Matematiksel Mantık, İspat Teknikleri, Fibonacci Sayısı, Pisagor Teoremi İspatı

Hakan Topkaya

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ocak, 2013

Mathematical Logic, Proof Techniques, Fibonacci Number, Proofs of Pythagoras Theorem

Hakan Topkaya

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Matematics

January, 2013

Matematiksel Mantık, İspat Teknikleri, Fibonacci Sayısı, Pisagor Teoremi İspatı

Hakan Topkaya

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç.Dr. Filiz Taşcan

Ocak, 2013

ONAY

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Hakan TOPKAYA'nın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Matematiksel Mantık, İspat Teknikleri, Fibonacci Sayısı, Pisagor Teoremi İspatı" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman **:** Doç.Dr. Filiz TAŞCAN

İkinci Danışman **: -**

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Doç.Dr. Filiz TAŞCAN

Üye : Prof.Dr. Mehmet Naci ÖZER

Üye : Doç.Dr. Ahmet BEKİR

Üye : Doç.Dr. Bahadır YANIK

Üye : Doç.Dr. Aytaç KURTULUŞ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

İspat teknikleri matematik alanında önemli bir yere sahip olup, uygulama alanları oldukça geniştir. Bu yüksek lisans tezi kapsamında matematikte ispat tekniklerinin üzerinde çalışılmıştır.

Mantığın bize sağladığı; Önermelerin ifadelerinde belirli aşamalarda çıkan sonuçların, tutarlı olup olmadığını ve ispat aşamasındaki hatalı kısımların bulunup bulunmadığını değerlendirmemizi sağlar. Öncelikle mantıksal önermelerle ilgili temel bilgiler ön hazırlık olması amacıyla kısaca verilmiştir.

İspat teknikleri dört ana başlık altında anlatılmıştır. Bunlar doğrudan ispat, ters durum ispatı, olmayana ergi(çelişki) yöntemiyle ispat, tümevarım yöntemiyle ispat teknikleridir. Bu ispat teknikleri kullanılarak bazı ispatlar verilmiştir. Sonra ispat teknikleri yardımıyla bazı özel sayıların (Euler sayısı, Pi sayısı, Altın oran) irrasyonel oldukları ispat edilmiştir.

İspat tekniklerinin yardımıyla Fibonacci sayısının nereden çıktığı, elde edilişi ve Binet formülünün tümevarım yöntemiyle ispatı verilmiştir. Sonra Altın oran ve Pascal üçgeninin Fibonacci sayısı ile ilişkisi verilmiştir.

Son olarak ispat tekniklerini kullanmadan, geometri yardımıyla Pisagor teoreminin ispatına ulaşılmıştır. Pisagor teoreminin ispatı, çeşitli geometrik şekiller üzerinde gösterilerek verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Mantıksal Önermeler, İspat Teknikleri, Fibonacci Sayısı, Pisagor Teoremi İspatı

SUMMARY

Proof techniques have an important place in mathematics and over a wide range of applications. Techniques of proof in mathematics is studied within the scope of this master thesis.

Logic is provided by us, at certain stages in the statements of the results of propositions, whether it is consistent with, and provides proof stage to evaluate whether there is faulty parts. First, the basics of logical propositions are simply meant to be preliminary.

Proof techniques are described under four main headings. These direct proof, proof of the reverse situation, contrapositive (conflict) method of proof, induction method of proof techniques. This proof techniques are some of the proofs. Then, with the help of proven techniques, some special numbers (Euler number, the number Pi, the Golden ratio) has been proved to be irrational.

Where the Fibonacci numbers with the help of techniques from the proof, the inductive method of obtaining proof of the formula is given, and Binet. Then, the relationship between the number of golden ratio and the Fibonacci Pascal's triangle is given.

Finally, using proven techniques, with the help of geometry proof of the Pythagorean theorem has been reached. Proof of the Pythagorean theorem, are showing a variety of geometric shapes.

Key Words: Propositional Logic, Proof Techniques, Fibonacci Number, Pythagorean Theorem Proving

TEŞEKKÜR

Bu çalışmam sürecinde bilgileriyle beni aydınlatan, değerli görüşlerinden faydalandığım ilgisini ve desteğini esirgemeyen Hocalarım, Sayın, Prof.Dr. Mehmet ÜREYEN, Prof. Dr. Mehmet Naci ÖZER ve Doç. Dr. Filiz TAŞCAN 'a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bu çalışma süresince bana gösterdiği sevgi, hoşgörü, iyiliğini benden esirgemeyen aileme teşekkürü bir borç bilirim.

KISALTMALAR DİZİNİ

M.Ö : Milattan Önce

M.S : Milattan Sonra

İ.Ö : İsadan Önce

SEMBOLLER DİZİNİ

Sembolün Gösterimi	Sembolün Adı
$\wedge$	**Ve**
$\vee$	**Veya**
$\neg$	**Değil**
$\forall$	**Her**
$\exists$	**En Az Bir**
$\Leftrightarrow$	**Ancak ve Ancak**
$\Rightarrow$	**İse, Gerek Şart**
$\Leftarrow$	**Ancak, Yeter Şart**
$=$	**Eşittir**
$\neq$	**Eşit Değildir**
$\equiv$	**Denktir**
$<$	**Küçük**
$>$	**Büyük**
$\leq$	**Küçük Eşit**
$\geq$	**Büyük Eşit**
$\boldsymbol{\pi}$	**Pi Sabiti**
$\boldsymbol{e}$	**Euler Sabiti**
$\boldsymbol{\Phi}$	**Altın Oran Sabiti**
$\angle$	**Açı**
Δ	**Üçgen**
$^\circ$	**Derece**
$\boldsymbol{\alpha}$	**Alfa**
$\boldsymbol{\beta}$	**Beta**
$\boldsymbol{\varphi}$	**Phi**

İÇİNDEKİLER

ÖZET……..…… V

SUMMARY…… VI

TEŞEKKÜR…….. VII

KISALTMALAR DİZİNİ……VIII

SEMBOLLER DİZİNİ……..IX

BÖLÜM . 0 GİRİŞ…… 1

BÖLÜM 1. MATEMATİKSEL MANTIK……. 2

1.1.Giriş……...2
1.2 Önermeler……3
1.3 Bileşik Önermeler……..... 3

1.3.1‘’Ve’ ya da ‘’Veya’’ Bağlacı……...…….....5

1.3.2‘’Değil’’ Bağlacı…….....6

1.3.3 ‘’İse” Bağlacı ya da ‘’Gerektirme” Bağlacı…….…… 6

1.3.4 “ Ancak ve Ancak” ya da “Eşdeğerlilik” Bağlacı…….…… 8

1.4 Denk Önermeler…….…….. 8

1.5 Çelişmez Önermeler…….……9

1.5.1 Ara Değerlerin Çıkarılması Kuralı…….. 9
1.5.2 De Morgan Kuralı…….. 9
1.5.3 Kontra Pozitiflik Kuralı……. 10
1.5.4 Dağılma Kuralları…….…….…..……11
1.5.5 Ayırma Kuralları…….……..……. 11
1.5.6 Kıyas Kuralı…… 11

1.5.7 Bir Gerektirmenin Değili……..…….…….. 11

1.6 Niceleyiciler……...…….…. 12

BÖLÜM 2. İSPAT TEKNİKLERİ…….…….... 14

2.1 Giriş…….……..14

2.2 Doğrudan İspat…….... 14

2.3 Ters Durum İspatı……..... 17

2.4 Olmayana Ergi (Çelişki) Yöntemiyle İspat ……..…… 22

2.4.1 Bazı Özel Sayıların Çelişki Yöntemiyle İspatı……...25

2.5 Tümevarım Yöntemiyle İspat Tekniği…….…….…30

BÖLÜM 3. İSPAT TEKNİKLERİ VE FİBONACCİ SAYI DİZİSİ…..……... 38

3.1 Giriş……...38

3.2 Fibonacci Sayı Dizisi…….……...39

3.3 Tavşan Problemi……..39

3.4 Rekürans Belirleme…… 40

3.5 Fibonacci Sayısı ve Binet Formülü…….40

3.6 Fibonacci Sayısı ve Altın Oran Arasındaki İlişki……..……... 43

3.7 Binom Teoremi Fibonacci Dizisi ve Pascal Üçgeni Arasındaki İlişki……. 45

3.8 Pascal Üçgeni……46

BÖLÜM 4. PİSAGOR TEOREMİNİN İSPATI ……..…….…… 52

4.1 Giriş……...52

4.2 Pisagor Teoremininin Geometri Yardımıyla İspatı…..…….....53

BÖLÜM 5. SONUÇ VE ÖNERİLER……..……. 79

KAYNAKLAR DİZİNİ …….……...80

BÖLÜM 0

GİRİŞ

İnsan aklının bir ürünü olan matematik, bir bilim alanı olarak, insanlık tarihi kadar eskidir. Matematik, başlangıçtan günümüze kadar doğrultusundan ve tutarlığından hiçbir sapma yapmadan sürekli gelişen bir bilim alanı olmuştur; Aynı zamanda bütün bilimlerin gelişmesine öncülük etmiştir. Uygarlığın ulaştığı bugünkü matematiğin önemi, rolü açıklanmaya gerek duyulmayacak kadar açıktır. Matematik, kendi içinde tutarlı, çelişkilerden arındırılmış, başka hiçbir bilim alanında olmayacak kadar sarsılmaz bir yapıya sahiptir. Matematiği bu derece önemli yapan, sağlam kılan şey, temelinde akıl yürütmeyle çıkartılan evrensel kuralların olmasıdır; ya da bir başka deyişle, kesin kurallar içinde aklın süzgecinden geçmiş olmasıdır (Özer, 1998; s.3).

İspat kavramını matematiğe Antik Yunanlılar getirmiştir. İspatın ilk kullanımı genellikle M.Ö 6. yüzyılda yaşamış Miletli Thales'e dayandırılır. M.Ö 5. yüzyılda yaşayan Pisagor, bir veya birkaç önermeden mantık yoluyla yeni önermeler üretmek anlamına gelen dedüksiyon yöntemini kullanmış, M.Ö 4. yüzyılda yaşayan Hippocrates ''Elements of geometry'' kitabında teoremleri kendinden öncekilerden çıkarılacak biçimde mantıksal sıraya koymuştur. M.Ö 3. Yüzyılda yaşayan Euclid ise aksiyomlara dayalı ispat kavramını getirmiştir. Bugün aslında pür matematiğin bütün dalları aksiyomatik sisteme dayanmaktadır (Bloch, 2011).

Pisagor'un, milattan önce 596 yıllarında doğduğu tahmin ediliyor. Doğumu gibi ölüm tarihi de kesin değildir. Bugünkü adıyla bilinen Sisam Adasında 596 veya 582 yılında doğmuştur. Hayatı hakkında çok az bilgiler vardır. Bu bilgilerin çoğu da kulaktan kulağa söylentiler biçiminde gelmiştir. Fakat, önceleri doğduğu yer olan Sisam Adasında okuduğu daha sonraları Mısır ve Babil'e giderek oralarda bilgisini ilerlettiği ülkesine geri dönerek dersler verdiği söylenir. Kendisinden önceki bilgilerin tümünü öğrenmiş ve derlemiştir.

Bu çalışmada ise; Mantıksal önermeler, ispat teknikleri, Fibonacci dizisi ve Fibonacci dizisinin elde edilişi, Pisagor teoreminin ispatı ele alınacaktır.

BÖLÜM 1

MATEMATİKSEL MANTIK VE ÖNERMELER

1.1 GİRİŞ

Mantığın konusu önermelerdir. Akıl yürütme "öncül önermelerden yargı çıkarma "hipotezden hüküm çıkarma" olarak ifade edilebilir. Mantık bilimciler akıl yürütmeyle doğru bilgi üretmenin bilimsel yollarını tümdengelim ve tümevarım diye ikiye ayırırlar. Gerçeğe varmak amacıyla aklın uyması gereken genel düşünce yasalarını ve işlemlerini araştıran Aristoteles(İ.Ö. 384-322), tümdengelimi esas alarak, bugün klasik mantık dediğimiz mantık türünün temellerini atmıştır. İki bin yılı aşkın bir süre aklın yoluna egemen olan bu mantık türü, ortaçağ sonlarına doğru, yeni bilgi üretiminde tümdengelimin tek başına yeterli olamayacağı, tümevarımın da önemli olduğu görüşünün yaygınlaşmaya başlamasıyla yeni bir ivme kazanmıştır (Özer, 1998; s.3).

18. yüzyıla girildiğinde, Francis Bacon (1561-1626) ile başlayan tümdengelime karşı çıkış ve tümevarımın öne çıkarılması, matematikçilerin konuya ilgi duymaya başlamalarıyla yeni bir döneme girmiştir. Alman matematikçilerinden G. Wilhelm Von Leibniz (1646-1716) ile başlayan yeni yaklaşım, yine Alman matematikçi Friedrich L.G. Frege (1848-1925) in niceleyicileri ve değişkenleri simgelerle göstermesiyle matematiği tamamen mantıksal bir temele dayandırma çabaları hem mantığın gelişimini hızlandırmış hem de matematiğe yeni bir anlayış kazandırılmıştır. Böylece bu dönemde, De Morgan (1806-1871), G. Boole (1815-1864), B. Russel (1872-1970) ile geliştirilen ve simgesel akıl yürütme denilen yöntemle matematiğe dönüşen mantık modern mantık yada sembolik mantık, matematiksel mantık adını almıştır. Matematik ve mantığın tarihsel gelişimleri pek çok farklılık göstermesine rağmen, bugün bu iki bilim alanını kesin çizgilerle birbirlerinden ayırma olanağı yoktur. Önceleri matematiğin mantıksal bir temele dayandırılması biçiminde başlayan gelişmeler, sonradan mantığın matematiğe dönüşmesine yol açmıştır. Dolayısıyla bu iki alan birbirlerinin içine girmiştir. Yine de bugün, Klasik Mantık, Felsefe bilim alanı ve Modern Mantık da Matematik bilim alanı içinde düşünülür (Özer, 1998; s.4).

Biz burada önermeleri, önerme işlemlerini, kullanılan simgeleri ele alacağız. Ayrıca önermelerin matematikteki yerini ve önemini inceleyeceğiz.

1.2 Önermeler

Tanım1.1 Doğru yada yanlış ama bunlardan sadece bir tanesi olabilen kesin hüküm bildiren ifadelere önerme denir. Önermeler $p, q, r, \ldots$ gibi harflerle gösterilir (Çoker vd., 2009).

Örnek 1. 1 Aşağıdaki ifadelerin önerme olup olmadığını inceleyelim.

(a) 2 asal sayıdır.

(b) Her n doğal sayısı için $2^n + 1$ asaldır.

(c) Düzlemde bir üçgenin iç açıları toplamı 180 derecedir.

(d) 4 den büyük her çift sayı iki asal sayının toplamıdır (Goldbach, 1742).

(e) Yarın pikniğe gidelim.

Burada (a) ve (c) doğru birer önermedir. $n = 3$ için $2^n + 1 = 9$ asal olmadığından (b) yanlış bir önermedir. (d) ifadesi 1742 de Rus matematikçi Christian Goldbach tarafından ortaya atılmış bir iddiadır. Henüz doğru olup olmadığı ispatlanamamıştır. Ya doğru ya yanlış olacağından bir önermedir. (e) kesin bir hüküm bildirmediğinden bir önerme değildir.

Tanım 1. 2 Doğruluk değeri değişkenlere göre değişen önermelere açık önerme denir. Açık önermeler değişken sayısına göre $p(x)$, $p(x, y), p(x, y, z), \ldots$ gibi gösterilir (Bilgiç, 2011).

Örnek 1. 2 x reel sayı olmak üzere "$x^2 + x = 0$" olsun. $x = 0, x = -1$ için önerme doğrudur. Yani $p(0)$ ve $p(1)$ doğrudur. Aksi halde önerme yanlıştır.

1.3 Birleşik Önermeler

Bu kısımda önermeler üzerinde ve, veya, değil(olumsuz), ise gibi işlemleri tanımlayıp verilen önermelerden yeni önermeler elde edeceğiz. Bu işlemlere genel olarak bağlaç adını vereceğiz. Bağlaçlar ile elde edilen önermelerin doğruluk değerini, doğruluk tablosu denilen tablolar yardımıyla göstereceğiz. Burada bir önermenin doğruluk tablosunu aşağıdaki gibi verebiliriz (Bilgiç, 2011).

p
D
Y

p ve q iki önermenin doğruluk tablosunu;

p	q
D	D
D	Y
Y	D
Y	Y

olarak gösterebiliriz. p, q, r üç önermenin doğruluk tablosunu ise aşağıdaki tabloda olduğu gibi gösterebiliriz.

p	q	r
D	D	D
D	D	Y
D	Y	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	D	Y
Y	Y	D
Y	Y	Y

1.3.1 "Ve" ya da "Veya" Bağlaçları

Tanım 1. 3 p, q iki önerme olsun. "p ve q" önermesi bu önermelerden her ikisi de doğru iken doğru; aksi halde yanlış olan önermedir. Buna iki önermenin kesişimi de denir ve $p \wedge q$ ile gösterilir. "p veya q" önermesi de bu önermelerden en az birisi doğru iken doğru; aksi halde yanlış olan önermedir. Buna iki önermenin birleşimi de denir. $p \vee q$ ile gösterilir (Çallıalp, 2005).

Önermeleri ve bunlara karşılık gelen birleşik önermelerin alacağı değerleri tabloda gösterelim. Burada doğru için D veya 1 sembolünü, yanlış içinde Y veya 0 sembolünü kullanabiliriz. Bu tablolara da doğruluk tablosu denir.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
D	D	D	D
D	Y	Y	D
Y	D	Y	D
Y	Y	Y	Y

Tablo1. 1 $p \wedge q$ ile $p \vee q$ harf sembolünü kullanarak gösterilen doğruluk tablosu

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

Tablo 1.2 $p \wedge q$ ile $p \vee q$ sayı sembolünü kullanarak gösterilen doğruluk tablosu

1.3.2 “Değil” Bağlacı

Tanım 1. 4 Bir p önermesi doğru iken yanlış; yanlış iken doğru olan önermeye p nin değili veya olumsuzu denir. p', $\sim p$, $\neg p$, $\bar{p}$ sembollerinden birisi ile gösterilir (Çallıalp, 2005).

Değil bağlacının doğruluk tablosu ise

p	$\neg p$
D	Y

olarak gösterilir.

Örnek 1. 3

(a) "p : $2 < 3$ " doğruluk önermesinin olumsuzu "$\neg p$: $2 \geq 3$ önermesidir.

(b) "p :Bir hafta 7 gündür." doğruluk önermesinin olumsuzu "$\neg p$: bir hafta 7 gün değildir."

(c) "p : $5 + 4 = 9$" doğruluk önermesinin olumsuzu "$\neg p$: $5 + 4 \neq 9$" önermesidir.

1.3.3 “İse” Bağlacı ya da “Gerektirme” Bağlacı

p ve q iki önerme olsun. Eğer p önermesi q önermesini gerektiriyorsa, bu birleşik önerme "$p \implies q$" şeklinde gösterilir. "p ise q" diye okunur. $p \Rightarrow q$ önermesi p nin doğru q nun yanlış olduğu durumda yanlış, diğer durumlarda ise doğrudur. Bu birleşik önermenin doğruluk tablosu ise aşağıdaki gibidir (Çallıalp, 2005).

p	q	$p \implies q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	D

Tablo 1.3

$p \Longrightarrow q$ önermesinde p ye hipotez q ya da sonuç adı verilir. $p \Longrightarrow q$ önermesi aşağıdaki ifadelerden biri şeklinde okunur.

"p ; q önermesini gerektirir."

"p ise q dur."

"p ; q için bir yeter koşuldur."

"q ; p için bir gerek koşuldur."

Örnek 1. 4 Doğru önerme doğru önermeyi gerektirir.

p : "$2 = 2$" ve q : "$10 = 10$" ile tanımlanan doğru önermelerdir. p önermesindeki eşitliğin her iki tarafını 5 ile çarparsak "$10 = 10$" sonucunu buluruz ki buda doğru olan q önermesini verir.

Örnek 1. 5 Doğru önerme yanlış önermeyi gerektirmez.

p : Ankara Türkiye'nin başkentidir.

q : Türkiye Amerika kıtasındadır.

p önermesi varken q önermesinin varlığı sonucuna ulaşılmaz. D $\Longrightarrow$ Y , Y dir.

Örnek 1.6 Yanlış önerme doğru önermeyi gerektirebilir.

p : Türkiye Amerika kıtasındadır.

q : Ankara Türkiye'nin başkentidir.

p önermesi yanlış olduğu halde q önermesinin yanlış olmasına engel değildir. " Türkiye Amerika Kıtasında $\Longrightarrow$ Ankara Türkiye'nin Başkentidir." gerektirmesi var olabilir.

Örnek 1.7 Yanlış önerme yanlış önermeyi gerektirebilir.

"$p : 2 = 5$" ve "$q : 4 = 10$" önermelerinin her ikisi de yanlış olduğu halde; p önermesinde eşitliğin her iki yanını 2 ile çarparsak q önermesi elde edilir.

$q \Longrightarrow p$ önermesine $p \Longrightarrow q$ önermesinin karşıtı denir.

1.3.4 " Ancak ve Ancak" ya da "Eşdeğerlilik" Bağlacı

p ve q iki önerme olmak üzere; $(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)$ birleşik önermesi kısaca "$p \Leftrightarrow q$" ile gösterilir. "p ancak ve ancak q" ya da "p, q önermesine eşdeğerdir." diye okunur. Bu birleşik önermenin bir başka okunuşu da "p için gerek ve yeter koşul q önermesidir." şeklindedir. "$p \Leftrightarrow q$" doğruluk tablosu tablo 1.4 de verilmiştir (Özer,1998).

p	q	$p \Longrightarrow q$	$q \Longrightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
D	D	D	D	D
D	Y	Y	D	Y
Y	D	D	Y	Y
Y	Y	D	D	D

Tablo 1.4

Örnek 1.8 "Bir asal sayı çifttir ancak ve ancak bu asal sayı 2 dir. " önermesinin doğru olduğunu gösteriniz.

p : " n sayısı asal ve çifttir."

q : " $n = 2$ dir. "

$p \Longrightarrow q$ nun doğru olduğu açıktır aynı şekilde $q \Longrightarrow p$ de doğru olduğu açıktır. O halde $p \Leftrightarrow q$ doğrudur.

1.4 Denk(Eşdeğer) Önermeler

Tanım 1.5 Aynı önermelerden oluşan iki bileşik önerme A ve B olsun. Eğer bileşen önermelerinin aynı doğruluk değerleri için A ve B nin doğruluk değerleri eşit oluyorsa, A ve B ye eşdeğer önermeler ya da denk önermeler denir. Ve bu durumda $A \equiv B$ olarak gösterilir (Özer, 1998).

Örnek 1.9 Herhangi p, q önermeleri verilsin. $(p \implies q) \equiv [(\neg p) \vee q]$ olduğunu gösteriniz.

Bu eşdeğerliliği doğruluk tablosu ile gösterelim;

p	q	$p \implies q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	D

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
D	D	Y	D
D	Y	Y	Y
Y	D	D	D
Y	Y	D	D

Tablo 1.5 $(p \implies q) \equiv [(\neg p) \vee q]$ ifadesinin doğruluk tablosudur.

$(p \implies q)$ nun doğruluk değeri ile $(\neg p) \vee q$ doğruluk değerinin denk olduğu görülür.

Örnek 1.10 "$1 + 1 = 2$" önermesi ile " Ankara Türkiye'nin başkentidir." önermelerinden her ikisinin doğruluk değeri 1 olduğundan, bu önermeler mantıkça denk iki önermedir (Akkaş vd., 2009).

1.5 Çelişmez Önermeler (Totolojiler)

Bir bileşik önerme, kendini oluşturan önermelerin her bir doğruluk değeri için daima doğru oluyorsa, bu birleşik önermeye çelişmez önerme veya totoloji denir. Bu önerme daima yanlış oluyorsa da çelişki denir (Özer, 1998).

1.5.1 Ara Değerlerin Çıkarılması Kuralı

p önermesi ile bu önermenin olumsuzu olan $\neg p$ önermesi verildiğinde $\neg p \vee p$ bileşik önermesi bir totolojidir (Bilgiç, 2011).

1.5.2 De Morgan Kuralları

p ve q iki önerme olsun. Aşağıdaki önermeler çelişmez önermelerdir.

1.1 Önerme

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$$

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$$

bileşik önermeleri doğrudur (Bilgiç, 2011).

1.1 İspat

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \wedge q)$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$	p $\vee$ q	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
D	D	Y	Y	D	Y	Y	D	Y	Y
D	Y	Y	D	Y	D	D	D	Y	Y
Y	D	D	Y	Y	D	D	D	Y	Y
Y	Y	D	D	Y	D	D	Y	D	D

Tablo 1.6 De Morgan kurallarının doğru olduğunu gösteren doğruluk tablosudur.

olduğu görülür.

1.5.3 Kontrapozitiflik Kuralı

p ve q iki önerme olmak üzere;

$$(p \implies q) \Leftrightarrow (\neg q) \implies (\neg p)$$

bileşik önermesi bir çelişmez önermedir. Burada $(p \implies q)$ önermesi ile $(\neg q) \implies (\neg p)$ önermesi eşdeğerdir. $(\neg q) \implies (\neg p)$ önermesine $(p \implies q)$ önermesinin kontrapozitifi denir. Örneğin "bir dizi yakınsak ise limiti tektir." gerektirmesinin kontrapozitifi "dizinin limiti tek değil ise dizi yakınsak değildir." gerektirmesidir. O halde bir teoremin kontrapozitifini ispatlamak ile kendisini ispatlamak eşdeğerdir (Bilgiç, 2011).

$$(p \implies q) \Leftrightarrow (\neg q) \implies (\neg p)$$

önermesinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Longrightarrow q$	$\neg q \Longrightarrow \neg p$	$(p \Longrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q) \Longrightarrow (\neg p)$
D	D	Y	Y	D	D	D
D	Y	Y	D	Y	Y	D
Y	D	D	Y	D	D	D
Y	Y	D	D	D	D	D

Tablo 1.7. $(p \Longrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q) \Longrightarrow (\neg p)$ doğruluk tablosu

1.5.4 Dağılma Kuralları

p, q, r önermeler olmak üzere; aşağıdaki dağılma kuralları olarak bilinen önermeler birer totolojidir (Bilgiç, 2011).

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

1.5.5 Ayırma Kuralları

$$[p \wedge (p \Longrightarrow q)] \Longrightarrow q$$

bileşik önermesi bir totoloji olup bu önermeye ayırma kuralı denir. Örneğin "Hava soğuk" ve "Hava soğuk ise dışarı çıkmayacağım" önermelerini ele alalım. Her iki önermede doğru ise "Dışarı çıkmayacağım" olacaktır.

1.5.6 Kıyas Kuralı

p, q, r birer önerme olmak üzere;

$$[(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow r)] \Longrightarrow (p \Longrightarrow r)$$

çelişmez önermesine kıyas kuralı denir. Örneğin "Hava soğuk ise dışarı çıkmam." ve "Dışarı çıkmaz isem evde otururum." gerektirmelerinden "Hava soğuk ise evde otururum" sonucu çıkar (Bilgiç, 2011).

1.5.7 Bir Gerektirmenin Değili

$(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \Longrightarrow q)$ totolojisi ve De Morgan kuralı kullanarak,

$$\neg(p \Longrightarrow q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge (\neg q)$$

sonucu elde edilir. O halde bir gerektirmenin değili yeni bir gerektirme olamaz. Örneğin "Hava soğuksa bisiklete binmem" önermesinin değili "Hava soğuk ve bisiklete biniyorum." önermesidir.

Örnek 1.12 "Çalışırsam başarırım." önermesinin değilini bulunuz.

Verilen cümleyi iki önermenin bileşkesi şeklinde yazalım.

p : Çalışırım

q : Başarırım

bu ifade $p \Longrightarrow q$ şeklinde yazabiliriz. $\neg(p \Longrightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge (\neg q)$ olduğundan verilen önermenin değili "çalışırım ve başaramam" şeklinde olmalıdır.

1.6 Niceleyiciler

Önermelerdeki "bütün", "her", "en az bir", "bazı", "hiçbir" gibi kelimelere niceleyiciler denir. Bunlara "Bütün öğrenciler bayandır" , "Sıfırdan büyük en az bir tamsayı vardır" önermelerini örnek olarak verebiliriz (Bilgiç, 2011).

Şimdi bir $p(x)$ açık önermesi verilsin.

"Bütün x ler için $p(x)$ doğrudur." yerine kısaca $\forall x,\ p(x)$

"En az bir x için $p(x)$ doğrudur." yerine kısaca $\exists x,\ p(x)$

olarak yazabiliriz. Burada $\forall$ niceleyicisine evrensel niceleyici, $\exists$ niceleyicisine varlıksal niceleyici denir.

Örnek 1. 12 " $\forall x$ reel sayısı için $x^2 - x + 2 \neq 0$" önermesinin doğru olduğunu gösteriniz.

$x^2 - x + 2 = 0$ denkleminin diskriminantı $\Delta = b^2 - 4ac = -7 < 0$ olup bu denklemin reel kökü yoktur.

Örnek 1.13 "$\forall x$ tamsayısı için $|x| = x$" önermesinin yanlış olduğunu gösteriniz.

$x = -2$ olarak alındığında $|-2| \neq -2$ olur. Buda önermenin yanlış olduğunu gösterir.

Örnek 1.14 "$\exists x$ reel sayısı için $x^2 = x$" önermesi doğru olduğunu gösteriniz.

$x = 0$ olarak aldığımızda, $0^2 = 0$ olduğu görülür. Böylece; $x^2 = x$ önermesinin doğru olduğu kolayca anlaşılır.

Örnek 1.15 "$\exists n$ doğal sayısı için $3(n + 2)$ asaldır." Önermesinin yanlış olduğunu gösterin.

$3(n + 2)$ ifadesinin 3 den büyük ve 3 ün katı olduğundan, asal olmadığı anlaşılır. Örneğin $n = 0$ yerine yazarsak, $3(n + 2) = 3(0 + 2) = 6$ olur. Böylece bu önermenin yanlış olduğu kolayca anlaşılır.

BÖLÜM 2

İSPAT TEKNİKLERİ

2.1 Giriş

İspata gerek duymamızın birçok nedeni vardır. Ama esas nedeni, bazı şeylerin doğruluğundan emin olmamız gerektiğidir. Matematik, keyfi olarak seçilmiş aksiyomlardan, teoremler türettiğimiz bir şey değildir. Aksiyomları kullanarak teoremleri, bu teoremleri kullanarak yeni teoremleri türetiriz. Sezgilerimiz bize neyin önemli olduğu, bir sonraki adımın ne olabileceği… v.b gibi şeyleri söyler. İspatları sezgisel olarak doğru olduğuna inandığımız ifadenin gerçekten doğru olduğunu tasdik etmek için kullanırız. İspatların bir başka kullanım amacı da bazı şeylerin neden doğru olduğunu açıklamak içindir (Bloch, 2011).

İspat teknikleri doğrudan ispat, ters durum ispatı, olmayana ergi (çelişki) yöntemiyle ispat, tümevarım yöntemiyle ispat olmak üzere 4 ana başlık altında toplayabiliriz. Şimdi bu teknikleri açıklayıcı örnekleriyle beraber inceleyelim.

2.2. Doğrudan İspat:

En bilinen ve kolay ispat tekniklerinden biridir. Bu ispat tekniğinde, bize teorem veya önerme içinde verilen şartlar aynen alınıp gösterilmek istenen sonuca ulaşılmaya çalışılır. Yani bilinen veya bize teoremde verilen bilgileri kullanarak istenilen sonuca ulaşmaya çalışacağımız tekniktir. Bu teknik genel olarak;

$$p \implies q \quad (p \text{ ise } q) \tag{2.1}$$

şeklinde gösterilir. p hipotezinin (sol tarafın) doğru olduğu kabul edilerek, (sağ tarafın) q doğruluğu elde edilir.

Önerme 2.1: Bir tek ve bir çift tamsayının toplamı tektir (Bloch, 2011).

İspat : Önce m ve n gibi iki tane tamsayı ele alalım. Açıklamada da belirtildiği gibi bunlardan birinin tek, diğerinin çift olduğunu kabul ederek, toplamlarının tek olduğunu göstereceğiz. Önce 2.1 önermesini önermeler mantığına göre düzenlersek,

p : " m tek , n çift bir tam sayıdır."

q : " $m + n$ tektir."

$p \Rightarrow q$: " m tek, n çift bir tamsayı ise, $m + n$ toplamı tektir." biçimine dönüşür.

Şimdi $p \Rightarrow q$ koşullu önermesini gösterelim.

a ve b birer tam sayı olmak üzere; $m = 2a + 1, n = 2b$ olsun.

$p \Rightarrow q$

$m = 2a + 1, n = 2b \Rightarrow m + n = 2a + 1 + 2b$

$$m + n = 2a + 2b + 1$$
$$m + n = 2(a + b) + 1, \quad a + b = k, (k \epsilon \mathbb{Z})$$
$$m + n = 2k + 1$$

olduğundan, $m + n$ tektir. İspat tamamlanır.

Önerme 2.2 : Bir tamsayı 6 ile bölünebilirse, 2 katı 4 ile bölünebilir (Bloch, 2011).

İspat : Bir a tamsayısını ele alalım. 6 ile bölünebildiğini kabul edelim. O zaman k bir tamsayı olmak üzere; a = 6k şeklinde yazılır. Yani 6 ile bölünebiliyorsa k gibi bir tamsayının 6 katı olacaktır. Önerme 2.2 yi önermeler mantığına göre düzenlersek,

p: " a tamsayısı 6 ile tam bölünür."

q: " 2a tamsayısı 4 ile tam bölünür."

$p \Rightarrow q$: " a tamsayısı 6 ile tam bölünebiliyor ise, 2a tamsayısı 4 ile tam bölünür." biçimine dönüşür.

Bu durumda önermemiz $p \Longrightarrow q$ koşullu önermesini ispatlamaya dönüşmüş olur.

O halde;

$a = 6k$, $(k \epsilon \mathbb{Z})$ alalım.

Bu durumda,

$2a = 2(6k)$

$= 12k$

$= 4(3k)$, ($k \epsilon \mathbb{Z}$ olduğundan $3k \epsilon \mathbb{Z}$ dir. $m \epsilon \mathbb{Z}$ olmak üzere; $m = 3k$ dersek)

$= 4m$

elde edilir. Böylece $2a = 4m$ bulunur. $4m$, 4 ün bir tam katı olduğundan $2a$, 4 ile tam bölünür. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 2.3: $\tan(2\alpha) = \frac{2tan\alpha}{1-tan^2\alpha}$ olduğunu gösteriniz.

İspat: Önerme 2.3 trigonometrik bir ifadedir. İspatımızı trigonometrik eşitlik yardımıyla yapalım.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{tan\alpha+tan\beta}{1-tan\alpha tan\beta}$$

eşitliğini kullanalım. Önerme 2.3 ü önermeler mantığına göre düzenlersek;

p:" α, β birer açı olmak üzere; $\alpha = \beta$ dır."

q:" $\tan(2\alpha) = \frac{2tan\alpha}{1-tan^2\alpha}$ dır."

$p \Rightarrow q$:" α, β birer açı olmak üzere; $\alpha = \beta$ ise, $\tan(2\alpha) = \frac{2tan\alpha}{1-tan^2\alpha}$ olur."

biçimine dönüşür.

Bu durumda önermemiz $p \Rightarrow q$ koşullu önermesini ispatlamaya dönüşmüş olur.

α, β birer açı olmak üzere; $\tan(\alpha + \beta) = \frac{tan\alpha+tan\beta}{1-tan\alpha.tan\beta}$ eşitliğinde β yerine α yazarsak;

$$\alpha = \beta \;\Rightarrow\; \tan(\alpha+\alpha) = \frac{tan\alpha + tan\alpha}{1 - tan\alpha.tan\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \tan(2\alpha) \quad = \frac{2tan\alpha}{1 - tan^2\alpha}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Bu tür önermeleri doğrudan ispat tekniğini kullanarak görüldüğü gibi ispatlayabiliriz. Bu ispat tekniği kolay olmasına karşın bize her zaman yardımcı olmayabilir. Mesela "Karesi çift olan bir sayının kendisi de çifttir" şeklindeki bir önermenin ispatını bu yöntemle vermek oldukça güçtür. Bu sebeple başka ispat yöntemleri geliştirilmiştir. Sıradaki ispat tekniğini açıkladıktan sonra bu soruya tekrar dönüp, ispatın nasıl yapılabileceğini gösterelim.

2.3 Ters Durum İspatı :

Bu ispat genel olarak p ise q yu göstermek yerine q değil ise p nin de olmayacağını göstermeye dayanır.

$$p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$$

yani bu ifadeyi sözle açıklamak istersek; Bize verilen kabullerden yararlanarak istenileni bulmak yerine, istenilenin olmaması durumunda, kabullerimizin de olmayacağını göstermeye dayanan bir ispat tekniğidir. Bu tekniği örnekler vererek açıklayalım.

Önerme 2.4: Karesi çift olan bir tamsayının kendisi de çifttir.

İspat: Burada p dediğimiz olay sayımızın karesinin çift olması, q dediğimiz olay da bu sayının kendisinin çift olmasıdır. Önerme 2.4 ü önermeler mantığına göre düzenlersek;

p: " n^2 çift bir tamsayıdır."

q: " n çift bir tamsayıdır."

$p \Rightarrow q$: " n^2 çift bir tamsayı ise, n çift bir tamsayıdır."

Biçimine dönüşür.

$p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$ denkliğini kullanırsak;

$\neg p$: " n^2 tek bir tamsayıdır."

$\neg q$: " n tek bir tamsayıdır."

$\neg q \Rightarrow \neg p$: " n tek bir tamsayı ise, n^2 tek bir tamsayıdır."

$\neg q \Rightarrow \neg p$ biçimine dönüşür.

O halde; $n = 2a + 1$, $(a \in \mathbb{Z})$ alalım.

Bu durumda; n^2 ifadesinde, $n = 2a + 1$ yazarsak,

$$n^2 = (2a + 1)^2$$

$$= 4a^2 + 4a + 1$$

$$= 4(a^2 + a) + 1$$

$a^2 + a \in \mathbb{Z}$ dir. $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere; $k = a^2 + a$, dersek;

$$= 4k + 1$$

$$= 2(2k) + 1$$

$k \in \mathbb{Z}$ dir. $m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere; $m = 2k$, dersek;

$$= 2m + 1$$

olur.

$n^2 = 2m + 1$ ifadesi tek bir tamsayıdır. Bu da bize n^2 nin tek olduğunu gösterir. Öyleyse n sayısı eğer tek ise karesinin de mutlaka tek olması gerektiğini

gösterdiğimizden, karesi çift ise sayının kendisinin de çift olması gerekir. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 2.5: Eğer bir x sayısı pozitif ise ardışığı da pozitiftir.

İspat: Bizden önermede $x > 0$ ise $x + 1 > 0$ olduğunu göstermemizi istiyor. Ters durum ispat tekniği ile bunu ispatlayalım. Önerme 2.5 i önermeler mantığına göre düzenlersek;

p: " $x > 0$ dır."

q: " $x + 1 > 0$ dır."

$p \Rightarrow q$: " $x > 0$ ise, $x + 1 > 0$ dır."

biçimine dönüşür.

$p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$, denkliğini kullanalım.

$\neg p$: " $x \leq 0$ dır."

$\neg q$: " $x + 1 \leq 0$ dır."

$\neg q \Rightarrow \neg p$: "$x + 1 \leq 0$ ise, $x \leq 0$ dır."

bu durumda önermemiz $\neg q \Rightarrow \neg p$ koşullu önermesini ispatlamaya dönüşmüş olur.

O halde;

$x + 1 \leq 0 \Rightarrow x + 1 - 1 \leq 0 - 1$

$\Rightarrow x \leq -1$

$\Rightarrow x \leq -1 < 0$, ($-1 < 0$ olduğu açıktır.)

$\Rightarrow x \leq 0$

$x + 1 \leq 0$ ise, $x \leq 0$ şartını sağladığını gösterdik. Böylece, $x > 0$ olduğunda $x + 1 > 0$ olduğunu da göstermiş olduk. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 2.6: xy çarpımı bir tek tam sayıdır ancak ve ancak x ve y nin her ikisi de tek tam sayıdır.

İspat: Ancak ve ancak türünden ifade edilen önermelerde, önermeyi iki taraflı ispatlamalıyız. Önce sol tarafın doğruluğunu kabul edip sağ tarafı gösterelim. Yani, xy çarpımı tek tamsayı ise x ve y nin her ikisinin de tek tamsayı olması gerektiğini görelim. Sonra sağ tarafın doğru olduğunu kabul edip, sol tarafın doğruluğunu gösterelim. Yani, x ve y nin tek tamsayı olduğunu kabul edip, xy çarpımının doğru olduğunu gösterelim.

$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$, denkliğini kullanalım.

Öncelikle $p \Rightarrow q$ ifadesini gösterelim. Burada $p \Rightarrow q$ doğruluğunu göstermek yerine; $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$ denkliğini kullanıp, $\neg q \Rightarrow \neg p$ önermesini göstermek daha kolaydır.

Önerme 2.6 yı önermeler mantığına göre düzenleyelim.

p : " xy çarpımı tek tamsayıdır."

q : " x ve y tek tamsayıdır."

$p \Rightarrow q$: "xy çarpımı tek tamsayı ise, x ve y tektir."

$\neg p$: " xy çarpımı çift tamsayıdır."

$\neg q$: " x veya y tek tamsayı değildir."

x veya y tek tamsayı değil ise, üç durumdan bahsedilir. Birinci durum x çift bir tamsayı, y tek bir tamsayı olabilir. İkinci durum x tek bir tamsayı, y çift bir tamsayı olabilir. Üçüncü durum x çift bir tamsayı, y çift bir tamsayı olabilir. Burada bu üç durumdan birini seçerek ispat yapılır.

Birinci durumu seçerek ispat yapalım.

O halde;

x , y tamsayılarından bir tanesini tek bir tanesini çift seçersek; $x = 2a$, $y = 2b + 1$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ olur.

$\neg q \Rightarrow \neg p$: " x veya y tek tamsayı değil ise, xy çift bir tamsayıdır."

Bu durumda önermemiz $\neg q \Rightarrow \neg p$ koşullu önermesini ispatlamaya dönüşmüş olur.

O halde;

$x = 2a$, $y = 2b + 1$, $(a, b \in \mathbb{Z})$ alırsak;

bu durumda;

$$xy = (2a)(2b + 1)$$

$$= 4ab + 2a$$

$$= 2(2ab + 1)$$

$2ab + 1 \in \mathbb{Z}$ dir. $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere; $k = 2ab + 1$, dersek;

$$= 2k$$

$$xy = 2k$$

elde edilir. Bu durumda, xy çarpımı çift olur. Böylece ispatın birinci bölümü tamamlanır.

Şimdide önermemin ikinci kısmı olan $q \Rightarrow p$ koşullu önermesini ispatlayalım. x ve y nin her ikisinin de tek bir tamsayı olduğunu kabul edip, xy çarpımının tek bir tamsayı olduğunu gösterelim.

a, b birer tamsayı olmak üzere;

$x = 2a + 1$, $y = 2b + 1$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ alalım.

$x = 2a + 1$, $y = 2b + 1$ $\Rightarrow xy$ çarpımı tek tamsayıdır.

$$= (2a + 1)(2b + 1)$$

$$= 4ab + 2a + 2b + 1$$

$$= 2(2ab + a + b) + 1$$

$m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $m = 2ab + a + b$ dersek,

$$= 2m + 1$$

olur.

xy çarpımının tek bir tamsayı olduğu görülür. Her iki yönden de önermenin doğruluğunu gösterdik. Böylece ispat tamamlanır.

Bu örnekten de görüleceği üzere bazı önermeleri ispatlamak için birden fazla ispat tekniğini kullanmamız gerekebiliyor. Her ispat tekniğinin kendine göre getirdiği kolaylıklar bulunmaktadır.

Şimdide başka bir ispat tekniğini anlatalım.

2.4 Olmayana Ergi (Çelişki) Yöntemiyle İspat:

Bu ispat tekniğinde hipotez aynen alınırken, hükmün bir parçası olumsuz alınır ve bir çelişki ortaya çıkarılır. O zaman yanlışın baştaki kabule dayandığı söylenerek ispat yapılır. Çelişki yöntemiyle ispat yapılırken $p \Rightarrow q$ önermesinin doğru olduğunu ispatlamak yerine $p \Rightarrow q$ önermesinin değili olan;

$$\neg(p \Rightarrow q) \equiv \neg(\neg p \vee q) \equiv p \wedge \neg q$$

önermesinin yanlış olduğunu göstermek yeterlidir. Bunu örnekler ile gösterelim.

Önerme 2.7: Kendi kendisiyle toplandığında kendisini veren sayı sıfırdır.

İspat: Önerme 2.7 yi önermeler mantığına göre düzenlersek;

p : " $x + x = x$ dir."

q : " $x = 0$ dır."

$p \Rightarrow q$: " $x + x = x$ ise $x = 0$ dır."

biçimine dönüşür.

$\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$, denkliğini kullanalım. Burada q önermesinin değili,

$\neg q$: "$x \neq 0$ dır."

olur. O halde;

$x \neq 0$ olsun.

$\Rightarrow x + x = x$

$\Rightarrow 2x = x$, ($x \neq 0$olduğundan denklemin her iki tarafını x e bölersek)

$\Rightarrow \frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$

$\Rightarrow 2 = 1$

$2 = 1$ doğru değildir. Bu bir çelişkidir. O halde; $x = 0$ olmalıdır.

İspat tamamlanır.

Bu önermeden de görüldüğü gibi hükmü olumsuz kabul ederek bize verilen hipotezi kullanıp bir çelişkiye vardık. Bu çelişkinin sebebi de hükmü olumsuz kabul etmemizdir.

Önerme 2.8: $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel sayı olmadığını gösteriniz.

İspat: Önermede bizden $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel bir sayı olmadığını göstermemiz isteniyor. Olmayana ergi yöntemiyle ispat yapalım. a ve b aralarında asal sayılar ve $b \neq 0$ olmak üzere; $\frac{a}{b}$ rasyonel bir sayı olsun.

Önerme 2.8 i önermeler mantığına göre düzenlersek;

p : "$\frac{a}{b}$ rasyonel bir sayıdır."

q : "$\sqrt{2} \neq \frac{a}{b}$ dir."

$p \Rightarrow q$: "$\frac{a}{b}$ rasyonel bir sayı ise, $\sqrt{2} \neq \frac{a}{b}$ dir."

biçimine dönüşür.

Çelişki yöntemiyle ispat tekniğine göre hükmümüzü olumsuz kabul edelim.

$\neg q$: "$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ dir."

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow 2b^2 = a^2$$

$\Rightarrow a^2$ çifttir. (a^2 çift ise a da çifttir. Önerme 2.4)

$\Rightarrow a$ çifttir. ($m \in \mathbb{Z}$, olmak üzere; $a = 2m$ alırsak)

$\Rightarrow a = 2m$, ($m \in \mathbb{Z}$)

$\Rightarrow a^2 = 4m^2$, (bu sonucu $2b^2 = a^2$ de yerine yazalım.)

$\Rightarrow 2b^2 = a^2 = 4m^2$

$\Rightarrow 2b^2 = 4m^2$, (eşitliğin her iki tarafını ikiye bölelim.)

$\Rightarrow b^2 = 2m^2$

$\Rightarrow$ b^2 çifttir. (b^2 çift ise b de çifttir. Önerme 2.4)

$\Rightarrow$ b çifttir.

Buradan a, b nin çift bir tamsayı olduğu görülür. Bu a ve b nin aralarında asal kabul edilmesiyle çelişkidir. O halde $\sqrt{2}$ rasyonel bir sayı değildir. Böylece ispat tamamlanır.

2.4.1 Bazı Özel Sayıların Çelişki Yöntemiyle İspatı

İrrasyonel sayılara farklı örneklerde verebiliriz. Örneğin matematiğin önemli ve ilgi çekici konuları arasında yer alan Altın oran, Euler sayısı, Pi sayısı da birer irrasyonel sayıdır. Burada bunların tanımlarını vererek çelişki yöntemiyle ispatlarını yapacağız.

Tanım 2.9 Altın oran kendisine bir sayısı eklendiğinde kendisinin karesini veren iki sayıdan biridir. Altın oran sembolik olarak φ ile gösterilir. Bunu matematiksel olarak $\varphi^2 = \varphi + 1$ şeklinde yazabiliriz (Bloch, 2011).

Buradan bu denklemin köklerini çözersek;

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \ , \ \varphi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ , \ \varphi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

elde edilir.

Önerme 2.10: Altın oran $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033988749894$ ... olarak bilinir. φ irrasyonel bir sayıdır (Opstall, 2008).

İspat : Farz edelim ki p ve q tamsayı, aynı zamanda p ve q nun 1 den başka ortak böleni olmayacak şekilde $\varphi = \frac{p}{q}$ bir rasyonel sayı olsun. $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ denklemi göz önünde bulundurursak,

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 - \left(\frac{p}{q}\right) - 1 = 0$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 - \left(\frac{p}{q}\right) = 1$$

$$p^2 - pq = q^2$$

$$p(p-q) = q^2$$

elde edilir.

p ve q tamsayı olarak seçilmişti. Burada p nin q^2 yi böldüğü açıktır. p ve q nun 1 den başka ortak böleni yoktur. Burada bizim seçtiğimiz varsayımımız $\varphi = \frac{p}{q}$ dur. Bu ise bir çelişkidir. Öyleyse φ irrasyonel bir sayıdır.

Şimdide başka bir irrasyonel sayı olan e sayısına bakalım.

Tanım 2.11: e sayısı Euler sayısı olarak bilinir. e sayısı, $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ diferansiyel denklemini sağlayan yegâne pozitif reel sayıdır. e sayısı;

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots$$

yakınsak serisiyle tanımlanır.

Önerme 2.11: e sayısı irrasyonel bir sayıdır (Kifowit, 2011).

İspat : a , b pozitif tamsayı olmak üzere; $e = \frac{a}{b}$ olacak şekilde rasyonel bir sayı ve $b > 1$ olsun.

$$x = b!\left(e - \sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}\right) \tag{2.2}$$

olduğunu düşünelim.

e bir rasyonel sayı olursa, x de bir tamsayı olur. (2.2) de $e = \frac{a}{b}$ yi yerine yazalım.

$$x = b!\left(\frac{a}{b} - \sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}\right) = a(b-1)! - \sum_{n=0}^{b} \frac{b!}{n!}$$

Her $n \leq b$ için x ifadesi tamsayıdır. Şimdi de $0 < x < 1$ aralığında

$$x = b!\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}\right) = \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{b!}{n!} > 0$$

$n \leq b$, x kesinlikle pozitif bir sayıdır.

$x < 1$ için $n \geq b + 1$ de denklemimizin doğru olduğunu ispatlamamız gerekir.

$$\frac{b!}{n!} = \frac{1}{(b+1)(b+2)\dots\big(b+(n-b)\big)} \leq \frac{1}{\underbrace{(b+1)(b+1)\dots(b+1)}_{n-b\ tane}}$$

$$\leq \frac{1}{(b+1)^{n-b}}$$

olduğu açıktır. $1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r}$ sonsuz geometrik serisini de göz önünde bulundurarak denklemimizi düzenleyelim.

$$x = \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{b!}{n!} < \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{1}{(b+1)^{n-b}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(b+1)^k}$$

$$= \frac{1}{(b+1)} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^3} + \cdots$$

$$= \frac{1}{(b+1)}\left[1 + \frac{1}{(b+1)} + \frac{1}{(b+1)^2} + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{(b+1)}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{b+1}}\right) = \frac{1}{b} < 1$$

$x = \frac{1}{b}$ $0 < x < 1$ aralığında pozitif tamsayı yoktur. Bu bir çelişkidir. Öyleyse e irrasyonel bir sayıdır.

π sayısı da yine irrasyonel bir sayıdır.

Pi sayısının ispatı için fonksiyonların birkaç özelliğine ihtiyacımız olacaktır.

$f(x)$ fonksiyonu şöyle tanımlansın.

Tanım 2.12 $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=n}^{2n} c_k x^k \qquad (2.3)$$

Burada c_k belirli bir tamsayı ve n pozitif bir tamsayı olmak üzere; eğer x, $0 < x < 1$ aralığında ise,

$$0 < f(x) < \frac{1}{n!}$$

olur (İvan,1947).

$f(0) = 0$, $f^{(m)} = 0$ eğer $m < n$ veya $m > 2n$; ayrıca $n \leq m \leq 2n$

$$f^m(0) = \frac{m!}{n!}c_m \qquad (2.4)$$

(2.4) bir tamsayıdır. Böylece $f(x)$ ve onun tüm türevlerinin $x = 0$ da integrali vardır.

$f(1-x)=f(x)$ olduğu için, $f(1-x)$ ve onun tüm türevlerinin $x=1$ de integrali vardır.

Önerme 2.12 : π irrasyonel bir sayıdır (İvan, 1947).

İspat : π rasyonel bir sayı ise π^2 de rasyonel bir sayıdır. π^2 nin rasyonel bir sayı olduğunu düşünelim. Aynı zamanda a,b pozitif tamsayı olmak üzere $\pi^2=\frac{a}{b}$ şeklinde de ifade edebiliriz. $f(x)$ fonksiyonunu da göz önünde bulundurarak;

$$F(x)=b^n\left[\pi^{2n}f(x)-\pi^{2n-2}f''(x)+\pi^{2n-4}f^{(4)}-\cdots+(-1)^n f^{(2n)}(x)\right] \quad (2.5)$$

bir fonksiyonu tanımlansın.

Burada da $F(0)$ ve $F(1)$ tamsayıdır. Ayrıca;

$$\frac{d}{dx}[F'(x)sin\pi x-\pi F(x)cos\pi x]=[F''(x)+\pi^2F(x)]sin\pi x$$

$$=b^n\pi^{2n+2}f(x)sin\pi x=\pi^2a^nf(x)sin\pi x$$

Böylece;

$$\int_0^1 \pi a^n f(x)sin\pi x dx=\left[\frac{F'(x)sin\pi x}{\pi}-F(x)cos\pi x\right]_0^1$$

$$=F(1)+F(0)$$

elde edilir. $F(1)+F(0)$ bir tamsayıdır.

$$0<\int_0^1 \pi a^n f(x)sin\pi x dx<\frac{\pi a^n}{n!}<1 \quad (2.6)$$

eğer n yeterince büyük seçilirse, (2.6) çelişkidir. Çünkü $F(1)+F(0)$ pozitif bir tamsayıdır. Böylece ispat tamamlanır. π irrasyonel bir sayıdır.

Çelişki yöntemiyle ispat yöntemi ters durum ispatına benzemesine rağmen farklı olarak hipotezin olumsuzu yerine bir çelişkiye varmaya çalışıyoruz.

2.5 Tümevarım Yöntemiyle İspat Tekniği:

En çok bilinen ve kullanılan ispat tekniklerinden biridir. Bu teknikte, ispatın yapılacağı kümede, eleman sayısının sayılabilir sonsuzlukta olması durumunda, bir p özelliğinin "1" için var olduğu gösterilir. Sonra k için özelliğin var olduğu kabul edilir ve $k+1$ için özelliğin ispatı yapılır.

k yı en kötü durumda 1 olarak düşündüğümüzde ve 1 için ispatın sağlandığını ilk adımda göstermiş olduğumuzdan, önermenin k için doğru olduğunu kabul etmemiz yanlış bir kabul olmayacaktır. Sonra $k+1$ için sağlandığını ispatladığımızdan 2 için de sağlandığı gösterilmiş olur. Bu sefer 2 için sağlandığından, k yı 2 gibi düşünürsek $k+1$ yani 3 için de ispat sağlanacak, 3 için sağlandığından yine aynı mantıkla 4 için de sağlanacak. Ve bu şekilde genel bir ispat yapılmış olacaktır. İlk başlangıç adımının her zaman "1" olması zorunlu değildir, "3 ten büyük tamsayılar için önermenin sağlandığını gösterin" gibi bir durumda başlangıç adımını 3 gibi bir sayı da seçebiliriz. Sonra yine aynı şekilde k için doğru olduğunu kabul edip, $k+1$ için doğruluğunu göstererek ispatı genelleriz. Bu tekniği kullanarak ispatı yapılan birçok önerme bulunmaktadır. Şimdi bunlara bir kaç örnek verelim.

Önerme 2.13: $1+3+5+\ldots+2n-1$ biçimindeki sayıların toplamının $n=1,2,3,4,5,\ldots$ tamsayılarının her biri için n^2 olduğunu gösteriniz (Day, 2008).

İspat: Tümevarım tekniği ile ispatı yapılabilen toplam serileri üzerine iyi bilinen örneklerden biridir. Tekniğe göre ilk adım olarak "1" için önermenin doğruluğunu görelim;

$n=1$ için: bakacak olursak, serinin toplamı 1 olacaktır.

Sonuçta

$1 = 1^2$ olduğundan,

$n = 1$ için önerme doğrudur.

$n = k$ için önerme doğru olsun: Yani;

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 2k - 1 = k^2 \tag{2.7}$$

olur.

$n = k + 1$ için: Önermenin doğru olup olmadığını göstermek için;

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 2(k+1) - 1 = (k+1)^2 \tag{2.8}$$

(2.8) nin doğru olduğunu göstermeliyiz.

Şimdi (2.8) de eşitliğin sol tarafındaki en son terimden bir önceki terimi yazalım.

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 2k - 1 + 2(k+1) - 1 = (k+1)^2 \tag{2.9}$$

(2.9) da eşitliğinin doğru olduğunu göstermek istiyoruz. (2.7) deki kabulümüzden dolayı; $1 + 3 + 5 + \ldots + 2k - 1 = k^2$ olduğunu biliyoruz. Bunu (2.9) da yerine yazarsak;

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + 2k - 1}_{k^2} + 2(k+1) - 1 = k^2 + 2(k+1) - 1$$

olur. Böylece,

$$k^2 + 2(k+1) - 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

olarak buluruz.

Böylece önermenin k için doğru olduğunu kabul ederek $k + 1$ için de sağlandığını göstermiş olduk.

Önerme 2.14: Bazı pozitif n tamsayıları için $2^{2n} - 1$ in 3 ün katı olduğunu gösterelim.

İspat : Bu önerme de tümevarım ispat tekniği ile kolaylıkla gösterilebilir.

$n = 1$ için :

$$2^{2n} - 1 = 2^{2(1)} - 1 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

olur. Yani; 3 ün bir katıdır. Öyleyse $n = 1$ için önerme sağlanır.

Şimdi $n = k$ için sağlandığını kabul edip, $n = k + 1$ için inceleyelim;

$n = k$ için önerme doğru olsun: Yani $n = k$ için, $2^{2n} - 1$, 3 ün bir katı olmuş olsun. Bunu öyle bir m tamsayısı için $2^{2k} - 1 = 3m$ olarak gösterelim.

$n = k + 1$ için :

$$2^{2(k+1)} - 1 \tag{2.10}$$

ifadesinin 3 ün bir katı olduğunu göstermemiz gerekiyor. (2.10) u açacak olursak;

$$2^{2(k+1)} - 1 = 2^{2k+2} - 1 = 2^2 2^{2k} - 1 = 4(2^{2k}) - 1 \tag{2.11}$$

elde ederiz. Ayrıca;

$$2^{2k} - 1 = 3m \implies 2^{2k} = 3m + 1 \tag{2.12}$$

olduğundan,

(2.12) eşitliğini kullanarak (2.11) de 2^{2k} yerine $3m + 1$ yazarsak;

$$2^{2(k+1)} - 1 = 2^{2k+2} - 1 = 2^2 2^{2k} - 1 = 4(3m + 1) - 1 = 12m + 3$$

elde edilir. $12m + 3$ ifadesini 3 parantezine alırsak, $3(4m + 1)$ elde edilir.

Burada $4m + 1$ ifadesi bir tamsayıdır. Buna p gibi bir tamsayı dersek,

$$2^{2(k+1)} - 1 = 12m + 3 = 3p$$

olur. Öyleyse $2^{2(k+1)} - 1$ ifadesi 3 ün bir katıdır. Böylece $n = k + 1$ için de önermenin doğruluğunu ispatlamış olduk. O zaman, tümevarım ispat tekniği ile bu önerme sağlanır.

Tümevarım ispat tekniğinin kullanımı üzerine başta açıklama yaparken her ispatta ilk adım olarak $n = 1$ almak zorunda olmadığımızı, $n = 2, 3$ veya önermeye göre başlangıç için farklı tamsayılar alabileceğimizi söylemiştik. Şimdi bunun üzerine bir önermenin ispatını verelim.

Önerme 2.15: 2 den büyük ve eşit tamsayılar için $n^2 > n + 1$ eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim.

İspat: Burada başlangıç adımı olarak, 2 seçmemiz gerekiyor. Çünkü önermemizin 2 den büyük tamsayılar için sağlandığını ispat etmemiz isteniyor.

$n = 2$ için;

$$n^2 > n + 1 \Rightarrow 2^2 > 2 + 1 \Rightarrow 4 > 3$$

eşitsizlik sağlanır.

$n = k$ için önerme doğru olsun. Bu durumda;

$$k^2 > k + 1 \tag{2.13}$$

olur.

Şimdi; $n = k + 1$ için;

$$(k + 1)^2 > (k + 1) + 1 \tag{2.14}$$

sağlandığını gösterelim.

(2.14) eşitsizliğinde $(k + 1)^2$ terimini açarsak,

$$(k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1 \tag{2.15}$$

elde edilir. (2.13) kabulümüzden, (2.15) de k^2 terimi yerine ondan daha küçük olan $k+1$ yazarsak;

$$(k+1)^2 > k+1+2k+1$$

$$(k+1)^2 > 3k+2 \qquad (2.16)$$

elde edilir. (2.16) da k değişkeni, 2 den büyük veya eşit bir tamsayı olduğundan, $3k$ yerine k yazdığımızda ifade küçülecektir. Öyleyse;

$$(k+1)^2 > 3k+2 \; > k+2$$

ayrıca,

$$(k+1)^2 > (k+1)+1$$

yazabiliriz. Ayrıca, $n = k+1$ olduğu için;

$$(k+1)^2 > \; (k+1)+1$$

$$n^2 > n+1$$

elde edilir. Aradığımız şart sağlanmış olur. Böylece ispat tamamlanır.

Görüldüğü gibi tümevarım ispat tekniği kullanılarak, verilen bir önermenin genel olarak sağlanıp sağlanmadığını ispatlayabiliyoruz. Son örnek olarak yine tümevarım tekniği ile ispatlanan, ancak az önce yaptığımız örneklere nazaran biraz daha düşünme gerektiren bir önerme verelim.

Önerme 2.16: $H_k = 1 + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3}) + (\frac{1}{4}) + \ldots + (\frac{1}{k})$ ve $k = 1, 2, 3, \ldots$ olmak üzere, H_k ifadesini (Harmonik sayılar) ele alalım. Burada $P_n = H_{2^n} \geq 1 + (\frac{n}{2})$ sağlandığını gösterelim.

İspat: Burada dikkat edilirse bize verilen H_k harmonik dizisinin elemanları k=1, 2, 3, . . . olarak verilmiştir. O zaman biz önce önermenin H_1 için sağlandığını görmeliyiz.

Önermede $P_n = H_{2^n}$ olarak verildiğinden ilk adım olarak $n = 0$ almalıyız. Öyleyse ilk adımla ispata başlayalım;

$n = 0$ için : $P_n = H_{2^n} \Longrightarrow P_0 = H_{2^0} = H_1 = 1$ yani $P_0 = 1$ dir.

$P_n \geq 1+(\frac{n}{2})$ olduğunu göstermek istediğimizden;

$P_0 = H_1 = 1 \geq 1 + (\frac{0}{2}) = 1$ olduğundan, $n = 0$ için $P_n \geq 1 + (\frac{n}{2})$ eşitsizliği sağlanır.

$n = 1$ için: $P_n = H_{2^n} \Longrightarrow P_1 = H_{2^1} = H_2 = 1+(\frac{1}{2})$ yani; $P_1 = 1+(\frac{1}{2})$

$P_1 = H_2 = 1 + (\frac{1}{2}) \geq 1 + (\frac{1}{2})$ olduğundan, $n = 1$ için $P_n \geq 1 + (\frac{n}{2})$ eşitsizliği sağlanır.

$n = 2$ için: $P_n = H_{2^n} \Longrightarrow P_2 = H_{2^2} = H_4 = 1 + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3}) + (\frac{1}{4})$ yani; $P_2 = 1 + (\frac{2}{2}) = 1+1 = 2$ dir.

$P_2 = H_4 = 1 + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3}) + (\frac{1}{4}) \geq 1 + (\frac{2}{2}) \Longrightarrow P_2 = H_4 = \left(\frac{25}{12}\right) \geq 2$ olduğundan, $n = 2$ için $P_n \geq 1 + (\frac{n}{2})$ eşitsizliği sağlanır.

n = 3 için: $P_n = H_{2^n} \Longrightarrow P_3 = H_{2^3} = H_8 = 1 + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3}) + (\frac{1}{4}) + (\frac{1}{5}) + (\frac{1}{6}) + (\frac{1}{7}) + (\frac{1}{8})$ olur. yani; $P_3 = 1 + (\frac{3}{2}) = (\frac{5}{2})$ dir.

$P_3 = H_8 = 1 + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3}) + (\frac{1}{4}) + (\frac{1}{5}) + (\frac{1}{6}) + (\frac{1}{7}) + (\frac{1}{8}) \geq 1 + (\frac{3}{2}) \Longrightarrow P_3 = H_8 \geq (\frac{5}{2})$ olduğundan, $n = 3$ için $P_n \geq 1 + (\frac{n}{2})$ eşitsizliği sağlanır.

Şimdi, $n = k$ için önerme doğru olsun.

$$H_{2^k} = 1 + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3}) + (\frac{1}{4}) + \ldots + (\frac{1}{2^k}) \geq 1 + \frac{k}{2} \qquad (2.17)$$

O halde; $n = k + 1$ için;

$$H_{2^{(k+1)}} = 1 + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3}) + (\frac{1}{4}) + \ldots + (\frac{1}{2^{(k+1)}}) \geq 1 + \frac{k+1}{2}$$

olduğu gösterilirse ispat tamamlanır.

$$H_{2^{(k+1)}} = 1 + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{2^k}) + (\frac{1}{2^k+1}) + \ldots + (\frac{1}{2^{(k+1)}}) \qquad (2.18)$$

ifadesinde $(\frac{1}{2^k})$ teriminden sonraki terim $(\frac{1}{2^k+1})$ dir. Son terim ise $(\frac{1}{2^{(k+1)}})$ dir.

(2.18) de $H_{2^{(k+1)}}$ ifadesinin $(\frac{1}{2^k+1}) + \ldots + (\frac{1}{2^{(k+1)}})$ olan kısmını ele alalım. Bu kısım içinde toplam 2^k tane terim vardır. En küçük terim $(\frac{1}{2^{(k+1)}})$ olduğu açıktır. 2^k tane terimin her birini $\frac{1}{2^{(k+1)}}$ olarak alırsak, ele aldığımız parçanın değeri küçülür. Yani;

$$(\frac{1}{2^k+1}) + \ldots + (\frac{1}{2^{(k+1)}}) \geq \underbrace{\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}}_{2^k\ tane}$$

elde edilir.

2^k tane $\frac{1}{2^{(k+1)}}$ teriminin toplamı ise;

$$\underbrace{\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}}_{2^k\ tane} = 2^k\ (\frac{1}{2^{(k+1)}}) = (\frac{1}{2}) \qquad (2.19)$$

olur. (2.19) ifadesindeki $\frac{1}{2}$ değeri (2.18) de $H_{2^{(k+1)}}$ açılımında yerine yazılırsa (2.20) elde edilir.

$$H_{2^{(k+1)}} = 1 + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{2^k}) + \underbrace{\frac{1}{2^k+1} + \cdots + \frac{1}{2^{(k+1)}}}_{ifadesinin\ yerine\ \frac{1}{2}\ yazılırsa} \qquad (2.20)$$

(2.20) ifadesindeki değer küçüldüğünden, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$H_{2^{(k+1)}} \geq 1 + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{2^k}) + (\frac{1}{2}) \qquad (2.21)$$

(2.17) den bildiğimiz $P_k = H_{2^k} = 1 + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{2^k}) \geq 1 + \frac{k}{2}$ ifadesini (2.21) deki eşitsizliğin sağ tarafında yerine yazılırsa;

$$H_{2^{(k+1)}} \geq 1 + \frac{k}{2} + (\frac{1}{2}) \qquad (2.22)$$

elde edilir. (2.22) eşitsizliği düzenlenirse;

$$H_{2^{(k+1)}} \geq 1 + \frac{k}{2} + (\frac{1}{2}) = 1 + \frac{k+1}{2}$$

olur. Böylece

$$H_{2^{(k+1)}} \geq 1 + \frac{k+1}{2} \qquad (2.23)$$

ifadesinde $n = k + 1$ yazılırsa,

$$H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$$

elde edilir. Bu da aramış olduğumuz şarttır. Öyleyse $n = k + 1$ için de önerme sağlandığı için ispat tamamlanır. Görüldüğü gibi vermiş olduğumuz bu dört farklı ispat tekniği kullanılarak bazı ispatlar yapılabilmektedir. Yaklaşımları ve eldeki bilgiyi kullanış biçimleri farklı da olsa temelde bu dört ispat tekniğine dayalı olarak matematikte teorem ve önermelerin ispatları gösterilebilir.

3.BÖLÜM
İSPAT TEKNİKLERİ VE FİBONACCİ SAYI DİZİSİ

Giriş 3.1

Orta çağın en büyük matematikçilerinden biri olarak kabul edilen Fibonacci İtalya'nın ünlü Pisa şehrinde doğmuştur. Çocukluğu babasının çalıştığı Cezayir'de geçmiştir. İlk matematik eğitimini Müslüman bilim adamlarından almış ve İslam aleminin kitaplarını incelemiş ve çalışmıştır. Avrupa'da Roma rakamları kullanılırken ve sıfır kavramı ortalarda yokken Leonardo Arap rakamlarını ve sıfırı öğrenmiştir. 1201 yılında "Liber Abacci" adında bir matematik kitabı yazmıştır. Bu kitapla Avrupa'ya Arap rakamlarını ve bugün kullandığımız sayı sistemini tanıtmıştır. Bu kitapta, temel matematik kuralları olarak bilinen toplama, çıkarma çarpma ve bölme ifadelerine örnek verip, tavşan problemini de bu kitapta anlatmıştır (Knuth, 1975).

Altın orana ilişkin bilinen en eski matematik bilgisi ilk kez milattan önce 3. yüzyılda Euclid'in Stoikhea Elemanlar adlı kitabında "extreme and mean ratio" adıyla kayda geçmiştir. Ancak eski mısırda milattan önce 3. binyılda bilindiği bile öne sürülmüştür. Yunanlılara da Pisagor ve öğrencileri tarafından tanıtıldığı söylenmiştir (Cangül,2006). Johannes Kepler(1571-1630) ''geometrinin iki büyük hazinesi vardır. Bunlardan birisi Pisagor teoremi, diğeri ise bir çizginin altın oranda bölünmesidir. Birincisini bir ölçek altınla kıyaslayabilir, ikincisine de değerli bir mücevherdir diyebiliriz.'' ifadesini söylemiştir.

Blaise Pascal(1623-1662) Fransız matematikçi, fizikçi ve düşünür olarak bilinir. En bilinen temel eseri ''Düşünceler'' dir. 12 yaşındayken, hiç geometri bilgisine sahip olmadığı halde, daireler ve eşkenar üçgenler çizmeye başlamış, bir üçgenin iç açılarının toplamının iki dik açıya eşit olduğunu kendi kendine bulmuştur. 1642'de henüz 18'inde iken, vergi tahsildarı babasının işini kolaylaştıracak, dişliler ve tekerleklerden oluşan mekanik hesap makinesi tasarlamıştır. Pascal, çocukluğunda "Geometri neyi inceler?" sorusunu babasına sormuş ve "doğru biçimde şekiller çizmeyi ve şekillerin kısımları arasındaki ilişkileri inceler" cevabını almıştır. Pascal, Fermat ile yazışarak, olasılık teorisini kurmuş ve bir binom açılımında katsayıları vermiştir (Karabaşoğlu, 1996).

Bu bölümde ispat tekniklerini de kullanarak Fibonacci sayılarını, altın oran ve Pascal üçgeninin arasındaki ilişkisini inceleyeceğiz.

3.2. Fibonacci Sayı Dizisi

Bu bölümde Fibonacci sayı dizisi ele alınacaktır.

Tanım 3.1: Fibonacci dizisi 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, . . . , x, y, x + y, . . . olarak bilinir. Dizideki her bir terim kendinden önce gelen ardışık iki terimin toplamı olarak devam eder. Bu dizideki her bir sayıya da Fibonacci sayısı denir. n. Fibonacci sayısı F_n ile gösterilir (Burton, 2007).

3.3. Tavşan problemi:

Bir çift tavşan besleyelim. Her çift tavşanın bir ay içerisinde yeni bir çift tavşan yavruladığı, her yeni çiftinde erginleşmesi için 1 ay süre gerektiği ve tavşanlarında ölmediğini varsayalım. Tavşan çiftlerinin 1 yılda aylara göre toplam sayılarını tablo olarak gösterelim.

Aylar	Yetişkin Çift Sayısı	Bebek Çift Sayısı	Toplam Çift Sayısı
Ocak	1	0	1
Şubat	1	1	2
Mart	2	1	3
Nisan	3	2	5
Mayıs	5	3	8
Haziran	8	5	13
Temmuz	13	8	21
Ağustos	21	13	34
Eylül	34	21	55
Ekim	55	34	89
Kasım	89	55	144
Aralık	144	89	233
Ocak	233	144	377

Tablo (3.1)

Tabloda her ay toplam tavşan çift sayısına bakacak olursak 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, . . . sayı dizisi şeklinde devam ediyor. Görüldüğü gibi ilk iki sayı hariç her Fibonacci sayısı kendinden önce gelen ardışık iki sayının toplamı şeklinde devam etmektedir (Knott, 2010).

3.4. Rekürans Belirleme:

Fibonacci dizisinin lineer rekürans denklemi $F_0 = 0$, $F_1 = F_2 = 1$ olmak üzere, $n \geq 3$ ise $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ rekürans denklemi olarak tanımlanır. Tablo (3.1.) de yetişkin çiftler, toplam çiftler arasındaki ilişkileri inceleyelim. Burada yetişkin çiftlerin sayısını A_n bebek çiftlerinin sayısını da B_n ile gösterelim. $n \geq 1$ olduğundan, $A_1 = 0$, $A_2 = 1 = B_1$ olur.

$n \geq 3$ olduğunu varsayalım. n. aydaki bebek çiftlerinin sayısı kendinden önceki (n-1). aydaki yetişkin çiftlerin sayısına eşittir. Bunu göz önünde bulundurarak,

n. aydaki yetişkin çift sayısı = (n-1). aydaki yetişkin çiftlerin sayısı + (n-1). aydaki bebek çiftlerinin sayısı olduğu tablo (3.1.) den açıktır.

Buna göre;

$$A_n = A_{n-1} + B_{n-1} \qquad n \geq 3$$

veya

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2} \qquad n \geq 3$$

elde edilir.

Burada, $A_n = F_{n+1}$ ($n \geq 1$) olarak bulunur. Buradan da n. aydaki çiftlerin toplam sayısı, n. aydaki yetişkinlerin sayı ile n. aydaki bebek çiftlerin toplam sayısına eşittir.

$F_n = A_n + B_n$ ($n \geq 3$) denklem, F_n cinsinden düzenlenirse, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ elde edilir.

Burada, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ denkleminde $n = 2$ alınırsa $F_2 = F_1 + F_0$ olur. Başlangıç koşulları olan $F_2 = F_1 = 1$ yerine yazılırsa $F_0 = 0$ elde edilir.

3.5. Fibonacci Sayısı ve Binet Formülü:

1843 yılında, Jacques Philippe Marie Binet tarafından bulunan Binet formülü, Fibonacci serisinin n'inci terimini bulmak için kullanılır ve Binet Formülü;

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

olarak bilinir.

Tanım 3.2. Fibonacci dizisinde, F_n pozitif tamsayıları $n \geq 1$ için; $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ dir.

$n \geq 3$ için $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ olarak bulunur (Emery, 2011).

Bu şekilde ilk birkaç terimi gösterelim. $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, , $F_3 = 2$, , $F_4 = 3$, , $F_5 = 5$, , $F_6 = 8$, , $F_7 = 13$, $F_8 = 21$, . . . şeklinde devam eder.

Önerme 3.3 : Fibonacci dizisinin sayıları, Binet formülünden bulunur

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

(Emery, 2011).

İspat: Tümevarım yöntemiyle ispat tekniğine göre, Binet formülünü ispat edelim. İlk önce $n = 1,2$ için doğru olup olmadığını görelim.

$n = 1$ için

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right] = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1,$$

bulunur. Yani, $n = 1$ için doğrudur.

$n = 2$ için,

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right] = \frac{4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = 1$$

olup, $n = 2$ için de doğrudur. Şimdide $n = k$ için doğru olduğunu varsayalım.

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]$$

$n = k + 1$ için de doğru olduğunu gösterelim.

Fibonacci dizisinin tanımında $n = k + 1$ yazalım.

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

$$F_{k+1} = F_{k+1-1} + F_{k+1-2} \Rightarrow F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$$

olduğundan,

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$$

$$F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right] + \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right]$$

$$F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right] - \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]$$

bulunur. $\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}$ ifadesini düzenlersek,

$$\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} = \left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2 \left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}$$

$$= \left[\frac{1\pm2\sqrt{5}+5}{4}\right]\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}$$

$$= \left[\frac{2\pm2\sqrt{5}}{4} + 1\right]\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}$$

$$= \left[\frac{1\pm1\sqrt{5}}{2} + 1\right]\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}$$

$$= \left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^k + \left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}$$

$$\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} = \left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^k + \left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}$$

$$F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right]$$

Binet formülü $n = k + 1$ içinde sağlanır. $k + 1$ yerine n yazarsak,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

3.6. Fibonacci Sayısı ve Altın Oran Arasındaki İlişki:

Fibonacci dizisinin tanımı gereğince $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ve $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $n = 2, 3, 4, \ldots$ dir.

Fibonacci dizisinin birkaç terimi tablo 3.2 de gösterilmiştir.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Fn	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Tablo 3.2

Altın oran $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803\ldots$ olup, $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$ olarak tanımlıdır. Fibonacci dizisindeki ardışık gelen iki sayının birbirine oranının altın orana yakınsak olduğunu göstereceğiz.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$$

Buna göre; $\frac{F_{14}}{F_{13}} = \frac{377}{233} \approx 1.618025$ olur. Görüldüğü gibi bu değer altın orana çok yakındır (Bloch, 2011).

Önerme 3.4: Fibonacci sayıları ile $R_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ $n = 1, 2, 3, \ldots$ şeklinde bir dizi tanımlansın. Bu durumda;

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$$

dir (Bloch, 2011).

İspat : $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ olduğundan,

$$R_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{R_{n-1}}$$

ifadesini elde ederiz. Burada, $|R_n - \varphi|$ ifadesine bakarsak,

$$|R_n - \varphi| = \left|\left(1 + \frac{1}{R_{n-1}}\right) - \left(1 + \frac{1}{\varphi}\right)\right|$$

$$|R_n - \varphi| = \left|\frac{1}{R_{n-1}} - \frac{1}{\varphi}\right| \tag{3.1}$$

elde edilir.

(3.1) ifadesinde paydaları eşitlersek,

$$|R_n - \varphi| = \left|\frac{\varphi - R_{n-1}}{R_{n-1}\varphi}\right| \tag{3.2}$$

ve $\frac{1}{\varphi}$ ortak parantezine alırsak,

$$|R_n - \varphi| = \left|\frac{\varphi - R_{n-1}}{R_{n-1}\varphi}\right| = \frac{1}{\varphi}\left|\frac{R_{n-1} - \varphi}{R_{n-1}}\right| \tag{3.3}$$

olur. (3.2) eşitliğinde R_{n-1} pozitif bir sayı olduğu açıktır. O halde (3.3) eşitliğinde paydadaki R_{n-1} ifadesinin yerine 1 yazarsak ifadeyi,

$$|R_n - \varphi| = \frac{1}{\varphi}\left|\frac{R_{n-1} - \varphi}{R_{n-1}}\right| \leq \frac{1}{\varphi}|R_{n-1} - \varphi| \tag{3.4}$$

büyütmüş oluruz. Böylece,

$$|R_n - \varphi| \leq \frac{1}{\varphi}|R_{n-1} - \varphi| \tag{3.5}$$

elde edilir. Şimdi (3.5) eşitsizliğinin doğruluğunu gösterelim.

$n = 2$ için,

$$|R_2 - \varphi| \leq \frac{1}{\varphi}|R_1 - \varphi|$$

olur.

$n = 3$ için,

$$|R_3 - \varphi| \leq \frac{1}{\varphi}|R_2 - \varphi| \leq \left(\frac{1}{\varphi}\right)^2 |R_1 - \varphi|$$

olur.

$n = 4$ için,

$$|R_4 - \varphi| \leq \frac{1}{\varphi}|R_3 - \varphi| \leq \left(\frac{1}{\varphi}\right)^3 |R_1 - \varphi|$$

olur.

.

.

.

n için,

$$|R_n - \varphi| \leq \frac{1}{\varphi}|R_{n-1} - \varphi| \leq \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{n-1} |R_1 - \varphi|$$

elde edilir.

$\frac{1}{\varphi}$ ifadesinin değeri, $0 < \frac{1}{\varphi} < 1$ aralığında olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{n-1} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} |R_n - \varphi| = 0$$

olur. Limit değerinden,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$$

bulunur (Bloch, 2011). Böylece ispat tamamlanır.

3.7. Binom Teoremi, Fibonacci dizisi ve Pascal Üçgeni Arasındaki İlişki:

Tanım 3.3 Negatif olmayan tamsayılar için binom katsayıları,

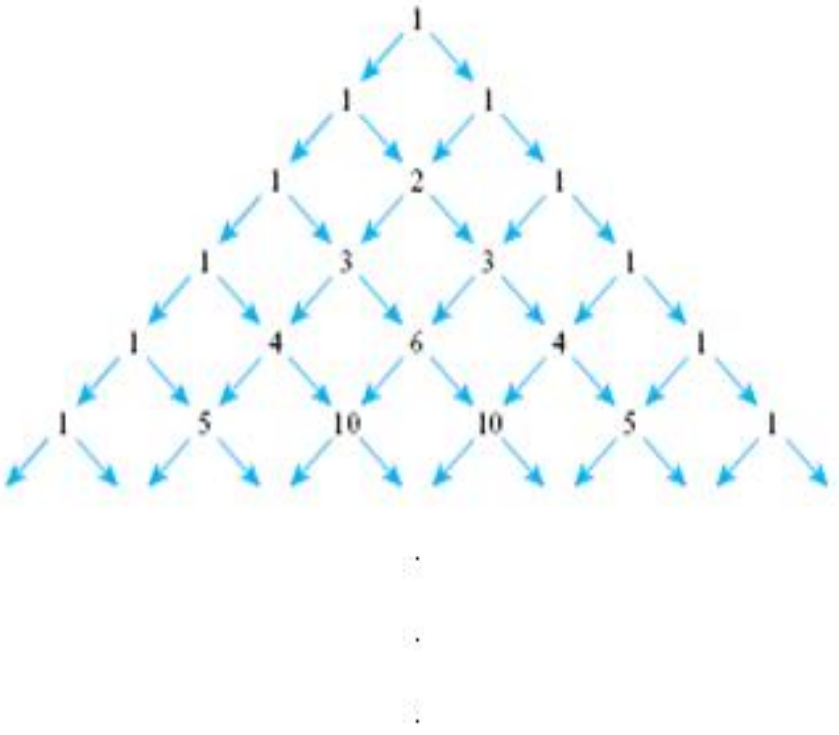
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \qquad 0 \leq k \leq n$$

olarak tanımlanır (Day, 2008).

Tanım 3.4 Faktöriyel n ∈ ℕ olmak üzere n!=1.2.3. . .(n-1).n olarak ifade edilir. Ayrıca 0! = 1 olarak tanımlanır (Day, 2008). Sözel olarak, birden n ye kadar ardışık doğal sayıların çarpımına faktöriyel denir.

3.8. Pascal Üçgeni

Pascal üçgeni matematikte Binom katsayılarını içeren üçgensel bir sayı dizidir. Pascal üçgeninin satırları 1 den başlayarak yazılır. Sayılar komşu sütunların boşluklarına gelecek şekilde yerleştirilir. Ayrıca şekil (3.1) deki gibi her satırın başına ve sonuna bir yazılıp, satırların başına ve sonuna yazılan birlerin arasındaki sayılar kendi üstündeki sayıların toplanmasıyla elde edilir.



Şekil(3.1)

Pascal üçgenini başka bir ifadeyle de yazabiliriz.

$n = 0$ için $\binom{n}{0}$

$n = 1$ için $\binom{n}{0}\binom{n}{1}$

$n = 2$ için $\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}$

$n = 3$ için $\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}$

$n = 4$ için $\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}\binom{n}{4}$

$n = 5$ için $\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}\binom{n}{4}\binom{n}{5}$

.

.

.

$n = k$ için $\binom{n}{0}\binom{n}{1}$ . . . $\binom{n}{k-1}\binom{n}{n}$

Şeklinde yazabiliriz (Day, 2008).

Aşağıdaki özdeşlikleri göz önünde bulundurursak;

$$(x+y) = 1x + 1y$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

.

.

.

$$(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4 y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$$

.

.

.

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{k-1}x^1y^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

(Day,2008).

$(x+y)^n$ ifadesi binom katsayıları ile

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

olarak yazılır.

Teorem 3.4 Her pozitif n tamsayısı için,

$$B_n = (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

dir (Day, 2008).

İspat: Binom teoremini, tümevarım yöntemiyle ispat edelim**.**

$$B_1 = (x+y)^1 = \sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}x^{1-k}y^k$$

$$B_2 = (x+y)^2 = \sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}x^{2-k}y^k$$

.

.

.

$$B_n = (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

.

.

.

olarak tanımlayalım. Bu kısımda B_1 in doğru olduğunu kolay bir şekilde gösterebiliriz. Daha sonra B_n in doğru olduğunu kabul edip, B_{n+1} in doğruluğunu ispatlayacağız.

$$B_1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^{1-k} y^k = \binom{1}{0} x^{1-0} y^0 + \binom{1}{1} x^{1-1} y^1 = 1x^1 y^0 + 1x^0 y^1 = (x+y)^1$$

ve

$$B_2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} x^{2-k} y^k = \binom{2}{0} x^{2-0} y^0 + \binom{2}{1} x^{2-1} y^1 + \binom{2}{2} x^{2-2} y^2$$

$$= x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$$

olduğu görülür.

Şimdi de denklemimizin B_n için doğru olduğunu kabul edip, B_{n+1} in doğru olduğunu kanıtlamamız gerekiyor.

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n = x(x+y)^n + y(x+y)^n$$

olarak yazabiliriz. Burada $(x+y)^n$ yerine B_n ifademizi yazalım.

$$B_n = (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$(x+y)^{n+1} = x(x+y)^n + y(x+y)^n$$

$$= x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k + y \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1}$$

burada ikinci toplamda $k \to k-1$ alınırsa ifade,

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k \quad + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^k \tag{2.4}$$

olarak yazılabilir.

$$(x+y)^{n+1} = \binom{n}{0} x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] x^{n+1-k} y^k + \binom{n}{n} x^0 y^{n+1} \tag{2.5}$$

şeklinde düzenlenir ve

$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$, $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$ ayrıca; $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ eşitlikleri kullanılırsa, (2.5) ifadesi

$$(x+y)^{n+1} = \binom{n+1}{0} x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + \binom{n+1}{n+1} x^0 y^{n+1}$$

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1} y^k = B_{n+1}$$

olur. Bu ifade de B_{n+1} olur. İspatımız tamamlanır. Böylelikle her pozitif n tamsayısı için B_n doğrudur.

Fibonacci dizisi ile Pascal üçgeni arasındaki ilişkiyi araştıralım. Pascal üçgeni soldan sağa 45° lik bir eğik doğru çizer. Şekil (3.1) deki bu doğruların üzerindeki sayıları toplarsak;

$$1$$

$$1$$

$$1 + 1 = 2$$

$$1 + 2 = 3$$

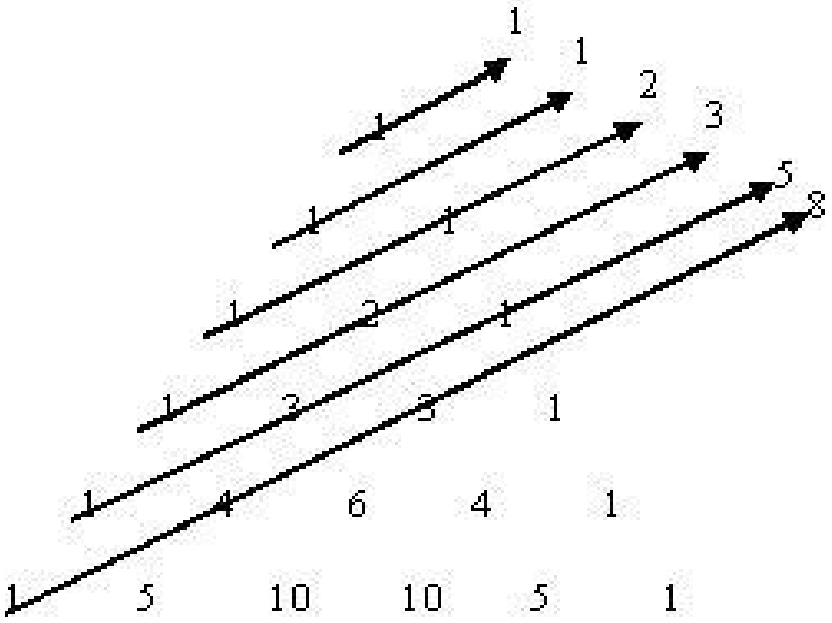
$$1 + 3 + 1 = 5$$

$$1 + 4 + 3 = 8$$

$$1 + 5 + 6 + 1 = 13$$

.
.
.

olarak bulunur. Bu da bize Fibonacci dizisinin terimlerini verir.



.
.
.

Şekil (3.1) Fibonacci sayısı ile Pascal üçgeni arasındaki ilişki

BÖLÜM 4

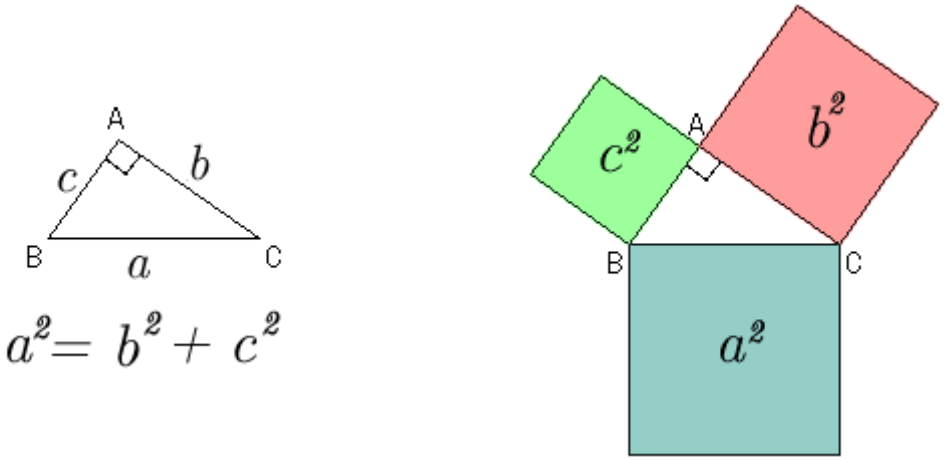
PİSAGOR TEOREMİNİN İSPATI

4.1 GİRİŞ

Pisagor bir Yunan filozof ve matematikçisidir. Ülkesinde hüküm süren politik baskılardan kaçarak, İtalya'nın güneyindeki Kroton şehrine gelmiş ve ünlü okulunu burada açarak şöhrete kavuşmuştur. Pisagor milattan önce 6. yüzyılda, dünyanın güneş etrafında hareket ettiğini ileri sürdüğü zaman oldukça sert bir hareketle karşılanmıştır. O tarihlerde yine kağıt olmadığı için bu buluşların nasıl elde edildiği yine bu devirlerdeki bilgilerinin hangisinin Pisagor'a ait olduğu kesin olarak bilinmemektedir. Geometride, aksiyomlar ve postülatlar her şeyden önce gelmelidir. Sonuçlar bu aksiyom ve postülatlardan yararlanılarak elde edilmelidir düşüncesini bulan ve ilk uygulayan Pisagor'dur. Matematiğe aksiyomatik düşünceyi ve ispat fikrini getiren yine Pisagor'dur. Çarpma cetvelinin bulunuşu ve geometriye uygulanması, yine Pisagor tarafından yapıldığı söylenir. En önemli buluşlarından biriside doğadaki her şeyin matematiksel olarak açıklanması yorumlanması düşüncesidir. Yaşayış ve inanışı, ilimle açıklama ve yorumlamayı o getirmiştir (Sparks,2008).

Pisagor'un müzik konusunda da çalışmaları vardır. Müzik tonlarının, telin uzunluğunun oranlarına bağlı olduğunu keşfetmiş ve bunu tüm sayılara yorumlanmasını düşünmüştür. Bir yerde bugün gerçel ekseni söylemeden düşünmüştür. Bu da bugünkü kullandığımız sayı sisteminin kullanılmasından başka bir şey değildir. Fakat, eski Yunan matematikçileri gerçel sayıları bilmiyorlardı. O zamanlar rasyonel sayıları uzunlukları ölçmek için kullanıyorlardı. Bunun için belli bir birim alıyorlar ve bu birime oranlayarak iki nokta arasındaki uzunluğu ölçüyorlardı. Rasyonel sayılarla ölçülemeyen uzunluğun keşfi 2600 yıl önce Yunan matematikçiler tarafından olmuştur. Bu sonuçta, halen değerini koruyan ve koruyacak olan Pisagor teoremine dayanır. Pisagor teoremi matematikteki en büyük buluşlardan biridir. Zamanımızdan 2600 yıl öncesi düşünülerek göz önünde bulundurulursa, bundan daha büyük bir buluş düşünülemez. Pisagor'un adını 2600 yıldır andıran, onu ünlü yapan ve insanlığın var olduğu sürece sonsuza kadar andıracak olan Pisagor teoremi şöyledir. Bir dik üçgende,

dik kenarların üzerinde kurulan karelerin alanları toplamı, hipotenüs üzerinde kurulan karenin alanına eşittir. Bu ifadeyi şöyle söyleyebiliriz. Bir dik üçgende dik kenarların kareleri toplamı hipotenüsün karesine eşittir (Akdeniz,2009).



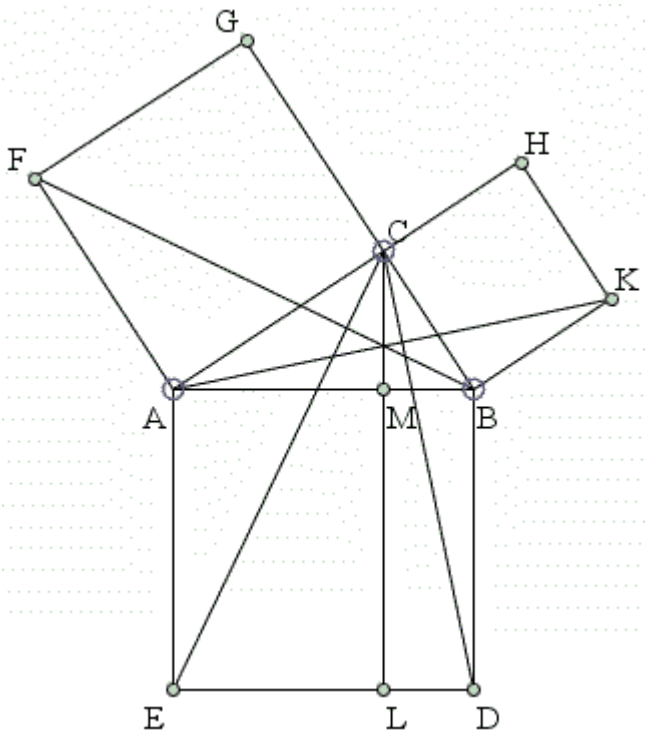
Şekil (4.1.)

aralarında $a^2 = b^2 + c^2$ ilişkisine sahip (a, b, c) üçlülerine Pisagor üçlüleri denir. Bir dik üçgenin dik kenarları ile hipotenüsünün böyle bir üçlü oluşturduğuna dikkat edersek, Pisagor üçlüsünün nerden kaynaklandığını anlayabiliriz. Hem Diophantus'un "Arithmetica", hem de Öklid'in "Elemanlar" adlı yapıtlarında Pisagor üçlüleri üretmek için yöntemler verilmektedir (Alpay,1995).

Bu bölümde Pisagor teoremi verilecektir. Bu teorem verilirken görsel ifadeler ve geometrik yardımlar kullanılarak ispatlar yapılacaktır. Yapılan bu ispatlardan Pisagor teoremine ulaşılacaktır.

4.2. Pisagor Teoreminin Geometri Yardımıyla İspatı

İspat 1: ABDE, BKHC, CGFA birer kare ve ACB bir dik üçgen olmak üzere; ACB dik üçgeninde dik kenarlarının kareleri toplamının hipotenüsün karesine eşit olduğunu gösterelim.



Şekil (4.2.)

Şekil (4.2.) ye göre;

$|AE| = |AB|$, $|AF| = |AC|$ olduğundan, ABF ve AEC üçgenlerinin alanları eşittir. Açılar arasında;

$$\angle BAF = \angle BAC + \angle CAF = \angle CAB + \angle BAE = \angle CAE$$

eşitliği vardır.

Şekil (4.2.) de ABF üçgeninin geniş açılı bir üçgen olduğu açıktır. ABF üçgeninde AF uzunluğunu taban kabul edip, B köşesinden AF uzunluğunun uzantısına dik indirirsek, bu dik AC uzunluğuna eşit olur. Ayrıca, CGFA karesinin alanına $|AC|^2$ dersek, ABF üçgeninin alanı da; $\frac{|AC|^2}{2}$ olur.

AEC üçgeninde ise; AE uzunluğunu taban kabul edip, AE uzunluğuna, C köşesinden dik indirirsek, bu dik uzunluğunun AM uzunluğuna eşit olduğu görülür.

Böylece, AEC üçgeninin, AELM dikdörtgeninin alanının yarısına eşit olur. Buradan AELM dikdörtgeninin alanı$|AC|^2$ olur ve Alan(CGFA) =Alan(AELM) bulunur.

Aynı şekilde, CBKH karesinin alanı BMLD dikdörtgeninin alanına eşit olduğu görülür.

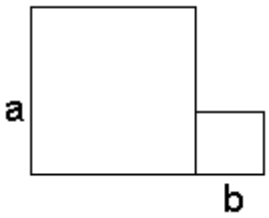
Böylece, AELM ve BMLD dikdörtgenlerinin alanları toplamı ACGF ve CBKH karelerinin alanları toplamına eşit olduğundan;

$$\text{Alan(ABDE)} = \text{Alan(ACGF)} + \text{Alan(CBKH)}$$

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |CB|^2$$

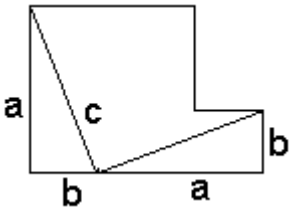
yazılabilir. Böyle Pisagor teoremine ulaşırız.

İspat 2: Kenar uzunlukları a ve b olan iki kare için toplam alan $a^2 + b^2$ olur.



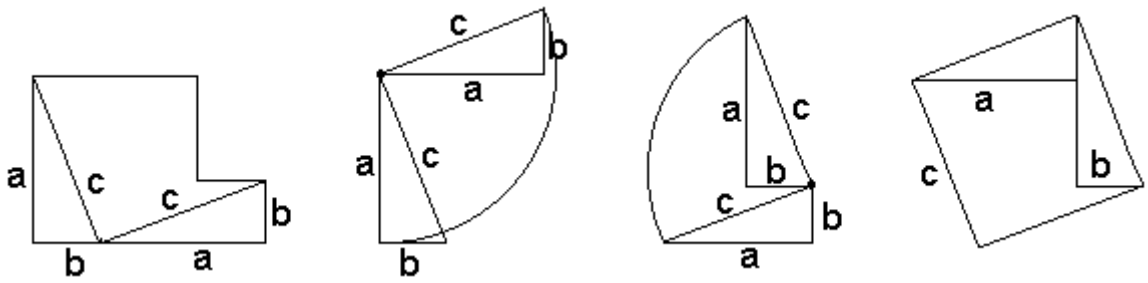
Şekil (4.3.)

Şimdi tabanı tekrar düzenleyip, iki eş üçgen elde edelim.



Şekil (4.4.)

Şekil (4.4.) de bu üçgenleri sırasıyla düşeyle saat yönünde 90° ve düşeyle saat yönünün 90° tersinde döndürelim. Bir kenarı **c** olan bir kare elde edelim.

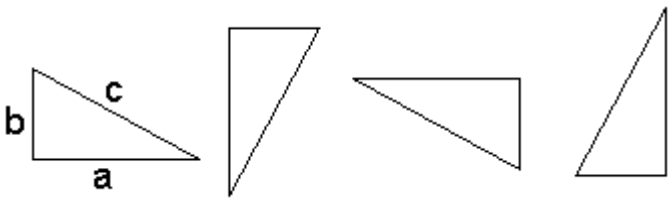


Şekil (4.5.)

Şekil (4.4.) deki alanımız $a^2 + b^2$ idi. Aynı alan şimdi c^2 oldu.

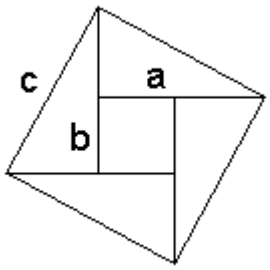
yani; $a^2 + b^2 = c^2$ olur.

İspat 3: Bir dik üçgen alalım ve bu üçgeni 90°, 180°, 270° döndürelim aşağıdaki şekil (4.6.) elde edilir.



Şekil(4.6.)

Bu üçgenlerin her birinin alanları $\frac{ab}{2}$ dir. 4 tane üçgeni birleştirirsek aşağıdaki şekil elde edilir.



Şekil (4.7.)

Şekil (4.7.) nın ortasında $(a-b)$ lik bir kare elde edilir. Bu karenin alanı $(a-b)^2$ dir. 4 tane üçgenin alanı $4(\frac{ab}{2})$ = 2ab dir. $(a-b)^2$ alanla 2ab alanın toplamı c² lik alanı verir.

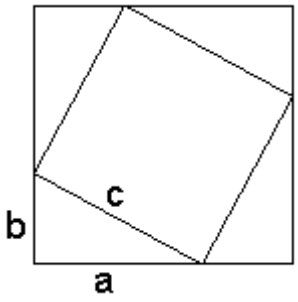
$$c^2 = (a-b)^2 + 2ab$$

$$c^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 2ab$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

elde edilir.

İspat 4: Dördüncü yaklaşımımıza bakalım, 4 tane eş üçgenin şekil (4.8.) gibi birleşmesiyle oluşacak şekli inceleyelim.



Şekil (4.8.)

Bu üçgenlerin birleşmesiyle $(a+b)$ uzunluğunda bir kare oluşturduğu görülür. Şekil (4.8.) in iç kısmında ise, c birimlik bir kare oluşur. Buradan 4 tane üçgenin alanı $4(\frac{ab}{2})$,

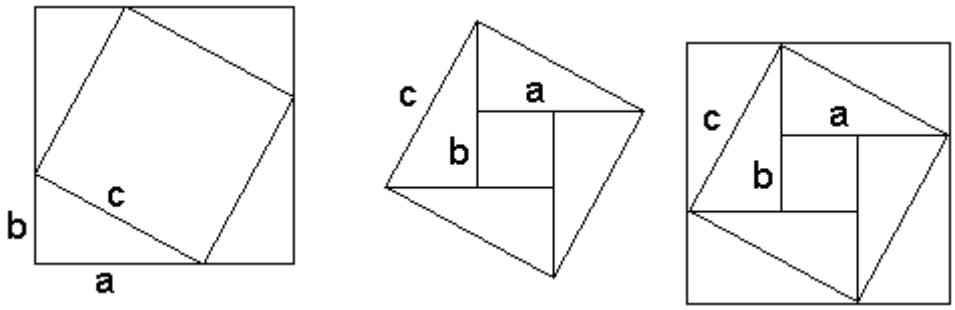
ortadaki karenin alanı c^2 dir. Büyük karenin alanı ise, $(a + b)^2$ olarak yazılabilir. Bu alanları eşitlersek;

$$(a + b)^2 = 4(\frac{ab}{2}) + c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

elde edilir.



Şekil (4.9.)

buradan,

$$c^2 = (a - b)^2 + 4(\frac{ab}{2})$$

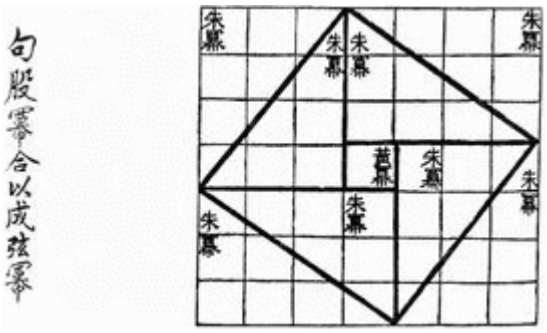
$$c^2 = (a + b)^2 - 4(\frac{ab}{2})$$

$$2c^2 = 2b^2 + 2a^2$$

$$c^2 = b^2 + a^2$$

elde ederiz. Böylece Pisagor teoremine ulaşırız.

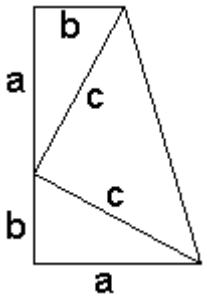
Şekil (4.9.) a örnek olarak 3-4-5 üçgenini birim kareler üzerinde gösterelim. Şekil (4.10.) incelersek,



Şekil (4.10.): Milattan önce 300 ve milattan sonra 200 yılları arasında 3-4-5 üçgeni özellikli *Chou Pei Suan ın bir çalışması*

olduğu görülür.

İspat 5: Aşağıdaki şekil (4.11.) da yine Pisagor teoremine ulaşmaya çalışalım. Şeklimizde 2 tane eş dik üçgen ve bir tane dik üçgenin birleşmesi vardır. Şekil olarak ise dik yamuk oluşur.



Şekil (4.11.)

Şekil (4.11.) de yamuğun alanını, üst kenar ile alt kenarın toplamının yarısıyla, yüksekliğin çarpımından elde edilir. Yani,

$$\text{Yamuğun Alanı} = (a+b)\frac{(a+b)}{2} = \frac{(a+b)^2}{2}$$

dir.

Diğer taraftan; Şekil (4.11.) de 2 tane eş dik üçgen ve bir tane dik üçgenin alanı da yine yamuğun alanını verir. Alanları toplarsak;

Üçgenlerin Alanları Toplamı = $2(\frac{ab}{2}) + (c\frac{c}{2}) = ab + \frac{c^2}{2} = \frac{c^2+2ab}{2}$ olur.

Bu alanları birbirine eşitlersek;

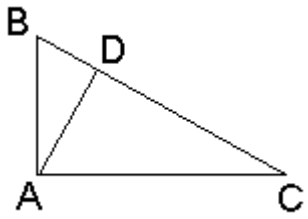
$$\frac{(a+b)^2}{2} = \frac{c^2+2ab}{2}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

elde edilir. Böylece Pisagor teoremine ulaşmış oluruz.

İspat 6 : Pisagor teoremini benzerlik oranları ile elde edelim. Bunun için ABC, DBA, ve DAC üçgenleri benzer üçgenler olsun. ∠BAC, ∠ADC açıları dik açılar olmak üzere; ABC üçgeninde Pisagor teoremini Şekil (4.12.) de gerçekleştirelim.



Şekil (4.12.)

Şekil (4.12.) den ABC, DBA, ve DAC üçgenlerinde benzerlik oranlarını yazılırsa,

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BD|}{|AB|} \; ve \; \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|DC|}{|AC|}$$

ve düzenlenirse,

$$|AB||AB| = |BD||BC|$$

$$|AC||AC| = |DC||BC|$$

ifadeleri taraf tarafa toplanırsa,

$$|AB||AB| + |AC||AC| = |BD||BC| + |DC||BC|$$

elde edilir.

Eşitliğin sağ tarafında $|BC|$ ortak parantezine alırsak;

$$|AB||AB| + |AC||AC| = (|BD| + |DC|)|BC|$$

$|BD|+|DC| = |BC|$ ve $|AB||AB| + |AC||AC| = |BC||BC|$

elde edilir. Buradan;

$$|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$$

bulunur.

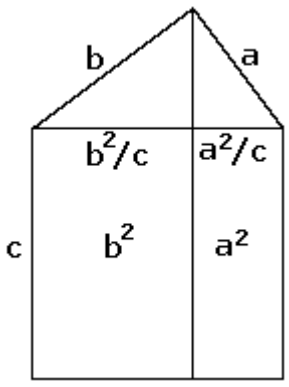
Başka bir yoldan da ispatımızı gösterebiliriz.

Şekil (4.12.) de $|AB| = a$, $|AC| = b$, $|BC| = c$, olmak üzere; ABC üçgenimizde benzerlik oranlarını kullanarak BD, DC kenar uzunluklarını bularak işe başlayalım.

$|BD| = x$ dersek; $a^2 = cx$ ve $b^2 = c(c - x)$ denklemlerini elde ederiz.

BD kenar uzunluğu $\frac{a^2}{c}$ bulunur. Ve aynı mantıkla DC kenar uzunluğumuzu da DC $= y$ alınırsa, $b^2 = yc$ bulunur.

Şekil (4.13.) göz önünde bulundurulursa,



Şekil (4.13.)

$$(\frac{b^2}{c})c = b^2$$

$$(\frac{a^2}{c})c = a^2$$

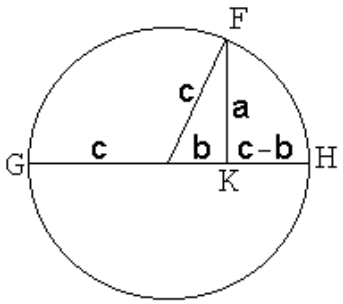
olarak bulunur. Buda bize büyük karenin alanı olan c^2 yi verir.

Buna göre;

$$b^2 + a^2 = c^2$$

elde edilir. Dolayısıyla Pisagor teoremine ulaşırız.

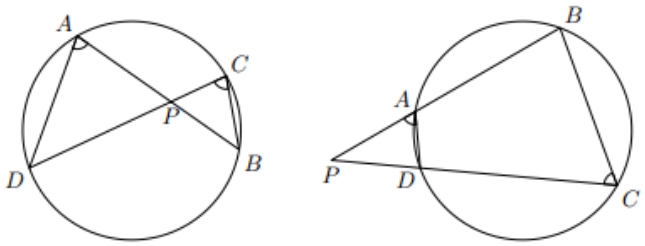
İspat 7: Yarıçapı c olan bir çember çizelim. Şekil(4.14.) de bu çemberin içine hipotenüs uzunluğu c birim olan ve kenar uzunlukları a ve b birim olan bir dik üçgen yerleştirelim. Bu durumda $a^2 + b^2 = c^2$ bulunur.



Şekil (4.14.)

ispatı kuvvet teoremini kullanarak gösterelim. Kuvvet teoremi şu şekilde verilir.

Teorem 4.1: Düzlemde bir çember ve bir P noktası verilsin. Çember üzerinde A, B birer nokta olmak üzere; Bu noktaları P noktasından geçecek şekilde birleştirelim. Aynı şekilde çember üzerinde C ve D birer nokta olsun; Bu noktaları P noktasından geçecek şekilde birleştirelim. O halde; $|PA||PB| = |PC||PD|$ uzunluklar çarpımı sabittir (Honsberger, 2001).



Şekil(4.15.)

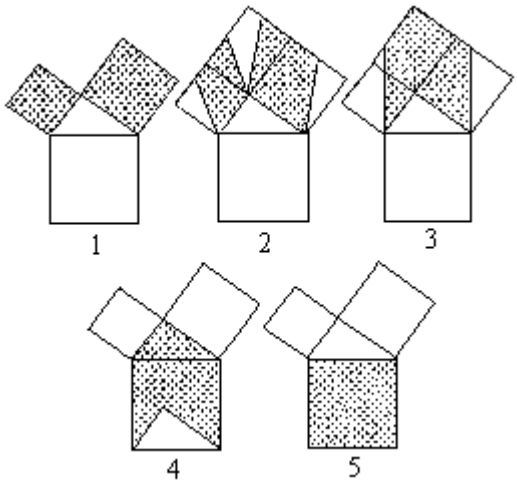
ispatımıza geri dönersek; kuvvet teoremine göre,

$$aa = (c+b)(c-b) \Rightarrow a^2 = c^2 - b^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

İspat 8 :



Şekil (4.16.)

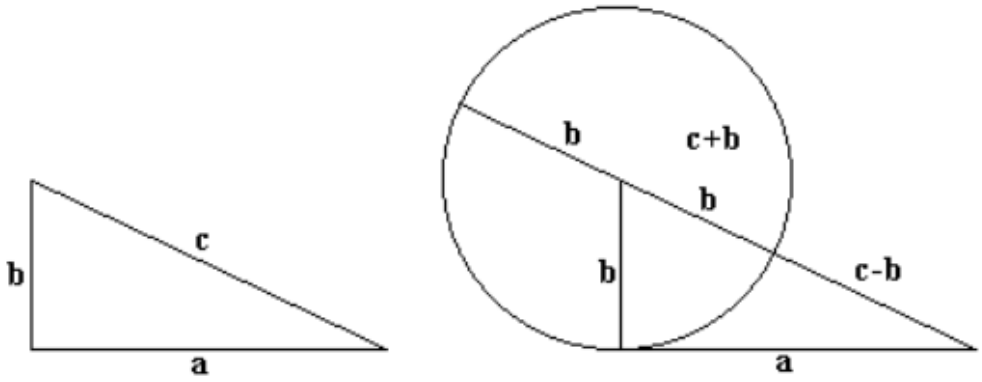
Şekil (4.16.) daki 1 nolu şekilde görülen küçük siyah karelerin alanları sırasıyla a^2 ve b^2 büyük karenin alanı c^2 olsun. Birinci parçadaki siyah şekiller ikinci parçadaki şekiller gibi yerleştirildiğinde toplam alan değişmez yine $a^2 + b^2$ dir.

Şekiller hareket ettirilerek şekil (4.16.) da yer alan 5. şekil elde edilir. O halde;

$$a^2 + b^2 = c^2$$

olur.

İspat 9 :



Şekil (4.17.)

Şekil (4.17.) de bir dik üçgene, b yarıçaplı çember şekildeki gibi çizilirse; Şekil (4.17.) elde edilir.

Şekil (4.17.) de kuvvet teoremini uygulayarak çözersek;

$$(c - b)(c + b) = a^2$$

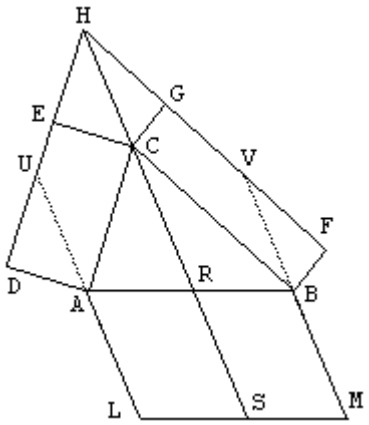
$$c^2 + cb - cb - b^2 = a^2$$

$$c^2 - b^2 = a^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

elde edilir. Böylece Pisagor teoremine ulaşırız.

İspat 10 :



Şekil (4.18.)

Şekil (4.18.) de genel olarak Pisagor teoremi, ABC üçgeni dik açılı bir üçgen ise ABC üçgeninin alanları toplamı $a^2 + b^2 = c^2$ şeklindedir.

Ayrıca, ABC üçgeninin dik açılı bir üçgen olmadığını düşünelim. ABC üçgeninin kenarlarının karelerinin yerine keyfi paralel kenarlar inşa edelim.

Şekil (4.18.) de inşa edilen paralel kenarlar CADE ve CBFG olmak üzere; DE uzunluğu ve GF uzunluğu, H noktasında kesişsin.

Ayrıca, HC uzunluğuna eşit ve paralel olmak üzere AL uzunluğunu ve BM uzunluğunu çizelim. Burada; ABML bölgesinin alanı CADE bölgesinin alanı ile CBFG bölgesinin alanının toplamına eşittir.

$$\text{Alan(ABML)} = \text{Alan(CADE)} + \text{Alan(CBFG)}$$

Bunun yanı sıra, şekilden de anlaşıldığı gibi CADE, CAUH, SLAR dörtgenlerinin alanları birbirine eşittir.

$$\text{Alan(CADE)} = \text{Alan(CAUH)} = \text{Alan(SLAR)}$$

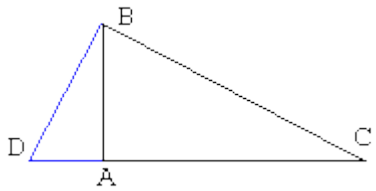
böylece,

Alan(CBFG) = Alan(CBVH) = Alan(SMBR)

olarak ifade edilebilir.

Buradan şekil (4.18.) de ABC dik açılı bir üçgen olmadığı halde ABML dörtgeninin alanı CADE bölgesinin alanı ile CBFG bölgesinin alanının toplamına eşit olduğu bulunur.

İspat 11 :



Şekil (4.19.)

Bu ispat, ispat 6 nın bir varyasyonudur. Şekil (4.19.) da B açısı 90° olsun. AB uzunluğunun küçük kenarının yanına A açısı dik olan bir üçgen çizelim. Çizilen üçgen ABC üçgeni ile benzer üçgendir. ABC üçgeni ABD üçgenine benzerdir. Doğal olarak DBC üçgeni de diğer iki üçgene (ABC, ABD) benzer olur. Buradan; ABD üçgeninin alanı ile ABC üçgeninin alanının toplamı DBC üçgeninin alanını verir.

Alan(ABD) + Alan(ABC) = Alan(DBC)

buradan benzer üçgenleri kullanarak;

$$|AD| = \frac{|AB|^2}{|AC|} \text{ ve } |BD| = \frac{|AB||BC|}{|AC|}$$

elde edilir.

Bu ifadeleri beraber kullanarak, alan denkleminde yerine yazılmasıyla;

$$(\frac{|AB|^2}{|AC|})|AB| + |AB||AC| = (\frac{|AB||BC|}{|AC|})|BC|$$

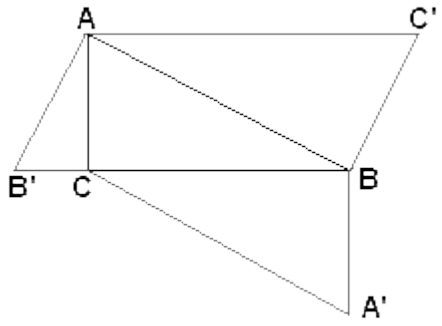
elde edilir.

Burada eşitliğin her iki tarafını $\frac{|AB|}{|AC|}$ ye bölelim. Böylece,

$$|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$$

bulunur.

İspat 12:



Şekil (4.20.)

Şekil (4.20.) de ACB; BCA; ACB′ üçgenleri ABC üçgenine benzer, ∠C açısının ölçüsü 90˚ olsun. ΔABC = ΔA'BC eşit olsun. Buna ilaveten ABB' üçgeni ve ABC' üçgenine eşit olsun. Buradan biz şu sonucu çıkartabiliriz.

$$\text{Alan}(A'BC) + \text{Alan}(AB'C) = \text{Alan}(ABC')$$

Buradan şekildeki benzer üçgenleri kullanarak elde edilen

$$|B'C| = \frac{|AC|^2}{|BC|} \text{ ve } |BC'| = |AC|\frac{|AB|}{|BC|}$$

ifadeleri alan denkleminde yerine yazarsak;

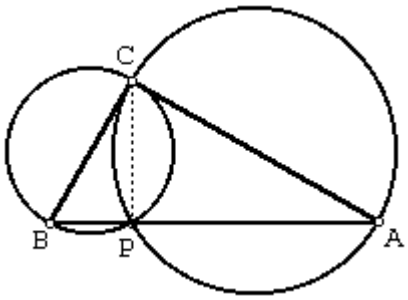
$$|AC||BC| + (\frac{|AC|^2}{|BC|})|AC| = |AB|(|AC|\frac{|AB|}{|BC|})$$

elde edilir. Denklemi düzenlersek;

$$|BC|^2 + |AC|^2 = |AB|^2$$

bulunur.

İspat 13: Şekil (4.21.) de bir çemberin dışından bir B noktası alınsın. Bu nokta üzerinden çembere BC uzunluğunda bir teğet çizilsin. Aynı nokta üzerinden çizilen bir doğru parçası bu çemberi A ve P noktalarında kessin.



Şekil (4.21.)

Burada ΔABC üçgeni dik açılı bir üçgen olsun. Bu üçgenin ∠C açısı dik açı olmak üzere, C noktasından hipotenüse ait yüksekliği çizelim. Bu yükseklik P noktasından geçer, o halde ΔCPB dik üçgendir. ∠P açısı dik olduğu için AC uzunluğu büyük çemberin çapı olur. Aynı şekilde ∠P açısı dik olduğu için küçük çemberin çapı BC uzunluğu olur. Burada uzunlukları; BP = x ve PA = y dersek, AB uzunluğunun AB = x + y buluruz. ΔABC üçgeninin açılarını ∠A, ∠B, ∠C olarak gösterirsek bu açıların karşılarına denk gelen kenarların uzunluklarını da a, b, c diye gösterirsek; c = x + y olur. ∠C açısı dik açı olduğu için CA çaplı çembere BC uzunluğu teğettir. Kuvvet Teoremini kullanarak ifademizi yazalım. $a^2 = xc$; Benzer şekilde BC çaplı çembere AC uzunluğu teğet olduğunda; $b^2 = yc$ olarak bulunur.

$$a^2 = xc \text{ ve } b^2 = yc$$

denklemlerini taraf tarafa toplarsak,

$$a^2 + b^2 = xc + yc$$

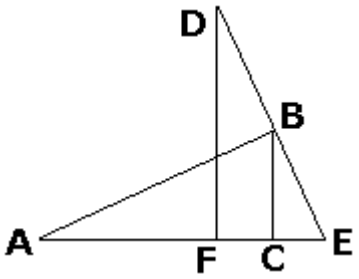
$$a^2 + b^2 = (x + y)c$$

ve x + y = c olarak alırsak,

$$a^2 + b^2 = c^2$$

elde edilir.

İspat 14:



Şekil (4.22.)

Şekil (4.22.) de ΔABC ve ΔDEF üçgenleri iki eş ve dik üçgen olsun. Öyle ki B noktası $|DE|$ üzerinde ve A, F, C, E noktaları doğrudaş olmak üzere; $|BC| = |EF| = a$, $|AC| = |DF| = b$, $|AB| = |DE| = c$ olur. Ayrıca; ABC üçgeni DEF üçgeni ile eş iki üçgendir. Buradan $|AB| \perp |DE|$ ye ulaşılır. Şekil (4.22.) de $|AB| \perp |DE|$ olduğundan ΔADE üçgeninin alanını iki farklı yolla bulunabilir.

$$\text{Alan}(\Delta ADE) = \frac{|AB||DE|}{2} = \frac{c^2}{2}$$

$$\text{Alan}(\Delta ADE) = \frac{|DF||AE|}{2} = \frac{b|AE|}{2}$$

$$|AE| = |AC| + |CE| = b + |CE|$$

Şekil (4.22.) de BCE ve DFE üçgenlerinin benzerliğinden $|CE|$ bulunabilir.

$$\frac{|CE|}{|FE|} = \frac{|BC|}{|DF|} \Rightarrow |CE| = \frac{(|BC||FE|)}{|DF|} \Rightarrow |CE| = \frac{aa}{b} \Rightarrow |CE| = \frac{a^2}{b}$$

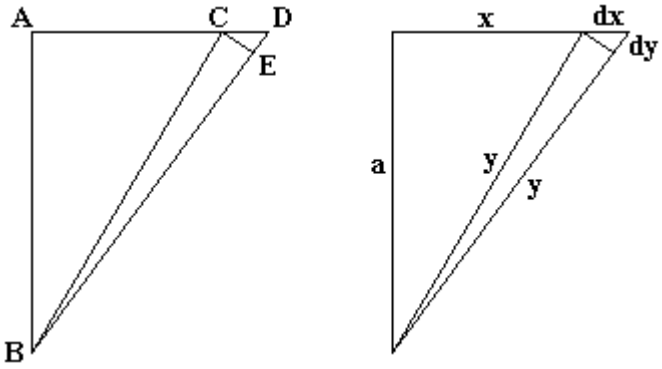
$$|AE| = |AC| + |CE| = b + |CE| \Rightarrow |AE| = b + \frac{a^2}{b} \Rightarrow |AE| = \frac{a^2+b^2}{b}$$

$$\text{Alan}(\Delta ADE) = \frac{|AB||DE|}{2} = \frac{c^2}{2} = \frac{|DF||AE|}{2} = \frac{b(b + \frac{a^2}{b})}{2}$$

$$c^2 = b^2 + a^2$$

olarak elde ederiz.

İspat 15:



Şekil (4.23.)

Şekil (4.23.) de ΔABC üçgeni dik açılı bir üçgen olsun. Bunun yanı sıra $|BC|$ hipotenüs olmak üzere; $|AC|$ = x ve $|BC|$ = y olarak gösterelim. Sonra, C noktasını $|AC|$ doğrusu boyunca uzatalım. Böylece x değiştiği için y de değişir. Burada x in dx kadar değiştiğini, y nin de dy kadar değiştiğini varsayalım. ΔCDE üçgeni bir dik üçgen olduğundan, ΔABD üçgeninde ∠D bir açıdır. Bu nedenle ΔABD üçgeni, ΔABC üçgenine benzer bir üçgen olur. Buradan benzerlik oranını,

$$\frac{x}{y} = \frac{dy}{dx}$$

olarak yazabiliriz.

Bu denklemi düzenlersek;

$$ydy - xdx = 0$$

diferansiyel denklemini elde ederiz. Burada her iki tarafının da integralini alırsak;

$$y^2 - x^2 = \text{sabit sayı}(a^2)$$

elde edilir.

Başlangıç koşulunu, x = 0 için, y(0) = a olarak tanımlayalım.

$$y^2 - x^2 = a^2$$

$$y^2 = x^2 + a^2$$

olarak bulunur.

Şekil (4.23.) de ABC ve ABD üçgenlerinden Pisagor teoremlerini sırasıyla

ABC üçgeninde, $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$

ABD üçgeninde , $|AB|^2 + |AD|^2 = |BD|^2$

şeklinde yazabiliriz.

Şimdi $x + dx$ ve $y + dy$ nin değerlerini

$$x^2 + a^2 = y^2$$

denkleminde yerine yazarsak;

$$(x + dx)^2 + a^2 = (y + dy)^2$$

buluruz. O halde;

$$ydy - xdx = \frac{dx^2 - dy^2}{2}$$

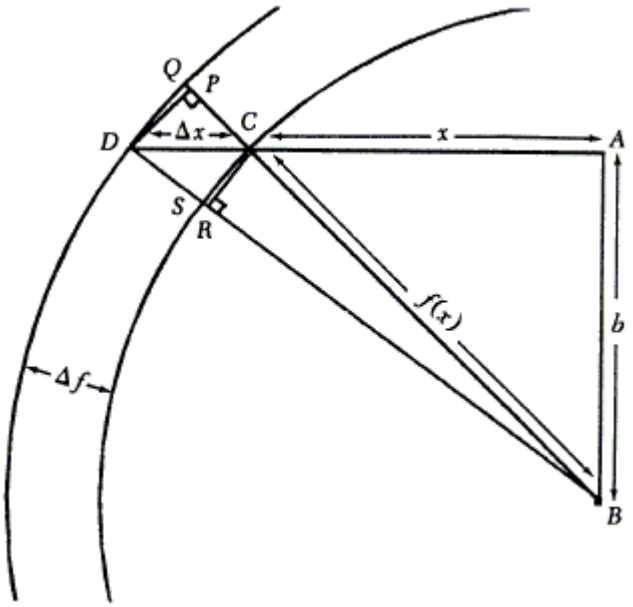
olarak bulunur.

Burada dx ve dy çok küçük olduğu için, dx^2 ve dy^2 değerlerini göz ardı edebiliriz. O zaman yaklaşık olarak,

$$ydy - xdx = 0$$

diferansiyel denklemini buluruz.

Bu ispatı daha geniş kapsamlı ele alalım. Şekil (4.24.) e bakacak olursak;



Şekil (4.24.)

Δx > 0 olsun. Şekil (4.24.) de benzer üçgenleri kullanarak,

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{|CQ|}{|CD|} > \frac{|CP|}{|CD|} = \frac{|CA|}{|CB|} = \frac{x}{f(x)}$$

elde edilir. Aynı zamanda,

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{|SD|}{|CD|} < \frac{|RD|}{|CD|} = \frac{|AD|}{|BQ|} = \frac{x+\Delta x}{f(x)+\Delta f} < \frac{x}{f(x)} + \frac{\Delta x}{f(x)}$$

Δx limit değeri 0 a sağdan yaklaşırken

$$\frac{df}{dx} = \frac{x}{f(x)}$$

Δx < 0 durumunda, benzer işlemleri yaparsak, diferansiyel denkleminin çözümünü;

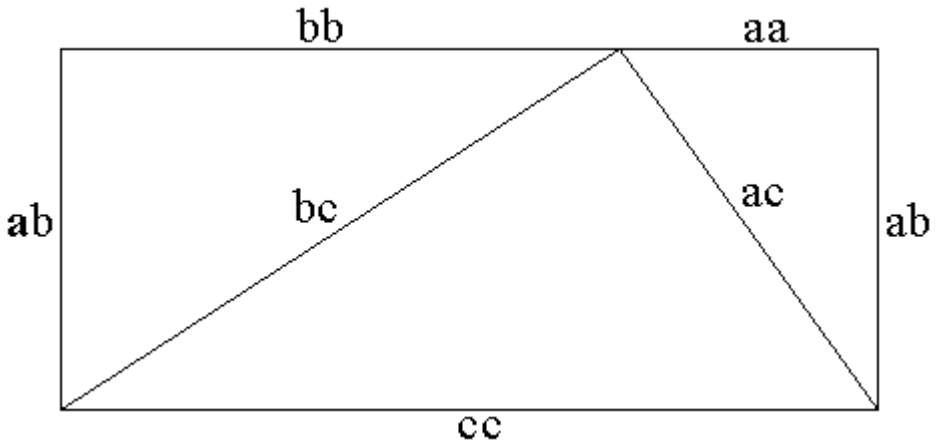
$$f^2(x) = x^2 + c$$

olarak buluruz. Buradaki c sabiti f(0) = b , sınır koşullarından $c = b^2$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

İspat 16: Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları a, b, c olsun. Bu kenarlar ölçekli olarak, sıralı bir şekilde a, b, c kenar uzunluklarını c ile çarparsak;

Şekil (4.25.) de yeni kenar uzunlukları sırasıyla ac, bc, cc olur. Daha sonra a, b, c kenar uzunluğunu b ile çarpalım. Buradan da ab, bb, cb elde edilir.

Aynı şekilde a, b, c kenar uzunluğunu a ile çarpalım. Buradan da aa, ba, ca olarak bulunur. Şekil (4.25.) de gösterecek olursak;



Şekil (4.25.)

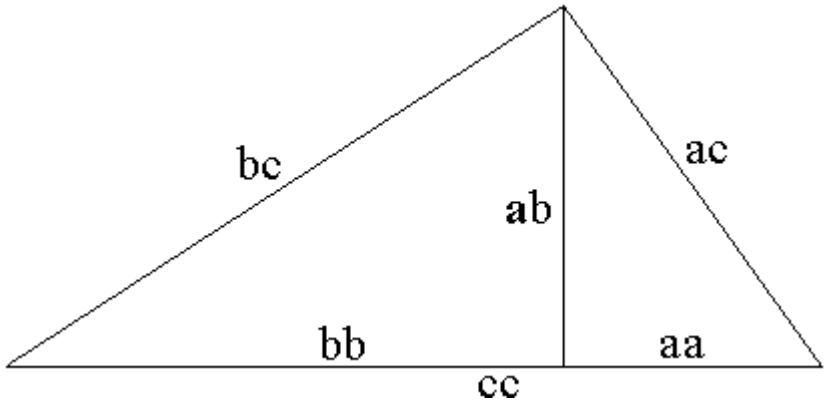
elde edilir.

Yukarıdaki Şekil (4.25.) de benzer üçgenler vardır. Burada dikdörtgenin üst kenar uzunluğu bb + aa ve alt kenar uzunluğu da cc olduğu açıktır.

Buradan;

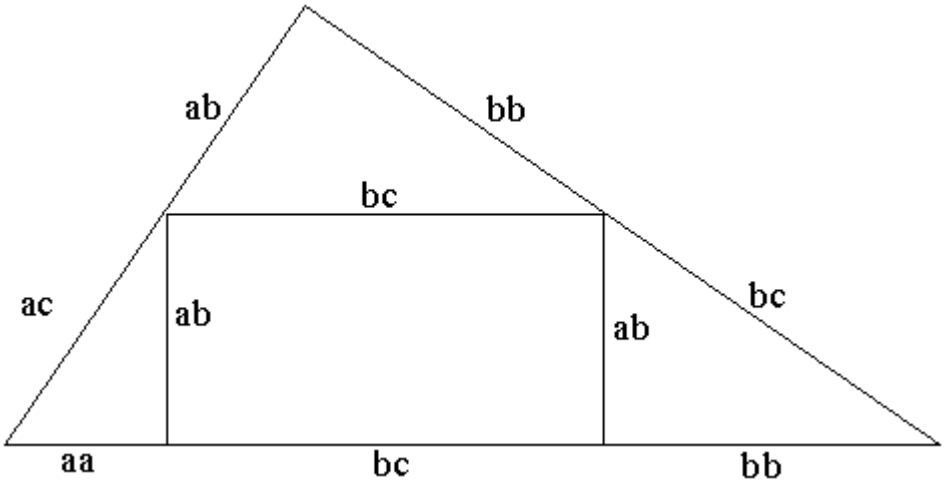
$$a^2 + b^2 = c^2$$

elde edilir.



Şekil (4.26.)

aynı şekilde şekil (4.26.) da elde edilir.

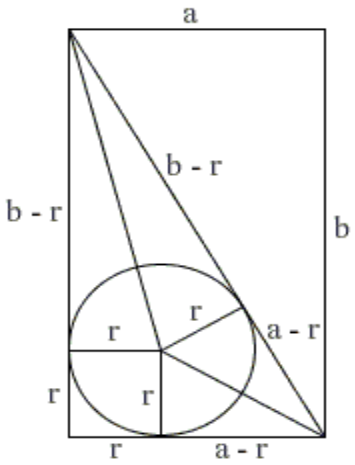


Şekil (4.27.)

Benzer olarak, şekil (4.27.) yi de elde edebiliriz.

İspat 17: Şekil (4.28.) de üçgenin dik kenar uzunlukları a ve b hipotenüs uzunluğu c ve çemberin yarıçapı r , üçgenin yarı çevresi de p olmak üzere;

$p = \frac{a+b+c}{2}$ olsun.



Şekil (4.28.)

Şekil (4.28.) de içinde daire bulunan üçgenin alanı rp dir.

Hipotenüs uzunluğu $c = (a - r) + (b - r)$ olur. Buradan düzenleme yaparak, $r = p - c$ bulunur. Burada üçgenin alanını iki yoldan oluşturabiliriz. Birinci yol $p(p - c)$, ikinci yol $\frac{ab}{2}$ olur. bu iki ifadeyi birbirine eşitlersek,

$$p(p - c) = \frac{ab}{2}$$

ve $p = \frac{a+b+c}{2}$ yazarsak;

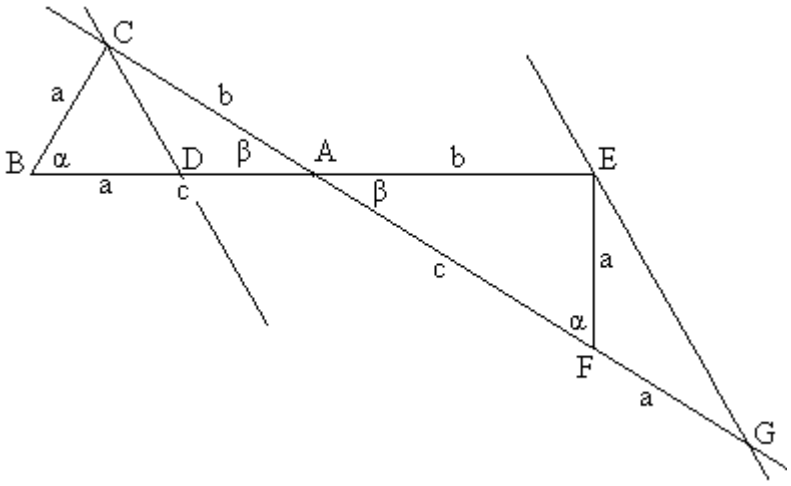
$$(a + b + c)(a + b - c) = 2ab \Rightarrow (a+b)^2 - c^2 = 2ab$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

İspat 18: Şekil (4.29.) daki ABC ve AFE üçgenleri iki dik üçgen olsun. $|BE|$ ve $|CF|$ nin kesişimi A, $|BA|$ üzerinde D, $|AF|$ nin uzantısında da G noktaları olsun. $|BC| = |BD| = |FG| = |EF|$ eşitliği verilsin.

O halde; BCD üçgeni ikizkenar bir üçgen olur. Bunun yanı sıra, C dik açı olduğu için, $\angle BCD = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ olarak yazabiliriz.



Şekil (4.29.)

$\angle ACD = \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}) = \frac{\alpha}{2}$ olarak elde ederiz. $\angle AFE$ açısı EFG üçgeninin dış açısı olduğu için, $\angle AFE = \angle FEG + \angle FGE$ olur. Burada, EFG üçgeni ikizkenar bir üçgen olduğu için, $\angle AGE = \angle FGE = \frac{\alpha}{2}$ olur.

Şimdi, $|CD|$ ve $|EG|$ kenarlarının paralel olduğunu gösterelim. ACD ve AGE üçgenlerine bakacak olursak, şekil (4.29.) da $\angle CAD = \angle EAG = \beta$ dir. Yani, CAD açısı ile EAG açısı ters açılardır. Ayrıca; ACD açısı ile AGE açıları eşittir. Buradan $|CD|$ paraleldir $|EG|$ olur. O halde; ACD ve AGE üçgenleri benzer üçgenler olduğundan,

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AE|}{|AG|}$$

yazılabilir.

$|AD|$ = c - a, $|AC|$ = b, $|AE|$ = b, $|AG|$ = c + a eşitliklerini kullanırsak,

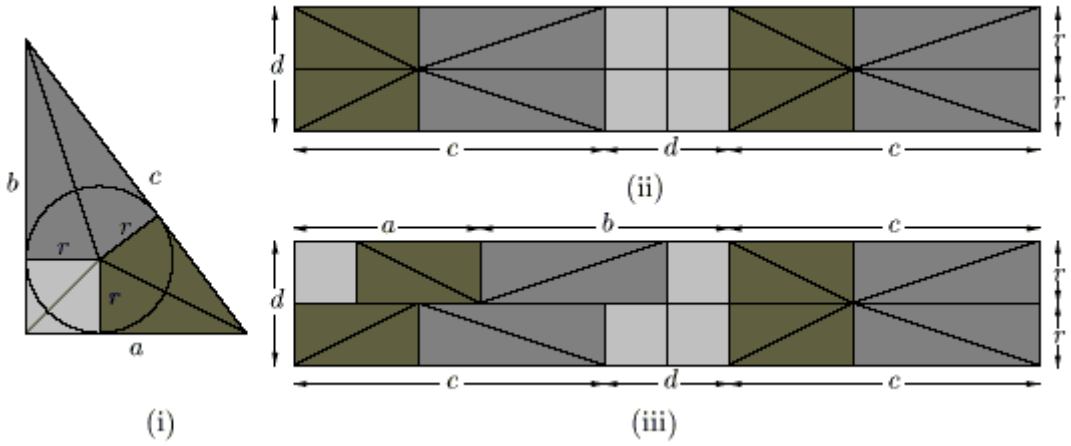
$$\frac{b}{c-a} = \frac{c+a}{b}$$

olur. Düzenlersek;

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

olur. Böylece Pisagor teoremini ispatlamış oluruz.

İspat 19:



Şekil (4.30.)

Şekil (4.30.) (i) de çemberin çapı $d = 2r$, üçgenin dik kenar uzunlukları a ve b, hipotenüs uzunluğu c olsun. Ayrıca, Şekil (4.30.) (i), (4.30.) (ii) ve (4.30.) (iii) den $a + b = c + d$ olduğu görülür.

$$a + b = c + d \qquad (4.1)$$

(4.1) eşitliğinde her iki tarafın karesini alırsak,

$$(a+b)^2 = (c+d)^2$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2cd + d^2 \qquad (4.2)$$

olur. Şekil (4.30.) (i) deki dik üçgenin alanı $\frac{ab}{2}$ dir. Ayrıca, dik üçgenin alanını $(\frac{a+b+c}{2})r$ olarak da yazabiliriz. Buradan bu iki alanı birbirine eşitlersek,

$$\frac{ab}{2} = \frac{(a+b+c)r}{2} \Rightarrow ab = (a+b+c)r \qquad (4.3)$$

olur. (4.3) de $a + b$ yerine $c + d$ yazarsak,

$$ab = (c+d+c)r$$
$$ab = (2c+d)r \qquad (4.4)$$

elde edilir.

(4.4) eşitliğini (4.2) de yerine yazarsak,

$$a^2 + 2[(2c+d)r] + b^2 = c^2 + 2cd + d^2$$

$$a^2 + 2(2cr + dr) + b^2 = c^2 + 2cd + d^2$$

$$a^2 + 4cr + 2dr + b^2 = c^2 + 2cd + d^2 \qquad (4.5)$$

elde edilir. (4.5) de $d = 2r$ yazarsak,

$$a^2 + 4cr + 2(2r)r + b^2 = c^2 + 2c(2r) + (2r)^2$$

$$a^2 + 4cr + 4r^2 + b^2 = c^2 + 4cr + 4r^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

elde edilir. Böylece Pisagor teoremini ispatlamış oluruz.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında matematikte merak edilen konuları ele aldık. Bu konuları açıklama ve örnekler vererek gösterdik. Matematiksel mantığın ispat tekniklerinin bir alt yapısını oluşturduğunu gördük. Böylece buradan yola çıkarak ispatlar yaptık.

Fibonacci sayılarını ispat tekniklerinden yardım alarak nasıl meydana geldiğini gördük. Binet teoreminin ve Binom teoreminin tümevarım yöntemiyle ispatını yaptık. Ayrıca, Fibonacci sayısının Altın oran ve Pascal üçgeniyle olan ilişkisinden bahsettik. Böylece ispat tekniklerinin, sadece belirli bir alanda sınırlı olmadığını ve ispat tekniklerini her alanda kullanabileceğimizi gördük.

Farklı bir bakış açısı geliştirerek ispat tekniklerini kullanmadan geometrik ifadelerin yardımıyla ispat yaparak Pisagor teoremine ulaştık.

Bu çalışmada ispat teknikleri dört temel ispat adı altında toplanıp verilmiştir. Bir başka çalışmada daha fazla ispat teknikleri ele alınabilir. Ayrıca, ispat teknikleri kullanılmadan geometriden yararlanarak Pisagor teoremine ulaşılmıştır. Yine geometriden yararlanarak Pisagor teoreminden başka teoremlere de ulaşılması araştırılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Bloch, Ethan D. , 2011, Proof and Fundamentals A First Course in Abstract Mathametics Second Edition, San Francisco USA. 47-53 p.

Özer, O., 1998, Soyut Matematik, T.C Anadolu Üniversitesi Yayınları No:1062. 3-4 , 10 s.

Bilgiç, H., 2011, Soyut Matematik Ders Notları, Kahraman Maraş Sütçü İmamÜniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü. 1-8 s.

Akkaş, A., Hacısalihoğlu, H., Özel, Z., Sabuncuoğlu, A., 1998, Soyut Matematik, Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayın No:6 Ankara. 2-10 s.

Çallıalp, F., 2005, Örneklerle Soyut Matematik, Birsen Yayın Evi, İstanbul.

Day, M. V., 2008, An İntroduction to Proof and The Mathematical Vernacular, Departman of Mathematics Virginia Tech, Blacksburg, Virginia 24061. 45 - 46, 10 - 13, 17 – 23 p.

Aigler, M., Zeigler, G.M., 1998, Proofs from The Books,Berlin, Newyork, Springer-Verlag, 27-36 p.

İvan, N., 1947, A simple Proof That π is İrrational, Bulletin of The American Matematical Society 53(6): 509. 19-20 p.

Alladi, K., 1975, A Farey Sequence of Fibonacci Numbers, The Fibonacci Quarterly, Vol.13, No:1. 32 p.

Opstall, V.M., 2008, History Of Math, An Exploration into The Golden Ratio.

Emery, C., 2011, Fibonacci Numbers and The Golden Ratio Continued Fractions, Emery University Press. 2-17 p.

Earl, R., 2003, Mathematical Institute, Oxford, Ox1 2LB. 9-18 p.

Rotman, J., 1998, Journey into Mathematics, An İntroduction to Proofs , Prentice Hall.

KAYNAKLAR DİZİNİ (DEVAM)

Acheson, D., 2002, 1089 and All That, Oxford University Press. 10-13 p.

Burton, D., 2007, Elementary Number Theory , 6 th Edition, Mcgraw hill Higher Education, Newyork.

L.Toth., 2002, The Probality That k positive integers are pairwise relativly prime, Fibonacci Quart, 13-18 p.

Kifowit, S.J., 2011, More Proofs Of Divergence of The Harmonic Series, Prairie College. 1-5 p.

Kifowit, S.J., Stamps T.A, 2006, The harmonic series diverges again and again , The Amatyc Review, 31-43 p.

Camoren, P.J., 2007, These notes accompanied the course MAS219, Combinatorics, at Queen Mary, University of London, in the Autumn semester.

Matozzia, A., 2001, Lecture Note Econ 897 Universty of Pennsylvania Summer. 1-17 p.

Özer, M.N., Eser, D., 1996, Diferansiyel Denklemler (Teori ve Uygulamaları), Birlik Ofset, Eskişehir.

Akdeniz, F., 2006 , Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü 01330 Adana. 3, 23 s.

Alpay, Ş., 1996, Pisagor üçlüleri Bilim ve Ütopya İstanbul. 21-22 s.

Sparks, J.C., 2008, The Pythagorean Theorem Published by Author House 1663 Liberty Drive, Suite 200 Bloomington, İndiana 47403. 22-44 , 54-67 p.

Birkhoof, J.D ve Beatley, R., 2000, Basic Geometry, AMS Chealsea Pub.

Frederickson, G.N., 2002, Hinged Dissections: Swinging & Twisting , Cambridge University Press.

KAYNAKLAR DİZİNİ(DEVAM)

Nelson, R.B., 1993, Proof Without Words I, MAA.

Nelson, R.B., 2000, Proof Without Words II, MAA.

Pritchard, C., 2003, The Changing Shape of Geometry, Cambridge University Press. 199, 211, 228-232 p.

Honsberger, R., 2001Mathematical Chestnuts from Around The World, MAA, 115 p.