A-Metrik Uzayda Suzuki Tip Sabit Nokta Teoremleri

Esra Çolak Aktaş

DOKTORA TEZİ

Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı

Eylül 2021

Suzuki Type Fixed Point Theorems in A-Metric Space

Esra Çolak Aktaş

DOCTORAL DISSERTATION

Deparment of Mathematics - Computer

September 2021

A-Metrik Uzayda Suzuki Tip Sabit Nokta Teoremleri

Esra Çolak Aktaş

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Özcan Gelişgen

Eylül 2021

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Özcan Gelişgen danışmanlığında hazırlamış olduğum "A-Metrik Uzayda Suzuki Tip Sabit Nokta Teoremleri" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 06/09/2021

Esra ÇOLAK AKTAŞ

ÖZET

Sekiz bölümden oluşan bu tez çalışmasında, alışılmış metrik uzay ve onun genelleştirilmişleri olan $S-$metrik uzay ve $A-$metrik uzay kavramları ele alınarak ilgili metrik uzaylarda iyi bilinen sabit nokta teoremlerinin Suzuki tip genellemeleri çalışılmıştır.

Birinci bölümde, tezde ele alınacak olan Suzuki teoremi ve sabit nokta teoremlerinin genel anlamda kullanımından ve gelişiminden kısaca bahsedilmiş olup konunun girişi ve amacı verilmiştir.

İkinci bölümde, alışılmış ve genelleştirilmiş metrik uzayların tarihsel gelişimi hakkında literatür özeti yapılmıştır.

Üçüncü bölümde, tez çalışması boyunca kullanılacak olan temel kavramlar, tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Dördüncü, beşinci ve altıncı bölümde, alışılmış metrik uzay, $S-$metrik uzay ve $A-$metrik uzaylarda sırasıyla Banach, Kannan, Bianchini, Chatterjea, genelleştirilmiş Chatterjea, Ćirić, Reich, Hardy Rogers teoremlerinin Suzuki tip genellemeleri verilmiş olup her bölümün sonunda sabit nokta teoremlerini genelleyen kapalı bağıntının Suzuki tip genellemesi verilmiştir.

Yedinci ve sekizinci bölümlerde tezde elde edilen bulgular ve sonuçlar kısaca özetlenmiş olup ileride yapılması muhtemel çalışmalara dair öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Metrik Uzay, $S-$Metrik Uzay, $A-$Metrik Uzay, Sabit Nokta Teoremlerinin Suzuki Tip Genellemeleri

SUMMARY

In this thesis which consists of eight chapters, it is considered ordinary metric space and its generalized $S-$metric space and $A-$metric space, and Suzuki type generalizations of well-known fixed point theorems in related metric spaces are studied.

In the first chapter, the general use and development of Suzuki's theorem and fixed point theorems, which will be discussed in the thesis, are briefly mentioned, and the introduction and purpose of the subject are given.

In the second part, a literature review about the historical development of ordinary and generalized metric spaces is given.

In the third chapter, the basic concepts, definitions and theorems that will be used throughout the thesis are given.

In the fourth, fifth and sixth chapters, Suzuki type generalizations of Banach, Kannan, Bianchini, Chatterjea, generalized Chatterjea, Ćirić, Reich, Hardy Rogers theorems in ordinary metric space, $S-$metric space and $A-$metric spaces are given, and the Suzuki type generalization of the closed relation generalizing the fixed point theorems is given at the end of each chapter.

In the seventh and eighth chapters, the findings and results obtained in the thesis are briefly summarized and suggestions for possible future studies are presented.

Key Words: Metric Space, $S-$Metric Space, $A-$Metric Space, Suzuki Type Generalization of Fixed Point Theorems

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET . . . . . **vi**

SUMMARY . . . . . **vii**

TEŞEKKÜR . . . . . **viii**

İÇİNDEKİLER . . . . . **ix**

1. GİRİŞ VE AMAÇ **1**

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI **4**

3. TEMEL KAVRAMLAR **9**

3.1. Alışılmış Metrik Uzaylar 9

3.2. $S-$Metrik Uzaylar 12

3.3. $A-$Metrik Uzaylar 19

4. ALIŞILMIŞ METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİNİN SUZUKİ TİP GENELLEŞTİRİLMİŞLERİ **27**

5. $S-$METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİNİN SUZUKİ TİP GENELLEŞTİRİLMİŞLERİ **44**

6. A-METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİNİN SUZUKİ TİP GENELLEŞTİRİLMİŞLERİ **94**

7. BULGULAR VE TARTIŞMA **149**

8. SONUÇ VE ÖNERİLER **150**

KAYNAKLAR DİZİNİ **152**

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Sabit nokta teorisinin temelinde yer alan sabit nokta problemi "X bir küme, A ile B kesişimleri boştan farklı olan X in alt kümeleri olmak üzere bir $T : A \to B$ dönüşümü ele alınsın. Buna göre $Tx = x$ olacak şekilde bir $x \in A$ ne zaman vardır?" şeklinde ifade edilebilir. Sorudaki koşulu sağlayan $x \in A$ elemanına T nin sabit noktası adı verilir. Bu taktirde en basit anlamda sabit nokta teorisi, X bir küme ve T, X üzerinde bir kendine dönüşüm olmak üzere T nin hangi koşullar altında sabit nokta veya sabit noktalara sahip olacağının araştırıldığı bir alandır. Bu soruya yanıt veren ifadelere sabit nokta teoremi denilmektedir. O halde sabit nokta teoremleri belirli koşullar altında $T : X \to X$ dönüşümünün bir veya daha fazla sabit noktasının varlığını kanıtlayan ifadelerdir.

Tarihsel olarak, sabit nokta teorisindeki veya başka deyişle sabit nokta teoremlerindeki en önemli sonuç L.E.J. Brouwer'in 1912 yılında yayımladığı ünlü teoremidir. Bu teoreme göre $n-$boyutlu Öklidyen uzay $\mathbb{R}^n$ de kapalı birim yuvarın kendi üzerine olan her sürekli dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir. Brouwer sabit nokta toremi gerçekte Poincare'nin 1886 yılında ispatladığı aşağıdaki ifadeye denktir. "$f : E^n \to E^n$ sürekli fonksiyonu bazı $r > 0$ ve $\alpha > 0$ için $f(x) + \alpha x \neq 0$, $\|x\| = r$ koşullarını sağlıyorsa, $\|x_0\| < r$ ve $f(x_0) = x_0$ olacak şekilde bir x_0 noktası vardır." Ayrıca f bir sürekli diferansiyellenebilir fonksiyon olmak üzere $\frac{dy}{dx} = f(x, y)\,; y(x_0) = y_0$ diferansiyel denkleminin çözümünün varlığı ve tekliği için bir ispat veren ilk matematikçi 1844 yılında yayımladığı çalışması ile A.L. Cauchy'dir. Daha sonra 1877'de R. Lipschitz günümüzde "Lipschitz Koşulu" olarak bilinen ifadeyi kullanarak Cauchy'nin ispatını basitleştirmiştir. Bunların yanı sıra E. Sperner 1928 yılında sabit nokta teorisinde önemli bir rol oynayan bir üçgenin ayrıştırılmasına dair kombinatöryel geometrik bir teorem ispatladı. Geniş uygulamaları sayesinde, sabit nokta teoremlerine dair çok sayıda sonuç vardır. Bu sonuçlar çeşitli matematiksel modellerin örneğin diferansiyel, integral, adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin, varyasyon eşitsizlikleri gibi modellerin çözümlerinin varlığını ve tekliğini ispatlamanın en önemli araçlarıdır. Benzer şekilde diğer uygulama alanları olarak kararlı hal sıcaklık dağılımı, kimyasal reaksiyonlar, nötron taşıma teorisi, ekonomi teori, oyun teorisi, salgın hastalıklar, sıvıların akışı, optimal kontrol teori, fraktallar vb. ifade edilebilir.

Alt yapısında herhangi bir kombinatöryel topolojik kavram içermeksizin ele alınabilecek sabit nokta teoremleri de vardır. Bir tam metrik uzayın kendi üzerine olan uzaklık azaltan dönüşümler yani büzülme dönüşümleri için bir sabit nokta teoremi 1922 yılında S. Banach tarafından verildi. Bu sabit nokta teoremi günümüzde Banach Büzülme

Prensibi olarak bilinmektedir. Son zamanlarda, ardışık iterasyonların dönüşümün bir tek sabit noktasına yakınsaması özelliğini korurken Banach büzülme teoreminin hipotezi zayıflatılarak Banach büzülme prensibinin sayısız genellemesi yapılmıştır.

Buna göre özetle, sabit nokta teorisi, Brouwer'in çalışmaları ile 1912 yılında başlamış olup Brouwer'in çalışmaları topolojik sabit nokta teorisi alanının temelini oluşturmaktadır. Metrik uzaylarda ilk sabit nokta teoremi ise 1922 yılında Banach tarafından ortaya atılan "Banach Büzülme Prensibi" olup bir integral denkleminin çözümünün varlığını kanıtlamak amacıyla ortaya çıkmıştır. Ayrıca 1955 yılında Tarski'nin yaptığı çalışmalar ile ayrık sabit nokta teorisi alanının temelini oluşturmuş ve böylece sabit nokta teorisi çalışmaları topolojik sabit nokta teori, metrik sabit nokta teori ve ayrık sabit nokta teori olmak üzere üç ana başlığa ayrılmıştır.

Sabit nokta teorisi, matematiğin çeşitli alanlarında ortaya çıkan problemleri çözmek için gerekli imkanları sunar. Lineer olmayan optimizasyon problemleri, denge problemleri, başlangıç ve sınır değer problemleri, lineer cebirsel denklem sistemlerinin çözümlerinin varlığı ve tekliği gibi bir çok alan sabit nokta teorisi ile yakından ilgilidir. Uygulama alanlarının genişliğinden dolayı sabit nokta teorisi alanında pek çok bilim insanı çalışmış ve hali hazırda çalışmaktadır. Dolayısıyla bu alanda sayısız sonuç ve çalışma üretilmektedir.

Bu bağlamda sabit nokta teorisinde yeni sonuçlar elde etmek adına gerçekleştirilen çalışmalar genel anlamda;
i) Dönüşümün sabit noktalarının varlığını ifade eden koşulların araştırılması ve mevcut kısıtlayıcı koşulların azaltılmasının araştırılması,
ii) Dönüşümün sabit noktasının tekliğini veren koşulların araştırılması,
iii) Genel uzaylar inşaa etmek için tanımların değiştirilmesinin veya genelleştirilmesinin araştırılması,
iv) Karakterizasyon belirlemenin araştırılması,
v) Sabit noktaların inşaa veya yaklaşım yöntemlerinin araştırılması,
vi) İncelenen dönüşümün sabit noktalarının oluşturduğu kümenin yapısının incelenmesinin araştırılması
konularını içermektedir.

Bu çerçevede Banach büzülme ilkesi, sabit nokta teoremleri arasında üzerine en çok çalışılan teoremlerden biri olmuştur. Bu ilkenin temeli 1890 yılında Picard tarafından ortaya konulan ardışık iterasyon prosedürü olup bu yöntem kullanılarak $Tx = x$ denkleminin çözümünün tekliğine ulaşmak olmuştur. Banach büzülme ilkesi Kannan, Chatterjea, Bianchini, Reich, Hardy, Rogers, Agarwal, Ćirić, Kirk gibi birçok bilim insanı tarafından çalışılmış ve bir çok yönden genişletilmiş ve de çeşitlendirilmiştir. Ayrıca 1959 yılında

Connell yayınladığı makalesinde X üzerindeki her büzülme dönüşümünün bir sabit noktaya sahip olduğu tam olmayan bir (X, d) metrik uzay örneği vermiştir. Bu örnekle birlikte Banach büzülme prensibinin bir uzayın tamlığını karakterize etmediği ortaya konulmuş oldu. 1969 yılında Kannan tam metrik uzaylarda büzülme dönüşümü koşulunu değiştirerek yeni bir sabit nokta teoremi ispatladı. Bu teoreme göre uzay tam ise her Kannan dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir. İlk bakışta Kannan sabit nokta teoremi, Banach sabit nokta teoreminin bir genellemesi gibi görünse de gerçekte değildir. Çünkü 1975 yılında Subrahmanyam her Kannan dönüşümünün sabit noktaya sahip olduğu uzayın tam olduğunu ispatlayarak, Kannan dönüşümünün metrik tamlığı karakterize ettiğini ortaya koymuştur. Dolayısıyla bu çalışma ile genelleştirilmiş büzülme dönüşümlerinin sabit nokta çalışmaları büyük bir ilgi uyandırmıştır

Bu bağlamda Suzuki 2008 yılında yaptığı çalışma ile Banach büzülme teoreminin bir başka genellemesini verip, bu genellemedeki koşulun uzayın metrik tamlığını karakterize ettiğini ispatlamıştır. Bunun paralelinde Kikkawa ve Suzuki, Kannan sabit nokta teoreminin bir genelleştirilmesi olan ve Suzuki (2008) makalesinin Kannan dönüşümü versiyonunu literatüre katmışlardır. Sonrasında Popescu 2008 ve 2009 yıllarındaki çalışmalarıyla Suzuki 2008 çalışmasının Chatterjea sabit nokta teoremi ve Ćirić sabit nokta teoremi versiyonlarını vermiştir. Suzuki'nin ortaya attığı bu genelleştirme yaklaşımı ile beraber sabit nokta teoremleri genelleştirilerek yeni sabit nokta teoremleri elde edilmiştir. Suzuki teoremindeki yaklaşım Sedghi, Mitrovic, Radenović gibi araştırmacılar tarafından farklı metrik uzaylara taşınmış ve çeşitli örnekler sunulmuştur.

Bu çalışmanın amacı Suzuki'nin literatüre kattığı bu genelleştirme yaklaşımını alışılmış metrik uzayların birer genellemesi olan $S-$metrik uzay ve $A-$metrik uzaya uyarlayarak bu uzaylarda ilgili yaklaşımı geliştirmek ve bu sayede ilgili uzaylarda yeni sabit nokta teoremleri ortaya koymaktır. Bu bağlamda, alışılmış metrik uzaylarda iyi bilinen Banach, Kannan, Bianchini, Chatterjea, genelleştirilmiş Chatterjea, Ćirić, Reich ve Hardy-Rogers tipi büzülme dönüşümleri incelenmiş ve Suzuki tipi genelleme yöntemi kullanılarak bahsedilen bu büzülme dönüşümlerinin $S-$metrik ve $A-$metrik uzaylardaki karşılıkları elde edilmiştir. Ayrıca elde edilen sonuçlar kapalı bağıntı yöntemi ile en genel haliyle sunulmuştur.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Metrik uzay kavramı ilk olarak Fransız Matematikçi Maurice Frechét tarafından 1906 yılında "Sur Quelques Da Calcul Fonctionnel" başlıklı doktora tezinde tanımlanarak literatüre girmiştir. Frechét metrik uzayları noktanın sadece reel sayı ya da reel sayı $n-$lisi değil de soyut objeler olma düşüncesine izin veren oldukça genel bir yolla tanımlamıştır. (Fréchet, 1906). Metrik ve metrik uzay kavramı reel ve kompleks teorilerde bilinen birçok önemli özelliklerin herhangi bir uzaya nasıl aktarılacağını bize gösterir. Ayrıca topoloji teorisinde soyut olan bir takım kavramlar, metrik uzay teorisinde daha somut kavramlarla açıklanma imkanı bulur. Fréchet lineer metrik uzayları da 1926 yılındaki bir çalışmasında tanımlamıştır (Fréchet, 1926). Sonrasında metrik uzaylarla ilgili ayrıntılı çalışmalar yapılmış ve metrik uzayların uygulama alanları incelenmiştir (Copson, 1968; Giles, 1987; Rolewicz, 1985; Searcoid, 2007; Shirali, 2006). Fréchet 1906 yılında yayınladığı makalesinde uzaklık fonksiyonu kavramının tanımını aşağıdaki şekilde vermiştir.

Tanım 2.1 *X boştan farklı bir küme olmak üzere $d : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için;*
i) $x = y \iff d(x, y) = 0$
ii) $d(x, y) = d(y, x)$
iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$
koşullarını sağlıyorsa d ye X üzerinde bir uzaklık fonksiyonu ve (X, d) ikilisine de metrik uzay denir.

d fonksiyonu için metrik ifadesini ilk kez ünlü matematikçi Hausdorff kullanmıştır. Ardından Gähler 1963 yılında yaptığı çalışmasında $2-$metrik uzay kavramını aşağıdaki şekilde tanıtmış ve $2-$metrik uzayın alışılmış metrik uzayın bir genelleştirilmesi olduğunu iddia etmiştir.

Tanım 2.2 *X boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere $d : X \times X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $x, y, z, a \in X$ için;*
i) *Farklı $x, y \in X$ için $d(x, y, z) \neq 0$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır.*
ii) *$x = y$ veya $y = z$ veya $x = z$ ise $d(x, y, z) = 0$*
iii) $d(x, y, z) = d(x, z, y) = d(y, x, z) = d(y, z, x) = d(z, x, y) = d(z, y, x)$
iv) $d(x, y, z) \leq d(x, y, a) + d(x, a, z) + d(a, y, z)$

koşullarını sağlıyorsa d ye X üzerinde bir $2-$metrik denir ve ayrıca (X,d) ikilisine $2-$metrik uzay adı verilir.

$2-$metriğe bir örnek olarak $X=\mathbb{R}^2$ olmak üzere $d: X\times X\times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu her $x,y,z\in\mathbb{R}^2$ için x,y,z köşelerine sahip üçgenin alanı olarak tanımlanabilir.

Her ne kadar Gähler yaptığı çalışmada $2-$metrik uzayın, alışılmış metrik uzayın bir genelleştirilmesi olduğunu öne sürmüş olsa da Ha vd. 1988 yılında yayınladıkları bir çalışmada $2-$metrik fonksiyonun değişkenleri üzerinde sürekli bir fonksiyon olmasının gerekli olmadığını gösterdi. Bununla beraber; metrik uzaylardaki büzülme dönüşümü teoremi ile $2-$metrik uzaylardaki büzülme dönüşümü teoreminin birbiriyle ilgisiz olduğu ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla $2-$metrik uzay, alışılmış metrik uzayların bir genellemesi değildir. Bunun üzerine Dhage 1992 yılında, alışılmış metrik uzayların genellemesi olarak genelleştirilmiş metrik uzayların yeni formu olan $D-$metrik uzayı tanıttı.

Tanım 2.3 *X boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere $D: X\times X\times X\to[0,\infty)$ fonksiyonu her $x,y,z,a\in X$ için;*
i) $D(x,y,z)=0\Leftrightarrow x=y=z$
ii) $D(x,y,z)=D(x,z,y)=D(y,x,z)=D(y,z,x)=D(z,x,y)=D(z,y,x)$
iii) $D(x,y,z)\leq D(x,y,a)+D(x,a,z)+D(a,y,z)$
koşullarını sağlıyorsa D ye X üzerinde bir $D-$metrik adı verilir ve ayrıca (X,D) ikilisine de $D-$metrik uzay denir. Eğer her $x,y\in X$ için $D(x,x,y)=D(x,y,y)$ ise D ye simetrik $D-$metrik adı verilir.

Bir (X,D) $D-$metrik uzayında her $x,y,z\in X$ için;

$$\textbf{iv)}\quad D(x,y,y)\leq D(x,z,z)+D(z,y,y)$$

ifadesi fazladan bir özellik olarak verilebilir.

$D-$metrik uzayda yakınsaklık tanımlarının farklı kullanılması ile iki farklı topolojiden bahsedilebilmektedir. Dhage bu topolojilerin aynı olduğunu öne sürmüş olsa da bu topolojilerin birbirinden farklı olduğunu ve Dhage'nin yayınladığı makalede ortaya attığı iddialarında bir takım hataların olduğunu 2003 yılında Mustafa ve Sims yayınladıkları bir çalışma ile göstermişlerdir. Bu sebeple $D-$metrik uzay, metrik uzayların bir genelleştirilmesi değildir. Sonrasında Mustafa ve Sims öncelikle $D-$metrik uzayda bu aksaklıkları gidermeye çalışmışlarsa da bunun mümkün olmadığını gördükten sonra 2006

yılında yaptıkları çalışma ile metrik uzayların bir genelleştirilmesini genelleştirilmiş metrik uzay adı altında vermişlerdir.

Tanım 2.4 *X boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere $G : X \times X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $x, y, z, a \in X$ için*
i) $x = y = z \Rightarrow G(x, y, z) = 0$
ii) $x \neq y$ *için* $G(x, x, y) > 0$
iii) $y \neq z$ *için* $G(x, x, y) \leq G(x, y, z)$
iv) $G(x, y, z) = G(x, z, y) = G(y, x, z) = G(y, z, x) = G(z, x, y) = G(z, y, x)$
v) $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$
koşullarını sağlıyorsa G ye X üzerinde bir $G-$metrik adı verilir ve (X, G) ikilisine de $G-$metrik uzay denir. Eğer her $x, y \in X$ için $G(x, x, y) = G(x, y, y)$ ise G ye simetrik $G-$metrik adı verilir.

Örneğin $X = \mathbb{R}^2$ olmak üzere $G : X \times X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ için x, y, z köşelerine sahip üçgenin çevresi olarak tanımlanırsa bu fonksiyon bir $G-$metriktir.

Ardından Sedghi vd. 2012 yılında yayınladıkları makale ile $G-$metrik uzayın simetri özelliklerinin metrik uzayın gücünü zayıflattığı düşüncesi ile metrik uzayların bir diğer genellemesi olan $S-$metrik kavramını tanımlamışlardır.

Tanım 2.5 *X boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere. $S : X \times X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $x, y, z, a \in X$ için*
i) $S(x, y, z) = 0 \Longleftrightarrow x = y = z$
ii) $S(x, y, z) \leq S(x, x, a) + S(y, y, a) + S(z, z, a)$
koşullarını sağlıyorsa S fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir $S-$metrik denir. Ayrıca (X, S) ikilisine de $S-$metrik uzay adı verilir.

Sonrasında Abbas vd. 2015 yılında $S-$metrik uzayın bir genellemesi olan $A-$metrik uzay kavramını tanıttılar. Buna göre $S-$metrik uzay kavramı herhangi bir boştan farklı X kümesinin üçlü kartezyen çarpımı üzerinde tanımlı iken $A-$metrik uzay kavramı X kümesinin n tanesinin $(n \geq 3)$ kartezyen çarpımı üzerinde tanımlıdır.

Tanım 2.6 *X boştan farklı herhangi bir küme ve $n \geq 3$ olmak üzere $A : X^n \to [0, \infty)$ fonksiyonu $i \in \{1, 2, ..., n\}$ olmak üzere her $x_i, a \in X$ için,*

i) $A(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n$
ii) $A(x_1, x_2, ..., x_n) \leq \sum_{i=1}^{n} A(x_i, x_i, ..., a)$
koşullarını sağlıyorsa A *fonksiyonuna* X *kümesi üzerinde* $A-$*metrik denir. Ayrıca* (X, A) *ikilisine de* $A-$*metrik uzay adı verilir.*

Metrik uzayın genelleştirilmesi üzerine yapılan çalışmalar devam ederken diğer yandan da Banach'ın 1922 yılında verdiği büzülme ilkesinin genelleştirilme çalışmaları sürmekteydi. Bu kapsamda Meir-Keeler 1969 yılında, Ćirić 1974 yılında, Ekeland 1974 yılında, Kirk 1976 yılında, Caristi 1976 yılında ve daha birçok bilim insanı farklı teknik ve metotlar kullanarak büzülme koşulunu genelleştirmişlerdir. Diğer yandan Connell 1959 yılında tam metrik uzay olmayan ve her büzülme dönüşümünün sabit noktası olan bir X metrik uzayı örneği vermiştir. Bu örnek sonrasında görülmüştür ki Banach büzülme koşulu X metrik uzayına metrik tamlığını karakterize etmemektedir. Kannan ise 1969 yılında verdiği teoremle X uzayı tam iken, her Kannan dönüşümünün sabit noktası olduğunu kanıtlamıştır. Kannan teoreminin, Banach büzülme teoreminin genellemesi olmadığı Subrahmanyam'ın 1975 yılında Kannan dönüşümünün metrik tamlığı karakterize ettiğini göstermesi ile anlaşılmıştır. Buna göre (X, d) nın tam metrik uzay olması için gerek ve yeter koşul (X, d) metrik uzayındaki her Kannan dönüşümünün sabit noktasının olmasıdır.

Bu çalışmaların yanı sıra Chatterjea, Reich, Hardy-Rogers gibi bir çok bilim insanı çeşitli büzülme fonksiyonları tanımlamışlardır. Rhoades ise 1977 yılında yaptığı çalışma ile büzülme fonksiyonlarını ve aralarındaki bağı incelemiş ve bu fonksiyonlar yardımı ile yeni sabit nokta teoremleri sunmuştur. Ardından Suzuki 2007 yılında yaptığı Suzuki tip genelleme çalışması ile Banach büzülme ilkesinin bir genellemesini uzayın metrik tamlığını karakterize edecek şekilde vermiştir. Ayrıca Suzuki 2009 yılında yayımladığı çalışmasında bir (X, d) tam metrik uzayda tanımlı T kendine dönüşümünün sabit noktasının olmasını garanti eden teoremleri yani sabit nokta teoremlerini kategorize etmiş ve onları dört tipe ayırmıştır. Buna göre bu tipler (sınıflar);
$(T1)$ T bir tek sabit noktaya sahiptir ve her $x \in X$ için $(T^n x)$ dizisi sabit noktaya yakınsar.
$(T2)$ T bir tek sabit noktaya sahiptir ve $(T^n x)$ dizisinin sabit noktaya yakınsaması gerekmez.
$(T3)$ T birden fazla sabit noktaya sahip olabilir ve her $x \in X$ için $(T^n x)$ dizisi bir sabit noktaya yakınsar.
$(T4)$ T birden fazla sabit noktaya sahip olabilir ve $(T^n x)$ dizisinin bir sabit noktaya yakınsaması gerekmez.
şeklindedir. Suzuki bu tipleri sırasıyla lider tip, isimsiz tip, Subrahmanyan tip ve Caristi tip olarak isimlendirmiştir. Buna göre Banach, Ćirić, Kannan, Kirk, Matkowski, Meir ve Keeler gibi iyi bilinen birçok sabit nokta teoremi $(T1)$ lider tip sınıfındadır.

Subrahmanyam'ın, 1974 yılında verdiği sabit nokta teoremi $(T3)$ Subrahmanyam tip sınıfındadır. Caristi teoremi ve bu teoremin genelleştirilmeleri olan sabit nokta teoremleri $(T4)$ Caristi tip sınıfındadırlar. Suzuki bu sınıflamayı yaptığı çalışmasında $(T2)$ isimsiz tip sınıfına ait olan bir sabit nokta teoremi vermiştir.

Banach büzülme ilkesinin genelleştirilme çalışmalarının dışında son zamanlarda literatüde hızla popüler olan ve bir çok çalışmanın üretilmiş olup üretilmeye devam edilen bir alan daha vardır. Buna göre bir metrik uzayda ele alınan bir kendi üzerine dönüşümün sabit noktalarının sayısı tek olmak zorunda değildir. Yani kendi üzerine dönüşümün birden çok sabit noktası varsa bu sabit noktalar kümesinin ne gibi geometrik özelliklerinin olduğu sorusunu Özgür ve Taş ortaya atmışlar ve öncülük ettikleri bu alanda bir çok çalışma yaparak çeşitli geometrik özellikleri tanıtmışlardır. Bu bağlamda Özgür ve Taş 2016 çalışmasında sabit çember kavramını tanıtarak başlayan çalışmaları ile literatüre sabit çember teoremleri kazandırılmaya başlanmış ve dahası bu sabit çember teoremlerin uygulama alanları ortaya çıkmıştır. Sonralarda çalışmalar çeşitlenerek ve genişleyerek sabit disk, sabit elips, sabit hiperbol, sabit Cassini ovali, sabit Apollonius çemberi gibi kavramlara ulaşmıştır ve günümüzde hala bu konularda çalışmalar hızla devam etmektedir. Bu konuda daha detaylı bilgi için Özgür ve Taş 2016, 2017, 2018, 2019 çalışmalarına ve onların referanslarına ayrıca Erçınar, 2020 çalışmasına bakılabilir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezin diğer bölümlerinde kullanılacak temel tanım, teorem ve kavramlar tezi daha anlaşılır kılmak ve bütünlüğü sağlamak adına ilgili kaynaklar baz alınarak bu kaynaklardan özetlenerek verilecektir. Bu bölümde ifade edilen teoremlerin ispatlarına yer verilmeyecek olup ilgili ispatlara teoremlerde ifade edilen kaynaklardan ulaşılabilir.

3.1 Alışılmış Metrik Uzaylar

Bu kısımda alışılmış metrik uzaylara ilişkin temel tanım, teorem ve kavramlara yer verilecektir.

Tanım 3.1 *X boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere $d : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için*
i) $x = y \iff d(x, y) = 0$
ii) $d(x, y) = d(y, x)$
iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$
koşullarını sağlıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde alışılmış metrik adı verilir. Ayrıca (X, d) ikilisine alışılmış metrik uzay denir. (Fréchet, 1906)

Tanım 3.2 *(X, d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n \geq n_0$ koşulunu sağlayan her bir n doğal sayısı için $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) dizisine yakınsaktır denir ve x noktasına da bu dizinin limiti denir. (Kreyszig, 1978)*

Tanım 3.3 *(X, d) bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n, m \geq n_0$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı var ise (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir. (Kreyszig, 1978)*

Tanım 3.4 *(X, d) bir metrik uzay olsun. X uzayındaki her bir Cauchy dizisi yakınsak ise (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir. (Kreyszig, 1978)*

Tanım 3.5 *X boş olmayan bir küme ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun. $T(x) = x$ eşitliğini sağlayan $x \in X$ noktasına T fonksiyonunun bir sabit noktası denir. (Agarwal vd., 2015)*

Tanım 3.6 *(X,d) bir metrik uzay ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in X$ için*

$$d(Tx,Tx) \leq ad(x,y)$$

olacak şekilde $0 \leq a < 1$ sabiti var ise T fonksiyonuna bir büzülme fonksiyonu denir. (Banach, 1922)

Teorem 3.1 *(X,d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir büzülme fonksiyon olsun. O halde*
i) *T fonksiyonun bir tek sabit $x \in X$ noktası vardır.*
ii) *Herhangi bir $x_0 \in X$ noktası için $(T^n(x_0))$ iterasyon dizisi T fonksiyonunun bu sabit noktasına yakınsar. (Banach, 1922)*

Teorem 3.2 *(X,d) tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ olmak üzere her $x, y \in X$ için T dönüşümü*

$$d(Tx,Ty) \leq ad(x,Tx) + ad(y,Ty)$$

koşulunu sağlıyor ise T dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir. (Kannan, 1969)

Teorem 3.3 *(X,d) tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. $0 \leq a < 1$ olmak üzere her $x, y \in X$ için T dönüşümü*

$$d(Tx,Ty) \leq a \max\{d(x,Tx), d(y,Ty)\}$$

koşulunu sağlıyorsa T dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir. (Bianchini, 1972)

Teorem 3.4 *(X,d) tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ olmak üzere her $x, y \in X$ için T dönüşümü*

$$d(Tx,Ty) \leq ad(x,Ty) + ad(y,Tx)$$

koşulunu sağlıyorsa T dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir. (Chatterjea, 1972)

Teorem 3.5 *(X,d) tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. $0 < a < 1$ olmak üzere her $x, y \in X$ için T dönüşümü*

$$d(Tx,Ty) \leq a \max\{d(x,Ty), d(y,Tx)\}$$

koşulunu sağlıyorsa T dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir. (Chatterjea, 1972)

Teorem 3.6 *(X,d) tam metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. $0<a<1$ ve*

$$M_T(x,y)=\max\left\{d(x,y),d(x,Tx),d(y,Ty),\frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2}\right\}$$

olmak üzere her $x,y\in X$ için T dönüşümü

$$d(Tx,Ty)\leq aM_T(x,y)$$

koşulunu sağlıyor ise T dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir. (Ćirić, 1971)

Teorem 3.7 *(X,d) tam metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. a,b,c negatif olmayan reel sayılar ve $a+b+c<1$ olmak üzere her $x,y\in X$ için T dönüşümü*

$$d(Tx,Ty)\leq ad(x,Tx)+bd(y,Ty)+cd(x,y)$$

koşulunu sağlıyor ise T dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir. (Reich, 1971)

Teorem 3.8 *(X,d) tam metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. a,b,c,d,e negatif olmayan reel sayılar ve $a+b+c+d+e<1$ olmak üzere her $x,y\in X$ için T dönüşümü*

$$d(Tx,Ty)\leq ad(x,Tx)+bd(y,Ty)+cd(x,Ty)+dd(y,Tx)+ed(x,y)$$

koşulunu sağlıyor ise T dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir. (Hardy-Rogers, 1973)

Tanım 3.7 *$\mathbb{R}_+$ negatif olmayan reel sayıların kümesini göstermek üzere Ψ de $F:\mathbb{R}_+^6\to\mathbb{R}$ olacak şekilde tanımlı aşağıdaki koşulları sağlayan tüm sürekli F fonksiyonların kümesi olsun.*

$F1$: $F(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6)$ fonksiyonu t_1 hariç diğer değişkenlerine göre artmayan fonksiyondur.

$F2$:

$$F(u,v,v,u,u+v,0)\leq 0$$

veya

$$F(u,v,0,u+v,u,v)\leq 0$$

veya

$$F(u,v,v,v,v,v)\leq 0$$

iken $u\leq av$ olacak şekilde $a\in[0,1)$ vardır.

$F3:u>0$ için $F(u,0,0,u,u,0)>0$ dır. (Altun ve Erduran, 2011)

Teorem 3.9 *(X,d) bir tam metrik uzay ve$T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. $F \in \Psi$ olmak üzere her $x, y \in X$ için T dönüşümü*

$$F\left(d\left(Tx,Ty\right),d\left(x,y\right),d\left(x,Tx\right),d\left(y,Ty\right),d\left(x,Ty\right),d\left(y,Tx\right)\right) \leq 0$$

koşulunu sağlıyor ise T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır. (Altun ve Erduran, 2011)

Yukarıdaki Teorem 3.9 de ifade edilen koşula kapalı bağıntı denir. Dikkat edilirse Teorem 3.1-3.8 ifade edilen koşulların her biri Tanım 3.7 de verilen koşulları sağlayan bir F fonksiyonu şeklinde verilebilirler. Daha özetle Teorem 3.1-3.8 de ifade edilen koşullar Teorem 3.9 un birer özel durumuna dönüşmüş olurlar.

3.2 $S-$Metrik Uzaylar

Bu kısımda $S-$metrik uzaylara dair temel tanım, teorem ve kavramlara yer verilecektir.

Tanım 3.8 *X boştan farklı herhangi bir küme olsun. $S : X \times X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu her $x, y, z, a \in X$ için*
i) $S(x,y,z) = 0 \Longleftrightarrow x = y = z$,
ii) $S(x,y,z) \leq S(x,x,a) + S(y,y,a) + S(z,z,a)$
şartlarını sağlıyorsa S fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir $S-$metrik denir. (X,S) ikilisine de $S-$metrik uzay denir. (Sedghi vd., 2012)

Örnek 3.1 *$X = \mathbb{R}$ olsun. Her $x, y, z \in X$ için*

$$S(x,y,z) = |x-z| + |y-z|$$

şeklinde tanımlı $S : X \times X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir $S-$metriktir. (Sedghi vd., 2014).

X boştan farklı herhangi bir küme ve d, X üzerinde tanımlı alışılmış bir metrik olmak üzere her $x, y, z \in X$ için

$$S(x,y,z) = d(x,z) + d(y,z)$$

olacak şekilde tanımlanan $S : X \times X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu X üzerinde bir $S-$metriktir. Bu durumda her alışılmış metrik bir $S-$metrik belirler denebilir. Fakat bu durumun tersi doğru değildir. Yani her $S-$metrik bir alışılmış metrik tarafından üretilemez. Eğer bu ifadenin

tersi doğru olmuş olsaydı, $S-$metrikler alışılmış metrikler tarafından türetilmiş olacağından $S-$metrik uzaylar alışılmış metrik uzaylardan çok farklı yapılar olmayacaktı. Bu koşulda $S-$metrik uzay kavramı önemini yitirecekti.

Örnek 3.2 *$X = \mathbb{R}$ olmak üzere her $x, y, z \in X$ için*

$$S(x, y, z) = \max\left\{\left|x^3 - y^3\right|, \left|x^3 + y^3 - 2z^3\right|\right\}$$

şeklinde tanımlanan $S : X \times X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu ele alınsın. Burada tanımlanan $S(x, y, z)$ fonksiyonunun $S-$metrik aksiyomlarını sağladığı aşikardır, yani bir $S-$metriktir. Tanımlanan $S-$metriğin alışılmış metrik uzaydan üretildiği varsayılırsa

$$S(x, y, z) = d(x, z) + d(y, z)$$

olduğundan

$$S(x, x, z) = 2\left|x^3 - z^3\right| \text{ ve } S(x, x, z) = 2d(x, z) \Longrightarrow d(x, z) = \left|x^3 - z^3\right|$$

ve

$$S(y, y, z) = 2\left|y^3 - z^3\right| \text{ ve } S(y, y, z) = 2d(y, z) \Longrightarrow d(y, z) = \left|y^3 - z^3\right|$$

elde edilir. Bu durumda

$$\max\left\{\left|x^3 - y^3\right|, \left|x^3 + y^3 - 2z^3\right|\right\} \neq \left|x^3 - z^3\right| + \left|y^3 - z^3\right|$$

bulunur. O halde tanımlanmış olan $S-$metrik alışılmış metrik tarafından üretilemez. Alışılmış metriklerden üretilemeyen bir başka $S-$metrik uzay örneği olarak Esfahani vd. 2012 yılında yaptıkları çalışmalarında ifade ettikleri $X = [0, \infty)$ olmak üzere, $S : X \times X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

$$S(x, y, z) = \begin{cases} 0, & x = y = z \text{ ise} \\ \max\{x, y, z\}, & x \neq y \neq z \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımladıkları $S-$metrik verilebilir. Benzer şekilde, tanımlanan bu S-metrik alışılmış metrik tarafından üretilememektedir.

Tanım 3.9 *(X, S) bir $S-$metrik uzay olsun ve $(x_n) \subset X$ bu uzayda bir dizi olsun.*
i) *X kümesindeki bir (x_n) dizisinin x noktasına yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul $n \to \infty$ için $S(x_n, x_n, x) \to 0$ olmasıdır. Yani her $\varepsilon > 0$ değerine karşılık $n \geq n_0$ koşulunu sağlayan her $n \in \mathbb{N}$ için $S(x_n, x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisi x noktasına $S-$yakınsaktır denir ve x değerine de (x_n) dizisinin limiti denir.*
ii) *Verilen her $\varepsilon > 0$ değerine karşılık $n, m \geq n_0$ koşulunu sağlayan her $n, m \in \mathbb{N}$ için $S(x_n, x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine bir $S-$Cauchy dizisi denir.*
iii) *(X, S), S-metrik uzayındaki her $S-$Cauchy dizisi yakınsak ise (X, S) $S-$metrik uzayına $S-$tamdır denir. (Sedghi vd., 2012)*

Yardımcı Teorem 3.1 *(X, S) bir $S-$metrik uzay olsun. Bu taktirde her $x, y \in X$ için*

$$S(x, x, y) = S(y, y, x)$$

eşitliği sağlanır. (Sedghi vd., 2012)

Yardımcı Teorem 3.2 *(X, S) bir $S-$metrik uzay olsun. Eğer $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ ise $S(x_n, x_n, y_n) \to S(x, x, y)$ dir. (Sedghi vd., 2012)*

Tanım 3.10 *(X, S) bir $S-$metrik uzay ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, x \in X$ için*

$$S(Tx, Ty, Tz) \leq aS(x, y, z)$$

olacak şekilde $0 \leq a < 1$ sabiti var ise T fonksiyonuna bir büzülme dönüşümü denir. (Sedghi vd., 2012)

Teorem 3.10 *(X, S) bir tam $S-$metrik uzay ve $T : X \to X$ bir büzülme dönüşümü olsun. Bu taktirde T nin bir tek sabit noktası vardır. Üstelik x_0, X te keyfi bir nokta ve $x_n = T^n \{x_0\}$ şeklinde tanımlanan X de bir dizi olarak alınır ise (x_n) dizisi bu sabit noktaya yakınsar. (Sedghi vd., 2012)*

Teorem 3.11 *(X, S) bir tam $S-$metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. T dönüşümü $a \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$ olmak üzere her $x, y, z \in X$ için*

$$S(Tx, Ty, Tz) \leq a[S(x, x, Tx) + S(y, y, Ty) + S(z, z, Tz)]$$

koşulunu sağlıyor ise T nin X uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır. (Sedghi ve Dung, 2014)

Teorem 3.12 *(X, S) bir tam $S-$metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. T dönüşümü $a \in [0, 1)$ olmak üzere her $x, y, z \in X$ için*

$$S(Tx, Ty, Tz) \leq a \max \{S(x, x, Tx), S(y, y, Ty), S(z, z, Tz)\}$$

koşulunu sağlıyor ise T nin X uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır. (Sedghi ve Dung, 2014)

Teorem 3.13 (X,S) *bir tam* $S-$*metrik uzay ve* $T:X\to X$ *bir dönüşüm olsun.* T *dönüşümü* $a\in\left[0,\frac{1}{8}\right)$ *olmak üzere her* $x,y,z\in X$ *için*

$$\begin{aligned}S(Tx,Ty,Tz) &\leq a\left[S(x,x,Ty)+S(x,x,Tz)+S(y,y,Tx)+S(y,y,Tz)\right.\\ &\quad \left.+S(z,z,Tx)+S(z,z,Ty)\right]\end{aligned}$$

koşulunu sağlıyor ise T *nin* X *uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır. (Sedghi ve Dung, 2014)*

Teorem 3.14 (X,S) *bir tam* $S-$*metrik uzay ve* $T:X\to X$ *bir dönüşüm olsun.* T *dönüşümü* $a\in\left[0,\frac{1}{3}\right)$ *olmak üzere her* $x,y,z\in X$ *için*

$$\begin{aligned}S(Tx,Ty,Tz) &\leq a\max\{S(x,x,Ty),S(x,x,Tz),S(y,y,Tx),S(y,y,Tz),\\ &\quad S(z,z,Tx),S(z,z,Ty)\}\end{aligned}$$

koşulunu sağlıyor ise T *nin* X *uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır. (Sedghi ve Dung, 2014)*

Aşağıdaki teorem ifadesi Teorem 5.9 daki kapalı bağıntı yöntemi ile elde edilebildiğinden ispatı verilmemiştir.

Teorem 3.15 (X,S) *bir tam* $S-$*metrik uzay,* $T:X\to X$ *bir dönüşüm olsun.* $r\in[0,1)$ *ve*

$$M_T^S(x,x,y)=\max\left\{S(x,x,y),S(x,x,Tx),S(y,y,Ty),\frac{(S(x,x,Ty)+S(y,y,Tx))}{3}\right\}$$

olmak üzere her $x,y\in X$ *için T dönüşümü*

$$S(Tx,Tx,Ty)\leq rM_T^S(x,x,y)$$

koşulunu sağlıyor ise T *dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.*

Teorem 3.16 (X,S) *bir tam* $S-$*metrik uzay ve* $T:X\to X$ *bir dönüşüm olsun.* T *dönüşümü* a,b,c,d *negatif olmayan sayılar ve* $a+b+c+d<1$ *ve* $3c+d<1$ *olmak üzere her* $x,y,z\in X$ *için*

$$\begin{aligned}S(Tx,Ty,Tz) &\leq aS(x,x,Tx)+bS(y,y,Ty)+cS(z,z,Tz)\\ &\quad +dS(x,y,z)\end{aligned}$$

koşulunu sağlıyor ise T *nin* X *uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır. (Sedghi ve Dung, 2014)*

Teorem 3.17 (X,S) *bir tam* $S-$*metrik uzay ve* $T:X\to X$ *bir dönüşüm olsun.* T *dönüşümü* a,b,c,d,e,f,g,h,j,k *negatif olmayan sayılar* $a+b+c+d+3e+f+3g+h+j+k<1$, *ve* $3c+g+h+j+k<1$ *olmak üzere her* $x,y,z\in X$ *için*

$$\begin{aligned} S(Tx,Ty,Tz) \;\leq\; & aS(x,x,Tx)+bS(y,y,Ty)+cS(z,z,Tz) \\ & +dS(x,x,Ty)+eS(x,x,Tz)+fS(y,y,Tx) \\ & +gS(y,y,Tz)+hS(z,z,Tx)+jS(z,z,Ty) \\ & +kS(x,y,z) \end{aligned}$$

koşulunu sağlıyor ise T *nin* X *uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır. (Sedghi ve Dung, 2014)*

Literatürde varolan kapalı bağıntı çalışmaları $\mathbb{R}^5$ veya $\mathbb{R}^6$ üzerinden verilmekle beraber bütünlük bozulmaması adına aşağıdaki tanım ve teoremlere bu bölümde yer verilmiştir. Tanım 3.11, Teorem 3.18 ve Teorem 3.19 ifadeleri orijinal olup ilk kez bu tez çalışmasında verilmiştir.

Tanım 3.11 Ψ_S *ifadesi* $F:\mathbb{R}_+^{11}\to\mathbb{R}$ *aşağıdaki koşulları sağlayan tüm sürekli fonksiyonların kümesi olsun.*
$(F1)$ F *fonksiyonu* t_7 *ve* t_9 *değişkenlerine göre artmayandır.*
$(F2)$ *Her* $u,v\geq 0$ *için* $F(u,v,v,v,u,v,2v+u,v,2v+u,0,0)\leq 0$ *ise* $u\leq hv$ *olacak şekilde* $h\in[0,1)$ *vardır.*
$(F3)$ *Her* $t>0$ *için* $F(t,t,0,0,0,0,t,0,t,t,t)>0$ *dır.*

Teorem 3.18 (X,S) *bir* $S-$*metrik uzay ve* $T:X\to X$ *her* $x,y\in X$ *için*

$$\begin{aligned} & F\left(S(Tx,Ty,Tz),S(x,y,z),S(x,x,Tx),S(y,y,Ty),S(z,z,Tz),\right. \\ & \left.S(x,x,Ty),S(x,x,Tz),S(y,y,Tx),S(y,y,Tz),S(z,z,Tx),S(z,z,Ty)\right) \;\leq\; 0 \end{aligned}$$

olacak şekilde bir dönüşüm olsun. Ayrıca F *fonksiyonu* $(F3)$ *özelliğini sağlasın. Bu taktirde* T *dönüşümü en çok bir sabit noktaya sahiptir.*

İspat $w\neq v$ *ve* w, v T *nin iki sabit noktası olsun. Buna göre teoremin hipotezindeki koşula* $x=y=w$, $z=v$ *olarak uygulanırsa*

$$\begin{aligned} & F\left(S(Tw,Tw,Tv),S(w,w,v),S(w,w,Tw),S(w,w,Tw),S(v,v,Tv),\right. \\ & \left.S(w,w,Tw),S(w,w,Tv),S(w,w,Tw),S(w,w,Tv),S(v,v,Tw),S(v,v,Tw)\right) \;\leq\; 0 \end{aligned}$$

olup açıkça

$$F\left(S\left(w,w,v\right),S\left(w,w,v\right),0,0,0,0,S\left(w,w,v\right),0,S\left(w,w,v\right),S\left(v,v,w\right),S\left(v,v,w\right)\right)\leq 0$$

yani

$$F\left(S\left(w,w,v\right),S\left(w,w,v\right),0,0,0,0,S\left(w,w,v\right),0,S\left(w,w,v\right),S\left(w,w,v\right),S\left(w,w,v\right)\right)\leq 0$$

elde edilir. Ancak bu sonuç $(F3)$ *özelliği ile çelişir. Bu nedenle* $w=v$ *olmalıdır.*

Teorem 3.19 (X,S) *bir tam* $S-$*metrik uzay ve* $F\in\Psi_S$ *olmak üzere* $T:X\to X$ *dönüşümü her* $x,y,z\in X$ *için*

$$\begin{aligned}F\left(S\left(Tx,Ty,Tz\right),S\left(x,y,z\right),S\left(x,x,Tx\right),S\left(y,y,Ty\right),S\left(z,z,Tz\right),\right.\\ \left.S\left(x,x,Ty\right),S\left(x,x,Tz\right),S\left(y,y,Tx\right),S\left(y,y,Tz\right),S\left(z,z,Tx\right),S\left(z,z,Ty\right)\right)\ &\leq\ 0\end{aligned}$$

koşulunu sağlasın. Bu taktirde T *dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.*

İspat u_0*,* X *de keyfi bir nokta olsun. Ayrıca her* $n\in\mathbb{N}$ *için* $u_n=Tu_{n-1}$ *olacak şekilde tanımlansın. Böylelikle teoremin hipotezindeki koşulda* $x=y=u_{n-1}$*,* $z=u_n$ *alınırsa*

$$\begin{aligned}F\left(S\left(Tu_{n-1},Tu_{n-1},Tu_n\right),S\left(u_{n-1},u_{n-1},u_n\right),S\left(u_{n-1},u_{n-1},Tu_{n-1}\right),\right.\\ S\left(u_{n-1},u_{n-1},Tu_{n-1}\right),S\left(u_n,u_n,Tu_n\right),S\left(u_{n-1},u_{n-1},Tu_{n-1}\right),\\ S\left(u_{n-1},u_{n-1},Tu_n\right),S\left(u_{n-1},u_{n-1},Tu_{n-1}\right),S\left(u_{n-1},u_{n-1},Tu_n\right),\\ \left.S\left(u_n,u_n,Tu_{n-1}\right),S\left(u_n,u_n,Tu_{n-1}\right)\right)\ &\leq\ 0\end{aligned}$$

yani

$$\begin{aligned}F\left(S\left(u_n,u_n,u_{n+1}\right),S\left(u_{n-1},u_{n-1},u_n\right),S\left(u_{n-1},u_{n-1},u_n\right),S\left(u_{n-1},u_{n-1},u_n\right),\right.\\ S\left(u_n,u_n,u_{n+1}\right),S\left(u_{n-1},u_{n-1},u_n\right),S\left(u_{n-1},u_{n-1},u_{n+1}\right),S\left(u_{n-1},u_{n-1},u_n\right),\\ \left.S\left(u_{n-1},u_{n-1},u_{n+1}\right),S\left(u_n,u_n,u_n\right),S\left(u_n,u_n,u_n\right)\right)\ &\leq\ 0\end{aligned}$$

elde edilir. Bu noktada $S-$*metrik özelliği gereğince*

$$S\left(u_{n-1},u_{n-1},u_{n+1}\right)\leq 2S\left(u_{n-1},u_{n-1},u_n\right)+S\left(u_n,u_n,u_{n+1}\right)$$

olduğundan dolayı ve F *nin* t_7 *ve* t_9 *değişkenlerine göre artmayan oluşundan dolayı*

$$\begin{aligned}F\left(S\left(u_n,u_n,u_{n+1}\right),S\left(u_{n-1},u_{n-1},u_n\right),S\left(u_{n-1},u_{n-1},u_n\right),S\left(u_{n-1},u_{n-1},u_n\right),\right.\\ S\left(u_n,u_n,u_{n+1}\right),S\left(u_{n-1},u_{n-1},u_n\right),2S\left(u_{n-1},u_{n-1},u_n\right)+S\left(u_n,u_n,u_{n+1}\right),\\ \left.S\left(u_{n-1},u_{n-1},u_n\right),2S\left(u_{n-1},u_{n-1},u_n\right)+S\left(u_n,u_n,u_{n+1}\right),0,0\right)\ &\leq\ 0\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre F *nin sağladığı* $(F2)$ *koşulu gereğince*

$$S\left(u_n,u_n,u_{n+1}\right)\leq hS\left(u_{n-1},u_{n-1},u_n\right)$$

dir. O halde bu süreç tekrar edilerek

$$S(u_n, u_n, u_{n+1}) \leq hS(u_{n-1}, u_{n-1}, u_n) \leq \cdots \leq h^n S(u_0, u_0, u_1)$$

elde edilir. Üstelik her $m, n \in \mathbb{N}$ *ve* $m > n$ *için* $S-$*metriğin özellikleri kullanılarak*

$$\begin{aligned}
S(u_n, u_n, u_m) &\leq 2S(u_n, u_n, u_{n+1}) + S(u_{n+1}, u_{n+1}, u_m) \\
&\leq 2S(u_n, u_n, u_{n+1}) + 2S(u_{n+1}, u_{n+1}, u_{n+2}) + S(u_{n+2}, u_{n+2}, u_m) \\
&\vdots \\
&\leq 2S(u_n, u_n, u_{n+1}) + \cdots + 2S(u_{m-2}, u_{m-2}, u_{m-1}) + S(u_{m-1}, u_{m-1}, u_m) \\
&\leq 2\sum_{i=n}^{m-1} S(u_i, u_i, u_{i+1}) \\
&\leq 2(h^n + h^{n+1} + \cdots + h^{m-1}) S(u_0, u_0, u_1) \\
&= 2\frac{h^m - h^n}{1-h} S(u_0, u_0, u_1) \\
&\leq 2\frac{h^m}{1-h} S(u_0, u_0, u_1)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu aşamada $m \to \infty$ *için işlem yapılırsa* $h \in [0, 1)$ *olduğundan*

$$S(u_n, u_n, u_m) \leq 2\frac{h^m}{1-h} S(u_0, u_0, u_1) \to 0$$

olur. Dolayısıyla (u_n) *bir* $S-$*Cauchy dizisidir. Ayrıca* (X, S) *bir tam* $S-$*metrik uzay olduğundan dolayı* (u_n) *dizisi bir* $w \in X$ *noktasına yakınsar. Şimdi* $x = y = u_{n-1}$, $z = w$ *için teoremin hipotezi kullanılırsa*

$$\begin{aligned}
F(&S(Tu_{n-1}, Tu_{n-1}, Tw), S(u_{n-1}, u_{n-1}, w), S(u_{n-1}, u_{n-1}, Tu_{n-1}), \\
&S(u_{n-1}, u_{n-1}, Tu_{n-1}), S(w, w, Tw), S(u_{n-1}, u_{n-1}, Tu_{n-1}), \\
&S(u_{n-1}, u_{n-1}, Tw), S(u_{n-1}, u_{n-1}, Tu_{n-1}), S(u_{n-1}, u_{n-1}, Tw), \\
&S(w, w, Tu_{n-1}), S(w, w, Tu_{n-1})) \leq 0
\end{aligned}$$

yani

$$\begin{aligned}
F(&S(u_n, u_n, Tw), S(u_{n-1}, u_{n-1}, w), S(u_{n-1}, u_{n-1}, u_n), S(u_{n-1}, u_{n-1}, u_n), \\
&S(w, w, Tw), S(u_{n-1}, u_{n-1}, u_n), S(u_{n-1}, u_{n-1}, Tw), S(u_{n-1}, u_{n-1}, u_n), \\
&S(u_{n-1}, u_{n-1}, Tw), S(w, w, u_n), S(w, w, u_n)) \leq 0
\end{aligned}$$

elde edilir. $S-$*metriğin değişkenleri üzerinde sürekli olması ve* T *nin sürekli olması gereğince* $n \to \infty$ *için limit alınırsa*

$$F(S(w, w, Tw), 0, 0, 0, S(w, w, Tw), 0, S(w, w, Tw), 0, S(w, w, Tw), 0, 0) \leq 0$$

olur. Bu taktirde $(F2)$ *özelliği gereğince*

$$S(w, w, Tw) = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $w = Tw$ *dir. Yani* w, T *nin sabit noktasıdır. Teorem 3.18 gereğince* w, T *nin tek sabit noktasıdır.*

3.3 $A-$Metrik Uzaylar

Bu kısımda $A-$metrik uzaylara dair temel tanım, teorem ve kavramlara yer verilecektir.

Tanım 3.12 *X boştan farklı herhangi bir küme ve $n \geq 3$ olacak şekilde bir doğal sayı olsun ve $A : X \times X \times ... \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $x_1, x_2, ..., x_n, w \in X$ için,*
i) $A(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n$
ii) $A(x_1, x_2, ..., x_n) \leq \sum_{i=1}^{n} A(x_i, x_i, ..., w)$ *, $i = 1, 2, ..., n$ ve $w \in X$*
şartlarını sağlıyorsa A fonksiyonuna X kümesi üzerinde $A-$metrik denir. (X, A) ikilisine de $A-$metrik uzay denir. (Abbas vd., 2015)

Örnek 3.3 *$X = \mathbb{R}$ olsun. Her $x_1, ..., x_n \in X$ için*

$$A(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i<j} |x_i - x_j|$$

şeklinde tanımlı $A : X \times ... \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir $A-$metriktir. (Abbas vd, 2015).

X boştan farklı herhangi bir küme ve d, X üzerinde tanımlı alışılmış bir metrik olmak üzere her $x, y, z \in X$ için

$$A(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_n)$$

olacak şekilde tanımlanan $A : X \times ... \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu X üzerinde bir $A-$metriktir. Bu durumda her alışılmış metrik bir $A-$metrik belirler denebilir. Fakat bu durumun tersi doğru değildir. Yani her $A-$metrik bir alışılmış metrik tarafından üretilemez. Eğer bu ifadenin tersi doğru olmuş olsaydı, $A-$metrikler alışılmış metrikler tarafından türetilmiş olacağından $A-$metrik uzaylar alışılmış metrik uzaylardan çok farklı yapılar olmayacaktı. Bu koşulda $A-$metrik uzay kavramı önemini yitirecekti.

Örnek 3.4 *$X = [0, \infty)$ olmak üzere, $A : X \times X \times ... \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu her $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ için*

$$A(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 0, & x_1 = x_2 = \cdots = x_n \text{ ise} \\ \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}, & diğer\ durumlarda \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre (X, A) *bir tam* $A-$*metrik uzaydır. Burada tanımlanan* $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ *fonksiyonunun* $A-$*metrik aksiyomlarını sağladığı aşikardır, yani bir* $A-$*metriktir. Tanımlanan* $A-$*metriğin alışılmış metrik uzaydan üretildiği varsayılırsa*

$$A(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} d(x_i, x_n)$$

olduğundan

$$A(xi, ...x_i, x_n) = (n-1)\, d(x_i, x_n)$$

$$A(xi, ...x_i, x_n) = \max\{x_i, x_n\}$$

ve

$$\begin{aligned} (n-1)\, d(x_i, x_n) &= \max\{x_i, x_n\} \\ d(x_i, x_n) &= \frac{\max\{x_i, x_n\}}{(n-1)} \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda

$$\max\{x_1, x_2, ..., x_n\} \neq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\max\{x_i, x_n\}}{(n-1)}$$

bulunur. O halde tanımlanmış olan $A-$*metrik alışılmış metrik tarafından üretilemez. Bu sayede her A-metrik uzay alışılmış metrik uzay tarafından üretilmez denebilir.*

Yardımcı Teorem 3.3 (X, A) *bir* $A-$*metrik uzay olsun. Her* $x, y \in X$ *için*

$$A(x, ..., x, y) = A(y, ..., y, x)$$

eşitliği sağlanır. (Abbas vd., 2015)

Tanım 3.13 (X, A) *bir* $A-$*metrik uzay ve* $(x_n) \subset X$ *bu uzayda bir dizi olsun.*
i) *X kümesindeki bir* (x_n) *dizisinin* x *noktasına yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul* $n \to \infty$ *için* $A(x_n, ..., x_n, x) \to 0$ *olmasıdır. Yani her* $\varepsilon > 0$ *değerine karşılık* $n \geq n_0$ *koşulunu sağlayan her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $A(x_n, ..., x_n, x) < \varepsilon$ *olacak şekilde bir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *varsa* (x_n) *dizisi* x *noktasına* $A-$*yakınsaktır denir ve* x *değerine de* (x_n) *dizisinin limiti denir.*
ii) *Verlen her* $\varepsilon > 0$ *değerine karşılık* $n, m \geq n_0$ *koşulunu sağlayan her* $n, m \in \mathbb{N}$ *için* $A(x_n, ..., x_n, x_m) < \varepsilon$ *olacak şekilde bir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *varsa* (x_n) *dizisine bir* $A-$*Cauchy dizisi denir.*
iii) (X, A)*,* $A-$*metrik uzayındaki her* $A-$*Cauchy dizisi yakınsak ise* (X, A) $A-$*metrik uzayına* $A-$*tamdır denir. (Abbas vd., 2015)*

Yardımcı Teorem 3.4 *(X, A) bir $A-$metrik uzay olsun. $(x_n) \subset A$ dizisi x noktasına $A-$yakınsıyor ise x tektir. (Abbas vd., 2015)*

Yardımcı Teorem 3.5 *(X, A) bir $A-$metrik uzay olsun. $(x_n) \subset A$ için,*

$$A(x_1, ..., x_1, x_n) \leq (n-1) \sum_{i=1}^{n-2} A(x_i, ..., x_i, x_{i+1}) + A(x_{n-1}, ..., x_{n-1}, x_n)$$

dir. (Abbas vd., 2015)

Yardımcı Teorem 3.6 *(X, A) bir $A-$metrik uzay olsun. Eğer $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ ise $\lim_{n\to\infty} A(x_n, ..., x_n, y_n) = A(x, ..., x, y)$ dir. (Abbas vd., 2015)*

Yardımcı Teorem 3.7 *(X, A) bir $A-$metrik uzay ve $(x_n) \subset X$ olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için,*

$$A(x_n, ..., x_n, x_{n-1}) \leq cA(x_{n-1}, ..., x_{n-1}, x_n)$$

$c \in [0, 1)$ varsa, (x_n) Cauchy dizisidir. (Abbas vd., 2015)

Tanım 3.14 *(X, A) bir A-metrik uzay ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ için*

$$A(Tx_1, Tx_2, ..., Tx_n) \leq aA(x_1, x_2, ..., x_n)$$

olacak şekilde $0 \leq a < 1$ sabiti var ise T fonksiyonuna bir büzülme dönüşümü denir. (Abbas vd., 2015)

Teorem 3.20 *(X, A) bir tam $A-$metrik uzay ve $T : X \to X$ bir büzülme dönüşümü olsun. Bu taktirde T nin bir tek sabit noktası vardır. Üstelik x_0, X te keyfi bir nokta ve $x_n = T^n \{x_0\}$ şeklinde tanımlanan X de bir dizi olarak alınır ise (x_n) dizisi bu sabit noktaya yakınsar. (Abbas vd., 2015)*

Teorem 3.21 *(X, A) bir tam $A-$metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. T dönüşümü $a \in \left[0, \frac{1}{n}\right)$ olmak üzere her $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ için*

$$\begin{aligned} A(Tx_1, Tx_2, ..., Tx_n) \quad \leq \quad & a\left(A(x_1, ..., x_1, Tx_1) + A(x_2, ..., x_2, Tx_2) + \right. \\ & \left. \cdots + A(x_n, ..., x_n, Tx_n)\right) \end{aligned}$$

koşulunu sağlıyor ise T nin X uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır. (Gelişgen ve Ermiş, 2019)

Teorem 3.22 *(X, A) bir tam $A-$metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. T dönüşümü $a \in [0, 1)$ olmak üzere her $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ için*

$$\begin{aligned} A(Tx_1, Tx_2, ..., Tx_n) \quad \leq \quad & a \max \{A(x_1, ..., x_1, Tx_1), A(x_2, ..., x_2, Tx_2), \\ & ..., A(x_n, ..., x_n, Tx_n)\} \end{aligned}$$

koşulunu sağlıyor ise T nin X uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır. (Gelişgen ve Ermiş, 2019)

Teorem 3.23 *(X, A) bir tam $A-$metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. T dönüşümü $a \in \left[0, \dfrac{1}{2\,(n-1)^2}\right)$ olmak üzere her $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ için*

$$\begin{aligned} A(Tx_1, Tx_2, ..., Tx_n) \quad \leq \quad & a \,(A(x_1, ..., x_1, Tx_2) + \cdots + A(x_1, ..., x_1, Tx_n) + \\ & A(x_2, ..., x_2, Tx_1) + \cdots + A(x_2, ..., x_2, Tx_n) + \\ & \cdots + A(x_n, ..., x_n, Tx_1) + \cdots + A(x_n, ..., x_n, Tx_{n-1})) \end{aligned}$$

koşulunu sağlıyor ise T nin X uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır. (Gelişgen ve Ermiş, 2019)

Teorem 3.24 *(X, A) bir tam $A-$metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. T dönüşümü $a \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right)$ olmak üzere her $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ için*

$$\begin{aligned} A(Tx_1, Tx_2, ..., Tx_n) \quad \leq \quad & a \max \{A(x_1, ..., x_1, Tx_2), \cdots, A(x_1, ..., x_1, Tx_n), \\ & A(x_2, ..., x_2, Tx_1), \cdots, A(x_2, ..., x_2, Tx_n), \\ & \cdots, A(x_n, ..., x_n, Tx_1), \cdots, A(x_n, ..., x_n, Tx_{n-1})\} \end{aligned}$$

koşulunu sağlıyor ise T nin X uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır. (Gelişgen ve Ermiş, 2019)

Aşağıdaki teorem ifadesi Teorem 6.9 daki kapalı bağıntı yöntemi ile elde edilebildiğinden ispatı verilmemiştir.

Teorem 3.25 (X, A) *bir tam* $A-$*metrik uzay ve* $T : X \to X$ *dönüşüm olsun.* $r \in [0, 1)$ *ve*

$$\begin{aligned} M_T^A(x, ..., x, y) &= \max\{A(x, ..., x, y), A(x, ..., x, Tx), A(y, ..., y, Ty), \\ &\quad \left.\frac{(A(x, ..., x, Ty) + A(y, ..., y, Tx))}{n}\right\} \end{aligned}$$

olmak üzere her $x, y \in X$ *için*

$$A(Tx, ..., Tx, Ty) \leq rM_T^A(x, ..., x, y)$$

koşulunu sağlıyor ise T *dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.*

Teorem 3.26 (X, A) *bir tam* $A-$*metrik uzay ve* $T : X \to X$ *bir dönüşüm olsun.* T *dönüşümü* $a_1, a_2, \ldots a_n, b$ *negatif olmayan sayılar ve* $a_1, a_2, \ldots a_n, b < 1$ *ve* $na_n + b < 1$ *olmak üzere her* $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *için*

$$\begin{aligned} A(Tx_1, Tx_2, ..., Tx_n) &\leq a_1A(x_1, ..., x_1, Tx_1) + a_2A(x_2, ..., x_2, Tx_2) + \\ &\quad \cdots + a_nA(x_n, ..., x_n, Tx_n) + bA(x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned}$$

koşulunu sağlıyor ise T *nin* X *uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır. (Gelişgen ve Ermiş, 2019)*

Teorem 3.27 (X, A) *bir tam* $A-$*metrik uzay ve* $T : X \to X$ *bir dönüşüm olsun.* T *dönüşümü* $a_{11}, a_{12}, ..., a_{nn}, b$ *negatif olmayan sayılar ve* $\left(a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{(n-1)(n-1)}\right) + \left(a_{1n} + a_{2n} + \cdots a_{(n-1)n}\right) + n\left(a_{1n} + a_{2n} + \cdots a_{(n-1)n}\right) + a_{nn} + b < 1$ *ve* $na_{nn} + \left(a_{1n} + a_{2n} + \cdots a_{(n-1)n}\right) + \left(a_{1n} + a_{2n} + \cdots a_{(n-1)n}\right) + b < 1$, *olmak üzere her* $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *için*

$$\begin{aligned} A(Tx_1, Tx_2, ..., Tx_n) &\leq a_{11}A(x_1, ..., x_1, Tx_1) + \cdots + a_{nn}A(x_n, ..., x_n, Tx_n) \\ &\quad + a_{12}A(x_1, ..., x_1, Tx_2) + \cdots + a_{1n}A(x_1, ..., x_1, Tx_n) \\ &\quad + a_{21}A(x_2, ..., x_2, Tx_1) + \cdots + a_{2n}A(x_2, ..., x_2, Tx_n) + \cdots \\ &\quad + a_{n1}A(x_n, ..., x_n, Tx_1) + \cdots + a_{n(n-1)}A(x_n, ..., x_n, Tx_{n-1}) \\ &\quad + bA(x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned}$$

koşulunu sağlıyor ise T *nin* X *uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır. (Gelişgen ve Ermiş, 2019)*

Literatürde varolan kapalı bağıntı çalışmaları $\mathbb{R}^5$ veya $\mathbb{R}^6$ üzerinden verilmekle beraber bütünlük bozulmaması adına aşağıdaki tanım ve teoremlere bu bölümde yer

verilmiştir. Tanım 3.15, Teorem 3.28 ve Teorem 3.29 ifadeleri orijinal olup ilk kez bu tez çalışmasında verilmiştir.

$A-$metrik kavramı $X \neq \varnothing$ olmak üzere $X \times X \times \cdots \times X$ kümesi üzerinde tanımlanır. Bu noktada kısalığın hatırına $A\left(x,...,x,y\right)$ ifadesi $A\left(\boldsymbol{x};y\right)$ şeklinde gösterilecektir.

Tanım 3.15 *Ψ_A ifadesi $F:\mathbb{R}_{+}^{n^2+2}\rightarrow\mathbb{R}$ şeklinde tanımlı aşağıdaki koşulları sağlayan tüm sürekli fonksiyonların kümesi olsun.*
$(F1)$ F fonksiyonu $m = 1,2,...,n-1$ olmak üzere $(2+m.n)$ değişkenlerine göre artmayandır.
$(F2)$ Her $u,v\geq 0$ için $F\left(u,v,\underbrace{\overbrace{v,...,v}^{n-1\ tane},\left(n-1\right)v+u,v,...,\left(n-1\right)v+u}_{n-1\ tane},\overbrace{0,...,0}^{n-1\ tane},u\right)\leq 0$
ise $u\leq hv$ olacak şekilde $h\in[0,1)$ vardır.
$(F3)$ Her $t>0$ için $F\left(t,t,\underbrace{\overbrace{0,...,0}^{n-1\ tane},t,\overbrace{0,...,0}^{n-1\ tane},t}_{n-1\ tane},\overbrace{t,...,t}^{n-1\ tane},0\right)>0$ *dır.*

Teorem 3.28 *(X,A) bir $A-$metrik uzay ve $T:X\rightarrow X$ her $x_1,x_2,...,x_n\in X$ için*

$$F\left(A\left(Tx_1,...,Tx_n\right),A(x_1,...,x_n),A(\boldsymbol{x_1};Tx_1),...,A(\boldsymbol{x_1};Tx_n),A(\boldsymbol{x_2};Tx_1),\right.$$
$$\left....,A(\boldsymbol{x_2};Tx_n),...,A(\boldsymbol{x_n};Tx_1),...,A(\boldsymbol{x_n};Tx_n)\right) \leq 0$$

olacak şekilde bir dönüşüm olsun. Ayrıca F fonksiyonu $(F3)$ özelliğini sağlasın. Bu taktirde T dönüşümü en çok bir sabit noktaya sahiptir.

İspat *$w\neq v$ ve w, v T nin iki sabit noktası olsun. Buna göre teoremin hipotezindeki koşulda $x_1,x_2,...,x_{n-1}=w$, $x_n=v$ olarak uygulanırsa*

$$F\left(A\left(\boldsymbol{Tw};Tv\right),A\left(\boldsymbol{w};v\right),A\left(\boldsymbol{w};Tw\right),...,A\left(\boldsymbol{w};Tw\right),A\left(\boldsymbol{w};Tv\right),\right.$$
$$\left....,A\left(\boldsymbol{v};Tw\right),...,A\left(\boldsymbol{v};Tw\right),A\left(\boldsymbol{v};Tv\right)\right) \leq 0$$

olup açıkça

$$F\left(A\left(\boldsymbol{w};v\right),A\left(\boldsymbol{w};v\right),0,...,0,A\left(\boldsymbol{w};v\right),...,A\left(\boldsymbol{v};w\right),...,A\left(\boldsymbol{v};w\right),0\right)\leq 0$$

yani

$$F\left(A\left(\boldsymbol{w};v\right),A\left(\boldsymbol{w};v\right),0,...,0,A\left(\boldsymbol{w};v\right),...,A\left(\boldsymbol{w};v\right),...,A\left(\boldsymbol{w};v\right),0\right)\leq 0$$

elde edilir. Ancak bu sonuç $(F3)$ özelliği ile çelişir. Bu nedenle $w=v$ olmalıdır.

Teorem 3.29 *(X, A) bir tam $A-$metrik uzay ve $F \in \Psi_A$ olmak üzere $T : X \to X$ dönüşümü her $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ için*

$$\begin{aligned} F\left(A\left(Tx_1, ..., Tx_n\right), A(x_1, ..., x_n), A(\boldsymbol{x_1}; Tx_1), ..., A(\boldsymbol{x_1}; Tx_n), A(\boldsymbol{x_2}; Tx_1),\right. \\ \left. ..., A(\boldsymbol{x_2}; Tx_n), ..., A(\boldsymbol{x_n}; Tx_1), ..., A(\boldsymbol{x_n}; Tx_n)\right) \leq 0 \end{aligned}$$

koşulunu sağlasın. Bu taktirde T dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat *u_0, X de keyfi bir nokta olsun. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $u_n = Tu_{n-1}$ olacak şekilde tanımlansın. Böylelikle teoremin hipotezindeki koşulda $x_1, x_2, ..., x_{n-1} = u_{n-1}$, $x_n = u_n$ alınırsa*

$$\begin{aligned} F\left(A\left(\boldsymbol{T u_{n-1}}; Tu_n\right), A\left(\boldsymbol{u_{n-1}}; u_n\right), A\left(\boldsymbol{u_{n-1}}; Tu_{n-1}\right), ..., A\left(\boldsymbol{u_{n-1}}; Tu_n\right), ...,\right. \\ \left. A\left(\boldsymbol{u_n}; Tu_{n-1}\right), ..., A\left(\boldsymbol{u_n}; Tu_n\right)\right) \leq 0 \end{aligned}$$

yani

$$\begin{aligned} F\left(A\left(\boldsymbol{u_{n-1}}; u_{n+1}\right), A\left(\boldsymbol{u_{n-1}}; u_n\right), A\left(\boldsymbol{u_{n-1}}; u_n\right), ..., A\left(\boldsymbol{u_{n-1}}; u_{n+1}\right), ...,\right. \\ \left. A\left(\boldsymbol{u_n}; u_n\right), ..., A\left(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}\right)\right) \leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu noktada $A-$metrik özelliği gereğince

$$A\left(\boldsymbol{u_{n-1}}; u_{n+1}\right) \leq (n-1) A\left(\boldsymbol{u_{n-1}}; u_n\right) + A\left(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}\right)$$

olduğundan dolayı ve F nin $m = 1, 2, ..., n-1$ olmak üzere $(2 + m.n)$ değişkenlerine göre artmayan oluşundan dolayı

$$\begin{aligned} F\left(A\left(\boldsymbol{u_{n-1}}; u_{n+1}\right), A\left(\boldsymbol{u_{n-1}}; u_n\right), A\left(\boldsymbol{u_{n-1}}; u_n\right), ..., (n-1) A\left(\boldsymbol{u_{n-1}}; u_n\right) +\right. \\ \left. A\left(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}\right), ..., 0, ..., 0, A\left(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}\right)\right) \leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre F nin sağladığı $(F2)$ koşulu gereğince

$$A\left(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}\right) \leq hA\left(\boldsymbol{u_{n-1}}; u_n\right)$$

dir. O halde bu süreç tekrar edilerek

$$A\left(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}\right) \leq hA\left(\boldsymbol{u_{n-1}}; u_n\right) \leq \cdots \leq h^n A\left(\boldsymbol{u_0}; u_1\right)$$

elde edilir. Üstelik her $m, n \in \mathbb{N}$ *ve* $m > n$ *için* $A-$*metriğin özellikleri kullanılarak*

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{u_n}; u_m) &\leq (n-1) A(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}) + A(\boldsymbol{u_{n+1}}; u_m) \\ &\leq (n-1) A(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}) + (n-1) A(\boldsymbol{u_{n+1}}; u_{n+2}) + A(\boldsymbol{u_{n+2}}; u_m) \\ &\vdots \\ &\leq (n-1) A(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}) + \cdots + (n-1) A(\boldsymbol{u_{m-2}}; u_{m-1}) + A(\boldsymbol{u_{m-1}}; u_m) \\ &\leq (n-1) \sum_{i=n}^{m-1} A(\boldsymbol{u_i}; u_{i+1}) \\ &\leq (n-1) (h^n + h^{n+1} + \cdots + h^{m-1}) A(\boldsymbol{u_0}; u_1) \\ &= (n-1) \frac{h^m - h^n}{1-h} A(\boldsymbol{u_0}; u_1) \\ &\leq (n-1) \frac{h^m}{1-h} A(\boldsymbol{u_0}; u_1) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu aşamada $m \to \infty$ *için işlem yapılırsa* $h \in [0, 1)$ *olduğundan*

$$A(\boldsymbol{u_n}; u_m) \leq (n-1) \frac{h^m}{1-h} A(\boldsymbol{u_0}; u_1) \to 0$$

olur. Dolayısıyla (u_n) *bir* $A-$*Cauchy dizisidir. Ayrıca* (X, A) *bir tam* $A-$*metrik uzay olduğundan dolayı* (u_n) *dizisi bir* $w \in X$ *noktasına yakınsar.* $x_1, x_2, ..., x_{n-1} = u_{n-1}$, $x_n = w$ *için teoremin hipotezi kullanılırsa*

$$\begin{aligned} F(A(\boldsymbol{Tu_{n-1}}; Tw), A(\boldsymbol{u_{n-1}}; w), A(\boldsymbol{u_{n-1}}; Tu_{n-1}), ..., A(\boldsymbol{u_{n-1}}; Tw), ..., \\ A(\boldsymbol{w}; Tu_{n-1}), ..., A(\boldsymbol{w}; Tw)) \leq 0 \end{aligned}$$

yani

$$\begin{aligned} F(A(\boldsymbol{u_n}; Tw), A(\boldsymbol{u_{n-1}}; w), A(\boldsymbol{u_{n-1}}; u_n), ..., A(\boldsymbol{u_{n-1}}; Tw), ..., \\ A(\boldsymbol{w}; u_n), A(\boldsymbol{w}; Tw)) \leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $A-$*metriğin değişkenleri üzerinde sürekli olması ve* T *nin sürekli olması gereğince* $n \to \infty$ *için limit alınırsa*

$$F(A(\boldsymbol{w}; Tw), 0, 0, ..., 0, A(\boldsymbol{w}; Tw), ..., 0, ..., 0, A(\boldsymbol{w}; Tw), 0, ..., 0, A(\boldsymbol{w}; Tw)) \leq 0$$

olur. Bu taktirde $(F2)$ *özelliği gereğince*

$$A(\boldsymbol{w}; Tw) = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $w = Tw$ *dir. Yani* w, T *nin sabit noktasıdır. Teorem 3.28 gereğince* w, T *nin tek sabit noktasıdır.*

4. ALIŞILMIŞ METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİNİN SUZUKİ TİP GENELLEŞTİRİLMİŞLERİ

Bu bölümde alışılmış metrik uzaylarda Banach, Kannan, Chatterjea, Ćirić, Reich, Hardy-Rogers gibi iyi bilinen bazı sabit nokta teoremlerinin Suzuki 2008, çalışmasında ortaya attığı türden genellemeleri ele alınacaktır. Bu genellemelerin literatürde mevcut olanları belirtilecek ve bölümün sonunda ismi geçen ünlü sabit nokta teoremlerini genelleyen kapalı bağıntıya uygulayarak bölüm sonlandırılacaktır. Bu bölümde yer alan ispatsız teoremlerin ispatlarına ilgili teoremlerin sonunda atıf yapılarak belirtilen referanslardan ulaşılabilir. Aşağıdaki teorem T. Suzuki'nin 2008 yılında yayımladığı Banach sabit nokta teoremin bir genellemesi olan daha sonra kendisi de dahil olmak üzere bir çok bilim insanı tarafından çeşitli şekillerde geliştirilen Suzuki tip genelleştirmedir.

Teorem 4.1 *(X,d) tam metrik uzay, $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. $\theta : [0,1) \to \left(\frac{1}{2},1\right]$ artmayan fonksiyonu*

$$\theta(r) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ ise} \\ \dfrac{1-r}{r^2}, & \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \leq r < \dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ ise} \\ \dfrac{1}{1+r}, & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq r < 1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu taktirde her $x, y \in X$ için

$$\theta(r)\, d(x,Tx) \leq d(x,y) \Rightarrow d(Tx,Ty) \leq r d(x,y)$$

koşulunu sağlayacak şekilde $r \in [0,1)$ varsa T dönüşümü bir tek w sabit noktasına sahiptir ve her $x \in X$ için $\lim_{n\to\infty} T^n x = w$ dir. Yani her $x \in X$ için $(T^n x)$ iterasyon dizisi T dönüşümün biricik sabit noktası olan $w \in X$ noktasına yakınsar. (Suzuki, 2008)

Açıkça Teorem 4.1 deki koşulu sağlayan büzülme dönüşümleri alışılmış büzülme dönüşümlerini kapsar. Bunun yanı sıra aşağıdaki örnekler Teorem 4.1 deki koşulu sağlayan büzülme dönüşümleri ile Kannan dönüşümlerinin birbirinden bağımsız olduğunu göstermektedir.

Örnek 4.1 $X = \{(0,0),(4,0),(0,4),(4,5),(5,4)\}$ *olarak alınsın ve* X *üzerinde* d *ile gösterilen metrik ise* $d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = |x_1-y_1|+|x_2-y_2|$ *olarak tanımlansın. Dikkat edilirse* (X,d) *metrik uzayı tamdır. Ayrıca* $T: X \to X$ *dönüşümü*

$$T(x_1,x_2) = \begin{cases} (x_1,0), x_1 \leq x_2 \text{ ise} \\ (0,x_2), x_1 > x_2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu taktirde tanımlanan T *dönüşümü Teorem 4.1 in hipotezindeki koşulları sağlarken bir Kannan dönüşümü değildir. Açık bir şekilde dikkat edilirse* $(x,y),(y,x) \neq ((4,5),(5,4))$ *iken* $d(Tx,Ty) \leq \frac{4}{5}d(x,y)$ *dir. Her* $r \in [0,1)$ *için*

$$\theta(r)\, d((4,5),T(4,5)) > \frac{5}{2} > 2 = d((4,5),(5,4))$$

ve

$$\theta(r)\, d((5,4),T(5,4)) > d((5,4),(4,5))$$

olduğundan T *dönüşümü Teorem 4.1 deki koşulları sağlar. Ancak basitçe*

$$d(T(5,4),T(4,5)) = 8 > 5 = \frac{1}{2}\left(d((4,5),T(4,5)) + d((5,4),T(5,4))\right)$$

olduğundan dolayı T dönüşümü bir Kannan dönüşümü değildir.(Suzuki, 2008)

Örnek 4.2 $X = \{-1,0,1,2\}$ *kümesi ve* X *kümesi üzerinde d standart metrik göz önüne alınsın. O halde açıkça* (X,d) *bir tam metrik uzay olur. Ayrıca* $T: X \to X$ *dönüşümü*

$$Tx = \begin{cases} 0, x \neq 2 \text{ ise} \\ -1, x = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın. O halde T dönüşümü bir Kannan dönüşümü iken Banach sabit nokta teoreminin Suzuki tip genellemesindeki koşulları sağlamaz. Her $x \in X$ için

$$d(Tx,T2) \leq 1 = \frac{1}{3}d(2,T2) \leq \frac{1}{3}d(x,Tx) + \frac{1}{3}d(2,T2)$$

olduğundan dolayı T bir Kannan dönüşümüdür. Ancak her $r \in [0,1)$ için

$$\theta(r)\, d(1,T1) \leq 1 = d(1,2)$$

ve

$$d(T1,T2) = 1 = d(1,2)$$

olduğundan T dönüşümü Teorem 4.1 deki koşulları sağlamaz. (Suzuki, 2008)

Sıradaki Yardımcı Teorem 4.1 ve Teorem 4.2 ile Teorem 4.3 Kikkawa ve Suzuki'nin 2008 yılında yayımladıkları çalışmalarından alınmış olup bu teoremler ile alşılmış metrik uzaylarda iyi bilinen Kannan sabit nokta teoremi ile genelleştirilmiş Kannan sabit nokta (Bianchini sabit nokta) teoreminin Suzuki tip genellemeleri verilmektedir.

Yardımcı Teorem 4.1 *(X,d) bir metrik uzay ve T de X üzerinde bir kendi üzerine dönüşüm olsun. Ayrıca $x \in X$ ve bir $r \in [0,1)$ için*

$$d(Tx,T^2x) \leq rd(x,Tx)$$

koşulları sağlansın. Bu taktirde $y \in X$ için,

$$\frac{1}{1+r}d(x,Tx) \leq d(x,y)$$

veya

$$\frac{1}{1+r}d(Tx,T^2x) \leq d(Tx,y)$$

koşullarından biri sağlanır. (Kikkawa ve Suzuki, 2008)

Teorem 4.2 *(X,d) bir tam metrik uzay ve $T{:}X \to X$ bir dönüşüm olsun. $\theta : [0,1) \to \left(\frac{1}{2},1\right]$ artmayan fonksiyonu*

$$\theta(r) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ise} \\ \frac{1}{1+r}, & \frac{1}{\sqrt{2}} \leq r < 1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın ve ayrıca $a \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$ ve $r := \frac{a}{1-a} \in [0,1)$ olsun. Bu taktirde her $x,y \in X$ için

$$\theta(r)d(x,Tx) \leq d(x,y) \Longrightarrow d(Tx,Ty) \leq a\left(d(x,Tx)+d(y,Ty)\right)$$

koşulunu sağlayacak şekilde $a \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$ varsa T dönüşümü bir tek w sabit noktasına sahiptir ve her $x \in X$ için (T^nx) iterasyon dizisi $w \in X$ noktasına yakınsar. (Kikkawa ve Suzuki, 2008)

Teorem 4.3 *(X,d) bir tam metrik uzay ve $T{:}X \to X$ bir dönüşüm olsun. $\theta{:}[0,1) \to \left(\frac{1}{2},1\right]$ artmayan fonksiyonu Teorem 4.1 deki gibi tanımlansın. Bu taktirde her $x,y \in X$ için*

$$\theta(r)d(x,Tx) \leq d(x,y) \Longrightarrow d(Tx,Ty) \leq a \max\{d(x,Tx),d(y,Ty)\}$$

koşulunu sağlayacak şekilde $a \in [0,1)$ varsa T dönüşümü bir tek w sabit noktasına sahiptir ve her $x \in X$ için (T^nx) iterasyon dizisi $w \in X$ noktasına yakınsar.

Sıradaki Teorem 4.4 alışılmış metrik uzaylarda iyi bilinen Chatterjea sabit nokta teoreminin Suzuki tip genellemesini vermektedir. Chatterjea sabit nokta teoremin Suzuki tip genellemesi Popescu, 2008 çalışmasından alınarak aktarılmıştır.

Teorem 4.4 *(X,d) bir tam metrik uzay ve $T{:}X \to X$ bir dönüşüm olsun. $\theta{:}[0,1) \to \left(\frac{1}{2},1\right]$ artmayan fonksiyonu Teorem 4.1 deki gibi tanımlansın. Bu taktirde her $x,y \in X$ için $r{=}\dfrac{a}{1-a}$ olmak üzere*

$$\theta(r)d(x,Tx) \leq d(x,y) \Longrightarrow d(Tx,Ty) \leq a\left[d(x,Ty)+d(y,Tx)\right]$$

koşulunu sağlayacak şekilde üzere $a \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$ varsa T dönüşümü bir tek w sabit noktasına sahiptir ve her $x \in X$ için $(T^n x)$ iterasyon dizisi $w \in X$ noktasına yakınsar. (Popescu, 2008)

Sıradaki Teorem 4.5 alışılmış metrik uzaylarda genelleştirilmiş Chatterjea sabit nokta teoreminin Suzuki tip genellemesini vermektedir. Literatürde genelleştirilmiş Chatterjea sabit nokta teoremin Suzuki tip genellemesinin varlığı araştırılmış ancak bulunamayınca ilgili teorem oluşturularak literatürde ilk olarak bu tez çalışmasında ispatlanmış olup tezin bütünlüğünün korunması adına bu bölümde yer verilmiştir.

Teorem 4.5 *(X,d) bir tam metrik uzay ve $T{:}X \to X$ bir dönüşüm olsun. $\theta{:}[0,1) \to \left(\frac{1}{2},1\right]$ artmayan fonksiyonu Teorem 4.1 deki gibi tanımlansın ve ayrıca $a \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$ ve $r := \dfrac{a}{1-a} \in [0,1)$ olsun. Bu taktirde her $x,y \in X$ için*

$$\theta(r)d(x,Tx) \leq d(x,y) \Longrightarrow d(Tx,Ty) \leq a\max\left\{d(x,Ty),d(y,Tx)\right\}$$

koşulunu sağlayacak şekilde $a \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$ varsa T dönüşümü bir tek w sabit noktasına sahiptir ve her $x \in X$ için $(T^n x)$ iterasyon dizisi $w \in X$ noktasına yakınsar.

İspat *θ nın tanımından dolayı $\theta(r) \leq 1$ olduğundan her $x \in X$ için*

$$\theta(r)d(x,Tx) \leq d(x,Tx)$$

ifadesi sağlanır. Buna göre teoremin hipotezindeki koşul gereğince her $x \in X$ için

$$\begin{aligned} d(Tx,T^2x) &\leq a\max\left\{d(x,T^2x),d(Tx,Tx)\right\} \\ &\leq a\left(d(x,Tx)+d(Tx,T^2x)\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan düzenleme ile

$$d(Tx, T^2x) \leq \frac{a}{1-a} d(x, Tx)$$

bulunur. O halde $r = \dfrac{a}{1-a}$ *olmak üzere*

$$d(Tx, T^2x) \leq r d(x, Tx) \tag{4.1}$$

sonucuna ulaşılır. $u \in X$ *alınarak* $u_0 = u$ *ve her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $u_n = T^n u$ *olacak şekilde* (u_n) *dizisi tanımlansın. Açıkça* $u_n = Tu_{n-1}$ *olduğundan ve* (4.1) *ifadesi gereğince*

$$\begin{aligned} d\left(u_n, u_{n+1}\right) &= d\left(Tu_{n-1}, T^2u_{n-1}\right) \\ &\leq r d\left(u_{n-1}, Tu_{n-1}\right) \\ &\leq r^2 d\left(u_{n-2}, Tu_{n-2}\right) \\ &\vdots \\ &\leq r^n d\left(u_0, u_1\right) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} d\left(u_n, u_{n+1}\right) &= d\left(u_1, u_2\right) + d\left(u_2, u_3\right) + \cdots + d\left(u_n, u_{n+1}\right) + \cdots \\ &\leq r d\left(u_0, u_1\right) + r^2 d\left(u_0, u_1\right) + \cdots + r^n d\left(u_0, u_1\right) + \cdots \\ &= \left(r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots\right) d\left(u_0, u_1\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^n}{1-r} d\left(u_0, u_1\right) \\ &= \frac{1}{1-r} d\left(u_0, u_1\right) < \infty \end{aligned}$$

bulunur. Bu yüzden (u_n) *bir Cauchy dizisidir ve* X *tam metrik uzay olduğundan* (u_n) *dizisi bir* $w \in X$ *noktasına yakınsar. Buna göre her* $x \in X$ *ve* $x \neq w$ *için*

$$d(w, Tx) \leq r d(x, Tx) \tag{4.2}$$

olduğu gösterilmelidir. O halde bunun için $d\left(x, w\right) > 0$ *ve* $(u_n) \to w$ *olduğundan dolayı* $n \geq n_0$ *koşulunu sağlayan her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$d(u_n, w) \leq \frac{1}{3} d(x, w)$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ *vardır. Buna göre*

$$\begin{aligned} \theta(r) d(u_n, Tu_n) &\leq d(u_n, Tu_n) = d(u_n, u_{n+1}) \\ &\leq d(u_n, w) + d(u_{n+1}, w) \\ &\leq \frac{2}{3} d(x, w) = d(x, w) - \frac{1}{3} d(x, w) \\ &\leq d(x, w) - d(u_n, w) \\ &\leq d(u_n, x) \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre hipotez gereğince $n \geq n_0$ *için*

$$d(Tu_n, Tx) \leq a \max \{d(u_n, Tx), d(x, Tu_n)\}$$

olur. Böylelikle $x \neq w$ *olacak şekildeki* $x \in X$ *için son eşitsizlikte* $n \to \infty$ *için limit alınırsa*

$$\begin{aligned} d(w, Tx) &\leq \lim_{n\to\infty} d(u_{n+1}, Tx) \\ &= \lim_{n\to\infty} d(Tu_n, Tx) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} a \max \{d(u_n, Tx), d(x, Tu_n)\} \\ &= \lim_{n\to\infty} a \max \{d(u_n, Tx), d(x, u_{n+1})\} \\ &= a \max \{d(w, Tx), d(x, w)\} \\ &\leq a \max \{d(w, Tx), d(x, Tx) + d(Tx, w)\} \\ &= a (d(x, Tx) + d(Tx, w)) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan düzenleme ile

$$\begin{aligned} d(w, Tx) &\leq \frac{a}{1-a} d(x, Tx) \\ &= r d(x, Tx) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla (4.2) *ifadesi gösterilmiş olur. Şimdi* w *nun* T *dönüşümünün sabit noktası olduğu* $0 \leq r < \frac{1}{\sqrt{2}}$ *ve* $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq r < 1$ *olmak üzere iki durum göz önüne alınarak gösterilecektir. Buna göre ilk durum olarak* $0 \leq r < \frac{1}{\sqrt{2}}$ *alınsın. Dikkat edilirse bu durumda* $\theta(r) \leq \frac{1-r}{r^2}$ *dir. O halde* $n \geq 2$ *olmak üzere her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$d(T^n w, Tw) \leq r d(w, Tw) \tag{4.3}$$

olduğu tümevarım ile gösterilsin. Bu taktirde $n = 2$ *hali açıkça* (4.1) *de gösterilmiştir. Şimdi* $n \geq 2$ *şeklindeki bazı* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$d(T^n w, Tw) \leq r d(w, Tw)$$

olduğu kabul edilsin. O halde metriğin üçgen eşitsizliği özelliği ve üstteki kabul gereğince

$$\begin{aligned} d(w, Tw) &\leq d(w, T^n w) + d(Tw, T^n w) \\ &\leq d(w, T^n w) + r d(w, Tw) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan düzenleme ile

$$d(w, Tw) \leq \frac{1}{1-r} d(w, T^n w)$$

sonucuna ulaşılır. Bu sebeple

$$\begin{aligned} \theta(r) d(T^n w, T^{n+1} w) &\leq \frac{1-r}{r^2} d(T^n w, T^{n+1} w) \\ &\leq \frac{1-r}{r^n} d(T^n w, T^{n+1} w) \\ &\leq \frac{1-r}{r^n} r^n d(w, Tw) \\ &\leq (1-r) \frac{1}{1-r} d(w, T^n w) \\ &\leq d(w, T^n w) \end{aligned}$$

bulunur. Teorem hipotezi gereğince

$$\begin{aligned} d(T^{n+1}w, Tw) &\leq a \max\left\{d(T^n w, Tw), d(w, T^{n+1}w)\right\} \\ &\leq a \max\left\{d(T^n w, T^{n+1}w) + d(Tw, T^{n+1}w), d(w, Tw) + d\left(Tw, T^{n+1}w\right)\right\} \\ &\leq a \max\left\{r^n d(w, Tw) + d(Tw, T^{n+1}w), d(w, Tw) + d\left(Tw, T^{n+1}w\right)\right\} \\ &\leq ad(w, Tw) + ad\left(Tw, T^{n+1}w\right) \end{aligned}$$

olur. Buradan düzenleme ile

$$\begin{aligned} d(T^{n+1}w, Tw) &\leq \frac{a}{1-a} d(w, Tw) \\ &\leq rd(w, Tw) \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla tümevarım ilkesi gereğince $n \geq 2$ *olacak şekildeki her* $n \in \mathbb{N}$ *için* (4.3) *gösterilmiş olur.* T *nin sabit noktasını göstermek adına bir çelişki meydana getirmek için* $Tw \neq w$ *olduğu varsayılsın. Bu durumda* (4.3) *gereğince açık bir şekilde her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $T^n w \neq w$ *olur. O halde* (4.2) *ifadesi gereğince*

$$d(T^{n+1}w, w) \leq rd(T^n w, T^{n+1}w) \leq r^{n+1} d(w, Tw)$$

elde edilir. Bu ise $T^n w \to w$ *olmasını gerektirir ki bu da* (4.12) *ile çelişir. O halde* $Tw = w$ *olmalıdır.*

$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq r < 1$ *olması durumunda Yardımcı Teorem 4.1 gereğince her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$\theta(r) d(u_{2n}, u_{2n+1}) \leq d(u_{2n}, w)$$

veya

$$\theta(r) d(u_{2n+1}, u_{2n+2}) \leq d(u_{2n+1}, w)$$

olmalıdır. Böylelikle her $j \in \mathbb{N}$ *için*

$$\theta(r) d(u_{n_j}, u_{n_j+1}) \leq d(u_{n_j}, w)$$

olacak şekilde (n) *dizisinin bir* (n_j) *alt dizisi vardır. Varsayım gereğince*

$$\begin{aligned} d(w, Tw) &= \lim_{j\to\infty} d(u_{n_j+1}, Tw) \\ &\leq \lim_{j\to\infty} a \max\left\{d(u_{n_j}, Tw), d(w, u_{n_j+1})\right\} \\ &\leq a \max\left\{d(w, Tw), d(w, w)\right\} \\ &\leq ad(w, Tw) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak aşikar olarak $a < \frac{1}{2}$ *olduğundan* $Tw = w$ *olmalıdır. Sonuç olarak her iki durumda da* $Tw = w$ *elde edilir. Yani* w*,* T *dönüşümünün sabit noktasıdır.* T *dönüşümünün sabit noktasının tek olduğunu göstermek için* T *nin birbirinden farklı iki sabit noktasının* w *ve* v *olduğu varsayılsın. O halde aşikar olarak* $w \neq v$ *olduğundan* (4.2) *eşitsizliği gereğince*

$$d(v, w) = d(Tv, w) \leq rd(v, Tv) = 0$$

elde edilir. Ancak açıkça bu bir çelişkidir. Dolayısıyla T *nin sabit noktası tektir.*

Sıradaki teorem Ćirić genelleştirilmiş büzülme sınıfının Suzuki tip genellemesini vermekte olup O. Popoescu'nun 2009 yılında yayımladığı çalışmasından alınmıştır.

Teorem 4.6 *(X,d) bir tam metrik uzay ve $T{:}X \to X$ bir dönüşüm olsun. $\theta{:}[0,1) \to \left(\frac{1}{2},1\right]$ artmayan fonksiyonu Teorem 4.1 deki gibi tanımlansın, ayrıca*

$$M_T^d(x,y) = \max\left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2}\right\}$$

olsun. Bu taktirde her $x,y \in X$ için

$$\theta(r)d(x,Tx) \leq d(x,y) \Longrightarrow d(Tx,Ty) \leq rM_T^d(x,y)$$

koşulunu sağlayacak şekilde üzere $r \in [0,1)$ varsa T dönüşümü bir tek w sabit noktasına sahiptir ve her $x \in X$ için $(T^n x)$ iterasyon dizisi $w \in X$ noktasına yakınsar. (Popescu, 2009)

Sıradaki Teorem 4.7 alışılmış metrik uzaylarda Reich sabit nokta teoreminin Suzuki tip genellemesini vermektedir. Literatürde Reich sabit nokta teoremin Suzuki tip genellemesinin varlığı araştırılmış ancak bulunamayıncailgili teorem oluşturularak literatürde ilk olarak bu tez çalışmasında ispatlanmış olup tezin bütünlüğünün korunması adına bu bölümde yer verilmiştir.

Teorem 4.7 *(X,d) bir tam metrik uzay ve $T{:}X \to X$ bir dönüşüm olsun. $\theta{:}[0,1) \to \left(\frac{1}{2},1\right]$ artmayan fonksiyonu Teorem 4.1 deki gibi tanımlansın ve ayrıca $a,b,c \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ olmak üzere $r = \frac{a+c}{1-b} \in [0,1)$ olsun. Bu taktirde her $x,y \in X$ için*

$$\theta(r)d(x,Tx) \leq d(x,y) \Longrightarrow d(Tx,Ty) \leq ad(x,Tx) + bd(y,Ty) + cd(x,y)$$

koşulunu sağlayacak şekilde $a+b+c<1$, $2b+c<1$ biçiminde $a,b,c \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ varsa T dönüşümü bir tek w sabit noktasına sahiptir ve her $x \in X$ için $(T^n x)$ iterasyon dizisi $w \in X$ noktasına yakınsar.

İspat *θ nın tanımından dolayı $\theta(r) \leq 1$ olduğundan her $x \in X$ için*

$$\theta(r)d(x,Tx) \leq d(x,Tx)$$

ifadesi sağlanır. Buna göre teoremin hipotezindeki koşul gereğince her $x \in X$ için

$$d(Tx,T^2x) \leq ad(x,Tx) + bd(Tx,T^2x) + cd(x,Tx)$$

olup buradan düzenleme ile

$$(1-b)\,d(Tx,T^2x) \leq (a+c)\,d(x,Tx)$$

elde edilir. Böylece

$$d(Tx,T^2x) \leq \frac{a+c}{1-b}d(x,Tx) \tag{4.4}$$

bulunur. $r = \dfrac{a+c}{1-b}$ *olmak üzere* (4.4) *ifadesi*

$$d(Tx,T^2x) \leq rd(x,Tx)$$

olarak yazılabilir. $u \in X$ *alınarak* $u_0 = u$ *ve her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $u_n = T^n u$ *olacak şekilde* (u_n) *dizisi tanımlansın. Açıkça* $u_n = Tu_{n-1}$ *olduğundan ve* (4.18) *ifadesi gereğince*

$$\begin{aligned} d\left(u_n,u_{n+1}\right) &= d\left(T^n u_0, T^{n+1}u_0\right) \\ &\leq rd\left(T^{n-1}u_0,T^n u_0\right) \\ &\leq r^2 d\left(T^{n-2}u_0,T^{n-1}u_0\right) \\ &\vdots \\ &\leq r^n d\left(u_0,Tu_0\right) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} d\left(u_n,u_{n+1}\right) &= d\left(u_1,u_2\right)+d\left(u_2,u_3\right)+\cdots+d\left(u_n,u_{n+1}\right)+\cdots \\ &\leq rd\left(u_0,u_1\right)+r^2d\left(u_0,u_1\right)+\cdots+r^n d\left(u_0,u_1\right)+\cdots \\ &= \left(r+r^2+\cdots+r^n+\cdots\right)d\left(u_0,u_1\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1-r}d\left(u_0,u_1\right) \\ &= \frac{1}{1-r}d\left(u_0,u_1\right) < \infty \end{aligned}$$

bulunur. Bu sebeple (u_n) *bir Cauchy dizisidir.* (X,d) *tam metrik uzay olduğundan* (u_n) *dizisi bir* $w \in X$ *noktasına yakınsar. Buna göre* $x \neq w$ *özelliğindeki her* $x \in X$ *için*

$$d\left(w,Tx\right) \leq r'd\left(x,w\right) \tag{4.5}$$

olduğu gösterilmelidir. O halde bunun için $d\left(x,w\right) > 0$ *ve* $(u_n) \to w$ *olduğundan dolayı* $n \geq n_0$ *koşulunu sağlayan her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$d(u_n,w) \leq \frac{1}{3}d(x,w)$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ *vardır. O halde*

$$\begin{aligned} \theta(r)d(u_n,Tu_n) &\leq d(u_n,Tu_n) = d(u_n,u_{n+1}) \\ &\leq d(u_n,w)+d(u_{n+1},w) \\ &\leq \frac{2}{3}d(x,w) = d(x,w)-\frac{1}{3}d(x,w) \\ &\leq d(x,w)-d(u_n,w) \\ &\leq d(u_n,x) \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre hipotez gereğince $n \geq n_0$ *için*

$$d(Tu_n, Tx) \leq ad(u_n, Tu_n) + bd(x, Tx) + cd\,(u_n, x)$$

olur. Böylelikle $x \neq w$ *olacak şekildeki* $x \in X$ *için son eşitsizlikte* $n \to \infty$ *için limit alınırsa*

$$\begin{aligned} d(Tx, w) = d(w, Tx) &= d(u_{n+1}, Tx) \\ &= \lim_{n\to\infty} d\,(Tu_n, Tx) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} (ad\,(u_n, Tu_n) + bd\,(x, Tx) + cd(u_n, x)) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} (ad\,(u_n, u_{n+1}) + bd\,(x, Tx) + cd(u_n, x)) \\ &\leq ad(w, w) + bd(x, Tx) + cd(w, x) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Buna göre metriğin üçgen eşitsizliği özelliği gereğince

$$\begin{aligned} d(Tx, w) &\leq bd(x, Tx) + cd(w, x) \\ &\leq bd(x, w) + bd\,(w, Tx) + cd(w, x) \end{aligned}$$

olup buradan düzenleme ile $r' = \dfrac{b+c}{1-b}$ *olmak üzere*

$$d(Tx, w) \leq \frac{b+c}{1-b} d(x, w) = r' d(x, w)$$

bulunur. Dolayısıyla (4.5) *ifadesi gösterilmiş olur. Şimdi* w *nun* T *dönüşümünün sabit noktası olduğu* $0 \leq r < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ *ve* $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq r < 1$ *olmak üzere iki durum göz önüne alınarak gösterilecektir.*

Birinci durum olarak $0 \leq r < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ *alınsın. Bu taktirde dikkat edilirse bu durumda* $\theta\,(r) \leq \dfrac{1-r}{r^2}$ *dir. İlk olarak her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$d(T^n w, w) \leq d(Tw, w) \tag{4.6}$$

olduğu tümevarım yöntemi ile gösterilsin. Bu taktirde $n = 1$ *için* (4.6) *ifadesi aşikar olarak doğrudur. Şimdi bazı* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$d(T^n w, w) \leq d(Tw, w)$$

olduğu kabul edilsin. O halde şimdi ifadenin $n + 1$ *için doğru olduğunun gösterilmesi gereklidir. Eğer* $T^n w = w$ *ise* $T^{n+1} w = Tw$ *ve*

$$d(T^{n+1} w, w) = d(Tw, w) \leq d(Tw, w)$$

olur. Eğer $T^n w \neq w$ *ise* $x = T^n w$ *için;*

$$d(T^{n+1} w, w) \leq rd(T^n w, w) \leq rd(Tw, w) \leq d(Tw, w)$$

elde edilir. Böylelikle tümevarım ilkesi ile (4.6) *eşitsizliğinin doğru olduğu ispatlanmıştır. Şimdi her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$d(T^n w, Tw) \leq rd(Tw, w) \tag{4.7}$$

olduğu benzer şekilde tümevarım ile gösterilsin. Buna göre $n = 1$ *için ifade aşikardır.* $n = 2$ *için ifadenin doğru olduğu* (4.4) *de gösterilmiştir. Buna göre şimdi bazı* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$d(T^n w, Tw) \leq rd(Tw, w)$$

olduğu kabul edilsin. Şimdi ifadenin $n+1$ *için doğru olduğunun gösterilmesi gereklidir. Buna göre metriğin üçgen eşitsizliği özelliği ve* (4.6) *ifadesi gereğince*

$$\begin{aligned} d(w, Tw) &\leq d(w, T^n w) + d(T^n w, Tw) \\ &\leq d(w, T^n w) + rd(w, Tw) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan düzenleme ile

$$d(w, Tw) \leq \frac{1}{1-r} d(w, T^n w)$$

bulunur. Bu sebeple

$$\begin{aligned} \theta(r) d(T^n w, T^{n+1} w) &\leq \frac{1-r}{r^2} d(T^n w, T^{n+1} w) \\ &\leq \frac{1-r}{r^n} r^n d(Tw, w) \\ &\leq (1-r)\, d(Tw, w) \\ &\leq (1-r)\, \frac{1}{1-r} d(w, T^n w) \\ &\leq d(w, T^n w) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Teoremin hipotezi gereğince

$$\begin{aligned} d(T^{n+1} w, Tw) &\leq ad(T^n w, T^{n+1} w) + bd(w, Tw) + cd(T^n w, w) \\ &\leq ar^n d(Tw, w) + bd(w, Tw) + cd(Tw, w) \\ &= (ar^n + b + c)\, d(Tw, w) \\ &\leq rd(Tw, w) \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla tümevarım yöntemi ile her $n \in \mathbb{N}$ *için eşitsizliğin doğru olduğu ispatlanmıştır. Sabit noktanın varlığını göstermek adına bir çelişkiye ulaşmak için* $Tw \neq w$ *varsayılsın. Bu taktirde* (4.7) *gereğince her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $T^n w \neq w$ *olur. O halde* (4.6) *ifadesi gereğince*

$$d(T^{n+1} w, w) \leq rd(T^n w, w) \leq \cdots \leq r^n d(Tw, w)$$

olur. Ancak $\lim_{n \to \infty} r^n d(Tw, w) = 0$ *olduğundan* $T^n w \to w$ *olmasını gerektirir ki bu da* (4.7) *ile çelişir. O halde* $Tw = w$ *olmalıdır.*

$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq r < 1$ *olması durumunda her* $j \in \mathbb{N}$ *için*

$$\theta(r) d(u_{nj}, u_{nj+1}) \leq d(u_{nj}, w)$$

olacak şekilde (n) *dizisinin bir* (n_j) *alt dizisinin var olduğu gösterilmelidir. Buna göre* (4.4) *ifadesi ve Yardımcı Teorem 4.1 gereğince her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$\frac{1}{1+r} d(u_{2n}, u_{2n+1}) \leq d(u_{2n}, w)$$

veya

$$\frac{1}{1+r} d(u_{2n+1}, u_{2n+2}) \leq d(u_{2n+1}, w)$$

sağlanır. Varsayımdan;

$$\begin{aligned} d(w, Tw) = d\left(u_{nj+1}, Tw\right) &= \lim_{j\to\infty} d\left(Tu_{nj}, Tw\right) \\ &\leq \lim_{j\to\infty} \left(ad(u_{nj}, Tu_{nj}) + bd(w, Tw) + cd(u_{nj}, w)\right) \\ &\leq \lim_{j\to\infty} \left(ad(u_{nj}, u_{nj+1}) + bd(w, Tw) + cd(u_{nj}, w)\right) \\ &\leq ad\left(w, w\right) + bd\left(w, Tw\right) + cd\left(w, w\right) \\ &\leq bd\left(w, Tw\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak açıkça $b < 1$ *olduğundan* $Tw = w$ *olmalıdır. Sonuç olarak her iki durumda da* $Tw = w$ *olduğu gösterilmiştir. Yani* w*,* T *nin sabit noktasıdır.* T *dönüşümünün sabit noktasının tek olduğunu göstermek için* T *nin birbirinden farklı iki sabit noktasının* w *ve* v *olduğu varsayılsın. O halde açıkça* $w \neq v$ *olduğundan* (4.5) *eşitsizliği gereğince*

$$d\left(v, w\right) = d\left(Tv, w\right) \leq rd\left(v, Tv\right) = 0$$

elde edilir. Ancak aşikar olarak bu bir çelişkidir. Dolayısıyla T *nin sabit noktası tektir.*

Sıradaki Teorem 4.8 alışılmış metrik uzaylarda Hardy-Rogers sabit nokta teoreminin Suzuki tip genellemesini vermektedir. Literatürde Hardy-Rogers sabit nokta teoremin Suzuki tip genellemesinin varlığı araştırılmış ancak bulunamayınca ilgili teorem oluşturularak literatürde ilk olarak bu tez çalışmasında ispatlanmış olup tezin bütünlüğünün korunması adına bu bölümde yer verilmiştir.

Teorem 4.8 (X, d) *bir tam metrik uzay ve* $T{:}X \to X$ *bir dönüşüm olsun.* $\theta{:}[0,1) \to \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ *artmayan fonksiyonu Teorem 4.1 deki gibi tanımlansın ve ayrıca* $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *olmak üzere* $r = \dfrac{a+c+e}{1-b-c} \in [0,1)$ *olsun. Bu taktirde her* $x, y \in X$ *için*

$$\begin{aligned} \theta(r)d(x, Tx) \leq d(x, y) \implies d(Tx, Ty) \leq ad(x, Tx) + bd(y, Ty) + \\ cd(x, Ty) + dd(y, Tx) + ed\left(x, y\right) \end{aligned}$$

koşulunu sağlayacak şekilde $a+b+c+d+e < 1$*,* $2b+c+d+e < 1$ *biçiminde* $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *varsa* T *dönüşümü bir tek* w *sabit noktasına sahiptir ve her* $x \in X$ *için* $(T^n x)$ *iterasyon dizisi* $w \in X$ *noktasına yakınsar.*

İspat *θ nın tanımından dolayı $\theta(r) \leq 1$ olduğundan her $x \in X$ için*

$$\theta(r)d(x,Tx) \leq d(x,Tx)$$

ifadesi sağlanır. Buna göre teoremin hipotezindeki koşul gereğince her $x \in X$ için

$$\begin{aligned} d(Tx,T^2x) &\leq ad(x,Tx) + bd(Tx,T^2x) + cd(x,T^2x) + dd(Tx,Tx) + ed(x,Tx) \\ &\leq (a+e)\,d(x,Tx) + bd(Tx,T^2x) + cd(x,Tx) + cd(Tx,T^2x) \end{aligned}$$

olup buradan düzenleme ile

$$(1-b-c)\,d(Tx,T^2x) \leq (a+c+e)\,d(x,Tx)$$

elde edilir. Böylece

$$d(Tx,T^2x) \leq \frac{a+c+e}{1-b-c}d(x,Tx) \tag{4.8}$$

bulunur. $r = \dfrac{a+c+e}{1-b-c}$ olmak üzere (4.8) ifadesi

$$d(Tx,T^2x) \leq rd(x,Tx)$$

olarak yazılabilir. $u \in X$ alınarak $u_0 = u$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $u_n = T^n u$ olacak şekilde (u_n) dizisi tanımlansın. Açıkça $u_n = Tu_{n-1}$ olduğundan ve (4.22) ifadesi gereğince

$$\begin{aligned} d(u_n,u_{n+1}) &= d(T^n u_0, T^{n+1}u_0) \\ &\leq rd(T^{n-1}u_0, T^n u_0) \\ &\leq r^2 d(T^{n-2}u_0, T^{n-1}u_0) \\ &\vdots \\ &\leq r^n d(u_0, Tu_0) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} d(u_n,u_{n+1}) &= d(u_1,u_2) + d(u_2,u_3) + \cdots + d(u_n,u_{n+1}) + \cdots \\ &\leq rd(u_0,u_1) + r^2 d(u_0,u_1) + \cdots + r^n d(u_0,u_1) + \cdots \\ &= (r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots)\,d(u_0,u_1) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^n}{1-r} d(u_0,u_1) \\ &= \frac{1}{1-r} d(u_0,u_1) < \infty \end{aligned}$$

bulunur. Bu sebeple (u_n) bir Cauchy dizisidir. (X,d) tam metrik uzay olduğundan (u_n) dizisi bir $w \in X$ noktasına yakınsar. Buna göre $x \neq w$ özelliğindeki her $x \in X$ için

$$d(w,Tx) \leq r'd(x,w) \tag{4.9}$$

olduğu gösterilmelidir. O halde bunun için $d(x,w) > 0$ ve $(u_n) \to w$ olduğundan dolayı $n \geq n_0$ koşulunu sağlayan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(u_n,w) \leq \frac{1}{3}d(x,w)$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ *vardır. O halde*

$$\begin{aligned}\theta(r)d(u_n, Tu_n) &\leq d(u_n, Tu_n) = d(u_n, u_{n+1}) \\ &\leq d(u_n, w) + d(u_{n+1}, w) \\ &\leq \frac{2}{3}d(x, w) = d(x, w) - \frac{1}{3}d(x, w) \\ &\leq d(x, w) - d(u_n, w) \\ &\leq d(u_n, x)\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre hipotez gereğince $n \geq n_0$ *için*

$$d(Tu_n, Tx) \leq ad(u_n, Tu_n) + bd(x, Tx) + cd\left(u_n, Tx\right) + dd(x, Tu_n) + ed\left(u_n, x\right)$$

olur. Böylelikle $x \neq w$ *olacak şekildeki* $x \in X$ *için son eşitsizlikte* $n \to \infty$ *için limit alınırsa*

$$\begin{aligned}d(Tx, w) = d(w, Tx) &= d(u_{n+1}, Tx) \\ &= \lim_{n\to\infty} d\left(Tu_n, Tx\right) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \left(ad\left(u_n, Tu_n\right) + bd\left(x, Tx\right) + cd\left(u_n, Tx\right)\right. \\ &\qquad \left. + dd\left(x, Tu_n\right) + ed(u_n, x)\right) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \left(ad\left(u_n, u_{n+1}\right) + bd\left(x, Tx\right) + cd\left(u_n, Tx\right)\right. \\ &\qquad \left. + dd\left(x, u_{n+1}\right) + ed(u_n, x)\right) \\ &\leq ad(w, w) + bd(x, Tx) + cd\left(w, Tx\right) + dd\left(x, w\right) + ed(w, x)\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Buna göre metriğin üçgen eşitsizliği özelliği gereğince

$$\begin{aligned}d(Tx, w) &\leq bd(x, Tx) + cd\left(w, Tx\right) + dd\left(x, z\right) + ed(w, x) \\ &\leq bd(x, w) + bd\left(w, Tx\right) + cd\left(w, Tx\right) + dd\left(x, w\right) + ed(x, w)\end{aligned}$$

olup buradan düzenleme ile $r' = \dfrac{b+d+e}{1-b-c}$ *olmak üzere*

$$d(Tx, w) \leq \frac{b+d+e}{1-b-c}d(x, w) = r'd(x, w)$$

bulunur. Dolayısıyla (4.9) *ifadesi gösterilmiş olur. Şimdi* w *nun* T *dönüşümünün sabit noktası olduğu* $0 \leq r < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ *ve* $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq r < 1$ *olmak üzere iki durum göz önüne alınarak gösterilecektir.*

Birinci durum olarak $0 \leq r < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ *alınsın. Bu taktirde dikkat edilirse bu durumda* $\theta\left(r\right) \leq \dfrac{1-r}{r^2}$ *dir. İlk olarak her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$d(T^n w, w) \leq d(Tw, w) \tag{4.10}$$

olduğu tümevarım yöntemi ile gösterilsin. Bu taktirde $n = 1$ *için* (4.10) *ifadesi aşikar olarak doğrudur. Şimdi bazı* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$d(T^n w, w) \leq d(Tw, w)$$

olduğu kabul edilsin. O halde şimdi ifadenin $n+1$ *için doğru olduğunun gösterilmesi gereklidir. Eğer* $T^n w = w$ *ise* $T^{n+1}w = Tw$ *ve*

$$d(T^{n+1}w, w) = d(Tw, w) \leq d(Tw, w)$$

olur. Eğer $T^n w \neq w$ *ise* $x = T^n w$ *için;*

$$d(T^{n+1}w, w) \leq rd(T^n w, w) \leq rd(Tw, w) \leq d(Tw, w)$$

elde edilir. Böylelikle tümevarım ilkesi ile (4.10) *eşitsizliğinin doğru olduğu ispatlanmıştır. Şimdi her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$d(T^n w, Tw) \leq rd(Tw, w) \tag{4.11}$$

olduğu benzer şekilde tümevarım ile gösterilsin. Buna göre $n = 1$ *için ifade aşikardır.* $n = 2$ *için ifadenin doğru olduğu* (4.8) *de gösterilmiştir. Buna göre şimdi bazı* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$d(T^n w, Tw) \leq rd(Tw, w)$$

olduğu kabul edilsin. Şimdi ifadenin $n+1$ *için doğru olduğunun gösterilmesi gereklidir. Buna göre metriğin üçgen eşitsizliği özelliği ve* (4.10) *ifadesi gereğince*

$$\begin{aligned} d(w, Tw) &\leq d(w, T^n w) + d(T^n w, Tw) \\ &\leq d(w, T^n w) + rd(w, Tw) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan düzenleme ile

$$d(w, Tw) \leq \frac{1}{1-r} d(w, T^n w)$$

bulunur. Bu sebeple

$$\begin{aligned} \theta(r) d(T^n w, T^{n+1}w) &\leq \frac{1-r}{r^2} d(T^n w, T^{n+1}w) \\ &\leq \frac{1-r}{r^n} r^n d(Tw, w) \\ &\leq (1-r)\, d(Tw, w) \\ &\leq (1-r)\, \frac{1}{1-r} d(w, T^n w) \\ &\leq d(w, T^n w) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Teoremin hipotezi gereğince

$$\begin{aligned} d(T^{n+1}w, Tw) &\leq ad(T^n w, T^{n+1}w) + bd(w, Tw) + cd(T^n w, Tw) \\ &\quad + dd(w, T^{n+1}w) + ed(T^n w, w) \\ &\leq ar^n d(Tw, w) + bd(w, Tw) + crd(Tw, w) + dd(Tw, w) + ed(Tw, w) \\ &= (ar^n + b + cr + d + e)\, d(Tw, w) \\ &\leq rd(Tw, w) \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla tümevarım yöntemi ile her $n \in \mathbb{N}$ *için eşitsizliğin doğru olduğu ispatlanmıştır. Sabit noktanın varlığını göstermek adına bir çelişkiye ulaşmak için* $Tw \neq w$ *varsayılsın. Bu taktirde* (4.11) *gereğince her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $T^n w \neq w$ *olur. O halde* (4.10) *ifadesi gereğince*

$$d(T^{n+1}w, w) \leq rd(T^n w, w) \leq \cdots \leq r^n d(Tw, w)$$

olur. Ancak $\lim_{n\to\infty} r^n d(Tw, w) = 0$ *olduğundan* $T^n w \to w$ *olmasını gerektirir ki bu da* (4.11) *ile çelişir. O halde* $Tw = w$ *olmalıdır.*
$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq r < 1$ *olması durumunda her* $j \in \mathbb{N}$ *için*

$$\theta(r)d(u_{nj}, u_{nj+1}) \leq d(u_{nj}, w)$$

olacak şekilde (n) *dizisinin bir* (n_j) *alt dizisinin var olduğu gösterilmelidir. Buna göre* (4.8) *ifadesi ve Yardımcı Teorem 4.1 gereğince her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$\frac{1}{1+r} d(u_{2n}, u_{2n+1}) \leq d(u_{2n}, w)$$

veya

$$\frac{1}{1+r} d(u_{2n+1}, u_{2n+2}) \leq d(u_{2n+1}, w)$$

sağlanır. Varsayımdan;

$$\begin{aligned}
d(w, Tw) &= d\left(u_{nj+1}, Tw\right) \\
&= \lim_{j\to\infty} d\left(Tu_{nj}, Tw\right) \\
&\leq \lim_{j\to\infty} \left(ad(u_{nj}, Tu_{nj}) + bd(w, Tw) + cd(u_{nj}, Tw)\right. \\
&\qquad \left. + dd(w, Tu_{nj}) + ed(u_{nj}, w)\right) \\
&\leq \lim_{j\to\infty} \left(ad(u_{nj}, u_{nj+1}) + bd(w, Tw) + cd(u_{nj}, Tw)\right. \\
&\qquad \left. + dd(w, u_{nj+1}) + ed(u_{nj}, w)\right) \\
&\leq ad\left(w, w\right) + bd\left(w, Tw\right) + cd\left(w, Tw\right) + dd\left(w, w\right) + ed\left(w, w\right) \\
&\leq (b + c)\, d\left(w, Tw\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ancak açıkça $b + c < 1$ *olduğundan* $Tw = w$ *olmalıdır. Sonuç olarak her iki durumda da* $Tw = w$ *olduğu gösterilmiştir. Yani* w*,* T *nin sabit noktasıdır.* T *dönüşümünün sabit noktasının tek olduğunu göstermek için* T *nin birbirinden farklı iki sabit noktasının* w *ve* v *olduğu varsayılsın. O halde açıkça* $w \neq v$ *olduğundan* (4.9) *eşitsizliği gereğince*

$$d\left(v, w\right) = d\left(Tv, w\right) \leq rd\left(v, Tv\right) = 0$$

elde edilir. Ancak aşikar olarak bu bir çelişkidir. Dolayısıyla T *nin sabit noktası tektir.*

Aşağıdaki teorem temel kavramlar bölümünde verilen kapalı bağıntı sabit nokta teoreminin yani Teorem 3.9 un Suzuki tip genellemesidir. Bu teorem Altun ve Erduran 2011 yılında yayımladıkları makalelerinden alınarak verilmiştir.

Teorem 4.9 *(X,d) bir tam metrik uzay ve $T{:}X \to X$ bir dönüşüm olsun. $\theta{:}[0,1) \to \left(\frac{1}{2},1\right]$ artmayan fonksiyonu Teorem 4.1 deki gibi tanımlansın ve Ψ ifadesi de Tanım 3.7 de verilen fonksiyonların kümesini temsil etsin. Bu taktirde her $x,y \in X$ için*

$$\theta(r)\, d(x,Tx) \leq d(x,y) \implies F\left(d(Tx,Ty), d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), d(x,Ty), d(y,Tx)\right) \leq 0$$

koşulunu sağlayacak şekilde $F \in \Psi$ varsa T dönüşümü bir tek w sabit noktasına sahiptir ve her $x \in X$ için $(T^n x)$ iterasyon dizisi $w \in X$ noktasına yakınsar. (Altun ve Erduran, 2011)

5. $S-$METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİNİN SUZUKİ TİP GENELLEŞTİRİLMİŞLERİ

Bu bölümde $S-$metrik uzaylarda alışılmış metrik uzaylarda iyi bilinen Banach, Kannan, Chatterjea, Ćirić, Reich, Hardy-Rogers gibi sabit nokta teoremlerinin $S-$metrik uzaydaki versiyonlarının Suzuki 2008 çalışmasında ortaya attığı türden genellemeleri verilecektir. Bu bölümde verilen genellemelerden sadece aşağıdaki teoremde ele alınan $S-$metrik uzayda Banach sabit nokta teoreminin Suzuki tip genellemesi Esfahani vd. 2012 yayımladıkları çalışmadan alınmış olup, yukarıda bahsi geçen ve bu bölümde yer alan tüm Suzuki tip genellemelere literatürde ilk kez bu tez çalışmasında verilmiştir. 4. bölümde olduğu gibi bu bölümün sonunda da sabit nokta teoremlerini genelleyen kapalı bağıntının Suzuki tip genellemesi verilerek bölüm sonlandırılacaktır.

$S-$metrik uzay kavramı $A-$metrik uzay kavramının $n = 3$ durumu için özel bir hali olduğundan bu bölümde yer alan tüm sabit nokta teoremleri aslında tezin bir sonraki bölümü olan $A-$metrik uzaydaki sabit nokta teoremlerinin Suzuki tip genellemelerinin bir özel halidir. Ancak $S-$metrik uzay çalışmaları için bir kaynak oluşturması adına bu bölüme yer verilmiştir.

Teorem 5.1 *(X, S) bir tam $S-$metrik uzay ve $T: X \to X$ dönüşüm olsun. $\theta: [0,1) \to \left(\frac{1}{3}, 1\right]$ artmayan fonksiyonu*

$$\theta(r) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r < \sqrt{2} - 1 \text{ ise} \\ \dfrac{1-2r}{r^2}, & \sqrt{2} - 1 \leq r < \dfrac{1}{\sqrt{5}} \text{ ise} \\ \dfrac{1}{1+2r}, & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \leq r < 1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu taktirde her $x, y, z \in X$ için

$$\theta(r) \min\{S(x,y,Tx)\} \leq S(x,y,z) \Longrightarrow S(Tx,Ty,Tz) \leq rS(x,y,z)$$

koşulunu sağlayacak şekilde $r \in [0,1)$ varsa T dönüşümünün bir tek $w \in X$ sabit noktası vardır. (Esfahani vd., 2012)

Örnek 5.1 $X = [0, \infty)$ *olmak üzere,* $S : X \times X \times X \to [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x, y, z \in X$ *için*

$$S(x, y, z) = \begin{cases} 0, & x = y = z \text{ ise} \\ \max\{x, y, z\}, & x \neq y \neq z \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre (X, S) *bir tam* $S-$*metrik uzaydır. Şimdi bu tam* $S-$*metrik uzayda* $T : X \to X$ *dönüşümü* $x \in X$ *için* $T(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)$ *olacak şekilde tanımlansın. Bu taktirde açıkça*

$$\frac{1}{2}S(x, y, Tx) \leq S(x, y, z)$$

olduğu görülmektedir. Diğer yandan her $x, y, z \in [0, \infty)$ *için*

$$S(Tx, Ty, Tz) \leq \frac{1}{2}S(x, y, z)$$

elde edilir. Buna göre T *dönüşümü Teorem 5.1 in koşullarını sağlamaktadır. O halde* T *dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır. Üstelik açıkça* 0*,* T *dönüşümünün tek sabit noktasıdır. (Esfahani vd., 2012)*

Aşağıdaki yardımcı teorem bölümün teoremlerinde kullanılacak önemli bir özelliği ifade etmektedir.

Yardımcı Teorem 5.1 (X, S) *bir* $S-$*metrik uzay,* T *de* X *de bir kendi üzerine dönüşüm olsun. Ayrıca* $x \in X$ *ve bir* $r \in [0, 1)$ *için*

$$S(Tx, Tx, T^2x) \leq rS(x, x, Tx)$$

koşulu sağlansın. Bu taktirde $y \in X$ *için*

$$\frac{1}{1 + 2r}S(x, x, Tx) \leq S(x, x, y)$$

veya

$$\frac{1}{1 + 2r}S(Tx, Tx, T^2x) \leq S(Tx, Tx, y)$$

koşullarından biri sağlanır.

İspat *Yardımcı teoremdeki iddiayı ispat etmek için*

$$\frac{1}{1 + 2r}S(x, x, Tx) > S(x, x, y)$$

ve

$$\frac{1}{1 + 2r}S(Tx, Tx, T^2x) > S(Tx, Tx, y)$$

olduğu varsayılsın. O halde $S-$metriğin özellikleri ve kabul edilen eşitsizlikler kullanılarak

$$\begin{aligned} S(Tx,Tx,x) &\leq 2S(Tx,Tx,y)+S(x,x,y) \\ &< 2\frac{1}{1+2r}S(Tx,Tx,T^2x)+\frac{1}{1+2r}S(x,x,Tx) \\ &< \frac{2r}{1+2r}S(x,x,Tx)+\frac{1}{1+2r}S(x,x,Tx) \\ &< \frac{1+2r}{1+2r}S(x,x,Tx) \\ &< S(x,x,Tx) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Ancak açıkça bu bir çelişkidir. Doğal olarak varsayımlar yanlıştır. O halde yardımcı teoremin hipotezindeki koşullar gerçeklenmiş olur.

Sıradaki iki teorem alışılmış metrik uzaylarda Kannan ve genelleştirilmiş Kannan (veya Bianchini) sabit nokta teoremi olarak bilinen teoremlerin $S-$metrik uzay versiyonlarının Suzuki tip genellemelerini ifade etmektedir.

Teorem 5.2 *(X,S) bir tam $S-$metrik uzay ve $T:X\to X$ dönüşüm olsun. $\theta:[0,1)\to\left(\frac{1}{3},1\right]$ artmayan fonksiyonu*

$$\theta(r)=\begin{cases} 1, & 0\leq r<\frac{2}{3} \text{ ise} \\ \frac{1}{1+2r}, & \frac{2}{3}\leq r<1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın ve ayrıca $r=\frac{2a}{1-a}$ olsun. Bu taktirde $x,y,z\in X$ için

$$\theta(r)S(x,y,Tx)\leq S(x,y,z)\Longrightarrow$$

$$S(Tx,Ty,Tz)\leq aS(x,x,Tx)+aS(y,y,Ty)+aS(z,z,Tz)$$

koşulunu sağlayacak şekilde $a\in\left[0,\frac{1}{3}\right)$ varsa T dönüşümü bir tek $w\in X$ sabit noktasına sahiptir ve her $x\in X$ için (T^nx) iterasyon dizisi $w\in X$ noktasına yakınsar.

İspat *θ nın tanımından dolayı $\theta(r)\leq 1$ olduğundan her $x\in X$ için*

$$\theta(r)S(x,x,Tx)\leq S(x,x,Tx)$$

dir. Buna göre teoremin hipotezindeki koşul gereğince her $x\in X$ için

$$S(Tx,Tx,T^2x) \leq 2aS(x,x,Tx)+aS(Tx,Tx,T^2x)$$

elde edilir ve buradan düzenleme ile $r = \dfrac{2a}{1-a}$ *olmak üzere*

$$S(Tx, Tx, T^2x) \leq rS(x, x, Tx) \tag{5.1}$$

bulunur. $u \in X$ *alınarak* $u_0 = u$ *ve her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $u_n = T^n u$ *olacak şekilde* (u_n) *dizisi tanımlansın. Açıkça* $u_n = Tu_{n-1}$ *olduğundan ve* (5.1) *ifadesinden dolayı*

$$\begin{aligned} S(u_n, u_n, u_{n+1}) &= S(T^n u_0, T^n u_0, T^{n+1} u_0) \\ &\leq rS(T^{n-1} u_0, T^{n-1} u_0, T^n u_0) \\ &\leq r^2 S(T^{n-2} u_0, T^{n-2} u_0, T^{n-1} u_0) \\ &\vdots \\ &\leq r^n S(u_0, u_0, Tu_0) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $S-$*metrik uzaydaki üçgen eşitsizliği kullanılarak* $m > n$ *için*

$$\begin{aligned} S(u_n, u_n, u_m) &\leq S(u_n, u_n, u_{n+1}) + S(u_n, u_n, u_{n+1}) + S(u_m, u_m, u_{n+1}) \\ &\leq 2S(u_n, u_n, u_{n+1}) + 2S(u_{n+1}, u_{n+1}, u_{n+2}) + S(u_{n+2}, u_{n+2}, u_m) \\ &\vdots \\ &\leq 2S(u_n, u_n, u_{n+1}) + \cdots + 2S(u_{m-2}, u_{m-2}, u_{m-1}) + S(u_{m-1}, u_{m-1}, u_m) \\ &\leq 2\sum_{i=n}^{m-1} S(u_i, u_i, u_{i+1}) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitsizlikte (5.1) *ifadesi kullanılırsa*

$$\begin{aligned} S(u_n, u_n, u_m) &\leq 2(r^n + r^{n+1} + \cdots + r^{m-1}) S(u_0, u_0, u_1) \\ &= 2\frac{r^m - r^n}{1-r} S(u_0, u_0, u_1) \\ &\leq 2\frac{r^m}{1-r} S(u_0, u_0, u_1) \end{aligned}$$

elde edilir. $m \to \infty$ *için işlem yapılırsa* $r \in [0, 1)$ *olduğundan dolayı*

$$S(u_n, u_n, u_m) \leq 2\frac{r^m}{1-r} S(u_0, u_0, u_1) \to 0$$

olacağından (u_n) *bir* $S-$*Cauchy dizisidir. Ayrıca* (X, S) *bir tam* $S-$*metrik uzay olduğundan* (u_n) *dizisi* $w \in X$ *noktasına yakınsar. Buna göre her* $x \in X \setminus \{w\}$ *için*

$$S(w, w, Tx) \leq aS(x, x, Tx) \tag{5.2}$$

olduğu gösterilmelidir. O halde bunun için $S(w, w, x) > 0$ *ve* $(u_n) \to w$ *olduğundan dolayı* $n \geq n_0$ *koşulunu sağlayan her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$S(u_n, u_n, w) \leq \frac{S(x, x, w)}{5}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ *vardır. O halde*

$$\begin{aligned}\theta(r)S(u_n,u_n,Tu_n) &\leq S(u_n,u_n,Tu_n)=S(u_n,u_n,u_{n+1})\\ &\leq 2S(u_n,u_n,w)+S(u_{n+1},u_{n+1},w)\\ &\leq \frac{3}{5}S(x,x,w)\\ &= S(x,x,w)-\frac{1}{5}S(x,x,w)-\frac{1}{5}S(x,x,w)\\ &\leq S(x,x,w)-2S(u_n,u_n,w)\\ &\leq S(u_n,u_n,x)\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre hipotez gereğince $n \geq n_0$ *için*

$$S(Tu_n,Tu_n,Tx) \leq 2aS(u_n,u_n,Tu_n)+aS(x,x,Tx)$$

olur. Böylelikle $x \neq w$ *olacak şekildeki* $x \in X$ *için son eşitsizlikte* $n \to \infty$ *için limit alınırsa*

$$\begin{aligned}S(w,w,Tx)=\lim_{n\to\infty}S(u_{n+1},u_{n+1},Tx) &= \lim_{n\to\infty}S(Tu_n,Tu_n,Tx)\\ &\leq \lim_{n\to\infty}(2aS(u_n,u_n,Tu_n)+aS(x,x,Tx))\\ &= aS(x,x,Tx)\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla (5.2) *ifadesi gösterilmiş olur. Şimdi* w *nun* T *dönüşümünün sabit noktası olduğu* $0 \leq r < \frac{2}{3}$ *ve* $\frac{2}{3} \leq r < 1$ *olmak üzere iki durum göz önüne alınarak gösterilecektir. Buna göre ilk durum olarak* $0 \leq r < \frac{2}{3}$ *alınsın ve bir çelişki elde etmek adına* $Tw \neq w$ *olduğu varsayılsın. O halde* (5.1) *gereğince*

$$S(w,w,T^2w) \leq aS(Tw,Tw,T^2w) \leq arS(w,w,Tw)$$

elde edilir. Böylelikle $S-$*metriğin özellikleri, üstteki eşitsizlik ve* $r = \frac{2a}{1-a}$ *ifadesi kullanılarak*

$$\begin{aligned}S(w,w,Tw) &\leq 2S(w,w,T^2w)+S(Tw,Tw,T^2w)\\ &\leq 2arS(w,w,Tw)+rS(w,w,Tw)\\ &= \frac{2r+3r^2}{2+r}S(w,w,Tw)\\ &< \frac{2+r}{2+r}S(w,w,Tw)\\ &= S(w,w,Tw)\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Ancak açıkça bu bir çelişkidir. O halde $Tw = w$ *olmalıdır.*
$\frac{2}{3} \leq r < 1$ *olması durumunda Yardımcı Teorem 5.1 gereğince her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$\theta(r)S(u_{2n},u_{2n},u_{2n+1}) \leq S(u_{2n},u_{2n},w)$$

veya

$$\theta(r)S(u_{2n+1},u_{2n+1},u_{2n+2}) \leq S(u_{2n+1},u_{2n+1},w)$$

olmalıdır. Böylelikle her $j \in \mathbb{N}$ *için*

$$\theta(r)S(u_{n_j}, u_{n_j}, u_{n_j+1}) \leq S(u_{n_j}, u_{n_j}, w)$$

olacak şekilde (n) *dizisinin bir* (n_j) *alt dizisi vardır. Varsayım gereğince*

$$\begin{aligned} S(w, w, Tw) &= \lim_{j\to\infty} S(u_{n_j+1}, u_{n_j+1}, Tw) \\ &\leq \lim_{j\to\infty} (2aS(u_{n_j}, u_{n_j}, u_{n_j+1}) + aS(w, w, Tw)) \\ &\leq aS(w, w, Tw) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak aşikar olarak $a < \frac{1}{3}$ *olduğundan* $Tw = w$ *olmalıdır. Sonuç olarak her iki durumda da* $Tw = w$ *elde edilir. Yani* w*,* T *dönüşümünün sabit noktasıdır.* T *dönüşümünün sabit noktasının tek olduğunu göstermek için* T *nin birbirinden farklı iki sabit noktasının* w *ve* v *olduğu varsayılsın. O halde açıkça* $w \neq v$ *olduğundan* (5.2) *gereğince*

$$S(w, w, Tv) \leq rS(v, v, Tv) = rS(v, v, v) = 0$$

elde edilir. Ancak bu bir çelişkidir. Dolayısıyla T *nin sabit noktası tektir.*

Örnek 5.2 *Esfahani vd. 2012 kaynağında verilen aşağıdaki şekilde ifade edilen* $S-$*metrik ile oluşturulan* $S-$*metrik uzay ele alınsın.* $X = [0, \infty)$ *olmak üzere,* $S : X \times X \times X \to [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x, y, z \in X$ *için*

$$S(x, y, z) = \begin{cases} 0 & , \quad x = y = z \text{ ise} \\ \max\{x, y, z\} & , \quad x \neq y \neq z \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre (X, S) *bir tam* $S-$*metrik uzaydır. Şimdi bu tam* $S-$*metrik uzayda* $T : X \to X$ *dönüşümü her* $x \in X$ *için*

$$Tx = \frac{x}{4}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu taktirde açıkça $\theta(r) \leq 1$ *olduğundan*

$$\theta(r) \max\left\{x, y, \frac{x}{4}\right\} \leq \max\{x, y, z\}$$

olup açıkça

$$\theta(r) S(x, y, Tx) \leq S(x, y, z)$$

dir. Diğer yandan her $x, y, z \in [0, \infty]$ *ve* $a \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$ *için*

$$\max\left\{\frac{x}{4}, \frac{y}{4}, \frac{z}{4}\right\} \leq a(x + y + z)$$

olup bu ise açıkça

$$S(Tx, Ty, Tz) \leq a(S(x, x, Tx) + S(y, y, Ty) + S(z, z, Tz))$$

elde edilir. Dolayısıyla Teorem 5.2 nin koşulları sağlanmaktadır. O halde T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

Örnek 5.3 (X,S) *Örnek 3.1 de verilen* $S-$*metrik uzay olsun. Buna göre* (X,S) *bir tam* $S-$*metrik uzay olup bu uzayda* $T:X\to X$ *dönüşümü*

$$Tx=\frac{x}{5}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre her $x,y,z\in X$ *için açıkça* $S-$*metrik uzaydaki Kannan büzülme koşulu*

$$S\left(Tx,Ty,Tz\right)\leq aS\left(x,x,Tx\right)+aS\left(y,y,Ty\right)+aS\left(z,z,Tz\right)$$

olup açıkça $a=\frac{1}{4}$ *için*

$$\frac{1}{5}\left[\left|x-z\right|+\left|y-z\right|\right]\leq a\frac{8}{5}\left(x+y+z\right)$$

ifadesi sağlanır. Doğal olarak bu T *dönüşümü ilgili uzayda bir Kannan dönüşümüdür. Fakat açık bir şekilde*

$$\theta(r)S(x,y,Tx)\leq S(x,y,z)$$

ifadesi

$$\theta(r)\left(\frac{4x}{5}+\left|y-\frac{x}{5}\right|\right)\leq\left|x-z\right|+\left|y-z\right|$$

olup $x=y=z$ *için*

$$\theta(r)\frac{8x}{5}\leq 0$$

olacağından sağlamaz. Bu nedenle bu dönüşüm Teorem 5.2 nin koşullarını sağlamaz.

Teorem 5.3 (X,S) *bir tam* $S-$*metrik uzay ve* $T{:}X\to X$ *dönüşüm olsun.* $\theta{:}[0,1)\to\left(\frac{1}{3},1\right]$ *artmayan fonksiyonu Teorem 5.1 deki gibi tanımlansın. Bu taktirde her* $x,y,z\in X$ *için*

$$\theta(r)S(x,y,Tx)\leq S(x,y,z)\Longrightarrow$$

$$S(Tx,Ty,Tz)\leq r\max\left\{S(x,x,Tx),S(y,y,Ty),S(z,z,Tz)\right\}$$

koşulunu sağlayacak şekilde $r\in[0,1)$ *varsa* T *dönüşümü bir tek* $w\in X$ *sabit noktasına sahiptir ve her* $x\in X$ *için* $(T^{n}x)$ *iterasyon dizisi* $w\in X$ *noktasına yakınsar.*

İspat θ *nın tanımından dolayı* $\theta(r)\leq 1$ *olduğundan her* $x\in X$ *için açıkça*

$$\theta(r)S(x,x,Tx)\leq S(x,x,Tx)$$

dir. Buna göre teoremin hipotezindeki koşul gereğince her $x\in X$ *için*

$$S(Tx,Tx,T^{2}x)\leq r\max\left\{S(x,x,Tx),S(Tx,Tx,T^{2}x)\right\}$$

elde edilir ve buradan düzenleme ile

$$S(Tx, Tx, T^2x) \leq rS(x, x, Tx) \tag{5.3}$$

bulunur. $u \in X$ *alınarak* $u_0 = u$ *ve her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $u_n = T^n u$ *olacak şekilde* (u_n) *dizisi tanımlansın. Açıkça* $u_n = Tu_{n-1}$ *olduğundan ve* (5.3) *ifadesinden dolayı*

$$\begin{aligned} S(u_n, u_n, u_{n+1}) &= S(T^n u_0, T^n u_0, T^{n+1} u_0) \\ &\leq rS(T^{n-1} u_0, T^{n-1} u_0, T^n u_0) \\ &\leq r^2 S(T^{n-2} u_0, T^{n-2} u_0, T^{n-1} u_0) \\ &\vdots \\ &\leq r^n S(u_0, u_0, Tu_0) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $S-$*metrik uzaydaki üçgen eşitsizliği kullanılarak* $m > n$ *için*

$$\begin{aligned} S(u_n, u_n, u_m) &\leq S(u_n, u_n, u_{n+1}) + S(u_n, u_n, u_{n+1}) + S(u_m, u_m, u_{n+1}) \\ &\leq 2S(u_n, u_n, u_{n+1}) + 2S(u_{n+1}, u_{n+1}, u_{n+2}) + S(u_{n+2}, u_{n+2}, u_m) \\ &\vdots \\ &\leq 2S(u_n, u_n, u_{n+1}) + \cdots + 2S(u_{m-2}, u_{m-2}, u_{m-1}) + S(u_{m-1}, u_{m-1}, u_m) \\ &\leq 2\sum_{i=n}^{m-1} S(u_i, u_i, u_{i+1}) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitsizlikte (5.3) *ifadesi kullanılırsa*

$$\begin{aligned} S(u_n, u_n, u_m) &\leq 2(r^n + r^{n+1} + \cdots + r^{m-1}) S(u_0, u_0, u_1) \\ &= 2\frac{r^m - r^n}{1 - r} S(u_0, u_0, u_1) \\ &\leq 2\frac{r^m}{1 - r} S(u_0, u_0, u_1) \end{aligned}$$

elde edilir. $m \to \infty$ *için işlem yapılırsa* $r \in [0, 1)$ *olduğundan dolayı*

$$S(u_n, u_n, u_m) \leq 2\frac{r^m}{1 - r} S(u_0, u_0, u_1) \to 0$$

olacağından (u_n) *bir* $S-$*Cauchy dizisidir. Ayrıca* (X, S) *bir tam* $S-$*metrik uzay olduğundan* (u_n) *dizisi* $w \in X$ *noktasına yakınsar. Buna göre her* $x \in X \setminus \{w\}$ *için*

$$S(w, w, Tx) \leq rS(x, x, Tx) \tag{5.4}$$

olduğu gösterilmelidir. O halde bunun için $S(w, w, x) > 0$ *ve* $(u_n) \to w$ *olduğundan dolayı* $n \geq n_0$ *koşulunu sağlayan her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$S(u_n, u_n, w) \leq \frac{S(x, x, w)}{5}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ *vardır. O halde*

$$\begin{aligned}\theta(r)S(u_n,u_n,Tu_n) &\leq S(u_n,u_n,Tu_n)=S(u_n,u_n,u_{n+1})\\ &\leq 2S(u_n,u_n,w)+S(u_{n+1},u_{n+1},w)\\ &\leq \frac{3}{5}S(x,x,w)\\ &= S(x,x,w)-\frac{1}{5}S(x,x,w)-\frac{1}{5}S(x,x,w)\\ &\leq S(x,x,w)-2S(u_n,u_n,w)\\ &\leq S(u_n,u_n,x)\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre hipotez gereğince $n \geq n_0$ *için*

$$S(Tu_n,Tu_n,Tx) \leq r \max\{S(u_n,u_n,Tu_n),S(u_n,u_n,Tu_n),S(x,x,Tx)\}$$

olur. Böylelikle $x \neq w$ *olacak şekildeki* $x \in X$ *için son eşitsizlikte* $n \to \infty$ *için limit alınırsa*

$$\begin{aligned}S(w,w,Tx) &\leq \lim_{n\to\infty} S(u_{n+1},u_{n+1},Tx)\\ &= \lim_{n\to\infty} S(Tu_n,Tu_n,Tx)\\ &\leq \lim_{n\to\infty} r\max\{S(u_n,u_n,Tu_n),S(x,x,Tx)\}\\ &= rS(x,x,Tx)\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla (5.4) *ifadesi gösterilmiş olur. Şimdi* w *nun* T *dönüşümünün sabit noktası olduğu* $0 \leq r < \frac{1}{\sqrt{5}}$ *ve* $\frac{1}{\sqrt{5}} \leq r < 1$ *olmak üzere iki durum göz önüne alınarak gösterilecektir. Buna göre ilk durum olarak* $0 \leq r < \frac{1}{\sqrt{5}}$ *alınsın. Dikkat edilirse bu durumda* $\theta(r) \leq \frac{1-2r}{r^2}$ *dir. O halde* $n \geq 2$ *olmak üzere her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$S(T^n w,T^n w,Tw) \leq rS(w,w,Tw) \tag{5.5}$$

olduğu tümevarım ile gösterilsin. Bu taktirde $n = 2$ *hali açıkça* (5.3) *de gösterilmiştir. Şimdi* $n \geq 2$ *şeklindeki bazı* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$S(T^n w,T^n w,Tw) \leq rS(w,w,Tw)$$

olduğu kabul edilsin. O halde $S-$*metriğin özellikleri ve üstteki kabul gereğince*

$$\begin{aligned}S(Tw,Tw,w) &\leq 2S(Tw,Tw,T^n w)+S(w,w,T^n w)\\ &\leq 2rS(w,w,Tw)+S(w,w,T^n w)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan düzenleme ile

$$S(Tw,Tw,w) \leq \frac{1}{1-2r}S(w,w,T^n w)$$

sonucuna ulaşılır. Bu nedenle

$$\begin{aligned}\theta(r)S(T^n w, T^n w, T^{n+1}w) &\leq \frac{1-2r}{r^2}S(T^n w, T^n w, T^{n+1}w)\\ &\leq \frac{1-2r}{r^n}S(T^n w, T^n w, T^{n+1}w)\\ &\leq \frac{1-2r}{r^n}r^n S(w, w, Tw)\\ &\leq (1-2r)\,S(w, w, Tw)\\ &\leq S(w, w, T^n w)\end{aligned}$$

elde edilir. Teoremin hipotezi gereğince

$$\begin{aligned}S(T^{n+1}w, T^{n+1}w, Tw) &\leq r\max\left\{S(T^n w, T^n w, T^{n+1}w), S(w, w, Tw)\right\}\\ &= rS(w, w, Tw)\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla tümevarım ilkesi gereğince $n \geq 2$ *olacak şekilde her* $n \in \mathbb{N}$ *için* (5.5) *gösterilmiş oldu.* T *nin sabit noktasını göstermek adına bir çelişki meydana getirmek için* $Tw \neq w$ *olduğu varsayılsın. Bu durumda* (5.5) *gereğince açık şekilde her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $T^n w \neq w$ *olur. O halde* (5.3) *ifadesi gereğince*

$$S(T^{n+1}w, T^{n+1}w, w) \leq rS(T^n w, T^n w, T^{n+1}w) \leq r^{n+1}S(w, w, Tw)$$

elde edilir. Bu ise $T^n w \to w$ *olmasını gerektirir ki bu da* (5.10) *ifadesi ile çelişir. O halde* $Tw = w$ *olmalıdır.*
$\frac{1}{\sqrt{5}} \leq r < 1$ *durumunda Yardımcı Teorem 5.1 gereğince her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$\theta(r)S(u_{2n}, u_{2n}, u_{2n+1}) \leq S(u_{2n}, u_{2n}, w)$$

veya

$$\theta(r)S(u_{2n+1}, u_{2n+1}, u_{2n+2}) \leq S(u_{2n+1}, u_{2n+1}, w)$$

olmalıdır. Böylelikle her $j \in \mathbb{N}$ *için*

$$\theta(r)S(u_{n_j}, u_{n_j}, u_{n_j+1}) \leq S(u_{n_j}, u_{n_j}, w)$$

olacak şekilde (n) *dizisinin bir* (n_j) *alt dizisi vardır. Varsayım gereğince*

$$\begin{aligned}S(w, w, Tw) &= \lim_{j\to\infty} S(u_{n_j+1}, u_{n_j+1}, Tw)\\ &\leq \lim_{j\to\infty} r\max\left\{S(u_{n_j}, u_{n_j}, u_{n_j+1}), S(w, w, Tw)\right\}\\ &\leq rS(w, w, Tw)\end{aligned}$$

elde edilir. Ancak aşikar olarak $r < 1$ *olduğundan* $Tw = w$ *olmalıdır. Sonuç olarak her iki durumda da* $Tw = w$ *elde edilir. Yani* w*,* T *dönüşümünün sabit noktasıdır.* T *dönüşümünün sabit noktasının tek olduğunu göstermek için* T *nin birbirinden farklı iki sabit noktasının* w *ve* v *olduğu varsayılsın. O halde açıkça* $w \neq v$ *olduğundan* (5.4) *gereğince*

$$S(w, w, Tv) \leq rS(v, v, Tv) = rS(v, v, v) = 0$$

elde edilir. Ancak bu bir çelişkidir. Dolayısıyla T *nin sabit noktası tektir.*

Örnek 5.4 *Esfahani vd. 2012 kaynağında verilen $S-$metrik ile oluşturulan $S-$metrik uzay ele alınsın. Buna göre (X,S) bir tam $S-$metrik uzaydır. Şimdi bu tam $S-$metrik uzayda $T:X\to X$ dönüşümü her $x\in X$ için*

$$Tx=\frac{x}{4}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu taktirde açıkça $\theta(r)\leq 1$ olduğundan

$$\theta(r)\max\left\{x,y,\frac{x}{4}\right\}\leq\max\{x,y,z\}$$

olup açıkça

$$\theta(r)\,S(x,y,Tx)\leq S(x,y,z)$$

dir. Diğer yandan her $x,y,z\in[0,\infty]$ ve $r\in\left(\frac{1}{4},1\right)$ için

$$\max\left\{\frac{x}{4},\frac{y}{4},\frac{z}{4}\right\}\leq r\max\{x,y,z\}$$

olup bu ise açıkça

$$S(Tx,Ty,Tz)\leq r\max\{S(x,x,Tx),S(y,y,Ty),S(z,z,Tz)\}$$

elde edilir. Dolayısıyla Teorem 5.3 ün koşulları sağlanmaktadır. O halde T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

Örnek 5.5 *Örnek 3.2 de ilk kez bu tezde ifade edilen herhangi bir alışılmış metrik tarafından üretilemeyen $S-$metrik ve bu $S-$metrik ile üretilen S-metrik uzay ele alınsın. Yani $X=\mathbb{R}$ olmak üzere, $S:X\times X\times X\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu her $x,y,z\in X$ için*

$$S(x,y,z)=\max\left\{\left|x^3-y^3\right|,\left|x^3+y^3-2z^3\right|\right\}$$

olacak şekilde tanımlansın. Buna göre (X,S) bir tam $S-$metrik uzay olup bu uzayda $T:X\to X$ dönüşümü

$$Tx=\frac{x}{2}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre her $x,y,z\in X$ için açıkça $S-$metrik uzaydaki Bianchini büzülme koşulu

$$S(Tx,Ty,Tz)\leq r\max\{S(x,x,Tx),S(y,y,Ty),S(z,z,Tz)\}$$

olup açıkça $r=\frac{1}{7}$ için

$$\frac{1}{8}\max\left\{\left|x^3-y^3\right|,\left|x^3+y^3-2z^3\right|\right\}\leq r\frac{14}{8}\max\{x,y,z\}$$

ifadesi sağlanır. Doğal olarak bu T dönüşümü ilgili uzayda bir Bianchini dönüşümüdür. Fakat açık bir şekilde

$$\theta(r)\, S(x,y,Tx) \leq S(x,y,z)$$

ifadesi

$$\theta(r)\left(\max\left\{\left|x^3-y^3\right|, \left|x^3+y^3-2\frac{x^3}{2^3}\right|\right\}\right) \leq \max\left\{\left|x^3-y^3\right|, \left|x^3+y^3-2z^3\right|\right\}$$

olup $x=y=z$ için

$$\theta(r)\,\frac{14}{8}\left|x^3\right| \leq 0$$

olacağından sağlamaz. Bu nedenle bu dönüşüm Teorem.3 ün koşullarını sağlamaz.

Sıradaki iki teorem alışılmış metrik uzaylarda Chatterjea ve genelleştirilmiş Chatterjea sabit nokta teoremi olarak bilinen teoremlerin $S-$metrik uzay versiyonlarının Suzuki tip genellemelerini ifade etmektedir.

Teorem 5.4 *(X,S) bir tam $S-$metrik uzay ve $T{:}X\to X$ dönüşüm olsun. $\theta{:}[0,1)\to\left(\frac{1}{3},1\right]$ artmayan fonksiyonu Teorem 5.1 deki gibi tanımlansın. Bu taktirde her $x,y,z\in X$ için $r=\frac{6a}{1-2a}$ olmak üzere*

$$\theta(r)S(x,y,Tx)\leq S(x,y,z)\Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} S(Tx,Ty,Tz) &\leq a\,(S(x,x,Ty)+S(y,y,Tx)+S(x,x,Tz) \\ &\quad +S(y,y,Tz)+S(z,z,Tx)+S(z,z,Ty)) \end{aligned}$$

koşulunu sağlayacak şekilde $a\in\left[0,\frac{1}{8}\right)$ varsa T dönüşümü bir tek $w\in X$ sabit noktasına sahiptir ve her $x\in X$ için (T^nx) iterasyon dizisi $w\in X$ noktasına yakınsar.

İspat *θ nın tanımından dolayı $\theta(r)\leq 1$ olduğundan her $x\in X$ için açıkça*

$$\theta(r)S(x,x,Tx)\leq S(x,x,Tx)$$

dir. Buna göre teoremin hipotezindeki koşul gereğince ve $S-$metriğin özellikleri gereğince her $x\in X$ için

$$\begin{aligned} S(Tx,Tx,T^2x) &\leq 2aS\,(x,x,Tx)+2aS(x,x,T^2x)+2aS(Tx,Tx,Tx) \\ &\leq 2aS\,(x,x,Tx)+4aS(x,x,Tx)+2aS(T^2x,T^2x,Tx) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan düzenleme ile

$$S(Tx, Tx, T^2x) \leq \frac{6a}{1-2a} S(x, x, Tx) \tag{5.6}$$

sonucuna ulaşılır. $r = \dfrac{6a}{1-2a}$ *ve* $a \in \left[0, \dfrac{1}{8}\right)$ *olmak üzere* (5.6) *ifadesi bulunur.* $u \in X$ *alınarak* $u_0 = u$ *ve her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $u_n = T^n u$ *olacak şekilde* (u_n) *dizisi tanımlansın. Açıkça* $u_n = Tu_{n-1}$ *olduğundan ve* (5.6) *ifadesinden dolayı*

$$\begin{aligned} S(u_n, u_n, u_{n+1}) &= S(T^n u_0, T^n u_0, T^{n+1} u_0) \\ &\leq rS(T^{n-1} u_0, T^{n-1} u_0, T^n u_0) \\ &\leq r^2 S(T^{n-2} u_0, T^{n-2} u_0, T^{n-1} u_0) \\ &\vdots \\ &\leq r^n S(u_0, u_0, Tu_0) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $S-$*metrik uzaydaki üçgen eşitsizliği kullanılarak* $m > n$ *için*

$$\begin{aligned} S(u_n, u_n, u_m) &\leq S(u_n, u_n, u_{n+1}) + S(u_n, u_n, u_{n+1}) + S(u_m, u_m, u_{n+1}) \\ &\leq 2S(u_n, u_n, u_{n+1}) + 2S(u_{n+1}, u_{n+1}, u_{n+2}) + S(u_{n+2}, u_{n+2}, u_m) \\ &\vdots \\ &\leq 2S(u_n, u_n, u_{n+1}) + \cdots + 2S(u_{m-2}, u_{m-2}, u_{m-1}) + S(u_{m-1}, u_{m-1}, u_m) \\ &\leq 2\sum_{i=n}^{m-1} S(u_i, u_i, u_{i+1}) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitsizlikte (5.11) *ifadesi kullanılırsa*

$$\begin{aligned} S(u_n, u_n, u_m) &\leq 2(r^n + r^{n+1} + \cdots + r^{m-1}) S(u_0, u_0, u_1) \\ &= 2\frac{r^m - r^n}{1-r} S(u_0, u_0, u_1) \\ &\leq 2\frac{r^m}{1-r} S(u_0, u_0, u_1) \end{aligned}$$

elde edilir. $m \to \infty$ *için işlem yapılırsa* $r \in [0, 1)$ *olduğundan dolayı*

$$S(u_n, u_n, u_m) \leq 2\frac{r^m}{1-r} S(u_0, u_0, u_1) \to 0$$

olacağından (u_n) *bir* $S-$*Cauchy dizisidir. Ayrıca* (X, S) *bir tam* $S-$*metrik uzay olduğundan* (u_n) *dizisi* $w \in X$ *noktasına yakınsar. Buna göre her* $x \in X \setminus \{w\}$ *için*

$$S(w, w, Tx) \leq rS(w, w, x) \tag{5.7}$$

olduğu gösterilmelidir. O halde bunun için $S(w, w, x) > 0$ *ve* $(u_n) \to w$ *olduğundan dolayı* $n \geq n_0$ *koşulunu sağlayan her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$S(u_n, u_n, w) \leq \frac{S(x, x, w)}{5}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ *vardır. O halde*

$$\begin{aligned}\theta(r)S(u_n,u_n,Tu_n) &\leq S(u_n,u_n,Tu_n)=S(u_n,u_n,u_{n+1})\\ &\leq 2S(u_n,u_n,w)+S(u_{n+1},u_{n+1},w)\\ &\leq \frac{3}{5}S(x,x,w)\\ &= S(x,x,w)-\frac{1}{5}S(x,x,w)-\frac{1}{5}S(x,x,w)\\ &\leq S(x,x,w)-2S(u_n,u_n,w)\\ &\leq S(u_n,u_n,x)\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre hipotez gereğince $n \geq n_0$ *için*

$$S(Tu_n,Tu_n,Tx) \leq 2aS\left(u_n,u_n,Tx\right)+2aS\left(u_n,u_n,Tu_n\right)+2aS\left(x,x,Tu_n\right)$$

olur. Böylelikle $x \neq w$ *olacak şekildeki* $x \in X$ *için son eşitsizlikte* $n \to \infty$ *için limit alınırsa*

$$\begin{aligned}S(Tx,Tx,w) &= \lim_{n\to\infty} S\left(u_{n+1},u_{n+1},Tx\right)\\ &\leq \lim_{n\to\infty}\left(2aS\left(u_n,u_n,Tx\right)+2aS\left(u_n,u_n,Tu_n\right)+2aS\left(x,x,Tu_n\right)\right)\\ &\leq 2aS(w,w,Tx)+2aS(w,w,x)\end{aligned}$$

yani

$$S(Tx,Tx,w) \leq \frac{2a}{1-2a}S(w,w,x) \leq \frac{6a}{1-2a}S(w,w,x)=rS(w,w,x)$$

sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla (5.7) *ifadesi gösterilmiş olur. Şimdi* w *nun* T *dönüşümünün sabit noktası olduğu* $0 \leq r < \frac{1}{\sqrt{5}}$ *ve* $\frac{1}{\sqrt{5}} \leq r < 1$ *olmak üzere iki durum göz önüne alınarak gösterilecektir. Buna göre ilk durum olarak* $0 \leq r < \frac{1}{\sqrt{5}}$ *alınsın. Dikkat edilirse bu durumda* $\theta\left(r\right) \leq \frac{1-2r}{r^2}$ *dir. Buna göre ilk olarak*

$$S(T^nw,T^nw,w) \leq S\left(Tw,Tw,w\right)$$

olduğu tümevarım ile gösterilsin. Bu taktirde $n=1$ *için ifadenin doğruluğu aşikardır. Şimdi bazı* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$S(T^nw,T^nw,w) \leq S\left(Tw,Tw,w\right)$$

ifadesinin doğru olduğu kabul edilsin. O halde tümevarım ilkesi gereğince sıradaki adım olarak $n+1$ *için ifadenin doğru olduğunun gösterilmesi gereklidir. Bu durumda eğer* $T^nw = w$ *ise* $T^{n+1}w = Tw$ *ve*

$$S(T^{n+1}w,T^{n+1}w,w)=S(Tw,Tw,w) \leq S\left(Tw,Tw,w\right)$$

olur. Eğer $T^nw \neq w$ *ise* $x = T^nw$ *için*

$$S(T^{n+1}w,T^{n+1}w,w) \leq rS(T^nw,T^nw,w) \leq rS(Tw,Tw,w) \leq S\left(Tw,Tw,w\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla tümevarım ilkesi ile eşitsizliğin doğru olduğu ispatlanmıştır. Şimdi de her $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$S(T^n w, T^n w, Tw) \leq rS\left(Tw, Tw, w\right)$$

ifadesinin doğru olduğu yine tümevarım ilkesi ile gösterilsin. Buna göre $n = 1$ *için ifadenin doğruluğu aşikardır.* $n = 2$ *için ifadenin doğruluğu* (5.6) *de gösterilmiştir. Bu aşamada* $n \geq 2$ *olacak şekildeki bazı* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$S(T^n w, T^n w, Tw) \leq rS\left(Tw, Tw, w\right)$$

ifadesinin doğru olduğu kabul edilsin. O halde şimdi bu aşamada $n + 1$ *için ifadenin doğru olduğu gösterilmelidir. Buna göre bir önce ispatlanan indirgeme bağıntısı ve kabul gereğince*

$$\begin{aligned} S(Tw, Tw, w) &\leq 2S(Tw, Tw, T^n w) + S(w, w, T^n w) \\ &\leq 2rS(w, w, Tw) + S(w, w, T^n w) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan düzenleme ile

$$S(Tw, Tw, w) \leq \frac{1}{1-2r} S(w, w, T^n w)$$

sonucuna ulaşılır. Buradan da

$$\begin{aligned} \theta(r) S(T^n w, T^n w, T^{n+1} w) &\leq \frac{1-2r}{r^2} S(T^n w, T^n w, T^{n+1} w) \\ &\leq \frac{1-2r}{r^n} S(T^n w, T^n w, T^{n+1} w) \\ &\leq \frac{1-2r}{r^n} r^n S(Tw, Tw, w) \\ &\leq (1-2r)\, S(Tw, Tw, w) \\ &\leq S(w, w, T^n w) = S(T^n w, T^n w, w) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle önceki indirgeme bağıntısı ve varsayım gereğince

$$\begin{aligned} S(T^{n+1} w, T^{n+1} w, Tw) &\leq 2aS(T^n w, T^n w, T^{n+1} w) + 2aS(T^n w, T^n w, Tw) \\ &\qquad +2aS(w, w, T^{n+1} w) \\ &\leq 2ar^n S(w, w, Tw) + 2arS(Tw, Tw, w) + 2aS(Tw, Tw, w) \\ &\leq \left(2ar^n + 2ar + 2a\right) S(Tw, Tw, w) \\ &\leq 2a\left(r^n + r + 1\right) S(Tw, Tw, w) \\ &\leq \frac{r}{6+2r} 2\left(2 + r\right) S(Tw, Tw, w) \\ &\leq r\frac{4+2r}{6+2r} S(Tw, Tw, w) \\ &\leq rS(Tw, Tw, w) \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak tümevarım yöntemi ile eşitsizliğin doğru olduğu ispatlanmıştır. Sabit noktanın varlığını gösterirken bir çelişki yakalamak için $Tw \neq w$ *olduğu varsayılsın. Dolayısıyla her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $T^n w \neq w$ *olur. Buna göre* (5.7) *gereğince*

$$S(T^{n+1}w, T^{n+1}w, w) \leq rS(T^n w, T^n w, w) \leq \cdots \leq r^n S(Tw, Tw, w)$$

elde edilir. O halde

$$\lim_{n\to\infty} r^n S(Tw, Tw, w) = 0$$

olduğundan $T^n w \to w$ *olacaktır. Bu ise çelişki olacaktır. Dolayısıyla* $Tw = w$ *olmalıdır.* $\frac{1}{\sqrt{5}} \leq r < 1$ *olması durumunda her* $j \in \mathbb{N}$ *için*

$$\theta(r)S(u_{nj}, u_{nj}, u_{nj+1}) \leq S(u_{nj}, u_{nj}, w)$$

olacak şekilde (n) *dizisinin bir* (n_j) *alt dizisinin olduğunun gösterilmesi gerekmektedir. Gerçekten de* (5.6) *ve Yardımcı Teorem 5.1 gereğince her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$\frac{1}{1+2r}S(u_{2n}, u_{2n}, u_{2n+1}) \leq S(u_{2n}, u_{2n}, w)$$

veya

$$\frac{1}{1+2r}S(u_{2n+1}, u_{2n+1}, u_{2n+2}) \leq S(u_{2n+1}, u_{2n+1}, w)$$

ifadesi sağlanır. Varsayımdan dolayı

$$\begin{aligned} S(w, w, Tw) &= \lim_{j\to\infty} S\left(Tu_{nj}, Tu_{nj}, Tw\right) \\ &\leq \lim_{j\to\infty} \left(2aS(u_{nj}, u_{nj}, Tu_{nj}) + 2aS(u_{nj}, u_{nj}, Tw) + 2aS(w, w, Tu_{nj})\right) \\ &\leq 2aS\left(w, w, Tw\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak açıkça $a < \frac{1}{8}$ *olduğundan varsayım hatalıdır, bu nedenle* $Tw = w$ *olmalıdır. Sonuç olarak her iki durumda da* $Tw = w$ *elde edilir. Yani* w*,* T *dönüşümünün sabit noktasıdır.* T *dönüşümünün sabit noktasının tek olduğunu göstermek için* T *nin birbirinden farklı iki sabit noktasının* w *ve* v *olduğu varsayılsın. O halde açıkça* $w \neq v$ *olduğundan* (5.7) *gereğince*

$$S\left(w, w, Tv\right) \leq rS\left(v, v, Tv\right) = rS\left(v, v, v\right) = 0$$

elde edilir. Ancak bu bir çelişkidir. Dolayısıyla T *nin sabit noktası tektir.*

Örnek 5.6 *Esfahani vd. 2012 kaynağında verilen* $S-$*metrik ile oluşturulan* $S-$*metrik uzay ele alınsın. Buna göre* (X, S) *bir tam* $S-$*metrik uzaydır. Şimdi bu tam* $S-$*metrik uzayda* $T : X \to X$ *dönüşümü her* $x \in X$ *için*

$$Tx = \frac{x}{10}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu taktirde $\theta(r) \leq 1$ *olduğundan*

$$\theta(r) \max\left\{x, y, \frac{x}{10}\right\} \leq \max\{x, y, z\}$$

olup açıkça

$$\theta(r) S(x, y, Tx) \leq S(x, y, z)$$

dir. Öte yandan her $x, y, z \in [0, \infty]$ *ve* $a \in \left(\frac{1}{20}, \frac{1}{8}\right)$ *için*

$$\begin{aligned} \max\left\{\frac{x}{10}, \frac{y}{10}, \frac{z}{10}\right\} \quad \leq \quad & a\left[\max\left\{x, \frac{y}{10}\right\} + \max\left\{x, \frac{z}{10}\right\} + \max\left\{y, \frac{x}{10}\right\}\right. \\ & \left. + \max\left\{y, \frac{z}{10}\right\} + \max\left\{z, \frac{x}{10}\right\} + \max\left\{z, \frac{y}{10}\right\}\right] \end{aligned}$$

olup bu ise açıkça

$$\begin{aligned} S(Tx, Ty, Tz) \quad \leq \quad & a\left(S(x, x, Ty) + S(x, x, Tz) + S(y, y, Tx)\right. \\ & \left. + S(y, y, Tz) + S(z, z, Tx) + S(z, z, Ty)\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla Teorem 5.4 ün koşulları sağlanmaktadır. O halde T *dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.*

Örnek 5.7 (X, S) *Örnek 3.1 de verilen* $S-$*metrik uzay olsun. Buna göre* (X, S) *bir tam* $S-$*metrik uzay olup bu uzayda* $T : X \to X$ *dönüşümü*

$$Tx = \frac{x}{12}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre her $x, y, z \in X$ *için açıkça* $S-$*metrik uzaydaki Chatterjea büzülme koşulu*

$$\begin{aligned} S(Tx, Ty, Tz) \quad \leq \quad & a\left(S(x, x, Ty) + S(x, x, Tz) + S(y, y, Tx)\right. \\ & \left. + S(y, y, Tz) + S(z, z, Tx) + S(z, z, Ty)\right) \end{aligned}$$

olup açıkça $a = \frac{1}{9}$ *için*

$$\begin{aligned} \frac{|x - z| + |y - z|}{12} \quad \leq \quad & a\left(\left|x - \frac{y}{12}\right| + \left|x - \frac{z}{12}\right| + \left|y - \frac{x}{12}\right|\right. \\ & \left. + \left|y - \frac{z}{12}\right| + \left|z - \frac{x}{12}\right| + \left|z - \frac{y}{12}\right|\right) \end{aligned}$$

ifadesi sağlanır. Doğal olarak bu T *dönüşümü ilgili uzayda bir Chatterjea dönüşümüdür. Fakat açık bir şekilde*

$$\theta(r) S(x, y, Tx) \leq S(x, y, z)$$

ifadesi

$$\theta(r)\left(\frac{11|x|}{12} + \left|y - \frac{x}{12}\right|\right) \leq |x - z| + |y - z|$$

olup $x = y = z$ *için*

$$\theta(r)\frac{22}{12}x \leq 0$$

olacağından sağlamaz. Bu nedenle bu dönüşüm Teorem.4 ün koşullarını sağlamaz.

Teorem 5.5 (X, S) *bir tam* $S-$*metrik uzay ve* $T{:}X \to X$ *dönüşüm olsun.* $\theta{:}[0,1) \to \left(\frac{1}{3}, 1\right]$ *artmayan fonksiyonu Teorem 5.1 deki gibi tanımlansın. Bu taktirde her* $x, y, z \in X$ *için* $r = \frac{2a}{1-a}$ *olmak üzere*

$$\theta(r)S(x,y,Tx) \leq S(x,y,z) \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} S(Tx,Ty,Tz) \quad \leq \quad & a \max \{S(x,x,Ty), S(x,x,Tz), S(y,y,Tx), S(y,y,Tz), \\ & S(z,z,Tx), S(z,z,Ty)\} \end{aligned}$$

koşulunu sağlayacak şekilde $a \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$ *varsa* T *dönüşümü bir tek* $w \in X$ *sabit noktasına sahiptir ve her* $x \in X$ *için* $(T^n x)$ *iterasyon dizisi* $w \in X$ *noktasına yakınsar.*

İspat θ *nın tanımından dolayı* $\theta(r) \leq 1$ *olduğundan her* $x \in X$ *için açıkça*

$$\theta(r)S(x,x,Tx) \leq S(x,x,Tx)$$

dir. Buna göre teoremin hipotezindeki koşul gereğince ve $S-$*metriğin özellikleri gereğince her* $x \in X$ *için*

$$\begin{aligned} S(Tx,Tx,T^2x) \quad &\leq \quad a \max \left\{S(x,x,Tx), S(x,x,T^2x), S(Tx,Tx,Tx)\right\} \\ &\leq \quad a \max \left\{S(x,x,Tx), 2S(x,x,Tx) + S(Tx,Tx,T^2x)\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan düzenleme ile

$$S(Tx,Tx,T^2x) \leq \frac{2a}{1-a}S(x,x,Tx) \tag{5.8}$$

sonucuna ulaşılır. $r = \frac{2a}{1-a}$ *ve* $a \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$ *olmak üzere* (5.8) *ifadesi bulunur.* $u \in X$ *alınarak* $u_0 = u$ *ve her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $u_n = T^n u$ *olacak şekilde* (u_n) *dizisi tanımlansın. Açıkça* $u_n = Tu_{n-1}$ *olduğundan ve* (5.8) *ifadesinden dolayı*

$$\begin{aligned} S(u_n, u_n, u_{n+1}) \quad &= \quad S(T^n u_0, T^n u_0, T^{n+1} u_0) \\ &\leq \quad rS(T^{n-1} u_0, T^{n-1} u_0, T^n u_0) \\ &\leq \quad r^2 S(T^{n-2} u_0, T^{n-2} u_0, T^{n-1} u_0) \\ &\vdots \\ &\leq \quad r^n S(u_0, u_0, Tu_0) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $S-$metrik uzaydaki üçgen eşitsizliği kullanılarak $m > n$ için

$$\begin{aligned} S(u_n,u_n,u_m) &\leq S(u_n,u_n,u_{n+1}) + S(u_n,u_n,u_{n+1}) + S(u_m,u_m,u_{n+1}) \\ &\leq 2S(u_n,u_n,u_{n+1}) + 2S(u_{n+1},u_{n+1},u_{n+2}) + S(u_{n+2},u_{n+2},u_m) \\ &\vdots \\ &\leq 2S(u_n,u_n,u_{n+1}) + \cdots + 2S(u_{m-2},u_{m-2},u_{m-1}) + S(u_{m-1},u_{m-1},u_m) \\ &\leq 2\sum_{i=n}^{m-1} S\left(u_i,u_i,u_{i+1}\right) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitsizlikte (5.8) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned} S(u_n,u_n,u_m) &\leq 2(r^n + r^{n+1} + \cdots + r^{m-1})S(u_0,u_0,u_1) \\ &= 2\frac{r^m - r^n}{1-r}S(u_0,u_0,u_1) \\ &\leq 2\frac{r^m}{1-r}S(u_0,u_0,u_1) \end{aligned}$$

elde edilir. $m \to \infty$ için işlem yapılırsa $r \in [0,1)$ olduğundan dolayı

$$S(u_n,u_n,u_m) \leq 2\frac{r^m}{1-r}S(u_0,u_0,u_1) \to 0$$

olacağından (u_n) bir $S-$Cauchy dizisidir. Ayrıca (X,S) bir tam $S-$metrik uzay olduğundan (u_n) dizisi $w \in X$ noktasına yakınsar. Buna göre her $x \in X \setminus \{w\}$ için

$$S(w,w,Tx) \leq rS(x,x,Tx) \tag{5.9}$$

olduğu gösterilmelidir. O halde bunun için $S\left(w,w,x\right) > 0$ ve $(u_n) \to w$ olduğundan dolayı $n \geq n_0$ koşulunu sağlayan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$S(u_n,u_n,w) \leq \frac{S(x,x,w)}{5}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. O halde

$$\begin{aligned} \theta(r)S(u_n,u_n,Tu_n) &\leq S(u_n,u_n,Tu_n) = S(u_n,u_n,u_{n+1}) \\ &\leq 2S(u_n,u_n,w) + S(u_{n+1},u_{n+1},w) \\ &\leq \frac{3}{5}S(x,x,w) \\ &= S(x,x,w) - \frac{1}{5}S(x,x,w) - \frac{1}{5}S(x,x,w) \\ &\leq S(x,x,w) - 2S(u_n,u_n,w) \\ &\leq S(u_n,u_n,x) \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre hipotez gereğince $n \geq n_0$ için

$$S(Tu_n,Tu_n,Tx) \leq a \max\left\{S(u_n,u_n,Tu_n), S\left(u_n,u_n,Tx\right), S(x,x,Tu_n)\right\}$$

olur. Böylelikle $x \neq w$ *olacak şekildeki* $x \in X$ *için son eşitsizlikte* $n \to \infty$ *için limit alınırsa*

$$\begin{aligned} S(w,w,Tx) &\leq \lim_{n\to\infty} S(u_{n+1},u_{n+1},Tx) \\ &= \lim_{n\to\infty} S(Tu_n,Tu_n,Tx) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} a\max\left\{S(u_n,u_n,Tu_n),S\left(u_n,u_n,Tx\right),S(x,x,Tu_n)\right\} \\ &= \lim_{n\to\infty} a\max\left\{S(u_n,u_n,u_{n+1}),S\left(u_n,u_n,Tx\right),S(x,x,u_{n+1})\right\} \\ &= a\max\left\{S\left(w,w,Tx\right),S(x,x,z)\right\} \\ &\leq a\max\left\{S\left(w,w,Tx\right),2S(x,x,Tx)+S\left(Tx,Tx,w\right)\right\} \\ &= a\left(2S(x,x,Tx)+S\left(Tx,Tx,w\right)\right) \\ &= \frac{2a}{1-a}S(x,x,Tx) \\ &= rS(x,x,Tx) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla (5.9) *ifadesi gösterilmiş olur. Şimdi* w *nun* T *dönüşümünün sabit noktası olduğu* $0 \leq r < \frac{1}{\sqrt{5}}$ *ve* $\frac{1}{\sqrt{5}} \leq r < 1$ *olmak üzere iki durum göz önüne alınarak gösterilecektir. Buna göre ilk durum olarak* $0 \leq r < \frac{1}{\sqrt{5}}$ *alınsın. Dikkat edilirse bu durumda* $\theta\left(r\right) \leq \frac{1-2r}{r^2}$ *dir. O halde* $n \geq 2$ *olmak üzere her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$S(T^n w,T^n w,Tw) \leq rS\left(w,w,Tw\right)$$

olduğu tümevarım ile gösterilsin. Bu taktirde $n = 2$ *hali açıkça* (5.8) *de gösterilmiştir. Şimdi* $n \geq 2$ *şeklindeki bazı* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$S(T^n w,T^n w,Tw) \leq rS\left(w,w,Tw\right)$$

olduğu kabul edilsin. O halde $S-$*metriğin özellikleri ve üstteki kabul gereğince*

$$\begin{aligned} S(Tw,Tw,w) &\leq 2S(Tw,Tw,T^n w)+S(w,w,T^n w) \\ &\leq 2rS(w,w,Tw)+S(w,w,T^n w) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan düzenleme ile

$$S(Tw,Tw,w) \leq \frac{1}{1-2r}S(w,w,T^n w)$$

sonucuna ulaşılır. Bu nedenle

$$\begin{aligned} \theta(r)S(T^n w,T^n w,T^{n+1}w) &\leq \frac{1-2r}{r^2}S(T^n w,T^n w,T^{n+1}w) \\ &\leq \frac{1-2r}{r^n}S(T^n w,T^n w,T^{n+1}w) \\ &\leq \frac{1-2r}{r^n}r^n S(Tw,Tw,w) \\ &\leq (1-2r)\,S(Tw,Tw,w) \\ &\leq S(w,w,T^n w) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle önceki indirgeme bağıntısı ve varsayım gereğince

$$\begin{aligned} S(T^{n+1}w, T^{n+1}w, Tw) &\leq a \max \left\{ S(T^n w, T^n w, T^{n+1}w), S(T^n w, T^n w, Tw), \right. \\ &\qquad \left. S(w, w, T^{n+1}w) \right\} \\ &\leq a \max \left\{ S(T^n w, T^n w, T^{n+1}w), 2S(T^n w, T^n w, T^{n+1}w) \right. \\ &\qquad +S(Tw, Tw, T^{n+1}w), 2S(w, w, Tw) + \\ &\qquad \left. S\left(Tw, Tw, T^{n+1}w\right) \right\} \\ &\leq a \max \left\{ r^n S(w, w, Tw), 2r^n S(w, w, Tw) \right. \\ &\qquad +S(Tw, Tw, T^{n+1}w), 2S(w, w, Tw) \\ &\qquad \left. +S\left(Tw, Tw, T^{n+1}w\right) \right\} \\ &\leq a2S(w, w, Tw) + aS\left(Tw, Tw, T^{n+1}w\right) \\ &\leq \frac{2a}{1-a} S(w, w, Tw) \\ &\leq rS(w, w, Tw) \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak tümevarım yöntemi ile eşitsizliğin doğru olduğu ispatlanmıştır. Sabit noktanın varlığını gösterirken bir çelişki yakalamak için $Tw \neq w$ *olduğu varsayılsın. Dolayısıyla her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $T^n w \neq w$ *olur. Buna göre* (5.8) *gereğince*

$$S(T^{n+1}w, T^{n+1}w, w) \leq rS(T^n w, T^n w, w) \leq \cdots \leq r^n S(Tw, Tw, w)$$

elde edilir. O halde

$$\lim_{n\to\infty} r^n S(Tw, Tw, w) = 0$$

olduğundan $T^n w \to w$ *olacaktır. Bu ise çelişki olacaktır. Dolayısıyla* $Tw = w$ *olmalıdır.* $\frac{1}{\sqrt{5}} \leq r < 1$ *olması durumunda her* $j \in \mathbb{N}$ *için*

$$\theta(r) S(u_{nj}, u_{nj}, u_{nj+1}) \leq S(u_{nj}, u_{nj}, w)$$

olacak şekilde (n) *dizisinin bir* (n_j) *alt dizisinin olduğunun gösterilmesi gerekmektedir. Gerçekten de* (5.6) *ve Yardımcı Teorem 5.1 gereğince her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$\frac{1}{1+2r} S(u_{2n}, u_{2n}, u_{2n+1}) \leq S(u_{2n}, u_{2n}, w)$$

veya

$$\frac{1}{1+2r} S(u_{2n+1}, u_{2n+1}, u_{2n+2}) \leq S(u_{2n+1}, u_{2n+1}, w)$$

ifadesi sağlanır. Varsayımdan dolayı

$$\begin{aligned} S(w, w, Tw) &= \lim_{j\to\infty} S(u_{n_j+1}, u_{n_j+1}, Tw) \\ &\leq \lim_{j\to\infty} a \max \left\{ S(u_{n_j}, u_{n_j}, Tu_{n_j}), S(u_{n_j}, u_{n_j}, Tw), S(w, w, u_{n_j+1}) \right\} \\ &\leq \lim_{j\to\infty} a \max \left\{ S(u_{n_j}, u_{n_j}, u_{n_j+1}), S(u_{n_j}, u_{n_j}, Tw), S(w, w, u_{n_j+1}) \right\} \\ &\leq a \max \left\{ S(w, w, w), S(w, w, Tw), S(w, w, w) \right\} \\ &\leq aS(w, w, Tw) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak açıkça $a < \frac{1}{3}$ *olduğundan varsayım hatalıdır, bu nedenle* $Tw = w$ *olmalıdır. Sonuç olarak her iki durumda da* $Tw = w$ *elde edilir. Yani* w*,* T *dönüşümünün sabit noktasıdır.* T *dönüşümünün sabit noktasının tek olduğunu göstermek için* T *nin birbirinden farklı iki sabit noktasının* w *ve* v *olduğu varsayılsın. O halde açıkça* $w \neq v$ *olduğundan* (5.9) *gereğince*

$$S(w, w, Tv) \leq rS(v, v, Tv) = rS(v, v, v) = 0$$

elde edilir. Ancak bu bir çelişkidir. Dolayısıyla T *nin sabit noktası tektir.*

Örnek 5.8 *Esfahani vd. 2012 kaynağında verilen* $S-$*metrik ile oluşturulan* $S-$*metrik uzay ele alınsın. Buna göre* (X, S) *bir tam* $S-$*metrik uzaydır. Şimdi bu tam* $S-$*metrik uzayda* $T : X \to X$ *dönüşümü her* $x \in X$ *için*

$$Tx = \frac{x}{2}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu taktirde $\theta(r) \leq 1$ *olduğundan*

$$\theta(r) \max\left\{x, y, \frac{x}{2}\right\} \leq \max\{x, y, z\}$$

olup açık şekilde

$$\theta(r) S(x, y, Tx) \leq S(x, y, z)$$

dir. Öte yandan her $x, y, z \in [0, \infty]$ *ve* $a \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ *için*

$$\begin{aligned} \max\left\{\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}\right\} \quad \leq \quad & a \max\left\{\max\left\{x, \frac{y}{2}\right\}, \max\left\{x, \frac{z}{2}\right\}, \max\left\{y, \frac{x}{2}\right\}, \right. \\ & \left. \max\left\{y, \frac{z}{2}\right\}, \max\left\{z, \frac{x}{2}\right\}, \max\left\{z, \frac{y}{2}\right\}\right\} \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} S(Tx, Tx, Ty) \quad \leq \quad & a \max\{S(x, x, Ty), S(x, x, Tz), S(y, y, Tx), \\ & S(y, y, Tz), S(z, z, Tx), S(z, z, Ty)\} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla Teorem 5.5 in koşulları sağlanmaktadır. O halde T *dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.*

Örnek 5.9 *Örnek 3.2 de ilk kez bu tezde ifade edilen herhangi bir alışılmış metrik tarafından üretilemeyen* $S-$*metrik ve bu* $S-$*metrik ile üretilen S-metrik uzay ele alınsın. Yani* $X = \mathbb{R}$ *olmak üzere,* $S : X \times X \times X \to \mathbb{R}^+$ *fonksiyonu her* $x, y, z \in X$ *için*

$$S(x, y, z) = \max\left\{\left|x^3 - y^3\right|, \left|x^3 + y^3 - 2z^3\right|\right\}$$

olacak şekilde tanımlansın. Buna göre (X,S) *bir tam* $S-$*metrik uzay olup bu uzayda* $T:X\to X$ *dönüşümü*

$$Tx=\frac{x}{2}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre her $x,y,z\in X$ *için açıkça* $S-$*metrik uzaydaki genelleştirilmiş Chatterjea büzülme koşulu*

$$\begin{aligned}S\left(Tx,Ty,Tz\right) &\leq a\max\left\{S\left(x,x,Ty\right),S\left(x,x,Tz\right),S\left(y,y,Tx\right),\right.\\ &\qquad \left.S\left(y,y,Tz\right),S\left(z,z,Tx\right),S\left(z,z,Ty\right)\right\}\end{aligned}$$

olup açıkça $a=\left(\frac{1}{10},\frac{1}{3}\right)$ *için*

$$\begin{aligned}\frac{\max\left\{\left|x^3-y^3\right|,\left|x^3+y^3-2z^3\right|\right\}}{8} &\leq a\max\left\{\left|x^3-\frac{2y^3}{8}\right|,\left|x^3-\frac{2z^3}{8}\right|,\left|y^3-\frac{2x^3}{8}\right|,\right.\\ &\qquad \left.\left|y^3-\frac{2z^3}{8}\right|,\left|z^3-\frac{2x^3}{8}\right|,\left|z^3-\frac{2y^3}{8}\right|\right\}\end{aligned}$$

ifadesi sağlanır. Doğal olarak bu T *dönüşümü ilgili uzayda bir genelleştirilmiş Chatterjea dönüşümüdür. Fakat açık bir şekilde*

$$\theta\left(r\right)S\left(x,y,Tx\right)\leq S\left(x,y,z\right)$$

ifadesi

$$\theta\left(r\right)\left(\max\left\{\left|x^3-y^3\right|,\left|x^3+y^3-2\frac{x^3}{2^3}\right|\right\}\right)\leq\max\left\{\left|x^3-y^3\right|,\left|x^3+y^3-2z^3\right|\right\}$$

olup $x=y=z$ *için*

$$\theta\left(r\right)\frac{14}{8}\left|x^3\right|\leq 0$$

olacağından sağlamaz. Bu nedenle bu dönüşüm Teorem 5.5 in koşullarını sağlamaz.

Sıradaki teorem alışılmış metrik uzaylarda Ćirić sabit nokta teoremi olarak bilinen teoremin $S-$metrik uzay versiyonunun Suzuki tip genellemesini ifade etmektedir.

Teorem 5.6 (X,S) *bir tam* $S-$*metrik uzay ve* $T:X\to X$ *dönüşüm olsun.* $\theta:[0,1)\to\left(\frac{1}{3},1\right]$ *artmayan fonksiyonu Teorem 5.1 deki gibi tanımlansın. Ayrıca*

$$M_T^S\left(x,x,y\right)=\max\left\{S(x,x,y),S(x,x,Tx),S(y,y,Ty),\frac{\left(S(x,x,Ty)+S(y,y,Tx)\right)}{3}\right\}$$

olsun. Bu taktirde her $x,y\in X$ *için*

$$\theta(r)S(x,x,Tx)\leq S(x,x,y)\Longrightarrow S(Tx,Tx,Ty)\leq rM_T^S\left(x,x,y\right)$$

koşulunu sağlayacak şekilde $r\in[0,1)$ *varsa* T *dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.*

İspat *θ nın tanımından dolayı $\theta(r) \leq 1$ olduğundan her $x \in X$ için açıkça*

$$\theta(r)S(x,x,Tx) \leq S(x,x,Tx)$$

dir. Buna göre teoremin hipotezindeki koşul gereğince ve $S-$metriğin özellikleri gereğince her $x \in X$ için

$$\begin{aligned} S(Tx,Tx,T^2x) &\leq rM_T^S(x,x,Tx) \\ &\leq r\max\left\{S(x,x,Tx), S(x,x,Tx), S(Tx,Tx,T^2x), \right. \\ &\qquad \left. \frac{S(x,x,T^2x)+S(Tx,Tx,Tx)}{3}\right\} \\ &\leq r\max\left\{S(x,x,Tx), S(Tx,Tx,T^2x), \right. \\ &\qquad \left. \frac{2S(x,x,Tx)+S(Tx,Tx,T^2x)}{3}\right\} \\ &\leq r\max\{S(x,x,Tx), S(Tx,Tx,T^2x)\} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde burada dikkat edilirse sonuç olarak

$$S(Tx,Tx,T^2x) \leq rS(x,x,Tx) \tag{5.10}$$

bulunur. $u \in X$ alınarak $u_0 = u$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $u_n = T^n u$ olacak şekilde (u_n) dizisi tanımlansın. Açıkça $u_n = Tu_{n-1}$ olduğundan ve (5.10) ifadesinden dolayı

$$\begin{aligned} S(u_n,u_n,u_{n+1}) &= S(Tu_{n-1},Tu_{n-1},T^2u_{n-1}) \\ &\leq rS(u_{n-1},u_{n-1},Tu_{n-1}) \\ &\leq r^2S(u_{n-2},u_{n-2},Tu_{n-2}) \\ &\vdots \\ &\leq r^nS(u_0,u_0,u_1) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $S-$metrik uzaydaki üçgen eşitsizliği kullanılarak $m > n$ için

$$\begin{aligned} S(u_n,u_n,u_m) &\leq S(u_n,u_n,u_{n+1}) + S(u_n,u_n,u_{n+1}) + S(u_m,u_m,u_{n+1}) \\ &\leq 2S(u_n,u_n,u_{n+1}) + 2S(u_{n+1},u_{n+1},u_{n+2}) + S(u_{n+2},u_{n+2},u_m) \\ &\vdots \\ &\leq 2S(u_n,u_n,u_{n+1}) + \cdots + 2S(u_{m-2},u_{m-2},u_{m-1}) + S(u_{m-1},u_{m-1},u_m) \\ &\leq 2\sum_{i=n}^{m-1} S(u_i,u_i,u_{i+1}) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitsizlikte (5.10) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned} S(u_n,u_n,u_m) &\leq 2(r^n + r^{n+1} + \cdots + r^{m-1})S(u_0,u_0,u_1) \\ &= 2\frac{r^m - r^n}{1-r}S(u_0,u_0,u_1) \\ &\leq 2\frac{r^m}{1-r}S(u_0,u_0,u_1) \end{aligned}$$

elde edilir. $m \to \infty$ *için işlem yapılırsa* $r \in [0,1)$ *olduğundan dolayı*

$$S(u_n, u_n, u_m) \leq 2\frac{r^m}{1-r} S(u_0, u_0, u_1) \to 0$$

olacağından (u_n) *bir* $S-$*Cauchy dizisidir. Ayrıca* (X, S) *bir tam* $S-$*metrik uzay olduğundan* (u_n) *dizisi* $w \in X$ *noktasına yakınsar. Buna göre her* $x \in X \setminus \{w\}$ *için*

$$S(w, w, Tx) \leq r \max \{S(w, w, x), S(x, x, Tx)\} \tag{5.11}$$

olduğu gösterilmelidir. O halde bunun için $S(w, w, x) > 0$ *ve* $(u_n) \to w$ *olduğundan dolayı* $n \geq n_0$ *koşulunu sağlayan her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$S(u_n, u_n, w) \leq \frac{S(x, x, w)}{5}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ *vardır. Buna göre*

$$\theta(r) S(u_n, u_n, Tu_n) \leq S(u_n, u_n, w)$$

elde edilir. Böylelikle

$$\begin{aligned}
S(Tx, Tx, w) &= \lim_{n\to\infty} S(Tx, Tx, Tu_n) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} r M_T^S(x, x, u_n) \\
&= r \max \{S(x, x, w), S(w, w, w), S(x, x, Tx), \\
&\qquad \frac{S(x, x, w) + S(w, w, Tx)}{3}\Big\} \\
&= r \max \left\{S(x, x, w), S(x, x, Tx), \frac{S(x, x, w) + S(w, w, Tx)}{3}\right\} \\
&= r \max \{S(x, x, w), S(x, x, Tx)\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $x \neq w$ *olacak şekildeki her* $x \in X$ *için* (5.11) *ifadesi sağlanır. Şimdi* $T^0 w = w$ *olmak üzere her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$S\left(T^n w, T^n w, T^{n+1} w\right) \leq r S\left(T^{n-1} w, T^{n-1} w, T^n w\right) \tag{5.12}$$

ifadesinin doğru olduğu gösterilsin. Buna göre

$$\theta(r) S\left(T^{n-1} w, T^{n-1} w, T^n w\right) \leq S\left(T^{n-1} w, T^{n-1} w, T^n w\right)$$

olduğundan dolayı teoremin hipotezi gereğince

$$\begin{aligned}
S(T^n w, T^n w, T^{n+1} w) &\leq r M_T^S(T^{n-1} w, T^{n-1} w, T^n w) \\
&\leq r \max \{S(T^{n-1} w, T^{n-1} w, T^n w), \\
&\qquad S(T^{n-1} w, T^{n-1} w, T^n w), S(T^n w, T^n w, T^{n+1} w), \\
&\qquad \frac{2S(T^{n-1} w, T^{n-1} w, T^n w) + S(T^{n-1} w, T^{n-1} w, T^{n+1} w)}{3}\Big\} \\
&\leq r \max \{S(T^{n-1} w, T^{n-1} w, T^n w), S(T^n w, T^n w, T^{n+1} w)\}
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ *için* (5.12) *ifadesi sağlanır. O halde her* $n \in \mathbb{N}$ *için indirgeme ile*

$$S\left(T^n w, T^n w, T^{n+1} w\right) \leq r^n S\left(Tw, Tw, w\right)$$

sonucuna ulaşılır. Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$S\left(T^n w, T^n w, w\right) \leq S\left(Tw, Tw, w\right)$$

olduğu tümevarım ilkesi kullanılarak gösterilsin. Bu taktirde $n = 1$ *için ifadenin doğruluğu aşikardır. O halde bazı* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$S\left(T^n w, T^n w, w\right) \leq S\left(Tw, Tw, w\right)$$

ifadesinin doğru olduğu varsayılsın. Bu taktirde $T^n w = w$ *ise* $T^{n+1} w = Tw$ *ve*

$$S\left(T^{n+1} w, T^{n+1} w, w\right) = S\left(Tw, Tw, w\right) \leq S\left(Tw, Tw, w\right)$$

olur. Eğer $T^n w \neq w$ *ise,*

$$\begin{aligned} S\left(T^{n+1} w, T^{n+1} w, w\right) &\leq r \max\left\{S\left(w, w, T^n w\right), S\left(T^n w, T^n w, T^{n+1} w\right)\right\} \\ &\leq r \max\left\{S\left(w, w, Tw\right), r^n S\left(w, w, Tw\right)\right\} \\ &\leq r S\left(w, w, Tw\right) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla tümevarım ilkesi gereğince her $n \in \mathbb{N}$ *için eşitsizliğin doğru olduğu ispatlanmıştır. Şimdi* w *nun* T *dönüşümünün sabit noktası olduğu* $0 \leq r < \frac{1}{\sqrt{5}}$ *ve* $\frac{1}{\sqrt{5}} \leq r < 1$ *olmak üzere iki durum göz önüne alınarak gösterilecektir. Buna göre ilk durum olarak* $0 \leq r < \frac{1}{\sqrt{5}}$ *alınsın. Dikkat edilirse bu durumda* $\theta\left(r\right) \leq \frac{1-2r}{r^2}$ *dir. İlk olarak her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$S\left(T^n w, T^n w, Tw\right) \leq r S\left(Tw, Tw, w\right) \tag{5.13}$$

ifadesi tümevarım ilkesi kullanılarak ispat edilsin. O halde $n = 1$ *için ifadenin doğruluğu aşikardır. Ayrıca* $n = 2$ *için* (5.10) *de gösterilmiştir.* $n \geq 2$ *şeklindeki bazı* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$S\left(T^n w, T^n w, Tw\right) \leq r S\left(Tw, Tw, w\right)$$

olduğu kabul edilsin. O halde $S-$*metriğin özellikleri ve üstteki kabul gereğince*

$$\begin{aligned} S(Tw, Tw, w) &\leq 2S(Tw, Tw, T^n w) + S(w, w, T^n w) \\ &\leq 2rS(w, w, Tw) + S(w, w, T^n w) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan düzenleme ile

$$S(Tw, Tw, w) \leq \frac{1}{1-2r} S(w, w, T^n w)$$

sonucuna ulaşılır. Bu nedenle

$$\begin{aligned}\theta(r)S(T^nw,T^nw,T^{n+1}w) &\leq \frac{1-2r}{r^2}S(T^nw,T^nw,T^{n+1}w)\\ &\leq \frac{1-2r}{r^n}S(T^nw,T^nw,T^{n+1}w)\\ &\leq \frac{1-2r}{r^n}r^nS(Tw,Tw,w)\\ &\leq (1-2r)\,S(Tw,Tw,w)\\ &\leq S(w,w,T^nw)\end{aligned}$$

bulunur. Teoremin hipotezi gereğince

$$\begin{aligned}S\left(T^{n+1}w,T^{n+1}w,Tw\right) &\leq rM_T^S\left(w,w,T^nw\right)\\ &\leq r\max\Big\{S\left(T^nw,T^nw,w\right),S\left(T^nw,T^nw,T^{n+1}w\right),S\left(w,w,Tw\right),\\ &\qquad \frac{S(T^nw,T^nw,Tw)+S\left(w,w,T^{n+1}w\right)}{3}\Big\}\\ &\leq r\max\Big\{rS\left(Tw,Tw,w\right),r^nS\left(Tw,Tw,w\right),S\left(Tw,Tw,w\right),\\ &\qquad \frac{rS\left(Tw,Tw,w\right)+rS\left(Tw,Tw,w\right)}{3}\Big\}\\ &\leq rS\left(Tw,Tw,w\right)\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla tümevarım ilkesi gereğince her $n\in\mathbb{N}$ *için* (5.13) *ifadesinin doğruluğu gösterilmiştir. T nin sabit noktasını göstermek adına bir çelişki meydana getirmek için* $Tw\neq w$ *olduğu varsayılsın. Bu durumda* (5.13) *gereğince açıkça her* $n\in\mathbb{N}$ *için* $T^nw\neq w$ *olur. O halde* (5.11) *ifadesi gereğince*

$$\begin{aligned}S\left(T^{n+1}w,T^{n+1}w,w\right) &\leq r\max\left\{S\left(w,w,T^nw\right),S(T^nw,T^nw,T^{n+1}w)\right\}\\ &= r\max\left\{S\left(T^nw,T^nw,w\right),S(T^nw,T^nw,T^{n+1}w)\right\}\\ &\leq r\max\left\{S\left(T^nw,T^nw,w\right),r^nS(w,w,Tw)\right\}\end{aligned}$$

bulunur. Üstelik

$$S\left(T^nw,T^nw,w\right)\geq S(Tw,Tw,w)-2S\left(T^nw,T^nw,Tw\right)\geq S(Tw,Tw,w)-2rS(Tw,Tw,w)$$

olduğundan,

$$S\left(T^nw,T^nw,w\right)\geq(1-2r)\,S(Tw,Tw,w)$$

elde edilir. Dolayısıyla $n\geq n_1$ *koşulunu sağlayan her* $n\in\mathbb{N}$ *için*

$$S\left(T^nw,T^nw,w\right)\geq r^nS(Tw,Tw,w)$$

olacak şekilde $n_1\in\mathbb{N}$ *vardır. Bu taktirde* $n\geq n_1$ *için*

$$S\left(T^{n+1}w,T^{n+1}w,w\right)\leq rS\left(T^nw,T^nw,w\right)\leq\cdots\leq r^{n-n_1+1}S\left(T^{n_1}w,T^{n_1}w,w\right)$$

olur. Bu ise $T^n w \to w$ *olmasını gerektirir. Ancak bu açıkça çelişki olduğundan dolayı* $Tw = w$ *olmalıdır.*

2. Durum: $\frac{1}{\sqrt{5}} \leq r < 1$ *olsun. Buna göre ilgili aralıkta her* $j \in \mathbb{N}$ *için*

$$\theta(r)S(u_{nj}, u_{nj}, u_{nj+1}) \leq S(u_{nj}, u_{nj}, w)$$

olacak şekilde (n) *dizisinin bir* (n_j) *alt dizisinin var olduğu gösterilmelidir. Bu taktirde* (5.10) *gereğince*

$$\begin{aligned} S(u_n, u_n, u_{n+1}) &= S(Tu_{n-1}, Tu_{n-1}, T^2u_{n-1}) \\ &\leq rS(u_{n-1}, u_{n-1}, Tu_{n-1}) \\ &\leq rS(u_{n-1}, u_{n-1}, u_n) \end{aligned}$$

dir. Bu durumda

$$\frac{1}{1+2r}S(u_{n-1}, u_{n-1}, u_n) > S(u_{n-1}, u_{n-1}, w)$$

ve

$$\frac{1}{1+2r}S(u_n, u_n, u_{n+1}) > S(u_n, u_n, w)$$

olduğu varsayılsın. O halde $S-$*metriğin özellikleri ve son kabullenmeler gereğince*

$$\begin{aligned} S(u_n, u_n, u_{n-1}) &\leq S(u_{n-1}, u_{n-1}, w) + 2S(u_n, u_n, w) \\ &< \frac{1}{1+2r}\left(S(u_{n-1}, u_{n-1}, u_n) + 2S(u_n, u_n, u_{n+1})\right) \\ &\leq \frac{1}{1+2r}\left(S(u_{n-1}, u_{n-1}, u_n) + 2rS(u_{n-1}, u_{n-1}, u_n)\right) \\ &\leq S(u_{n-1}, u_{n-1}, u_n) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Açıkça bu bir çelişki olduğundan varsayım hatalıdır. Doğal olarak

$$\frac{1}{1+2r}S(u_{n-1}, u_{n-1}, u_n) \leq S(u_{n-1}, u_{n-1}, w)$$

ve

$$\frac{1}{1+2r}S(u_n, u_n, u_{n+1}) \leq S(u_n, u_n, w)$$

olmalıdır. Bu ifadeler ise her $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$\theta(r)S(u_{2n-1}, u_{2n-1}, u_{2n}) \leq S(u_{2n-1}, u_{2n-1}, w)$$

veya

$$\theta(r)S(u_{2n}, u_{2n}, u_{2n+1}) \leq S(u_{2n}, u_{2n}, w)$$

olmasını gerektirir. Böylece her $j \in \mathbb{N}$ *için*

$$\theta(r)S(u_{nj}, u_{nj}, u_{nj+1}) \leq S(u_{nj}, u_{nj}, w)$$

olacak şekilde (n) *dizisinin bir* (n_j) *alt dizisi vardır. Teoremin hipotezi gereğince*

$$\begin{aligned} S(w,w,Tw) &= \lim_{j\to\infty} S(Tu_{nj}, Tu_{nj}, Tw) \\ &\leq \lim_{j\to\infty} rM_T^S(u_{nj}, u_{nj}, w) \\ &= r\max\{S(u_{nj},u_{nj},w), S(u_{nj},u_{nj},Tu_{nj}), S(w,w,Tw), \\ &\quad \frac{(S(u_{nj},u_{nj},Tw)+S(w,w,Tu_{nj}))}{3}\Big\} \\ &= r\max\{S(w,w,w), S(w,w,w), S(w,w,Tw), \\ &\quad \frac{S(w,w,Tw)+S(w,w,Tw)}{3}\Big\} \\ &= rS(w,w,Tw) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak aşikar olarak $r<1$ *olduğundan* $Tw=w$ *olmalıdır. Sonuç olarak her iki durum için de* $Tw=w$ *olduğu gösterilmiştir. Yani* w*,* T *nin sabit noktasıdır.* T *dönüşümünün sabit noktasının tek olduğunu göstermek için* T *nin birbirinden farklı iki sabit noktasının* w *ve* v *olduğu varsayılsın. O halde açıkça* $w\neq v$ *olduğundan* (5.11) *gereğince*

$$S(w,w,Tv) \leq rS(v,v,Tv) = rS(v,v,v) = 0$$

elde edilir. Ancak bu bir çelişkidir. Dolayısıyla T *nin sabit noktası tektir.*

Örnek 5.10 *Esfahani vd. 2012 kaynağında verilen* $S-$*metrik ile oluşturulan* $S-$*metrik uzay ele alınsın. Buna göre* (X,S) *bir tam* $S-$*metrik uzaydır. Şimdi bu tam* $S-$*metrik uzayda* $T: X\to X$ *dönüşümü her* $x\in X$ *için*

$$Tx = \frac{x}{2}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu taktirde $\theta(r)\leq 1$ *olduğundan*

$$\theta(r)\max\left\{x, x, \frac{x}{2}\right\} \leq \max\{x,y\}$$

olup açıkça

$$\theta(r)S(x,x,Tx) \leq S(x,x,y)$$

dir. Diğer yandan her $x,y\in[0,\infty]$ *ve* $r\in\left[\frac{1}{2},1\right)$ *için*

$$\max\left\{\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right\} \leq r\max\left\{\max\{x,y\}, \max\left\{x,\frac{x}{2}\right\}, \max\left\{y,\frac{y}{2}\right\}, \frac{\max\left\{x,\frac{y}{2}\right\}+\max\left\{y,\frac{x}{2}\right\}}{3}\right\}$$

olup bu ise açıkça

$$S(Tx,Tx,Ty) \leq rM_T^S(x,x,y)$$

elde edilir. Dolayısıyla Teorem 5.6 nın koşulları sağlanmaktadır. O halde T *dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.*

Örnek 5.11 (X,S) *Örnek 3.1 de verilen* $S-$*metrik uzay olsun.Buna göre* (X,S) *bir tam* $S-$*metrik uzay olup bu uzayda* $T:X\to X$ *dönüşümü*

$$Tx=\frac{x}{4}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre her $x,y,z\in X$ *için açıkça* $S-$*metrik uzaydaki Ćirić büzülme koşulu*

$$\begin{aligned} S\left(Tx,Tx,Ty\right) &\leq r\max\left\{S(x,x,y),S(x,x,Tx),S(y,y,Ty),\right. \\ &\qquad \left.\frac{\left(S(x,x,Ty)+S(y,y,Tx)\right)}{3}\right\} \end{aligned}$$

olup açıkça $r=\left[\frac{1}{4},1\right)$ *için*

$$\begin{aligned} \frac{2\left|x-y\right|}{4} &\leq r\max\left\{2\left|x-y\right|,2\frac{3\left|x\right|}{4},2\frac{3\left|y\right|}{4},\right. \\ &\qquad \left.\frac{2\left|x-\frac{y}{4}\right|+2\left|y-\frac{x}{4}\right|}{3}\right\} \end{aligned}$$

ifadesi sağlanır. Doğal olarak bu T *dönüşümü ilgili uzayda bir Ćirić dönüşümüdür. Fakat açık bir şekilde*

$$\theta(r)S(x,x,Tx)\leq S(x,x,y)$$

ifadesi

$$\theta\left(r\right)2\left|x-Tx\right|\leq 2\left|x-y\right|$$

olup $x=y$ *için*

$$\theta\left(r\right)\frac{6\left|x\right|}{4}\leq 0$$

olacağından sağlanmaz. Bu nedenle bu dönüşüm Teorem 5.6 nın koşullarını sağlamaz.

Sıradaki teorem alışılmış metrik uzaylarda Reich sabit nokta teoremi olarak bilinen teoremin $S-$metrik uzay versiyonunun Suzuki tip genellemesini ifade etmektedir.

Teorem 5.7 (X,S) *bir tam* $S-$*metrik uzay ve* $T:X\to X$ *dönüşüm olsun.* $\theta:[0,1)\to\left(\frac{1}{3},1\right]$ *artmayan fonksiyonu Teorem 5.1 deki gibi tanımlansın. Ayrıca* $a,b,c,d\in\mathbb{R}^{+}\cup\{0\}$ *olmak üzere* $r=\frac{a+b+d}{1-c}$ *olsun. Bu taktirde her* $x,y,z\in X$ *için*

$$\theta(r)S(x,y,Tx)\leq S(x,y,z)\Longrightarrow$$

$$S(Tx,Ty,Tz)\leq aS(x,x,Tx)+bS(y,y,Ty)+cS(z,z,Tz)+dS\left(x,y,z\right)$$

koşulunu sağlayacak şekilde $a+b+c+d<1$ *ve* $3c+d<1$ *biçiminde* $a,b,c,d\in\mathbb{R}^{+}\cup\{0\}$ *varsa* T *dönüşümü bir tek* $w\in X$ *sabit noktasına sahiptir ve her* $x\in X$ *için* $(T^{n}x)$ *iterasyon dizisi* $w\in X$ *noktasına yakınsar.*

İspat θ *nın tanımından dolayı* $\theta(r)\leq 1$ *olduğundan her* $x\in X$ *için açıkça*

$$\theta(r)S(x,x,Tx)\leq S(x,x,Tx)$$

dir. Buna göre teoremin hipotezindeki koşul gereğince ve $S-$*metriğin özellikleri gereğince her* $x\in X$ *için*

$$S(Tx,Tx,T^{2}x)\leq aS(x,x,Tx)+bS(x,x,Tx)+cS(Tx,Tx,T^{2}x)+dS(x,x,Tx)$$

elde edilir ve buradan düzenleme ile $r=\dfrac{a+b+d}{1-c}$ *olmak üzere*

$$S(Tx,Tx,T^{2}x)\leq rS(x,x,Tx) \tag{5.14}$$

bulunur. $u\in X$ *alınarak* $u_0=u$ *ve her* $n\in\mathbb{N}$ *için* $u_n=T^{n}u$ *olacak şekilde* (u_n) *dizisi tanımlansın. Açıkça* $u_n=Tu_{n-1}$ *olduğundan ve* (5.14) *ifadesinden dolayı*

$$\begin{aligned}
S\left(u_n,u_n,u_{n+1}\right) &\leq rS\left(u_{n-1},u_{n-1},u_n\right)\\
&\leq r^{2}S\left(u_{n-2},u_{n-2},,u_{n-1}\right)\\
&\vdots\\
&\leq r^{n}S\left(u_0,u_0,u_1\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $S-$*metrik uzaydaki üçgen eşitsizliği kullanılarak* $m>n$ *için*

$$\begin{aligned}
S(u_n,u_n,u_m) &\leq S(u_n,u_n,u_{n+1})+S(u_n,u_n,u_{n+1})+S(u_m,u_m,u_{n+1})\\
&= 2S(u_n,u_n,u_{n+1})+S(u_m,u_m,u_{n+1})\\
&\leq 2S(u_n,u_n,u_{n+1})+2S(u_{n+1},u_{n+1},u_{n+2})+S(u_{n+2},u_{n+2},u_m)\\
&\vdots\\
&\leq 2S(u_n,u_n,u_{n+1})+\cdots+2S(u_{m-2},u_{m-2},u_{m-1})+S(u_{m-1},u_{m-1},u_m)\\
&\leq 2\left(S(u_n,u_n,u_{n+1})+\cdots+S(u_{m-1},u_{m-1},u_m)\right)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitsizlikte (5.14) *ifadesi kullanılırsa*

$$\begin{aligned}
S(u_n,u_n,u_m) &\leq 2(r^{n}+r^{n+1}+\cdots+r^{m-1})S(u_0,u_0,u_1)\\
&= 2\frac{r^{m}-r^{n}}{1-r}S(u_0,u_0,u_1)\\
&\leq 2\frac{r^{m}}{1-r}S(u_0,u_0,u_1)
\end{aligned}$$

elde edilir. $m\to\infty$ *için işlem yapılırsa* $r\in[0,1)$ *olduğundan dolayı*

$$S(u_n,u_n,u_m)\leq 2\frac{r^{m}}{1-r}S(u_0,u_0,u_1)\to 0$$

olacağından (u_n) *bir* $S-$*Cauchy dizisidir. Ayrıca* (X,S) *bir tam* $S-$*metrik uzay olduğundan* (u_n) *dizisi bir* $w \in X$ *noktasına yakınsar. Buna göre her* $x \in X \setminus \{w\}$ *için* $r' \in [0,1)$ *olmak üzere*

$$S(w,w,Tx) \leq r'S(w,w,x) \tag{5.15}$$

olduğu gösterilmelidir. O halde bunun için $S(w,w,x) > 0$ *ve* $(u_n) \to w$ *olduğundan dolayı* $n \geq n_0$ *koşulunu sağlayan her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$S(u_n,u_n,w) \leq \frac{S(w,w,x)}{5}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ *vardır. Buna göre*

$$\begin{aligned}
\theta(r)S(u_n,u_n,Tu_n) &\leq S(u_n,u_n,Tu_n) = S(u_n,u_n,u_{n+1}) \\
&\leq 2S(u_n,u_n,w) + S(u_{n+1},u_{n+1},w) \\
&\leq \frac{3}{5}S(x,x,w) \\
&= S(x,x,w) - \frac{2}{5}S(x,x,w) \\
&\leq S(x,x,w) - 2S(u_n,u_n,w) \\
&\leq S(u_n,u_n,x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre hipotez gereğince $n \geq n_0$ *için*

$$S(u_{n+1},u_{n+1},Tx) \leq aS(u_n,u_n,u_{n+1}) + bS(u_n,u_n,u_{n+1}) + cS(x,x,Tx) + dS(u_n,u_n,x)$$

olur. Bu aşamada son elde edilen eşitsizlikte $n \to \infty$ *için limit alınırsa*

$$\begin{aligned}
S(w,w,Tx) &\leq aS(w,w,w) + bS(w,w,w) + cS(x,x,Tx) + dS(w,w,x) \\
&= cS(x,x,Tx) + dS(w,w,x) \\
&\leq 2cS(x,x,w) + cS(Tx,Tx,w) + dS(w,w,x) \\
&= cS(w,w,Tx) + ((2c+d)S(w,w,x))
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan düzenleme ile $r' = \dfrac{2c+d}{1-c}$ *olmak üzere*

$$S(w,w,Tx) \leq r'S(w,w,x)$$

sonucuna ulaşılır. Doğal olarak (5.15) *ifadesi gösterilmiş olur. Şimdi her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$S(w,w,T^nw) \leq S(w,w,Tw) \tag{5.16}$$

olduğu tümevarım ilkesi yardımıyla gösterilsin. Bu durumda $n = 1$ *için eşitsizliğin doğruluğu aşikardır. Şimdi bazı* $n \in \mathbb{N}$ *için* (5.21) *eşitsizliğinin doğru olduğu kabul edilsin. Buna göre* $n+1$ *için eşitsizliğin doğru olduğu gösterilmelidir. O halde* $T^nw = w$ *ise*

$$S(w,w,T^{n+1}w) \leq S(w,w,Tw)$$

olur. $T^n w \neq w$ *ise* (5.15) *gereğince*

$$S\left(w, w, T^{n+1}w\right) \leq r' S(w, w, T^n w) \leq rS(w, w, Tw) < S(w, w, Tw)$$

elde edilir. Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ *için tümevarım ilkesi kullanılarak* (5.16) *eşitsizliğinin doğru olduğu gösterilmiş olur. Şimdi sabit noktanın varlığını göstermek adına* $Tw \neq w$ *olduğu varsayılsın. Bu taktirde her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$S\left(Tw, Tw, T^n w\right) \leq rS(w, w, Tw) \tag{5.17}$$

olduğu tümevarım ilkesi yardımıyla gösterilsin. Buna göre $n = 1$ *için ifadenin doğruluğu aşikardır. Ayrıca* $n = 2$ *için ifadenin doğruluğu* (5.14) *gereğince açıktır. Şimdi* $n \geq 2$ *olacak şekildeki bazı* $n \in \mathbb{N}$ *için* (5.17) *ifadesinin doğru olduğu kabul edilsin. Buna göre* $S-$*metriğin özellikleri kullanılarak ve üstteki kabullenme gereğince*

$$\begin{aligned} S\left(Tw, Tw, w\right) = S(w, w, Tw) &\leq S(w, w, T^n w) + 2S\left(Tw, Tw, T^n w\right) \\ &\leq S(w, w, T^n w) + 2rS(w, w, Tw) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan düzenleme ile

$$(1 - 2r)\, S(w, w, Tw) \leq S(w, w, T^n w) \tag{5.18}$$

elde edilir. Bu noktada r *nin* $0 \leq r < \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ *ve* $\dfrac{1}{\sqrt{5}} \leq r < 1$ *olacak şekildeki değer aralıkları için iki durumda inceleme yapılacaktır.*

1. Durum $0 \leq r \leq \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ *olsun. Bu durumda açıkça* $\theta(r) \leq \dfrac{1 - 2r}{r^2}$ *dir. O halde*

$$\begin{aligned} \theta(r) S(T^n w, T^n w, T^{n+1} w) &\leq \frac{1 - 2r}{r^2} S(T^n w, T^n w, T^{n+1} w) \\ &\leq \frac{1 - 2r}{r^n} S(T^n w, T^n w, T^{n+1} w) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda (5.18) *gereğince*

$$\begin{aligned} \theta(r) S(T^n w, T^n w, T^{n+1} w) &\leq \frac{1 - 2r}{r^2} S(T^n w, T^n w, T^{n+1} w) \\ &\vdots \\ &\leq \frac{1 - 2r}{r^n} r^n S(w, w, Tw) \\ &= (1 - 2r)\, S(w, w, Tw) \\ &\leq S(w, w, T^n w) \\ &= S(T^n w, T^n w, w) \end{aligned}$$

elde edilir. Teoremin hipotezi, $S-$metriğin özellikleri ve (5.16) *ifadesi gereğince ve ayrıca* $r = \dfrac{a+b+d}{1-c}$ *olup* $r \in [0,1)$ *olduğundan*

$$\begin{aligned} S(T^{n+1}w, T^{n+1}w, Tw) &= S(Tw, Tw, T^{n+1}w) \\ &\leq aS(w,w,Tw) + bS(w,w,Tw) + \\ &\qquad cS(T^nw, T^nw, T^{n+1}w) + dS(w,w,T^nw) \\ &\leq (a+b+d)\, S(w,w,Tw) + cr^nS(w,w,Tw) \\ &\leq (a+b+d)\, S(w,w,Tw) + crS(w,w,Tw) \\ &= (1-c)\, rS(w,w,Tw) + crS(w,w,Tw) \\ &= rS(w,w,Tw) \end{aligned}$$

bulunur. Böylelikle her $n \in \mathbb{N}$ *için* (5.17) *ifadesinin doğru olduğu gösterilmiş olur. Bu halde* $Tw \neq w$ *olduğundan* (5.17) *ifadesi gereğince* $T^nw \neq w$ *olur. Aksi taktirde* $T^nw = w$ *olsa idi*

$$S(T^nw, T^nw, w) \leq rS(w,w,Tw) \Longrightarrow S(w,w,Tw) \leq rS(w,w,Tw) < S(w,w,Tw)$$

olması gerekirdi ki bu bir çelişkidir. Bu nedenle (5.15) *gereğince*

$$S(w,w,T^{n+1}w) \leq r'S(w,w,T^nw) \leq \cdots \leq (r')^n\, S(w,w,Tw)$$

sonucuna ulaşılır. O halde son ifadede $n \to \infty$ *için limit alınırsa*

$$\lim_{n\to\infty} S(w,w,T^{n+1}w) = 0$$

olur ki bu ise $T^nw \to w$ *olmasını gerektirir. Bu sebeple ve* (5.17) *gereğince*

$$S\,(Tw,Tw,w) = \lim_{n\to\infty} S(Tw,Tw,T^nw) \leq \lim_{n\to\infty} rS(w,w,Tw) = rS(w,w,Tw)$$

elde edilir. Dolayısıyla $S(w,w,Tw) = 0$ *olur. Bu ise açıkça varsayım ile çelişir. Doğal olarak* $Tw = w$ *olmalıdır.*

2. Durum $\dfrac{1}{\sqrt{5}} \leq r < 1$ *olsun. Bu durumda açıkça* $\theta\,(r) = \dfrac{1}{1+2r}$ *dir. Bu hal için her* $j \in \mathbb{N}$ *için*

$$\theta(r)S(u_{nj}, u_{nj}, Tu_{nj}) \leq S(u_{nj}, u_{nj}, w)$$

olacak şekilde (n) *dizisinin bir* (n_j) *alt dizisinin var olduğu gösterilmelidir. Şimdi her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$\frac{1}{1+2r}S(u_n, u_n, Tu_n) > S(u_n, u_n, w)$$

olduğu varsayılsın. Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$\frac{1}{1+2r}S(u_{2n}, u_{2n}, Tu_{2n}) > S(u_{2n}, u_{2n}, w)$$

ve

$$\frac{1}{1+2r}S(u_{2n+1},u_{2n+1},Tu_{2n+1}) > S(u_{2n+1},u_{2n+1},w)$$

ifadeleri sağlanır. Bu taktirde

$$\begin{aligned} S(u_{2n+1},u_{2n+1},u_{2n}) &\leq 2S(u_{2n+1},u_{2n+1},w)+S(u_{2n},u_{2n},w) \\ &< \frac{2}{1+2r}S(u_{2n+1},u_{2n+1},Tu_{2n+1})+\frac{1}{1+2r}S(u_{2n},u_{2n},Tu_{2n}) \\ &< \frac{2r}{1+2r}S(u_{2n},u_{2n},Tu_{2n})+\frac{1}{1+2r}S(u_{2n},u_{2n},Tu_{2n}) \\ &= S(u_{2n},u_{2n},Tu_{2n}) = S(u_{2n},u_{2n},u_{2n+1}) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Ancak bu bir çelişkidir. Bu taktirde her $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$\theta(r)\,S(u_{2n+1},u_{2n+1},Tu_{2n+1}) \leq S(u_{2n+1},u_{2n+1},w)$$

ve

$$\theta(r)\,S(u_{2n},u_{2n},Tu_{2n}) \leq S(u_{2n},u_{2n},w)$$

ifadeleri sağlanır. Buna göre

$$\theta(r)\,S(u_{2n+1},u_{2n+1},Tu_{2n+1}) \leq S(u_{2n+1},u_{2n+1},w)$$

ifadesi sağlıyor ise teoremin hipotezi gereğince

$$\begin{aligned} S(u_{2n+1},u_{2n+1},Tw) &= S(Tu_{2n},Tu_{2n},Tw) \\ &\leq aS(u_{2n},u_{2n},Tu_{2n})+bS(u_{2n},u_{2n},Tu_{2n})+cS(w,w,Tw) \\ &\quad +dS(u_{2n},u_{2n},w) \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $n \to \infty$ *için limit alınırsa*

$$S(w,w,Tw) \leq cS(w,w,Tw)$$

bulunur. Açıkça $c < 1$ *olduğundan dolayı ifade ancak* $S(w,w,Tw) = 0$ *olması ile mümkündür. Yani* $Tw = w$ *dir. Benzer şekilde*

$$\theta(r)\,S(u_{2n},u_{2n},Tu_{2n}) \leq S(u_{2n},u_{2n},w)$$

ifadesi sağlanıyor ise $Tw = w$ *dir. Böylelikle her iki durumda da* $w \in X$ *noktasının* T *dönüşümünün sabit noktası olduğu gösterilmiş olur. Yani* w*,* T *nin sabit noktasıdır.* T *dönüşümünün sabit noktasının tek olduğunu göstermek için* T *nin birbirinden farklı iki sabit noktasının* w *ve* v *olduğu varsayılsın. O halde açıkça* $w \neq v$ *olduğundan* (5.15) *gereğince ve* $r' < 1$ *olduğundan*

$$S(w,w,Tv) \leq r'S(w,w,v) < S(w,w,v)$$

olur. Bu ise açıkça bir çelişkidir. Dolayısıyla $w = v$ *olmalıdır. Yani* T *nin sabit noktası tektir.*

Örnek 5.12 *Esfahani vd. 2012 kaynağında verilen $S-$metrik ile oluşturulan $S-$metrik uzay ele alınsın. Buna göre (X,S) bir tam $S-$metrik uzaydır. Şimdi bu tam $S-$metrik uzayda $T:X\to X$ dönüşümü her $x\in X$ için*

$$Tx=\frac{x}{3}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu taktirde $\theta(r)\leq 1$ olduğundan

$$\theta(r)\max\left\{x,y,\frac{x}{3}\right\}\leq\max\{x,y,z\}$$

olup

$$\theta(r)S(x,y,Tx)\leq S(x,y,z)$$

dir. Öte yandan her $x,y,z\in[0,\infty]$ ve $a,b,c,d\in\left(0,\frac{1}{12}\right)$ için

$$\max\left\{\frac{x}{3},\frac{y}{3},\frac{z}{3}\right\}\leq ax+by+cz+d\max\{x,y,z\}$$

olup bu ise

$$S(Tx,Ty,Tz)\leq aS(x,x,Tx)+bS(y,y,Ty)+cS(z,z,Tz)+dS(x,y,z)$$

elde edilir. Dolayısıyla Teorem 5.7 nin koşulları sağlanmaktadır. O halde T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

Örnek 5.13 *Örnek 3.2 de ilk kez bu tezde ifade edilen herhangi bir alışılmış metrik tarafından üretilemeyen $S-$metrik ve bu $S-$metrik ile üretilen S-metrik uzay ele alınsın. Yani $X=\mathbb{R}$ olmak üzere, $S:X\times X\times X\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu her $x,y,z\in X$ için*

$$S(x,y,z)=\max\left\{\left|x^3-y^3\right|,\left|x^3+y^3-2z^3\right|\right\}$$

olacak şekilde tanımlansın. Buna göre (X,S) bir tam $S-$metrik uzay olup bu uzayda $T:X\to X$ dönüşümü

$$Tx=\frac{x}{3}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre her $x,y,z\in X$ için açıkça $S-$metrik uzaydaki Reich büzülme koşulu

$$S(Tx,Ty,Tz)\leq aS(x,x,Tx)+bS(y,y,Ty)+cS(z,z,Tz)+dS(x,y,z)$$

olup açıkça $a=\frac{1}{13},b=0,c=0,d=\frac{1}{2}$ için

$$\begin{aligned}\frac{\max\{|x^3-y^3|,|x^3+y^3-2z^3|\}}{27} &\leq a\frac{52|x|}{27}+b\frac{52|y|}{27}+c\frac{52|z|}{27}\\ &\quad +d\max\left\{\left|x^3-y^3\right|,\left|x^3+y^3-2z^3\right|\right\}\end{aligned}$$

ifadesi sağlanır. Doğal olarak bu T dönüşümü ilgili uzayda bir Reich dönüşümüdür. Fakat açık bir şekilde

$$\theta(r)\, S(x,y,Tx) \leq S(x,y,z)$$

ifadesi

$$\theta(r)\left(\max\left\{\left|x^3-y^3\right|,\left|x^3+y^3-2\frac{x^3}{3^3}\right|\right\}\right) \leq \max\left\{\left|x^3-y^3\right|,\left|x^3+y^3-2z^3\right|\right\}$$

olup $x=y=z$ için

$$\theta(r)\,\frac{25}{27}\left|x^3\right| \leq 0$$

olacağından sağlanmaz. Bu nedenle bu dönüşüm Teorem 5.7 nin koşullarını sağlamaz.

Sıradaki teorem alışılmış metrik uzaylarda Hardy-Rogers sabit nokta teoremi olarak bilinen teoremin $S-$metrik uzay versiyonunun Suzuki tip genellemesini ifade etmektedir.

Teorem 5.8 *(X,S) bir tam $S-$metrik uzay, $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. $\theta : [0,1) \to \left(\frac{1}{3},1\right]$ artmayan fonksiyonu Teorem 5.1 deki gibi tanımlansın. Ayrıca $a,b,c,d,e,f,g,h,j,k \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ olmak üzere $r = \dfrac{a+b+d+f+k+2e+2g}{1-c-e-g}$ olsun. Bu taktirde her $x,y,z \in X$ için*

$$\theta(r)S(x,y,Tx) \leq S(x,y,z) \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} S(Tx,Ty,Tz) \;\leq\; & aS(x,x,Tx)+bS(y,y,Ty)+cS(z,z,Tz)+dS(x,x,Ty) \\ & +eS(x,x,Tz)+fS(y,y,Tx)+gS(y,y,Tz) \\ & +hS(z,z,Tx)+jS(z,z,Ty)+kS(x,y,z) \end{aligned}$$

koşulunu sağlayacak şekilde $a+b+c+d+3e+f+3g+k<1$ ve $3c+e+g+h+j+k<1$ biçiminde $a,b,c,d,e,f,g,h,j,k \in \mathbb{R}^+\cup\{0\}$ varsa T dönüşümü bir tek $w \in X$ sabit noktasına sahiptir ve her $x \in X$ için $(T^n x)$ iterasyon dizisi $w \in X$ noktasına yakınsar.

İspat *θ nın tanımından dolayı $\theta(r) \leq 1$ olduğundan her $x \in X$ için açıkça*

$$\theta(r)S(x,x,Tx) \leq S(x,x,Tx)$$

dir. Buna göre teoremin hipotezindeki koşul gereğince ve $S-$metriğin özellikleri gereğince her $x \in X$ için

$$\begin{aligned} S(Tx,Tx,T^2x) \;\leq\; & aS(x,x,Tx)+bS(x,x,Tx)+cS(Tx,Tx,T^2x)+dS(x,x,Tx) \\ & +eS(x,x,T^2x)+fS(x,x,Tx)+gS(x,x,T^2x) \\ & +hS(Tx,Tx,Tx)+jS(Tx,Tx,Tx)+kS(x,x,Tx) \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan düzenleme ile $r = \dfrac{a+b+d+f+k+2e+2g}{1-c-e-g}$ *olmak üzere*

$$S(Tx, Tx, T^2x) \leq rS(x, x, Tx) \tag{5.19}$$

bulunur. $u \in X$ *alınarak* $u_0 = u$ *ve her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $u_n = T^n u$ *olacak şekilde* (u_n) *dizisi tanımlansın. Açıkça* $u_n = Tu_{n-1}$ *olduğundan ve* (5.19) *ifadesinden dolayı*

$$\begin{aligned} S(u_n, u_n, u_{n+1}) &\leq rS(u_{n-1}, u_{n-1}, u_n) \\ &\leq r^2 S(u_{n-2}, u_{n-2,}, u_{n-1}) \\ &\vdots \\ &\leq r^n S(u_0, u_0, u_1) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $S-$*metrik uzaydaki üçgen eşitsizliği kullanılarak* $m > n$ *için*

$$\begin{aligned} S(u_n, u_n, u_m) &\leq S(u_n, u_n, u_{n+1}) + S(u_n, u_n, u_{n+1}) + S(u_m, u_m, u_{n+1}) \\ &= 2S(u_n, u_n, u_{n+1}) + S(u_m, u_m, u_{n+1}) \\ &\leq 2S(u_n, u_n, u_{n+1}) + 2S(u_{n+1}, u_{n+1}, u_{n+2}) + S(u_{n+2}, u_{n+2}, u_m) \\ &\vdots \\ &\leq 2S(u_n, u_n, u_{n+1}) + \cdots + 2S(u_{m-2}, u_{m-2}, u_{m-1}) + S(u_{m-1}, u_{m-1}, u_m) \\ &\leq 2\left(S(u_n, u_n, u_{n+1}) + \cdots + S(u_{m-1}, u_{m-1}, u_m)\right) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitsizlikte (5.19) *ifadesi kullanılırsa*

$$\begin{aligned} S(u_n, u_n, u_m) &\leq 2(r^n + r^{n+1} + \cdots + r^{m-1})S(u_0, u_0, u_1) \\ &= 2\frac{r^m - r^n}{1-r} S(u_0, u_0, u_1) \\ &\leq 2\frac{r^m}{1-r} S(u_0, u_0, u_1) \end{aligned}$$

elde edilir. $m \to \infty$ *için işlem yapılırsa* $r \in [0, 1)$ *olduğundan dolayı*

$$S(u_n, u_n, u_m) \leq 2\frac{r^m}{1-r} S(u_0, u_0, u_1) \to 0$$

olacağından (u_n) *bir* $S-$*Cauchy dizisidir. Ayrıca* (X, S) *bir tam* $S-$*metrik uzay olduğundan* (u_n) *dizisi bir* $w \in X$ *noktasına yakınsar. Buna göre her* $x \in X \setminus \{w\}$ *için* $r' \in [0, 1)$ *olmak üzere*

$$S(w, w, Tx) \leq r'S(w, w, x) \tag{5.20}$$

olduğu gösterilmelidir. O halde bunun için $S(w, w, x) > 0$ *ve* $(u_n) \to w$ *olduğundan dolayı* $n \geq n_0$ *koşulunu sağlayan her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$S(u_n, u_n, w) \leq \frac{S(w, w, x)}{5}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ *vardır. Buna göre*

$$\begin{aligned}
\theta(r)S(u_n,u_n,Tu_n) &\leq S(u_n,u_n,Tu_n) = S(u_n,u_n,u_{n+1}) \\
&\leq 2S(u_n,u_n,w) + S(u_{n+1},u_{n+1},w) \\
&\leq \frac{3}{5}S(x,x,w) \\
&= S(x,x,w) - \frac{2}{5}S(x,x,w) \\
&\leq S(x,x,w) - 2S(u_n,u_n,w) \\
&\leq S(u_n,u_n,x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre hipotez gereğince $n \geq n_0$ *için*

$$\begin{aligned}
S\left(u_{n+1},u_{n+1},Tx\right) \leq \lim_{n\to\infty} &\left((a+b+d+f)\,S\left(u_n,u_n,Tu_n\right) + cS\left(x,x,Tx\right)\right. \\
&(e+g)\,S\left(u_n,u_n,Tx\right) + (h+j)\,S\left(x,x,Tu_n\right) \\
&\left.+kS(u_n,u_n,x)\right)
\end{aligned}$$

olur. Bu aşamada son elde edilen eşitsizlikte $n \to \infty$ *için limit alınırsa*

$$\begin{aligned}
S(w,w,Tx) &\leq (a+b+d+f)\,S(w,w,w) + cS(x,x,Tx) \\
&\qquad (e+g)\,S(w,w,Tx) + (h+j)\,S(x,x,w) + kS(w,w,x) \\
&= cS\left(x,x,Tx\right) + (e+g)\,S(w,w,Tx) + (h+j+k)\,S\left(w,w,x\right) \\
&\leq 2cS(x,x,w) + (c+e+g)\,S\left(Tx,Tx,w\right) + (h+j+k)\,S(w,w,x) \\
&= (c+e+g)\,S(w,w,Tx) + ((2c+h+j+k)\,S(w,w,x))
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan düzenleme ile $r' = \dfrac{2c+h+j+k}{1-c-e-g}$ *olmak üzere*

$$S(w,w,Tx) \leq r'S(w,w,x)$$

sonucuna ulaşılır. Doğal olarak (5.20) *ifadesi gösterilmiş olur. Şimdi her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$S(w,w,T^n w) \leq S(w,w,Tw) \tag{5.21}$$

olduğu tümevarım ilkesi yardımıyla gösterilsin. Bu durumda $n = 1$ *için eşitsizliğin doğruluğu aşikardır. Şimdi bazı* $n \in \mathbb{N}$ *için* (5.21) *eşitsizliğinin doğru olduğu kabul edilsin. Buna göre* $n+1$ *için eşitsizliğin doğru olduğu gösterilmelidir. O halde* $T^n w = w$ *ise*

$$S(w,w,T^{n+1}w) \leq S(w,w,Tw)$$

olur. $T^n w \neq w$ *ise* (5.20) *gereğince*

$$S\left(w,w,T^{n+1}w\right) \leq r'S(w,w,T^n w) \leq rS(w,w,Tw) < S(w,w,Tw)$$

elde edilir. Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ *için tümevarım ilkesi kullanılarak* (5.21) *eşitsizliğinin doğru olduğu gösterilmiş olur. Şimdi sabit noktanın varlığını göstermek adına* $Tw \neq w$ *olduğu varsayılsın. Bu taktirde her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$S\left(Tw, Tw, T^n w\right) \leq rS(w, w, Tw) \tag{5.22}$$

olduğu tümevarım ilkesi yardımıyla gösterilsin. Buna göre $n = 1$ *için ifadenin doğruluğu aşikardır. Ayrıca* $n = 2$ *için ifadenin doğruluğu* (5.19) *gereğince açıktır. Şimdi* $n \geq 2$ *olacak şekildeki bazı* $n \in \mathbb{N}$ *için* (5.22) *ifadesinin doğru olduğu kabul edilsin. Buna göre* $S-$*metriğin özellikleri kullanılarak ve üstteki kabullenme gereğince*

$$\begin{aligned} S\left(Tw, Tw, w\right) = S(w, w, Tw) &\leq S(w, w, T^n w) + 2S\left(Tw, Tw, T^n w\right) \\ &\leq S(w, w, T^n w) + 2rS(w, w, Tw) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan düzenleme ile

$$\left(1 - 2r\right) S(w, w, Tw) \leq S(w, w, T^n w) \tag{5.23}$$

elde edilir. Bu noktada r *nin* $0 \leq r < \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ *ve* $\dfrac{1}{\sqrt{5}} \leq r < 1$ *olacak şekildeki değer aralıkları için iki durumda inceleme yapılacaktır.*

1. Durum $0 \leq r < \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ *olsun. Bu durumda açıkça* $\theta(r) \leq \dfrac{1 - 2r}{r^2}$ *dir. O halde*

$$\begin{aligned} \theta(r) S(T^n w, T^n w, T^{n+1} w) &\leq \frac{1 - 2r}{r^2} S(T^n w, T^n w, T^{n+1} w) \\ &\leq \frac{1 - 2r}{r^n} S(T^n w, T^n w, T^{n+1} w) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda (5.23) *gereğince*

$$\begin{aligned} \theta(r) S(T^n w, T^n w, T^{n+1} w) &\leq \frac{1 - 2r}{r^2} S(T^n w, T^n w, T^{n+1} w) \\ &\vdots \\ &\leq \frac{1 - 2r}{r^n} r^n S(w, w, Tw) \\ &= \left(1 - 2r\right) S(w, w, Tw) \\ &\leq S(w, w, T^n w) \\ &= S(T^n w, T^n w, w) \end{aligned}$$

elde edilir. Teoremin hipotezi, $S-$metriğin özellikleri (5.20)*,* (5.21) *ifadeleri ayrıca* $a+b+c+d+3e+f+3g+k<1$ *ve* $3c+e+g+h+j+k<1$ *ile* $r<1$ *ve* $r'<1$ *olduğundan*

$$\begin{aligned}
S(T^{n+1}w,T^{n+1}w,Tw) &= S(Tw,Tw,T^{n+1}w)\\
&\leq aS(w,w,Tw)+bS(w,w,Tw)+cS(T^nw,T^nw,T^{n+1}w)\\
&\quad +dS(w,w,Tw)+eS\left(w,w,T^{n+1}w\right)\\
&\quad +fS(w,w,Tw)+gS\left(w,w,T^{n+1}w\right)\\
&\quad +hS\left(T^nw,T^nw,Tw\right)+jS\left(T^nw,T^nw,Tw\right)\\
&\quad +kS(w,w,T^nw)\\
&\leq (a+b+d+f)\,S(w,w,Tw)+cr^nS(w,w,Tw)\\
&\quad +er'S(w,w,Tw)+gr'S(w,w,Tw)\\
&\quad +hS(w,w,Tw)+jrS(w,w,Tw)\\
&\quad +kS(w,w,Tw)\\
&\leq [(a+b+d+f+k)+(c+h+j)\,r\\
&\quad +(e+g)\,r']\,S(w,w,Tw)\\
&= [(1-c-e-g)\,r-2e-2g+[(1-c-e-g)\,r'-c-k]\,r\\
&\quad +(e+g)\,r']\,S(w,w,Tw)\\
&\leq [(1-c-e-g)\,r-2e-2g+(1-c)\,r'r-(e+g)\,r'r\\
&\quad -(c+k)\,r+(e+g)\,r']\,S(w,w,Tw)\\
&\leq [(1-c-e-g)\,r-2e-2g+(1-c)\,r'r\\
&\quad -(e+g)\,r'\,(1-r)-(c+k)\,r]\,S(w,w,Tw)\\
&\leq [(1-c-e-g)\,r-2e-2g+(1-c)\,r-(e+g)\\
&\quad -(c+k)\,r]\,S(w,w,Tw)\\
&\leq (1-3c-e-g-k)\,rS(w,w,Tw)\\
&= rS(w,w,Tw)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylelikle her $n\in\mathbb{N}$ *için* (5.22) *ifadesinin doğru olduğu gösterilmiş olur. Bu halde* $Tw\neq w$ *olduğundan* (5.22) *ifadesi gereğince* $T^nw\neq w$ *olur. Aksi taktirde* $T^nw=w$ *olsa idi*

$$S(T^nw,T^nw,w)\leq rS(w,w,Tw)\Longrightarrow S(w,w,Tw)\leq rS(w,w,Tw)<S(w,w,Tw)$$

olması gerekirdi ki bu bir çelişkidir. Bu nedenle (5.20) *gereğince*

$$S(w,w,T^{n+1}w)\leq r'S(w,w,T^nw)\leq\cdots\leq(r')^n\,S(w,w,Tw)$$

sonucuna ulaşılır. O halde son ifadede $n\to\infty$ *için limit alınırsa*

$$\lim_{n\to\infty}S(w,w,T^{n+1}w)=0$$

olur ki bu ise $T^nw\to w$ *olmasını gerektirir. Bu sebeple ve* (5.22) *gereğince*

$$S\left(Tw,Tw,w\right)=\lim_{n\to\infty}S(Tw,Tw,T^nw)\leq\lim_{n\to\infty}rS(w,w,Tw)=rS(w,w,Tw)$$

elde edilir. Dolayısıyla $S(w,w,Tw)=0$ *olur. Bu ise açıkça varsayım ile çelişir. Doğal olarak* $Tw=w$ *olmalıdır.*
2. Durum $\frac{1}{\sqrt{5}}\leq r<1$ *olsun. Bu durumda açıkça* $\theta(r)=\frac{1}{1+2r}$ *dir. Bu hal için her* $j\in\mathbb{N}$ *için*

$$\theta(r)S(u_{nj},u_{nj},Tu_{nj})\leq S(u_{nj},u_{nj},w)$$

olacak şekilde (n) *dizisinin bir* (n_j) *alt dizisinin var olduğu gösterilmelidir. Şimdi her* $n\in\mathbb{N}$ *için*

$$\frac{1}{1+2r}S(u_n,u_n,Tu_n)>S(u_n,u_n,w)$$

olduğu varsayılsın. Dolayısıyla her $n\in\mathbb{N}$ *için*

$$\frac{1}{1+2r}S(u_{2n},u_{2n},Tu_{2n})>S(u_{2n},u_{2n},w)$$

ve

$$\frac{1}{1+2r}S(u_{2n+1},u_{2n+1},Tu_{2n+1})>S(u_{2n+1},u_{2n+1},w)$$

ifadeleri sağlanır. Bu taktirde

$$\begin{aligned}S(u_{2n+1},u_{2n+1},u_{2n}) &\leq 2S(u_{2n+1},u_{2n+1},w)+S(u_{2n},u_{2n},w)\\ &< \frac{2}{1+2r}S(u_{2n+1},u_{2n+1},Tu_{2n+1})+\frac{1}{1+2r}S(u_{2n},u_{2n},Tu_{2n})\\ &< \frac{2r}{1+2r}S(u_{2n},u_{2n},Tu_{2n})+\frac{1}{1+2r}S(u_{2n},u_{2n},Tu_{2n})\\ &= S(u_{2n},u_{2n},Tu_{2n})=S(u_{2n},u_{2n},u_{2n+1})\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Ancak bu bir çelişkidir. Bu taktirde her $n\in\mathbb{N}$ *için*

$$\theta(r)\,S(u_{2n+1},u_{2n+1},Tu_{2n+1})\leq S(u_{2n+1},u_{2n+1},w)$$

ve

$$\theta(r)\,S(u_{2n},u_{2n},Tu_{2n})\leq S(u_{2n},u_{2n},w)$$

ifadeleri sağlanır. Buna göre

$$\theta(r)\,S(u_{2n+1},u_{2n+1},Tu_{2n+1})\leq S(u_{2n+1},u_{2n+1},w)$$

ifadesi sağlıyor ise teoremin hipotezi gereğince

$$\begin{aligned}S(u_{2n+1},u_{2n+1},Tw) &= S(Tu_{2n},Tu_{2n},Tw)\\ &\leq (a+b+d+f)\,S(u_{2n},u_{2n},Tu_{2n})+cS(w,w,Tw)\\ &\quad +dS(u_{2n},u_{2n},w)+(e+g)\,S(u_{2n},u_{2n},Tw)\\ &\quad +(h+j)\,S(w,w,Tu_{2n})\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $n\to\infty$ *için limit alınırsa*

$$S(w,w,Tw)\leq(c+e+g)\,S(w,w,Tw)$$

bulunur. Açıkça $c+e+g<1$ *olduğundan dolayı ifade ancak* $S(w,w,Tw)=0$ *olması ile mümkündür. Yani* $Tw=w$ *dir. Benzer şekilde*

$$\theta(r)\,S(u_{2n},u_{2n},Tu_{2n})\leq S(u_{2n},u_{2n},w)$$

ifadesi sağlanıyor ise $Tw=w$ *dir. Böylelikle her iki durumda da* $w\in X$ *noktasının* T *dönüşümünün sabit noktası olduğu gösterilmiş olur. Yani* w*,* T *nin sabit noktasıdır.* T *dönüşümünün sabit noktasının tek olduğunu göstermek için* T *nin birbirinden farklı iki sabit noktasının* w *ve* v *olduğu varsayılsın. O halde açıkça* $w\neq v$ *olduğundan* (5.20) *gereğince ve* $r'<1$ *olduğundan*

$$S(w,w,Tv)\leq r'S(w,w,v)<S(w,w,v)$$

olur. Bu ise açıkça bir çelişkidir. Dolayısıyla $w=v$ *olmalıdır. Yani* T *nin sabit noktası tektir.*

Örnek 5.14 *Esfahani vd. 2012 kaynağında verilen* $S-$*metrik ile oluşturulan* $S-$*metrik uzay ele alınsın. Buna göre* (X,S) *bir tam* $S-$*metrik uzaydır. Şimdi bu tam* $S-$*metrik uzayda* $T:X\to X$ *dönüşümü her* $x\in X$ *için*

$$Tx=\frac{x}{2}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu taktirde $\theta(r)\leq 1$ *olduğundan*

$$\theta(r)\max\left\{x,y,\frac{x}{2}\right\}\leq\max\{x,y,z\}$$

olup

$$\theta(r)\,S(x,y,Tx)\leq S(x,y,z)$$

dir. Öte yandan her $x,y,z\in[0,\infty]$ *ve* $a=b=c=d=e=f=g=h=j=\dfrac{1}{30}$ *ve* $k=\dfrac{1}{2}$ *için*

$$\begin{aligned}\max\left\{\frac{x}{2},\frac{y}{2},\frac{z}{2}\right\} \;\leq\; & ax+by+cz+d\max\left\{x,\frac{y}{2}\right\}+e\max\left\{x,\frac{z}{2}\right\}\\ & +f\max\left\{y,\frac{x}{2}\right\}+g\max\left\{y,\frac{z}{2}\right\}+h\max\left\{z,\frac{x}{2}\right\}\\ & +j\max\left\{z,\frac{y}{2}\right\}+k\max\{x,y,z\}\end{aligned}$$

olup bu ise açıkça

$$\begin{aligned}S(Tx,Ty,Tz) \;\leq\; & aS(x,x,Tx)+bS(y,y,Ty)+cS(z,z,Tz)+dS(x,x,Ty)\\ & +eS(x,x,Tz)+fS(y,y,Tx)+gS(y,y,Tz)\\ & +hS(z,z,Tx)+jS(z,z,Ty)+kS(x,y,z)\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla Teorem 5.8 in koşulları sağlanmaktadır. O halde T *dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.*

Örnek 5.15 (X,S) *Örnek 3.1 de verilen* $S-$*metrik uzay olsun. Buna göre* (X,S) *bir tam* $S-$*metrik uzay olup bu uzayda* $T:X\to X$ *dönüşümü*

$$Tx=\frac{x}{2}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre her $x,y,z\in X$ *için açıkça* $S-$*metrik uzaydaki Hardy-Rogers büzülme koşulu*

$$\begin{aligned}S(Tx,Ty,Tz) \leq\ & aS(x,x,Tx)+bS(y,y,Ty)+cS(z,z,Tz)+dS(x,x,Ty)\\ &+eS(x,x,Tz)+fS(y,y,Tx)+gS(y,y,Tz)\\ &+hS(z,z,Tx)+jS(z,z,Ty)+kS(x,y,z)\end{aligned}$$

olup açıkça $a=b=c=\frac{1}{16}$, $d=e=f=g=h=j=\frac{1}{64}$, $k=\frac{1}{32}$ *için*

$$\begin{aligned}\frac{|x-z|+|y-z|}{2} \leq\ & 2a\frac{|x|}{2}+2b\frac{|y|}{2}+2c\frac{|z|}{2}+2d\left|x-\frac{y}{2}\right|+2e\left|x-\frac{z}{2}\right|+2f\left|y-\frac{x}{2}\right|\\ &+2g\left|y-\frac{z}{2}\right|+2h\left|z-\frac{x}{2}\right|+2j\left|z-\frac{y}{2}\right|+k\left(|x-z|+|y-z|\right)\end{aligned}$$

ifadesi sağlanır. Doğal olarak bu T *dönüşümü ilgili uzayda bir Hardy-Rogers dönüşümüdür. Fakat açık bir şekilde*

$$\theta(r)\,S(x,y,Tx)\leq S(x,y,z)$$

ifadesi

$$\theta(r)\left(\frac{|x|}{2}+\left|y-\frac{x}{2}\right|\right)\leq|x-z|+|y-z|$$

olup $x=y=z$ *için*

$$\theta(r)\,|x|\leq 0$$

olacağından sağlanmaz. Bu nedenle bu dönüşüm Teorem 5.8 in koşullarını sağlamaz.

Sıradaki teorem alışılmış metrik uzaylarda kapalı bağıntı sabit nokta teoremi olarak bilinen teoremin $S-$metrik uzay versiyonunun Suzuki tip genellemesini ifade etmektedir.

Tanım 5.1 $\Phi_S=\left\{F\mid F:\mathbb{R}_+^{11}\to\mathbb{R}\right.$ *sürekli ve* $(F1),(F2),(F3)$ *ü sağlar*$\left.\right\}$ *olsun.*
$(F1)$: F *fonksiyonu* t_1 *hariç tüm değişkenlerine göre artmayandır.*
$(F2)$: *Her* $u,v\geq 0$ *için*

$$F(u,v,v,v,u,v,u+2v,v,u+2v,0,0)\leq 0$$

veya

$$F(u,v,0,0,u+2v,0,u,0,u,v,v)\leq 0$$

veya

$$F(u,v,v,v,v,v,v,v,v,v,v) \leq 0$$

ise $u \leq rv$ *olacak şekilde* $r \in [0,1)$ *vardır.*
$F3$:*Her* $t > 0$ *için*

$$F(t,t,0,0,0,0,t,0,t,t,t) > 0$$

ve

$$F(t,0,0,0,t,0,t,0,t,0,0) > 0$$

sağlanır.

Teorem 5.9 (X,S) *bir tam* $S-$*metrik uzay ve* $T : X \to X$ *bir dönüşüm olsun.* $\theta : [0,1) \to \left(\frac{1}{3},1\right]$ *artmayan fonksiyonu Teorem 5.1 deki gibi tanımlansın ve* Φ_S *ifadesi de Tanım 5.1 verilen fonksiyonların kümesini temsil etsin. Bu taktirde her* $x,y,z \in X$ *için*

$$\theta(r)\, S(x,x,Tx) \leq S(x,x,y) \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} &F(S(Tx,Tx,Ty), S(x,y,z), S(x,x,Tx), S(y,y,Ty), S(z,z,Tz),\\ &S(x,x,Ty), S(x,x,Tz), S(y,y,Tx), S(y,y,Tz), S(z,z,Tx), S(z,z,Ty)) \;\leq\; 0 \end{aligned}$$

koşulunu sağlayacak şekilde $F \in \Phi_S$ *varsa* T *dönüşümü bir tek* w *sabit noktasına sahiptir ve her* $x \in X$ *için* $(T^n x)$ *iterasyon dizisi* $w \in X$ *noktasına yakınsar.*

İspat θ *nın tanımından dolayı* $\theta(r) \leq 1$ *olduğundan her* $x \in X$ *için açıkça*

$$\theta(r)\, S(x,x,Tx) \leq S(x,x,Tx)$$

dir. Buna göre teoremin hipotezindeki koşul gereğince her $x \in X$ *için*

$$\begin{aligned} &F(S(Tx,Tx,T^2x), S(x,x,Tx), S(x,x,Tx), S(x,x,Tx),\\ &S(Tx,Tx,T^2x), S(x,x,Tx), S(x,x,T^2x), S(x,x,Tx),\\ &S(x,x,T^2x), S(Tx,Tx,Tx), S(Tx,Tx,Tx)) \;\leq\; 0 \end{aligned}$$

olur. $F \in \Phi_S$ *olup* F *fonksiyonu* $7.$ *ve* $9.$ *değişkenlere göre artmayan olduğundan*

$$\begin{aligned} &F(S(Tx,Tx,T^2x), S(x,x,Tx), S(x,x,Tx), S(x,x,Tx),\\ &S(Tx,Tx,T^2x), S(x,x,Tx), 2S(x,x,Tx)+S(Tx,Tx,T^2x),\\ &S(x,x,Tx), 2S(x,x,Tx)+S(Tx,Tx,T^2x), 0, 0) \;\leq\; 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $(F2)$ *özelliğinden dolayı her* $x \in X$ *için*

$$S\left(Tx,Tx,T^2x\right) \leq rS(x,x,Tx) \tag{5.24}$$

olmalıdır. $u \in X$ *alınarak* $u_0 = u$ *ve her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $u_n = T^n u$ *olacak şekilde* (u_n) *dizisi tanımlansın. Açıkça* $u_n = Tu_{n-1}$ *olduğundan ve* (5.24) *ifadesinden dolayı*

$$S\left(u_n, u_n, u_{n+1}\right) \leq S\left(u_{n-1}, u_{n-1}, u_n\right) \leq \cdots \leq r^n S\left(u_0, u_0, u_1\right)$$

elde edilir. O halde $S-$*metriğin özellikleri kullanılarak* $m, n \in \mathbb{N}$ *ve* $m > n$ *için*

$$\begin{aligned} S(u_n, u_n, u_m) &\leq S(u_n, u_n, u_{n+1}) + S(u_n, u_n, u_{n+1}) + S(u_m, u_m, u_{n+1}) \\ &= 2S(u_n, u_n, u_{n+1}) + S(u_m, u_m, u_{n+1}) \\ &\leq 2S(u_n, u_n, u_{n+1}) + 2S(u_{n+1}, u_{n+1}, u_{n+2}) + S(u_{n+2}, u_{n+2}, u_m) \\ &\vdots \\ &\leq 2S(u_n, u_n, u_{n+1}) + \cdots + 2S(u_{m-2}, u_{m-2}, u_{m-1}) + S(u_{m-1}, u_{m-1}, u_m) \\ &\leq 2\left(S(u_n, u_n, u_{n+1}) + \cdots + S(u_{m-1}, u_{m-1}, u_m)\right) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitsizlikte (5.24) *ifadesi kullanılırsa*

$$\begin{aligned} S(u_n, u_n, u_m) &\leq 2(r^n + r^{n+1} + \cdots + r^{m-1}) S(u_0, u_0, u_1) \\ &= 2\frac{r^m - r^n}{1-r} S(u_0, u_0, u_1) \\ &\leq 2\frac{r^m}{1-r} S(u_0, u_0, u_1) \end{aligned}$$

elde edilir. $m \to \infty$ *için işlem yapılırsa* $r \in [0, 1)$ *olduğundan dolayı*

$$S(u_n, u_n, u_m) \leq 2\frac{r^m}{1-r} S(u_0, u_0, u_1) \to 0$$

olacağından (u_n) *bir* $S-$*Cauchy dizisidir. Üstelik* (X, S) *bir tam* $S-$*metrik uzay olduğundan* (u_n) *dizisi bir* $w \in X$ *noktasına yakınsar. Buna göre her* $x \in X \setminus \{w\}$ *için*

$$S(w, w, Tx) \leq rS(w, w, x) \tag{5.25}$$

olduğu gösterilmelidir. O halde bunun için $S(w, w, x) > 0$ *ve* $(u_n) \to w$ *olduğundan dolayı* $n \geq n_0$ *koşulunu sağlayan her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$S(u_n, u_n, w) \leq \frac{S(x, x, w)}{5}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ *vardır. O halde*

$$\begin{aligned} \theta(r) S(u_n, u_n, Tu_n) &\leq S(u_n, u_n, Tu_n) = S(u_n, u_n, u_{n+1}) \\ &\leq 2S(u_n, u_n, w) + S(u_{n+1}, u_{n+1}, w) \\ &\leq \frac{3}{5} S(x, x, w) \\ &= S(x, x, w) - \frac{2}{5} S(x, x, w) \\ &\leq S(x, x, w) - 2S(u_n, u_n, w) \\ &\leq S(u_n, u_n, x) \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre hipotez gereğince $n \geq n_0$ *için*

$$\begin{aligned} F\left(S\left(Tu_n, Tu_n, Tx\right), S\left(u_n, u_n, x\right), S\left(u_n, u_n, Tu_n\right), S\left(u_n, u_n, Tu_n\right),\right. \\ S\left(x, x, Tx\right), S\left(u_n, u_n, Tu_n\right), S\left(u_n, u_n, Tx\right), S\left(u_n, u_n, Tu_n\right), \\ \left. S\left(u_n, u_n, Tx\right), S\left(x, x, Tu_n\right), S\left(x, x, Tu_n\right)\right) \quad \leq \quad 0 \end{aligned}$$

olur. Böylelikle $x \neq w$ *olacak şekildeki* $x \in X$ *için son eşitsizlikte* $n \to \infty$ *için limit alınırsa*

$$\begin{aligned} F\left(S\left(w, w, Tx\right), S\left(w, w, x\right), S\left(w, w, w\right), S\left(w, w, w\right),\right. \\ S\left(x, x, Tx\right), S\left(w, w, w\right), S\left(w, w, Tx\right), S\left(w, w, w\right), \\ \left. S\left(w, w, Tx\right), S\left(x, x, w\right), S\left(x, x, w\right)\right) \quad \leq \quad 0 \end{aligned}$$

bulunup düzenlenerek

$$\begin{aligned} F\left(S\left(w, w, Tx\right), S\left(w, w, x\right), 0, 0, 2S\left(w, w, x\right) + S\left(w, w, Tx\right),\right. \\ \left. 0, S\left(w, w, Tx\right), 0, S\left(w, w, Tx\right), S\left(w, w, x\right), S\left(w, w, x\right)\right) \quad \leq \quad 0 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu durumda F *nin sağladığı* $(F2)$ *koşulu gereğince*

$$S\left(w, w, Tx\right) \leq rS\left(w, w, x\right)$$

bulunur. Dolayısıyla (5.25) *gösterilmiş olur. Şimdi* w *nun* T *nin sabit noktası olduğunu göstermek adına her* $m \in \mathbb{N}$ *için* $T^m w \neq w$ *olduğu varsayılsın. Bu taktirde* (5.25) *gereğince her* $m \in \mathbb{N}$ *için*

$$S\left(w, w, T^{m+1}w\right) \leq r^m S\left(w, w, Tw\right)$$

elde edilir.

1.Durum $0 \leq r < \sqrt{2} - 1$ *olsun. Bu durumda açıkça* $\theta\left(r\right) = 1$ *dir. Buna göre* $n \geq 2$ *için*

$$S\left(T^n w, T^n w, Tw\right) \leq rS\left(w, w, Tw\right) \tag{5.26}$$

eşitsizliği tümevarım ilkesi yardımıyla gösterilsin. Bu taktirde $n = 2$ *için* (5.26) *ifadesi* (5.24) *gereğince sağlanır. Şimdi* $n \geq 2$ *olacak şekildeki bazı* $n \in \mathbb{N}$ *için* (5.26) *ifadesinin doğru olduğu kabul edilsin. Buna göre* $S-$*metriğin özellikleri ve üstteki kabullenme gereğince*

$$\begin{aligned} S(w, w, Tw) &\leq 2S(w, w, T^n w) + S(T^n w, T^n w, Tw) \\ &\leq 2S(w, w, T^n w) + rS(w, w, Tw) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan düzenleme ile

$$S(w, w, Tw) \leq \frac{2}{1-r} S(w, w, T^n w)$$

bulunur. Bu sebeple

$$\begin{aligned} \theta(r) S(T^n w, T^n w, T^{n+1} w) &= S(T^n w, T^n w, T^{n+1} w) \\ &\leq r^n S(Tw, Tw, w) \\ &\leq \frac{2r^n}{1-r} S(w, w, T^n w) \\ &\leq \frac{2r^2}{1-r} S(w, w, T^n w) \\ &\leq S(w, w, T^n w) = S(T^n w, T^n w, w) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Teoremin hipotezi gereğince

$$\begin{aligned} &F\left(S\left(T^{n+1}w,T^{n+1}w,Tw\right),S\left(T^{n}w,T^{n}w,w\right),S\left(T^{n}w,T^{n}w,T^{n+1}w\right),\right.\\ &S\left(T^{n}w,T^{n}w,T^{n+1}w\right),S\left(w,w,Tw\right),S\left(T^{n}w,T^{n}w,T^{n+1}w\right),S\left(T^{n}w,T^{n}w,Tw\right),\\ &\left.S\left(T^{n}w,T^{n}w,T^{n+1}w\right),S\left(T^{n}w,T^{n}w,Tw\right),S\left(w,w,T^{n+1}w\right),S\left(w,w,T^{n+1}w\right)\right) \quad \leq \quad 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadede düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned} &F\left(S\left(T^{n+1}w,T^{n+1}w,Tw\right),r^{n-1}S\left(w,w,Tw\right),r^{n}S\left(w,w,Tw\right),\right.\\ &r^{n}S\left(w,w,Tw\right),S\left(w,w,Tw\right),r^{n}S\left(w,w,Tw\right),rS\left(w,w,Tw\right),\\ &\left.r^{n}S\left(w,w,Tw\right),rS\left(w,w,Tw\right),r^{n}S\left(w,w,Tw\right),r^{n}S\left(w,w,Tw\right)\right) \quad \leq \quad 0 \end{aligned}$$

olup F nin $1.$ değişkeni hariç geri kalan tüm değişkenleri üzerinde artmayan olmasından dolayı

$$\begin{aligned} &F\left(S\left(T^{n+1}w,T^{n+1}w,Tw\right),S\left(w,w,Tw\right),S\left(w,w,Tw\right),\right.\\ &S\left(w,w,Tw\right),S\left(w,w,Tw\right),S\left(w,w,Tw\right),S\left(w,w,Tw\right),\\ &\left.S\left(w,w,Tw\right),S\left(w,w,Tw\right),S\left(w,w,Tw\right),S\left(w,w,Tw\right)\right) \quad \leq \quad 0 \end{aligned}$$

olur. O halde F nin sağladığı $(F2)$ koşulu gereğince

$$S\left(T^{n+1}w,T^{n+1}w,Tw\right)\leq rS\left(w,w,Tw\right)$$

olur. Dolayısıyla tümevarım ilkesi yardımıyla $n\geq 2$ olacak şekildeki her $n\in\mathbb{N}$ için (5.26) ifadesi gösterilmiştir. Bu halde (5.24) gereğince

$$S\left(T^{n+1}w,T^{n+1}w,Tw\right)\leq rS\left(T^{n}w,T^{n}w,w\right)\leq r^{n}S\left(Tw,Tw,w\right)$$

sonucu elde edilir. Bu ise $T^{n}w\to w$ olmasını gerektirir. Bu açıkça bir çelişkidir. Dolayısıyla $Tw=w$ olmalıdır.

2.Durum $\sqrt{2}-1\leq r<\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ olsun. Bu durumda $\theta\left(r\right)=\dfrac{1-2r}{r^{2}}$ dir. Bu durum için de yine $n\geq 2$ için (5.26) ifadesinin doğruluğu tümevarım ilkesi ile gösterilmelidir. Buna göre $n=2$ için (5.26) ifadesi (5.24) gereğince doğrudur. $n\geq 2$ olacak şekildeki bazı $n\in\mathbb{N}$ için (5.31) ifadesinin doğru olduğu kabul edilsin. Buna göre $S-$metriğin özellikleri ve kabul gereğince

$$\begin{aligned} S(Tw,Tw,w) &\leq S(w,w,T^{n}w)+2S(T^{n}w,T^{n}w,Tw)\\ &\leq S(w,w,T^{n}w)+2rS(w,w,Tw) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan düzenleme ile

$$S(w,w,Tw)\leq\frac{1}{1-2r}S(w,w,T^{n}w)$$

bulunur. Bu nedenle

$$\begin{aligned} \theta(r)S(T^{n}w,T^{n}w,T^{n+1}w) &\leq \frac{1-2r}{r^{2}}S(T^{n}w,T^{n}w,T^{n+1}w)\\ &\leq \frac{1-2r}{r^{n}}r^{n}S(w,w,Tw)\\ &\leq (1-2r)\,S(w,w,Tw)\\ &\leq S(w,w,T^{n}w) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. 1. durumdaki gibi $n \geq 2$ *olacak şekildeki her* $n \in \mathbb{N}$ *için* (5.26) *ifadesi gösterilmiş olur. Tekrar benzer şekilde* (5.24) *gereğince*

$$S\left(T^{n+1}w, T^{n+1}w, Tw\right) \leq rS\left(T^{n}w, T^{n}w, w\right) \leq r^{n}S\left(Tw, Tw, w\right)$$

olur. Bu ise $T^{n}w \to w$ *olmasını gerektirir. Aşikar olarak bir çelişki olup* $Tw = w$ *olmalıdır. 3.Durum* $\frac{1}{\sqrt{5}} \leq r < 1$ *olsun. Bu durumda* $\theta\left(r\right) = \frac{1}{1+2r}$ *dir. Burada dikkat edilirse her* $x, y \in X$ *için*

$$\theta\left(r\right) S\left(x, x, Tx\right) \leq S\left(x, x, y\right)$$

veya

$$\theta\left(r\right) S\left(Tx, Tx, T^{2}x\right) \leq S\left(Tx, Tx, y\right)$$

olmalıdır. Gerçekten

$$\theta\left(r\right) S\left(x, x, Tx\right) > S\left(x, x, y\right)$$

ve

$$\theta\left(r\right) S\left(Tx, Tx, T^{2}x\right) > S\left(Tx, Tx, y\right)$$

olsa idi $S-$*metriğin özellikleri ve son kabullenmeler gereğince*

$$\begin{aligned} S\left(x, x, Tx\right) = S\left(Tx, Tx, x\right) &\leq 2S\left(Tx, Tx, y\right) + S\left(x, x, y\right) \\ &< 2\theta\left(r\right) S\left(Tx, Tx, T^{2}x\right) + \theta\left(r\right) S\left(x, x, Tx\right) \\ &\leq \theta\left(r\right)\left(2r+1\right) S\left(x, x, Tx\right) \\ &= S\left(x, x, Tx\right) \end{aligned}$$

bulunur. Ancak bu bir çelişkidir. O halde her $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$\theta\left(r\right) S\left(u_{2n}, u_{2n}, Tu_{2n}\right) \leq S\left(u_{2n}, u_{2n}, y\right)$$

veya

$$\theta\left(r\right) S\left(u_{2n+1}, u_{2n+1}, Tu_{2n+1}\right) \leq S\left(u_{2n+1}, u_{2n+1}, y\right)$$

sağlanır. Eğer

$$\theta\left(r\right) S\left(u_{2n}, u_{2n}, Tu_{2n}\right) \leq S\left(u_{2n}, u_{2n}, w\right)$$

ifadesi sağlanırsa teoremin hipotezi gereğince

$$\begin{aligned} F\left(S\left(Tu_{2n}, Tu_{2n}, Tw\right), S\left(u_{2n}, u_{2n}, w\right), S\left(u_{2n}, u_{2n}, Tu_{2n}\right), S\left(u_{2n}, u_{2n}, Tu_{2n}\right),\right. \\ S\left(w, w, Tw\right), S\left(u_{2n}, u_{2n}, Tu_{2n}\right), S\left(u_{2n}, u_{2n}, Tw\right), S\left(u_{2n}, u_{2n}, Tu_{2n}\right) \\ \left. S\left(u_{2n}, u_{2n}, Tw\right), S\left(w, w, Tu_{2n}\right), S\left(w, w, Tu_{2n}\right)\right) &\leq 0 \end{aligned}$$

olur. Son eşitsizlikte $n \to \infty$ *için limit alınırsa*

$$\begin{aligned} F\left(S\left(w, w, Tw\right), S\left(w, w, w\right), S\left(w, w, w\right), S\left(w, w, w\right)\right. \\ S\left(w, w, Tw\right), S\left(w, w, w\right), S\left(w, w, Tw\right), S\left(w, w, w\right) \\ \left. S\left(w, w, Tw\right), S\left(w, w, w\right), S\left(w, w, w\right)\right) &\leq 0 \end{aligned}$$

olup buradan düzenleme ile

$$\begin{aligned} F\left(S\left(w,w,Tw\right),0,0,0,S\left(w,w,Tw\right),0,S\left(w,w,Tw\right),0\right. \\ \left.S\left(w,w,Tw\right),0,0\right) &\leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak bu ifade $(F3)$ *ile çelişir. Benzer şekilde eğer*

$$\theta\left(r\right)S\left(u_{2n+1},u_{2n+1},Tu_{2n+1}\right)\leq S\left(u_{2n+1},u_{2n+1},w\right)$$

ifadesi sağlanırsa teoremin hipotezi gereğince

$$\begin{aligned} F\left(S\left(Tu_{2n+1},Tu_{2n+1},Tw\right),S\left(u_{2n+1},u_{2n+1},w\right),S\left(u_{2n+1},u_{2n+1},Tu_{2n+1}\right),\right. \\ S\left(u_{2n+1},u_{2n+1},Tu_{2n+1}\right),S\left(w,w,Tw\right),S\left(u_{2n+1},u_{2n+1},Tu_{2n+1}\right), \\ S\left(u_{2n+1},u_{2n+1},Tw\right),S\left(u_{2n+1},u_{2n+1},Tu_{2n+1}\right),S\left(u_{2n+1},u_{2n+1},Tw\right), \\ \left.S\left(w,w,Tu_{2n+1}\right),S\left(w,w,Tu_{2n+1}\right)\right) &\leq 0 \end{aligned}$$

olur ve $n\to\infty$ *için limit alınırsa*

$$\begin{aligned} F\left(S\left(w,w,Tw\right),S\left(w,w,w\right),S\left(w,w,w\right),S\left(w,w,w\right)\right. \\ S\left(w,w,Tw\right),S\left(w,w,w\right),S\left(w,w,Tw\right),S\left(w,w,w\right) \\ \left.S\left(w,w,Tw\right),S\left(w,w,w\right),S\left(w,w,w\right)\right) &\leq 0 \end{aligned}$$

olup buradan düzenleme ile

$$\begin{aligned} F\left(S\left(w,w,Tw\right),0,0,0,S\left(w,w,Tw\right),0,S\left(w,w,Tw\right),0\right. \\ \left.S\left(w,w,Tw\right),0,0\right) &\leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Fakat bu ifade $(F3)$ *ile çelişir. Açıkça* $Tw=w$ *olmalıdır. Sonuç olarak her üç durumda da* $T^{m}w=w$ *olduğu gösterilmiştir.* $(T^{n}w)$ *bir* $S-$*Cauchy dizisi olduğundan* $Tw=w$ *dur ve* w, T *dönüşümünün sabit noktasıdır.* T *dönüşümünün sabit noktasının tek olduğunu göstermek için* T *nin birbirinden farklı iki sabit noktasının* w *ve* v *olduğu varsayılsın. O halde açıkça* $w\neq v$ *olduğundan* (5.25) *eşitsizliği gereğince*

$$S\left(w,w,v\right)=S\left(w,w,Tv\right)\leq rS\left(w,w,v\right)$$

olup $r<1$ *olduğundan bu bir çelişkidir. Dolayısıyla* T *dönüşümünün sabit noktası tektir.*

6. A-METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİNİN SUZUKİ TİP GENELLEŞTİRİLMİŞLERİ

Bu bölümde $A-$metrik uzaylarda alışılmış metrik uzaylarda iyi bilinen Banach, Kannan, Chatterjea, Ćirić, Reich, Hardy-Rogers gibi sabit nokta teoremlerinin $A-$metrik uzaydaki versiyonlarının Suzuki 2008 çalışmasında tanıttığı türden genellemeleri verilecektir. Önceki iki bölümde olduğu gibi bölüm sonunda sabit nokta teoremlerini genelleyen kapalı bağıntının Suzuki tip genellemesi verilerek bölüm sonlandırılacaktır.

Bu bölümde Abbas vd. 2015 yılında tanıttığı ve $S-$metrik uzay kavramını genelleyen $A-$metrik uzaylarda çalışılacaktır. Hatırlanacağı üzere $A-$metrik kavramı $X \neq \varnothing$ olmak üzere $X \times X \times \cdots \times X$ kümesi üzerinde tanımlanır. Bu noktada kısalığın hatırına $A(x, ..., x, y)$ ifadesi $A(\boldsymbol{x}; y)$ şeklinde gösterilecektir.

Teorem 6.1 *(X, A) bir tam $A-$metrik uzay ve $T{:}X \to X$ dönüşüm olsun. $\theta{:}[0,1) \to \left(\frac{1}{n}, 1\right]$ artmayan fonksiyonu*

$$\theta(r) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r < \dfrac{-(n-1)+\sqrt{(n-1)^2+4}}{2} \text{ ise} \\ \dfrac{1-(n-1)r}{r^2}, & \dfrac{-(n-1)+\sqrt{(n-1)^2+4}}{2} \leq r < \dfrac{1}{\sqrt{(n-1)^2+1}} \text{ ise} \\ \dfrac{1}{1+(n-1)r}, & \dfrac{1}{\sqrt{(n-1)^2+1}} \leq r < 1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu taktirde her $x_1, x_2, ..., x_n \in X$

$$\theta(r)A(x_1, x_2, ..., Tx_1) \leq A(x_1, x_2, ..., x_n) \Longrightarrow A(Tx_1, Tx_2, ..., Tx_n) \leq rA(x_1, x_2, ..., x_n)$$

koşulunu sağlayacak şekilde $r \in [0,1)$ varsa T dönüşümünün bir tek $w \in X$ sabit noktası vardır.

İspat *θ nın tanımından dolayı $\theta(r) \leq 1$ olduğundan her $x \in X$ için açıkça*

$$\theta(r)A(\boldsymbol{x}; Tx) \leq A(\boldsymbol{x}; Tx)$$

dir. Buna göre teoremin hipotezindeki koşul gereğince her $x \in X$ *için*

$$A(\boldsymbol{Tx}; T^2x) \leq rA(\boldsymbol{x}; Tx) \tag{6.1}$$

elde edilir. $u \in X$ *alınarak* $u_0 = u$ *ve her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $u_n = T^n u$ *olacak şekilde* (u_n) *dizisi tanımlansın. Açıkça* $u_n = Tu_{n-1}$ *olduğundan ve* (6.1) *ifadesinden dolayı*

$$A\left(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}\right) \leq rA\left(\boldsymbol{u_{n-1}}; u_n\right) \leq r^2 A\left(\boldsymbol{u_{n-2}}; u_{n-1}\right) \leq \cdots \leq r^n A\left(\boldsymbol{u_0}; u_1\right)$$

elde edilir. O halde $A-$*metriğin özellikleri kullanılarak* $m > n$ *için*

$$\begin{aligned}
A(\boldsymbol{u_n}; u_m) &\leq A\left(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}\right) + \cdots + A\left(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}\right) + A\left(\boldsymbol{u_m}; u_{n+1}\right) \\
&= (n-1)\, A\left(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}\right) + A\left(\boldsymbol{u_m}; u_{n+1}\right) \\
&\leq (n-1)\, A\left(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}\right) + (n-1)\, A\left(\boldsymbol{u_{n+1}}; u_{n+2}\right) + A\left(\boldsymbol{u_{n+2}}; u_m\right) \\
&\vdots \\
&\leq (n-1)\, A\left(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}\right) + \cdots + (n-1)\, A\left(\boldsymbol{u_{m-2}}; u_{m-1}\right) + A\left(\boldsymbol{u_{m-1}}; u_m\right) \\
&\leq (n-1)\left[A\left(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}\right) + \cdots + A\left(\boldsymbol{u_{m-1}}; u_m\right)\right]
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitsizlikte (6.1) *ifadesi kullanılırsa*

$$\begin{aligned}
A(\boldsymbol{u_n}; u_m) &\leq (n-1)\left(r^n + \cdots + r^{m-1}\right) A\left(\boldsymbol{u_0}; u_1\right) \\
&\leq (n-1)\, \frac{r^m - r^n}{1-r} A\left(\boldsymbol{u_0}; u_1\right) \\
&\leq (n-1)\, \frac{r^m}{1-r} A\left(\boldsymbol{u_0}; u_1\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $m \to \infty$ *için işlem yapılırsa* $r \in [0,1)$ *olduğundan dolayı*

$$A(\boldsymbol{u_n}; u_m) \leq (n-1)\, \frac{r^m}{1-r} A\left(\boldsymbol{u_0}; u_1\right) \to 0$$

olacağından (u_n) *bir* $A-$*Cauchy dizisidir. Ayrıca* (X, A) *bir tam metrik uzay olduğundan dolayı* (u_n) *dizisi bir* $w \in X$ *noktasına yakınsar. Buna göre her* $x \in X \setminus \{w\}$ *için*

$$A\left(\boldsymbol{w}; Tx\right) \leq rA\left(\boldsymbol{w}; x\right) \tag{6.2}$$

olduğu gösterilmelidir. O halde bunun için $A\left(\boldsymbol{w}; x\right) > 0$ *ve* $(u_n) \to w$ *olduğundan dolayı* $n \geq n_0$ *koşulunu sağlayan her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$A\left(\boldsymbol{u_n}; w\right) \leq \frac{A\left(\boldsymbol{x}; w\right)}{2n-1}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ *vardır. O halde*

$$\begin{aligned}
\theta\left(r\right) A(\boldsymbol{u_n}; Tu_n) &\leq A(\boldsymbol{u_n}; Tu_n) = A(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}) \\
&\leq (n-1)\, A\left(\boldsymbol{u_n}; w\right) + A\left(\boldsymbol{u_{n+1}}; w\right) \\
&\leq \frac{n}{2n-1} A\left(\boldsymbol{x}; w\right) \\
&= A\left(\boldsymbol{x}; w\right) - \frac{n-1}{2n-1} A\left(\boldsymbol{x}; w\right) \\
&\leq A\left(\boldsymbol{x}; w\right) - (n-1)\, A\left(\boldsymbol{u_n}; w\right) \\
&\leq A\left(\boldsymbol{u_n}; x\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre hipotez gereğince $n \geq n_0$ *için*

$$A\left(\boldsymbol{u_{n+1}}; Tx\right) \leq rA\left(\boldsymbol{u_n}; x\right)$$

olur. Bu aşamada son elde edilen eşitsizlikte $n \to \infty$ *için limit alınırsa*

$$A\left(\boldsymbol{w}; Tx\right) \leq rA\left(\boldsymbol{w}; x\right)$$

sonucuna ulaşılır. Doğal olarak (6.2) *ifadesi gösterilmiş olur. Şimdi her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$A\left(\boldsymbol{w}; T^n w\right) \leq A\left(\boldsymbol{w}; Tw\right) \tag{6.3}$$

olduğu tümevarım ilkesi yardımıyla gösterilsin. Bu durumda $n = 1$ *için eşitsizliğin doğruluğu aşikardır. Şimdi bazı* $n \in \mathbb{N}$ *için* (6.3) *eşitsizliğinin doğru olduğu kabul edilsin. Buna göre* $n + 1$ *için eşitsizliğin doğru olduğu gösterilmelidir. O halde* $T^n w = w$ *ise*

$$A\left(\boldsymbol{w}; T^{n+1} w\right) \leq A\left(\boldsymbol{w}; Tw\right)$$

olur. $T^n w \neq w$ *ise* (6.2) *gereğince*

$$A\left(\boldsymbol{w}; T^{n+1} w\right) \leq rA\left(\boldsymbol{w}; T^n w\right) \leq rA\left(\boldsymbol{w}; Tw\right) < A\left(\boldsymbol{w}; Tw\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ *için tümevarım ilkesi kullanılarak* (6.3) *eşitsizliğinin doğru olduğu gösterilmiş olur. Bu aşamada sabit noktanın varlığını göstermek adına* $Tw \neq w$ *olduğu varsayılsın. Bu taktirde her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$A(\boldsymbol{Tw}; T^n w) \leq rA\left(\boldsymbol{w}; Tw\right) \tag{6.4}$$

olduğu tümevarım ilkesi yardımıyla gösterilsin. Buna göre $n = 1$ *için ifadenin doğruluğu aşikardır. Ayrıca* $n = 2$ *için ifadenin doğru olduğu* (6.1) *gereğince görülür. Şimdi* $n \geq 2$ *olacak şekildeki bazı* $n \in \mathbb{N}$ *için* (6.4) *ifadesinin doğru olduğu kabul edilsin. Buna göre A-metriğin özellikleri kullanılarak ve üstteki kabullenme gereğince*

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{Tw}; w) = A\left(\boldsymbol{w}; Tw\right) &\leq A\left(\boldsymbol{w}; T^n w\right) + (n-1)\, A(\boldsymbol{Tw}; T^n w) \\ &\leq A\left(\boldsymbol{w}; T^n w\right) + (n-1)\, rA\left(\boldsymbol{w}; T^n w\right) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan düzenleme ile

$$\left[1 - (n-1)\, r\right] A\left(\boldsymbol{w}; Tw\right) \leq A\left(\boldsymbol{w}; T^n w\right) \tag{6.5}$$

elde edilir. Bu noktada r *nin* $0 \leq r < \dfrac{1}{\sqrt{(n-1)^2 + 1}}$ *ve* $\dfrac{1}{\sqrt{(n-1)^2 + 1}} \leq r < 1$ *olacak şekildeki değer aralıkları için 2 durumda inceleme yapılacaktır.*

1. Durum $0 \leq r < \dfrac{1}{\sqrt{(n-1)^2 + 1}}$ *olsun. Bu durumda açıkça* $\theta\left(r\right) \leq \dfrac{1 - (n-1)r}{r^2}$ *dir. O halde*

$$\begin{aligned} \theta\left(r\right) A\left(\boldsymbol{T^n w}; T^{n+1} w\right) &\leq \frac{1 - (n-1)r}{r^2} A\left(\boldsymbol{T^n w}; T^{n+1} w\right) \\ &\leq \frac{1 - (n-1)r}{r^n} A\left(\boldsymbol{T^n w}; T^{n+1} w\right) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda (6.5) *gereğince*

$$\begin{aligned}\theta(r)\,A(\boldsymbol{T^n w};T^{n+1}w) &\leq \frac{1-(n-1)r}{r^2}A(\boldsymbol{T^n w};T^{n+1}w)\\ &\vdots\\ &\leq \frac{1-(n-1)r}{r^n}r^nA(\boldsymbol{w};Tw)\\ &= [1-(n-1)r]\,A(\boldsymbol{w};Tw)\\ &\leq A(\boldsymbol{w};T^nw)\\ &= A(\boldsymbol{T^n w};w)\end{aligned}$$

elde edilir. Teoremin hipotezi gereğince

$$A\left(\boldsymbol{T^{n+1}w};Tw\right)\leq rA(\boldsymbol{T^n w};w)$$

sonucuna ulaşılır. Bu noktada (6.3) *ifadesi kullanılırsa*

$$A\left(\boldsymbol{Tw};T^{n+1}w\right)\leq rA(\boldsymbol{w};T^nw)\leq rA(\boldsymbol{w};Tw)$$

bulunur. Böylelikle her $n\in\mathbb{N}$ *için* (6.4) *ifadesinin doğru olduğu gösterilmiş olur. Bu halde* $Tw\neq w$ *olduğundan* (6.4) *ifadesi gereğince* $T^nw\neq w$ *olur. Aksi taktirde* $T^nw=w$ *olsa idi*

$$A(\boldsymbol{T^n w};Tw)\leq rA(\boldsymbol{w};Tw)\Longrightarrow A(\boldsymbol{w};Tw)\leq rA(\boldsymbol{w};Tw)<A(\boldsymbol{w};Tw)$$

olması gerekirdi ki bu bir çelişkidir. Bu nedenle (6.2) *ifadesi gereğince*

$$A\left(\boldsymbol{w};T^{n+1}w\right)\leq rA(\boldsymbol{w};T^nw)\leq\cdots r^nA(\boldsymbol{w};Tw)$$

sonucuna ulaşılır. O halde son ifadede $n\to\infty$ *için limit alınırsa*

$$\lim_{n\to\infty}A\left(\boldsymbol{w};T^{n+1}w\right)=0$$

olur ki bu ise $T^nw\to w$ *olmasını gerektirir. Bu sebeple ve* (6.4) *gereğince*

$$\begin{aligned}A(\boldsymbol{Tw};w) &= \lim_{n\to\infty}A(\boldsymbol{Tw};T^nw)\\ &\leq rA(\boldsymbol{w};Tw)\\ &= rA(\boldsymbol{Tw};w)\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$A(\boldsymbol{Tw};w)=0$$

olur. Bu ise açıkça varsayım ile çelişir. Doğal olarak $Tw=w$ *olmalıdır.*
2.Durum; $\dfrac{1}{\sqrt{(n-1)^2+1}}\leq r<1$ *olsun. Bu durumd açıkça* $\theta(r)=\dfrac{1}{1+(n-1)\,r}$ *dir. Bu halde her* $j\in\mathbb{N}$ *için*

$$\theta(r)\,A(\boldsymbol{u_{nj}};Tu_{nj})\leq A(\boldsymbol{u_{nj}};w)$$

olacak şekilde (n) *dizisinin bir* (n_j) *alt dizisinin var olduğu gösterilmelidir. Şimdi her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$\frac{1}{1+(n-1)\,r} A\left(\boldsymbol{u_n}; Tu_n\right) > A\left(\boldsymbol{u_n}; w\right)$$

olduğu varsayılsın. Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$\frac{1}{1+(n-1)\,r} A\left(\boldsymbol{u_{2n}}; Tu_{2n}\right) > A\left(\boldsymbol{u_{2n}}; w\right)$$

ve

$$\frac{1}{1+(n-1)\,r} A\left(\boldsymbol{u_{2n+1}}; Tu_{2n+1}\right) > A\left(\boldsymbol{u_{2n+1}}; w\right)$$

ifadeleri sağlanır. Bu taktirde

$$\begin{aligned} A\left(\boldsymbol{u_{2n+1}}; u_{2n}\right) &\leq (n-1)\, A\left(\boldsymbol{u_{2n+1}}; w\right) + A\left(\boldsymbol{u_{2n}}; w\right) \\ &< \frac{(n-1)}{1+(n-1)\,r} A\left(\boldsymbol{u_{2n+1}}; Tu_{2n+1}\right) + \frac{1}{1+(n-1)\,r} A\left(\boldsymbol{u_{2n}}; Tu_{2n}\right) \\ &\leq \frac{(n-1)\,r}{1+(n-1)\,r} A\left(\boldsymbol{u_{2n}}; Tu_{2n}\right) + \frac{1}{1+(n-1)\,r} A\left(\boldsymbol{u_{2n}}; Tu_{2n}\right) \\ &= A\left(\boldsymbol{u_{2n}}; Tu_{2n}\right) = A\left(\boldsymbol{u_{2n+1}}; u_{2n}\right) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Ancak bu açıkça bir çelişkidir. Bu taktirde her $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$\theta\left(r\right) A\left(\boldsymbol{u_{2n+1}}; Tu_{2n+1}\right) \leq A\left(\boldsymbol{u_{2n+1}}; w\right)$$

ve

$$\theta\left(r\right) A\left(\boldsymbol{u_{2n}}; Tu_{2n}\right) \leq A\left(\boldsymbol{u_{2n}}; w\right)$$

ifadeleri sağlanır. Buna göre

$$\theta\left(r\right) A\left(\boldsymbol{u_{2n+1}}; Tu_{2n+1}\right) \leq A\left(\boldsymbol{u_{2n+1}}; w\right)$$

ifadesi sağlanıyor ise teoremin hipotezi gereğince

$$A\left(\boldsymbol{u_{2n+1}}; Tw\right) = A\left(\boldsymbol{Tu_{2n}}; Tw\right) \leq rA\left(\boldsymbol{u_{2n}}; w\right)$$

olur. Son eşitsizlikte $n \to \infty$ *için limit alınırsa*

$$A\left(\boldsymbol{w}; Tw\right) \leq 0$$

elde edilir. Bu ise ancak $Tw = w$ *olması ile mümkündür. Benzer şekilde*

$$\theta\left(r\right) A\left(\boldsymbol{u_{2n}}; Tu_{2n}\right) \leq A\left(\boldsymbol{u_{2n}}; w\right)$$

ifadesi sağlanıyor ise $Tw = w$ *dir. Böylelikle her iki durumda da* $w \in X$ *noktasının* T *dönüşümünün sabit noktası olduğu gösterilmiş olur. Yani* w*,* T *dönüşümünün sabit noktasıdır.* T *dönüşümünün sabit noktasının tek olduğunu göstermek için* T *nin birbirinden farklı iki*

sabit noktasının w ve v olduğu varsayılsın. O halde teoremin hipotezinde $x_1, x_2, ..., x_{n-1} = w$ ve $x_n = v$ alınırsa

$$\theta(r) A(\boldsymbol{w}; Tw) \leq A(\boldsymbol{w}; v) \Longrightarrow A(\boldsymbol{Tw}; Tv) \leq rA(\boldsymbol{w}; v)$$

elde edilir. Böylece

$$A(\boldsymbol{w}; v) \leq rA(\boldsymbol{w}; v) < A(\boldsymbol{w}; v)$$

olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $w = v$ olmalıdır. Yani T nin sabit noktası tektir.

Örnek 6.1 *Örnek 3.4 de ilk kez bu tezde ifade edilen herhangi bir alışılmış metrik tarafından üretilemeyen $A-$metrik ve bu $A-$metrik ile üretilen $A-$metrik uzay ele alınsın. Yani $X = [0, \infty)$ olmak üzere, $A : X \times X \times ... \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu her $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ için*

$$A(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 0, & x_1 = x_2 = \cdots = x_n \text{ ise} \\ \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}, & diğer\ durumlarda \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre (X, A) bir tam $A-$metrik uzaydır. Şimdi bu tam $A-$metrik uzayda $T : X \to X$ dönüşümü her $x \in X$ için

$$Tx = \frac{x}{3}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu taktirde açıkça $\theta(r) \leq 1$ olduğundan

$$\theta(r) \max\left\{x_1, ..., x_{n-1}, \frac{x_1}{3}\right\} \leq \max\{x_1, ..., x_{n-1}, x_n\}$$

olup açıkça

$$\theta(r) A(x_1, ..., x_{n-1}, Tx_1) \leq A(x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$$

dir. Diğer yandan her $x_1, x_2, ..., x_n \in [0, \infty]$ ve $r = \left[\frac{1}{3}, 1\right)$ için

$$\max\left\{\frac{x_1}{3}, \frac{x_2}{3}, ..., \frac{x_n}{3}\right\} \leq r \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

olup bu ise açıkça

$$A(Tx_1, Tx_2, ..., Tx_n) \leq rA(x_1, x_2, ..., x_n)$$

elde edilir. Dolayısıyla Teorem 6.1 in koşulları sağlanmaktadır. O halde T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

Örnek 6.2 *(X, A) Örnek 3.3 de verilen $A-$metrik uzay olsun. Buna göre (X, A) bir tam $A-$metrik uzay olup bu uzayda $T : X \to X$ dönüşümü*

$$Tx = \frac{x}{n}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre her $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *için açıkça* $A-$*metrik uzaydaki Banach büzülme koşulu*

$$A(Tx_1, Tx_2, ..., Tx_n) \leq rA(x_1, x_2, ..., x_n)$$

olup açıkça $r = \left[\frac{1}{n}, 1\right)$ *için*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}|x_i - x_j| \leq r\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}|x_i - x_j|$$

ifadesi sağlanır. Doğal olarak bu T *dönüşümü* $A-$*metrik uzayda bir Banach büzülme dönüşümüdür. Fakat açık bir şekilde*

$$\theta(r)\, A(x_1, ..., x_{n-1}, Tx_1) \leq A(x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$$

ifadesi $x_1 = x_2 = ... = x_n$ *için*

$$\theta(r)\frac{(n-1)^2}{n}x_1 \leq 0$$

olacağından sağlanmaz. Bu nedenle bu dönüşüm Teorem 6.1 in koşullarını sağlamaz.

Aşağıdaki yardımcı teorem bölümün teoremlerinde kullanılacak önemli bir özelliği ifade etmektedir.

Yardımcı Teorem 6.1 (X, A) *bir* $A-$*metrik uzay ve* $T : X \to X$ *dönüşüm olsun. Ayrıca* $x \in X$ *ve bir* $r \in [0, 1)$ *için*

$$A(\boldsymbol{Tx}; T^2x) \leq rA(\boldsymbol{x}; Tx)$$

koşulu sağlansın. Bu taktirde $y \in X$ *için*

$$\frac{1}{1+(n-1)\,r}A(\boldsymbol{x}; Tx) \leq A(\boldsymbol{x}; y)$$

veya

$$\frac{1}{1+(n-1)\,r}A(\boldsymbol{Tx}; T^2x) \leq A(\boldsymbol{Tx}; y)$$

koşullarından biri sağlanır.

İspat *Varsayalım;*

$$\frac{1}{1+(n-1)\,r}A(\boldsymbol{x}; Tx) > A(\boldsymbol{x}; y)$$

ve

$$\frac{1}{1+(n-1)\,r}A(\boldsymbol{Tx}; T^2x) > AA(\boldsymbol{Tx}; y)$$

olduğu varsayılsın. O halde $A-$metriğin özellikleri ve kabul edilen eşitsizlikler kullanılarak

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{T}\boldsymbol{x};x) &\leq (n-1)\,A(\boldsymbol{T}\boldsymbol{x};y)+A(\boldsymbol{x};y) \\ &< \frac{n-1}{1+(n-1)\,r}A(\boldsymbol{T}\boldsymbol{x};T^2x)+\frac{1}{1+(n-1)\,r}A(\boldsymbol{x};Tx) \\ &< \frac{(n-1)\,r}{1+(n-1)\,r}A(\boldsymbol{x};Tx)+\frac{1}{1+(n-1)\,r}A(\boldsymbol{x};Tx) \\ &< \frac{1+(n-1)\,r}{1+(n-1)\,r}A(\boldsymbol{x};Tx) \\ &< A(\boldsymbol{x};Tx) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Ancak açıkça bu bir çelişkidir. Doğal olarak varsayımlar yanlıştır. O halde yardımcı teoremin hipotezindeki koşullar gerçeklenmiş olur.

Sıradaki iki teorem alışılmış metrik uzaylarda Kannan ve genelleştirilmiş Kannan (veya Bianchini) sabit nokta teoremi olarak bilinen teoremlerin $A-$metrik uzay versiyonlarının Suzuki tip genellemelerini ifade etmektedir.

Teorem 6.2 *(X,A) bir tam $A-$metrik uzay ve $T{:}X \to X$ dönüşüm olsun. $\theta{:}[0,1) \to \left(\frac{1}{n},1\right]$ artmayan fonksiyonu*

$$\theta(r)=\begin{cases} 1, & 0\leq r<\dfrac{-(n-2)+\sqrt{5n^2-8n+4}}{2n} \text{ ise} \\ \dfrac{1}{1+(n-1)\,r}, & \dfrac{-(n-2)+\sqrt{5n^2-8n+4}}{2n}\leq r<1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın ve ayrıca $r=\dfrac{(n-1)\,a}{1-a}$ olsun. Bu taktirde $x_1,x_2,...,x_n\in X$ için

$$\theta(r)\,A(x_1,x_2,...,Tx_1)\leq A(x_1,x_2,...,x_n)\Longrightarrow$$

$$A(Tx_1,Tx_2,...,Tx_n)\leq a\left(A(\boldsymbol{x_1};Tx_1)+A(\boldsymbol{x_2};Tx_2)+\cdots+A(\boldsymbol{x_n};Tx_n)\right)$$

koşulunu sağlayacak şekilde $a\in\left[0,\dfrac{1}{n}\right)$ varsa T dönüşümü bir tek $w\in X$ sabit noktasına yakınsar ve her $x\in X$ için (T^nx) iterasyon dizisi $w\in X$ noktasına yakınsar.

İspat *θ nın tanımından dolayı $\theta(r)\leq 1$ olduğundan her $x\in X$ için açıkça*

$$\theta(r)A(\boldsymbol{x};Tx)\leq A(\boldsymbol{x};Tx)$$

dir. Buna göre teoremin hipotezindeki koşul gereğince her $x\in X$ için

$$A(\boldsymbol{T}\boldsymbol{x};T^2x) \leq (n-1)\,aA(\boldsymbol{x};Tx)+aA(\boldsymbol{T}\boldsymbol{x};T^2x)$$

elde edilir ve buradan düzenleme ile $r = \dfrac{(n-1)\,a}{1-a}$ *olmak üzere*

$$A(\boldsymbol{Tx}; T^2x) \leq rA(\boldsymbol{x}; Tx) \tag{6.6}$$

bulunur. $u \in X$ *alınarak* $u_0 = u$ *ve her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $u_n = T^n u$ *olacak şekilde* (u_n) *dizisi tanımlansın. Açıkça* $u_n = Tu_{n-1}$ *olduğundan ve* (6.6) *ifadesinden dolayı*

$$A\left(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}\right) \leq rA\left(\boldsymbol{u_{n-1}}; u_n\right) \leq r^2 A\left(\boldsymbol{u_{n-2}}; u_{n-1}\right) \leq \cdots \leq r^n A\left(\boldsymbol{u_0}; u_1\right)$$

elde edilir. O halde $A-$*metriğin özellikleri kullanılarak* $m > n$ *için*

$$\begin{aligned}
A(\boldsymbol{u_n}; u_m) &\leq A\left(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}\right) + \cdots + A\left(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}\right) + A\left(\boldsymbol{u_m}; u_{n+1}\right) \\
&= (n-1)\,A\left(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}\right) + A\left(\boldsymbol{u_m}; u_{n+1}\right) \\
&\leq (n-1)\,A\left(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}\right) + (n-1)\,A\left(\boldsymbol{u_{n+1}}; u_{n+2}\right) + A\left(\boldsymbol{u_{n+2}}; u_m\right) \\
&\vdots \\
&\leq (n-1)\,A\left(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}\right) + \cdots + (n-1)\,A\left(\boldsymbol{u_{m-2}}; u_{m-1}\right) + A\left(\boldsymbol{u_{m-1}}; u_m\right) \\
&\leq (n-1)\left[A\left(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}\right) + \cdots + A\left(\boldsymbol{u_{m-1}}; u_m\right)\right]
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitsizlikte (6.6) *ifadesi kullanılırsa*

$$\begin{aligned}
A(\boldsymbol{u_n}; u_m) &\leq (n-1)\left(r^n + \cdots + r^{m-1}\right) A\left(\boldsymbol{u_0}; u_1\right) \\
&\leq (n-1)\,\frac{r^m - r^n}{1-r} A\left(\boldsymbol{u_0}; u_1\right) \\
&\leq (n-1)\,\frac{r^m}{1-r} A\left(\boldsymbol{u_0}; u_1\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $m \to \infty$ *için işlem yapılırsa* $r \in [0,1)$ *olduğundan dolayı*

$$A(\boldsymbol{u_n}; u_m) \leq (n-1)\,\frac{r^m}{1-r} A\left(\boldsymbol{u_0}; u_1\right) \to 0$$

olacağından (u_n) *bir* $A-$*Cauchy dizisidir. Ayrıca* (X, A) *bir tam metrik uzay olduğundan dolayı* (u_n) *dizisi bir* $w \in X$ *noktasına yakınsar. Buna göre her* $x \in X \setminus \{w\}$ *için*

$$A\left(\boldsymbol{w}; Tx\right) \leq aA\left(\boldsymbol{x}; Tx\right) \tag{6.7}$$

olduğu gösterilmelidir. O halde bunun için $A\left(\boldsymbol{w}; x\right) > 0$ *ve* $(u_n) \to w$ *olduğundan dolayı* $n \geq n_0$ *koşulunu sağlayan her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$A\left(\boldsymbol{u_n}; w\right) \leq \frac{A\left(\boldsymbol{x}; w\right)}{2n-1}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ *vardır. O halde*

$$\begin{aligned}
\theta\left(r\right) A(\boldsymbol{u_n}; Tu_n) &\leq A(\boldsymbol{u_n}; Tu_n) = A(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}) \\
&\leq (n-1)\,A\left(\boldsymbol{u_n}; w\right) + A\left(\boldsymbol{u_{n+1}}; w\right) \\
&\leq \frac{n}{2n-1} A\left(\boldsymbol{x}; w\right) \\
&= A\left(\boldsymbol{x}; w\right) - \frac{n-1}{2n-1} A\left(\boldsymbol{x}; w\right) \\
&\leq A\left(\boldsymbol{x}; w\right) - (n-1)\,A\left(\boldsymbol{u_n}; w\right) \\
&\leq A\left(\boldsymbol{u_n}; x\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre hipotez gereğince $n \geq n_0$ *için*

$$A(\boldsymbol{Tu_n}; Tx) \leq (n-1)\, aA(\boldsymbol{u_n}; Tu_n) + aA(\boldsymbol{x}; Tx)$$

olur. Böylelikle $x \neq w$ *olacak şekildeki* $x \in X$ *için son eşitsizlikte* $n \to \infty$ *için limit alınırsa*

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{w}; Tx) &= \lim_{n\to\infty} A(\boldsymbol{u_{n+1}}; Tx) \\ &= \lim_{n\to\infty} A(\boldsymbol{Tu_n}; Tx) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \left((n-1)\, aA(\boldsymbol{u_n}; Tu_n) + aA(\boldsymbol{x}; Tx)\right) \\ &\leq aA(\boldsymbol{x}; Tx) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla (6.7) *ifadesi gösterilmiş olur. Şimdi* w *nun* T *dönüşümünün sabit noktası olduğu* $0 \leq r < \dfrac{n-1}{n}$ *ve* $\dfrac{n-1}{n} \leq r < 1$ *olmak üzere iki durum göz önüne alınarak gösterilecektir. Buna göre ilk durum olarak* $0 \leq r < \dfrac{n-1}{n}$ *alınsın ve bir çelişki elde etmek adına* $Tw \neq w$ *olduğu varsayılsın. O halde* (6.6) *gereğince*

$$A(\boldsymbol{w}; T^2 w) \leq aA(\boldsymbol{Tw}; T^2 w) \leq arA(\boldsymbol{w}; Tw)$$

elde edilir. Böylelikle $A-$*metriğin özellikleri ve üstteki eşitsizlik ve* $r = \dfrac{(n-1)\, a}{1-a}$ *ifadesi kullanılarak*

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{w}; Tz) &\leq (n-1)\, A(\boldsymbol{w}; T^2 w) + A(\boldsymbol{Tw}; T^2 w) \\ &\leq (n-1)\, arA(\boldsymbol{w}; Tw) + rA(\boldsymbol{w}; Tw) \\ &= \frac{(n-1)\, r + nr^2}{(n-1)+r} A(\boldsymbol{w}; Tw) \\ &< \frac{(n-1)+r}{(n-1)+r} A(\boldsymbol{w}; Tw) \\ &= A(\boldsymbol{w}; Tw) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Ancak açıkça bu bir çelişkidir. O halde $Tw = w$ *olmalıdır.*
$\dfrac{n-1}{n} \leq r < 1$ *olması durumunda Yardımcı Teorem 6.1 gereğince her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$\theta(r) A(\boldsymbol{u_{2n}}; u_{2n+1}) \leq A(\boldsymbol{u_{2n}}; w)$$

veya

$$\theta(r) A(\boldsymbol{u_{2n+1}}; u_{2n+2}) \leq A(\boldsymbol{u_{2n+1}}; w)$$

olmalıdır. Böylelikle her $j \in \mathbb{N}$ *için*

$$\theta(r) A(\boldsymbol{u_{n_j}}; u_{n_j+1}) \leq A(\boldsymbol{u_{n_j}}; w)$$

olacak şekilde (n) *dizisi bir* (n_j) *alt dizisi vardır. Varsayım gereğince*

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{w}; Tw) &= \lim_{j\to\infty} A(\boldsymbol{u_{n_j+1}}; Tw) \\ &\leq \lim_{j\to\infty} \left((n-1)\, aA(\boldsymbol{u_{n_j}}; u_{n_j+1}) + aA(\boldsymbol{w}; Tw)\right) \\ &\leq aA(\boldsymbol{w}; Tw) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak aşikar olarak $a < \frac{1}{n}$ *olduğundan* $Tw = w$ *olmalıdır. Sonuç olarak her iki durumda da* $Tw = w$ *elde edilir. Yani* w*,* T *dönüşümünün sabit noktasıdır.* T *dönüşümünün sabit noktasının tek olduğunu göstermek için* T *nin birbirinden farklı iki sabit noktasının* w *ve* v *olduğu varsayılsın. O halde açıkça* $w \neq v$ *olduğundan* (6.7) *gereğince*

$$A(\boldsymbol{w}; Tv) \leq rA(\boldsymbol{v}; Tv) = rA(\boldsymbol{v}; v) = 0$$

elde edilir. Ancak bu bir çelişkdir. O halde T *dönüşümünün sabit noktası tektir.*

Örnek 6.3 $X = [0, \infty)$ *olmak üzere,* $A : X \times X \times ... \times X \to \mathbb{R}^+$ *fonksiyonu her* $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *için*

$$A(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 0, & x_1 = x_2 = \cdots = x_n \text{ ise} \\ \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}, & diğer\ durumlarda \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre (X, A) *bir tam* $A-$*metrik uzaydır. Şimdi bu tam* $A-$*metrik uzayda* $T : X \to X$ *dönüşümü her* $x \in X$ *için*

$$Tx = \frac{x}{3}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu taktirde açıkça $\theta(r) \leq 1$ *olduğundan*

$$\theta(r) \max\left\{x_1, x_2, ..., \frac{x_1}{3}\right\} \leq \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

olup açıkça

$$\theta(r) A(x_1, ..., x_{n-1}, Tx_1) \leq A(x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$$

dir. Diğer yandan her $x_1, x_2, ..., x_n \in [0, \infty]$ *ve* $r = \left[\frac{1}{3n}, \frac{1}{n}\right)$ *için*

$$\max\left\{\frac{x_1}{3}, \frac{x_2}{3}, ..., \frac{x_n}{3}\right\} \leq a(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

olup bu ise açıkça

$$A(Tx_1, Tx_2, ..., Tx_n) \leq a(A(\boldsymbol{x_1}; Tx_1) + A(\boldsymbol{x_2}; Tx_2) + \cdots + A(\boldsymbol{x_n}; Tx_n))$$

elde edilir. Dolayısıyla Teorem 6.2 nin koşulları sağlanmaktadır. O halde T *dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.*

Örnek 6.4 (X, A) *Örnek 3.3 de verilen* $A-$*metrik uzay olsun. Buna göre* (X, A) *bir tam* $A-$*metrik uzay olup bu uzayda* $T : X \to X$ *dönüşümü*

$$Tx = \frac{x}{n}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre her $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *için açıkça* $A-$*metrik uzaydaki Kannan büzülme koşulu*

$$A(Tx_1, Tx_2, ..., Tx_n) \leq a\left(A(\boldsymbol{x_1}; Tx_1) + A(\boldsymbol{x_2}; Tx_2) + \cdots + A(\boldsymbol{x_n}; Tx_n)\right)$$

olup açıkça $a = \dfrac{1}{(n-1)^2}$ *için*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}|x_i - x_j| \leq a\left(\frac{(n-1)^2 x_1}{n} + \frac{(n-1)^2 x_2}{n} + \cdots + \frac{(n-1)^2 x_n}{n}\right)$$

ifadesi sağlanır. Doğal olarak bu T *dönüşümü* $A-$*metrik uzayda bir Kannan büzülme dönüşümüdür. Fakat açık bir şekilde*

$$\theta(r) A(x_1, x_2, ..., Tx_1) \leq A(x_1, x_2, ..., x_n)$$

ifadesi $x_1 = x_2 = ... = x_n$ *için*

$$\theta(r)\frac{(n-1)^2}{n}x_1 \leq 0$$

olacağından sağlanmaz. Bu nedenle bu dönüşüm Teorem 6.2 nin koşullarını sağlamaz.

Teorem 6.3 (X, A) *bir tam* $A-$*metrik uzay ve* $T : X \to X$ *dönüşüm olsun.* $\theta : [0,1) \to \left(\dfrac{1}{n}, 1\right]$ *artmayan fonksiyonu Teorem 6.1 deki gibi tanımlansın. Bu taktirde her* $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *için*

$$\theta(r) A(x_1, x_2, ..., Tx_1) \leq A(x_1, x_2, ..., x_n) \Longrightarrow$$

$$A(Tx_1, Tx_2, ..., Tx_n) \leq r \max\left\{A(\boldsymbol{x_1}; Tx_1), A(\boldsymbol{x_2}; Tx_2), ..., A(\boldsymbol{x_n}; Tx_n)\right\}$$

koşulunu sağlayacak şekilde $a \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right)$ *varsa* T *dönüşümü bir tek* $w \in X$ *sabit noktasına yakınsar ve her* $x \in X$ *için* $(T^n x)$ *iterasyon dizisi* $w \in X$ *noktasına yakınsar.*

İspat θ *nın tanımından dolayı* $\theta(r) \leq 1$ *olduğundan her* $x \in X$ *için açıkça*

$$\theta(r) A(\boldsymbol{x}; Tx) \leq A(\boldsymbol{x}; Tx)$$

dir. Buna göre teoremin hipotezindeki koşul gereğince her $x \in X$ *için*

$$A(\boldsymbol{Tx}; T^2 x) \leq r \max\left\{A(\boldsymbol{x}; Tx), A(\boldsymbol{Tx}; T^2 x)\right\}$$

elde edilir ve buradan düzenleme ile

$$A(\boldsymbol{Tx}; T^2 x) \leq r A(\boldsymbol{x}; Tx) \tag{6.8}$$

bulunur. $u \in X$ *alınarak* $u_0 = u$ *ve her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $u_n = T^n u$ *olacak şekilde* (u_n) *dizisi tanımlansın. Açıkça* $u_n = Tu_{n-1}$ *olduğundan ve* (6.8) *ifadesinden dolayı*

$$A\left(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}\right) \leq rA\left(\boldsymbol{u_{n-1}}; u_n\right) \leq r^2 A\left(\boldsymbol{u_{n-2}}; u_{n-1}\right) \leq \cdots \leq r^n A\left(\boldsymbol{u_0}; u_1\right)$$

elde edilir. O halde $A-$*metriğin özellikleri kullanılarak* $m > n$ *için*

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{u_n}; u_m) &\leq A\left(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}\right) + \cdots + A\left(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}\right) + A\left(\boldsymbol{u_m}; u_{n+1}\right) \\ &= (n-1)\, A\left(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}\right) + A\left(\boldsymbol{u_m}; u_{n+1}\right) \\ &\leq (n-1)\, A\left(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}\right) + (n-1)\, A\left(\boldsymbol{u_{n+1}}; u_{n+2}\right) + A\left(\boldsymbol{u_{n+2}}; u_m\right) \\ &\vdots \\ &\leq (n-1)\, A\left(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}\right) + \cdots + (n-1)\, A\left(\boldsymbol{u_{m-2}}; u_{m-1}\right) + A\left(\boldsymbol{u_{m-1}}; u_m\right) \\ &\leq (n-1)\left[A\left(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}\right) + \cdots + A\left(\boldsymbol{u_{m-1}}; u_m\right)\right] \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitsizlikte (6.8) *ifadesi kullanılırsa*

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{u_n}; u_m) &\leq (n-1)\left(r^n + \cdots + r^{m-1}\right) A\left(\boldsymbol{u_0}; u_1\right) \\ &\leq (n-1)\, \frac{r^m - r^n}{1-r} A\left(\boldsymbol{u_0}; u_1\right) \\ &\leq (n-1)\, \frac{r^m}{1-r} A\left(\boldsymbol{u_0}; u_1\right) \end{aligned}$$

elde edilir. $m \to \infty$ *için işlem yapılırsa* $r \in [0, 1)$ *olduğundan dolayı*

$$A(\boldsymbol{u_n}; u_m) \leq (n-1)\, \frac{r^m}{1-r} A\left(\boldsymbol{u_0}; u_1\right) \to 0$$

olacağından (u_n) *bir* $A-$*Cauchy dizisidir. Ayrıca* (X, A) *bir tam metrik uzay olduğundan dolayı* (u_n) *dizisi bir* $w \in X$ *noktasına yakınsar. Buna göre her* $x \in X \setminus \{w\}$ *için*

$$A\left(\boldsymbol{w}; Tx\right) \leq rA\left(\boldsymbol{x}; Tx\right) \tag{6.9}$$

olduğu gösterilmelidir. O halde bunun için $A\left(\boldsymbol{w}; x\right) > 0$ *ve* $(u_n) \to w$ *olduğundan dolayı* $n \geq n_0$ *koşulunu sağlayan her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$A\left(\boldsymbol{u_n}; w\right) \leq \frac{A\left(\boldsymbol{x}; w\right)}{2n-1}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ *vardır. O halde*

$$\begin{aligned} \theta\left(r\right) A(\boldsymbol{u_n}; Tu_n) &\leq A(\boldsymbol{u_n}; Tu_n) = A(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}) \\ &\leq (n-1)\, A\left(\boldsymbol{u_n}; w\right) + A\left(\boldsymbol{u_{n+1}}; w\right) \\ &\leq \frac{n}{2n-1} A\left(\boldsymbol{x}; w\right) \\ &= A\left(\boldsymbol{x}; w\right) - \frac{n-1}{2n-1} A\left(\boldsymbol{x}; w\right) \\ &\leq A\left(\boldsymbol{x}; w\right) - (n-1)\, A\left(\boldsymbol{u_n}; w\right) \\ &\leq A\left(\boldsymbol{u_n}; x\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre hipotez gereğince $n \geq n_0$ *için*

$$A(\boldsymbol{Tu_n}; Tx) \leq r \max\{A(\boldsymbol{u_n}; Tu_n), A(\boldsymbol{x}; Tx)\}$$

olur. Böylelikle $x \neq w$ *olacak şekildeki* $x \in X$ *için son eşitsizlikte* $n \to \infty$ *için limit alınırsa*

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{w}; Tx) &\leq \lim_{n\to\infty} A(\boldsymbol{u_{n+1}}; Tx) \\ &= \lim_{n\to\infty} A(\boldsymbol{Tu_n}; Tx) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} r \max\{A(\boldsymbol{u_n}; Tu_n), A(\boldsymbol{x}; Tx)\} \\ &= rA(\boldsymbol{x}; Tx) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla (6.9) *ifadesi gösterilmiş olur. Şimdi* w *nun* T *dönüşümünün sabit noktası olduğu* $0 \leq r < \dfrac{1}{\sqrt{(n-1)^2+1}}$ *ve* $\dfrac{1}{\sqrt{(n-1)^2+1}} \leq r < 1$ *olmak üzere iki durum göz önüne alınarak gösterilecektir. Buna göre ilk durum olarak* $0 \leq r < \dfrac{1}{\sqrt{(n-1)^2+1}}$ *alınsın. Dikkat edilirse bu durumda* $\theta(r) \leq \dfrac{1-(n-1)\,r}{r^2}$ *dir. O halde* $n \geq 2$ *olmak üzere her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$A(\boldsymbol{T^n w}; Tw) \leq rA(\boldsymbol{w}; Tw) \tag{6.10}$$

olduğu tümevarım ile gösterilsin. Bu taktirde $n = 2$ *hali açıkça* (6.8) *de gösterilmiştir. Şimdi* $n \geq 2$ *şeklindeki bazı* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$A(\boldsymbol{T^n w}; Tw) \leq rA(\boldsymbol{w}; Tw)$$

olduğu kabul edilsin. O halde $A-$*metriğin özellikleri ve üstteki kabul gereğince*

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{Tw}; w) = A(\boldsymbol{w}; Tw) &\leq A(\boldsymbol{w}; T^n w) + (n-1)\,A(\boldsymbol{Tw}; T^n w) \\ &\leq A(\boldsymbol{w}; T^n w) + (n-1)\,rA(\boldsymbol{w}; T^n w) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan düzenleme ile

$$[1-(n-1)\,r]\,A(\boldsymbol{w}; Tw) \leq A(\boldsymbol{w}; T^n w)$$

sonucuna ulaşılır. Bu nedenle

$$\begin{aligned} \theta(r)A(\boldsymbol{T^n w}; T^{n+1} w) &\leq \frac{1-(n-1)\,r}{r^2} A(\boldsymbol{T^n w}; T^{n+1} w) \\ &\leq \frac{1-(n-1)\,r}{r^n} A(\boldsymbol{T^n w}; T^{n+1} w) \\ &\leq \frac{1-(n-1)\,r}{r^n} r^n A(\boldsymbol{w}; Tw) \\ &\leq (1-(n-1)\,r)\,A(\boldsymbol{w}; Tw) \\ &\leq A(\boldsymbol{w}; T^n w) \end{aligned}$$

elde edilir. Teoremin hipotezi gereğince

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{T^{n+1}w}; Tw) &\leq r \max\left\{A(\boldsymbol{T^{n}w}; T^{n+1}w), A\left(\boldsymbol{w}; Tw\right)\right\} \\ &= rA\left(\boldsymbol{w}; Tw\right) \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla tümevarım ilkesi $n \geq 2$ *olacak şekilde her* $n \in \mathbb{N}$ *için* (6.10) *gösterilmiş oldu.* T *nin sabit noktasını göstermek adına bir çelişki meydana getirmek için* $Tw \neq w$ *olduğu varsayılsın. Bu durumda* (6.10) *gereğince açık şekilde her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $T^n w \neq w$ *olur. O halde* (6.8) *ifadesi gereğince*

$$A(\boldsymbol{T^{n+1}w}; w) \leq rA(\boldsymbol{T^{n}w}; T^{n+1}w) \leq r^{n+1}A\left(\boldsymbol{w}; Tw\right)$$

elde edilir. Bu ise $T^n w \to w$ *olmasını gerektirir ki bu da* (6.10) *ifadesi ile çelişir. O halde* $Tw = w$ *olmalıdır.* $\dfrac{1}{\sqrt{n^2 - 2n + 2}} \leq r < 1$ *durumunda Yardımcı Teorem 6.1 gereğince her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$\theta(r)A(\boldsymbol{u_{2n}}; u_{2n+1}) \leq A(\boldsymbol{u_{2n}}; w)$$

veya

$$\theta(r)A(\boldsymbol{u_{2n+1}}; u_{2n+2}) \leq A(\boldsymbol{u_{2n+1}}; w)$$

olmalıdır. Böylelikle her $j \in \mathbb{N}$ *için*

$$\theta(r)A(\boldsymbol{u_{n_j}}; u_{n_j+1}) \leq A(\boldsymbol{u_{n_j}}; w)$$

olacak şekilde (n) *dizisi bir* (n_j) *alt dizisi vardır. Varsayım gereğince*

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{w}; Tw) &= \lim_{j\to\infty} A(\boldsymbol{u_{n_j+1}}; Tw) \\ &\leq \lim_{j\to\infty} r \max\left\{A(\boldsymbol{u_{n_j}}; u_{n_j+1}), A(\boldsymbol{w}; Tw)\right\} \\ &\leq rA(\boldsymbol{w}; Tw) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak aşikar olarak $r < 1$ *olduğundan* $Tw = w$ *olmalıdır. Sonuç olarak her iki durumda da* $Tw = w$ *elde edilir. Yani* w*,* T *dönüşümünün sabit noktasıdır.* T *dönüşümünün sabit noktasının tek olduğunu göstermek için* T *nin birbirinden farklı iki sabit noktasının* w *ve* v *olduğu varsayılsın. O halde açıkça* $w \neq v$ *olduğundan* (6.9) *gereğince*

$$A(\boldsymbol{w}; Tv) \leq rA(\boldsymbol{v}; Tv) = rA(\boldsymbol{v}; v) = 0$$

elde edilir. Ancak bu bir çelişkdir. O halde T *dönüşümünün sabit noktası tektir.*

Örnek 6.5 $X = [0, \infty)$ *olmak üzere,* $A : X \times X \times ... \times X \to \mathbb{R}^+$ *fonksiyonu her* $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *için*

$$A\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \begin{cases} 0, & x_1 = x_2 = \cdots = x_n \text{ ise} \\ \max\left\{x_1, x_2, ..., x_n\right\}, & diğer\ durumlarda \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre (X, A) *bir tam* $A-$*metrik uzaydır. Şimdi bu tam* $A-$*metrik uzayda* $T : X \to X$ *dönüşümü her* $x \in X$ *için*

$$Tx = \frac{x}{4}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu taktirde açıkça $\theta(r) \leq 1$ *olduğundan*

$$\theta(r) \max\left\{x_1, x_2, ..., \frac{x_1}{4}\right\} \leq r \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

olup açıkça

$$\theta(r) A(x_1, x_2, ..., Tx_1) \leq A(x_1, x_2, ..., x_n)$$

dir. Diğer yandan her $x_1, x_2, ..., x_n \in [0, \infty]$ *ve* $r \in \left(\frac{1}{4}, 1\right)$ *için*

$$\max\left\{\frac{x_1}{4}, \frac{x_2}{4}, ..., \frac{x_n}{4}\right\} \leq r \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

olup bu ise açıkça

$$A(Tx_1, Tx_2, ..., Tx_n) \leq r \max\{A(\boldsymbol{x_1}; Tx_1), A(\boldsymbol{x_2}; Tx_2), ..., A(\boldsymbol{x_n}; Tx_n)\}$$

elde edilir. Dolayısıyla Teorem 6.3 ün koşulları sağlanmaktadır. O halde T *dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.*

Örnek 6.6 (X, A) *Örnek 3.3 de verilen* $A-$*metrik uzay olsun. Buna göre* (X, A) *bir tam* $A-$*metrik uzay olup bu uzayda* $T : X \to X$ *dönüşümü*

$$Tx = \frac{x}{n-1}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre her $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *için açıkça* $A-$*metrik uzaydaki Bianchini büzülme koşulu*

$$A(Tx_1, Tx_2, ..., Tx_n) \leq r \max\{A(\boldsymbol{x_1}; Tx_1), A(\boldsymbol{x_2}; Tx_2), ..., A(\boldsymbol{x_n}; Tx_n)\}$$

olup açıkça $r = \frac{n}{2}(n-2)$ *için* $n \geq 4$ *olmak şartıyla*

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}|x_i - x_j| \leq r \max\left\{\frac{(n-1)(n-2)|x_1|}{n-1}, , \cdots, \frac{(n-1)(n-2)|x_n|}{n-1}\right\}$$

ifadesi sağlanır. Doğal olarak bu T *dönüşümü* $A-$*metrik uzayda bir Bianchini büzülme dönüşümüdür. Fakat açık bir şekilde*

$$\theta(r) A(x_1, x_2, ..., Tx_1) \leq A(x_1, x_2, ..., x_n)$$

ifadesi $x_1 = x_2 = ... = x_n$ *için*

$$\theta(r) \frac{(n-1)^2}{n-1} x_1 \leq 0$$

olacağından sağlanmaz. Bu nedenle bu dönüşüm Teorem 6.3 ün koşullarını sağlamaz.

Sıradaki iki teorem alışılmış metrik uzaylarda Chatterjea ve genelleştirilmiş Chatterjea sabit nokta teoremi olarak bilinen teoremlerin $A-$metrik uzay versiyonlarının Suzuki tip genellemelerini ifade etmektedir.

Teorem 6.4 *(X, A) bir tam $A-$metrik uzay ve $T : X \to X$ dönüşüm olsun. $\theta : [0,1) \to \left(\frac{1}{n}, 1\right]$ artmayan fonksiyonu Teorem 6.1 deki gibi tanımlansın. Bu taktirde her $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ için $r = \frac{(n-1)(2n-3)a}{1-(n-1)a}$ olmak üzere*

$$\theta(r) A(x_1, x_2, ..., Tx_1) \leq A(x_1, x_2, ..., x_n) \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} A(Tx_1, Tx_2, ..., Tx_n) \leq\ & a(A(\boldsymbol{x_1}; Tx_2) + \cdots + A(\boldsymbol{x_1}; Tx_n) \\ & + A(\boldsymbol{x_2}; Tx_1) + \cdots + A(\boldsymbol{x_2}; Tx_n) + \\ & \cdots + A(\boldsymbol{x_n}; Tx_1) \cdots + A(\boldsymbol{x_n}; Tx_{n-1})) \end{aligned}$$

koşulunu sağlayacak şekilde $a \in \left[0, \frac{1}{2(n-1)^2}\right)$ varsa T dönüşümü bir tek $w \in X$ sabit noktasına yakınsar ve her $x \in X$ için $(T^n x)$ iterasyon dizisi $w \in X$ noktasına yakınsar.

İspat *θ nın tanımından dolayı $\theta(r) \leq 1$ olduğundan her $x \in X$ için açıkça*

$$\theta(r) A(\boldsymbol{x}; Tx) \leq A(\boldsymbol{x}; Tx)$$

dir. Buna göre teoremin hipotezindeki koşul gereğince ve $A-$metriğin özellikleri gereğince her $x \in X$ için

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{Tx}; T^2x) \leq\ & a(n-1)(n-2) A(\boldsymbol{x}; Tx) + a(n-1) A(\boldsymbol{x}; T^2x) \\ & + a(n-1) A(\boldsymbol{Tx}; Tx) \\ \leq\ & a(n-1)(n-2) A(\boldsymbol{x}; Tx) + a(n-1)(n-1) A(\boldsymbol{x}; Tx) \\ & + a(n-1) A(\boldsymbol{T^2x}; Tx) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan düzenleme ile

$$A(\boldsymbol{Tx}; T^2x) \leq \frac{(n-1)(2n-3)a}{1-(n-1)a} A(\boldsymbol{x}; Tx) \tag{6.11}$$

sonucuna ulaşılır. $r = \frac{(n-1)(2n-3)a}{1-(n-1)a}$ ve $a \in \left[0, \frac{1}{2(n-1)^2}\right)$ olmak üzere (6.11) ifadesi bulunur. $u \in X$ alınarak $u_0 = u$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $u_n = T^n u$ olacak şekilde (u_n) dizisi tanımlansın. Açıkça $u_n = Tu_{n-1}$ olduğundan ve (6.11) ifadesinden dolayı

$$A(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}) \leq rA(\boldsymbol{u_{n-1}}; u_n) \leq r^2 A(\boldsymbol{u_{n-2}}; u_{n-1}) \leq \cdots \leq r^n A(\boldsymbol{u_0}; u_1)$$

elde edilir. O halde $A-$metriğin özellikleri kullanılarak $m > n$ için

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{u_n}; u_m) &\leq A(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}) + \cdots + A(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}) + A(\boldsymbol{u_m}; u_{n+1}) \\ &= (n-1) A(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}) + A(\boldsymbol{u_m}; u_{n+1}) \\ &\leq (n-1) A(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}) + (n-1) A(\boldsymbol{u_{n+1}}; u_{n+2}) + A(\boldsymbol{u_{n+2}}; u_m) \\ &\vdots \\ &\leq (n-1) A(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}) + \cdots + (n-1) A(\boldsymbol{u_{m-2}}; u_{m-1}) + A(\boldsymbol{u_{m-1}}; u_m) \\ &\leq (n-1) [A(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}) + \cdots + A(\boldsymbol{u_{m-1}}; u_m)] \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitsizlikte (6.11) *ifadesi kullanılırsa*

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{u_n}; u_m) &\leq (n-1) \left(r^n + \cdots + r^{m-1}\right) A(\boldsymbol{u_0}; u_1) \\ &\leq (n-1) \frac{r^m - r^n}{1-r} A(\boldsymbol{u_0}; u_1) \\ &\leq (n-1) \frac{r^m}{1-r} A(\boldsymbol{u_0}; u_1) \end{aligned}$$

elde edilir. $m \to \infty$ için işlem yapılırsa $r \in [0,1)$ olduğundan dolayı

$$A(\boldsymbol{u_n}; u_m) \leq (n-1) \frac{r^m}{1-r} A(\boldsymbol{u_0}; u_1) \to 0$$

olacağından (u_n) bir $A-$Cauchy dizisidir. Ayrıca (X, A) bir tam metrik uzay olduğundan dolayı (u_n) dizisi bir $w \in X$ noktasına yakınsar. Buna göre her $x \in X \setminus \{w\}$ için

$$A(\boldsymbol{w}; Tx) \leq r A(\boldsymbol{w}; x) \tag{6.12}$$

olduğu gösterilmelidir. O halde bunun için $A(\boldsymbol{w}; x) > 0$ ve $(u_n) \to w$ olduğundan dolayı $n \geq n_0$ koşulunu sağlayan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$A(\boldsymbol{u_n}; w) \leq \frac{A(\boldsymbol{x}; w)}{2n-1}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. O halde

$$\begin{aligned} \theta(r) A(\boldsymbol{u_n}; Tu_n) &\leq A(\boldsymbol{u_n}; Tu_n) = A(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}) \\ &\leq (n-1) A(\boldsymbol{u_n}; w) + A(\boldsymbol{u_{n+1}}; w) \\ &\leq \frac{n}{2n-1} A(\boldsymbol{x}; w) \\ &= A(\boldsymbol{x}; w) - \frac{n-1}{2n-1} A(\boldsymbol{x}; w) \\ &\leq A(\boldsymbol{x}; w) - (n-1) A(\boldsymbol{u_n}; w) \\ &\leq A(\boldsymbol{u_n}; x) \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre hipotez gereğince $n \geq n_0$ için

$$A(\boldsymbol{Tu_n}; Tx) \leq (n-1) aA(\boldsymbol{u_n}; Tx) + (n-1) aA(\boldsymbol{u_n}; Tu_n) + (n-1) aA(\boldsymbol{x}; Tu_n)$$

olur. Böylelikle $x \neq w$ *olacak şekildeki* $x \in X$ *için son eşitsizlikte* $n \to \infty$ *için limit alınırsa*

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}; w) &= \lim_{n\to\infty} A\left(\boldsymbol{u_{n+1}}; Tx\right) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \left((n-1)\, aA(\boldsymbol{u_n}; Tx) + (n-1)\, aA(\boldsymbol{u_n}; Tu_n)\right. \\ &\qquad \left. + (n-1)\, aA(\boldsymbol{x}; Tu_n)\right) \\ &\leq (n-1)\, aA(\boldsymbol{w}, Tx) + (n-1)\, aA(\boldsymbol{w}, x) \end{aligned}$$

yani

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}; w) &\leq \frac{(n-1)\, a}{1-(n-1)\, a} A(\boldsymbol{w}, x) \\ &\leq \frac{(n-1)\,(2n-3)\, a}{1-(n-1)\, a} A(\boldsymbol{w}, x) \\ &= rA(\boldsymbol{w}, x) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla (6.12) *ifadesi gösterilmiş olur. Şimdi* w *nun* T *dönüşümünün sabit noktası olduğu* $0 \leq r < \dfrac{1}{\sqrt{(n-1)^2+1}}$ *ve* $\dfrac{1}{\sqrt{(n-1)^2+1}} \leq r < 1$ *olmak üzere iki durum göz önüne alınarak gösterilecektir. Buna göre ilk durum olarak* $0 \leq r < \dfrac{1}{\sqrt{(n-1)^2+1}}$ *alınsın. Dikkat edilirse bu durumda* $\theta(r) \leq \dfrac{1-(n-1)\, r}{r^2}$ *dir. O halde ilk olarak*

$$A(\boldsymbol{T^n}\boldsymbol{w}; w) \leq A\left(\boldsymbol{T}\boldsymbol{w}; w\right)$$

olduğu tümevarım ile gösterilsin. Bu taktirde $n = 1$ *için ifadenin doğruluğu aşikardır. Şimdi bazı* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$A(\boldsymbol{T^n}\boldsymbol{w}; w) \leq A\left(\boldsymbol{T}\boldsymbol{w}; w\right)$$

ifadesinin doğru olduğu kabul edilsin. O halde tümevarım ilkesi gereğince sıradaki adım olarak $n+1$ *için ifadenin doğru olduğunun gösterilmesi gereklidir. Bu durumda eğer* $T^n w = w$ *ise* $T^{n+1} w = Tw$ *ve*

$$A(\boldsymbol{T^{n+1}}\boldsymbol{w}; w) = A\left(\boldsymbol{T}\boldsymbol{w}; w\right) \leq A\left(\boldsymbol{T}\boldsymbol{w}; w\right)$$

olur. Eğer $T^n w \neq w$ *ise* $x = T^n w$ *için*

$$A(\boldsymbol{T^{n+1}}\boldsymbol{w}; w) \leq rA(\boldsymbol{T^n}\boldsymbol{w}; w) \leq rA\left(\boldsymbol{T}\boldsymbol{w}; w\right) \leq A\left(\boldsymbol{T}\boldsymbol{w}; w\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla tümevarım ilkesi ile eşitsizliğin doğru olduğu ispatlanmıştır. Şimdi de her $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$A(\boldsymbol{T^n}\boldsymbol{w}; Tw) \leq rA\left(\boldsymbol{T}\boldsymbol{w}; w\right)$$

ifadesinin doğru olduğu yine tümevarım ilkesi ile gösterilsin. Buna göre $n = 1$ *için ifadenin doğruluğu aşikardır.* $n = 2$ *ifadenin doğruluğu* (6.11) *de gösterilmiştir. Bu aşamada* $n \geq 2$ *olacak şekildeki bazı* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$A(\boldsymbol{T^n}\boldsymbol{w}; Tw) \leq rA\left(\boldsymbol{T}\boldsymbol{w}; w\right)$$

ifadesinin doğru olduğu kabul edilsin. O halde şimdi bu aşamada $n+1$ *için ifadenin doğru olduğu gösterilmelidir. Buna göre bir önce ispatlanan indirgeme bağıntısı ve kabul gereğince*

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{T}\boldsymbol{w};w) = A\left(\boldsymbol{w};Tw\right) &\leq A\left(\boldsymbol{w};T^{n}w\right)+(n-1)\,A(\boldsymbol{T}\boldsymbol{w};T^{n}w) \\ &\leq A\left(\boldsymbol{w};T^{n}w\right)+(n-1)\,rA\left(\boldsymbol{w};T^{n}w\right) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan düzenleme ile

$$\left[1-(n-1)\,r\right]A\left(\boldsymbol{w};Tw\right)\leq A\left(\boldsymbol{w};T^{n}w\right)$$

sonucuna ulaşılır. Bu nedenle

$$\begin{aligned} \theta(r)A(\boldsymbol{T^{n}}\boldsymbol{w};T^{n+1}w) &\leq \frac{1-(n-1)\,r}{r^{2}}A(\boldsymbol{T^{n}}\boldsymbol{w};T^{n+1}w) \\ &\leq \frac{1-(n-1)\,r}{r^{n}}A(\boldsymbol{T^{n}}\boldsymbol{w};T^{n+1}w) \\ &\leq \frac{1-(n-1)\,r}{r^{n}}r^{n}A\left(\boldsymbol{w};Tw\right) \\ &\leq \left(1-(n-1)\,r\right)A\left(\boldsymbol{w};Tw\right) \\ &\leq A\left(\boldsymbol{w};T^{n}w\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle önceki indirgeme bağıntısı ve varsayım gereğince

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{T^{n+1}}\boldsymbol{w};Tw) &\leq (n-1)\,aA(\boldsymbol{T^{n}}\boldsymbol{w};T^{n+1}w)+(n-1)\,aA(\boldsymbol{T^{n}}\boldsymbol{w};Tw) \\ &\quad +(n-1)\,aA(\boldsymbol{w};T^{n+1}w) \\ &\leq (n-1)\,ar^{n}A\left(\boldsymbol{w};Tw\right)+(n-1)\,arA(\boldsymbol{T}\boldsymbol{w};w) \\ &\quad +(n-1)\,aA(\boldsymbol{T}\boldsymbol{w};w) \\ &\leq a\left(2\,(n-1)+(n-1)\,r\right)A(\boldsymbol{T}\boldsymbol{w};w) \\ &\leq \frac{r}{(n-1)\,(2n-3)+r\,(n-1)}\left(2\,(n-1)+(n-1)\,r\right)A(\boldsymbol{T}\boldsymbol{w};w) \\ &\leq rA(\boldsymbol{T}\boldsymbol{w};w) \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak tümevarım yöntemi ile eşitsizliğin doğru olduğu ispatlanmıştır. Sabit noktanın varlığını gösterirken bir çelişki yakalamak için $Tw\neq w$ *olduğu varsayılsın. Dolayısıyla her* $n\in\mathbb{N}$ *için* $T^{n}w\neq w$ *olur. Buna göre* (6.11) *gereğince*

$$A(\boldsymbol{T^{n+1}}\boldsymbol{w};w)\leq rA(\boldsymbol{T^{n}}\boldsymbol{w};w)\leq\cdots\leq r^{n}A(\boldsymbol{T}\boldsymbol{w};w)$$

elde edilir. O halde

$$\lim_{n\to\infty}r^{n}A(\boldsymbol{T}\boldsymbol{w};w)=0$$

olduğundan $T^{n}w\to w$ *olacaktır. Bu ise çelişki olacaktır. Dolayısıyla* $Tw=w$ *olmalıdır.*
$\dfrac{1}{\sqrt{(n-1)^{2}+1}}\leq r<1$ *olması durumunda her* $j\in\mathbb{N}$ *için*

$$\theta(r)A(\boldsymbol{u_{n_{j}}};u_{n_{j}+1})\leq A(\boldsymbol{u_{n_{j}}};w)$$

olacak şekilde (n) *dizisinin bir* (n_j) *alt dizisinin olduğunun gösterilmesi gerekmektedir. Gerçekten de* (6.11) *ve Yardımcı Teorem 6.1 gereğince her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$\frac{1}{1+(n-1)\,r} A(\boldsymbol{u_{2n}}; u_{2n+1}) \leq A(\boldsymbol{u_{2n}}; w)$$

veya

$$\frac{1}{1+(n-1)\,r} A(\boldsymbol{u_{2n+1}}; u_{2n+2}) \leq A(\boldsymbol{u_{2n+1}}; w)$$

ifadesi sağlanır. Varsayımdan dolayı

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{w}; Tw) &= \lim_{j\to\infty} A(Tu_{nj}; Tw) \\ &\leq \lim_{j\to\infty} ((n-1)\,aA(\boldsymbol{u_{nj}}; Tw) + (n-1)\,aA(\boldsymbol{u_{nj}}; Tu_{nj}) \\ &\qquad + (n-1)\,aA(\boldsymbol{w}; Tu_{nj})) \\ &\leq (n-1)\,aA(\boldsymbol{w}; Tw) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak açıkça $a < \dfrac{1}{2(n-1)^2}$ *olduğundan varsayım hatalıdır bu nedenle* $Tw = w$ *olmalıdır. Sonuç olarak her iki durumda da* $Tw = w$ *elde edilir. Yani* w*,* T *dönüşümünün sabit noktasıdır.* T *dönüşümünün sabit noktasının tek olduğunu göstermek için* T *nin birbirinden farklı iki sabit noktasının* w *ve* v *olduğu varsayılsın. O halde açıkça* $w \neq v$ *olduğundan* (6.12) *gereğince*

$$A(\boldsymbol{w}; Tv) \leq rA(\boldsymbol{v}; Tv) = rA(\boldsymbol{v}; v) = 0$$

elde edilir. Ancak bu bir çelişkdir. O halde T *dönüşümünün sabit noktası tektir.*

Örnek 6.7 $X = [0, \infty)$ *olmak üzere,* $A : X \times X \times ... \times X \to \mathbb{R}^+$ *fonksiyonu her* $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *için*

$$A(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 0, & x_1 = x_2 = \cdots = x_n \text{ ise} \\ \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}, & diğer\ durumlarda \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre (X, A) *bir tam* $A-$*metrik uzaydır. Şimdi bu tam* $A-$*metrik uzayda* $T : X \to X$ *dönüşümü her* $x \in X$ *için*

$$Tx = \frac{x}{8}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu taktirde açıkça $\theta(r) \leq 1$ *olduğundan*

$$\theta(r) \max\left\{x_1, x_2, ..., \frac{x_1}{8}\right\} \leq r \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

olup açıkça

$$\theta(r)\, A(x_1, x_2, ..., Tx_1) \leq A(x_1, x_2, ..., x_n)$$

dir. Diğer yandan her $x_1, x_2, ..., x_n \in [0, \infty]$ *ve* $n = 6$ *olmak üzere* $a = \left(\frac{1}{240}, \frac{1}{50}\right)$ *için*

$$\begin{aligned}\max\left\{\frac{x_1}{8}, \frac{x_2}{8}, ..., \frac{x_n}{8}\right\} \leq\ & a\left[\max\left\{x_1, \frac{x_2}{8}\right\} + \cdots + \max\left\{x_1, \frac{x_n}{8}\right\}\right. \\ & \max\left\{x_2, \frac{x_1}{8}\right\} + \cdots + \max\left\{x_2, \frac{x_n}{8}\right\} + \\ & \left.\cdots + \max\left\{x_n, \frac{x_1}{8}\right\} + \cdots + \max\left\{x_n, \frac{x_{n-1}}{8}\right\}\right]\end{aligned}$$

olup bu ise açıkça

$$\begin{aligned}A\left(Tx_1, Tx_2, ..., Tx_n\right) \leq\ & a\left(A\left(\boldsymbol{x_1}; Tx_2\right) + \cdots + A\left(\boldsymbol{x_1}; Tx_n\right)\right. \\ & + A\left(\boldsymbol{x_2}; Tx_1\right) + \cdots + A\left(\boldsymbol{x_2}; Tx_n\right) + \\ & \left.\cdots + A\left(\boldsymbol{x_n}; Tx_1\right) \cdots + A\left(\boldsymbol{x_n}; Tx_{n-1}\right)\right)\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla Teorem 6.4 ün koşulları sağlanmaktadır. O halde dönüşümün bir tek sabit noktası vardır.

Örnek 6.8 (X, A) *Örnek 3.3 de verilen* $A-$*metrik uzay olsun. Buna göre* (X, A) *bir tam* $A-$*metrik uzay olup bu uzayda* $T : X \to X$ *dönüşümü*

$$Tx = \frac{x}{n+1}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre her $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *için açıkça* $A-$*metrik uzaydaki Chatterjea büzülme koşulu*

$$\begin{aligned}A\left(Tx_1, Tx_2, ..., Tx_n\right) \leq\ & a\left(A\left(\boldsymbol{x_1}; Tx_2\right) + \cdots + A\left(\boldsymbol{x_1}; Tx_n\right)\right. \\ & + A\left(\boldsymbol{x_2}; Tx_1\right) + \cdots + A\left(\boldsymbol{x_2}; Tx_n\right) + \\ & \left.\cdots + A\left(\boldsymbol{x_n}; Tx_1\right) \cdots + A\left(\boldsymbol{x_n}; Tx_{n-1}\right)\right)\end{aligned}$$

olup açıkça $n = 12$ *olmak üzere* $a = \frac{1}{264}$ *için*

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}\left|x_i - x_j\right| \leq\ & a\left(n-1\right)\left(\left|x_1 - \frac{x_2}{n+1}\right| + \cdots + \left|x_1 - \frac{x_n}{n+1}\right| + \right. \\ & + \left|x_2 - \frac{x_1}{n+1}\right| + \cdots + \left|x_2 - \frac{x_n}{n+1}\right| + \cdots \\ & \left. + \left|x_n - \frac{x_1}{n+1}\right| + \cdots + \left|x_n - \frac{x_{n-1}}{n+1}\right|\right)\end{aligned}$$

ifadesi sağlanır. Doğal olarak bu T *dönüşümü* $A-$*metrik uzayda bir Chatterjea büzülme dönüşümüdür. Fakat açık bir şekilde*

$$\theta\left(r\right) A\left(x_1, x_2, ..., Tx_1\right) \leq A\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$$

ifadesi $x_1 = x_2 = ... = x_n$ *için*

$$\theta(r)\frac{(n-1)^2}{n+1}x_1 \leq 0$$

olacağından sağlanmaz. Bu nedenle bu dönüşüm Teorem 6.4 ün koşullarını sağlamaz.

Teorem 6.5 (X, A) *bir tam* $A-$*metrik uzay ve* $T : X \to X$ *dönüşüm olsun.* $\theta : [0,1) \to \left(\frac{1}{n}, 1\right]$ *artmayan fonksiyonu Teorem 6.1 deki gibi tanımlansın. Bu taktirde her* $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *için* $r = \frac{(n-1)a}{1-a}$ *olmak üzere*

$$\theta(r)A(x_1, x_2, ..., Tx_1) \leq A(x_1, x_2, ..., x_n) \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} A(Tx_1, Tx_2, ..., Tx_n) \quad \leq \quad & a \max\{A(\boldsymbol{x_1}; Tx_2), \cdots, A(\boldsymbol{x_1}; Tx_n), A(\boldsymbol{x_2}; Tx_1), \cdots \\ & , A(\boldsymbol{x_2}; Tx_n), \cdots, A(\boldsymbol{x_n}; Tx_1), \cdots, A(\boldsymbol{x_n}; Tx_{n-1})\} \end{aligned}$$

koşulunu sağlayacak şekilde $a \in \left[0, \frac{1}{n}\right)$ *varsa* T *dönüşümü bir tek* $w \in X$ *sabit noktasına yakınsar ve her* $x \in X$ *için* $(T^n x)$ *iterasyon dizisi* $w \in X$ *noktasına yakınsar.*

İspat θ *nın tanımından dolayı* $\theta(r) \leq 1$ *olduğundan her* $x \in X$ *için açıkça*

$$\theta(r)A(\boldsymbol{x}; Tx) \leq A(\boldsymbol{x}; Tx)$$

dir. Buna göre teoremin hipotezindeki koşul gereğince ve $A-$*metriğin özellikleri gereğince her* $x \in X$ *için*

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{Tx}; T^2x) \quad &\leq \quad a \max\left\{A(\boldsymbol{x}; Tx), A(\boldsymbol{x}; T^2x), A(\boldsymbol{Tx}; Tx)\right\} \\ &\leq \quad a \max\left\{A(\boldsymbol{x}; Tx), (n-1)A(\boldsymbol{x}; Tx) + A(\boldsymbol{Tx}; T^2x)\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan düzenleme ile

$$A(\boldsymbol{Tx}; T^2x) \leq \frac{(n-1)a}{1-a}A(\boldsymbol{x}; Tx) \tag{6.13}$$

sonucuna ulaşılır. $r = \frac{(n-1)a}{1-a}$ *ve* $a \in \left[0, \frac{1}{n}\right)$ *olmak üzere* (6.13) *ifadesi bulunur.* $u \in X$ *alınarak* $u_0 = u$ *ve her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $u_n = T^n u$ *olacak şekilde* (u_n) *dizisi tanımlansın. Açıkça* $u_n = Tu_{n-1}$ *olduğundan ve* (6.13) *ifadesinden dolayı*

$$A(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}) \leq rA(\boldsymbol{u_{n-1}}; u_n) \leq r^2 A(\boldsymbol{u_{n-2}}; u_{n-1}) \leq \cdots \leq r^n A(\boldsymbol{u_0}; u_1)$$

elde edilir. O halde $A-$metriğin özellikleri kullanılarak $m > n$ için

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{u_n}; u_m) &\leq A(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}) + \cdots + A(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}) + A(\boldsymbol{u_m}; u_{n+1}) \\ &= (n-1) A(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}) + A(\boldsymbol{u_m}; u_{n+1}) \\ &\leq (n-1) A(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}) + (n-1) A(\boldsymbol{u_{n+1}}; u_{n+2}) + A(\boldsymbol{u_{n+2}}; u_m) \\ &\vdots \\ &\leq (n-1) A(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}) + \cdots + (n-1) A(\boldsymbol{u_{m-2}}; u_{m-1}) + A(\boldsymbol{u_{m-1}}; u_m) \\ &\leq (n-1) [A(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}) + \cdots + A(\boldsymbol{u_{m-1}}; u_m)] \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitsizlikte (6.13) *ifadesi kullanılırsa*

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{u_n}; u_m) &\leq (n-1) \left(r^n + \cdots + r^{m-1}\right) A(\boldsymbol{u_0}; u_1) \\ &\leq (n-1) \frac{r^m - r^n}{1-r} A(\boldsymbol{u_0}; u_1) \\ &\leq (n-1) \frac{r^m}{1-r} A(\boldsymbol{u_0}; u_1) \end{aligned}$$

elde edilir. $m \to \infty$ için işlem yapılırsa $r \in [0,1)$ olduğundan dolayı

$$A(\boldsymbol{u_n}; u_m) \leq (n-1) \frac{r^m}{1-r} A(\boldsymbol{u_0}; u_1) \to 0$$

olacağından (u_n) bir $A-$Cauchy dizisidir. Ayrıca (X, A) bir tam metrik uzay olduğundan dolayı (u_n) dizisi bir $w \in X$ noktasına yakınsar. Buna göre her $x \in X \setminus \{w\}$ için

$$A(\boldsymbol{w}; Tx) \leq r A(\boldsymbol{x}; Tx) \tag{6.14}$$

olduğu gösterilmelidir. O halde bunun için $A(\boldsymbol{w}; x) > 0$ ve $(u_n) \to w$ olduğundan dolayı $n \geq n_0$ koşulunu sağlayan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$A(\boldsymbol{u_n}; w) \leq \frac{A(\boldsymbol{x}; w)}{2n-1}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. O halde

$$\begin{aligned} \theta(r) A(\boldsymbol{u_n}; Tu_n) &\leq A(\boldsymbol{u_n}; Tu_n) = A(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}) \\ &\leq (n-1) A(\boldsymbol{u_n}; w) + A(\boldsymbol{u_{n+1}}; w) \\ &\leq \frac{n}{2n-1} A(\boldsymbol{x}; w) \\ &= A(\boldsymbol{x}; w) - \frac{n-1}{2n-1} A(\boldsymbol{x}; w) \\ &\leq A(\boldsymbol{x}; w) - (n-1) A(\boldsymbol{u_n}; w) \\ &\leq A(\boldsymbol{u_n}; x) \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre hipotez gereğince $n \geq n_0$ için

$$A(\boldsymbol{T u_n}; Tx) \leq a \max \{A(\boldsymbol{u_n}; Tx), A(\boldsymbol{u_n}; Tu_n), A(\boldsymbol{x}; Tu_n)\}$$

olur. Böylelikle $x \neq w$ *olacak şekildeki* $x \in X$ *için son eşitsizlikte* $n \to \infty$ *için limit alınırsa*

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{w}; Tx) &\leq \lim_{n\to\infty} A(\boldsymbol{u_{n+1}}; Tx) \\ &= \lim_{n\to\infty} A(\boldsymbol{T u_n}; Tx) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} a \max\left\{A\left(\boldsymbol{u_n}; Tx\right), A(\boldsymbol{x}; Tu_n)\right\} \\ &= \lim_{n\to\infty} a \max\left\{A\left(\boldsymbol{u_n}; Tx\right), A(\boldsymbol{x}; u_{n+1})\right\} \\ &= a \max\left\{A(\boldsymbol{w}; Tx), A(\boldsymbol{x}; w)\right\} \\ &\leq a \max\left\{A(\boldsymbol{w}; Tx), (n-1)\, A(\boldsymbol{x}; Tx) + A\left(\boldsymbol{T x}; w\right)\right\} \\ &= a\left((n-1)\, A(\boldsymbol{x}; Tx) + A\left(\boldsymbol{T x}; w\right)\right) \\ &= \frac{(n-1)\, a}{1-a} A(\boldsymbol{x}; Tx) \\ &= r A(\boldsymbol{x}; Tx) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla (6.14) *ifadesi gösterilmiş olur. Şimdi* w *nun* T *dönüşümünün sabit noktası olduğu* $0 \leq r < \dfrac{1}{\sqrt{(n-1)^2+1}}$ *ve* $\dfrac{1}{\sqrt{(n-1)^2+1}} \leq r < 1$ *olmak üzere iki durum göz önüne alınarak gösterilecektir. Buna göre ilk durum olarak* $0 \leq r < \dfrac{1}{\sqrt{(n-1)^2+1}}$ *alınsın. Dikkat edilirse bu durumda* $\theta(r) \leq \dfrac{1-(n-1)\, r}{r^2}$ *dir. O halde* $n \geq 2$ *olmak üzere her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$A(\boldsymbol{T^n w}; Tw) \leq r A\left(\boldsymbol{w}; Tw\right)$$

olduğu tümevarım ile gösterilsin. Bu taktirde $n = 2$ *hali açıkça* (6.13) *de gösterilmiştir. Şimdi* $n \geq 2$ *şeklindeki bazı* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$A(\boldsymbol{T^n w}; Tw) \leq r A\left(\boldsymbol{w}; Tw\right)$$

olduğu kabul edilsin. O halde $A-$*metriğin özellikleri ve üstteki kabul gereğince*

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{T w}; w) = A\left(\boldsymbol{w}; Tw\right) &\leq A\left(\boldsymbol{w}; T^n w\right) + (n-1)\, A(\boldsymbol{T w}; T^n w) \\ &\leq A\left(\boldsymbol{w}; T^n w\right) + (n-1)\, r A\left(\boldsymbol{w}; T^n w\right) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan düzenleme ile

$$\left[1-(n-1)\, r\right] A\left(\boldsymbol{w}; Tw\right) \leq A\left(\boldsymbol{w}; T^n w\right)$$

sonucuna ulaşılır. Bu nedenle

$$\begin{aligned} \theta(r) A(\boldsymbol{T^n w}; T^{n+1} w) &\leq \frac{1-(n-1)\, r}{r^2} A(\boldsymbol{T^n w}; T^{n+1} w) \\ &\leq \frac{1-(n-1)\, r}{r^n} A(\boldsymbol{T^n w}; T^{n+1} w) \\ &\leq \frac{1-(n-1)\, r}{r^n} r^n A\left(\boldsymbol{w}; Tw\right) \\ &\leq \left(1-(n-1)\, r\right) A\left(\boldsymbol{w}; Tw\right) \\ &\leq A\left(\boldsymbol{w}; T^n w\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle önceki indirgeme bağıntısı ve varsayım gereğince

$$\begin{aligned} A(T^{n+1}w;Tw) &\leq a\max\left\{A(\boldsymbol{T^n w};T^{n+1}w),A(\boldsymbol{T^n w};Tw),A(\boldsymbol{w};T^{n+1}w)\right\} \\ &\leq a\max\left\{A(\boldsymbol{T^n w};T^{n+1}w),(n-1)\,A(\boldsymbol{T^n w};T^{n+1}w)+A(\boldsymbol{Tw};T^{n+1}w),\right. \\ &\qquad \left.(n-1)\,A(\boldsymbol{w};Tw)+A(\boldsymbol{Tw};T^{n+1}w)\right\} \\ &\leq a\max\left\{r^nA(\boldsymbol{w};Tw),(n-1)\,r^nA(\boldsymbol{w};Tw)+A(\boldsymbol{Tw};T^{n+1}w),\right. \\ &\qquad \left.(n-1)\,A(\boldsymbol{w};Tw)+A(\boldsymbol{Tw};T^{n+1}w)\right\} \\ &\leq a\,(n-1)\,A(\boldsymbol{w};Tw)+aA(\boldsymbol{Tw};T^{n+1}w) \\ &\leq \frac{(n-1)\,a}{1-a}A(\boldsymbol{w};Tw) \\ &\leq rA(\boldsymbol{w};Tw) \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak tümevarım yöntemi ile eşitsizliğin doğru olduğu ispatlanmıştır. Sabit noktanın varlığını gösterirken bir çelişki yakalamak için $Tw \neq w$ *olduğu varsayılsın. Dolayısıyla her* $n\in\mathbb{N}$ *için* $T^nw\neq w$ *olur. Buna göre* (6.13) *gereğince*

$$A(\boldsymbol{T^{n+1}w};w)\leq rA(\boldsymbol{T^n w};w)\leq\cdots\leq r^nA(\boldsymbol{Tw};w)$$

elde edilir. O halde

$$\lim_{n\to\infty}r^nA(\boldsymbol{Tw};w)=0$$

olduğundan $T^nw\to w$ *olacaktır. Bu ise çelişki olacaktır. Dolayısıyla* $Tw=w$ *olmalıdır.*
$\dfrac{1}{\sqrt{(n-1)^2+1}}\leq r<1$ *olması durumunda her* $j\in\mathbb{N}$ *için*

$$\theta(r)A(\boldsymbol{u_{n_j}};u_{n_j+1})\leq A(\boldsymbol{u_{n_j}};w)$$

olacak şekilde (n) *dizisinin bir* (n_j) *alt dizisinin olduğunun gösterilmesi gerekmektedir. Gerçekten de* (6.13) *ve Yardımcı Teorem 6.1 gereğince her* $n\in\mathbb{N}$ *için*

$$\frac{1}{1+(n-1)\,r}A(\boldsymbol{u_{2n}};u_{2n+1})\leq A(\boldsymbol{u_{2n}};w)$$

veya

$$\frac{1}{1+(n-1)\,r}A(\boldsymbol{u_{2n+1}};u_{2n+2})\leq A(\boldsymbol{u_{2n+1}};w)$$

ifadesi sağlanır. Varsayımdan dolayı

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{w};Tw) &= \lim_{j\to\infty}A(\boldsymbol{u_{n_j+1}};Tw) \\ &\leq \lim_{j\to\infty}a\max\left\{A(\boldsymbol{u_{n_j}};Tu_{n_j}),A(\boldsymbol{u_{n_j}};Tw),A(\boldsymbol{w};u_{n_j+1})\right\} \\ &\leq a\max\left\{A(\boldsymbol{w};w),A(\boldsymbol{w};Tw),A(\boldsymbol{w};w)\right\} \\ &\leq aA(\boldsymbol{w};Tw) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak açıkça $a < \frac{1}{n}$ *olduğundan varsayım hatalıdır bu nedenle* $Tw = w$ *olmalıdır. Sonuç olarak her iki durumda da* $Tw = w$ *elde edilir. Yani* w*,* T *dönüşümünün sabit noktasıdır.* T *dönüşümünün sabit noktasının tek olduğunu göstermek için* T *nin birbirinden farklı iki sabit noktasının* w *ve* v *olduğu varsayılsın. O halde açıkça* $w \neq v$ *olduğundan* (6.14) *gereğince*

$$A(\boldsymbol{w}; Tv) \leq rA(\boldsymbol{v}; Tv) = rA(\boldsymbol{v}; v) = 0$$

elde edilir. Ancak bu bir çelişkdir. O halde T *dönüşümünün sabit noktası tektir.*

Örnek 6.9 $X = [0, \infty)$ *olmak üzere,* $A : X \times X \times ... \times X \to \mathbb{R}^+$ *fonksiyonu her* $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *için*

$$A(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 0, & x_1 = x_2 = \cdots = x_n \text{ ise} \\ \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}, & diğer\ durumlarda \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre (X, A) *bir tam* $A-$*metrik uzaydır. Şimdi bu tam* $A-$*metrik uzayda* $T : X \to X$ *dönüşümü her* $x \in X$ *için*

$$Tx = \frac{x}{n+1}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu taktirde açıkça $\theta(r) \leq 1$ *olduğundan*

$$\theta(r) \max\left\{x_1, x_2, ..., \frac{x_1}{n+1}\right\} \leq \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

olup açık şekilde

$$\theta(r) A(x_1, x_2, ..., Tx_1) \leq A(x_1, x_2, ..., x_n)$$

dir. Öte yandan her $x_1, x_2, ..., x_n \in [0, \infty]$ *ve* $a \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ *için*

$$\begin{aligned} \max\left\{\frac{x_1}{n+1}, ..., \frac{x_n}{n+1}\right\} \leq\ & a \max\left[\max\left\{x_1, \frac{x_2}{n+1}\right\}, \max\left\{x_1, \frac{x_3}{n+1}\right\}, \cdots, \right. \\ & \max\left\{x_2, \frac{x_1}{n+1}\right\}, \max\left\{x_2, \frac{x_3}{n+1}\right\}, \cdots, \\ & \max\left\{x_2, \frac{x_n}{n+1}\right\}, \cdots, \max\left\{x_n, \frac{x_1}{n+1}\right\}, \\ & \left. \max\left\{x_n, \frac{x_2}{n+1}\right\}, \cdots, \max\left\{x_n, \frac{x_{n-1}}{n+1}\right\}\right] \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} A(Tx_1, Tx_2, ..., Tx_n) \leq\ & a \max\{A(\boldsymbol{x_1}; Tx_2), \cdots, A(\boldsymbol{x_1}; Tx_n), A(\boldsymbol{x_2}; Tx_1), \cdots \\ & , A(\boldsymbol{x_2}; Tx_n), \cdots, A(\boldsymbol{x_n}; Tx_1), \cdots, A(\boldsymbol{x_n}; Tx_{n-1})\} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla Teorem 6.5 in koşulları sağlanmaktadır. O halde T *dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.*

Örnek 6.10 (X,A) *Örnek 3.3 de verilen* $A-$*metrik uzay olsun. Buna göre* (X,A) *bir tam* $A-$*metrik uzay olup bu uzayda* $T:X\to X$ *dönüşümü*

$$Tx=\frac{x}{n^3}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre her $x_1,x_2,...,x_n\in X$ *için açıkça* $A-$*metrik uzaydaki genelleştirilmiş Chatterjea büzülme koşulu*

$$\begin{aligned}A\left(Tx_1,Tx_2,...,Tx_n\right) &\leq a\max\{A\left(\boldsymbol{x_1};Tx_2\right),\cdots,A\left(\boldsymbol{x_1};Tx_n\right),A\left(\boldsymbol{x_2};Tx_1\right),\cdots\\ &\quad,A\left(\boldsymbol{x_2};Tx_n\right),\cdots,A\left(\boldsymbol{x_n};Tx_1\right),\cdots,A\left(\boldsymbol{x_n};Tx_{n-1}\right)\}\end{aligned}$$

olup açıkça $n=8$ *olmak üzere* $a=\dfrac{1}{9}$ *için*

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}\left|x_i-x_j\right| &\leq a\max\left\{\left|x_1-\frac{x_2}{n^3}\right|,\left|x_1-\frac{x_3}{n^3}\right|,\cdots,\left|x_1-\frac{x_3}{n^3}\right|,\right.\\ &\quad\left|x_2-\frac{x_1}{n^3}\right|,\left|x_2-\frac{x_3}{n^3}\right|,\cdots,\left|x_2-\frac{x_n}{n^3}\right|\\ &\quad\left.\cdots,\left|x_n-\frac{x_1}{n^3}\right|,\left|x_n-\frac{x_2}{n^3}\right|,\cdots,\left|x_n-\frac{x_{n-1}}{n^3}\right|\right\}\end{aligned}$$

ifadesi sağlanır. Doğal olarak bu T *dönüşümü* $A-$*metrik uzayda bir genelleştirilmiş Chatterjea büzülme dönüşümüdür. Fakat açık bir şekilde*

$$\theta\left(r\right)A\left(x_1,x_2,...,Tx_1\right)\leq A\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$$

ifadesi $x_1=x_2=...=x_n$ *için*

$$\theta\left(r\right)\frac{\left(n-1\right)^2}{n^3}x_1\leq 0$$

olacağından sağlanmaz. Bu nedenle bu dönüşüm Teorem 6.5 in koşullarını sağlamaz.

Sıradaki teorem alışılmış metrik uzaylarda Ćirić sabit nokta teoremi olarak bilinen teoremin $A-$metrik uzay versiyonunun Suzuki tip genellemesini ifade etmektedir.

Teorem 6.6 (X,A) *bir tam* $A-$*metrik uzay ve* $T:X\to X$ *dönüşüm olsun.* $\theta:[0,1)\to\left(\dfrac{1}{n},1\right]$ *artmayan fonksiyonu Teorem 6.1 deki gibi tanımlansın. Ayrıca*

$$\begin{aligned}M_T^A\left(\boldsymbol{x};y\right) &= \max\{A(\boldsymbol{x};y),A(\boldsymbol{x};Tx),A(\boldsymbol{y};Ty),\\ &\quad\left.\frac{\left(A(\boldsymbol{x};Ty)+A(\boldsymbol{y};Tx)\right)}{n}\right\}\end{aligned}$$

olsun. Bu taktirde her $x,y\in X$ *için*

$$\theta(r)A(\boldsymbol{x};Tx)\leq A(\boldsymbol{x};y)\Longrightarrow A(\boldsymbol{T}\boldsymbol{x};Ty)\leq rM_T^A\left(\boldsymbol{x};y\right)$$

koşulunu sağlayacak şekilde $r\in[0,1)$ *varsa* T *dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.*

İspat *θ nın tanımından dolayı $\theta(r) \leq 1$ olduğundan her $x \in X$ için açıkça*

$$\theta(r)A(\boldsymbol{x};Tx) \leq A(\boldsymbol{x};Tx)$$

dir. Buna göre teoremin hipotezindeki koşul gereğince ve $A-$metriğin özellikleri gereğince her $x \in X$ için

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{Tx};T^2x) &\leq rM_T^A(\boldsymbol{x};Tx) \\ &\leq r\max\{A(\boldsymbol{x};Tx), A(\boldsymbol{x};Tx), A(\boldsymbol{Tx};T^2x), \\ &\qquad \frac{A(\boldsymbol{x};T^2x)+A(\boldsymbol{Tx};Tx)}{n}\Big\} \\ &\leq r\max\{A(\boldsymbol{x};Tx), A(\boldsymbol{Tx};T^2x), \\ &\qquad \frac{(n-1)A(\boldsymbol{x};Tx)+A(\boldsymbol{Tx};T^2x)}{n}\Big\} \\ &\leq r\max\{A(\boldsymbol{x};Tx), A(\boldsymbol{Tx};T^2x)\} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde burada dikkat edilirse sonuç olarak

$$A(\boldsymbol{Tx};T^2x) \leq rA(\boldsymbol{x};Tx) \tag{6.15}$$

bulunur. $u \in X$ alınarak $u_0 = u$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $u_n = T^n u$ olacak şekilde (u_n) dizisi tanımlansın. Açıkça $u_n = Tu_{n-1}$ olduğundan ve (6.15) ifadesinden dolayı

$$A(\boldsymbol{u_n};u_{n+1}) \leq rA(\boldsymbol{u_{n-1}};u_n) \leq r^2A(\boldsymbol{u_{n-2}};u_{n-1}) \leq \cdots \leq r^nA(\boldsymbol{u_0};u_1)$$

elde edilir. O halde $A-$metriğin özellikleri kullanılarak $m > n$ için

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{u_n};u_m) &\leq A(\boldsymbol{u_n};u_{n+1}) + \cdots + A(\boldsymbol{u_n};u_{n+1}) + A(\boldsymbol{u_m};u_{n+1}) \\ &= (n-1)A(\boldsymbol{u_n};u_{n+1}) + A(\boldsymbol{u_m};u_{n+1}) \\ &\leq (n-1)A(\boldsymbol{u_n};u_{n+1}) + (n-1)A(\boldsymbol{u_{n+1}};u_{n+2}) + A(\boldsymbol{u_{n+2}};u_m) \\ &\vdots \\ &\leq (n-1)A(\boldsymbol{u_n};u_{n+1}) + \cdots + (n-1)A(\boldsymbol{u_{m-2}};u_{m-1}) + A(\boldsymbol{u_{m-1}};u_m) \\ &\leq (n-1)[A(\boldsymbol{u_n};u_{n+1}) + \cdots + A(\boldsymbol{u_{m-1}};u_m)] \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitsizlikte (6.15) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{u_n};u_m) &\leq (n-1)\left(r^n + \cdots + r^{m-1}\right)A(\boldsymbol{u_0};u_1) \\ &\leq (n-1)\frac{r^m - r^n}{1-r}A(\boldsymbol{u_0};u_1) \\ &\leq (n-1)\frac{r^m}{1-r}A(\boldsymbol{u_0};u_1) \end{aligned}$$

elde edilir. $m \to \infty$ için işlem yapılırsa $r \in [0,1)$ olduğundan dolayı

$$A(\boldsymbol{u_n};u_m) \leq (n-1)\frac{r^m}{1-r}A(\boldsymbol{u_0};u_1) \to 0$$

olacağından (u_n) *bir* $A-$*Cauchy dizisidir. Ayrıca* (X, A) *bir tam metrik uzay olduğundan dolayı* (u_n) *dizisi bir* $w \in X$ *noktasına yakınsar. Buna göre her* $x \in X \setminus \{w\}$ *için*

$$A(\boldsymbol{w}; Tx) \leq r \max \{A(\boldsymbol{w}; x), A(\boldsymbol{x}; Tx)\} \tag{6.16}$$

olduğu gösterilmelidir. O halde bunun için $A(\boldsymbol{w}; x) > 0$ *ve* $(u_n) \to w$ *olduğundan dolayı* $n \geq n_0$ *koşulunu sağlayan her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$A(\boldsymbol{u_n}; w) \leq \frac{A(\boldsymbol{x}; w)}{2n-1}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ *vardır. Buna göre*

$$\theta(r) A(\boldsymbol{u_n}; Tu_n) \leq A(\boldsymbol{u_n}; w)$$

elde edilir. Böylelikle

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}; w) &= \lim_{n\to\infty} A(\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}; Tu_n) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} r M_T^A(\boldsymbol{x}; u_n) \\ &\leq r \max \{A(\boldsymbol{x}; w), A(\boldsymbol{w}; w), A(\boldsymbol{x}; Tx), \\ &\qquad \frac{A(\boldsymbol{x}; w) + A(\boldsymbol{w}; Tx)}{n}\Big\} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $x \neq w$ *olacak şekildeki her* $x \in X$ *için* (6.16) *ifadesi sağlanır. Şimdi* $T^0 w = w$ *olmak üzere her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$A\left(\boldsymbol{T^n w}; T^{n+1} w\right) \leq r A\left(\boldsymbol{T^{n-1} w}; T^n w\right) \tag{6.17}$$

ifadesinin doğru olduğu gösterilsin. Buna göre

$$\theta(r) A\left(\boldsymbol{T^{n-1} w}; T^n w\right) \leq A\left(\boldsymbol{T^{n-1} w}; T^n w\right)$$

olduğundan dolayı teoremin hipotezi gereğince

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{T^n w}; T^{n+1} w) &\leq r M_T^A\left(\boldsymbol{T^{n-1} w}; T^n w\right) \\ &\leq r \max \left\{A\left(\boldsymbol{T^{n-1} w}; T^n w\right), A\left(\boldsymbol{T^{n-1} w}; T^n w\right), A(\boldsymbol{T^n w}; T^{n+1} w), \right. \\ &\qquad \left. \frac{(n-1) A\left(\boldsymbol{T^{n-1} w}; T^n w\right) + A\left(\boldsymbol{T^{n-1} w}; T^{n+1} w\right)}{n}\right\} \\ &\leq r \max \left\{A\left(\boldsymbol{T^{n-1} w}; T^n w\right), A(\boldsymbol{T^n w}; T^{n+1} w)\right\} \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ *için* (6.17) *ifadesi sağlanır. O halde her* $n \in \mathbb{N}$ *için indirgeme ile*

$$A\left(\boldsymbol{T^n w}; T^{n+1} w\right) \leq r^n A(\boldsymbol{T w}; w)$$

sonucuna ulaşılır. Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$A\left(\boldsymbol{T^n w}; w\right) \leq A\left(\boldsymbol{T w}; w\right)$$

olduğu tümevarım ilkesi kullanılarak gösterilsin. Bu taktirde $n = 1$ *için ifadenin doğruluğu aşikardır. O halde bazı* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$A\left(\boldsymbol{T^n w}; w\right) \leq A\left(\boldsymbol{T w}; w\right)$$

ifadesinin doğru olduğu varsayılsın. Bu taktirde $T^n w = w$ *ise* $T^{n+1} w = Tw$ *ve*

$$A\left(\boldsymbol{T^{n+1} w}, w\right) = A\left(\boldsymbol{T w}; w\right) \leq A\left(\boldsymbol{T w}; w\right)$$

olur. Eğer $T^n w \neq w$ *ise,*

$$\begin{aligned} A\left(\boldsymbol{T^{n+1} w}, w\right) &\leq r \max\left\{A\left(\boldsymbol{w}; T^n w\right), A\left(\boldsymbol{T^n w}; T^{n+1} w\right)\right\} \\ &\leq r \max\left\{A\left(\boldsymbol{w}; Tw\right), r^n A\left(\boldsymbol{w}; Tw\right)\right\} \\ &\leq r A\left(\boldsymbol{w}; Tw\right) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla tümevarım ilkesi gereğince her $n \in \mathbb{N}$ *için eşitsizliğin doğru olduğu ispatlanmıştır. Şimdi* w *nun* T *dönüşümünün sabit noktası olduğu* $0 \leq r < \dfrac{1}{\sqrt{(n-1)^2 + 1}}$ *ve* $\dfrac{1}{\sqrt{(n-1)^2 + 1}} \leq r < 1$ *olmak üzere iki durum göz önüne alınarak gösterilecektir. Buna göre ilk durum olarak* $0 \leq r < \dfrac{1}{\sqrt{(n-1)^2 + 1}}$ *alınsın. Dikkat edilirse bu durumda* $\theta(r) \leq \dfrac{1 - (n-1)\, r}{r^2}$ *dir. İlk olarak her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$A\left(\boldsymbol{T^n w}; Tw\right) \leq r A\left(\boldsymbol{T w}; w\right) \tag{6.18}$$

ifadesi tümevarım ilkesi kullanılarak ispat edilsin. O halde $n = 1$ *için ifadenin doğruluğu aşikardır. Ayrıca* $n = 2$ *için* (6.15) *de gösterilmiştir.* $n \geq 2$ *şeklindeki bazı* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$A\left(\boldsymbol{T^n w}; Tw\right) \leq r A\left(\boldsymbol{T w}; w\right)$$

olduğu kabul edilsin. O halde $A-$*metriğin özellikleri ve üstteki kabul gereğince*

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{T w}; w) = A\left(\boldsymbol{w}; Tw\right) &\leq A\left(\boldsymbol{w}; T^n w\right) + (n-1)\, A(\boldsymbol{T w}; T^n w) \\ &\leq A\left(\boldsymbol{w}; T^n w\right) + (n-1)\, r A\left(\boldsymbol{w}; T^n w\right) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan düzenleme ile

$$\left[1 - (n-1)\, r\right] A\left(\boldsymbol{w}; Tw\right) \leq A\left(\boldsymbol{w}; T^n w\right)$$

sonucuna ulaşılır. Bu nedenle

$$\begin{aligned}\theta(r)A(\boldsymbol{T^n w};T^{n+1}w) &\leq \frac{1-(n-1)\,r}{r^2}A(\boldsymbol{T^n w};T^{n+1}w)\\ &\leq \frac{1-(n-1)\,r}{r^n}A(\boldsymbol{T^n w};T^{n+1}w)\\ &\leq \frac{1-(n-1)\,r}{r^n}r^n A\left(\boldsymbol{w};Tw\right)\\ &\leq \left(1-(n-1)\,r\right)A\left(\boldsymbol{w};Tw\right)\\ &\leq A\left(\boldsymbol{w};T^n w\right)\end{aligned}$$

bulunur. Teoremin hipotezi gereğince

$$\begin{aligned}A\left(\boldsymbol{T^{n+1}w};Tw\right) &\leq rM_T^A\left(\boldsymbol{w};T^n w\right)\\ &\leq r\max\Big\{A\left(\boldsymbol{T^n w};w\right),A\left(\boldsymbol{T^n w};T^{n+1}w\right),A\left(\boldsymbol{w};Tw\right),\\ &\qquad\frac{A(\boldsymbol{T^n w};Tw)+A\left(\boldsymbol{w};T^{n+1}w\right)}{n}\Big\}\\ &\leq r\max\Big\{rA\left(\boldsymbol{Tw};w\right),r^nA\left(\boldsymbol{Tw};w\right),A\left(\boldsymbol{Tw};w\right),\\ &\qquad\frac{rA\left(\boldsymbol{Tw};w\right)+rA\left(\boldsymbol{Tw};w\right)}{n}\Big\}\\ &\leq rA\left(\boldsymbol{Tw};w\right)\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla tümevarım ilkesi gereğince her $n\in\mathbb{N}$ *için* (6.18) *ifadesinin doğruluğu gösterilmiştir.* T *nin sabit noktasını göstermek adına bir çelişki meydana getirmek için* $Tw\neq w$ *olduğu varsayılsın. Bu durumda* (6.18) *gereğince açıkça her* $n\in\mathbb{N}$ *için* $T^nw\neq w$ *olur. O halde* (6.16) *ifadesi gereğince*

$$\begin{aligned}A\left(\boldsymbol{T^{n+1}w};w\right) &\leq r\max\left\{A\left(\boldsymbol{w};T^n w\right),A(\boldsymbol{T^n w};T^{n+1}w)\right\}\\ &= r\max\left\{A\left(\boldsymbol{T^n w};w\right),A(\boldsymbol{T^n w};T^{n+1}w)\right\}\\ &\leq r\max\left\{A\left(\boldsymbol{T^n w};w\right),r^nA(\boldsymbol{w};Tw)\right\}\end{aligned}$$

bulunur. Üstelik

$$\begin{aligned}A\left(\boldsymbol{T^n w};w\right) &\geq A(\boldsymbol{Tw};w)-(n-1)\,A\left(\boldsymbol{T^n w};Tw\right)\\ &\geq A(\boldsymbol{Tw};w)-(n-1)\,rA(\boldsymbol{Tw};w)\end{aligned}$$

olduğundan

$$A\left(\boldsymbol{T^n w};w\right)\geq\left(1-(n-1)\,r\right)A(\boldsymbol{Tw};w)$$

elde edilir. Dolayısıyla $n\geq n_1$ *koşulunu sağlayan her* $n\in\mathbb{N}$ *için*

$$A\left(\boldsymbol{T^n w};w\right)\geq r^nA(\boldsymbol{Tw};w)$$

olacak şekilde $n_1\in\mathbb{N}$ *vardır. Bu taktirde* $n\geq n_1$ *için,*

$$A\left(\boldsymbol{T^{n+1}w};w\right)\leq rA\left(\boldsymbol{T^n w};w\right)\leq\cdots\leq r^{n-n_1+1}A\left(\boldsymbol{T^{n_1}w};w\right)$$

olur. Bu ise $T^n w \to w$ *olmasını gerektirir. Ancak bu açıkça çelişki olduğundan* $Tw = w$ *olmalıdır.*

2. Durum: $\frac{1}{\sqrt{(n-1)^2+1}} \leq r < 1$ *olması durumunda her* $j \in \mathbb{N}$ *için*

$$\theta(r) A(\boldsymbol{u_{n_j}}; u_{n_j+1}) \leq A(\boldsymbol{u_{n_j}}; w)$$

olacak şekilde (n) *dizisinin bir* (n_j) *alt dizisinin olduğunun gösterilmesi gerekmektedir. Gerçekten de* (6.15) *ve Yardımcı Teorem 6.1 gereğince her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$\frac{1}{1+(n-1)\,r} A(\boldsymbol{u_{2n}}; u_{2n+1}) \leq A(\boldsymbol{u_{2n}}; w)$$

veya

$$\frac{1}{1+(n-1)\,r} A(\boldsymbol{u_{2n+1}}; u_{2n+2}) \leq A(\boldsymbol{u_{2n+1}}; w)$$

ifadesi sağlanır. Teoremin hipotezi gereğince

$$\begin{aligned}
A(\boldsymbol{w}; Tw) &= \lim_{j\to\infty} A(\boldsymbol{Tu_{nj}}; Tw) \\
&\leq \lim_{j\to\infty} r M_T^A(\boldsymbol{u_{nj}}; w) \\
&\leq r \max\Big\{A(\boldsymbol{u_{nj}}; w), A(\boldsymbol{u_{nj}}; Tu_{nj}), A(\boldsymbol{w}; Tw), \\
&\qquad \frac{(A(\boldsymbol{u_{nj}}; Tw) + A(\boldsymbol{w}; Tu_{nj}))}{n}\Big\} \\
&\leq r \max\Big\{A(\boldsymbol{w}; w), A(\boldsymbol{w}; w), A(\boldsymbol{w}; Tw), \\
&\qquad \frac{(A(\boldsymbol{w}; Tw) + A(\boldsymbol{w}; Tw))}{n}\Big\} \\
&\leq r \max\left\{A(\boldsymbol{w}; Tw), \frac{2}{n} A(\boldsymbol{w}; Tw)\right\} \\
&\leq r A(\boldsymbol{w}; Tw)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ancak açıkça $r < 1$ *olduğundan varsayım hatalıdır bu nedenle* $Tw = w$ *olmalıdır. Sonuç olarak her iki durumda da* $Tw = w$ *elde edilir. Yani* w*,* T *dönüşümünün sabit noktasıdır.* T *dönüşümünün sabit noktasının tek olduğunu göstermek için* T *nin birbirinden farklı iki sabit noktasının* w *ve* v *olduğu varsayılsın. O halde açıkça* $w \neq v$ *olduğundan* (6.16) *gereğince*

$$A(\boldsymbol{w}; Tv) \leq r A(\boldsymbol{v}; Tv) = r A(\boldsymbol{v}; v) = 0$$

elde edilir. Ancak bu bir çelişkidir. O halde T *dönüşümünün sabit noktası tektir.*

Örnek 6.11 $X = [0, \infty)$ *olmak üzere,* $A : X \times X \times ... \times X \to \mathbb{R}^+$ *fonksiyonu her* $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *için*

$$A(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 0, & x_1 = x_2 = \cdots = x_n \text{ ise} \\ \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}, & diğer\ durumlarda \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre (X, A) *bir tam* $A-$*metrik uzaydır. Şimdi bu tam* $A-$*metrik uzayda* $T : X \to X$ *dönüşümü her* $x \in X$ *için*

$$Tx = \frac{x}{2}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu taktirde açıkça $\theta(r) \leq 1$ *olduğundan*

$$\theta(r) \max\left\{x, \frac{x}{2}\right\} \leq \max\{x, y\}$$

olup açıkça

$$\theta(r) A(\boldsymbol{x}; Tx) \leq A(\boldsymbol{x}; y)$$

dir. Diğer yandan her $x, y \in [0, \infty]$ *ve* $r \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ *için*

$$\begin{aligned} \max\left\{\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right\} \quad \leq \quad & r \max\left\{\max\{x, y\}, \max\left\{x, \frac{x}{2}\right\}, \max\left\{y, \frac{y}{2}\right\}, \right. \\ & \left. \frac{\max\left\{x, \frac{y}{2}\right\} + \max\left\{y, \frac{x}{2}\right\}}{n}\right\} \end{aligned}$$

olup bu ise açıkça

$$A(\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}; Ty) \leq r M_T^A(\boldsymbol{x}; y)$$

elde edilir. Dolayısıyla Teorem 6.6 nın koşulları sağlanmaktadır. O halde T *dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.*

Örnek 6.12 (X, A) *Örnek 3.3 de verilen* $A-$*metrik uzay olsun. Buna göre* (X, A) *bir tam* $A-$*metrik uzay olup bu uzayda* $T : X \to X$ *dönüşümü*

$$Tx = \frac{x}{4}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre her $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *için açıkça* $A-$*metrik uzaydaki Ćirić büzülme koşulu*

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}; Ty) \quad \leq \quad & r \max\{A(\boldsymbol{x}; y), A(\boldsymbol{x}; Tx), A(\boldsymbol{y}; Ty), \\ & \left. \frac{(A(\boldsymbol{x}; Ty) + A(\boldsymbol{y}; Tx))}{n}\right\} \end{aligned}$$

olup açıkça $r = \left[\frac{1}{4}, 1\right)$ *için*

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)|x-y|}{4} \quad \leq \quad & r \max\left\{(n-1)|x-y|, (n-1)\frac{3|x|}{4}, (n-1)\frac{3|y|}{4}, \right. \\ & \left. \frac{(n-1)\left|x-\frac{y}{4}\right| + (n-1)\left|y-\frac{x}{4}\right|}{n}\right\} \end{aligned}$$

ifadesi sağlanır. Doğal olarak bu T dönüşümü ilgili uzayda bir Ćirić dönüşümüdür. Fakat açık bir şekilde

$$\theta(r)A(\boldsymbol{x};Tx) \leq A(\boldsymbol{x};y)$$

$x = y$ için

$$\theta\left(r\right)\left(n-1\right)\frac{3\left|x\right|}{4} \leq 0$$

olacağından sağlanmaz. Bu nedenle bu dönüşüm Teorem 6.6 nın koşullarını sağlamaz.

Sıradaki teorem alışılmış metrik uzaylarda Reich sabit nokta teoremi olarak bilinen teoremin $A-$metrik uzay versiyonunun Suzuki tip genellemesini ifade etmektedir.

Teorem 6.7 *(X, A) bir tam $A-$metrik uzay ve $T{:}X \rightarrow X$ dönüşüm olsun. $\theta{:}[0,1) \rightarrow \left(\frac{1}{n},1\right]$ artmayan fonksiyonu Teorem 6.1 deki gibi tanımlansın. Ayrıca $a_1, a_2, ..., a_n, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ olmak üzere $r = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + b}{1 - a_n}$ olsun. Bu taktirde her $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ için*

$$\theta\left(r\right)A\left(x_1, x_2, ..., Tx_1\right) \leq A\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} A\left(Tx_1, Tx_2, ..., Tx_n\right) \;\leq\; & a_1A(\boldsymbol{x_1};Tx_1) + a_2A(\boldsymbol{x_2};Tx_2) + \cdots + a_nA(\boldsymbol{x_n};Tx_n) \\ & + bA\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \end{aligned}$$

koşulunu sağlayacak şekilde $a_1 + a_2 + ... + a_n + b$ ve $na_n + b < 1$ biçiminde $a_1, a_2, ..., a_n, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ varsa T dönüşümü bir tek $w \in X$ sabit noktasına yakınsar ve her $x \in X$ için $(T^n x)$ iterasyon dizisi $w \in X$ noktasına yakınsar.

İspat *θ nın tanımından dolayı $\theta(r) \leq 1$ olduğundan her $x \in X$ için açıkça*

$$\theta(r)A(\boldsymbol{x};Tx) \leq A(\boldsymbol{x};Tx)$$

dir. Buna göre teoremin hipotezindeki koşul gereğince ve $A-$metriğin özellikleri gereğince her $x \in X$ için

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{Tx};T^2x) \;\leq\; & \left(a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}\right)A(\boldsymbol{x};Tx) + a_nA(\boldsymbol{Tx};T^2x) \\ & + bA(\boldsymbol{x};Tx) \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan düzenleme ile $r = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + b}{1 - a_n}$ olmak üzere

$$A(\boldsymbol{Tx};T^2x) \leq rA(\boldsymbol{x};Tx) \tag{6.19}$$

bulunur. $u \in X$ *alınarak* $u_0 = u$ *ve her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $u_n = T^n u$ *olacak şekilde* (u_n) *dizisi tanımlansın. Açıkça* $u_n = Tu_{n-1}$ *olduğundan ve* (6.19) *ifadesinden dolayı*

$$A\left(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}\right) \leq rA\left(\boldsymbol{u_{n-1}}; u_n\right) \leq r^2 A\left(\boldsymbol{u_{n-2}}; u_{n-1}\right) \leq \cdots \leq r^n A\left(\boldsymbol{u_0}; u_1\right)$$

elde edilir. O halde $A-$*metriğin özellikleri kullanılarak* $m > n$ *için*

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{u_n}; u_m) &\leq A\left(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}\right) + \cdots + A\left(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}\right) + A\left(\boldsymbol{u_m}; u_{n+1}\right) \\ &= (n-1)\, A\left(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}\right) + A\left(\boldsymbol{u_m}; u_{n+1}\right) \\ &\leq (n-1)\, A\left(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}\right) + (n-1)\, A\left(\boldsymbol{u_{n+1}}; u_{n+2}\right) + A\left(\boldsymbol{u_{n+2}}; u_m\right) \\ &\vdots \\ &\leq (n-1)\, A\left(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}\right) + \cdots + (n-1)\, A\left(\boldsymbol{u_{m-2}}; u_{m-1}\right) + A\left(\boldsymbol{u_{m-1}}; u_m\right) \\ &\leq (n-1)\left[A\left(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}\right) + \cdots + A\left(\boldsymbol{u_{m-1}}; u_m\right)\right] \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitsizlikte (6.19) *ifadesi kullanılırsa*

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{u_n}; u_m) &\leq (n-1)\left(r^n + \cdots + r^{m-1}\right) A\left(\boldsymbol{u_0}; u_1\right) \\ &\leq (n-1)\, \frac{r^m - r^n}{1-r} A\left(\boldsymbol{u_0}; u_1\right) \\ &\leq (n-1)\, \frac{r^m}{1-r} A\left(\boldsymbol{u_0}; u_1\right) \end{aligned}$$

elde edilir. $m \to \infty$ *için işlem yapılırsa* $r \in [0,1)$ *olduğundan dolayı*

$$A(\boldsymbol{u_n}; u_m) \leq (n-1)\, \frac{r^m}{1-r} A\left(\boldsymbol{u_0}; u_1\right) \to 0$$

olacağından (u_n) *bir* $A-$*Cauchy dizisidir. Ayrıca* (X, A) *bir tam metrik uzay olduğundan dolayı* (u_n) *dizisi bir* $w \in X$ *noktasına yakınsar. Buna göre her* $x \in X \setminus \{w\}$ *için* $r' \in [0,1)$ *olmak üzere*

$$A\left(\boldsymbol{w}; Tx\right) \leq r' A\left(\boldsymbol{w}; x\right) \tag{6.20}$$

olduğu gösterilmelidir. O halde bunun için $A\left(\boldsymbol{w}; x\right) > 0$ *ve* $(u_n) \to w$ *olduğundan dolayı* $n \geq n_0$ *koşulunu sağlayan her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$A\left(\boldsymbol{u_n}; w\right) \leq \frac{A\left(\boldsymbol{x}; w\right)}{2n-1}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ *vardır. Buna göre*

$$\begin{aligned} \theta\left(r\right) A(\boldsymbol{u_n}; Tu_n) &\leq A(\boldsymbol{u_n}; Tu_n) = A(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}) \\ &\leq (n-1)\, A\left(\boldsymbol{u_n}; w\right) + A\left(\boldsymbol{u_{n+1}}; w\right) \\ &\leq \frac{n}{2n-1} A\left(\boldsymbol{x}; w\right) \\ &= A\left(\boldsymbol{x}; w\right) - \frac{n-1}{2n-1} A\left(\boldsymbol{x}; w\right) \\ &\leq A\left(\boldsymbol{x}; w\right) - (n-1)\, A\left(\boldsymbol{u_n}; w\right) \\ &\leq A\left(\boldsymbol{u_n}; x\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre hipotez gereğince $n \geq n_0$ *için*

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{T}\boldsymbol{u_n}; Tx) &\leq (a_1 + a_2 + ... + a_{n-1})\, A(\boldsymbol{u_n}; T\boldsymbol{u_n}) + a_n A(\boldsymbol{x}; Tx) \\ &\quad + bA(\boldsymbol{u_n}; x) \end{aligned}$$

olur. Böylelikle $x \neq w$ *olacak şekildeki* $x \in X$ *için son eşitsizlikte* $n \to \infty$ *için limit alınırsa*

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{w}; Tx) &\leq (a_1 + a_2 + ... + a_{n-1})\, A(\boldsymbol{w}; Tw) + a_n A(\boldsymbol{x}; Tx) + bA(\boldsymbol{w}; x) \\ &= a_n A(\boldsymbol{x}; Tx) + bA(\boldsymbol{w}; x) \\ &\leq (n-1)\, a_n A(\boldsymbol{x}; w) + a_n A(\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}; w) + bA(\boldsymbol{x}; w) \\ &= a_n A(\boldsymbol{w}; Tx) + ((n-1)\, a_n + b)\, A(\boldsymbol{x}; w) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan düzenleme ile $r' = \dfrac{(n-1)\, a_n + b}{1 - a_n}$ *olmak üzere*

$$A(\boldsymbol{w}; Tx) \leq r' A(\boldsymbol{x}; w)$$

sonucuna ulaşılır. Doğal olarak (6.20) *ifadesi gösterilmiş olur. Şimdi her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$A(\boldsymbol{w}; T^n w) \leq A(\boldsymbol{w}; Tw) \tag{6.21}$$

olduğu tümevarım ilkesi yardımıyla gösterilsin. Bu durumda $n = 1$ *için eşitsizliğin doğruluğu aşikardır. Şimdi bazı* $n \in \mathbb{N}$ *için* (6.21) *eşitsizliğinin doğru olduğu kabul edilsin. Buna göre* $n + 1$ *için eşitsizliğin doğru olduğu gösterilmelidir. O halde* $T^n w = w$ *ise*

$$A(\boldsymbol{w}; T^{n+1} w) \leq A(\boldsymbol{w}; Tw)$$

olur. $T^n w \neq w$ *ise* (6.20) *gereğince*

$$A(\boldsymbol{w}; T^{n+1} w) \leq r' A(\boldsymbol{w}; T^n w) \leq r A(\boldsymbol{w}; Tw) < A(\boldsymbol{w}; Tw)$$

elde edilir. Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ *için tümevarım ilkesi kullanılarak* (6.21) *eşitsizliğinin doğru olduğu gösterilmiş olur. Şimdi sabit noktanın varlığını göstermek adına* $Tw \neq w$ *olduğu varsayılsın. Bu taktirde her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$A(\boldsymbol{T}\boldsymbol{w}; T^n w) \leq r A(\boldsymbol{w}; Tw) \tag{6.22}$$

olduğu tümevarım ilkesi yardımıyla gösterilsin. Buna göre $n = 1$ *için ifadenin doğruluğu aşikardır. Ayrıca* $n = 2$ *için ifadenin doğruluğu* (6.19) *gereğince açıktır. Şimdi* $n \geq 2$ *olacak şekildeki bazı* $n \in \mathbb{N}$ *için* (6.22) *ifadesinin doğru olduğu kabul edilsin. Buna göre* $A-$*metriğin özellikleri kullanılarak ve üstteki kabullenme gereğince*

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{T}\boldsymbol{w}; w) = A(\boldsymbol{w}; Tw) &\leq A(\boldsymbol{w}; T^n w) + (n-1)\, A(\boldsymbol{T}\boldsymbol{w}; T^n w) \\ &\leq A(\boldsymbol{w}; T^n w) + (n-1)\, r A(\boldsymbol{w}; T^n w) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan düzenleme ile

$$[1-(n-1)\,r]\,A\left(\boldsymbol{w};Tw\right)\leq A\left(\boldsymbol{w};T^{n}w\right)$$

sonucuna ulaşılır. Bu noktada r *nin* $0\leq r<\dfrac{1}{\sqrt{(n-1)^{2}+1}}$ *ve* $\dfrac{1}{\sqrt{(n-1)^{2}+1}}\leq r<1$ *olacak şekildeki değer aralıkları için iki durumda inceleme yapılacaktır. Buna göre ilk durum olarak* $0\leq r<\dfrac{1}{\sqrt{(n-1)^{2}+1}}$ *alınsın. Dikkat edilirse bu durumda* $\theta(r)\leq\dfrac{1-(n-1)\,r}{r^{2}}$ *dir. O halde*

$$\begin{aligned}\theta(r)A(\boldsymbol{T^{n}w};T^{n+1}w) &\leq \frac{1-(n-1)\,r}{r^{2}}A(\boldsymbol{T^{n}w};T^{n+1}w)\\ &\leq \frac{1-(n-1)\,r}{r^{n}}A(\boldsymbol{T^{n}w};T^{n+1}w)\\ &\leq \frac{1-(n-1)\,r}{r^{n}}r^{n}A\left(\boldsymbol{w};Tw\right)\\ &\leq \left(1-(n-1)\,r\right)A\left(\boldsymbol{w};Tw\right)\\ &\leq A\left(\boldsymbol{w};T^{n}w\right)\end{aligned}$$

bulunur. Teoremin hipotezi, $A-$*metriğin özellikleri ve* (6.21) *ifadesi gereğince ve ayrıca* $r=\dfrac{a_{1}+a_{2}+...+a_{n-1}+b}{1-a_{n}}$ *olup* $r\in[0,1)$ *olduğundan*

$$\begin{aligned}A(\boldsymbol{T^{n+1}w};Tw) &= A(\boldsymbol{Tw};T^{n+1}w)\\ &\leq \left(a_{1}+a_{2}+...+a_{n-1}\right)A(\boldsymbol{w};Tw)+a_{n}A(\boldsymbol{T^{n}w};T^{n+1}w)\\ &\quad +bA(w;T^{n}w)\\ &\leq \left(a_{1}+a_{2}+...+a_{n-1}\right)A(\boldsymbol{w};Tw)+a_{n}r^{n}A(\boldsymbol{w};Tw)\\ &\quad +bA(\boldsymbol{w};Tw)\\ &\leq \left(a_{1}+a_{2}+...+a_{n-1}+b\right)A(\boldsymbol{w};Tw)+a_{n}rA(\boldsymbol{w};Tw)\\ &= \left(1-a_{n}\right)A(\boldsymbol{w};Tw)+a_{n}rA(\boldsymbol{w};Tw)\\ &= rA(\boldsymbol{w};Tw)\end{aligned}$$

bulunur. Böylelikle her $n\in\mathbb{N}$ *için* (6.22) *ifadesinin doğru olduğu gösterilmiş olur. Bu halde* $Tw\neq w$ *olduğundan* (6.22) *ifadesi gereğince* $T^{n}w\neq w$ *olur. Aksi taktirde* $T^{n}w=w$ *olsa idi*

$$A(\boldsymbol{T^{n}w};w)\leq rA(\boldsymbol{w};Tw)\Longrightarrow A(\boldsymbol{w};Tw)\leq rA(\boldsymbol{w};Tw)<A(\boldsymbol{w};Tw)$$

olması gerekirdi ki bu bir çelişkidir. Bu nedenle (6.20) *gereğince*

$$A(\boldsymbol{w};T^{n+1}w)\leq r'A(\boldsymbol{w};T^{n}w)\leq\cdots\leq(r')^{n}A(\boldsymbol{w};Tw)$$

sonucuna ulaşılır. O halde son ifadede $n\to\infty$ *için limit alınırsa*

$$\lim_{n\to\infty}A(\boldsymbol{w};T^{n+1}w)=0$$

olur ki bu ise $T^n w \to w$ *olmasını gerektirir. Bu sebeple ve* (6.22) *gereğince*

$$A(\boldsymbol{Tw}; w) = \lim_{n\to\infty} A(T\boldsymbol{w}; T^n w) \leq \lim_{n\to\infty} rA(\boldsymbol{w}; Tw) = rA(\boldsymbol{w}; Tw)$$

elde edilir. Dolayısıyla $A(\boldsymbol{w}; Tw) = 0$ *olur. Bu ise açıkça varsayım ile çelişir. Doğal olarak* $Tw = w$ *olmalıdır.*

2. Durum: $\dfrac{1}{\sqrt{(n-1)^2+1}} \leq r < 1$ *olması durumunda her* $j \in \mathbb{N}$ *için*

$$\theta(r)A(\boldsymbol{u_{n_j}}; u_{n_j+1}) \leq A(\boldsymbol{u_{n_j}}; w)$$

olacak şekilde (n) *dizisinin bir* (n_j) *alt dizisinin olduğunun gösterilmesi gerekmektedir. Gerçekten de* (6.19) *ve Yardımcı Teorem 6.1 gereğince her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$\frac{1}{1+(n-1)\,r} A(\boldsymbol{u_{2n}}; u_{2n+1}) \leq A(\boldsymbol{u_{2n}}; w)$$

veya

$$\frac{1}{1+(n-1)\,r} A(\boldsymbol{u_{2n+1}}; u_{2n+2}) \leq A(\boldsymbol{u_{2n+1}}; w)$$

ifadesi sağlanır. Buna göre

$$\frac{1}{1+(n-1)\,r} A(\boldsymbol{u_{2n+1}}; u_{2n+2}) \leq A(\boldsymbol{u_{2n+1}}; w)$$

ifadesi sağlıyor ise teoremin hipotezi gereğince

$$\begin{aligned} A\left(\boldsymbol{u_{2n+1}}; Tw\right) &= A\left(\boldsymbol{T u_{2n}}; Tw\right) \\ &\leq \left((a_1 + a_2 + ... + a_{n-1})\, A(\boldsymbol{u_{2n}}; Tu_{2n}) + a_n A(\boldsymbol{w}; Tw)\right. \\ &\quad \left. + bA(\boldsymbol{u_{2n}}; w)\right) \end{aligned}$$

elde edilir Son eşitsizlkte $n \to \infty$ *için limit alınırsa*

$$A(\boldsymbol{w}; Tw) < a_n A(\boldsymbol{w}; Tw)$$

bulunur. Açıkça $a_n < 1$ *olduğundan dolayı ifade ancak*

$$A(\boldsymbol{w}; Tw) = 0$$

olması ile mümkündür. Yani $Tw = w$ *dir. Benzer şekilde*

$$\frac{1}{1+(n-1)\,r} A(\boldsymbol{u_{2n}}; u_{2n+1}) \leq A(\boldsymbol{u_{2n}}; w)$$

ifadesi sağlanıyor ise $Tw = w$ *dir. Böylelikle her iki durumda da* $w \in X$ *noktasının* T *dönüşümünün sabit noktası olduğu gösterilmiş olur. Yani* w*,* T *dönüşümünün sabit noktasıdır.* T *dönüşümünün sabit noktasının tek olduğunu göstermek için* T *nin birbirinden farklı iki sabit noktasının* w *ve* v *olduğu varsayılsın. O halde açıkça* $w \neq v$ *olduğundan* (6.20) *gereğince ve* $r' < 1$ *olduğundan*

$$A(\boldsymbol{w}; Tv) \leq r' A(\boldsymbol{w}; v) < A(\boldsymbol{w}; v)$$

elde edilir. Ancak bu bir çelişkidir. O halde T *dönüşümünün sabit noktası tektir.*

Örnek 6.13 $X = [0,\infty)$ *olmak üzere,* $A : X \times X \times ... \times X \to \mathbb{R}^+$ *fonksiyonu her* $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *için*

$$A(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 0, & x_1 = x_2 = \cdots = x_n \text{ ise} \\ \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}, & diğer\ durumlarda \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre (X, A) *bir tam* $A-$*metrik uzaydır. Şimdi bu tam* $A-$*metrik uzayda* $T : X \to X$ *dönüşümü her* $x \in X$ *için*

$$Tx = \frac{x}{3}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu taktirde açıkça $\theta(r) \leq 1$ *olduğundan*

$$\theta(r) \max\left\{x_1, x_2, ..., \frac{x_1}{3}\right\} \leq \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

olup

$$\theta(r) A(x_1, x_2, ..., Tx_1) \leq A(x_1, x_2, ..., x_n)$$

dir. Diğer yandan her $x_1, x_2, ..., x_n \in [0,\infty]$ *ve* $a_1 + a_2 + ... + a_n + b \in \left(0, \frac{1}{3n}\right)$ *için*

$$\max\left\{\frac{x_1}{3}, \frac{x_2}{3}, ..., \frac{x_n}{3}\right\} \leq a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

olup bu ise

$$\begin{aligned} A(Tx_1, Tx_2, ..., Tx_n) \leq\ & a_1A(\boldsymbol{x_1}; Tx_1) + a_2A(\boldsymbol{x_2}; Tx_2) + \cdots + a_nA(\boldsymbol{x_n}; Tx_n) \\ & + bA(x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla Teorem 6.7 nin koşulları sağlanmaktadır. O halde T *dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.*

Örnek 6.14 (X, A) *Örnek 3.3 de verilen* $A-$*metrik uzay olsun. Buna göre* (X, A) *bir tam* $A-$*metrik uzay olup bu uzayda* $T : X \to X$ *dönüşümü*

$$Tx = \frac{x}{4n}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre her $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *için açıkça* $A-$*metrik uzaydaki Reich büzülme koşulu*

$$\begin{aligned} A(Tx_1, Tx_2, ..., Tx_n) \leq\ & a_1A(\boldsymbol{x_1}; Tx_1) + a_2A(\boldsymbol{x_2}; Tx_2) + \cdots + a_nA(\boldsymbol{x_n}; Tx_n) \\ & + bA(x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned}$$

olup açıkça $b = \frac{1}{4n}$ *ve* $a_1 + a_2 + ... + a_n < 1 - \frac{1}{4n}, na_n < 1 - \frac{1}{4n}$ *için*

$$\begin{aligned} \frac{1}{4n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}|x_i - x_j| \leq\ & a_1\frac{(n-1)(4n-1)|x_1|}{4n} + a_2\frac{(n-1)(4n-1)|x_2|}{4n} + \cdots \\ & + a_n\frac{(n-1)(4n-1)|x_n|}{4n} + b(|x_1 - x_2| + \cdots + |x_{n-1} - x_n|) \end{aligned}$$

ifadesi sağlanır. Doğal olarak bu T dönüşümü ilgili uzayda bir Reich dönüşümüdür. Fakat açık bir şekilde

$$\theta(r)\, A(x_1, x_2, ..., Tx_1) \leq A(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$x_1 = x_2 = ... = x_n$ *için*

$$\theta(r)\, \frac{(n-1)^2}{4n} x_1 \leq 0$$

olacağından sağlanmaz. Bu nedenle bu dönüşüm Teorem 6.7 nin koşullarını sağlamaz.

Sıradaki teorem alışılmış metrik uzaylarda Hardy-Rogers sabit nokta teoremi olarak bilinen teoremin $A-$metrik uzay versiyonunun Suzuki tip genellemesini ifade etmektedir.

Teorem 6.8 *(X, A) bir tam $A-$metrik uzay ve $T{:}X \to X$ dönüşüm olsun. $\theta{:}[0,1) \to \left(\frac{1}{n}, 1\right]$ artmayan fonksiyonu Teorem 6.1 deki gibi tanımlansın. Ayrıca $a_{11}, a_{12}, ..., a_{nn}, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ olmak üzere*

$$r = \frac{\left(a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{(n-1)(n-1)}\right) + (n-1)\left(a_{1n} + a_{2n} + \cdots a_{(n-1)n}\right) + b}{1 - a_{nn} - \left(a_{1n} + a_{2n} + \cdots a_{(n-1)n}\right)}$$

olsun. Bu taktirde her $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ için

$$\theta(r)\, A(x_1, x_2, ..., Tx_1) \leq A(x_1, x_2, ..., x_n) \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} A(Tx_1, Tx_2, ..., Tx_n) \;\leq\; & a_{11}A(\boldsymbol{x_1}; Tx_1) + a_{22}A(\boldsymbol{x_2}; Tx_2) + \cdots + a_{nn}A(\boldsymbol{x_n}; Tx_n) \\ & + a_{12}A(\boldsymbol{x_1}; Tx_2) + \cdots + a_{1n}A(\boldsymbol{x_1}; Tx_n) + \cdots \\ & + a_{n1}A(\boldsymbol{x_n}; Tx_1) + \cdots + a_{n(n-1)}A(\boldsymbol{x_n}; Tx_{n-1}) \\ & + bA(x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned}$$

koşulunu sağlayacak şekilde $\left(a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{(n-1)(n-1)}\right) + n\left(a_{1n} + a_{2n} + \cdots a_{(n-1)n}\right) + a_{nn} + b < 1$ *ve* $na_{nn} + \left(a_{1n} + a_{2n} + \cdots a_{(n-1)n}\right) + \left(a_{1n} + a_{2n} + \cdots a_{(n-1)n}\right) + b < 1$ *biçiminde $a_{11}, a_{12}, ..., a_{nn}, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ varsa T dönüşümü bir tek $w \in X$ sabit noktasına yakınsar ve her $x \in X$ için $(T^n x)$ iterasyon dizisi $w \in X$ noktasına yakınsar.*

İspat *θ nın tanımından dolayı $\theta(r) \leq 1$ olduğundan her $x \in X$ için açıkça*

$$\theta(r) A(\boldsymbol{x}; Tx) \leq A(\boldsymbol{x}; Tx)$$

dir. Buna göre teoremin hipotezindeki koşul gereğince ve $A-$metriğin özellikleri gereğince her $x \in X$ için

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{Tx}; T^2x) \;\leq\; & \left(a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{(n-1)(n-1)}\right) A(\boldsymbol{x}; Tx) + \\ & a_{nn}A(\boldsymbol{Tx}; T^2x) + \left(a_{1n} + a_{2n} + \cdots a_{(n-1)n}\right) A(\boldsymbol{x}; T^2x) + \\ & \left(a_{n1} + a_{n2} + \cdots a_{n(n-1)}\right) A(\boldsymbol{Tx}; Tx) + bA(\boldsymbol{x}; Tx) \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan düzenleme ile

$$r=\frac{\left(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{(n-1)(n-1)}\right)+(n-1)\left(a_{1n}+a_{2n}+\cdots a_{(n-1)n}\right)+b}{1-a_{nn}-\left(a_{1n}+a_{2n}+\cdots a_{(n-1)n}\right)}$$

olmak üzere

$$A(\boldsymbol{Tx};T^2x)\leq rA(\boldsymbol{x};Tx) \tag{6.23}$$

bulunur. $u\in X$ *alınarak* $u_0=u$ *ve her* $n\in\mathbb{N}$ *için* $u_n=T^nu$ *olacak şekilde* (u_n) *dizisi tanımlansın. Açıkça* $u_n=Tu_{n-1}$ *olduğundan ve* (6.23) *ifadesinden dolayı*

$$A\left(\boldsymbol{u_n};u_{n+1}\right)\leq rA\left(\boldsymbol{u_{n-1}};u_n\right)\leq r^2A\left(\boldsymbol{u_{n-2}};u_{n-1}\right)\leq\cdots\leq r^nA\left(\boldsymbol{u_0};u_1\right)$$

elde edilir. O halde $A-$*metriğin özellikleri kullanılarak* $m>n$ *için*

$$\begin{aligned}
A(\boldsymbol{u_n};u_m) &\leq A\left(\boldsymbol{u_n};u_{n+1}\right)+\cdots+A\left(\boldsymbol{u_n};u_{n+1}\right)+A\left(\boldsymbol{u_m};u_{n+1}\right)\\
&= (n-1)A\left(\boldsymbol{u_n};u_{n+1}\right)+A\left(\boldsymbol{u_m};u_{n+1}\right)\\
&\leq (n-1)A\left(\boldsymbol{u_n};u_{n+1}\right)+(n-1)A\left(\boldsymbol{u_{n+1}};u_{n+2}\right)+A\left(\boldsymbol{u_{n+2}};u_m\right)\\
&\vdots\\
&\leq (n-1)A\left(\boldsymbol{u_n};u_{n+1}\right)+\cdots+(n-1)A\left(\boldsymbol{u_{m-2}};u_{m-1}\right)+A\left(\boldsymbol{u_{m-1}};u_m\right)\\
&\leq (n-1)\left[A\left(\boldsymbol{u_n};u_{n+1}\right)+\cdots+A\left(\boldsymbol{u_{m-1}};u_m\right)\right]
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitsizlikte (6.23) *ifadesi kullanılırsa*

$$\begin{aligned}
A(\boldsymbol{u_n};u_m) &\leq (n-1)\left(r^n+\cdots+r^{m-1}\right)A\left(\boldsymbol{u_0};u_1\right)\\
&\leq (n-1)\frac{r^m-r^n}{1-r}A\left(\boldsymbol{u_0};u_1\right)\\
&\leq (n-1)\frac{r^m}{1-r}A\left(\boldsymbol{u_0};u_1\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $m\to\infty$ *için işlem yapılırsa* $r\in[0,1)$ *olduğundan dolayı*

$$A(\boldsymbol{u_n};u_m)\leq(n-1)\frac{r^m}{1-r}A\left(\boldsymbol{u_0};u_1\right)\to 0$$

olacağından (u_n) *bir* $A-$*Cauchy dizisidir. Ayrıca* (X,A) *bir tam metrik uzay olduğundan dolayı* (u_n) *dizisi bir* $w\in X$ *noktasına yakınsar. Buna göre her* $x\in X\setminus\{w\}$ *için* $r'\in[0,1)$ *olmak üzere*

$$A\left(\boldsymbol{w};Tx\right)\leq r'A\left(\boldsymbol{w};x\right) \tag{6.24}$$

olduğu gösterilmelidir. O halde bunun için $A\left(\boldsymbol{w};x\right)>0$ *ve* $(u_n)\to w$ *olduğundan dolayı* $n\geq n_0$ *koşulunu sağlayan her* $n\in\mathbb{N}$ *için*

$$A\left(\boldsymbol{u_n};w\right)\leq\frac{A\left(\boldsymbol{x};w\right)}{2n-1}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ *vardır. Buna göre*

$$\begin{aligned}
\theta(r)\, A(\boldsymbol{u_n}; Tu_n) &\leq A(\boldsymbol{u_n}; Tu_n) = A(\boldsymbol{u_n}; u_{n+1}) \\
&\leq (n-1)\, A(\boldsymbol{u_n}; w) + A(\boldsymbol{u_{n+1}}; w) \\
&\leq \frac{n}{2n-1} A(\boldsymbol{x}; w) \\
&= A(\boldsymbol{x}; w) - \frac{n-1}{2n-1} A(\boldsymbol{x}; w) \\
&\leq A(\boldsymbol{x}; w) - (n-1)\, A(\boldsymbol{u_n}; w) \\
&\leq A(\boldsymbol{u_n}; x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre hipotez gereğince $n \geq n_0$ *için*

$$\begin{aligned}
A(\boldsymbol{u_{n+1}}; Tx) \leq \lim_{n\to\infty} &\left(a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{(n-1)(n-1)}\right) A(\boldsymbol{u_n}; Tu_n) \\
&+ a_{nn} A(\boldsymbol{x}; Tx) + \left(a_{1n} + a_{2n} + \cdots a_{(n-1)n}\right) A(\boldsymbol{u_n}; Tx) \\
&+ \left(a_{n1} + a_{n2} + \cdots a_{n(n-1)}\right) A(\boldsymbol{x}; Tu_n) + bA(\boldsymbol{u_n}; x)
\end{aligned}$$

olur. Bu aşamada son elde edilen eşitsizlikte $n \to \infty$ *için limit alınırsa*

$$\begin{aligned}
A(\boldsymbol{w}; Tx) &\leq \left(a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{(n-1)(n-1)}\right) A(\boldsymbol{w}; w) + a_{nn} A(\boldsymbol{x}; Tx) \\
&\quad + \left(a_{1n} + a_{2n} + \cdots a_{(n-1)n}\right) A(\boldsymbol{w}; Tx) \\
&\quad + \left(a_{n1} + a_{n2} + \cdots a_{n(n-1)}\right) A(\boldsymbol{x}; w) + bA(\boldsymbol{w}; x) \\
&= a_{nn} A(\boldsymbol{x}; Tx) + \left(a_{1n} + a_{2n} + \cdots a_{(n-1)n}\right) A(\boldsymbol{w}; Tx) \\
&\quad \left(a_{n1} + a_{n2} + \cdots a_{n(n-1)} + b\right) A(\boldsymbol{w}; x) \\
&\leq (n-1)\, a_{nn} A(\boldsymbol{x}; w) + \left(a_{nn} + a_{1n} + a_{2n} + \cdots a_{(n-1)n}\right) A(\boldsymbol{w}; Tx) \\
&\quad \left(a_{n1} + a_{n2} + \cdots a_{n(n-1)} + b\right) A(\boldsymbol{w}; x)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan düzenleme ile

$$r' = \frac{(n-1)\, a_{nn} + a_{n1} + a_{n2} + \cdots a_{n(n-1)} + b}{1 - a_{nn} - \left(a_{1n} + a_{2n} + \cdots a_{(n-1)n}\right)}$$

olmak üzere

$$A(\boldsymbol{w}; Tx) \leq r' A(\boldsymbol{w}; x)$$

sonucuna ulaşılır. Doğal olarak (5.24) *ifadesi gösterilmiş olur. Şimdi her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$A(\boldsymbol{w}; T^n w) \leq A(\boldsymbol{w}; Tw) \tag{6.25}$$

olduğu tümevarım ilkesi yardımıyla gösterilsin. Bu durumda $n = 1$ *için eşitsizliğin doğruluğu aşikardır. Şimdi bazı* $n \in \mathbb{N}$ *için* (6.25) *eşitsizliğinin doğru olduğu kabul edilsin. Buna göre* $n+1$ *için eşitsizliğin doğru olduğu gösterilmelidir. O halde* $T^n w = w$ *ise*

$$A(\boldsymbol{w}; T^{n+1} w) \leq A(\boldsymbol{w}; Tw)$$

olur. $T^n w \neq w$ *ise* (6.24) *gereğince*

$$A(\boldsymbol{w}; T^{n+1}w) \leq r' A(\boldsymbol{w}; T^n w) \leq r A(\boldsymbol{w}; Tw) < A(\boldsymbol{w}; Tw)$$

elde edilir. Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ *için tümevarım ilkesi kullanılarak* (6.25) *eşitsizliğinin doğru olduğu gösterilmiş olur. Şimdi sabit noktanın varlığını göstermek adına* $Tw \neq w$ *olduğu varsayılsın. Bu taktirde her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$A(\boldsymbol{Tw}; T^n w) \leq r A(\boldsymbol{w}; Tw) \tag{6.26}$$

olduğu tümevarım ilkesi yardımıyla gösterilsin. Buna göre $n = 1$ *için ifadenin doğruluğu aşikardır. Ayrıca* $n = 2$ *için ifadenin doğruluğu* (6.23) *gereğince açıktır. Şimdi* $n \geq 2$ *olacak şekildeki bazı* $n \in \mathbb{N}$ *için* (6.26) *ifadesinin doğru olduğu kabul edilsin. Buna göre* $A-$*metriğin özellikleri kullanılarak ve üstteki kabullenme gereğince*

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{Tw}; w) = A(\boldsymbol{w}; Tw) &\leq A(\boldsymbol{w}; T^n w) + (n-1) A(\boldsymbol{Tw}; T^n w) \\ &\leq A(\boldsymbol{w}; T^n w) + (n-1) r A(\boldsymbol{w}; T^n w) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan düzenleme ile

$$[1 - (n-1) r] A(\boldsymbol{w}; Tw) \leq A(\boldsymbol{w}; T^n w)$$

sonucuna ulaşılır. Bu noktada r *nin* $0 \leq r < \dfrac{1}{\sqrt{(n-1)^2 + 1}}$ *ve* $\dfrac{1}{\sqrt{(n-1)^2 + 1}} \leq r < 1$ *olacak şekildeki değer aralıkları için iki durumda inceleme yapılacaktır. Buna göre ilk durum olarak* $0 \leq r < \dfrac{1}{\sqrt{(n-1)^2 + 1}}$ *alınsın. Dikkat edilirse bu durumda* $\theta(r) \leq \dfrac{1 - (n-1) r}{r^2}$ *dir. O halde*

$$\begin{aligned} \theta(r) A(\boldsymbol{T^n w}; T^{n+1}w) &\leq \frac{1 - (n-1) r}{r^2} A(\boldsymbol{T^n w}; T^{n+1}w) \\ &\leq \frac{1 - (n-1) r}{r^n} A(\boldsymbol{T^n w}; T^{n+1}w) \\ &\leq \frac{1 - (n-1) r}{r^n} r^n A(\boldsymbol{w}; Tw) \\ &\leq (1 - (n-1) r) A(\boldsymbol{w}; Tw) \\ &\leq A(\boldsymbol{w}; T^n w) \end{aligned}$$

bulunur. Teoremin hipotezi, $A-$*metriğin özellikleri* (6.25)*,* (6.26) *ifadeleri ayrıca* $\left(a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{(n-1)(n-1)}\right) + n\left(a_{1n} + a_{2n} + \cdots a_{(n-1)n}\right) + a_{nn} + b < 1$ *ve* $n a_{nn} + \left(a_{1n} + a_{2n} + \cdots a_{(n-1)n}\right) + \left(a_{n1} + a_{n2} + \cdots a_{n(n-1)}\right) + b < 1$ *ile* $r < 1$ *ve* $r' < 1$

olduğundan

$$\begin{aligned}
A(\boldsymbol{T^{n+1}w};Tw) &\leq A(\boldsymbol{Tw};T^{n+1}w) \\
&\quad \left(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{(n-1)(n-1)}\right)A(\boldsymbol{w};Tw)+a_{nn}A(\boldsymbol{T^{n}w};T^{n+1}w) \\
&\qquad +\left(a_{1n}+a_{2n}+\cdots a_{(n-1)n}\right)A(\boldsymbol{w};T^{n+1}w) \\
&\qquad +\left(a_{n1}+a_{n2}+\cdots a_{n(n-1)}\right)A(\boldsymbol{T^{n}w};Tw)+bA(\boldsymbol{w};T^{n}w) \\
&\leq \left(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{(n-1)(n-1)}\right)A(\boldsymbol{w};Tw) \\
&\qquad +a_{nn}r^{n}A(\boldsymbol{w};Tw)+\left(a_{1n}+a_{2n}+\cdots a_{(n-1)n}\right)r'A(\boldsymbol{w};Tw) \\
&\qquad +\left(a_{n1}+a_{n2}+\cdots a_{n(n-1)}\right)rA(\boldsymbol{w};Tw)+bA(\boldsymbol{w};Tw) \\
&\leq \big[\left(1-a_{nn}-\left(a_{1n}+a_{2n}+\cdots a_{(n-1)n}\right)r\right. \\
&\qquad -(n-1)\left(a_{1n}+a_{2n}+\cdots a_{(n-1)n}\right)-b \\
&\qquad +\left[\left(1-a_{nn}-\left(a_{1n}+a_{2n}+\cdots a_{(n-1)n}\right)\right)r'\right. \\
&\qquad \left.\left.-b-(n-2)\,a_{nn}\right]r+\left(a_{1n}+a_{2n}+\cdots a_{(n-1)n}\right)r'\big]A(\boldsymbol{w};Tw) \\
&\leq \big[\left(1-a_{nn}-\left(a_{1n}+a_{2n}+\cdots a_{(n-1)n}\right)r\right. \\
&\qquad -(n-1)\left(a_{1n}+a_{2n}+\cdots a_{(n-1)n}\right)-b \\
&\qquad +(1-a_{nn})\,r'r-\left(a_{1n}+a_{2n}+\cdots a_{(n-1)n}\right)r'r \\
&\qquad \left.-br-(n-2)\,a_{nn}r+\left(a_{1n}+a_{2n}+\cdots a_{(n-1)n}\right)r'\right]A(\boldsymbol{w};Tw) \\
&\leq \big[\left(1-a_{nn}-\left(a_{1n}+a_{2n}+\cdots a_{(n-1)n}\right)r\right. \\
&\qquad -(n-1)\left(a_{1n}+a_{2n}+\cdots a_{(n-1)n}\right)-b \\
&\qquad +(1-a_{nn})\,r'r-\left(a_{1n}+a_{2n}+\cdots a_{(n-1)n}\right)r'(1-r) \\
&\qquad \left.-br-(n-2)\,a_{nn}r\right]A(\boldsymbol{w};Tw) \\
&\leq \big[\left(1-a_{nn}-\left(a_{1n}+a_{2n}+\cdots a_{(n-1)n}\right)r\right. \\
&\qquad -(n-1)\left(a_{1n}+a_{2n}+\cdots a_{(n-1)n}\right)-b \\
&\qquad +(1-a_{nn})\,r-\left(a_{1n}+a_{2n}+\cdots a_{(n-1)n}\right) \\
&\qquad \left.-br-(n-2)\,a_{nn}r\right]A(\boldsymbol{w};Tw) \\
&\leq \left(1-na_{nn}-\left(a_{1n}+a_{2n}+\cdots a_{(n-1)n}-b\right)\right)rA(\boldsymbol{w};Tw) \\
&\leq rA(\boldsymbol{w};Tw)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylelikle her $n\in\mathbb{N}$ *için* (6.26) *ifadesinin doğru olduğu gösterilmiş olur. Bu halde* $Tw\neq w$ *olduğundan* (6.26) *ifadesi gereğince* $T^{n}w\neq w$ *olur. Aksi taktirde* $T^{n}w=w$ *olsa idi*

$$A(\boldsymbol{T^{n}w};w)\leq rA(\boldsymbol{w};Tw)\Longrightarrow A(\boldsymbol{w};Tw)\leq rA(\boldsymbol{w};Tw)<A(\boldsymbol{w};Tw)$$

olması gerekirdi ki bu bir çelişkidir. Bu nedenle (6.24) *gereğince*

$$A(\boldsymbol{w};T^{n+1}w)\leq r'A(\boldsymbol{w};T^{n}w)\leq\cdots\leq(r')^{n}A(\boldsymbol{w};Tw)$$

sonucuna ulaşılır. O halde son ifadede $n \to \infty$ *için limit alınırsa*

$$\lim_{n\to\infty} A(\boldsymbol{w}; T^{n+1}w) = 0$$

olur ki bu ise $T^n w \to w$ *olmasını gerektirir. Bu sebeple ve* (6.26) *gereğince*

$$A(\boldsymbol{T}\boldsymbol{w}; w) = \lim_{n\to\infty} A(T\boldsymbol{w}; T^n w) \leq \lim_{n\to\infty} rA(\boldsymbol{w}; Tw) = rA(\boldsymbol{w}; Tw)$$

elde edilir. Dolayısıyla $A(\boldsymbol{w}; Tw) = 0$ *olur. Bu ise açıkça varsayım ile çelişir. Doğal olarak* $Tw = w$ *olmalıdır.*

2. Durum: $\dfrac{1}{\sqrt{(n-1)^2+1}} \leq r < 1$ *olması durumunda her* $j \in \mathbb{N}$ *için*

$$\theta(r)A(\boldsymbol{u_{n_j}}; u_{n_j+1}) \leq A(\boldsymbol{u_{n_j}}; w)$$

olacak şekilde (n) *dizisinin bir* (n_j) *alt dizisinin olduğunun gösterilmesi gerekmektedir. Gerçekten de* (6.23) *ve Yardımcı Teorem 6.1 gereğince her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$\frac{1}{1+(n-1)\,r} A(\boldsymbol{u_{2n}}; u_{2n+1}) \leq A(\boldsymbol{u_{2n}}; w)$$

veya

$$\frac{1}{1+(n-1)\,r} A(\boldsymbol{u_{2n+1}}; u_{2n+2}) \leq A(\boldsymbol{u_{2n+1}}; w)$$

ifadesi sağlanır. Buna göre

$$\frac{1}{1+(n-1)\,r} A(\boldsymbol{u_{2n+1}}; u_{2n+2}) \leq A(\boldsymbol{u_{2n+1}}; w)$$

ifadesi sağlıyor ise teoremin hipotezi gereğince

$$\begin{aligned} A\left(\boldsymbol{u_{2n+1}}; Tw\right) &= A\left(\boldsymbol{T}\boldsymbol{u_{2n}}; Tw\right) \\ &\leq \Big(\left(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{(n-1)(n-1)}\right) A(\boldsymbol{u_{2n}}; Tu_{2n}) \\ &\quad + a_{nn}A(\boldsymbol{w}; Tw) + \left(a_{1n}+a_{2n}+\cdots a_{(n-1)n}\right) A(\boldsymbol{u_{2n}}; Tw) \\ &\quad + \left(a_{n1}+a_{n2}+\cdots a_{n(n-1)}\right) A(w; Tu_{2n}) + bA(u_{2n}; w)\Big) \end{aligned}$$

elde edilir Son eşitsizlkte $n \to \infty$ *için limit alınırsa*

$$A(\boldsymbol{w}; Tw) < a_{nn} + a_{1n} + a_{2n} + \cdots a_{(n-1)n} < 1A(\boldsymbol{w}; Tw)$$

bulunur. Açıkça $a_{nn} + a_{1n} + a_{2n} + \cdots a_{(n-1)n} < 1$ *olduğundan dolayı ifade ancak*

$$A(\boldsymbol{w}; Tw) = 0$$

olması ile mümkündür. Yani $Tw = w$ *dir. Benzer şekilde*

$$\frac{1}{1+(n-1)\,r} A(\boldsymbol{u_{2n}}; u_{2n+1}) \leq A(\boldsymbol{u_{2n}}; w)$$

ifadesi sağlanıyor ise $Tw = w$ *dir. Böylelikle her iki durumda da* $w \in X$ *noktasının* T *dönüşümünün sabit noktası olduğu gösterilmiş olur. Yani* w*,* T *dönüşümünün sabit noktasıdır.* T *dönüşümünün sabit noktasının tek olduğunu göstermek için* T *nin birbirinden farklı iki sabit noktasının* w *ve* v *olduğu varsayılsın. O halde açıkça* $w \neq v$ *olduğundan* (6.24) *gereğince ve* $r' < 1$ *olduğundan*

$$A(\boldsymbol{w}; Tv) \leq r' A(\boldsymbol{w}; v) < A(\boldsymbol{w}; v)$$

elde edilir. Ancak bu bir çelişkidir. O halde T *dönüşümünün sabit noktası tektir.*

Örnek 6.15 $X = [0, \infty)$ *olmak üzere,* $A : X \times X \times ... \times X \to \mathbb{R}^+$ *fonksiyonu her* $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *için*

$$A(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 0, & x_1 = x_2 = \cdots = x_n \text{ ise} \\ \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}, & diğer\ durumlarda \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre (X, A) *bir tam* $A-$*metrik uzaydır. Şimdi bu tam* $A-$*metrik uzayda* $T : X \to X$ *dönüşümü her* $x \in X$ *için*

$$Tx = \frac{x}{8}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu taktirde açıkça $\theta(r) \leq 1$ *olduğundan*

$$\theta(r) \max\left\{x_1, x_2, ..., \frac{x_1}{8}\right\} \leq \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

olup

$$\theta(r) A(x_1, x_2, ..., Tx_1) \leq A(x_1, x_2, ..., x_n)$$

dir. Diğer yandan her $x_1, x_2, ..., x_n \in [0, \infty]$ *ve* $b = \frac{1}{8}, \left(a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{(n-1)(n-1)}\right) + \left(a_{1n} + a_{2n} + \cdots a_{(n-1)n}\right) + n\left(a_{1n} + a_{2n} + \cdots a_{(n-1)n}\right) + a_{nn} < \frac{7}{8}$ *ve* $na_{nn} + \left(a_{1n} + a_{2n} + \cdots a_{(n-1)n}\right) + \left(a_{1n} + a_{2n} + \cdots a_{(n-1)n}\right) < \frac{7}{8}$ *için*

$$\begin{aligned} \max\left\{\frac{x_1}{8}, \frac{x_2}{8}, ..., \frac{x_n}{8}\right\} \leq\ & a_{11}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + + a_{12} \max\left\{x_1, \frac{x_2}{8}\right\} + \cdots \\ & + a_{n(n-1)} \max\left\{x_n, \frac{x_{n-1}}{8}\right\} + b \max\{x_1, x_2, ..., x_n\} \end{aligned}$$

olup bu ise

$$\begin{aligned} A(Tx_1, Tx_2, ..., Tx_n) \leq\ & a_{11}A(\boldsymbol{x_1}; Tx_1) + a_{22}A(\boldsymbol{x_2}; Tx_2) + \cdots + a_{nn}A(\boldsymbol{x_n}; Tx_n) \\ & + a_{12}A(\boldsymbol{x_1}; Tx_2) + \cdots + a_{1n}A(\boldsymbol{x_1}; Tx_n) + \cdots \\ & + a_{n1}A(\boldsymbol{x_n}; Tx_1) + \cdots + a_{n(n-1)}A(\boldsymbol{x_n}; Tx_{n-1}) \\ & + bA(x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla Teorem 6.8 in koşulları sağlanmaktadır. O halde T *dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.*

Örnek 6.16 (X, A) *Örnek 3.3 de verilen* $A-$*metrik uzay olsun. Buna göre* (X, A) *bir tam* $A-$*metrik uzay olup bu uzayda* $T : X \to X$ *dönüşümü*

$$Tx = \frac{x}{6n}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre her $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *için açıkça* $A-$*metrik uzaydaki Hardy-Rogers büzülme koşulu*

$$\begin{aligned} A(Tx_1, Tx_2, ..., Tx_n) \leq\ & a_{11}A(\boldsymbol{x_1}; Tx_1) + a_{22}A(\boldsymbol{x_2}; Tx_2) + \cdots + a_{nn}A(\boldsymbol{x_n}; Tx_n) \\ & + a_{12}A(\boldsymbol{x_1}; Tx_2) + \cdots + a_{1n}A(\boldsymbol{x_1}; Tx_n) + \cdots \\ & + a_{n1}A(\boldsymbol{x_n}; Tx_1) + \cdots + a_{n(n-1)}A(\boldsymbol{x_n}; Tx_{n-1}) \\ & + bA(x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned}$$

olup açıkça $b = \frac{1}{6n}$ *ve* $\left(a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{(n-1)(n-1)}\right) + \left(a_{1n} + a_{2n} + \cdots a_{(n-1)n}\right) + n\left(a_{1n} + a_{2n} + \cdots a_{(n-1)n}\right) + a_{nn} < 1 - \frac{1}{6n}$ *ve* $na_{nn} + \left(a_{1n} + a_{2n} + \cdots a_{(n-1)n}\right) + \left(a_{1n} + a_{2n} + \cdots a_{(n-1)n}\right) < 1 - \frac{1}{6n}$ *için*

$$\begin{aligned} \left|\frac{x_1}{6n} - \frac{x_2}{6n}\right| + \cdots + \left|\frac{x_{n-1}}{6n} - \frac{x_n}{6n}\right| \leq\ & a_{11}\frac{(n-1)(6n-1)|x_1|}{6n} + \cdots \\ & + a_{nn}\frac{(n-1)(4n-1)|x_n|}{6n} \\ & + a_{12}\left|x_1 - \frac{x_2}{6n}\right| + \cdots \\ & + a_{n(n-1)}\left|x_n - \frac{x_{n-1}}{6n}\right| \\ & + b\left(|x_1 - x_2| + \cdots + |x_{n-1} - x_n|\right) \end{aligned}$$

ifadesi sağlanır. Doğal olarak bu T *dönüşümü ilgili uzayda bir Hardy-Rogers dönüşümüdür. Fakat açık bir şekilde*

$$\theta(r) A(x_1, x_2, ..., Tx_1) \leq A(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$x_1 = x_2 = ... = x_n$ *için*

$$\theta(r) \frac{(n-1)^2}{6n} x_1 \leq 0$$

olacağından sağlanmaz. Bu nedenle bu dönüşüm Teorem 6.8 in koşullarını sağlamaz.

Sıradaki teorem alışılmış metrik uzaylarda kapalı bağıntı sabit nokta teoremi olarak bilinen teoremin $A-$metrik uzay versiyonunun Suzuki tip genellemesini ifade etmektedir.

Tanım 6.1 $\Phi_A = \left\{F \mid F : \mathbb{R}_+^{n^2+2} \to \mathbb{R}$ *sürekli ve* $(F1), (F2), (F3)$ *ü sağlar*$\right\}$ *olsun.*
$(F1)$ F *fonksiyonu* $1.$ *değişkeni hariç tüm değişkenlerine göre artmayandır.*

$(F2)$ *Her* $u, v \geq 0$ *için*

$$F\left(u, v, \overbrace{\underbrace{v, ..., v}_{n-1 \text{ tane}}, (n-1)v + u, ..., v, ..., v, \underbrace{(n-1)v + u}_{n-1 \text{ tane}}}^{n-1 \text{ tane}}, \overbrace{0, ..., 0}^{n-1 \text{ tane}}, u\right) \leq 0$$

veya

$$F\left(u, v, \overbrace{\underbrace{0, ..., 0}_{n-1 \text{ tane}}, u, ..., 0, ..., 0, \underbrace{u}_{n-1 \text{ tane}}}^{n-1 \text{ tane}}, \overbrace{v, ..., v}^{n-1 \text{ tane}}, (n-1)v + u\right) \leq 0$$

veya

$$F(u, v, v, ..., v) \leq 0$$

ise $u \leq rv$ *olacak şekilde* $r \in [0, 1)$ *vardır.*
$(F3)$ *Her* $t > 0$ *için*

$$F\left(t, t, \overbrace{\underbrace{0, ..., 0}_{n-1 \text{ tane}}, t, ..., 0, ..., 0, \underbrace{t}_{n-1 \text{ tane}}}^{n-1 \text{ tane}}, \overbrace{t, ..., t}^{n-1 \text{ tane}}, 0\right) > 0$$

ve

$$F\left(t, 0, \overbrace{\underbrace{0, ..., 0}_{n-1 \text{ tane}}, t, ..., 0, ..., 0, t}^{n-1 \text{ tane}}\right) > 0$$

sağlanır.

Teorem 6.9 (X, A) *bir tam* $A-$*metrik uzay ve* $T{:}X \to X$ *dönüşüm olsun.* $\theta{:}[0, 1) \to \left(\frac{1}{n}, 1\right]$ *artmayan fonksiyonu Teorem 6.1 deki gibi tanımlansın ve* Φ_A *Tanım 6.1 de verilen fonksiyonların kümesini temsil etsin. Bu taktirde her* $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *için*

$$\theta(r) A(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, Tx_1) \leq A(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n) \Longrightarrow$$

$$F(A(Tx_1, ..., Tx_n), A(x_1, ..., x_n), A(\boldsymbol{x_1}; Tx_1), ..., A(\boldsymbol{x_1}; Tx_n), A(\boldsymbol{x_2}; Tx_1), \\ ..., A(\boldsymbol{x_2}; Tx_n), ..., A(\boldsymbol{x_n}; Tx_1), ..., A(\boldsymbol{x_n}; Tx_n)) \leq 0$$

koşulunu sağlayacak şekilde $F \in \Phi_A$ *varsa* T *dönüşümü bir tek* $w \in X$ *sabit noktasına yakınsar ve her* $x \in X$ *için* $(T^n x)$ *iterasyon dizisi* $w \in X$ *noktasına yakınsar.*

İspat θ *nın tanımından dolayı* $\theta(r) \leq 1$ *olduğundan her* $x \in X$ *için açıkça*

$$\theta(r) A(\boldsymbol{x}; Tx) \leq A(\boldsymbol{x}; Tx)$$

dir. Buna göre teoremin hipotezindeki koşul gereğince ve $A-$metriğin özellikleri gereğince her $x \in X$ için

$$\begin{aligned} F\left(A\left(\boldsymbol{Tx};T^2x\right),A\left(\boldsymbol{x};Tx\right),A\left(\boldsymbol{x};Tx\right),...,A\left(\boldsymbol{x};T^2x\right),\right. \\ \left.,...,A\left(\boldsymbol{Tx};Tx\right),...,A\left(\boldsymbol{Tx};T^2x\right)\right) \quad \leq \quad 0 \end{aligned}$$

olur. $F \in \Phi_A$ olup F fonksiyonu $m = 1, 2, ..., n-1$ olmak üzere $(2 + m.n)$ değişkenlerine göre artmayan olduğundan

$$\begin{aligned} F\left(A\left(\boldsymbol{Tx};T^2x\right),A\left(\boldsymbol{x};Tx\right),A\left(\boldsymbol{x};Tx\right),...,(n-1)\,A\left(\boldsymbol{x};Tx\right)\right. \\ \left.+A\left(\boldsymbol{Tx};T^2x\right),...,0,...,A\left(\boldsymbol{Tx};T^2x\right)\right) \quad \leq \quad 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $(F2)$ özelliğinden dolayı her $x \in X$ için

$$A\left(\boldsymbol{Tx};T^2x\right) \leq rA\left(\boldsymbol{x};Tx\right) \tag{6.27}$$

olmalıdır. $u \in X$ alınarak $u_0 = u$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $u_n = T^n u$ olacak şekilde (u_n) dizisi tanımlansın. Açıkça $u_n = Tu_{n-1}$ olduğundan ve (6.27) ifadesinden dolayı

$$A\left(\boldsymbol{u_n};u_{n+1}\right) \leq rA\left(\boldsymbol{u_{n-1}};u_n\right) \leq r^2A\left(\boldsymbol{u_{n-2}};u_{n-1}\right) \leq \cdots \leq r^nA\left(\boldsymbol{u_0};u_1\right)$$

elde edilir. O halde $A-$metriğin özellikleri kullanılarak $m > n$ için

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{u_n};u_m) &\leq A\left(\boldsymbol{u_n};u_{n+1}\right)+\cdots+A\left(\boldsymbol{u_n};u_{n+1}\right)+A\left(\boldsymbol{u_m};u_{n+1}\right) \\ &= (n-1)\,A\left(\boldsymbol{u_n};u_{n+1}\right)+A\left(\boldsymbol{u_m};u_{n+1}\right) \\ &\leq (n-1)\,A\left(\boldsymbol{u_n};u_{n+1}\right)+(n-1)\,A\left(\boldsymbol{u_{n+1}};u_{n+2}\right)+A\left(\boldsymbol{u_{n+2}};u_m\right) \\ &\vdots \\ &\leq (n-1)\,A\left(\boldsymbol{u_n};u_{n+1}\right)+\cdots+(n-1)\,A\left(\boldsymbol{u_{m-2}};u_{m-1}\right)+A\left(\boldsymbol{u_{m-1}};u_m\right) \\ &\leq (n-1)\left[A\left(\boldsymbol{u_n};u_{n+1}\right)+\cdots+A\left(\boldsymbol{u_{m-1}};u_m\right)\right] \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitsizlikte (6.27) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{u_n};u_m) &\leq (n-1)\left(r^n+\cdots+r^{m-1}\right)A\left(\boldsymbol{u_0};u_1\right) \\ &\leq (n-1)\,\frac{r^m-r^n}{1-r}A\left(\boldsymbol{u_0};u_1\right) \\ &\leq (n-1)\,\frac{r^m}{1-r}A\left(\boldsymbol{u_0};u_1\right) \end{aligned}$$

elde edilir. $m \to \infty$ için işlem yapılırsa $r \in [0,1)$ olduğundan dolayı

$$A(\boldsymbol{u_n};u_m) \leq (n-1)\,\frac{r^m}{1-r}A\left(\boldsymbol{u_0};u_1\right) \to 0$$

olacağından (u_n) bir $A-$Cauchy dizisidir. Ayrıca (X, A) bir tam metrik uzay olduğundan dolayı (u_n) dizisi bir $w \in X$ noktasına yakınsar. Buna göre her $x \in X \setminus \{w\}$ için

$$A\left(\boldsymbol{w};Tx\right) \leq rA\left(\boldsymbol{w};x\right) \tag{6.28}$$

olduğu gösterilmelidir. O halde bunun için $A(\boldsymbol{w};x)>0$ *ve* $(u_n)\to w$ *olduğundan dolayı* $n\geq n_0$ *koşulunu sağlayan her* $n\in\mathbb{N}$ *için*

$$A(\boldsymbol{u_n};w)\leq\frac{A(\boldsymbol{x};w)}{2n-1}$$

olacak şekilde bir $n_0\in\mathbb{N}$ *vardır. Buna göre*

$$\begin{aligned}\theta(r)\,A(\boldsymbol{u_n};Tu_n) &\leq A(\boldsymbol{u_n};Tu_n)=A(\boldsymbol{u_n};u_{n+1})\\ &\leq (n-1)\,A(\boldsymbol{u_n};w)+A(\boldsymbol{u_{n+1}};w)\\ &\leq \frac{n}{2n-1}A(\boldsymbol{x};w)\\ &= A(\boldsymbol{x};w)-\frac{n-1}{2n-1}A(\boldsymbol{x};w)\\ &\leq A(\boldsymbol{x};w)-(n-1)\,A(\boldsymbol{u_n};w)\\ &\leq A(\boldsymbol{u_n};x)\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre hipotez gereğince $n\geq n_0$ *için*

$$\begin{aligned}F(A(\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_n;Tx),A(\boldsymbol{u}_n;x),A(\boldsymbol{u}_n;u_{n+1}),...,A(\boldsymbol{u}_n;u_{n+1}),\\ A(\boldsymbol{u}_n;Tx),...,A(\boldsymbol{u}_n;u_{n+1}),...,A(\boldsymbol{u}_n;u_{n+1}),A(\boldsymbol{u}_n;Tx),\\ A(\boldsymbol{x};Tu_n),...,A(\boldsymbol{x};Tu_n),A(\boldsymbol{x};Tx)) &\leq 0\end{aligned}$$

olur. Böylelikle $x\neq w$ *olacak şekildeki* $x\in X$ *için son eşitsizlikte* $n\to\infty$ *limit alınırsa*

$$\begin{aligned}F(A(\boldsymbol{w};Tx),A(\boldsymbol{w};x),A(\boldsymbol{w};w),...,A(\boldsymbol{w};w),\\ A(\boldsymbol{w};Tx),...,A(\boldsymbol{w};w),...,A(\boldsymbol{w};w),A(\boldsymbol{w};Tx),\\ A(\boldsymbol{x};w),...,A(\boldsymbol{x};w),A(\boldsymbol{x};Tx)) &\leq 0\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned}F(A(\boldsymbol{w};Tx),A(\boldsymbol{w};x),0,...,0,\\ A(\boldsymbol{w};Tx),...,0,...,0,A(\boldsymbol{w};Tx),\\ A(\boldsymbol{x};w),...,A(\boldsymbol{x};w),A(\boldsymbol{x};Tx)) &\leq 0\end{aligned}$$

yani

$$F\Bigg(A(\boldsymbol{w};Tx),A(\boldsymbol{w};x),\overbrace{\underbrace{0,...,0}_{n-1\ tane},A(\boldsymbol{w};Tx),...,0,...,0,A(\boldsymbol{w};Tx)}^{n-1\ tane},\overbrace{A(\boldsymbol{x};w),...,A(\boldsymbol{x};w)}^{n-1\ tane},A(\boldsymbol{x};Tx)\Bigg)\leq 0$$

$$A(Tx,,...,Tx,z)\leq rA(x,...,x,z)$$

sonucuna ulaşılır. Bu durumda F *nin sağladığı* $(F2)$ *koşulu gereğince*

$$A(\boldsymbol{w};Tx)\leq A(\boldsymbol{w};x)$$

bulunur. Dolayısıyla (6.28) *gösterilmiş olur. Şimdi* w *nun* T *nin sabit noktası olduğunu göstermek adına her* $m \in \mathbb{N}$ *için* $T^m w \neq w$ *olduğu varsayılsın. Bu taktirde* (6.28) *gereğince her* $m \in \mathbb{N}$ *için*

$$A\left(\boldsymbol{w}; T^{m+1}w\right) \leq r^m A\left(\boldsymbol{w}; Tw\right)$$

elde edilir.

1.Durum $0 \leq r < \dfrac{-(n-1)+\sqrt{(n-1)^2+4}}{2}$ *olsun. Bu durumda açıkça* $\theta(r) = 1$ *dir. Buna göre* $n \geq 2$ *için*

$$A\left(\boldsymbol{T^n w}; Tw\right) \leq rA\left(\boldsymbol{w}; Tw\right) \tag{6.29}$$

eşitsizliği tümevarım ilkesi yardımıyla gösterilsin. Bu taktirde $n = 2$ *için* (6.29) *ifadesi* (6.27) *gereğince sağlanır. Şimdi* $n \geq 2$ *olacak şekildeki bazı* $n \in \mathbb{N}$ *için* (6.29) *ifadesinin doğru olduğu kabul edilsin. Buna göre* $A-$*metriğin özellikleri ve üstteki kabullenme gereğince*

$$\begin{aligned} A\left(\boldsymbol{w}; Tw\right) &\leq (n-1)\, A(\boldsymbol{w}; T^n w) + A\left(\boldsymbol{T^n w}; Tw\right) \\ &\leq (n-1)\, A(\boldsymbol{w}; T^n w) + rA\left(\boldsymbol{w}; Tw\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan düzenleme ile

$$A\left(\boldsymbol{w}; Tw\right) \leq \frac{n-1}{1-r} A(\boldsymbol{w}; T^n w)$$

bulunur. Bu nedenle

$$\begin{aligned} \theta(r) A(\boldsymbol{T^n w}; T^{n+1}w) &= A(\boldsymbol{T^n w}; T^{n+1}w) \\ &\leq r^n A(\boldsymbol{w}; Tw) \\ &\leq \frac{(n-1)\, r^n}{1-r} A(\boldsymbol{w}; T^n w) \\ &\leq \frac{(n-1)}{1-r} A(\boldsymbol{w}; T^n w) \\ &\leq A(\boldsymbol{w}; T^n w) = A\left(\boldsymbol{T^n w}; w\right) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Teoremin hipotezi gereğince

$$\begin{aligned} F\Big(A\left(\boldsymbol{T^{n+1} w}; Tw\right), A\left(\boldsymbol{T^n w}; w\right), A\left(\boldsymbol{T^n w}; T^{n+1}w\right), ..., A\left(\boldsymbol{T^n w}; T^{n+1}w\right), \\ A\left(\boldsymbol{T^n w}; Tw\right), ..., A\left(\boldsymbol{T^n w}; T^{n+1}w\right), ..., A\left(\boldsymbol{T^n w}; T^{n+1}w\right), A\left(\boldsymbol{T^n w}; Tw\right), \\ A\left(\boldsymbol{w}; T^{n+1}w\right), ..., A\left(\boldsymbol{w}; T^{n+1}w\right), A\left(\boldsymbol{w}; Tw\right)\Big) \leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadede düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned} F\Big(A\left(\boldsymbol{T^{n+1} w}; Tw\right), r^{n-1}A\left(\boldsymbol{w}; Tw\right), r^n A\left(\boldsymbol{w}; Tw\right), ..., r^n A\left(\boldsymbol{w}; Tw\right), \\ rA\left(\boldsymbol{w}; Tw\right), ..., r^n A\left(\boldsymbol{w}; Tw\right), ..., r^n A\left(\boldsymbol{w}; Tw\right), rA\left(\boldsymbol{w}; Tw\right), \\ r^n A\left(\boldsymbol{w}; Tw\right), ..., r^n A\left(\boldsymbol{w}; Tw\right), A\left(\boldsymbol{w}; Tw\right)\Big) \leq 0 \end{aligned}$$

olup F *nin 1. değişkeni hariç geri kalan tüm değişkenleri üzerinde artmayan olmasından dolayı*

$$F\left(A\left(\boldsymbol{T^{n+1} w}; Tw\right), A\left(\boldsymbol{w}; Tw\right), ..., A\left(\boldsymbol{w}; Tw\right)\right) \leq 0$$

olur. O halde F nin sağladığı $(F2)$ *koşulu gereğince*

$$A\left(\boldsymbol{T^{n+1}w};Tw\right)\leq rA\left(\boldsymbol{w};Tw\right)$$

olur. Dolayısıyla tümevarım ilkesi yardımıyla $n\geq 2$ *olacak şekildeki her* $n\in\mathbb{N}$ *için* (6.29) *ifadesi gösterilmiştir. Bu halde* (6.27) *gereğince*

$$A\left(\boldsymbol{T^{n+1}w};Tw\right)\leq rA\left(\boldsymbol{T^{n}w};w\right)\leq r^{n}A\left(\boldsymbol{w};Tw\right)$$

sonucu elde edilir. Bu ise $T^{n}w\rightarrow w$ *olmasını gerektirir. Bu açıkça bir çelişkidir. Dolayısıyla* $Tw=w$ *olmalıdır.*

2.Durum $\dfrac{-(n-1)+\sqrt{(n-1)^{2}+4}}{2}\leq r<\dfrac{1}{\sqrt{(n-1)^{2}+1}}$ *olsun. Bu durumda* $\theta\left(r\right)=\dfrac{1-(n-1)\,r}{r^{2}}$ *dir. Bu durum içinde yine* $n\geq 2$ (6.29) *ifadesinin doğruluğu tümevarım ilkesi ile gösterilmelidir. Buna göre* $n=2$ *için* (6.29) *ifadesi* (6.27) *gereğince sağlanır.* $n\geq 2$ *olacak şekildeki bazı* $n\in\mathbb{N}$ *için* (6.29) *ifadesinin doğru olduğu kabul edilsin. Buna göre* $A-$*metriğin özellikleri ve kabullenme gereğince*

$$\begin{aligned}A(\boldsymbol{Tw};w)=A\left(\boldsymbol{w};Tw\right) &\leq A\left(\boldsymbol{w};T^{n}w\right)+(n-1)\,A(\boldsymbol{Tw};T^{n}w)\\ &\leq A\left(\boldsymbol{w};T^{n}w\right)+(n-1)\,rA\left(\boldsymbol{w};T^{n}w\right)\end{aligned}$$

bulunur. Buradan düzenleme ile

$$A\left(\boldsymbol{w};Tw\right)\leq\frac{1}{1-(n-1)\,r}A\left(\boldsymbol{w};T^{n}w\right)$$

bulunur. Bu nedenle

$$\begin{aligned}\theta(r)A(\boldsymbol{T^{n}w};T^{n+1}w) &\leq \frac{1-(n-1)\,r}{r^{2}}A(\boldsymbol{T^{n}w};T^{n+1}w)\\ &\leq \frac{1-(n-1)\,r}{r^{n}}r^{n}A\left(\boldsymbol{w};Tw\right)\\ &\leq \left(1-(n-1)\,r\right)A\left(\boldsymbol{w};Tw\right)\\ &\leq A\left(\boldsymbol{w};T^{n}w\right)\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. 1. durumdaki gibi $n\geq 2$ *olacak şekildeki her* $n\in\mathbb{N}$ *için* (6.29) *ifadesi gösterilmiş olur. Tekrar benzer şekilde* (6.27) *gereğince*

$$A\left(\boldsymbol{T^{n+1}w};Tw\right)\leq rA\left(\boldsymbol{T^{n}w};w\right)\leq r^{n}A\left(\boldsymbol{w};Tw\right)$$

sonucu elde edilir. Bu ise $T^{n}w\rightarrow w$ *olmasını gerektirir. Aşikar olarak bir çelişki olup* $Tw=w$ *olmalıdır.*

3.Durum $\dfrac{1}{\sqrt{(n-1)^{2}+1}}\leq r<1$ *olsun. Bu durumda* $\theta\left(r\right)=\dfrac{1}{1+(n-1)\,r}$ *dir. Burada dikkat edilirse her* $x,y\in X$ *için*

$$\theta\left(r\right)A\left(\boldsymbol{x};Tx\right)\leq A\left(\boldsymbol{x};y\right)$$

veya

$$\theta(r) A\left(\boldsymbol{Tx}; T^2x\right) \leq A(\boldsymbol{Tx}; y)$$

olmalıdır. Gerçekten

$$\theta(r) A(\boldsymbol{x}; Tx) > A(\boldsymbol{x}; y)$$

veya

$$\theta(r) A\left(\boldsymbol{Tx}; T^2x\right) > A(\boldsymbol{Tx}; y)$$

olsa idi $A-$metriğin özellikleri ve son kabullenmeler gereğince

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{x}; Tx) = A(T\boldsymbol{x}; x) &\leq (n-1) A(\boldsymbol{Tx}; y) + A(\boldsymbol{x}; y) \\ &< \theta(r)\left((n-1) A(\boldsymbol{Tx}; T^2x) + A(\boldsymbol{x}; Tx)\right) \\ &\leq \theta(r)\left[(n-1) r + 1\right] A(\boldsymbol{x}; Tx) \\ &= A(\boldsymbol{x}; Tx) \end{aligned}$$

bulunur. Ancak bu bir çelişkidir. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\theta(r) A(\boldsymbol{u_{2n}}; Tu_{2n}) \leq A(\boldsymbol{u_{2n}}; y)$$

veya

$$\theta(r) A(\boldsymbol{u_{2n+1}}; Tu_{2n+1}) \leq A(\boldsymbol{u_{2n+1}}; y)$$

sağlanır. Eğer

$$\theta(r) A(\boldsymbol{u_{2n}}; Tu_{2n}) \leq A(\boldsymbol{u_{2n}}; w)$$

ifadesi sağlanırsa teoremin hipotezi gereğince

$$\begin{aligned} F\Bigg(& A(\boldsymbol{Tu_{2n}}; Tw), A(\boldsymbol{u_{2n}}; w), \overbrace{A(\boldsymbol{u_{2n}}; Tu_{2n}), ..., A(\boldsymbol{u_{2n}}; Tu_{2n})}^{n-1 \text{ tane}}, \\ & A(\boldsymbol{u_{2n}}; Tw), ..., A(\boldsymbol{u_{2n}}; Tu_{2n}), ..., A(\boldsymbol{u_{2n}}; Tu_{2n}), A(\boldsymbol{u_{2n}}; Tw) \\ & \underbrace{A(\boldsymbol{w}; Tu_{2n}), ..., A(\boldsymbol{w}; Tu_{2n})}_{n-1 \text{ tane}}, A(\boldsymbol{w}, Tw)\Bigg) \leq 0 \end{aligned}$$

olur. Son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\begin{aligned} F(A(\boldsymbol{w}; Tw), A(\boldsymbol{w}; w), A(\boldsymbol{w}; w), ..., A(\boldsymbol{w}; w), \\ A(\boldsymbol{w}; Tw), ..., A(\boldsymbol{w}; w), ..., A(\boldsymbol{w}; w), A(\boldsymbol{w}; Tw) \\ A(\boldsymbol{w}; w), ..., A(\boldsymbol{w}; w), A(\boldsymbol{w}, Tw)) \leq 0 \end{aligned}$$

olup buradan düzenleme ile

$$\begin{aligned} F(A(\boldsymbol{w}; Tw), 0, 0, ..., 0, \\ A(\boldsymbol{w}; Tw), ..., 0, ..., 0, A(\boldsymbol{w}; Tw) \\ 0, ..., 0, A(\boldsymbol{w}, Tw)) \leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak bu ifade $(F3)$ *ile çelişir. Benzer şekilde eğer*

$$\theta(r)\, A(\boldsymbol{u_{2n+1}}; Tu_{2n+1}) \leq A(\boldsymbol{u_{2n+1}}; w)$$

ifadesi sağlanırsa teoremin hipotezi gereğince

$$\begin{aligned} F(A(\boldsymbol{Tu_{2n+1}}; Tw), A(\boldsymbol{u_{2n+1}}; w), A(\boldsymbol{u_{2n+1}}; Tu_{2n+1}), ..., A(\boldsymbol{u_{2n+1}}; T_{2n+1}), \\ A(\boldsymbol{u_{2n+1}}; Tw), ..., A(\boldsymbol{u_{2n+1}}; T_{2n+1}), ..., A(\boldsymbol{u_{2n+1}}; T_{2n+1}), A(\boldsymbol{u_{2n+1}}; Tw) \\ A(\boldsymbol{w}; T_{2n+1}), ..., A(\boldsymbol{w}; T_{2n+1}), A(\boldsymbol{w}, Tw)) \leq 0 \end{aligned}$$

olur. Son eşitsizlikte $n \to \infty$ *için limit alınırsa*

$$\begin{aligned} F(A(\boldsymbol{w}; Tw), A(\boldsymbol{w}; w), A(\boldsymbol{w}; w), ..., A(\boldsymbol{w}; w), \\ A(\boldsymbol{w}; Tw), ..., A(\boldsymbol{w}; w), ..., A(\boldsymbol{w}; w), A(\boldsymbol{w}; Tw) \\ A(\boldsymbol{w}; w), ..., A(\boldsymbol{w}; w), A(\boldsymbol{w}, Tw)) \leq 0 \end{aligned}$$

olup buradan düzenleme ile

$$\begin{aligned} F(A(\boldsymbol{w}; Tw), 0, 0, ..., 0, \\ A(\boldsymbol{w}; Tw), ..., 0, ..., 0, A(\boldsymbol{w}; Tw) \\ 0, ..., 0, A(\boldsymbol{w}, Tw)) \leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Fakat bu ifade $(F3)$ *ile çelişir. Açıkça* $Tw = w$ *olmalıdır. Sonuç olarak her üç durumda da* $T^m w = w$ *olduğu gösterilmiştir.* $(T^n w)$ *bir Cauchy dizisi olduğundan* $Tw = w$ *dur ve* w*,* T *dönüşümünün sabit noktasıdır.* T *dönüşümünün sabit noktasının tek olduğunu göstermek için* T *nin birbirinden farklı iki sabit noktasının* w *ve* v *olduğu varsayılsın. O halde açıkça* $w \neq v$ *olduğundan* (6.28) *gereğince*

$$A(\boldsymbol{w}; v) = A(\boldsymbol{w}; Tv) \leq rA(\boldsymbol{w}; v)$$

olup $r < 1$ *olduğundan bu bir çelişkidir. O halde* T *dönüşümünün sabit noktası tektir.*

7. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında Suzuki'nin 2008 yılında tanıttığı alışılmış metrik uzaydaki Banach sabit nokta teoreminin genellemesi ele alınarak öncelikli olarak alışılmış metrik uzaylarda iyi bilinen Kannan, Bianchini, Chatterjea, genelleştirilmiş Chatterjea, Ćirić, Reich, Hardy-Rogers sabit nokta teoremlerinin Suzuki tip genellemeleri çalışılmıştır. Ayrıca sabit nokta teoremlerini genelleyen kapalı bağıntı sabit nokta ifadesinin Suzuki tip genellemesi incelenmiştir. Bunlardan literatürde olanlar literatürdeki halleri ile verilmiş olup literatürde olmayanlar ifade edilmiştir. Ayrıca tezde alışılmış metrik uzaylarda iyi bilinen Banach, Kannan, Bianchini, Chatterjea, genelleştirilmiş Chatterjea, Ćirić, Reich, Hardy-Rogers sabit nokta teoremlerinin alışılmış metrik uzayın genellemesi olan $S-$metrik uzay ve $A-$metrik uzaydaki versiyonlarının Suzuki tip genellemeleri verilmiştir. $S-$metrik uzay ve $A-$metrik uzay için sabit nokta teoremlerini genelleyen kapalı bağıntılar ortaya atılarak bu ifadelerinde Suzuki tip genellemeleri verilmiştir.

Bu bağlamda alışılmış metrik uzay, $S-$metrik uzay ve $A-$metrik uzay için yeni sabit nokta teoremleri ortaya çıkarılmıştır. Ayrıca kapalı bağıntıların ortaya çıkarılıp Suzuki tip genelleştirilmesinin verilmesi yeni sabit nokta teoremlerinin ortaya çıkmasına ışık tutacaktır.

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında T. Suzuki'nin 2008 yılında tanıttığı alışılmış metrik uzayda Banach sabit nokta teoreminin genelleştirilmesi yöntemi temel eksen alınarak, ilgili yöntem incelenmiştir. Ayrıca literatürde bu yöntemi baz alarak yapılmış genelleştirmeler araştırılmıştır. Bu bağlamda alışılmış metrik uzaylar için literatürde mevcut olmayan bazı sabit nokta teoremlerinin Suzuki tip genellemeleri verilmiştir. Üstelik alışılmış metrik uzayın birer genellemesi olan $S-$metrik uzay ve $A-$metrik uzay yapılarında alışılmış metrik uzaylarda iyi bilinen Banach, Kannan, Bianchini, Chatterjea, genelleştirilmiş Chatterjea, Ćirić, Reich, Hardy-Rogers teoremlerinin ilgili uzaylardaki versiyonlarının Suzuki tip genelleştirilmeleri verilmiştir. Her iki uzay için de kapalı bağıntı sabit nokta teoremleri teşkil edilerek, bu yapılarında Suzuki tip genellemeleri literatüre kazandırılmıştır.

$S-$metrik uzay ve $A-$metrik uzay kavramı alışılmış metrik uzay kavramının birer genelleştirilmesidir. Ancak buradaki genelleme fikri X boştan farklı olmak üzere $X \times X$ kümesi üzerinde tanımlanan alışılmış metrik kavramının $X \times X \times X$ kümesi üzerine taşınarak S-metrik ve $\underbrace{X \times \cdots \times X}_{n \text{ tane}}$ kümesi üzerine taşınarak $A-$metrik kavramının tanıtılması kadar sığ değildir. Bir küme üzerinde tanımlanan alışılmış metrik iki nokta arasındaki uzaklığı ölçerken veya bu iki noktayı veri kümeleri gibi düşünürsek bu iki veri kümesinin ne kadar farklı olduklarını ölçmektedir. Ancak $S-$metrik veya $A-$metrik kavramları bir küme üzerinde üç veya n adet nokta arasındaki uzaklığı ölçme imkanını sunar. Diğer bakış açısıyla üç veya n adet veri kümesinin birbirinden ne kadar farklı olduğu ölçülebilir. Alışılmış metrik uzay kavramı aynı anda ikiden fazla nokta için işlem yapamaz. Dolayısıyla $S-$metrik veya $A-$metrik kullanılarak üç veya n nokta için yapılan işlem alışılmış metrik kullanılarak yapılamaz. Ayrıca alışılmış metrik uzaylarda çember kavramı kapalı konveks ve simetrik yapılar olmak zorunda iken $S-$metrik uzay veya $A-$metrik uzayda böyle bir kısıtlama olmamaktadır. Dolayısıyla $S-$metrik uzay veya $A-$metrik uzay kavramları önemli olup burada gerçekleştirilen çalışmalar en az alışılmış metrik uzaydaki çalışmalar kadar değerlidir.

Kapalı bağıntılar yardımıyla yukarıda isimleri zikredilen sabit nokta teoremlerinin tek bir çatı altında toplanması mümkün olmuştur ve ayrıca bu bağıntı yardımıyla sayısız çoklukta yeni sabit nokta teoremleri üretilebilmektedir.

Bu tezde alışılmış metrik uzayın iki genelleştirilmesi olan $S-$metrik uzay ve $A-$metrik uzayda çalışılmış olup bu iki genelleştirilmiş uzay dışında da alışılmış metrik uzayın genelleştirilmesi olan metrik uzaylar mevcuttur. Doğal olarak bu tezde gerçekleştirilen çalışmalara benzer çalışmalar $S-$ ve $A-$metrik uzaylar dışındaki genelleştirilmiş metrik uzaylar içinde yapılabilir. Sonrasında ilgili genelleştirilmiş uzaylarda elde edilecek sonuçların bu tezde elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılması yapılabilir. Bunların yanı sıra ayrıca $S-$metrik ve $A-$metrik uzaylarda ele alınmamış olan diğer sabit nokta teoremlerinin Suzuki tip genelleştirmeleri araştırılabilir.

Tez çalışmasında yer alan sonuçlar kullanılarak θ fonksiyonu sayesinde genelleştirilen sabit nokta teoremlerinin $S-$metrik uzay ve $A-$metrik uzaylarda metrik tamlığı karakterize edip etmediği araştırılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Abbas, M., Ali B., Suleiman Y.I., 2015, Generalized coupled common fixed point results in partially ordered Ametric spaces. Fixed Point Theory and Applications., 2015:64.

Agarwal, R.P., Karapınar E., O'Regan, D., Francisco A., 2015, Fixed Point Theory in Metric Type Space, Springer

Altun, I., Erduran, A., 2011, A Suzuki type fixed-point theorem, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, vol:2011.

Banach, S., 1922, Sur les oprations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrales, Fund. Math., 3, 133-181.

Bianchini, R.M.T., 1972, Su un problema di S. Reich aguardante la teoría dei punti fissi, Boll. Un. Mat. Ital., 5, 03-108

Ciric, L.B., 1971, Generalized contractions and fixed-point theorems, Publications de l'Institut Mathematique, 12, 19-26.

Chatterjea, S.K., 1972, Fixed point theorem, Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences, 25, 727 –730.

Dhage, B.C., 1992, Generalized metric spaces and mapping with fixed point, Bull. Cal. Math. Soc., 84, 329–336

Dhage, B.C., 1994, Generalized metric space and topological structure II, Pure Appl. Math. Sci., 40, 37–41

Dhage, B.C., 2000, Generalized metric space and topological structure I, An. Stiint. Univ. Al.I, Cuza. Iazi, Mat (ANS) 46, 3–24

Esfahani, J., Mitrovic, Z., Radenovic, S., Sedghi, S., 2012, Suzuki-type fixed point results in S-metric type spaces, Communications on Applied Nonlinear Analysis, 201.

Erçınar G. Z., 2020, Sabit noktaların bazı geometrik özellikleri, Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

Fréchet, M., 1906, Sur quelques points du calcul fonctionnel, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 22, 1–74

Fréchet, M., 1926, Les espaces abstrait topologiquement affine, Acta Math., 47, 2552.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Gähler, S., 1963, 2Metriche raume und ihre topologische strüktüre, Math. Nachr. 26, 115–148

Gähler, S., 1966, Zur geometric 2metriche raume, Revue Roumaine de Math. Pures Appl., XI, 664–669

Gelişgen, Ö., Ermiş, T., 2019, A generalized fixed point theorem and its corollaries in A-Metric space, Preprint, Submitted to journal.

Hardy, G. E., Rogers, T. D., 1973, A generalization of a fixed point theorem of Reich, Canad. Math. Bull., 201-206.

Kannan, R., 1969, Some results on fixed points II, Am. Math. Mon., 76, 405 –408.

Kikkawa, M., Suzuki, T., 2008, Some similarity between contractions and Kannan mappings, Fixed Point Theory and Applications, vol. 2008,

Kreyszig, E., 1978, Introductory functional analysis with applications, Wiley Classics Library.

Mustafa, Z., Sims, B., 2006, A new approach to generalized metric spaces, J. Nonlinear Convex Anal. 7, 289–297

Özgür, N. Y. and Taş, N., 2016, Some generalizations of fixed point theorems on S – metric spaces, Essays in Mathematics and Its Applications in Honor of Vladimir Arnold, New York, Springer.

Özgür, N.Y. and Taş, N., 2017, Some new contractive mappings on Smetric spaces and their relationships with the mapping (S25), Math Sci, 11:7–16.

Özgür N.Y., Taş N., 2018, Some fixed-circle theorems and discontinuity at fixed circle. AIP Conference Proceedings, 1926 (1): 020048. doi: 10.1063/1.502049

Özgür, N.Y. and Taş, N., 2019, Some Fixed-Circle Theorems on Metric Spaces. Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 42, 1433–1449.

Popescu, O., 2008, Fixed point theorem in metric spaces, Bulletin of the Transilvania University of Braşov, 50, 479–482.

Popescu, O., 2009, Two fixed point theorems for generalized contractionswith constants in complete metric space, Central European Journal of Mathematics, 7, 3, 529–538.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Reich, S., 1971, Some remarks concerning contraction mappings, Canadian Mathematical Bulletin, 14, 121-124.

Rhoades, B. E., 1977, A comparison of various definitions of contractive mappings, Trans. Amer. Math. Soc., 226, 257 – 290.

Sedghi, S., Shobe, N., Aliouche, A., 2012, A generalization of fixed point theorems in S – metric spaces, Mat. Vesnik, 64 (3), 258 – 266.

Sedghi, S., Dung, N.V., 2014, Fixed point theorems on S – metric spaces, Mat. Vesnik, 66 (1), 113 – 124.

Suzuki, T., 2008, A generalized Banach contraction principle that characterizes metric completeness, Proceedings Of The American Mathematical Society, 136, 1861-1869.

Suzuki, T., 2009, A new type of fixed point theorem in metric spaces, Nonlinear Anal. 5313-5317.

Taş, N., 2017, Sabit Nokta Teoremleri Ve Çeşitli Uygulamaları, Doktora Tezi, Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.