}, I_{\mathrm{A}}) : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{V}$ birer çaprazlanmış modül morfizmi olsun.

$$\begin{array}{rccc} f_1: & (\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N})^{\mathrm{cr}} & \longrightarrow & \mathrm{V} \\ & \overline{(m,n)} & \longmapsto & f_1\overline{(m,n)} = f_{\mathrm{M}} m + f_{\mathrm{N}} n \end{array}$$

olmak üzere $f = (f_1, I_{\mathrm{A}}) : (\mathcal{M} \ltimes \mathcal{N})^{\mathrm{cr}} \longrightarrow \mathcal{V}$ dönüşümünü tanımlayalım:

(i) f_1 bir R-cebiroid morfizmidir. Çünkü her $x, y, z \in \mathrm{A}_0$, $(m,n), (m_1,n_1) \in (\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N})(x,y)$, $(m',n') \in (\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N})(y,z)$ ve $r \in R$ için

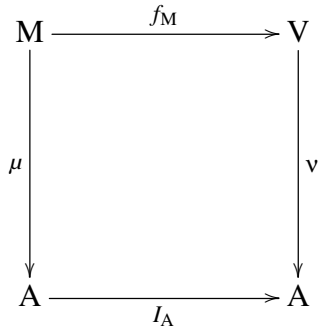
1.

$$\begin{array}{rcl} f_1\left(\overline{(m,n)} + \overline{(m_1,n_1)}\right) & = & f_1\left(\overline{(m,n) + (m_1,n_1)}\right) \\ & = & f_1\left(\overline{(m+m_1, n+n_1)}\right) \\ & = & f_{\mathrm{M}}(m+m_1) + f_{\mathrm{N}}(n+n_1) \\ & = & f_{\mathrm{M}} m + f_{\mathrm{M}} m_1 + f_{\mathrm{N}} n + f_{\mathrm{N}} n_1 \\ & = & f_{\mathrm{M}} m + f_{\mathrm{N}} n + f_{\mathrm{M}} m_1 + f_{\mathrm{N}} n_1 \\ & = & f_1\left(\overline{(m,n)}\right) + f_1\left(\overline{(m_1,n_1)}\right) \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rcl} f_1\left(\overline{(m,n)(m',n')}\right) & = & f_1\left(\overline{(m,n)(m',n')}\right) \\ & = & f_1\left(\overline{\left(mm', n^{\mu m'} + {}^{\mu m} n' + nn'\right)}\right) \\ & = & f_{\mathrm{M}}(mm') + f_{\mathrm{N}}\left(n^{\mu m'} + {}^{\mu m} n' + nn'\right) \\ & = & (f_{\mathrm{M}} m)(f_{\mathrm{M}} m') + f_{\mathrm{N}}\left(n^{\mu m'}\right) + f_{\mathrm{N}}({}^{\mu m} n') + f_{\mathrm{N}}(nn') \\ & = & (f_{\mathrm{M}} m)(f_{\mathrm{M}} m') + (f_{\mathrm{N}} n)^{\mu m'} + {}^{\mu m}(f_{\mathrm{N}} n') + (f_{\mathrm{N}} n)(f_{\mathrm{N}} n') \end{array}$$

olur. f bir çaprazlanmış modül morfizmi olduğundan



diyagramı değişmeli olup her $m \in \mathrm{M}$ için

$$\mu m = I_{\mathrm{A}} \mu m = \nu \left(f_{\mathrm{M}} m \right)$$

ve

$$\mu m' = I_{\mathrm{A}} \mu m' = \nu \left(f_{\mathrm{M}} m' \right)$$

dir. Böylece, $\mathcal{V}$ bir çaprazlanmış modül olduğundan,

$$\left(f_{\mathrm{N}} n \right)^{\mu m'} = \left(f_{\mathrm{N}} n \right)^{\nu \left(f_{\mathrm{M}} m' \right)} = \left(f_{\mathrm{N}} n \right) \left(f_{\mathrm{M}} m' \right)$$

ve

$${}^{\mu m} \left(f_{\mathrm{N}} n' \right) = {}^{\nu \left(f_{\mathrm{M}} m \right)} \left(f_{\mathrm{N}} n' \right) = \left(f_{\mathrm{M}} m \right) \left(f_{\mathrm{N}} n' \right)$$

elde edilir. Elde edilen bu iki eşitlik yukarıdaki son işlemde yerine yazılıp işlem devam ettirilirse

$$\begin{array}{rcccl} f_1 \left(\overline{(m,n)(m',n')} \right) & = & ... & = & \left(f_{\mathrm{M}} m \right) \left(f_{\mathrm{M}} m' \right) + \left(f_{\mathrm{N}} n \right)^{\mu m'} + {}^{\mu m} \left(f_{\mathrm{N}} n' \right) + \left(f_{\mathrm{N}} n \right) \left(f_{\mathrm{N}} n' \right) \\ & & & = & \left(f_{\mathrm{M}} m \right) \left(f_{\mathrm{M}} m' \right) + \left(f_{\mathrm{N}} n \right) \left(f_{\mathrm{M}} m' \right) + \left(f_{\mathrm{M}} m \right) \left(f_{\mathrm{N}} n' \right) + \left(f_{\mathrm{N}} n \right) \left(f_{\mathrm{N}} n' \right) \\ & & & = & \left(f_{\mathrm{M}} m + f_{\mathrm{N}} n \right) \left(f_{\mathrm{N}} m' + f_{\mathrm{N}} n' \right) \\ & & & = & f_1 \overline{(m,n)} f_1 \overline{(m',n')} \end{array}$$

sonucuna ulaşılır.

3.

$$\begin{array}{rcl} f_1 \left(r \cdot \overline{(m,n)} \right) & = & f_1 \left(\overline{r \cdot (m,n)} \right) \\ & = & f_1 \overline{(r \cdot m, r \cdot n)} \\ & = & f_{\mathrm{M}} \left(r \cdot m \right) + f_{\mathrm{N}} \left(r \cdot n \right) \\ & = & r \cdot f_{\mathrm{M}} m + r \cdot f_{\mathrm{N}} n \\ & = & r \cdot \left(f_{\mathrm{M}} m + f_{\mathrm{N}} n \right) \\ & = & r \cdot f_1 \overline{(m,n)} \end{array}$$

dir.

(ii) f bir çaprazlanmış modül morfizmidir. Çünkü her $w,x,y,z \in \mathrm{A}_0$, $(m,n) \in \left(\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N} \right)(x,y)$, $a \in \mathrm{A}(w,x)$, $a' \in \mathrm{A}(y,z)$ için

1.

$$\begin{aligned} f_1\left({}^a\left(\overline{(m,n)}\right)\right) &= f_1\overline{{}^a(m,n)} \\ &= f_1\overline{({}^a m,{}^a n)} \\ &= f_{\mathrm{M}}({}^a m)+f_{\mathrm{N}}({}^a n) \\ &= {}^a(f_{\mathrm{M}}m)+{}^a(f_{\mathrm{N}}n) \\ &= {}^a(f_{\mathrm{M}}m+f_{\mathrm{N}}n) \\ &= {}^a\left(f_1\overline{(m,n)}\right) \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$f_1\left(\left(\overline{(m,n)}\right)^{a'}\right)=\left(f_1\overline{(m,n)}\right)^{a'}$$

olduğu görülür.

2.

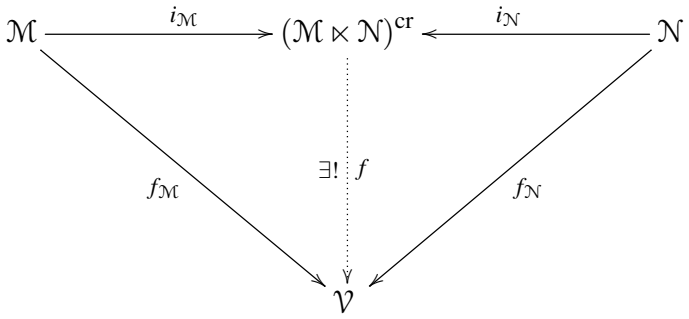
$$\begin{aligned} \nu\left(f_1\overline{(m,n)}\right) &= \nu(f_{\mathrm{M}}m+f_{\mathrm{N}}n) \\ &= (\nu f_{\mathrm{M}})m+(\nu f_{\mathrm{N}})n \\ &= (I_{\mathrm{A}}\mu)m+(I_{\mathrm{A}}\mu)n \\ &= I_{\mathrm{A}}(\mu m+\mu n) \\ &= I_{\mathrm{A}}((\mu\ltimes\eta)(m,n)) \\ &= I_{\mathrm{A}}\left((\mu\ltimes\eta)^{\mathrm{cr}}\overline{(m,n)}\right) \end{aligned}$$

olup

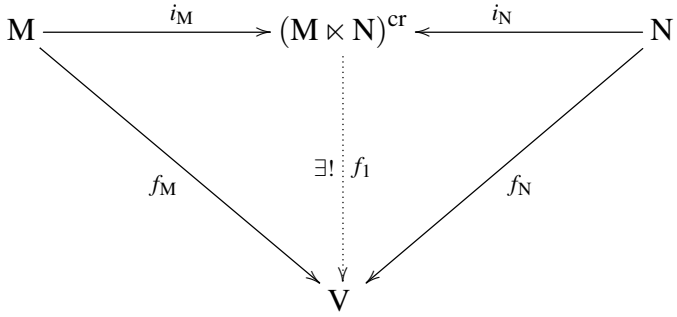
$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{M}\ltimes\mathrm{N})^{\mathrm{cr}} & \xrightarrow{\quad f_1\quad} & \mathrm{V} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (\mu\ltimes\eta)^{\mathrm{cr}}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \nu} \\ \mathrm{A} & \xrightarrow[\quad I_{\mathrm{A}}\quad]{} & \mathrm{A} \end{array}$$

diyagramı değişmelidir.

(iii) f evrensellik özelliğini sağlar. Yani



diyagramı değişmelidir. Bunu için A üzerindeki dönüşüm birim dönüşüm olduğından



diyagramının değişmeli olduğunu göstermek yeterlidir. Bu diyagram ise, her $m \in \mathrm{M}$ için

$$(f_1 i_{\mathrm{M}})\, m = f_1\,(i_{\mathrm{M}} m) = f_1 \overline{(m,0)} = f_{\mathrm{M}} m + f_{\mathrm{N}} 0 = f_{\mathrm{M}} m$$

ve her $n \in \mathrm{N}$ için

$$(f_1 i_{\mathrm{N}})\, n = f_1\,(i_{\mathrm{N}} n) = f_1 \overline{(0,n)} = f_{\mathrm{M}} 0 + f_{\mathrm{N}} n = f_{\mathrm{N}} n$$

olduğundan değişmelidir.

(iv) f in biricikliği ile eş-çarpımın izomorfizm farkıyla biricikliği ön-çaprazlanmış modüllerinin eş-çarpımında olduğu gibi gösterilebilir. □

Şimdi de $(\mathcal{M} \ltimes \mathcal{N})^{\mathrm{cr}}$ yi inceleyelim:

Bildiğimiz üzere

$$(\mathcal{M} \ltimes \mathcal{N})^{\mathrm{cr}} = \left(\mu \ltimes \eta : \frac{\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N}}{[\![\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N}, \mathrm{M} \ltimes \mathrm{N}]\!]} \longrightarrow \mathrm{A}\right)$$

olup $[\![\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N}, \mathrm{M} \ltimes \mathrm{N}]\!]$, $\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N}$ nin iki yönlü Peiffer idealidir.

Her $x,y \in \mathrm{A}_0$ için $[\![\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N}, \mathrm{M} \ltimes \mathrm{N}]\!](x,y)$ nin üreteçleri $x = sm = sn'$, $y = tm' = tn$ ve $tm = tn' = sm' = sn$ koşulunu sağlayan her $m,m' \in \mathrm{M}$ ve $n,n' \in \mathrm{N}$ için

$$\begin{aligned}
[\![(m,n'),(m',n)]\!]_1 &= (m,n')^{(\mu\ltimes\eta)(m',n)} - (m,n')(m',n) \\
&= \left(m^{(\mu\ltimes\eta)(m',n)}, (n')^{(\mu\ltimes\eta)(m',n)}\right) - \left(mm', (n')^{\mu m'} + {}^{\mu m}n + n'n\right) \\
&= \left(m^{\mu m'+\eta n} - mm', (n')^{\mu m'+\eta n} - (n')^{\mu m'} - {}^{\mu m}n - n'n\right) \\
&= \left(m^{\mu m'} + m^{\eta n} - mm', (n')^{\mu m'} + (n')^{\eta n} - (n')^{\mu m'} - {}^{\mu m}n - n'n\right) \\
&= \left(mm' + m^{\eta n} - mm', (n')^{\mu m'} + n'n - (n')^{\mu m'} - {}^{\mu m}n - n'n\right) \\
&= (m^{\eta n}, -{}^{\mu m}n)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
[\![(m,n'),(m',n)]\!]_2 &= {}^{(\mu\ltimes\eta)(m,n')}(m',n) - (m,n')(m',n) \\
&= \left({}^{(\mu\ltimes\eta)(m,n')}m', {}^{(\mu\ltimes\eta)(m,n')}n\right) - \left(mm', (n')^{\mu m'} + {}^{\mu m}n + n'n\right) \\
&= \left({}^{\mu m+\eta n'}m' - mm', {}^{\mu m+\eta n'}n - (n')^{\mu m'} - {}^{\mu m}n - n'n\right) \\
&= \left({}^{\mu m}m' + {}^{\eta n'}m' - mm', {}^{\mu m}n + {}^{\eta n'}n - (n')^{\mu m'} - {}^{\mu m}n - n'n\right) \\
&= \left(mm' + {}^{\eta n'}m' - mm', {}^{\mu m}n + n'n - (n')^{\mu m'} - {}^{\mu m}n - n'n\right) \\
&= \left({}^{\eta n'}m', -(n')^{\mu m'}\right)
\end{aligned}$$

biçimindedir.

Şimdi de $(\mathcal{M} \ltimes \mathcal{N})^{\mathrm{cr}}$ nin çaprazlanmış modül koşullarını sağladığını görelim:

CM1) $\mathcal{M} \ltimes \mathcal{N}$ bir ön-çaprazlanmış modül olduğundan her $w,x,y,z \in \mathrm{A}_0$, $(m,n) \in (\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N})(x,y)$, $a \in \mathrm{A}(w,x)$, $a' \in \mathrm{A}(y,z)$ için

$$\begin{aligned}
(\mu \ltimes \eta)^{\mathrm{cr}}\left({}^{a}\left(\overline{(m,n)}\right)\right) &= (\mu \ltimes \eta)^{\mathrm{cr}}\left(\overline{{}^{a}(m,n)}\right) \\
&= (\mu \ltimes \eta)({}^{a}(m,n)) \\
&= (\mu \ltimes \eta)({}^{a}m, {}^{a}n) \\
&= \mu({}^{a}m) + \eta({}^{a}n) \\
&= a(\mu m) + a(\eta n) \\
&= a(\mu m + \eta n) \\
&= a((\mu \ltimes \eta)(m,n)) \\
&= a\left((\mu \ltimes \eta)^{\mathrm{cr}}\left(\overline{(m,n)}\right)\right)
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$(\mu \ltimes \eta)^{\mathrm{cr}}\left(\left(\overline{(m,n)}\right)^{a'}\right) = \left((\mu \ltimes \eta)^{\mathrm{cr}}\left(\overline{(m,n)}\right)\right)a'$$

olduğu görülür.

CM2) Her $w,x,y,z \in \mathrm{A}_0$, $(m,n) \in (\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N})(x,y)$, $(m',n') \in (\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N})(w,x)$, $(m'',n'') \in (\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N})(y,z)$ için

$$\begin{aligned}
{}^{(\mu\ltimes\eta)^{\mathrm{cr}}\overline{(m',n')}}\overline{(m,n)} &= {}^{(\mu\ltimes\eta)(m',n')}\overline{(m,n)} \\
&= \overline{{}^{(\mu\ltimes\eta)(m',n')}(m,n)} \\
&= {}^{(\mu\ltimes\eta)(m',n')}(m,n) + [\![\mathrm{M}\ltimes\mathrm{N},\mathrm{M}\ltimes\mathrm{N}]\!](w,y) \\
&= {}^{(\mu\ltimes\eta)(m',n')}(m,n) - [(m',n'),(m,n)]_2 \\
&\quad + [\![\mathrm{M}\ltimes\mathrm{N},\mathrm{M}\ltimes\mathrm{N}]\!](w,y) \\
&= {}^{(\mu\ltimes\eta)(m',n')}(m,n) - \left({}^{(\mu\ltimes\eta)(m',n')}(m,n) - (m',n')(m,n)\right) \\
&\quad + [\![\mathrm{M}\ltimes\mathrm{N},\mathrm{M}\ltimes\mathrm{N}]\!](w,y) \\
&= \overline{(m',n')(m,n)} + [\![\mathrm{M}\ltimes\mathrm{N},\mathrm{M}\ltimes\mathrm{N}]\!](w,y) \\
&= \overline{(m',n')}\,\overline{(m,n)} \\
&= \overline{(m',n')}\,\overline{(m,n)}
\end{aligned}$$

ve benzer biçimde

$$\overline{(m,n)}^{(\mu\ltimes\eta)^{\mathrm{cr}}\overline{(m'',n'')}} = \overline{(m,n)}\,\overline{(m'',n'')}$$

elde edilir.

4.3.3 $(\mathcal{M}*\mathcal{N})^{\mathrm{cr}}$ ile $(\mathcal{M}\ltimes\mathcal{N})^{\mathrm{cr}}$ nin karşılaştırılması

Bu bölümde $(\mathcal{M}*\mathcal{N})^{\mathrm{cr}}$ ile $(\mathcal{M}\ltimes\mathcal{N})^{\mathrm{cr}}$ nin birbirine izomorfik olduğunu göstereceğiz:

Bölüm 4.3.1 de $(\mathcal{M}*\mathcal{N})^{\mathrm{cr}}$ yi elde etmek için $\mathrm{M}*\mathrm{N}$ yi $[\![\mathrm{M}*\mathrm{N},\mathrm{M}*\mathrm{N}]\!]$ idealine bölmek gerektiğini ve her $x,y \in \mathrm{A}_0$ için $[\![\mathrm{M}*\mathrm{N},\mathrm{M}*\mathrm{N}]\!](x,y)$ R-altmodülünün $x = sm = sn$, $tm = tn = sm' = sn'$, $tm' = tn' = y$ koşulunu sağlayan her $m,m' \in \mathrm{M}$, $n,n' \in \mathrm{N}$ için

$$\begin{array}{lllll}
[\![m,n']\!]_1 &= m^{(\mu*\eta)n'} - mn' &= m^{\eta n'} - mn' \\
[\![m,n']\!]_2 &= {}^{(\mu*\eta)m}n' - mn' &= {}^{\mu m}n' - mn' \\
[\![n,m']\!]_1 &= n^{(\mu*\eta)m'} - nm' &= n^{\mu m'} - nm' \\
[\![n,m']\!]_2 &= {}^{(\mu*\eta)n}m' - nm' &= {}^{\eta n}m' - nm'
\end{array}$$

komutatörleri tarafından üretildiğini gördük.

Bunlardan $[\![n,m']\!]_1 = n^{\mu m'} - nm'$ ve $[\![m,n']\!]_2 = {}^{\mu m}n' - mn'$ komutatörlerinin ürettiği ideale $[\![\mathrm{M}*\mathrm{N},\mathrm{M}*\mathrm{N}]\!]_1$, $[\![m,n']\!]_1 = m^{\eta n'} - mn'$ ve $[\![n,m']\!]_2 = {}^{\eta n}m' - nm'$ komutatörlerinin ürettiği ideale $[\![\mathrm{M}*\mathrm{N},\mathrm{M}*\mathrm{N}]\!]_2$ diyelim. $(\mathcal{M}*\mathcal{N})^{\mathrm{cr}}$ yi elde etmek için $\mathrm{M}*\mathrm{N}$ yi aşama aşama önce $[\![\mathrm{M}*\mathrm{N},\mathrm{M}*\mathrm{N}]\!]_1$ e sonra da $[\![\mathrm{M}*\mathrm{N},\mathrm{M}*\mathrm{N}]\!]_2$ ye bölebiliriz. Açıkça $[\![\mathrm{M}*\mathrm{N},\mathrm{M}*\mathrm{N}]\!]_1$ R ve A etkisi altında kapalı olduğundan $\frac{\mathrm{M}*\mathrm{N}}{[\![\mathrm{M}*\mathrm{N},\mathrm{M}*\mathrm{N}]\!]_1}$ bir R-cebiroid A-modüldür. Ayrıca $(\mu*\eta)([\![\mathrm{M}*\mathrm{N},\mathrm{M}*\mathrm{N}]\!]_1) = 0$ olduğundan

$$\begin{array}{rccl}\widetilde{\mu*\eta}: & \frac{M*N}{[\![M*N,M*N]\!]_1} & \longrightarrow & A \\ & \widetilde{m}=m+[\![M*N,M*N]\!]_1 & \longmapsto & \widetilde{\mu*\eta}(\widetilde{m})=(\mu*\eta)m=\mu m \\ & \widetilde{n}=n+[\![M*N,M*N]\!]_1 & \longmapsto & \widetilde{\mu*\eta}(\widetilde{n})=(\mu*\eta)n=\eta n\end{array}$$

biçiminde tanımlanan morfizm bir *R*-cebiroid morfizmidir. $\widetilde{\mu*\eta}$ aynı zamanda A-etkisini de koruduğundan bir ön-çaprazlanmış modüldür.

Önerme 4.13 $\frac{\mathcal{M}*\mathcal{N}}{[\![M*N,M*N]\!]_1}=\left(\widetilde{\mu*\eta}:\frac{M*N}{[\![M*N,M*N]\!]_1}\longrightarrow A\right)$ ön çaprazlanmış modülü $\mathcal{M}\ltimes\mathcal{N}$ ön çaprazlanmış modülüne izomorfiktir.

İspat: φ fonksiyonunu

$$\begin{array}{rccl}\varphi: & M*N & \longrightarrow & M\ltimes N \\ & m & \longmapsto & (m,0) \\ & n & \longmapsto & (0,n) \\ & k_1...k_n & \longmapsto & \varphi(k_1)...\varphi(k_n) \\ & \sum\limits_i p_i & \longmapsto & \varphi\left(\sum\limits_i p_i\right)=\sum\limits_i \varphi p_i\end{array}$$

biçiminde tanımlayalım.

(i) φ bir *R*-cebiroid morfizmidir. Çünkü her $x,y,z\in A_0$, $\sum\limits_i p_i,\sum\limits_j p_j\in(M*N)(x,y)$ ve $\sum\limits_s p_s\in(M*N)(y,z)$ için

1.
$$\begin{aligned}\varphi\left(\sum_i p_i+\sum_j p_j\right) &= \varphi\left(\sum_{t=i,j} p_t\right) \\ &= \sum_t(\varphi p_t) \\ &= \sum_i(\varphi p_i)+\sum_j\left(\varphi p_j\right) \\ &= \varphi\left(\sum_i p_i\right)+\varphi\left(\sum_j p_j\right)\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}\varphi\left(\sum_i p_i\sum_s p_s\right) &= \varphi\left(\sum_{i,s} p_i p_s\right) \\ &= \sum_{i,s}\varphi(p_i p_s) \\ &= \sum_{i,s}(\varphi p_i)(\varphi p_s) \\ &= \sum_i\varphi(p_i)\sum_s\varphi(p_s) \\ &= \varphi\left(\sum_i p_i\right)\varphi\left(\sum_s p_s\right)\end{aligned}$$

ve her $m,n,k_1k_2...k_t,\sum_i p_i \in \mathrm{M}*\mathrm{N}$, $r \in R$ için

3.

$$\varphi(r\cdot m) = (r\cdot m,0) = r\cdot(m,0) = r\cdot\varphi(m)$$

,

$$\varphi(r\cdot n) = (0,r\cdot n) = r\cdot(0,n) = r\cdot\varphi(n)$$

,

$$\begin{aligned}\varphi(r\cdot(k_1k_2...k_t)) &= \varphi((r\cdot k_1)k_2...k_t)\\ &= \varphi(r\cdot k_1)\varphi k_2...\varphi k_t\\ &= (r\cdot\varphi k_1)\varphi k_2...\varphi k_t\\ &= r\cdot(\varphi k_1\varphi k_2...\varphi k_t)\\ &= r\cdot\varphi(k_1k_2...k_t)\end{aligned}$$

,

$$\begin{aligned}\varphi\left(r\cdot\sum_i p_i\right) &= \varphi\sum_i(r\cdot p_i)\\ &= \sum_i\varphi(r\cdot p_i)\\ &= \sum_i(r\cdot(\varphi p_i))\\ &= r\cdot\sum_i\varphi p_i\\ &= r\cdot\varphi\left(\sum_i p_i\right)\end{aligned}$$

dir.

(ii) Her $x,y\in \mathrm{A}_0$ ve $[\![n,m']\!]_1$, $[\![m,n']\!]_2 \in [\mathrm{M}*\mathrm{N},\mathrm{M}*\mathrm{N}](x,y)$ için

$$\begin{aligned}\varphi([\![n,m']\!]_1) &= \varphi\left(n^{\mu m'}-nm'\right)\\ &= \varphi\left(n^{\mu m'}\right)-\varphi(nm')\\ &= \left(0,n^{\mu m'}\right)-(0,n)(m',0)\\ &= \left(0,n^{\mu m'}\right)-\left(0,n^{\mu m'}\right)\\ &= (0,0)_{(\mathrm{M}\ltimes\mathrm{N})(x,y)}\end{aligned}$$

ve benzer şekilde $\varphi([\![m,n']\!]_2) = (0,0)_{(\mathrm{M}\ltimes\mathrm{N})(x,y)}$ olup φ den

$$\begin{array}{rccl}\widetilde{\varphi}: & \frac{\mathrm{M}*\mathrm{N}}{[\![\mathrm{M}*\mathrm{N},\mathrm{M}*\mathrm{N}]\!]_1} & \longrightarrow & \mathrm{M}\ltimes\mathrm{N}\\ & \widetilde{m}=m+[\![\mathrm{M}*\mathrm{N},\mathrm{M}*\mathrm{N}]\!]_1 & \longmapsto & \widetilde{\varphi}(\widetilde{m})=\varphi m=(m,0)\\ & \widetilde{n}=n+[\![\mathrm{M}*\mathrm{N},\mathrm{M}*\mathrm{N}]\!]_1 & \longmapsto & \widetilde{\varphi}(\widetilde{n})=\varphi n=(0,n)\end{array}$$

biçiminde elde edilen morfizm de bir R-cebiroid morfizmidir.

(iii) $(\widetilde{\varphi},I_{\mathrm{A}}) : \frac{\mathcal{M}*\mathcal{N}}{[\![\mathrm{M}*\mathrm{N},\mathrm{M}*\mathrm{N}]\!]_1} \longrightarrow \mathcal{M}\ltimes\mathcal{N}$ bir ön-çaprazlanmış modül morfizmidir. Çünkü

1. Her $w,x,y,z \in \mathrm{A}_0$, $\sum_i p_i \in (\mathrm{M}*\mathrm{N})(x,y)$, $a \in \mathrm{A}(w,x)$, $a' \in \mathrm{A}(y,z)$ için

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}\left({}^{a}\left(\widetilde{\sum_i p_i}\right)\right) &= \widetilde{\varphi}\left({}^{a}\left(\sum_i p_i\right)\widetilde{\ }\right) \\
&= \varphi\left(\sum_i ({}^{a}p_i)\right) \\
&= \sum_i \varphi({}^{a}p_i) \\
&= \sum_i {}^{a}(\varphi p_i) \\
&= {}^{a}\left(\sum_i \varphi p_i\right) \\
&= {}^{a}\left(\varphi\left(\sum_i p_i\right)\right) \\
&= {}^{a}\left(\widetilde{\varphi}\left(\widetilde{\sum_i p_i}\right)\right)
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde $\widetilde{\varphi}\left(\left(\widetilde{\sum_i p_i}\right)^{a'}\right) = \left(\widetilde{\varphi}\left(\widetilde{\sum_i p_i}\right)\right)^{a'}$ elde edilir.

2.

$$\begin{array}{ccc}
\frac{\mathrm{M}*\mathrm{N}}{[\mathrm{M}*\mathrm{N},\mathrm{M}*\mathrm{N}]_1} & \xrightarrow{\ \widetilde{\varphi}\ } & \mathrm{M}\ltimes\mathrm{N} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \widetilde{\mu*\eta}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mu\ltimes\eta} \\
\mathrm{A} & \xrightarrow[I_{\mathrm{A}}]{} & \mathrm{A}
\end{array}$$

diyagramı değişmelidir. Gerçekten de her $m \in \mathrm{M}$, $n \in \mathrm{N}$, $k_1 ... k_n \in \mathrm{M}*\mathrm{N}$, $\sum_i p_i \in \mathrm{M}*\mathrm{N}$ için

$$\begin{aligned}
((\mu\ltimes\eta)\widetilde{\varphi})(\widetilde{m}) &= (\mu\ltimes\eta)(\widetilde{\varphi}\widetilde{m}) \\
&= (\mu\ltimes\eta)(\varphi m) \\
&= (\mu\ltimes\eta)(m,0) \\
&= \mu m \\
&= (\mu*\eta)\, m \\
&= \widetilde{\mu*\eta}\widetilde{m} \\
&= \left(I_{\mathrm{A}}\widetilde{\mu*\eta}\right)\widetilde{m}
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde $((\mu\ltimes\eta)\widetilde{\varphi})(\widetilde{n}) = \left(I_{\mathrm{A}}\widetilde{\mu*\eta}\right)(\widetilde{n})$ elde edilir. Böylece her $x,y \in \mathrm{A}_0$ ve $k_1 ... k_n \in (\mathrm{M}*\mathrm{N})(x,y)$ için

$$\begin{aligned}
((\mu\ltimes\eta)\widetilde{\varphi})\left(\widetilde{k_1 ... k_n}\right) &= (\mu\ltimes\eta)\left(\widetilde{\varphi}\widetilde{k_1} ... \widetilde{\varphi}\widetilde{k_n}\right) \\
&= (\mu\ltimes\eta)(\varphi k_1) ... (\mu\ltimes\eta)(\varphi k_n)
\end{aligned}$$

olup $1 \leq i \leq n$ için eğer $k_i \in \mathrm{M}$ ise $(\mu \ltimes \eta)(\varphi k_i) = (\mu \ltimes \eta)(k_i, 0) = \mu k_i = (\mu * \eta) k_i$, eğer $k_i \in \mathrm{N}$ ise $(\mu \ltimes \eta)(\varphi k_i) = (\mu \ltimes \eta)(0, k_i) = \eta k_i = (\mu * \eta) k_i$ dir. Yani her iki durumda da $(\mu \ltimes \eta)(\varphi k_i) = (\mu * \eta) k_i$ dir. Elde edilen bu eşitlik yukarıdaki son işlemde yerine yazılıp işlem devam ettirilirse

$$\begin{array}{rcccl} ((\mu \ltimes \eta)\widetilde{\varphi})\left(\widetilde{k_1 \ldots k_n}\right) & = & \ldots & = & (\mu \ltimes \eta)(\varphi k_1) \ldots (\mu \ltimes \eta)(\varphi k_n) \\ & & & = & (\mu * \eta) k_1 \ldots (\mu * \eta) k_n \\ & & & = & (\mu * \eta)(k_1 \ldots k_n) \\ & & & = & \left(\widetilde{\mu * \eta}\right)\left(\widetilde{k_1 \ldots k_n}\right) \\ & & & = & \left(\widetilde{I_{\mathrm{A}} \mu * \eta}\right)\left(\widetilde{k_1 \ldots k_n}\right) \end{array}$$

sonucuna ulaşılır.

Şimdi de ters yönde ψ fonksiyonunu

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \mathrm{M} \ltimes \mathrm{N} & \longrightarrow & \frac{\mathrm{M} * \mathrm{N}}{[\![\mathrm{M} * \mathrm{N}, \mathrm{M} * \mathrm{N}]\!]_1} \\ & (m, n) & \longrightarrow & \widetilde{m + n} \end{array}$$

biçiminde tanımlayalım.

(iv) ψ bir R-cebiroid morfizmidir. Çünkü her $x, y, z \in \mathrm{A}_0$, $(m, n), (m_1, n_1) \in (\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N})(x, y)$, $(m', n') \in (\mathrm{M} \ltimes \mathrm{N})(y, z)$ ve $r \in R$ için

1.

$$\begin{array}{rcl} \psi((m, n) + (m_1, n_1)) & = & \psi(m + m_1, n + n_1) \\ & = & \widetilde{m + m_1 + n + n_1} \\ & = & \widetilde{m + n} + \widetilde{m_1 + n_1} \\ & = & \psi(m, n) + \psi(m_1, n_1) \end{array}$$

2. $[\![n, m']\!]_1 = n^{\mu m'} - nm'$, $[\![m, n']\!]_2 = {}^{\mu m} n' - mn' \in [\![\mathrm{M} * \mathrm{N}, \mathrm{M} * \mathrm{N}]\!]_1$ olduğundan $\widetilde{n^{\mu m'}} = \widetilde{nm'}, \widetilde{{}^{\mu m} n'} = \widetilde{mn'}$ olup

$$\begin{array}{rcl} \psi((m, n)(m', n')) & = & \psi\left(mm', n^{\mu m'} + {}^{\mu m} n' + nn'\right) \\ & = & \widetilde{mm' + n^{\mu m'} + {}^{\mu m} n' + nn'} \\ & = & \widetilde{mm'} + \widetilde{n^{\mu m'}} + \widetilde{{}^{\mu m} n'} + \widetilde{nn'} \\ & = & \widetilde{mm'} + \widetilde{nm'} + \widetilde{mn'} + \widetilde{nn'} \\ & = & (\widetilde{m} + \widetilde{n})\left(\widetilde{m'} + \widetilde{n'}\right) \\ & = & \left(\widetilde{m + n}\right)\left(\widetilde{m' + n'}\right) \\ & = & \psi(m, n)\, \psi(m', n') \end{array}$$

3.

$$\begin{aligned}\psi(r\cdot(m,n)) &= \psi(\widetilde{r\cdot m, r\cdot n})\\ &= \widetilde{r\cdot m + r\cdot n}\\ &= r\cdot\widetilde{(m+n)}\\ &= r\cdot\widetilde{(m+n)}\\ &= r\cdot\psi(m,n)\end{aligned}$$

dir.

(v) $(\psi, I_{\mathrm{A}}) : \mathcal{M}\ltimes\mathcal{N} \longrightarrow \frac{\mathcal{M}*\mathcal{N}}{[\![\mathrm{M}*\mathrm{N},\mathrm{M}*\mathrm{N}]\!]_1}$ bir ön-çaprazlanmış modül morfizmidir. Çünkü her $w,x,y,z\in \mathrm{A}_0$, $(m,n)\in(\mathrm{M}\ltimes\mathrm{N})(x,y)$, $a\in\mathrm{A}(w,x)$, $a'\in\mathrm{A}(y,z)$ için

1.

$$\begin{aligned}\psi({}^a(m,n)) &= \psi(\widetilde{{}^a m, {}^a n})\\ &= \widetilde{{}^a m + {}^a n}\\ &= \widetilde{{}^a m} + \widetilde{{}^a n}\\ &= {}^a\widetilde{m} + {}^a\widetilde{n}\\ &= {}^a(\widetilde{m}+\widetilde{n})\\ &= {}^a\left(\widetilde{m+n}\right)\\ &= {}^a(\psi(m,n))\end{aligned}$$

ve benzer şekilde $\psi\left((m,n)^{a'}\right) = (\psi(m,n))^{a'}$ olur.

2.

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{M}\ltimes\mathrm{N} & \xrightarrow{\ \psi\ } & \frac{\mathrm{M}*\mathrm{N}}{[\mathrm{M}*\mathrm{N},\mathrm{M}*\mathrm{N}]_1}\\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mu\ltimes\eta} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \widetilde{\mu*\eta}}\\ \mathrm{A} & \xrightarrow[I_{\mathrm{A}}]{} & \mathrm{A}\end{array}$$

diyagramı değişmelidir. Gerçekten de her $(m,n)\in\mathrm{M}\ltimes\mathrm{N}$ için

$$\begin{aligned}\left(\widetilde{\mu*\eta}\psi\right)(m,n) &= \widetilde{\mu*\eta}\left(\widetilde{m+n}\right)\\ &= (\mu*\eta)(m+n)\\ &= \mu m + \eta n\\ &= (\mu\ltimes\eta)(m,n)\\ &= (I_{\mathrm{A}}(\mu\ltimes\eta))(m,n)\end{aligned}$$

dir.

(vi) Şimdi de $\widetilde{\varphi}$ nün ve ψ nin birer izomorfizm olduğunu görelim:

Her $m \in \mathrm{M}$, $n \in \mathrm{N}$, $k_1 ... k_n \in \mathrm{M} * \mathrm{N}$, $\sum_i p_i \in \mathrm{M} * \mathrm{N}$ için

1.
$$\begin{aligned}(\psi\widetilde{\varphi})\,\widetilde{m} &= \widetilde{\psi(m,0)} \\ &= \widetilde{m+0} \\ &= \widetilde{m}\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}(\psi\widetilde{\varphi})\,\widetilde{n} &= \widetilde{\psi(0,n)} \\ &= \widetilde{0+n} \\ &= \widetilde{n}\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}(\psi\widetilde{\varphi})\left(\widetilde{k_1 ... k_n}\right) &= (\psi\widetilde{\varphi})\left(\widetilde{k}_1 ... \widetilde{k_n}\right) \\ &= (\psi\widetilde{\varphi})\,\widetilde{k}_1 ... (\psi\widetilde{\varphi})\,\widetilde{k_n} \\ &= \widetilde{k}_1 ... \widetilde{k_n} \\ &= \widetilde{k_1 ... k_n}\end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned}(\psi\widetilde{\varphi})\left(\widetilde{\sum_i p_i}\right) &= (\psi\widetilde{\varphi})\left(\sum_i \widetilde{p_i}\right) \\ &= \sum_i (\psi\widetilde{\varphi})\,\widetilde{p_i} \\ &= \sum_i \widetilde{p_i} \\ &= \widetilde{\sum_i p_i}\end{aligned}$$

olduğundan $\psi\widetilde{\varphi} = I_{\frac{\mathrm{M}*\mathrm{N}}{[\![\mathrm{M}*\mathrm{N},\mathrm{M}*\mathrm{N}]\!]_1}}$ ve her $(m,n) \in \mathrm{M} \ltimes \mathrm{N}$ için

$$\begin{aligned}(\widetilde{\varphi}\psi)\,(m,n) &= \widetilde{\varphi}\left(\widetilde{m+n}\right) \\ &= \varphi\,(m+n) \\ &= \varphi m + \varphi n \\ &= (m,0) + (0,n) \\ &= (m,n)\end{aligned}$$

olduğundan $\widetilde{\varphi}\psi = I_{\mathrm{M}\ltimes\mathrm{N}}$ dir.

Öyle ise $\widetilde{\varphi} : \frac{\mathrm{M}*\mathrm{N}}{[\![\mathrm{M}*\mathrm{N},\mathrm{M}*\mathrm{N}]\!]_1} \longrightarrow \mathrm{M} \ltimes \mathrm{N}$ bir izomorfizmdir, yani

$$\frac{\mathrm{M} * \mathrm{N}}{[\![\mathrm{M} * \mathrm{N}, \mathrm{M} * \mathrm{N}]\!]_1} \cong \mathrm{M} \ltimes \mathrm{N}$$

dir. Böylece $(\widetilde{\varphi}, I_{\mathrm{A}})$ çaprazlanmış modül morfizmi de bir izomorfizm olup

$$\frac{\mathcal{M}*\mathcal{N}}{[\![\mathrm{M}*\mathrm{N},\mathrm{M}*\mathrm{N}]\!]_1} \cong \mathcal{M}\ltimes\mathcal{N}$$

dir. □

Önerme 4.14 $(\mathcal{M}*\mathcal{N})^{\mathrm{cr}} \cong (\mathcal{M}\ltimes\mathcal{N})^{\mathrm{cr}}$

İspat: $(\mathcal{M}*\mathcal{N})^{\mathrm{cr}}$ yi elde etmek için $\frac{\mathcal{M}*\mathcal{N}}{[\![\mathrm{M}*\mathrm{N},\mathrm{M}*\mathrm{N}]\!]_1}$ yi yani $\frac{\mathrm{M}*\mathrm{N}}{[\![\mathrm{M}*\mathrm{N},\mathrm{M}*\mathrm{N}]\!]_1}$ yi $[\![\mathrm{M}*\mathrm{N},\mathrm{M}*\mathrm{N}]\!]_2$ ye, $(\mathcal{M}\ltimes\mathcal{N})^{\mathrm{cr}}$ yi elde etmek için de $\mathcal{M}\ltimes\mathcal{N}$ yi yani $\mathrm{M}\ltimes\mathrm{N}$ yi $[\![\mathrm{M}\ltimes\mathrm{N},\mathrm{M}\ltimes\mathrm{N}]\!]$ ye bölmek gerekmektedir. Bildiğimiz üzere her $x,y\in\mathrm{A}_0$ ve $x=sm=sn$, $tm=tn=sm'=sn'$, $tm'=tn'=y$ koşullarını sağlayan her $m,m'\in\mathrm{M}$, $n,n'\in\mathrm{N}$ için $[\![\mathrm{M}*\mathrm{N},\mathrm{M}*\mathrm{N}]\!]_2$ nin üreteçleri $[\![m,n']\!]_1 = m^{\eta n'}-mn'$ ve $[\![n,m']\!]_2 = {}^{\eta n}m'-nm'$, ve $[\![\mathrm{M}\ltimes\mathrm{N},\mathrm{M}\ltimes\mathrm{N}]\!]$ nin üreteçleri de $\left(m^{\eta n'},-{}^{\mu m}n'\right)$ ve $\left({}^{\eta n}m',-n^{\mu m'}\right)$ biçimindedir. Yukarıda elde ettiğimiz φ morfizmi altında $[\![m,n']\!]_1$ ve $[\![n,m']\!]_2$ nin görüntüleri

$$\begin{aligned}\varphi([\![m,n']\!]_1) &= \varphi\left(m^{\eta n'}-mn'\right)\\ &= \varphi\left(m^{\eta n'}\right)-\varphi(mn')\\ &= \left(m^{\eta n'},0\right)-(m,0)(0,n')\\ &= \left(m^{\eta n'},-{}^{\mu m}n'\right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\varphi([\![n,m']\!]_2) &= \varphi({}^{\eta n}m'-nm')\\ &= \varphi({}^{\eta n}m')-\varphi(nm')\\ &= ({}^{\eta n}m',0)-(0,n)(m',0)\\ &= ({}^{\eta n}m',-n^{\mu m})\end{aligned}$$

dir. Öyle ise φ, $[\![\mathrm{M}*\mathrm{N},\mathrm{M}*\mathrm{N}]\!]_2$ yi $[\![\mathrm{M}\ltimes\mathrm{N},\mathrm{M}\ltimes\mathrm{N}]\!]$ ye 1-1 ve örten olacak biçimde resmeder. Buna göre $\widetilde{\varphi}:\frac{\mathrm{M}*\mathrm{N}}{[\![\mathrm{M}*\mathrm{N},\mathrm{M}*\mathrm{N}]\!]_1}\longrightarrow\mathrm{M}\ltimes\mathrm{N}$ bir izomorfizm olduğundan

$$\begin{array}{rccl}\overline{\varphi}: & \frac{\frac{\mathrm{M}*\mathrm{N}}{[\![\mathrm{M}*\mathrm{N},\mathrm{M}*\mathrm{N}]\!]_1}}{[\![\mathrm{M}*\mathrm{N},\mathrm{M}*\mathrm{N}]\!]_2} & \longrightarrow & \frac{\mathrm{M}\ltimes\mathrm{N}}{[\![\mathrm{M}\ltimes\mathrm{N},\mathrm{M}\ltimes\mathrm{N}]\!]}\\ \overline{m}=\widetilde{m}+[\![\mathrm{M}*\mathrm{N},\mathrm{M}*\mathrm{N}]\!]_2 & \longmapsto & \overline{\varphi}(\overline{m})=\widetilde{\varphi}(\widetilde{m})+[\![\mathrm{M}\ltimes\mathrm{N},\mathrm{M}\ltimes\mathrm{N}]\!]=\varphi m+[\![\mathrm{M}\ltimes\mathrm{N},\mathrm{M}\ltimes\mathrm{N}]\!]\\ \overline{n}=\widetilde{n}+[\![\mathrm{M}*\mathrm{N},\mathrm{M}*\mathrm{N}]\!]_2 & \longmapsto & \overline{\varphi}(\overline{n})=\widetilde{\varphi}(\widetilde{n})+[\![\mathrm{M}\ltimes\mathrm{N},\mathrm{M}\ltimes\mathrm{N}]\!]=\varphi n+[\![\mathrm{M}\ltimes\mathrm{N},\mathrm{M}\ltimes\mathrm{N}]\!]\end{array}$$

biçiminde tanımlanan $\overline{\varphi}$ morfizmi ve böylece

$$(\overline{\varphi},I_{\mathrm{A}}):(\mathcal{M}*\mathcal{N})^{\mathrm{cr}}\longrightarrow(\mathcal{M}\ltimes\mathcal{N})^{\mathrm{cr}}$$

morfizmi de bir izomorfizm olup

$$(\mathcal{M}*\mathcal{N})^{\mathrm{cr}}\cong(\mathcal{M}\ltimes\mathcal{N})^{\mathrm{cr}}$$

dir. □

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] ALP, M., *Pullback crossed modules of algebroids*, IJST. , Vol 32, No. A1 (2008), 1-5. 3

[2] AMGOTT, S. M., *Saperable Categories*, J. Pure Appl. Algebra, **40**, (1986), 1-14. 6

[3] ARVASI, Z. *Crossed modules of algebras*, Mathematical &.Computational Applications, **9**, No:2, (2004), 173-182. 1, 19

[4] ARVASI, Z., *Crossed squares and 2-crossed modules of commutative algebras*, Theory and Applications of Categories, (7), 3 (1997), 160–181. 1

[5] ARVASI, Z. AND PORTER, T., Simplicial Crossed Resolutions of commutative algebras, *Journal of Algebra*, 181, (1996), 426-448. 1

[6] ARVASI, Z. AND PORTER, T., Freness conditions for 2-crossed modules of commutative algebras, *App. Categorical Structures*, 6, (1998), 455-471. 1

[7] BROWN, R. , *Topology and Groupoids.,* Printed by Booksurge LLC, Charleston, S.Carolina, third edition (2006), 319-320. 4, 6, 93

[8] BROWN, R. , *Coproduct of crossed P-modules, applications to second homotopy groups and to the homology of groups,* Topology, **23**, (1984), 337-345. 1

[9] BROWN, R., *Elements of Modern Topology.* McGraw-Hill Book Co., New York (1968).

1

[10] BROWN, R. , HIGGINS, P. J., AND SIVERA, R., *Nonabelian Algebraic Topology*, Version 09 Jan (2010), 72-75. 1, 2, 4, 19, 40, 93

[11] BROWN, R. AND HUEBSCHMANN, J., *Identities Among Relations,* Lowdimensional topology, (Bangor, 1979), London Math. Soc. Lecture Note Ser., Volume 48. Cambridge Univ. Press, Cambridge (1982), 153-202. 1

[12] ELLIS, G. J., *Higher dimentional crossed modules of algebras,* J. Pure Appl. Algebra, **52**, (1988) 277-282. 1

[13] GERSTENHABER, M., *On the deformation of rings and algebras*, Annual of Mathematics, **84,** (1996) 1-19. 1

[14] HIGGINS, P. J., *Notes on categories and groupoids*, Mathematical Studies, Volume 32. Van Nostrand Reinhold Co.; Reprints in Theory and Applications of Categories, No. 7 (2005) pp 1-195, London (1971). 1

[15] KASSELL, C. AND LODAY, J. L., *Extensions centrale d'algebres de Lie*, Ann. Inst. Fourier, **32**, (1982), 119-142. 1

[16] LAVENDHOMME, R. AND ROISIN, J., *Cohomologie non-abelienne de structures algebriques*, J. Algebra, **67**, (1980), 385-414. 1

[17] LICHTENBAUM, S. AND SCHLESSINGER, M. *The cotangent Complex of a Morphism*, Transection American Mathematics Society, **128,** (1970) 41-70. 1

[18] LUE, A. S.-T., *Nonabelian cohomology of associative algebra*, Mathematische Zeitschrift, **121,** (1971) 220-239. 1

[19] MACLANE, S., *Categories For the Working Mathematician,* Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1988. 6

[20] MITCHELL, B., *Rings with several objects,* Adv. in Math. **8 (1)**, (1972), 1-161. 1, 6

[21] MITCHELL, B., *Some applications of module theory to functor categories*, Bull. Amer. Math. Soc. **84**, (1978), 867-885. 1, 6

[22] MITCHELL, B., *Saperable Algebroids*, Mem. AMS. **333**, (1985) 1, 6

[23] MOSA, G. H., *Higher Dimensional Algebroids and Crossed Complexes*, University College of North Wales, (1986), 1-14. 1, 6, 14, 15, 16, 17, 19, 20

[24] PEIFFER, R. *Uber Identitaten zwischen Relationen*, Math. Ann., **121**, (1949), 67–99. 1

[25] PORTER, T., *Some Categorical Results in the theory of Crossed Modules in Commutative Algebras*, J. Algebra, **109**, (1987), 415-429. 1, 19

[26] PORTER, T., *Internal Categories and Crossed Modules in Category Theory*: Applications to Algebra Logic Topology, Proc. Gummersbach, ed K.H.Kamps, D.pumplun, W.Tholen: Springer, Lecture Notes in Math., **962** (1982) 249-255. 1

[27] PORTER, T., *Homology of commutative algebras and an invariant of Simis and Vasconcales*, Journal of Algebra, **99**, (1986), 458-465. 1

[28] REIDEMEISTER, K., *Uber Identitaten Von Relationen*, Abh. Math. Sem. Univ., Hamburg, **16**, (1949), 114-118. 1

[29] SHAMMU, N. M., *Algebraic and categorical structure of categories of crossed modules of algebras*, University of Wales, Ph.D Thesis, (1994). 1, 5, 93

[30] WHITEHEAD, J. H. C. *On Adding Relations to Homotopy Groups*, Annals of Math., **47**, (1946) 806-810. 1

[31] WHITEHEAD, J. H. C. *Combinatorial Homotopy I and II*, Bull. Amer. Math. Soc., **55**, (1949), 213-245 and 453-496. 1

ÖZGEÇMİŞ

Osman Avcıoğlu, 11 Mart 1973 tarihinde, Uşak'ın Karahallı ilçesinde doğmuştur. Lisans öğrenimine 1991 yılında Boğaziçi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde başlamış ve 1996 yılında mezun olmuştur. 1996-2003 yılları arasında çeşitli özel kurumlarda, 2003-2012 yılları arasında da MEB e bağlı çeşitli eğitim kurumlarında matematik öğretmeni olarak görev yapmıştır. 2005-2008 yılları arasında Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı Fonksiyonel Analiz Dalında yüksek lisans öğrenimini tamamlayıp 2008 yılında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı Cebir ve Sayılar Teorisi Dalında doktora öğrenimine başlamıştır.